Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

5

май

Москва

2021

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «Объединённая редакция»

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Нелинейные системы

**© 2021 г. М.Э. БУЗИКОВ (me.buzikov@physics.msu.ru),
А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

ПЕРЕХВАТ ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛИ МАШИНОЙ ДУБИНСА ЗА КРАТЧАЙШЕЕ ВРЕМЯ[1]

Задача перехвата движущейся по предписанной траектории цели машиной Дубинса сформулирована и формализована как задача оптимального управления по критерию быстродействия с произвольным направлением скорости машины при перехвате. Уточнены имеющиеся в литературе условия, при которых оптимальной траекторией является геодезическая линия, проведенная из начального положения машины в точку перехвата. Получены алгебраические уравнения для вычисления оптимального времени перехвата. На основе этих уравнений произведен синтез оптимального управления. Разработан программный модуль для построения оптимальных траекторий машины при различных траекториях движения цели.

Ключевые слова: машина Дубинса, множество достижимости, перехват подвижной цели, движение в условиях ветра, задача быстродействия, геодезическая линия.

DOI: 10.31857/S0005231021050019

1. Введение

Первые работы по поиску линии, соединяющей две заданные точки и имеющей ограниченную кривизну и минимальную длину, принадлежат А.А. Маркову. В [1] он рассмотрел четыре задачи о прокладке железнодорожных путей. Первая задача была сформулирована как поиск линии, соединяющей две точки на плоскости и имеющей кратчайшую длину и ограниченную кривизну, причем в первой точке фиксировано направление выхода этой линии. Соответствующая кратчайшая траектория называется геодезической линией. Не умаляя общности, можно считать минимальный радиус кривизны такой линии единичным.

Первая задача Маркова может быть переформулирована как задача наискорейшего достижения финальной точки подвижным объектом с постоянной по модулю скоростью и ограниченной маневренностью. В такой постановке задачу рассматривал Р. Айзекс в [2] для иллюстрации примера универсальной поверхности в задаче о шофере-убийце с неподвижным пешеходом. В [3] Ю.И. Бердышев, используя принцип максимума Понтрягина, получил полное аналитическое решение этой задачи в том случае, когда рассматриваемый объект ограниченной маневренности точечный. Помимо этого, в [3] приведено

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Молодежной научной школы Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

решение задачи о наискорейшем попадании из заданного начального состояния на окружность с нормальным к ней в конечный момент времени вектором скорости при условии достаточной удаленности начального положения объекта от центра этой окружности. Результат Ю.И. Бердышева дополняет результаты А.А. Маркова аналитическими выражениями для оптимального управления. Решение первой задачи Маркова получено и для некоторых более общих случаев: когда подвижный объект имеет форму окружности или отрезка [4, 5]; когда вводится дополнительное управление производной модуля скорости [6, 7]; когда на подвижный объект действует постоянное возмущение [8].

В [9] Л.Э. Дубинс произвел классификацию оптимальных траекторий движения в задаче поиска линии наименьшей длины и ограниченной кривизны при заданном направлении выхода из начальной точки и заданном направлении прихода в конечную точку. Подробное аналитическое решение этой задачи получил T. Pecsvaradi в [10]. Позднее этот результат был переоткрыт другой группой исследователей [11]. Кратчайшую траекторию в такой задаче называют «путь Дубинса», а соответствующий подвижный объект с ограниченной маневренностью называют «машина Дубинса» (первые аналогии с машиной проводил, по-видимому, Р. Айзекс).

Для некоторых приложений [12, 13], использующих модель машины Дубинса, важную роль занимает понятие множества достижимости. В декартовых координатах (x, y) граница множества достижимости «в момент» описана в [14], а «к моменту» — в [15]. Построение и анализ множеств достижимости в трехмерном пространстве состояний для машины Дубинса произвели В.С. Пацко и др. [16, 17]. В данной работе использованы некоторые свойства проекции на декартову плоскость множества достижимости «в момент» для машины Дубинса (замкнутость, непрерывность границ или их частей, смена связности).

В отличие от [18] в настоящей работе рассматривается не игровая задача наискорейшего перехвата подвижной цели машиной Дубинса. Предполагается, что цель движется по произвольной и заранее известной непрерывной траектории. В сравнении с [19, 20] управление считается ограниченной функцией времени.

Подобная задача встречалась сразу в нескольких работах, и авторы ограничивались лишь частичным ее решением. В [21] для игры «двух автомобилей» установлены необходимые и достаточные условия поимки цели при любых начальных условиях. В неигровом случае предписанных движений цели эти условия носят достаточный характер. В [22] установлены достаточные условия того, что оптимальной траекторией будет линия типа «дуга-прямая». Эти условия накладывают ограничения на отношение минимального радиуса кривизны траектории машины и расстояния между целью и машиной в начальный момент времени. В [7, 23] синтезировано управление для перехвата цели по геодезической линии, проведенной из начала движения машины в точку перехвата, причем полагается, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. В [24] приведен алгоритм поимки движущейся по прямой цели машиной Дубинса, которая выбирает кратчайшую траекторию из класса «дуга-прямая».

Авторы работ [25, 26] выделили сразу несколько утверждений, связанных с рассматриваемой в настоящей работе задачей. Во-первых, они установили, что если траектория цели не попадает в круги единичного радиуса, которые касаются вектора скорости машины Дубинса в начальный момент времени, то перехват за кратчайшее время осуществляется по геодезической линии. Во-вторых, если траектория все же попадает в эти круги, то возможны случаи, когда оптимальный перехват осуществляется не по геодезической линии. Также авторы приводят оценки сверху и снизу для оптимального времени перехвата.

В некоторых работах рассмотрены задачи бокового перехвата подвижной цели. В таких задачах угол перехвата фиксирован в конечный момент времени. Например, в [27] получено решение для задачи наискорейшего перехвата под прямым углом, а в [28] рассмотрен случай перехвата за минимальное время, заканчивающийся попаданием в движущуюся по окружности цель сзади. В обеих работах предполагается, что цель достаточно удалена от объекта управления в начальный момент времени.

2. Постановка задачи

Будем описывать управляемый подвижный объект моделью машины Дубинса [3, 15]. Выберем единицы измерения длины и времени так, чтобы скорость и минимальный радиус кривизны траектории машины были равны единице. В этом случае динамика машины в декартовой системе координат описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\varphi; & \dot{\varphi} = u; \\ \dot{y} = \sin\varphi; & |u(t)| \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $(x(t), y(t))$ — положение машины на декартовой плоскости, $\varphi(t)$ — угол ее скорости с осью абсцисс, $u(t)$ — управление в момент времени t. Положим все начальные условия для системы (2.1) фиксированными:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.2}$$

Пусть непрерывная вектор-функция $E(t) = (x_E(t), y_E(t))$ задает траекторию движения цели на декартовой плоскости. Терминальные условия поимки выглядят следующим образом:

$$x_T \stackrel{\text{def}}{=} x(T) = x_E(T), \quad y_T \stackrel{\text{def}}{=} y(T) = y_E(T). \tag{2.3}$$

Здесь $T \in \mathbb{R}_0^+$ — время движения из начальной точки в точку перехвата. Поставим задачу поимки цели за кратчайшее время как задачу поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций:

$$J[u] \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T dt \to \min_u .$$

Из теоремы 1 статьи [14] следует, что класса кусочно-постоянных функций будет достаточно.

Далее будут использованы обозначения из [11] для именования классов траекторий: букве C соответствует движение по дуге окружности (circle arc) единичного радиуса; букве S — движение по отрезку (straight line segment). Тогда CS — это класс траекторий, состоящих из дуги окружности единичного радиуса и отрезка, а CC — это класс траекторий, состоящих из двух дуг разных окружностей единичного радиуса. Все стыки дуг и отрезков подразумеваются гладкими. В работе будет показано, что траекторий из классов CS и CC достаточно для осуществления оптимального перехвата. На месте буквы C может стоять буква L или R для указания направления разворота (левый и правый развороты соответственно). При движении по прямой $u(t) = 0$; при L-развороте $u(t) = 1$; при R-развороте $u(t) = -1$. Круги единичного радиуса, касающиеся вектора скорости машины в начальный момент времени, будем обозначать через $\mathcal{D}_L$ и $\mathcal{D}_R$.

Подобно [14] будем обозначать через $\mathcal{R}(t)$ множество достижимости машины Дубинса в момент времени t на плоскости геометрических координат, а через $\mathcal{B}(t)$ — границу этого множества. Решение задачи с неподвижной целью полностью исследовано в [3, 14, 15] и получено подробное описание множества $\mathcal{R}(t)$ [14], поэтому вместо применения принципа максимума Понтрягина воспользуемся свойствами этого множества для синтеза оптимального управления в задаче с подвижной целью. В разделе 3 выписаны алгебраические соотношения, описывающие $\mathcal{B}(t)$; из множества $\mathcal{B}(t)$ выделено подмножество точек $\mathcal{B}_G(t)$, в которые машина попадает в момент t по геодезической линии; найден порог времени, после которого оптимальные геодезические траектории принадлежат только классу CS. В разделе 4 доказано, что, за исключением только одной ситуации, оптимальная точка перехвата лежит на $\mathcal{B}(t)$; выведены уравнения для вычисления оптимального времени перехвата; приведен алгебраический критерий того, что перехват осуществляется по геодезической линии. В разделе 5 описан алгоритм синтеза оптимального управления, опирающийся на решение нелинейных алгебраических уравнений, а также приведены результаты численного моделирования оптимального перехвата для различных траекторий движения цели.

3. Граница множества достижимости

Рассмотрим управления, ведущие на границу $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости $\mathcal{R}(t)$. В [14, с. 212] показано, что любая точка из $\mathcal{B}(t)$ может быть достигнута по траектории длины t из классов CS, CC. Управления, отвечающие этим траекториям, ведут на $\mathcal{B}(t)$ и могут быть кратко описаны с помощью следующей леммы, которая естественным образом следует из теоремы 4 статьи [14].

Лемма 1. *Каждая точка $\mathcal{B}(T)$ в момент T может быть достигнута с помощью управления*

$$u(t) = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau]; \\ -\sigma s, & t \in (\tau, T], \end{cases} \tag{3.1}$$

где $s \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $\tau \in [0, T]$, $\tau \leqslant 2\pi$.

Действительно, если $\sigma = 0$, то управлению (3.1) отвечают траектории типа CS; если $\sigma = 1$, то траектории типа CC; если $s = 1$, то начальный разворот направлен налево; если $s = -1$, то направо. Число τ называется моментом переключения управления.

Далее через $\mathcal{B}_\Lambda(t)$ будут обозначаться подмножества $\mathcal{B}(t)$, на которые в момент t можно попасть, используя управление типа $\Lambda \in \{LS, RS, LR, RL\}$. Также обозначим: $\mathcal{B}_{CS}(t) = \mathcal{B}_{LS}(t) \cup \mathcal{B}_{RS}(t)$ и $\mathcal{B}_{CC}(t) = \mathcal{B}_{LR}(t) \cup \mathcal{B}_{RL}(t)$. Дальнейшее изложение текущего раздела существенно повторяет полученные в [14] результаты, но в более удобной для задачи перехвата форме, а также уточняет их.

Рассмотрим сначала управления, ведущие на $\mathcal{B}_{CS}(T)$. Проинтегрируем уравнения динамики (2.1) при начальных условиях (2.2) для управления (3.1) при $\sigma = 0$:

$$\begin{cases} sx_T + 1 = -(T-\tau)\sin\tau + \cos\tau; \\ y_T = (T-\tau)\cos\tau + \sin\tau. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определим функцию знака следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Согласно [3, 15], для того чтобы $(x_T, y_T) \in \mathcal{B}_{CS}(T)$, требуется выполнение $s = -\operatorname{sgn} x_T$, кроме случая, когда $x_T = 0$ и $y_T < 0$. Это означает, по какую сторону от оси ординат лежит точка (x_T, y_T), туда же и должна поворачивать машина Дубинса в течение времени $\tau < 2\pi$. Если (x_T, y_T) лежит на отрицательной части оси ординат, то начальное направление поворота произвольно, т.е. $s = \pm 1$. Подставляя s в первое равенство (3.2), получим уравнение

$$|x_T| = (T-\tau)\sin\tau - (\cos\tau - 1) \geqslant 0,$$

которое при фиксированном T дает ограничение на время переключения τ. Введем обозначения:

$$x_{LS}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} -x_{RS}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} -(T-\tau)\sin\tau + (\cos\tau - 1);$$
$$y_{LS}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} y_{RS}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} (T-\tau)\cos\tau + \sin\tau.$$

С помощью этих обозначений можно выписать явный вид для подмножеств $\mathcal{B}_{CS}(T)$:

$$\mathcal{B}_{LS}(T) = \{(x_{LS}(\tau, T), y_{LS}(\tau, T)) |\ \tau \in [0, T],\ \tau < 2\pi, x_{LS}(\tau, T) \leqslant 0\};$$
$$\mathcal{B}_{RS}(T) = \{(x_{RS}(\tau, T), y_{RS}(\tau, T)) |\ \tau \in [0, T],\ \tau < 2\pi, x_{RS}(\tau, T) \geqslant 0\}.$$

Далее рассмотрим управления типа CC, ведущие на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. Проинтегрируем уравнения динамики (2.1) при начальных условиях (2.2) для управления (3.1) при $\sigma = 1$ и получим систему

$$\begin{cases} sx_T + 1 = (2 - \cos(T-\tau))\cos\tau - \sin(T-\tau)\sin\tau; \\ y_T = (2 - \cos(T-\tau))\sin\tau + \sin(T-\tau)\cos\tau. \end{cases} \tag{3.3}$$

Согласно [14, с. 211], для того чтобы $(x_T, y_T) \in \mathcal{B}_{CC}(T)$, требуется выполнение $s = \operatorname{sgn} x_T$ при $x_T \neq 0$, т.е. по какую сторону точка (x_T, y_T) лежит от оси ординат, в противоположную ей сторону должна поворачивать машина Дубинса в течение времени $\tau \leqslant \pi/2$. Если же $x_T = 0$, то направление первого поворота произвольно, т.е. $s = \pm 1$. Подставляя s в первое равенство (3.3), получим уравнение

$$|x_T| = (2 - \cos(T - \tau)) \cos\tau - \sin(T - \tau) \sin\tau - 1 \geqslant 0, \tag{3.4}$$

которое при фиксированном T дает ограничение на время переключения τ.

По траектории типа CC можно попасть на границу множества достижимости только при $T < \mathcal{T}^* = 2\pi + \arccos(23/27)$ [14, с. 215]. Множество $\mathcal{B}_{CC}(t)$ «стягивается» в некоторую точку E^* в том смысле, что начиная с некоторого момента времени t, в произвольной ε-окрестности точки E^* содержатся все точки из $\mathcal{B}_{CC}(t)$. В точку «стягивания» ведет траектория типа CC с $\tau = \arccos(1/3)$ [14, с. 215]. Вычислить положение точки E^* можно, подставив $\tau = \arccos(1/3)$ и $T = \mathcal{T}^*$ в уравнения (3.3), что даст $E^* = (0{,}2\sqrt{2}/3)$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
x_{LR}(\tau, T) &\overset{\text{def}}{=} -x_{RL}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} (2 - \cos(T - \tau)) \cos\tau - \sin(T - \tau) \sin\tau - 1;\\
y_{LR}(\tau, T) &\overset{\text{def}}{=} y_{RL}(\tau, T) \overset{\text{def}}{=} (2 - \cos(T - \tau)) \sin\tau + \sin(T - \tau) \cos\tau.
\end{aligned}$$

Согласно [14, с. 214] при $T > 2\pi$ границы внутренней полости состоят только из точек $\mathcal{B}_{CC}(T)$, поэтому точка с наименьшей ординатой из $\mathcal{B}_{CC}(T)$ лежит не ниже, чем $T - 2\pi$ (иначе в точку с наименьшей ординатой приводила бы траектория типа CS с $\tau = 2\pi$). Теперь можно выписать явный вид для подмножеств $\mathcal{B}_{CC}(T)$ при $T < \mathcal{T}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{LR}(T) = \Big\{ &(x_{LR}(\tau, T), y_{LR}(\tau, T)) \,|\, \tau \in [0, T],\\
&\qquad \tau \leqslant \frac{\pi}{2}, x_{LR}(\tau, T) \geqslant 0, y_{LR}(\tau, T) \geqslant T - 2\pi \Big\};\\
\mathcal{B}_{RL}(T) = \Big\{ &(x_{RL}(\tau, T), y_{RL}(\tau, T)) \,|\, \tau \in [0, T],\\
&\qquad \tau \leqslant \frac{\pi}{2}, x_{RL}(\tau, T) \leqslant 0, y_{RL}(\tau, T) \geqslant T - 2\pi \Big\}.
\end{aligned}$$

В иных случаях полагаем $\mathcal{B}_{CC}(T) = \varnothing$. Иллюстрация эволюции границы множества достижимости приведена на рис. 1.

Опишем множество точек $\mathcal{B}_G(T) \subset \mathcal{B}(T)$, в которые машина Дубинса попадает в момент T по геодезической линии. Согласно [1, 3], если конечная точка находится внутри кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, то геодезическая линия принадлежит классу CC, а если она лежит вне этих кругов, то классу CS. Учитывая дополнительно, что все точки $\mathcal{B}_{CS}(t)$ лежат вне кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, получаем, что

$$\mathcal{B}_G(T) = \mathcal{B}_{CS}(T) \cup \left\{ (x, y) \in \mathcal{B}_{CC}(T) \,|\, (|x| - 1)^2 + y^2 < 1 \right\}. \tag{3.5}$$

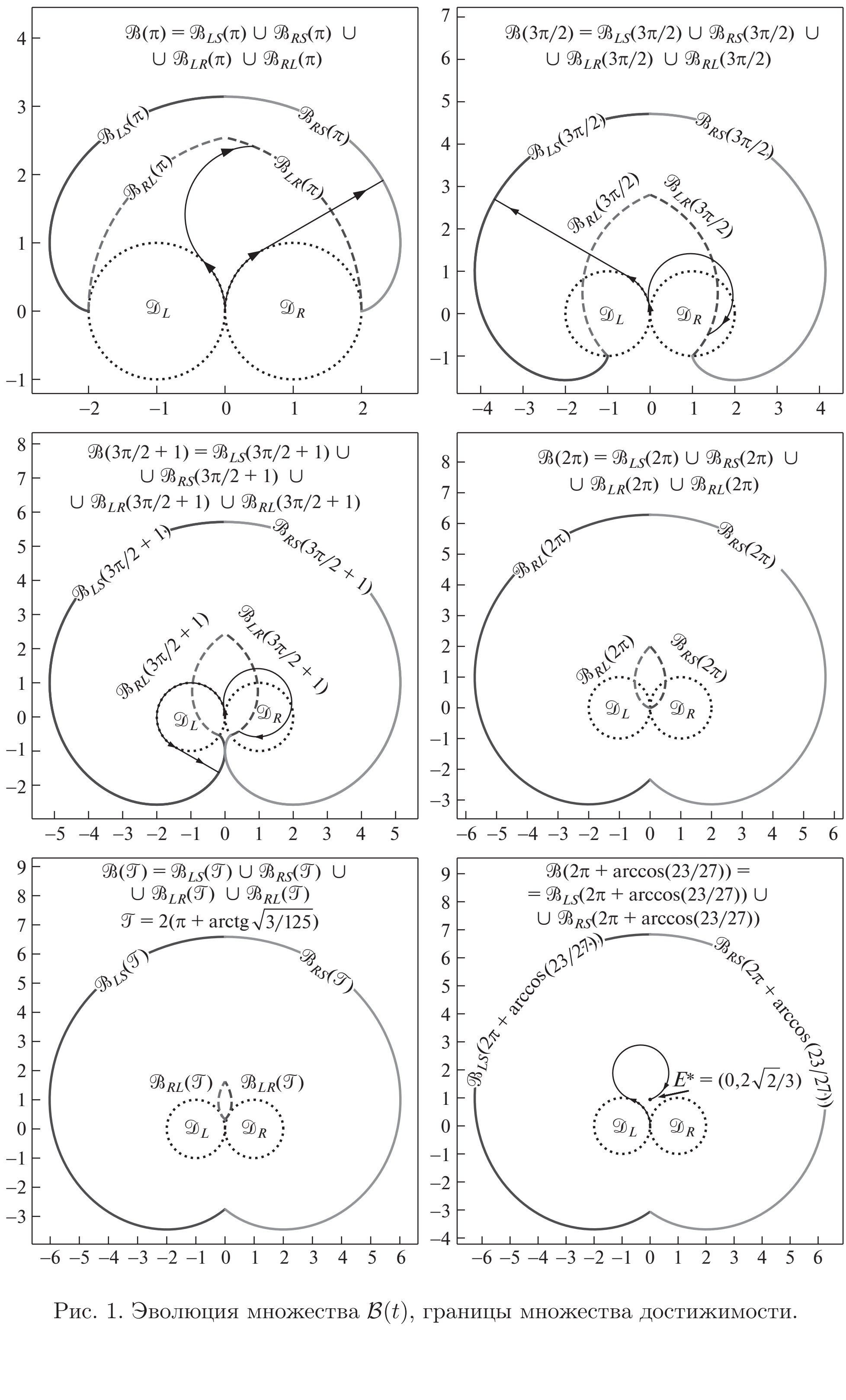

Рис. 1. Эволюция множества $\mathcal{B}(t)$, границы множества достижимости.

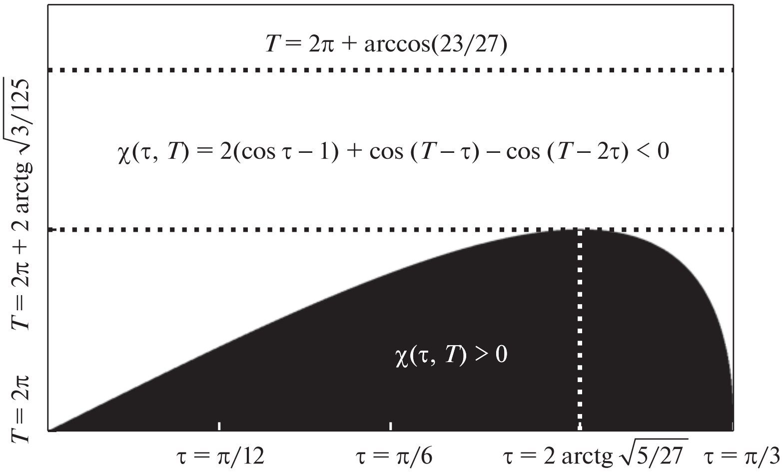

Рис. 2. Иллюстрация поведения неявно заданной функции $\chi(\tau, T) = 0$. Область, где $\chi(\tau, T) > 0$, закрашена черным, а область, где $\chi(\tau, T) < 0$, — белым.

Лемма 2. Время $\mathcal{T} = 2(\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3/125})$ является минимальным временем, для которого при любых $T \geqslant \mathcal{T}$ множество $\mathcal{B}_G(T)$ состоит только из элементов множества $\mathcal{B}_{CS}(T)$.

Доказательство леммы 2. Согласно выражению (3.5) для $\mathcal{B}_G(T)$ нужно показать, что $\{(x, y) \in \mathcal{B}_{CC}(T) | \, (|x| - 1)^2 + y^2 < 1\} = \varnothing$ для $T \geqslant \mathcal{T}$. В силу симметрии рассмотрим только случай правой полуплоскости. Ранее было отмечено, что $\tau \leqslant \pi/2$ для траекторий, ведущих на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. Если $\tau > \pi/3$, то вторая дуга траектории LR не пересечет круг $\mathcal{D}_R$ ни при каких T. Значит всякая геодезическая линия, ведущая в $\mathcal{D}_R$, имеет время переключения $\tau \leqslant \pi/3$. Подставим в

$$(|x_T| - 1)^2 + y_T^2 < 1$$

второе соотношение из (3.3) и соотношение (3.4). Получим

$$\chi(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} 2(\cos\tau - 1) + \cos(T - \tau) - \cos(T - 2\tau) > 0. \tag{3.6}$$

Так как $\mathcal{B}_{CC}(T) = \varnothing$ при $T \geqslant \mathcal{T}^*$, то нужно показать, что неравенство (3.6) не справедливо ни при каких $\tau \in [0, \pi/3]$ и $T \in [\mathcal{T}, \mathcal{T}^*]$. Функция $\chi(\tau, T)$ монотонно убывает по T при любом $\tau \in (0, \pi/3]$. Проанализируем график неявно заданной функции, определяемой уравнением $\chi(\tau, T) = 0$ относительно T (рис. 2). Эта неявная функции имеет единственный максимум на прямоугольнике $\tau \in (0, \pi/3]$, $T \in [2\pi, \mathcal{T}^*]$. Положение этого максимума определяется решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2(\cos\tau - 1) + \cos(T - \tau) = \cos(T - 2\tau); \\ -2\sin\tau + \sin(T - \tau) = 2\sin(T - 2\tau). \end{cases}$$

Ход решения этой системы на рассматриваемом прямоугольнике довольно громоздкий. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что ее решение — это пара $\tau = 2\operatorname{arctg}\sqrt{5/27}$, $T = \mathcal{T}$. Лемма доказана.

4. Решение задачи перехвата

Покажем, что оптимальная точка перехвата подвижной цели лежит на границе $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости $\mathcal{R}(t)$ за исключением одного случая. Согласно [14, с. 208] множество $\mathcal{R}(t)$ замкнуто и ограничено для всех положительных t. Граница $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости состоит из нескольких гладких частей. Эти части непрерывно связаны между собой не более чем в шести точках в каждый момент времени t (рис. 3). Для $t \in (0{,}3\pi/2+1)$ таких точек четыре: (a), (b), (c) и (d); при $t = 3\pi/2+1$ их пять: точка (e) совпадает с точкой (f); для $t \in (3\pi/2+1{,}2\pi)$ их шесть; для $t \in [2\pi,\, \mathcal{T}^*)$ их четыре: точки (c), (d) и (e) совпадают при $t = 2\pi$; при $t \geqslant \mathcal{T}^*$ их две: (a) и (f).

Многозначное отображение $\mathcal{B}$ называется полунепрерывным снизу в момент времени t_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ существует $\delta > 0$, что для любого $t : |t - t_0| < \delta$ существует точка $P \in \mathcal{B}(t)$, что $\|P - P_0\| < \varepsilon$. Многозначное отображение $\mathcal{B}$ полунепрерывно сверху в момент времени t_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любого $t : |t - t_0| < \delta$ и любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ существует точка $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$, что $\|P - P_0\| < \varepsilon$. Если многозначное отображение $\mathcal{B}$ полунепрерывно снизу и сверху в точке t_0, то оно называется непрерывным в этой точке.

Лемма 3. *Многозначное отображение $\mathcal{B}$, задающее эволюцию границы множества достижимости, является непрерывным в любой момент времени $t > 0$, кроме $t = \mathcal{T}^*$, где отображение $\mathcal{B}$ является полунепрерывным снизу.*

Доказательство леммы 3. Сначала покажем, что все точки $\mathcal{B}(t_0)$, кроме (a)–(f), имеют конечную скорость движения на плоскости для всякого $t_0 > 0$. Зафиксируем $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{B}(t_0)$ и рассмотрим два случая. В первом

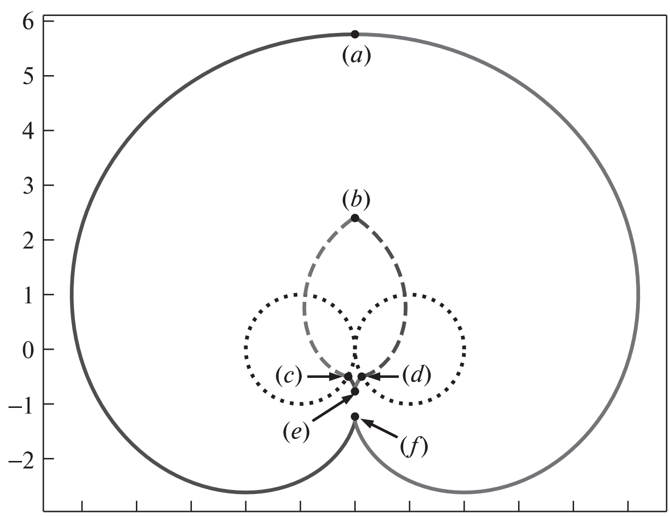

Рис. 3. Граница $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости в момент $t = 11\pi/6$. В этот момент на границе присутствуют все шесть точек сшивания гладких границ.

случае $P_0 \in \mathcal{B}_{CS}(t_0)$, причем точка P_0 не совпадает с точками (a), (c)–(f). В соответствии с (3.2) имеет место система

$$\begin{cases} x_0 = s_0(-(t_0 - \tau_0)\sin\tau_0 + \cos\tau_0 - 1); \\ y_0 = (t_0 - \tau_0)\cos\tau_0 + \sin\tau_0. \end{cases}$$

Берем частные производные по t_0 от первого и второго уравнения этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0}\right)^2 = 1.$$

Во втором случае $P_0 \in \mathcal{B}_{CC}(t_0)$, причем точка P_0 не совпадает с точками (b)–(d). В соответствии с (3.3) справедлива система

$$\begin{cases} x_0 = s_0((2 - \cos(t_0 - \tau_0))\cos\tau_0 - \sin(t_0 - \tau_0)\sin\tau_0 - 1), \\ y_0 = (2 - \cos(t_0 - \tau_0))\sin\tau_0 + \sin(t_0 - \tau_0)\cos\tau_0. \end{cases}$$

Снова берем частные производные по t_0 от первого и второго уравнений этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0}\right)^2 = 1.$$

При единичной скорости всегда найдется $\delta = \varepsilon > 0$ и точка $P \in \mathcal{B}(t)$, что при $|t - t_0| < \delta$ имеет место $\|P - P_0\| \leqslant |t - t_0| < \delta = \varepsilon$.

Теперь пусть P_0 — одна из точек (a)–(f). В силу того, что P_0 примыкает к непрерывным линиям множества $\mathcal{B}(t_0)$, для любых t_0 найдется отличная от (a)–(f) точка $P_0' \in \mathcal{B}(t_0)$ такая, что $\|P_0 - P_0'\| < \varepsilon/2$, а для P_0', в связи с доказанным выше, найдется $P \in \mathcal{B}(t)$, причем $\|P - P_0'\| < \varepsilon/2$. Пользуясь неравенством треугольника, получим $\|P - P_0\| < \varepsilon$, что доказывает полунепрерывность снизу.

Так как $\mathcal{B}(t)$ состоит из непрерывных частей, то для любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ найдется $P' \in \mathcal{B}(t)$, отличная от (a)–(f), причем $\|P - P'\| \leqslant \varepsilon/2$. Если $t_0 \neq \mathcal{T}^*$, то выбрав $\delta = \min(|\mathcal{T}^* - t_0|, \varepsilon/2)$, для любого момента $t : |t - t_0| < \delta$ и любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ найдется такая точка $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$, для которой выполняется

$$\|P - P_0\| \leqslant \|P - P'\| + \|P' - P_0\| \leqslant \varepsilon/2 + |t - t_0| < \varepsilon/2 + \delta \leqslant \varepsilon,$$

что доказывает полунепрерывность сверху для всех $t_0 > 0$, кроме $t_0 = \mathcal{T}^*$. В момент $t_0 = \mathcal{T}^*$ пропадает множество $\mathcal{B}_{CC}(t_0)$, которое отделено от $\mathcal{B}_{CS}(t_0)$, поэтому полунепрерывности сверху в этот момент нет. Лемма доказана.

Утверждение 1. *Если оптимальный перехват цели возможен в момент времени T, то оптимальная точка перехвата лежит на $\mathcal{B}(T)$, кроме случая, когда оптимальная точка перехвата $E^* = (0, 2\sqrt{2}/3)$, а оптимальное время перехвата $T = \mathcal{T}^*$.*

Доказательство утверждения 1. Если $E(T) = E^*$ и $T = \mathcal{T}^*$, то оптимальный перехват осуществляется по траектории типа RL или LR, но происходит не на $\mathcal{B}(T)$, так как в силу приведенного в разделе 3 описания границы множества достижимости $E^* \notin \mathcal{B}(\mathcal{T}^*)$. Пусть теперь $E(T) \neq E^*$ или $T \neq \mathcal{T}^*$. Предположим, что $E(T)$ является внутренней точкой для $\mathcal{R}(T)$. Тогда найдется шар $\mathcal{O}$ с центром в точке $E(T)$, который полностью лежит внутри $\mathcal{R}(T)$ и каждая точка границы такого шара удалена от $\mathcal{B}(T)$ не менее чем на $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 и «стягивания» $\mathcal{B}_{CC}(t)$ к $E^* \neq E(T)$ при $t \to \mathcal{T}^*$ найдется такое $\delta > 0$, что для всяких $t \in (T - \delta, T + \delta)$ точки границы $\mathcal{B}(t)$ не попадут в этот шар, поэтому $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}(t)$. В силу непрерывности $E(t)$ можно выбрать δ настолько малым, чтобы выполнялось $E(t) \in \mathcal{O}$. Значит $E(t) \in \mathcal{R}(t)$, что противоречит тому, что T — минимальное время перехвата, а следовательно, $E(T)$ лежит на границе $\mathcal{R}(T)$. Утверждение доказано.

Получим алгебраические уравнения для определения оптимального времени перехвата. Если оптимальный перехват осуществляется по траектории типа CS, то в соответствии с (2.3) и (3.2) оптимальные τ и T определяются следующей системой:

$$\begin{cases} 1 - |x_E(T)| = -(T - \tau)\sin\tau + \cos\tau; \\ y_E(T) = (T - \tau)\cos\tau + \sin\tau. \end{cases} \tag{4.1}$$

Возведем выражения (4.1) в квадрат и просуммируем их, тогда после нетрудных преобразований и учета того, что $T \geqslant \tau$, получим

$$T - \tau = \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}. \tag{4.2}$$

Введем обозначения

$$\alpha_C(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - |x_E(T)| + y_E(T)\sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}}{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)},$$

$$\alpha_S(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_E(T) - (1 - |x_E(T)|)\sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}}{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)},$$

тогда после подстановки (4.2) в (4.1), решая систему (4.1) относительно $\tau \in \in [0, 2\pi)$, получим

$$\tau = \theta_{CS}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \arccos \alpha_C(T), & \alpha_S(T) \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos \alpha_C(T), & \alpha_S(T) < 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\tau = \theta_{CS}(T)$ в (4.2), получим уравнение для определения оптимального времени перехвата. Таким образом, оптимальное время перехвата $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]$ является наименьшим неотрицательным корнем следующего уравнения относительно T

$$T - \theta_{CS}(T) - \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1} = 0. \tag{4.3}$$

Если данное уравнение не имеет неотрицательных корней, то будем полагать, что $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] = +\infty$. Для некоторых T в левой части выражения (4.3) могут возникать некорректные операции: деление на ноль, извлечение корня из отрицательного числа и т.п. В таких случаях оптимальная поимка в момент T по траектории типа CS невозможна. Например, если предположить, что оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, то оптимальный перехват не может быть осуществлен по траектории типа CS, так как при вычислении левой части (4.3) возникнет корень из отрицательного числа, поэтому в этом случае полагаем, что $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] = +\infty$.

Теперь проведем аналогичные рассуждения для случая оптимального перехвата по траектории типа CC. В соответствии с (2.3) и (3.3) оптимальные τ и T определяются системой

$$\begin{cases} |x_E(T)| + 1 = (2 - \cos(T - \tau)) \cos\tau - \sin(T - \tau) \sin\tau, \\ y_E(T) = (2 - \cos(T - \tau)) \sin\tau + \sin(T - \tau) \cos\tau. \end{cases} \tag{4.4}$$

Возведем выражения (4.4) в квадрат и просуммируем их, тогда после нетрудных преобразований получим

$$\cos(T - \tau) = \frac{5 - (1 + |x_E(T)|)^2 - y_E^2(T)}{4} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(T). \tag{4.5}$$

После подстановки (4.5) в (4.4), решая систему (4.4) относительно $\tau \in [0, \pi/2]$, получим, вообще говоря, два решения:

$$\tau = \theta_{CC}^{\pm}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{(1 + |x_E(T)|)(2 - \alpha(T)) \pm y_E(T)\sqrt{1 - \alpha^2(T)}}{(1 + |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)}.$$

Можно показать, что если $T \leqslant \pi$, то $\tau = \theta_{CC}^{+}(T)$, а если $T \geqslant \pi + \arccos(1/3)$, то $\tau = \theta_{CC}^{-}(T)$.

Рассматривая отдельно случаи $\tau = \theta_{CC}^{+}(T)$ и $\tau = \theta_{CC}^{-}(T)$, после подстановки τ в (4.5) и обращения косинуса с учетом того, что $T - \tau \in [0, 2\pi]$, получим два уравнения для определения оптимального времени перехвата:

$$\begin{aligned} &T - \theta_{CC}^{+}(T) - \arccos\alpha(T) = 0, \\ &T - \theta_{CC}^{-}(T) - 2\pi + \arccos\alpha(T) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Наименьшие неотрицательные корни этих двух уравнений будем обозначать через $\mathcal{T}_{CC}^{+}[x_E, y_E]$, $\mathcal{T}_{CC}^{-}[x_E, y_E]$ соответственно. В случае отсутствия корней будем полагать, что $\mathcal{T}_{CC}^{\pm}[x_E, y_E] = +\infty$. Как и в случае траекторий типа CS, при вычислении левой части какого-либо из уравнений (4.6) для некоторого T могут возникать некорректные операции. Если некорректные операции возникают при вычислении сразу двух выражений, то оптимальная поимка в момент T по траектории типа CC невозможна. Если некорректные операции появляются при вычислении первого выражения, а второе выражение при подстановке T превращается в тождество, то оптимальный перехват осуществляется с моментом переключения $\theta_{CC}^{-}(T)$ и наоборот. Оптимальное время перехвата определяется выбором наименьшего времени из двух времен:

$\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E] = \min(\mathcal{T}^+_{CC}[x_E, y_E], \mathcal{T}^-_{CC}[x_E, y_E])$. Оптимальный момент переключения при известном T определяется следующим образом:

$$\tau = \theta_{CC}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \theta^+_{CC}(T), & \mathcal{T}^+_{CC}[x_E, y_E] \leqslant \mathcal{T}^-_{CC}[x_E, y_E]; \\ \theta^-_{CC}(T), & \mathcal{T}^+_{CC}[x_E, y_E] > \mathcal{T}^-_{CC}[x_E, y_E]. \end{cases}$$

Если перехват невозможен, то уравнения (4.3), (4.6) не имеют неотрицательных решений. Если перехват возможен, то хотя бы одно из уравнений (4.3), (4.6) имеет неотрицательное решение, так как машина Дубинса вполне управляема в классах траекторий CS и CC.

Если оптимальная точка перехвата лежит на оси ординат, то начальный знак управления может быть выбран произвольным (в силу симметрии задачи). В соответствии с леммой 1, если оптимальной траекторией является линия типа CS, то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u^o_{CS}(t) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\operatorname{sgn} x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]), & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]) = 0; \\ 0, & t \geqslant \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]). \end{cases}$$

Если оптимальной траекторией является линия типа CC, то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u^o_{CC}(t) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \ \operatorname{sgn} x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ -\operatorname{sgn} x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), & t \geqslant \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) = 0; \\ \mp 1, & t \geqslant \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]),\ x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) = 0. \end{cases}$$

Выбор знака $\pm$ в приведенных выражениях может быть сделан произвольным образом.

Пусть время перехвата цели, движение которой заранее известно, является конечным. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Оптимальное управление в задаче перехвата подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время имеет вид

$$u(t) = u^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u^o_{CS}(t), & \mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leqslant \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E], \\ u^o_{CC}(t), & \mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] > \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]. \end{cases}$$

На основе описания $\mathcal{B}_G(t)$ и утверждения 1 нетрудно сформулировать алгебраический критерий оптимальности перехвата по геодезической линии. Для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы оптимальная точка перехвата лежала на $\mathcal{B}_G(T)$.

Утверждение 3. Оптимальная траектория перехвата является геодезической линией в том и только в том случае, когда $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leqslant \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]$ *или* $(|x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E])| - 1)^2 + y_E^2(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) < 1$.

Теорема 5 из [26] является частным случаем этого утверждения. Действительно, если оптимальный перехват возможен и $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leqslant \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]$, то он осуществляется по траектории типа CS и заканчивается вне кругов $\mathcal{D}_L$ и $\mathcal{D}_R$. При этом требование к траектории цели по ненахождению ее частей внутри $\mathcal{D}_L$ и $\mathcal{D}_R$ отпадает.

5. Численные примеры

С помощью утверждения 2 и выражений (4.3), (4.6) можно построить оптимальную траекторию перехвата подвижной цели. Опишем последовательность действий, которая позволяет сделать подобное построение. На первом шаге нужно найти три минимальных неотрицательных корня уравнений (4.3), (4.6). Если какое-либо уравнение не имеет корней, то считаем, что его корень равен $+\infty$. В конце первого шага имеем три значения $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]$,

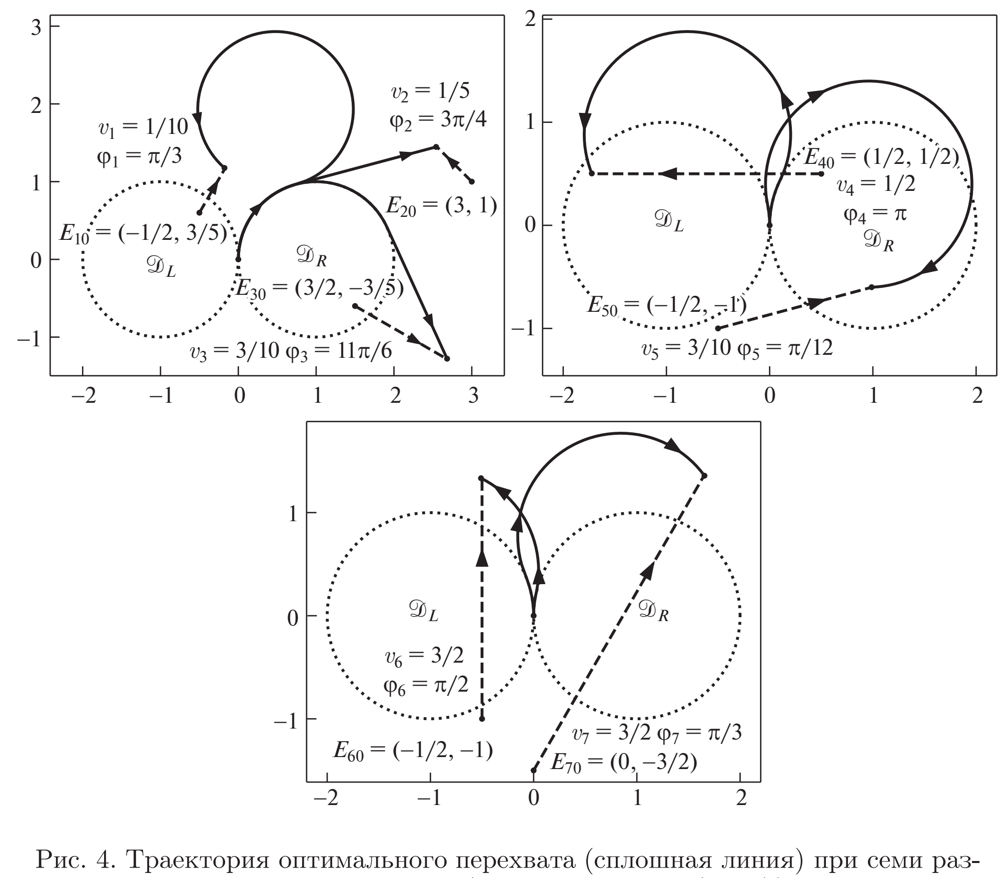

Рис. 4. Траектория оптимального перехвата (сплошная линия) при семи различных вариантах движения цели (пунктирная линия). $E_i(t) = E_{i0} + \vec{v}_i t$, где $\vec{v}_i = (v_i \cos\varphi_i, v_i \sin\varphi_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

$\mathcal{T}^{+}_{CC}[x_E, y_E], \mathcal{T}^{-}_{CC}[x_E, y_E]$. Если все три значения равны $+\infty$, то перехват невозможен. В противном случае трех вычисленных значений достаточно, чтобы явно получить оптимальное управление при помощи утверждения 2.

Траектория движения цели может быть любой непрерывной линией. Для простоты иллюстраций будем полагать, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. На рис. 4 изображено семь различных случаев перехвата. При $i = 1$ цель начинает свое движение из круга $\mathcal{D}_L$ с достаточно малой скоростью, которая позволяет цели избежать встречи на множестве $\mathcal{B}_{CS}(t)$ и отсрочить перехват до момента попадания на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. При $i = 2$ траектория цели не проходит через круги $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, поэтому оптимальный перехват осуществляется по траектории типа CS. При $i = 3$ цель начинает свое движение из $\mathcal{D}_R$, а оптимальный перехват, как и в случае $i = 2$, осуществляется по геодезической линии, так как выполнены условия утверждения 3. При $i = 4$ движение начинается из $\mathcal{D}_R$, а оптимальный перехват происходит в $\mathcal{D}_L$. Этот случай примечателен тем, что траектория цели может пересекать оптимальную траекторию машины до момента перехвата. При $i = 5$ движение цели начинается вне кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, а оптимальный перехват происходит внутри $\mathcal{D}_R$ по траектории класса CC. При $i = 6$ и $i = 7$ цель имеет скорость, которая выше или равна скорости машины, но машина, несмотря на это, способна перехватить цель.

Полученные примеры дополняют известные в литературе частные случаи оптимального перехвата. Отметим, что случаи $i \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$ иллюстрируют тот факт, что если оптимальная точка перехвата лежит вне кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, то оптимальная траектория машины может быть как из класса CC (при $i \in \{1, 6, 7\}$, например), так и из класса CS (при $i \in \{2, 3\}$). Если же оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{D}_R$, то оптимальная траектория машины принадлежит только классу CC.

6. Заключение

Для задачи перехвата подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время получены аналитические выражения (4.3), (4.6), позволяющие определить минимальное время перехвата. С помощью леммы 3 показано, что многозначное отображение $\mathcal{B}$, задающее эволюцию границы множества достижимости, является непрерывным, кроме одного момента времени. Утверждения 1, 2 позволяют определить положение оптимальной точки перехвата и вид оптимального управления. Приведенные выражения позволяют решить задачу наискорейшего перехвата при произвольной непрерывной и наперед заданной траектории движения цели. Выражения (4.3), (4.6) могут быть упрощены и оптимальное время перехвата может быть выражено явно, если класс траекторий цели уже класса непрерывных линий (например, точка, если цель покоится).

Утверждение 3 содержит в себе алгебраический критерий оптимальности перехвата по геодезической линии. Лемма 2 определяет пороговое значение времени перехвата для любого времени, больше которого оптимальные геодезические траектории принадлежат только классу CS. Однако для некоторых случаев движения цели оптимальный перехват не всегда проходит по геодезической линии, что также проиллюстрировано численными примерами и моделированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Вторая серия. Т. I. 1889. С. 250–276.
2. *Isaacs R.* Differential games. N.Y.: Wiley, 1965.
3. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. 1973. № 12. С. 91–101.
4. *Coates S., Pachter M., Murphey R.* Optimal Control of a Dubins Car with a Capture Set and the Homicidal Chauffeur Differential Game // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 5091–5096.
5. *Pachter M., Coates S.* The Classical Homicidal Chauffeur Game // Dyn. Games Appl. 2019. V. 9. No. 3. P. 800–850.
6. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // ПММ. 1975. Т. 39. № 6. С. 985–994.

   Berdyshev Iu.I. Time-optimal control synthesis for a fourth-order nonlinear system // J. Appl. Math. Mech. 1975. V. 39. No. 6. P. 985–994.
7. *Бердышев Ю.И.* Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение: Монография. УрО РАН, Екатеринбург, 2015.
8. *Clements J.C.* Minimum-time turn trajectories to fly-to points // Optim. Control Appl. Meth. 1990. V. 11. No. 1. P. 39–50.
9. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // Am. J. Math. JSTOR. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
10. *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Autom. Control. 1972. V. 17. No. 6. P. 763–772.
11. *Bui X.N. et al.* Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot // Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation. San Diego, 1994. V. 1. P. 2–7.
12. *Бедин Д.А., Пацко В.С., Федотов А.А. и др.* Восстановление траектории самолета по неточным измерениям // АиТ. 2010. № 2. С. 17–30.

    Bedin D.A. et al. Restoration of aircraft trajectory from inaccurate measurements // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 2. P. 185–197.
13. *Wu A., How J.P.* Guaranteed infinite horizon avoidance of unpredictable, dynamically constrained obstacles // Autonom. Robots. 2012. V. 32. No. 3. P. 227–242.
14. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. V. 13. No. 1. P. 197–220.
15. *Boissonnat J., Bui X.N.* Accessibility region for a car that only moves forwards along optimal paths. Sophia-Antipolis, France, 1994. INRIA Tech. Rep. 2181.
16. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.

    Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2003. V. 42. No. 3. P. 320–328.

17. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 182–197.

Patsko V.S., Fedotov A.A. Analytic description of a reachable set for the Dubins car // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2020. V. 26. No. 1. P. 182–197.

18. *Рубинович Е.Я.* Дифференциальная игра программного преследования с ограничением на разворот преследователя // АиТ. 1978. №. 9. С. 38–44.

Rubinovich E.Ya. A differential game of programmed pursuit with a constraint on the pursuant's turnabout // Autom. Remote Control. 1979. V. 39. No. 9. P. 1292–1297.

19. *Guelman M., Shinar J.* Optimal guidance law in the plane // J. Guid. Control Dyn. 1984. V. 7. No. 4. P. 471–476.

20. *Glizer V.Y.* Optimal planar interception with fixed end conditions: Closed-form solution // J. Optim. Theory Appl. 1996. V. 88. No. 3. P. 503–539.

21. *Cockayne E.* Plane Pursuit with Curvature Constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. V. 15. No. 6. P. 1511–1516.

22. *Glizer V.Y., Shinar J.* On the structure of a class of time-optimal trajectories // Optim. Control Appl. Meth. 1993. V. 14. No. 4. P. 271–279.

23. *Бердышев Ю.И.* О задачах последовательного обхода одним нелинейным объектом двух точек // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 43–52.

Berdyshev Yu.I. A problem of the sequential approach of a nonlinear object to two moving points // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. V. 11. No. 1. P. 43–52.

24. *Looker J.R.* Minimum paths to interception of a moving target when constrained by turning radius. Canberra, Australia: Defence Sci. Technol. Organisation, 2008.

25. *Meyer Y., Isaiah P., Shima T.* On Dubins Paths to Intercept a Moving Target at a Given Time // IFAC Proceedings Volumes. 2014. V. 47. No. 3. P. 2521–2526.

26. *Meyer Y., Isaiah P., Shima T.* On Dubins Paths to Intercept a Moving Target // Automatica. 2015. V. 53. P. 256–263.

27. *Gopalan A., Ratnoo A., Ghose D.* Time-optimal guidance for lateral interception of moving targets // J. Guid. Control Dyn. 2016. V. 39. No. 3. P. 510–525.

28. *Manyam S.G. et al.* Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle // Proc. Am. Control Conf. 2019. V. 2019-July. P. 828–834.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 27.08.2020

После доработки 15.11.2020

Принята к публикации 08.12.2020

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Стохастические системы

**© 2021 г. Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук
(e.palamarchuck@gmail.com)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)**

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВРЕМЕННОЙ ШКАЛОЙ[1]

Рассматривается задача линейно-квадратического регулятора при изменении параметра времени в соответствии со стохастической временной шкалой. Стохастическая временная шкала задается при помощи случайного процесса с непрерывно дифференцируемыми траекториями. При стремлении горизонта планирования к бесконечности находится стратегия управления, оптимальная по критериям, являющимся аналогами долговременных средних. Изучаются примеры задания стохастических временных шкал, используемых в различных приложениях.

Ключевые слова: линейно-квадратический регулятор, стохастическая временная шкала, долговременное среднее.

DOI: 10.31857/S0005231021050020

1. Введение

В данной статье проводится исследование задачи линейно-квадратического регулятора для случая, когда изменение параметра времени описывается случайным процессом. Процедура случайной замены времени [1, 2] широко используется при моделировании динамики систем и принятии решений в различных областях приложений, см. [3–8]. При этом добавление стохастической временной шкалы приводит к системе управления с нестационарными случайными коэффициентами. В частности, ранее линейные регуляторы без аддитивных шумов и со случайным параметром времени рассматривались в [9], где шкала задавалась в виде суммы случайных величин. В [10] предполагалось, что случайное время связано только с выбором управляющих воздействий и относится к классу субординаторов. Следует отметить, что в задачах управления [9, 10] рассматривалась минимизация ожидаемых значений целевых функционалов, а потраекторная оптимальность (оптимизация с вероятностью единица) не анализировалась. Общая ситуация линейной системы управления со случайными коэффициентами изучалась в [11] на

[1] Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

конечном интервале. Переход к бесконечному горизонту планирования при нестационарных коэффициентах общего вида затруднен из-за неограниченности значений целевых функционалов и необходимости исследования вопросов существования решений обратных стохастических дифференциальных уравнений. Однако, как будет показано в данной статье, при рассмотрении линейной системы управления, возникающей вследствие наличия стохастической временной шкалы, удается избежать указанных трудностей. Соответствующие критерии оптимальности, используемые на бесконечном интервале времени, будут включать как критерии на основе ожидаемых значений (с детерминированной нормировкой), так и потраекторные критерии при случайной нормировке на основе процесса стохастической временной шкалы. Изложение материала организовано следующим образом. В разделе 2 дается описание изучаемой модели и осуществляется постановка задачи. Раздел 3 содержит основной результат о виде оптимального закона управления. В разделе 4 приводятся примеры задания стохастических временных шкал из различных приложений и пример скалярной системы управления.

2. Описание модели и постановка задачи

2.1. Предварительные сведения

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан скалярный случайный процесс α_t, $t \geqslant 0$, имеющий с вероятностью единица непрерывные и положительные траектории. Тогда стохастическая временная шкала определяется как почти наверное (п.н.) возрастающий процесс $\tau_t = \int_0^t \alpha_v \, dv$, $t \geqslant 0$, или в дифференциальной форме

$$d\tau_t = \alpha_t \, dt, \quad \tau_0 = 0. \tag{1}$$

В качестве α_t, $t \geqslant 0$, могут рассматриваться процессы диффузионного типа, см. [5], или, например, случайная величина (с.в.) $\alpha_t = \bar{\alpha} > 0$ с абсолютно-непрерывным распределением и конечными моментами, задающая коэффициент “масштаба” временной шкалы, см. [4]. Процесс τ_t, $t \geqslant 0$, носит название “внутреннего” времени в отличие от физического или реального времени t. Также используется терминология “операционное”, “экономическое” время, “информационная” временная шкала, “биологические” или “молекулярные часы” и др. в зависимости от области приложений.

Предположение $\mathcal{A}$. *Случайный процесс $\alpha_t > 0$, $t \geqslant 0$, задающий временную шкалу в* (1), *имеет непрерывные* (*с вероятностью единица и в среднем квадратичном*) *траектории и при этом $\int_0^t \alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$, п.н.*

Следует отметить, что по теореме о монотонной сходимости, см., например, [12, теорема 1.1, с. 15], выполнение условия $\int_0^t \alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$, п.н. также влечет и $\int_0^t E\alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$. Как будет показано далее, включение стохастической временной шкалы τ_t в систему управления, известную как стохастический линейно-квадратический регулятор, приводит к уравнениям динамики и целевому функционалу со случайными коэффициентами.

Пусть $\tilde{W}_t$, $t \geqslant 0$, — d-мерный стандартный винеровский процесс относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Эволюция состояния системы Y_τ, $\tau \geqslant 0$, во внутреннем времени τ определяется при помощи n-мерного управляемого случайного процесса с динамикой

$$dY_\tau = AY_\tau d\tau + B\tilde{U}_\tau d\tau + Gd\tilde{W}_\tau, \qquad Y_0 = x, \tag{2}$$

где x — неслучайное начальное состояние; $\tilde{U}_\tau$ — k-мерный вектор допустимого управления, определяемого далее; $A, B, G \neq 0$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Предположение о детерминированном начальном состоянии сделано из-за последующего рассмотрения системы управления на бесконечном интервале. В случае невырожденных шумовых воздействий вклад начального состояния со временем снижается при оптимальном управлении.

Если задано значение T — длины горизонта планирования в реальном времени, то соответствующая величина $\mathcal{T}(T) = \int_0^T \alpha_t\, dt$. Целевой функционал при внутренней временной шкале имеет вид

$$J_{\mathcal{T}}(\tilde{U}) = \int\limits_0^{\mathcal{T}} \Big(Y_\tau^{\mathrm{T}} Q Y_\tau + \tilde{U}_\tau^{\mathrm{T}} R \tilde{U}_\tau\Big)\, d\tau, \tag{3}$$

где $Q \geqslant 0$, $R > 0$ — симметричные матрицы; $^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования; запись $A \geqslant B$ ($A > B$) для матриц означает, что разность $A - B$ неотрицательно (положительно) определена.

Для дальнейшей постановки задачи преобразуем (2)–(3) с учетом (1). Нетрудно заметить, что $\tilde{W}_{\tau_t}$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом с квадратической характеристикой каждой из компонент, равной $\int_0^t \alpha_s\, ds$. Тогда согласно утверждению [13, лемма 2] существует винеровский процесс W_t, $t \geqslant 0$, такой что $\tilde{W}_\tau = \int_0^t \sqrt{\alpha_s} dW_s$. Полагая $X_t = Y_\tau$, $U_t = \tilde{U}_\tau$, $J_T^{(\alpha)}(U) = J_{\mathcal{T}}(\tilde{U})$, получаем систему управления со случайными коэффициентами:

$$dX_t = \alpha_t A X_t dt + \alpha_t B U_t dt + \sqrt{\alpha_t} G dW_t, \quad X_0 = x, \tag{4}$$

$$J_T^{(\alpha)}(U) = \int\limits_0^T \alpha_t \left(X_t^{\mathrm{T}} Q X_t + U_t^{\mathrm{T}} R U_t\right) dt, \tag{5}$$

где в качестве допустимых управлений U_t, $t \geqslant 0$, рассматриваются такие $\bar{\mathcal{F}}_t$-согласованные процессы $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\{W_s, \alpha_s, s \leqslant t\}$, что уравнение (4) имеет решение ($\sigma(\cdot)$ — обозначение σ-алгебры). Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Ранее линейные системы вида (4) со случайными коэффициентами (без управляющих воздействий) изучались при моделировании в области физики [7], финансов [3] и механики [8]. Отметим, что в экономике и финансах (4) часто используется при описании динамики отклонений переменных от своих равновесных значений, а также показателей, которые могут иметь разный знак (инфляция, доходность, бюджетный баланс и т.д.). Очевидно, что далеко не всегда процесс α_t, $t \geqslant 0$, доступен прямому наблюдению. В экономике и финансах существуют подходы, позволяющие использовать информацию об известных переменных для определения динамики стохастической временной шкалы. Процесс α_t связывают с экономической (или рыночной) активностью, и существуют различные показатели ее измерения: торговая активность (число сделок и их объем), волатильность ключевых финансовых переменных и связанных с ними деривативов, специальные индексы экономической активности и др., см. обзорную часть в [14], а также [15]. В физике α_t описывает, например, неоднородность среды, см. [16], и можно провести наблюдение за соответствующими характеристиками. Установление взаимосвязи между конкретными наблюдаемыми показателями и процессом α_t является отдельной задачей, строгая математическая формулировка которой приводит к более сложным моделям с неполной информацией, не рассматриваемым в данной статье. В приведенных выше ситуациях существенным моментом оказывается предположение о независимости скорости течения времени α_t стохастической временной шкалы от случайных воздействий (процесса W_t) в уравнении динамики (4). Также полезно отметить, что при изучении (4) для линейных законов управления можно использовать результаты по условной гауссовости X_t относительно $\mathcal{F}_t^{(\alpha)} = \sigma\{\alpha_s, s \leqslant t\}$, если α_t является диффузионным процессом с условиями на коэффициенты в уравнении своей динамики, см. [17, раздел 12] и пример в разделе 4. При $T \to \infty$ рассматриваются задачи управления

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{6}$$

и

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\int\limits_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью единица.} \tag{7}$$

Решение задачи (7) понимается в следующем смысле: если U^* — оптимальное управление, $J^* = \limsup_{T\to\infty}\left\{J_T^{(\alpha)}(U^*)\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\}$, то для любого допустимого управления $U \in \mathcal{U}$ п.н. выполнено $\limsup_{T\to\infty}\left\{J_T^{(\alpha)}(U)\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\} \geqslant$ $\geqslant J^*$. Далее окажется, что с вероятностью единица значение J^* равно константе, т.е. значения критерия сравниваются с постоянной величиной при каждом исходе $\omega \in \Omega$. Здесь можно охарактеризовать также и методику построения критерия в задаче (6). Используется тот же принцип, на котором основан вид стандартного долговременного среднего: нормировка ожидаемого значения выбирается в соответствии с поведением $\mathrm{E}J_T(U^*)$ на управлении U^* при $T \to \infty$. Полезно отметить, что во внутреннем времени (без учета (1)) задачи (6)–(7) имели бы вид задач управления с долговременными средними $\limsup_{\mathcal{T}\to\infty}\{\mathrm{E}J_{\mathcal{T}}(U)/\mathcal{T}\}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}$ и $\limsup_{\mathcal{T}\to\infty}\{J_{\mathcal{T}}(U)/\mathcal{T}\}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}$ п.н. Данное наблюдение позволяет предположить, что существование хорошо известного установившегося закона управления вида $U^*=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi X^*$ ($\Pi\geqslant 0$ — решение алгебраического уравнения Риккати) может быть достаточным для построения оптимальной стратегии и в (6)–(7). Пусть в функционале (3) матрица $Q=C^{\mathrm{T}}C$, где C — некоторая квадратная матрица. Вводится следующее предположение.

Предположение $\mathcal{P}$. Пара матриц (A,B) — стабилизируема, пара матриц (A,C) — выявляема (обнаруживаема).

Напомним, что пара матриц (A,B) называется стабилизируемой, если существует матрица K, такая что матрица $A+BK$ — экспоненциально устойчива, а выявляемость является двойственным свойством к стабилизуемости. Точее, выявляемость для (A,C) означает стабилизируемость $(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})$, см. [18, с. 168].

3. Основной результат

Вследствие предположения $\mathcal{P}$ существует симметричная матрица $\Pi\geqslant 0$, являющаяся единственным неотрицательно определенным решением алгебраического уравнения Риккати

$$\Pi A+A^{\mathrm{T}}\Pi-\Pi BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi+Q=0, \tag{8}$$

при этом матрица $A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi$ — экспоненциально устойчива, см. [19, теорема 3.7, с. 275]. Тогда можно определить закон управления

$$U_t^*=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi X_t^*, \tag{9}$$

где процесс X_t^*, $t\geqslant 0$, удовлетворяет уравнению

$$dX_t^*=\alpha_t\left(A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)X_t^*dt+\sqrt{\alpha_t}GdW_t,\quad X_0^*=x. \tag{10}$$

Далее будет показано, что U^* вида (9)–(10) является решением задач (6) и (7). Уравнение (10) представляет собой линейное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) со случайными коэффициентами, и в силу предположения $\mathcal{A}$, см. также [2, следствие 4.6], его решение существует и может быть выписано в явном виде

$$X_t^*=\Phi(t,0)x+\Phi(t,0)\int_0^t\Phi(0,s)\sqrt{\alpha_s}GdW_s, \tag{11}$$

где матрица $\Phi(t,s)=\exp\left\{\left(A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)\int_s^t\alpha_v dv\right\}$ с вероятностью единица допускает оценку $\|\Phi(t,s)\|\leqslant\kappa_0\exp\left(-\kappa\int_s^t\alpha_v dv\right)$, $s\leqslant t$, при некоторых неслучайных константах $\kappa_0,\kappa>0$ ($\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма). Ряд асимптотических свойств процесса X_t^*, $t\to\infty$, которые потребуются в дальнейшем, представлен в следующей лемме.

Лемма. *Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$. Тогда существуют константы $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$, такие что*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\mathrm{E}\int\limits_0^t \alpha_s ds + e\right)} < \bar{c}_1, \tag{12}$$

и с вероятностью единица выполняется неравенство

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\int\limits_0^t \alpha_s ds + e\right)} < \bar{c}_2, \tag{13}$$

где e — основание натурального логарифма.

Доказательства леммы и теоремы вынесены в Приложение.

Необходимо отметить, что получение (4)–(5) из (2)–(3) при детерминированной замене времени позволяет напрямую использовать известные результаты по оптимальному управлению для автономных систем, см. [20]. В рассматриваемом случае стохастической временной шкалы требуется проводить отдельный анализ, результаты которого сформулированы в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$. Тогда закон управления U^*, определенный в* (9)–(10), *будет являться решением задач* (6) *и* (7). *При этом*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\int\limits_0^T \alpha_t dt} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G) \quad \text{п.н.}$$

(tr$(\cdot)$ — *обозначение для следа матрицы*).

Замечание 1. Условие $\alpha_t > 0$ п.н., $t \geqslant 0$, было необходимо для перехода от системы (1)–(3) к системе (4)–(5) путем включения в анализ временной шкалы. Если процессы (4)–(5) уже заданы, то в предположение $\mathcal{A}$ можно ввести более слабое условие $\alpha_t \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

Замечание 2. В случае детерминированной системы, развивающейся во внутреннем времени, т.е. когда $G = 0$ в (2), закон управления U^* будет являться решением задач $\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ и $\limsup_{T\to\infty} J_T^{(\alpha)}(U) \to$ $\to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ п.н. При этом $\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*) = \lim_{T\to\infty} J_T^{(\alpha)}(U^*) = x^{\mathrm{T}}\Pi x$.

Замечание 3. Наряду с задачами (6)–(7) можно рассмотреть и задачу $\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}\left\{ J_T^{(\alpha)}(U) \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \right\} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$, в которой критерий получен из долговременного среднего, известного для детерминированной системы при постоянных неслучайных воздействиях. По аналогии с доказанным в теореме закон управления U^* вида (9)–(10) будет являться решением, и значение критерия при этом также равно $\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G)$.

4. Примеры задания стохастических временных шкал и скалярной системы управления

В задаче управления (7) использовалась стохастическая нормировка, однако во многих примерах случайную нормировку удается заменить на детерминированную функцию. В приложениях при описании процесса α_t, $t \geqslant 0$, также часто вводят требование “сравнимости” временной шкалы $\mathcal{T}(T) = \int_0^T \alpha_t dt$ и реального горизонта планирования T при $T \to \infty$, см., например, [21, теорема 6.1, с. 174], т.е. $\mathcal{T}(T)/T \to \mathrm{const}$ п.н. В следующем замечании описываются возможность перехода к неслучайным нормировкам и вид соответствующих задач управления.

Замечание 4.

1. Пусть для случайного процесса α_t, $t \geqslant 0$, $\limsup_{T\to\infty} \left\{\int_0^T \alpha_t dt/\Gamma_T^{(+)}\right\} = c^{(+)} > 0$ или $\liminf_{T\to\infty} \left\{\int_0^T \alpha_t dt/\Gamma_T^{(-)}\right\} = c^{(-)} > 0$ с вероятностью единица; $\Gamma_T^{(+)}$, $\Gamma_T^{(-)}$ — положительные детерминированные функции, $c^{(+)}$, $c^{(-)}$ — константы. Тогда вместо (7) можно рассмотреть задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(+)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{или} \quad \liminf_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(-)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}.$$

Значения критериев на оптимальном управлении U^* будут при этом равны соответственно

$$\limsup_{T\to\infty} \left\{\frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(+)}}\right\} = c^{(+)}\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G) \quad \text{и} \quad \liminf_{T\to\infty} \left\{\frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(-)}}\right\} = c^{(-)}\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G).$$

Эргодичность процесса α_t, т.е. когда

$$\lim_{T\to\infty} \left\{T^{-1}\int_0^T \alpha_t dt\right\} = \lim_{T\to\infty} \left\{T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t dt\right\} \quad \text{п.н.},$$

превращает критерии задач (6)–(7) в долговременные средние.

2. Пусть $T^{-1}\int_0^T \alpha_t \to \bar{\alpha}$ п.н. и $T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t \to \mathrm{E}\bar{\alpha}$, $T \to \infty$, где $\bar{\alpha} > 0$ — некоторая случайная величина. В этом случае (6)–(7) заменяются на задачи с критериями долговременных средних:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}},$$

но здесь

$$\lim_{T\to\infty} \left\{T^{-1}\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*)\right\} = (\mathrm{E}\bar{\alpha})\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G) \text{ и } \lim_{T\to\infty} \left\{T^{-1}J_T^{(\alpha)}(U^*)\right\} = \bar{\alpha}\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G),$$

т.е. детерминированная нормировка приводит к различию в значениях двух критериев на U^*, одно из долговременных средних будет являться случайной величиной.

Во всех рассматриваемых далее примерах в качестве $\bar{W}_t$, $t \geqslant 0$, обозначен скалярный винеровский процесс.

Пример 1. В финансовых и физических приложениях, см. [3, 7], в качестве замены времени часто используется так называемый CIR-процесс (процесс Cox-Ingersoll-Ross). Эта модель допускает обобщение на случай переменных коэффициентов в уравнении. Пусть $\alpha_t = \xi_t$, где ξ_t, $t \geqslant 0$, задается уравнением

$$d\xi_t = \mu\rho_t(\theta - \xi_t)dt + \sigma\sqrt{\rho_t}\sqrt{\xi_t}d\bar{W}_t, \quad \xi_0 = \bar{\xi} > 0, \tag{14}$$

константы $\mu, \theta, \sigma > 0$, $2\mu\theta \geqslant \sigma^2$; детерминированная монотонная функция $\rho_t > 0$, $t \geqslant 0$, такая что $\int_0^t \rho_s ds \to \infty$, $t \to \infty$. Нетрудно заметить, см., например, [22, теорема 8.5.7, с. 190], что $\xi_t = \tilde{\xi}_{\nu_t}$, где $\nu_t = \int_0^t \rho_s ds$, а процесс $\tilde{\xi}_\nu$ — стандартный процесс CIR с постоянными параметрами, т.е. решение уравнения $d\tilde{\xi}_\nu = \mu(\theta - \tilde{\xi}_\nu)d\nu + \sigma\sqrt{\tilde{\xi}_\nu}d\tilde{W}_\nu$, $\tilde{\xi}_0 = \bar{\xi}$, здесь $\tilde{W}_\nu$ — некоторый винеровский процесс. Тогда условие $2\mu\theta \geqslant \sigma^2$ дает $\tilde{\xi}_\nu > 0$ п.н., $\nu \geqslant 0$ (см., например, [23, раздел 6.3.1, с. 357]), и, следовательно, $\xi_t > 0$ с вероятностью единица, $t \geqslant 0$. Таким образом, процесс стохастической временной шкалы $\tau_t = \int_0^t \xi_s ds = \int_0^t \tilde{\xi}_{\nu_s} ds$ задается при помощи двойной замены времени. Так как статистические характеристики $\tilde{\xi}_\nu$, $\nu \geqslant 0$, хорошо известны, см., например, [23, раздел 6.3.3], то, используя замену времени, можно определить, что $\mathrm{E}\xi_t \to \theta$, $\mathrm{E}(\xi_t - \mathrm{E}\xi_t)^2 \to \theta\sigma^2(2\mu)^{-1}$ при $t \to \infty$. Для ковариационной функции $K(t,s) = \mathrm{E}(\xi_t\xi_s) - \mathrm{E}\xi_t\mathrm{E}\xi_s$ при этом справедлива оценка $\|K(t,s)\| \leqslant c_\xi \left(\exp\left\{-\mu\int_0^{\tilde{t}} \rho_v dv\right\} + \exp\left\{-\mu\int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} \rho_v dv\right\}\right)$, где $c_\xi > 0$ — некоторая константа, переменные $\tilde{t} = \max(t,s)$, $\tilde{s} = \min(t,s)$. Для исследования поведения нормировки $\mathcal{T}(T)$, $T \to \infty$, обратимся к утверждению [24, теорема A, с. 154], согласно которому для эргодичности процесса достаточно наличия оценки $\chi_T = \int_0^T \int_0^T \|K(t,s)\| ds dt \leqslant \bar{c}T^\gamma$ при некоторых константах $0 \leqslant \gamma < 2$ и $\bar{c} > 0$. Нетрудно заметить, что для неубывающей ρ_t при больших T характеристика $\chi_T \leqslant \bar{c}T$ в силу того, что $\|K(t,s)\| \leqslant c_\xi \left(\exp\left\{-\mu\rho_0\tilde{t}\right\} + \right.$ $\left. + \exp\left\{-\mu\rho_0\left(\tilde{t} - \tilde{s}\right)\right\}\right)$. При $\rho_t \to 0$, $t \to \infty$, и ограничении $\rho_t t^\beta \to \infty$, $t \to \infty$, для некоторого $\beta < 1$ можно взять константу $\gamma = \beta + 1$, так как в данном случае предел (при нахождении по правилу Лопиталя) равен $\lim\limits_{T\to\infty} \{\chi_T / T^\gamma\} =$ $= \lim\limits_{T\to\infty} \{1/(\rho_T T^{\gamma-1})\} = 0$. Следовательно, $\left(\int_0^T \xi_t dt - \int_0^T \mathrm{E}\xi_t dt\right) T^{-1} \to 0$ п.н., $T \to \infty$, и нормировки критериев в задачах (6)–(7) будут равны T (также см. п. 1 замечания 4).

Пример 2. В [25] была предложена сетевая модель "часов" со скоростью изменения времени, характеризуемой экспоненциальным процессом Орнштейна–Уленбека. Точнее, $\alpha_t = \lambda_t \exp(\xi_t)$, где $\xi_t = \sigma\exp(-at)\int_0^t \exp(at)d\bar{W}_t$, константа $a > 0$; функция $\lambda_t = (\exp(\mathrm{E}\xi_t^2/2))^{-1}$, т.е. $\mathrm{E}\alpha_t = 1$ в силу логнормального распределения для $\exp(\xi_t)$, $t \geqslant 0$. Соответственно $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t dt = 1$. Затем при потраекторном анализе временной шкалы рассматривается процесс $\mathcal{Y}_t = \alpha_t - \mathrm{E}\alpha_t$. Определяется его ковариационная функция $K(t,s) =$

$= \exp\{\rho(t,s)\} - 1$, где $\rho(t,s) = \mathrm{E}\xi^2_{\min(t,s)} \exp\{-a|t-s|\}$ и находится оценка $\chi_T = \int_0^T \int_0^T K(t,s)dsdt \leqslant \bar{c}T$ с некоторой константой $\bar{c} > 0$. Тогда, см. [24, теорема A, с. 154], $\lim_{T\to\infty}(\mathcal{Y}_T/T) = 0$ п.н., следствием чего будет являться соотношение $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \alpha_t dt = 1$. В данном случае критерии в задачах (6)–(7) имеют вид долговременных средних.

Пример 3. В [26] при оценке финансовых инструментов использовалось "экономическое время" $\tau_t = \lambda_1 t + \lambda_2 \int_0^t \bar{W}_s^2 ds$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$ — константы). Здесь $\alpha_t = \lambda_1 + \lambda_2 \bar{W}_t^2$ и известно, см., например, [27], что

$$\liminf_{T\to\infty}\left\{\left(\Gamma_T^{(-)}\right)^{-1}\int\limits_0^T \bar{W}_t^2 dt\right\} = 1/8, \quad \limsup_{T\to\infty}\left\{\left(\Gamma_T^{(+)}\right)^{-1}\int\limits_0^T \bar{W}_t^2 dt\right\} = 8/\pi^2$$

для функций $\Gamma_T^{(-)} = T^2(\ln\ln T)^{-1}$, $\Gamma_T^{(+)} = T^2 \ln\ln T$, а также $\mathrm{E}\bar{W}_t^2 = t$. Таким образом, в данном примере временная шкала не обладает эргодическим свойством. Следовательно, при переходе от случайной нормировки к детерминированной вместо (7) возможно рассмотрение двух задач с разными критериями, включающими нормирующие функции $\Gamma_T^{(-)}$, $\Gamma_T^{(+)}$, см. п. 1 замечания 4.

Пример 4. Пусть $\alpha_t = \int_0^t \exp(-as + \sigma\bar{W}_s)ds$, где константа $a > 0$. Так как $a > 0$, то с вероятностью единица $\alpha_t \to \bar{\alpha}$, $t \to \infty$, где случайная величина $\bar{\alpha}$ имеет обратное гамма-распределение, см. [28]. Конечность значения $\mathrm{E}\bar{\alpha}$ обеспечивается при выполнении условия $\sigma^2/2 - a < 0$, а $\mathrm{E}\bar{\alpha}^2 < \infty$ при $\sigma^2 - a < 0$. Тогда согласно п. 2 замечания 4 задачи управления (6) и (7) можно заменить на задачи, содержащие критерии долговременных средних. При $\sigma^2/2 - a \geqslant 0$ соотношение $T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t \to \infty$, $T \to \infty$, и требуется нормировка в (6), растущая быстрее T: степенная T^2 для случая $a = \sigma^2/2$ или экспоненциальная $\exp\{(\sigma^2/2 - a)t\}$, если $a < \sigma^2/2$. Следует отметить, что потраекторное долговременное среднее вместо критерия из (7) при этом сохраняется.

Полученные ранее результаты иллюстрируются на примере скалярной системы управления. Также определяется ряд характеристик процесса при оптимальной стратегии.

Пример 5. Рассматривается модель управления скоростью частицы в неоднородной среде, например, для области клеточной биологии. За основу берется уравнение динамики из [29] с "диффузионной диффузивностью", изменяющей временную шкалу в уравнении скорости, см. введение в [16], и моделируемой при помощи CIR-процесса с постоянными параметрами (14), где в качестве примера фактора с такой динамикой может рассматриваться процесс воздействия на клеточную мембрану из [30]. Уравнение динамики вида $dX_t = \xi_t U_t dt + G\sqrt{\xi_t}dW_t$, $X_0 = x$, и целевой функционал $J_T^{(\alpha)}(U) = \int_0^T (X_t^2 + U_t^2)dt$ соответствуют (4)–(5) с коэффициентами $A = 0$, $B = 1$, $Q = R = 1$, $\alpha_t = \xi_t$. Процессы $\bar{W}_t$ из (14) и W_t предполагаются независимыми, $t \geqslant 0$. Из результатов теоремы и примера 1 следует, что закон управления $U_t^* = -X_t^*$ является оптимальным по критериям долговременных средних. Воспользовавшись условной гауссовостью процесса X_t^*, можно выписать выражения $\mathrm{E}X_t^* = \mathrm{E}\left(\exp\left\{-\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) x$ и $\mathrm{E}(X_t^*)^2 = \mathrm{E}\left(\exp\left\{-2\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) x^2 + G^2/2$, см. [17, теорема 12.1]. Известно, см., например, [23, следствие 6.3.4.2], что при $\lambda > 0$ $\mathrm{E}\left(\exp\left\{-\lambda\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) \sim \exp\left\{-\theta\mu\sigma^{-2}\left(\sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2} - \mu\right) t\right\}$, т.е. для двух моментов процесса X_t^* имеет место экспоненциальная скорость сходимости к постоянным значениям (нулю и $G^2/2$). В силу эргодичности процесса ξ_t и из леммы следует, что траектории X_t^* п.н. мажорируются функцией, пропорциональной $\sqrt{\ln t}$ при $t \to \infty$.

5. Заключение

В статье проведено исследование линейной системы управления (2) с квадратичным целевым функционалом (3) на бесконечном интервале в предположении о стохастическом характере временной шкалы (1) (также см. предположение $\mathcal{A}$). Включение (1) в анализ приводит к системе (4)–(5) со случайными коэффициентами, для которой сформулированы задачи управления (6) и (7) с критериями, выступающими аналогами долговременных средних. Показано, что в данном случае оптимальная стратегия управления может быть выбрана в виде хорошо известного линейного закона U^* (см. (9)–(10) и утверждение теоремы). Следует отметить, что в отличие от задач синтеза стохастических линейных регуляторов с детерминированными коэффициентами, см., например, [20, 31], нормировки в критериях для двух задач (6) и (7) управления системой (4)–(5) являются различными. В общем случае эргодичность процесса временной шкалы $\tau_t = \int_0^t \alpha_s ds$ не имеет места, и может наблюдаться существенное расхождение в порядках роста целевого функционала $J_T(U^*)$ и его ожидаемого значения $\mathrm{E}J_T(U^*)$ на оптимальном управлении U^* (см. примеры 3 и 4). Как можно видеть, при переходе к стохастической временной шкале в линейных системах управления с постоянными коэффициентами происходит сохранение ключевых свойств стабилизируемости/выявляемости, устойчивости и, как следствие, оптимальности на бесконечном интервале времени закона управления в форме линейной обратной связи по состоянию. Данное замечание позволяет предположить, что вид оптимальной стратегии может оказаться инвариантным относительно случайной замены времени и в других задачах оптимального управления для линейных систем, в частности, при использовании так называемого "чувствительного к риску" целевого функционала $\exp(\theta J_{\mathcal{T}}(\tilde{U}))$ ($J_{\mathcal{T}}(\tilde{U})$ задан в (3), θ — константа). В качестве направления дальнейших исследований можно выделить анализ ситуации немонотонной стохастической временной шкалы, встречающейся в приложениях для моделей из области статистики, метрологии и компьютерных наук.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Сначала утверждения леммы доказываются для случая уравнения (10) при $A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi = -\kappa I$, $\kappa > 0$ — константа,

I — единичная матрица. Затем показывается, что анализируемые свойства процесса X_t^*, $t \to \infty$, из уравнения (10) при произвольной экспоненциально устойчивой матрице $A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi$ не меняются. Рассматривается процесс $X_t^* = \hat{X}_t$, $t \geqslant 0$, с динамикой

$$d\hat{X}_t = -\kappa\alpha_t I\hat{X}_t + \sqrt{\alpha_t}GdW_t, \quad \hat{X}_0 = 0.$$

Обозначив через $\hat{X}_{it}$ i-ю компоненту процесса $\hat{X}_t$, $i = 1, \ldots, n$, нетрудно получить представление $\hat{X}_{it} = c_i M_{it} \left(\langle M_{it}\rangle + 1\right)^{-1/2}$, где мартингал $M_{it} = {} = c_i^{-1}\int_0^t \sqrt{\alpha_s}\exp\left\{\int_0^s \kappa\alpha_v dv\right\}\left(\sum_{j=1}^d G_{ij}dW_{js}\right)$, его квадратическая характеристика $\langle M_{it}\rangle = \exp\left\{2\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\} - 1$; константа $c_i = \left((2\kappa)^{-1}\sum_{j=1}^d G_{ij}^2\right)^{1/2}$, G_{ij} — элементы матрицы G ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d$); W_{jt} — j-я компонента винеровского процесса W_t ($j = 1, \ldots, d$). В [32, лемма 2.3] было установлено, что $\left\|M_{it}(\langle M_{it}\rangle + 1)^{-1/2}\right\| \leqslant N(\omega)\sqrt{\ln\ln(\langle M_{it}\rangle + e^e)}$, где $N(\omega) \geqslant 0$ — п.н. конечная случайная величина. Поэтому для процесса $\|\hat{X}_t\|^2$ с вероятностью единица будет иметь место соотношение

$$\|\hat{X}_t\|^2 \leqslant cN^2(\omega)\ln\left(\int_0^t \alpha_v dv + e\right). \tag{П.1}$$

Тогда из оценки (П.1) и неравенства Йенсена следует, что

$$\mathrm{E}\|\hat{X}_t\|^2 \leqslant \tilde{c}\ln\left(\mathrm{E}\int_0^t \alpha_v dv + e\right), \tag{П.2}$$

где в качестве $c, \tilde{c}$ в (П.1) и (П.2) обозначены некоторые положительные константы, конкретные значения которых несущественны и могут меняться от формулы к формуле. Нетрудно заметить, что соотношение (13) является очевидным следствием приведенного выше представления для компонент $\hat{X}_t$ и закона повторного логарифма для мартингалов, см., например, [33]. Далее в рассмотрение вводится процесс $Z_t = X_t^* - \hat{X}_t$ с уравнением динамики

$$dZ_t = \alpha_t\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)Z_t dt + \alpha_t\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi + \kappa I\right)\hat{X}_t, \quad Z_0 = x,$$

имеющим решением $Z_t = \Phi(t,0)x + \int_0^t \Phi(t,s)\alpha_s(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi + \kappa I)\hat{X}_s ds$. С учетом верхней границы для $\|\Phi(t,s)\|$ (см. замечание к (11)) и неравенства Коши–Буняковского для процесса Z_t возникает оценка

$$\begin{aligned}\|Z_t\|^2 &\leqslant 2\kappa_0^2\exp\left\{-2\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\}\|x\|^2 + \\ &+ c\exp\left\{-\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \alpha_s\exp\left\{\kappa\int_0^s \alpha_v dv\right\}\|\hat{X}_s\|^2 ds.\end{aligned} \tag{П.3}$$

Применение (П.1) к (П.3) дает соотношение

$$\|Z_t\|^2 \leqslant 2\kappa_0^2 \exp\left\{-2\kappa \int\limits_0^t \alpha_v dv\right\}\|x\|^2 + cN^2(\omega)\ln\left(\int\limits_0^t \alpha_v dv + e\right),$$

взятие математического ожидания от обеих частей которого в совокупности с неравенством Йенсена приводит к оценке $\mathrm{E}\|Z_t\|^2 \leqslant \tilde{c} + \tilde{c}\ln\left(\mathrm{E}\int_0^t \alpha_v dv + e\right)$, откуда и следует (12) доказываемой леммы. Неравенство (13) также нетрудно получить известным образом, см., например, доказательство в [31, теорема 2], если заметить, что $h_t = \ln\left(\int_0^t \alpha_v dv + e\right)$ является неубывающей функцией. Тогда деление (П.3) на h_t при последующем оценивании интеграла в правой части (с привлечением результата для $\|\hat{X}_t\|^2$) в пределе даст ограниченную величину. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. При $U \in \mathcal{U}$ выписывается представление для разности целевых функционалов

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) - J_T^{(\alpha)}(U) = \\ = 2x_T^{\mathrm{T}}\Pi X_T^* - \int\limits_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt - 2\int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t}x_t^{\mathrm{T}}\Pi G dW_t, \tag{П.4}$$

где переменные $x_t = X_t^* - X_t$, $u_t = U_t^* - U_t$, при этом $dx_t = \alpha_t Ax_t dt + \alpha_t Bu_t dt$, $x_0 = 0$. Так как пара (A, C) — наблюдаема, то существует матрица F, такая что матрица $A + FC$ является экспоненциально устойчивой. Тогда $\|x_t\| \leqslant$ $\leqslant c\exp\left\{-\bar{\kappa}\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \exp\left\{\bar{\kappa}\int_0^s \alpha_v dv\right\}\alpha_s(\|Cx_s\| + \|u_s\|)ds$ при некотором числе $\bar{\kappa} > 0$. После возведения в квадрат и применения неравенства Коши–Буняковского, а также условий $Q = C^{\mathrm{T}}C$, $R > 0$ будем иметь $\|x_t\|^2 \leqslant$ $\leqslant \tilde{c}\exp\left\{-\bar{\kappa}\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \exp\left\{\bar{\kappa}\int_0^s \alpha_v dv\right\}\alpha_s\left(x_s^{\mathrm{T}}Qx_s + u_s^{\mathrm{T}}Ru_s\right)ds$. В дальнейшем при помощи интегрирования по частям показывается, что $\int_0^T \|x_t\|^2 ds \leqslant$ $\leqslant \tilde{c}\bar{\kappa}^{-1}\int_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt$. Соответственно получается оценка $\|x_T\|^2 +$ $+ \int_0^T \|x_s\|^2 ds \leqslant c_0\int_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt$ для $T > 0$ и некоторой константы $c_0 > 0$. Тогда с учетом элементарного неравенства $2ab \leqslant a^2\bar{c} + b^2/\bar{c}$, выполняющегося для любых чисел a, b и $\bar{c} > 0$, выражение в правой части (П.4) оценивается в виде

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) - J_T^{(\alpha)}(U) \leqslant c_1\|X_T^*\|^2 - c_2\int\limits_0^T \alpha_t\|x_t\|^2 dt - 2\int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t}x_t^{\mathrm{T}}\Pi G dW_t, \tag{П.5}$$

где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы. После взятия математического ожидания от обеих частей (П.5) и деления на $\mathrm{E}(\int_0^T \alpha_t dt)$, при предельном переходе

$T \to \infty$ используется результат (П.2) леммы, что приводит к соотношению

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)}.$$

При потраекторном анализе (П.5), введя обозначение

$$M_T = -2 \int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t} x_t^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t,$$

запишем оценку для (П.5) вида

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) \leqslant J_T^{(\alpha)}(U) + \mathcal{R}_T,$$

где $\mathcal{R}_T = -c_3\langle M_T\rangle + M_T$ при некоторой константе $c_3 > 0$; $\langle M_T\rangle = \int_0^T \|\sqrt{\alpha_t} G^{\mathrm{T}} \Pi x_t\|^2 dt$ — квадратическая характеристика M_T. Заметим, что $\limsup_{T\to\infty} g_T \mathcal{R}_T \leqslant 0$ п.н. для любой монотонной функции g_T со свойством $g_T > 0$, $g_T \to \infty$, $T \to \infty$ (см. [34]), в частности $g_T = \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}$ (также см. предположение $\mathcal{A}$). Также очевидно, что из (13) следует $\|X_T^*\|^2 \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \to 0$ п.н., $T \to \infty$. Поэтому с вероятностью единица будет выполнено соотношение

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)}.$$

По формуле Ито стандартным образом определяется, что $J_T^{(\alpha)}(U^*) = x^{\mathrm{T}}\Pi x - (X_T^*)^{\mathrm{T}} \Pi X_T^* + \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G) \int_0^T \alpha_t dt + 2\int_0^T \sqrt{\alpha_t}(X_t^*)^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t$. Тогда значение критерия в (6) при U^* равно $\lim_{T\to\infty} \left\{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*)\mathrm{E}\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G)$. Применение закона повторного логарифма для мартингала $\mathcal{M}_T = \int_0^T \sqrt{\alpha_t}(X_t^*)^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t$ дает оценку $\|\mathcal{M}_T\| \leqslant c\sqrt{\langle \mathcal{M}_T\rangle \ln\ln \langle \mathcal{M}_T\rangle}$ при больших T, а использование (13) позволяет перейти к выражению $\langle \mathcal{M}_T\rangle \leqslant \tilde{c}\left(\int_0^T \alpha_t dt\right) \ln\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)$. Следовательно, $\|\mathcal{M}_T\| \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \to 0, T \to \infty$, п.н., тогда $\lim_{T\to\infty} \left\{J_T^{(\alpha)}(U^*) \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G)$ с вероятностью единица. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Veraart A.E.D., Winkel M.* Time change / Encyclopedia of quantitative finance. N.Y.: Wiley, 2010. P. 1878–1881.

2. *Kobayashi K.* Stochastic Calculus for a Time-Changed Semimartingale and the Associated Stochastic Differential Equations // J. Theor. Probab. 2011. V. 24. No. 3. P. 789–820.

3. *Borovkova S., Schmeck M.D.* Electricity Price Modeling with Stochastic Time Change // Energy Economics. 2017. V. 63. P. 51–65.

4. *Capra W.B., Muller H.G.* An Accelerated-time Model for Response Curves // JASA. 1997. V. 92. No. 437. P. 72–83.

5. *Heath D., Platen E.* Understanding the Implied Volatility Surface for Options on a Diversified Index // Asia-Pacific Financial Markets. 2004. V. 11. No. 1. P. 55–77.

6. *Ray D., Bossaerts P.* Positive Temporal Dependence of the Biological Clock Implies Hyperbolic Discounting // Frontiers in neuroscience. 2011. V. 5. P. 2.

7. *Uneyama T., Miyaguchi T., Akimoto T.* Relaxation Functions of the Ornstein-Uhlenbeck Process with Fluctuating Diffusivity // Physical Review E. 2019. V. 99. No. 3. P. 032127.

8. *Ye Z.S., Xie M.* Stochastic Modelling and Analysis of Degradation for Highly Reliable Products // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2015. V. 31. No. 1. P. 16–32.

9. *Poulsen D.R., Davis J.M., Gravagne I.A.* Optimal Control on Stochastic Time Scales // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 14861–14866.

10. *Lamperski A., Cowan N.J.* Time-changed Linear Quadratic Regulators // 2013 Eur. Control Conf. (ECC). IEEE, 2013. P. 198–203.

11. *Tang S.* General Linear Quadratic Optimal Stochastic Control Problems with Random Coefficients: Linear Stochastic Hamilton Systems and Backward Stochastic Riccati Equations // SIAM J. Control Optim. 2003. V. 42. No. 1. P. 53–75.

12. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of Random Processes: I. General Theory. Berlin: Springer, 2001.

13. *Oksendal B.* When is a Stochastic Integral a Time Change of a Diffusion? // J. Theor. Probab. 1990. V. 3. No. 2. P. 207–226.

14. *Shaliastovich I., Tauchen G.* Pricing Implications of Stochastic Volatility, Business Cycle Time Change and Non-Gaussianity // Working paper. Duke University. 2005.

15. *Howison S., Lamper D.* Trading Volume in Models of Financial Derivatives // Appl. Math. Financ. 2001. V. 8. No. 2. P. 119–135.

16. *Lanoiselee Y., Moutal N., Grebenkov D.S.* Diffusion-limited Reactions in Dynamic Heterogeneous Media // Nature Commun. 2018. V. 9. No. 1. P. 1–16.

17. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes: II. Applications. Berlin: Springer, 2001.

18. *Дэвис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.

19. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.

20. *Паламарчук Е.С.* Об инвариантности оптимального управления линейной экономической системой при одновременном масштабировании ее параметров // Сб. ЦЭМИ. 2018. Вып. 2. Режим доступа: https://cemi.jes.su/s111111110000084-5-1

21. *Chen H.* A Brownian Model of Stochastic Processing Networks / Stochastic Modeling and Optimization. With Applications in Queues, Finance, and Supply Chains. Yao D.D, Zhang H., Zhou X.Y. (Eds.). N.Y.: Springer, 2003. P. 171–192.

22. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ. 2003.

23. *Jeanblanc M., Yor M., Chesney M.* Mathematical methods for financial markets. N.Y.: Springer, 2009.
24. *Loeve M.* Probability theory II. 4th ed. New York: Springer, 1978.
25. *Freris N.M., Borkar V.S., Kumar P.R.* A Model-based Approach to Clock Synchronization // Proc. 48th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). N.Y.: IEEE, 2009. P. 5744–5749.
26. *Xia W.* Pricing Exotic Power Options with a Brownian-Time-Changed Variance Gamma Process // Commun. Math. Financ. 2017. V. 6. No. 1. P. 21–60.
27. *Csaki E.* Iterated Logarithm Laws for the Square Integral of a Wiener Process / The First Pannonian Symposium on Mathematical Statistics. Revesz P., Schmetterer L., Zolotarev V.M. (Eds.). N.Y.: Springer, 1981. P. 42–53.
28. *Dufresne D.* The Distribution of a Perpetuity, with Applications to Risk Theory and Pension Funding // Scandinavian Actuarial J. 1990. V. 1990. No. 1. P. 39–79.
29. *Lanoiselee Y., Grebenkov D.S.* A Model of Non-Gaussian Diffusion in Heterogeneous Media // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2018. V. 51. No. 14. P. 145602.
30. *Ditlevsen S., Lansky P.* Estimation of the Input Parameters in the Feller Neuronal Model // Physical Review E. 2006. V. 73. No. 6. P. 061910.
31. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // АиТ. 2013. № 4. С. 110–128.

    Belkina T.A., Palamarchuk E.S. On Stochastic Optimality for a Linear Controller with Attenuating Disturbances // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 628–641.
32. *Lapeyre B.* A Priori Bound for the Supremum of Solutions of Stable Stochastic Differential Equations // Stochastics. 1989. V. 28. No. 3. P. 145–160.
33. *Wang J.* A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 47. No. 2. P. 215–228.
34. *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. №4. С. 661–675.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 26.06.2020

После доработки 07.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. Г.Г. ГРЕБЕНЮК, д-р техн. наук (gggrebenuk@gmail.com), А.А. КРЫГИН, канд. техн. наук (andreyakr@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОДЫ ПОИСКА КОНФИГУРАЦИЙ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Рассматривается задача нахождения полного множества допустимых конфигураций распределительной сети. При ее решении используется аппарат теории графов для нахождения предельных графов. Предложен новый, по сравнению с известными в литературе, метод нахождения полного множества предельных графов, доказаны ряд свойств этого метода и его корректность. На качественном уровне выполнено сравнение эффективности различных методов и показано, что предложенный метод отличает существенно более высокая скорость вычислений.

Ключевые слова: распределительные сети, поиск конфигурации сети, графовые модели сетей, предельные графы.

DOI: 10.31857/S0005231021050032

1. Введение

Поиск конфигураций физических сетей распределения энергии и ресурсов от их источников к потребителям осуществляется при решении различных задач, среди которых выделим две: структурная оптимизация режимов распределительных сетей (в частности, электрических) и определение степени уязвимости потребителей из-за прерывания их снабжения энергией и ресурсами при негативных воздействиях на сеть поставки.

К задаче структурной оптимизации диспетчерские службы обращаются в режимах балансировки нагрузки, минимизации потери электроэнергии, анализа устойчивости, противоаварийного управления и в других случаях [1–9]. Оптимизация сети выполняется на взвешенном графе, вершины которого соответствуют узлам коммутации, а ребра — линиям связи. Решение задачи заключается в поиске и выборе оптимальной конфигурации посредством подключения узлами коммутации тех или иных связей к сети передачи и распределения энергии и ресурсов. Для рассматриваемых сетей поиск оптимальной конфигурации представляется как многоэтапная и многокритериальная задача:

- Поиск возможных конфигураций;
- Выбор оптимальной конфигурации.

Далее рассмотрен первый этап — поиск возможных конфигураций посредством подключения узлами коммутации тех или иных связей к сети распределения энергии и ресурсов.

Вторая задача, также рассматриваемая далее, это определение степени уязвимости потребителей из-за прерывания снабжения энергии и ресурсов при негативных воздействиях на сеть. Решение этой задачи рассматривается в разрезе нахождения вариантов присоединения потребителей к распределительной сети и представляет интерес при выработке мер противодействия негативным воздействиям на элементы сетевой инфраструктуры.

Значительная избыточность, вводимая в распределительные сети для повышения надежности, создает определенные трудности в поиске конфигураций сети. На их разрешение направлен метод построения предельных графов, изложенный в [8]. Также в [8] доказаны корректность метода и ряд свойств предельных графов, в [9] показано применение метода для структурной оптимизации электрических сетей.

В данной статье указаны недостатки метода [8], расширено понятие предельных графов, предложен более эффективный метод их построения, доказана его корректность и проведена качественная сравнительная оценка двух методов.

2. Графы распределительных сетей

Рассматриваются распределительные сети, которые обладают следующим свойством: каждый потребитель снабжается от одного источника. Как правило, данное свойство выполняется для большинства распределительных сетей. Такие сети характеризуются разомкнутой структурой электроснабжения, формируемой узлами коммутации. Пример графа распределительной некоммутируемой сети приведен на рис. 1,*а*, вершины $S1$ и $P1$ соответствуют источнику и потребителю. Обозначим множество всех вершин графа, исключая вершины источники и вершины потребители через U, через $|U|$ обозначим мощность множества U.

В задаче структурной оптимизации вершины $U1 - U3$ соответствуют элементам сети, таким как подстанции, тепловые пункты и другие сооружения, в составе которых находятся узлы коммутации. Обозначим множество коммутаторов через C и расположим эти коммутаторы на тех связях, которыми они управляют. Граф, соответствующей коммутируемой сети, изображен на рис. 1,*б*.

Рассмотрим следующие графовые модели распределительных сетей.

Некоммутируемую распределительную сеть представим в виде графа $\mathfrak{I}$ со свойствами:

— множество вершин этого графа V состоит из трех непересекающихся подмножеств $V = S \cup P \cup U$. Множество S будем называть множеством вершин источников, множество P — множеством вершин потребителей, U — определено выше;

— для каждой вершины $p \in P$ существует путь $s \to p$ хотя бы из одной вершины $s \in S$.

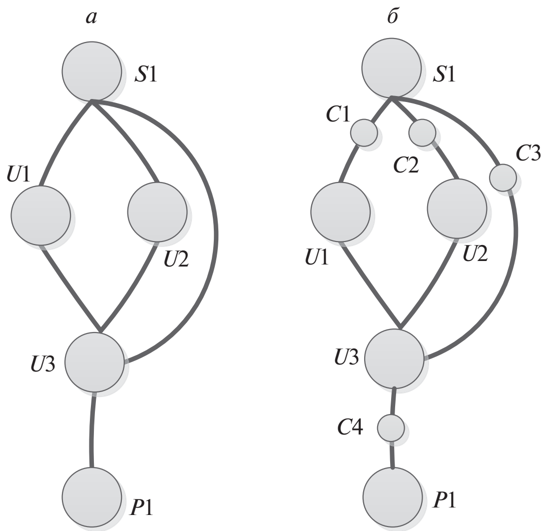

Рис. 1. Примеры некоммутируемого (*а*) и коммутируемого (*б*) графов распределительных сетей.

Коммутируемую распределительную сеть будем представлять в виде графа $\mathfrak{I}$ со свойствами:

— множество вершин $\mathfrak{I}$ описывается четверкой $V = S \cup P \cup C \cup U$, где множество C составляют вершины коммутаторы, а множество U — все остальные вершины, исключая вершины множеств S, P и C;

— маршруты передачи определяются состоянием вершин коммутации: $C = C^+ \cup C^-$, где C^+ — подмножество вершин коммутаторов в состоянии "открыто", C^- — подмножество вершин коммутаторов в состоянии "закрыто";

— свойство существования пути аналогично графам некоммутируемых сетей;

— степень каждой вершины $c \in C$ равна двум; степень каждой вершины $p \in P$ равна единице;

— каждое ребро, выходящее из вершины источника, соединено с вершиной коммутатором.

При решении описанных выше задач удобно использовать общие (расширенные по сравнению [8]) определения графа конфигурации и предельного графа.

Обозначим через Z подмножество вершин графа, $Z \subseteq U \cup C$. Для коммутируемых сетей $Z = C$, для некоммутируемых сетей $Z = U$. Для любого подмножества вершин W, $W \subseteq Z$ определим следующую операцию:

• удалим из графа подмножество W;

• после этого также удалим из графа все вершины, не лежащие ни на одном пути $s \to p$, где $s \in S$, $p \in P$. Удаляемой вершиной может быть и вершина источник $\hat{s} \in S$, если для любого $p \in P$ нет ни одного пути $\hat{s} \to p$.

Назовем описанную операцию "построением W подграфа".

Получившийся в результате описанной операции W подграф будем называть графом конфигурации, если для каждой вершины $p \in P$ существует путь $s \to p$ хотя бы из одной вершины $s \in S$.

Граф конфигурации будем называть предельным графом, если при удалении из него любой вершины $z \in Z \backslash W$ найдется вершина $p \in P$, для которой не будет ни одного пути $s \to p$, где $s \in S$.

Таким образом, нахождение всех графов конфигурации и всех предельных графов сводится к нахождению соответствующих им подмножеств W или подмножеств $Z \backslash W$.

3. Описание метода поиска конфигураций в графах распределительных сетей

Так как граф конфигурации, согласно определению, содержит пути от источников к потребителям, то в комбинациях этих путей могут содержаться циклы и присутствовать пути с избыточным количеством вершин множества U, при удалении которых сохраняется достижимость вершин множества P из S.

Далее предлагается метод построения графов конфигурации сети, которые после операции проверки на поглощение (также описанной ниже) преобразуются в полное множество предельных графов.

Предлагаемый метод формирования графов конфигурации (далее компонентный метод) использует поиск в ширину (BFS) при движении от вершин из множества P против направления потока к вершинам из множества S. В процессе движения формируются пути, образующие компоненту. При пересечении одного пути с другим происходит слияние путей и формируются деревья. Как и в *BFS*, у каждого дерева есть активная вершина, из которой происходит движение (развитие), но в отличие от *BFS* используется двойная очередь: очередь компонент и очередь активных вершин компоненты.

Опишем метод. Предварительно введем ряд определений.

Компонента — структура, состоящая из деревьев и очереди активных вершин. Очередь активных вершин соответствует вершинам каждого дерева, из которых происходит движение, при этом у активной вершины хранится ссылка на дерево, к которому она принадлежит.

Выходной массив компонент — конечный результат, представленный в виде массива.

Операция клонирования заданной компоненты — создание новой компоненты и копирование в нее заданной компоненты, т.е. всех деревьев и очереди активных вершин.

Начальная инициализация — формирование начальной компоненты, состоящей из $|P|$ вершин потребителей и очереди активных вершин, в которую заносятся все вершины потребители, а также создание очереди компонент, в которую заносится начальная компонента, и создание выходного массива компонент (нулевого для начальной инициализации).

Алгоритм.

Шаг 0. Начальная инициализация.

Шаг 1. Из очереди компонент отбирается компонента, которую обозначим через I.

Шаг 2. Из очереди активных вершин компоненты I отбирается вершина i, $i \in K$, где K — дерево:

2.1. Для i определяются ее вершины потомки;

2.2. Для каждой вершины потомка j выполняется клонирование компоненты I с добавлением к дереву K вершины j. После клонирования компонента I удаляется;

2.3. Обработка клонированной компоненты:

2.3.1. Клонированная компонента удаляется, если дерево K содержало вершину j еще до его клонирования в п. 2.2. Переход к шагу 3;

2.3.2. В очередь активных вершин клонированной компоненты добавляется вершина j, если она не является вершиной источником и не является вершиной другого дерева;

2.3.3. Если вершина j является вершиной другого дерева M, то все дерево K присоединяется к дереву M.

2.4. Если в клонированной компоненте нет активных вершин, то она помещается в выходной массив, если активные вершины есть, то она помещается в очередь компонент.

Шаг 3. Если очередь активных вершин компоненты I не пуста, то переход к шагу 2.

Шаг 4. Если очередь компонент не пуста, то переход к шагу 1.

Конец.

4. Свойства компонентного метода

Перечислим необходимые для дальнейших доказательств результаты публикации [8].

В [8] приведен алгоритм получения полного множества предельных графов, использующий построение комбинаций всех путей от вершин источников до вершин потребителей. Этот алгоритм включал следующие этапы:

1. Формирование списков всех возможных путей до каждой вершины множества P от вершин множества S. Общее число списков равно $|P|$.

2. Составление всех комбинаций путей из списков. Комбинация представляет собой объединение вершин из $|P|$ путей, l-й путь выбирается из l-го списка. Каждой j-й комбинации соответствуют граф конфигурации τ_j и подмножества C_j^+ и C_j^-, C_j^+ — вершины коммутаторы, принадлежащие τ_j, C_j^- — остальные вершины коммутаторы.

3. Построение предельных графов. Выполняется последовательное сравнение между собой комбинаций и удаление тех из них, в которые осуществляется вложение вершин множества C^+. Так, если для m-й и k-й комбинаций выполняется условие $C_k^+ \subseteq C_m^+$, то удаляется m-я комбинация. Графы, соответствующие оставшимся комбинациям, являются предельными графами τ_j^{lim}. Будем называть такую операцию “проверкой на поглощение”, а весь алгоритм — “методом простых комбинаций”.

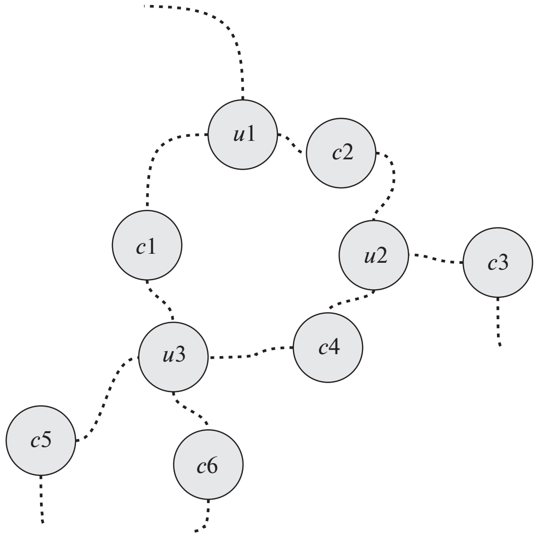

Рис. 2. Фрагмент исходного графа.

В [8] были доказаны следующие утверждения:

1. Корректность алгоритма построения комбинаций.

2. Массив, состоящий из графов конфигурации и содержащий полное множество предельных графов, после выполнения проверки на поглощение будет содержать только полное множество предельных графов.

Для каждой компоненты I выходного массива построим W подграф, выбрав $W = Z \backslash I$ и соответственно для коммутируемых сетей — $C^{+} = I \cap Z$. Справедливы три утверждения:

Утверждение 1. *Каждый W подграф является графом конфигурации, а массив W подграфов содержит полное множество предельных графов.*

Утверждение 2. *При выполнении шага 1 и шага 2 компонентного метода порядок выбора компоненты и активной вершины может быть произвольным.*

Утверждение 3. *Если в исходном графе каждая вершина ветвления (вершина, степень которой больше двух) окружена вершинами коммутаторами (или в случае некоммутируемых сетей — вершинами степени 2, рис. 2), то массив графов будет содержать только полное множество предельных графов без других графов конфигурации.*

Доказательства утверждений 1–3 приведены в Приложении.

5. Качественное сравнение вычислительной сложности компонентного метода и метода простых комбинаций

Результаты моделирования показали, что компонентный метод существенно превосходит по скорости метод простых комбинаций. При этом во многих случаях наиболее быстро работал следующий метод:

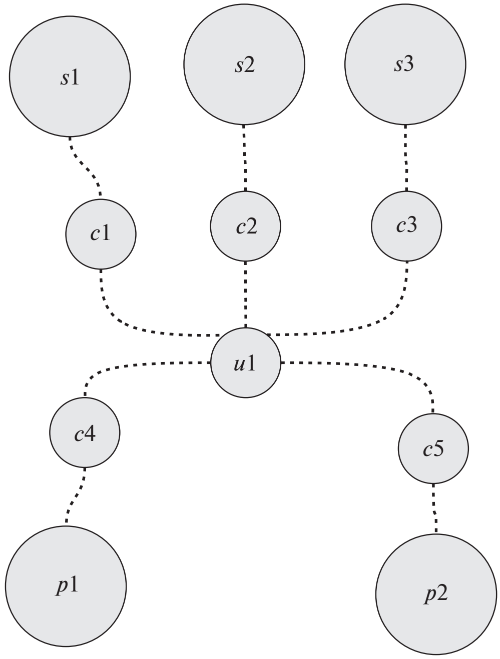

Рис. 3. Пример исходного графа.

— сначала выполнялось построение компонент от одной выбранной вершины потребителя. В этом случае каждая компонента состояла из пути от выбранной вершины потребителя до вершины источника;

— после этого продолжалось построение компонент от остальных вершин потребителей.

Корректность этого метода вытекает из утверждения 2.

Количественная оценка вычислительной сложности обоих методов выходит за рамки данной статьи. Укажем здесь на качественное преимущество компонентного метода.

Основной недостаток метода простых комбинаций заключается в том, что количество предельных графов составляет малую долю от количества всех комбинаций и операция проверки на поглощение требует значительных вычислительных ресурсов. Причина такого соотношения состоит в вершинах ветвления множества U. Рассмотрим это на примере, приведенном на рис. 3.

Очевидно, что у этого графа будет 3 предельных графа, в каждом из которых имеется единственная вершина источник. На 1-м этапе метода простых комбинаций определяется по 3 пути для каждой вершины потребителя. Множество всех возможных комбинаций этих путей (2-й этап) состоит из 27 комбинаций (часть из которых будут одинаковыми). Появление комбинации (на 2-м этапе), не соответствующей предельному графу, возникает всякий раз, когда объединяются два пути, проходящие через вершину ветвления u_1, у которых фрагменты от вершины источника до вершины ветвления различны. Проведем следующую упрощенную оценку. Пусть d — степень некоторой вершины ветвления u, P — множество вершин потребителей, у которых существуют пути из вершин источников, проходящие через u, $p = |P|$. Пусть для каждой вершины $r \in P$ существует единственный путь $u - r$. Для приведенного примера $d = 5$, $p = 2$. Тогда из всех $(d - p)^p$ возможных комбинаций на этом фрагменте только $(d - p)$ могут соответствовать предельным графам. Общее количество комбинаций, не соответствующее предельным графам, увеличится как минимум в $[(d - p)^p - (d - p)]$ раз. Аналогичная ситуация будет происходить для каждой вершины ветвления. Поэтому доля комбинаций, соответствующая предельным графам, так мала в общем количестве всех комбинаций. Компонентный метод лишен этого недостатка из-за операции присоединения деревьев (п. 2.3.3).

6. Заключение

Предложен компонентный метод поиска конфигураций распределительных сетей, который может применяться в задачах повышения безопасности, управления режимами сетей и др.

Доказана корректность метода, а также предложены его модификации и дополнительные условия на распределительные сети, при которых скорость метода существенно возрастает.

На качественном уровне показано, что компонентный метод позволяет построить варианты конфигураций с меньшим числом операций, чем метод простых комбинаций путей от вершин источников до вершин потребителей [8].

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим компоненту I выходного массива. Она является лесом, так как связность каждого дерева обусловлена построением, а отсутствие циклов гарантируется процедурой клонирования и проверкой на циклы (п. 2.3.1). В соответствии с начальной инициализацией (шаг 0) I содержит все вершины потребители, а каждое дерево в компоненте содержит вершину источник, так как только в этом случае компонента помещается в выходной массив. Следовательно, I и построенный по ней W подграф являются графами конфигурации. Очевидно, что для каждого предельного графа можно явно указать последовательность выбора вершин потомков (п. 2.2), приводящую к появлению этого графа в выходном массиве. В соответствии с доказанным в [8] утверждением, приведенным выше (утверждение 2), после выполнения проверки на поглощение останется только полное множество предельных графов. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Докажем справедливость этого утверждения для следующего случая:

— выберем одну вершину потребителя;

— будем строить компоненты и при этом игнорировать выбранную вершину, т.е. пропускать все действия метода, связанные с ней;

— когда не останется активных вершин кроме выбранной, продолжим строить компоненты, рассматривая пути от выбранной вершины.

Покажем, что выходные массивы в этом случае и в методе построения компонент совпадают. Пусть M — максимальная длина пути к вершине источнику среди всех вершин потребителей кроме выбранной. Рассмотрим граф Γ, полученный из исходного графа H по следующему принципу: к выбранной вершине потребителю добавляется “хвост” из M обычных (не коммутаторов) вершин, соединенных последовательно. Метод построения компонент для Γ даст такие же результаты, что и для H, с точностью до “хвоста”. С другой стороны, последовательность выбора вершин потребителей в методе построения компонент для Γ будет такой же, как в описанном случае.

Обобщим это рассуждение: очевидно, что выходной массив не изменится, если такие “хвосты” добавить к нескольким вершинам потребителям, при этом длина хвостов может быть произвольной. И таким образом каждую вершину потребителя можно “подключить” на любом шаге работы компонентного метода. Аналогичным образом можно показать, что и очередность выбора компонент на шаге 1 не важна. Утверждение 2 доказано.

Доказательство утверждения 3. Компонента I выходного массива является предельным графом, так как она является лесом. Докажем утверждение, показав, что при поставленных условиях на вершины ветвления построенный по I W подграф будет совпадать с I. Рассмотрим дерево T в I и любое ребро исходного графа, у которого одна из инцидентных вершин принадлежит T (обозначим ее t), а вторая — не принадлежит (обозначим ее q). Покажем, что вершина q — это вершина множества C. Если $t \in U$, то ее степень строго больше двух: как минимум два ребра принадлежат дереву плюс рассматриваемое ребро, т.е. t — вершина ветвления и она окружена вершинами коммутаторами. Если $t \in S$, то по свойствам рассматриваемых графов $q \in C$ t не может быть вершиной потребителем, так как единственное ее ребро принадлежит I. По условиям построения W подграфа эти вершины множества C удаляются. Отсюда следует, что W подграф, построенный по I, будет совпадать с I. Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Phyu E.E., Lin K.M., Moe T.T.* Loss Reduction and Reliability Improvement of Industrial Distribution System through Network Reconfiguration // Int. J. Energy and Power Engineer. 2018. V. 12. No. 11. P. 822–828.
2. *Sudhakara Reddy A.V., Satish Kumar Reddy M.* Network Reconfiguration of Distribution System for Loss Reduction using GWO Algorithm // Int. J. Electric. and Comp. Engineer. 2017. V. 7. No. 6. P. 3226–3234.
3. *Sedighizadeh M., Esmaili M., Mahmoodi M.* Reconfiguration of Distribution Systems to Improve Reliability and Reduce Power Losses using Imperialist Competitive Algorithm // Iranian J. Electric. & Electronic Engineer. 2017. V. 13. No. 3. P. 287–302.
4. *Sambaiah K.S.* A Review on Optimal Allocation and Sizing Techniques for DG in Distribution Systems // IJRER. 2018. V. 8. No. 3. P. 1236–1256.
5. *Landeros A., Koziel S.* Distribution Network Reconfiguration using Feasibility-Preserving Evolutionary Optimization // J. Mod. Power Syst. Clean Energy. 2019. V. 7. No. 3. P. 589–598.
6. *Kayal V., Chanda C.K.* A Simple and Fast Approach for Allocation and Size Evaluation of Distributed Generation // IJEEE. 2013. V. 4. No. 7. P. 2–10.
7. *Christine E., Doig C.* Analysis on Voltage Stability Indices. Master Thesis. Aachen Germany: RWTH Aachen University. 2012. P. 1–106.

8. *Grebenyuk G.G., Krygin A.A.* Algorithms for Optimization of the Number of Switchings in Heat Supply Networks Reconfiguration // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 12. P. 2187–2197.

   Гребеннюк Г.Г., Крыгин А.А. Алгоритмы оптимизации числа переключений при реконфигурации сетей теплоснабжения // АиТ. 2007. № 12. С. 101–112.

9. *Grebenyuk G.G., Krygin A.A.* Limit Graphs in Structural Optimization of Modes in Distribution Networks // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 1. P. 120–132.

   Гребеннюк Г.Г., Крыгин А.А. Предельные графы в структурной оптимизации режимов распределительных сетей // АиТ. 2015. № 1. С. 147–162.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 25.06.2020

После доработки 31.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020

**© 2021 г. Л.Ю. ЖИЛЯКОВА, д-р физ.-мат. наук (zhilyakova.ludmila@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Н.А. КУЗНЕЦОВ, академик РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва;
Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский университет))**

ГРАФОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ НАЗНАЧЕНИИ ЛОКОМОТИВОВ НА ЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ — БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ И С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Предложена новая графовая модель перевозок на линейном участке железной дороги. На основе заданного графика перевозок грузовых составов строится ациклический граф, вершины которого обозначают перевозки, а дуги — возможность последовательного осуществления их некоторым локомотивом. Такая модель задачи позволяет применить для нахождения оптимального плана назначений локомотивов статические графовые алгоритмы. Поиск решения в задаче без временных ограничений на локомотивы сводится к поиску минимального покрытия ациклического графа путями. Каждый путь в покрытии соответствует последовательности перевозок, осуществляемых одним локомотивом. При наличии временных ограничений на локомотивы (их уход на техническое обслуживание) не все пути в найденном покрытии могут остаться допустимыми — для некоторых локомотивов ни одна из найденных последовательностей перевозок не может быть выполнена от начала до конца. В этом случае добавляется еще один этап решения, на котором найденное покрытие преобразуется таким образом, что все новые пути описывают последовательности перевозок, которые можно осуществить данным множеством локомотивов с заданными временными ограничениями.

Ключевые слова: графовые модели, минимальное покрытие графа путями, покрытие графа с ограничениями, задача об оптимальном назначении.

DOI: 10.31857/S0005231021050044

1. Введение

В настоящей работе задача об оптимальном назначении локомотивов для выполнения графика грузовых перевозок на линейном участке железной дороги решается с помощью статического графового алгоритма. Расписание грузовых перевозок представлено в виде ориентированного ациклического

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-20-01180 офи-м-РЖД, 20-07-00190 А).

графа. При выборе методов построения модели и способов нахождения оптимального назначения был исследован ряд алгоритмов, описанных в литературе [1–6]. Обзоры фундаментальных и прикладных теоретико-графовых и сетевых методов и алгоритмов, направленных на решение широкого класса задач, представлены в книгах [1–3]; в книге [4] приведены программные реализации большого количества из них. В графах, имеющих разного рода ограничения на достижимость вершин или проходимость дуг, вводится понятие нестандартной достижимости; исследуются графы с различными типами достижимости с помощью вспомогательных графов, названных развертками [5, 6]. Графы с дугами разной природы, принадлежащими нескольким классам, используются при моделировании железнодорожных перевозок и назначений локомотивов и бригад [7–9]. Модели и алгоритмы составления расписаний железнодорожных грузовых перевозок и назначения локомотивов описаны в [10–14]. В [12] предложен эвристический алгоритм оптимизации составления расписания движения грузовых поездов и назначении локомотивов с учетом их технических обслуживаний. В [13] решается задача назначения локомотивов без ограничений на их временные рамки. В [14] рассматривается задача о назначении локомотивов и локомотивных бригад на грузовые составы, расписание движения которых уже известно. Точное решение находится с использованием метода программирования в ограничениях. Задача, рассматриваемая в [15], состоит в поиске декомпозиции путей в графе на подпути таким образом, чтобы каждый подпуть целиком лежал в одном из заданных подграфов исходного графа, а объединение этих подпутей составляло данный путь. Построенный алгоритм предлагается использовать для снижения размерности задачи о назначениях локомотивов при организации железнодорожных перевозок. Оптимальный по использованию тяговых ресурсов план построен в [7, 8], где впервые предложена и реализована идея построения плана перевозок на основе ресурсного графа, вложенного в плоскость графика поездов. В них решена реальная задача назначения локомотивов грузовым поездам на Восточном полигоне РЖД. Однако применяемые в этих работах методы в некоторых случаях не позволяют построить полное решение в условиях ограниченного числа локомотивов, даже если оно существует. В [9] было описано решение локальной задачи: для заданных начальных состояний локомотивов и поездов и заданного целевого состояния определить, является ли осуществимым все множество перевозок. В процессе решения строится план перевозок. Алгоритм, описанный в этой работе, решает поставленную задачу в отсутствие ограничений по времени: все локомотивы должны быть доступны до достижения горизонта планирования. В настоящей работе предложен метод, исправляющий недостатки предыдущей статьи и, что наиболее важно, учитывающий дополнительные временные ограничения на локомотивы. В отличие от жадного алгоритма сдвига фронта, описанного в [9], предложен статический алгоритм, позволяющий искать глобально оптимальное решение на полностью известном графе. Для построения назначений используются методы решения проблемы покрытия ориентированного графа простыми путями, описанной в [16–19].

2. Постановка задачи о назначении локомотивов на линейном участке железной дороги и ее графовая модель

2.1. Основные определения и обозначения

Рассматриваются грузовые перевозки на линейном участке железной дороги с k станциями. Имеется множество составов, для которых задан план их отправления и прибытия, и множество локомотивов, с помощью которых должны быть осуществлены данные перевозки.

Множество станций $S = \{S_0, \ldots, S_k\}$ линейно упорядочено естественным образом по их расположению.

В модели вводится непрерывное время t, разделенное на интервалы *событиями*.

Определение 1. *Событиями будем называть точки t_i, соответствующие временам отправления и прибытия составов. Длины интервалов между событиями могут быть различными.*

По определению внутри каждого интервала событий нет. Тогда в непрерывном времени t естественным образом выделяется дискретный набор точек, задающих границы интервалов: $\{0, 1, \ldots, t_{fin}\}$, где t_{fin} – заданный *горизонт планирования*.

Определение 2. *Графиковой плоскостью Ots будем называть координатную плоскость, ось абсцисс которой соответствует времени, а ось ординат задает линейный участок дороги с упорядоченными станциями.*

На графиковой плоскости произвольному событию с абсциссой t_i всегда соответствует «целочисленная» ордината, совпадающая с одной из станций S_j (см. рис. 1, *а*,*б*).

Множество составов и их траекторий движения будем обозначать как $Tr = \{Tr_1, \ldots, Tr_n\}$.

Определение 3. *Отрезки на графиковой плоскости Tr_j, задающие траектории движения составов, будем называть локо-слотами, в соответ-*

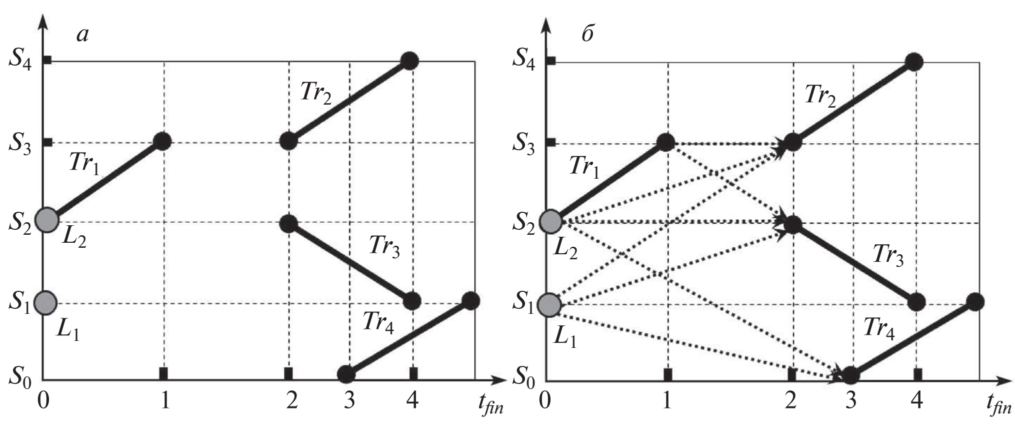

Рис. 1. *а* — Графиковая плоскость и график перевозок с четырьмя локо-слотами и двумя локомотивами; *б* — все возможные подцепки и перецепки локомотивов.

ствии с терминологией, введенной в [7, 8]. *Концы каждого отрезка задаются отображениями* (1)–(2).

(1) $$f_{Tr_{start}} : Tr \to (t, s);$$

(2) $$f_{Tr_{goal}} : Tr \to (t, s).$$

Множество локомотивов будем обозначать как $L = \{L_1, \ldots, L_m\}$. Их положение задается отображением

(3) $$f_{L_{start}} : L \to (t, s).$$

Будем считать, что скорости всех локомотивов одинаковы и равны v. С этой же скоростью движутся составы. Тангенсы углов наклона локо-слотов могут быть равны v и $-v$ в зависимости от направления движения состава.

План перевозок задается множеством локо-слотов и локомотивов на графиковой плоскости (рис. 1,a).

Определение 4. *Прямоугольник на графиковой плоскости, ограниченный осями координат и прямыми* $t = t_{fin}$ *и* $s = S_k$, *содержащий отрезки, соответствующие локо-слотам, концы которых заданы отображениями* (1)–(2), *и точки, соответствующие локомотивам, заданные отображением* (3), *будем называть графиком перевозок.*

Задача состоит в том, чтобы заданным множеством локомотивов (или его подмножеством) осуществить перевозки оптимальным образом. Локомотивы могут двигаться порожняком от станции прибытия предыдущего состава к станции отправления следующего. Под *оптимальностью* в настоящей модели будем понимать максимально возможное количество перевозок при как можно меньшем количестве локомотивов, участвующих в их реализации.

2.2. Конусы достижимости и их вложенность

График перевозок вместе с возможными подцепками и перецепками (рис. 1,b) можно рассматривать как евклидов граф. В нем имеются дуги двух типов: *дуги-перевозки* (локо-слоты) и *дуги-подцепки/перецепки*, обозначенные пунктирными линиями. Эти дуги соответствуют всем допустимым подцепкам локомотивов к составам и их перецепкам между составами. Углы наклона этих линий могут принимать значения из отрезка $[-v, v]$. Такой граф был назван *альтернативным* [8], поскольку на нем видны все возможные альтернативы для каждого локомотива в каждый момент времени, соответствующий его текущему положению на графике перевозок.

Определение 5. *Альтернативный граф — это гетерогенный евклидов граф с дугами двух типов: дуги-перевозки (локо-слоты) и дуги, обозначающие все возможные подцепки и перецепки локомотивов.*

В [9] на альтернативном графе был предложен динамический алгоритм, названный *алгоритмом сдвига фронта*, который находил локально-оптимальное решение в каждый момент t_i. Однако в условиях временных ограничений на работу локомотивов, когда некоторые локомотивы должны уйти на профилактику в моменты времени $t'_l < t_{fin}$, этот алгоритм оказался неприменим.

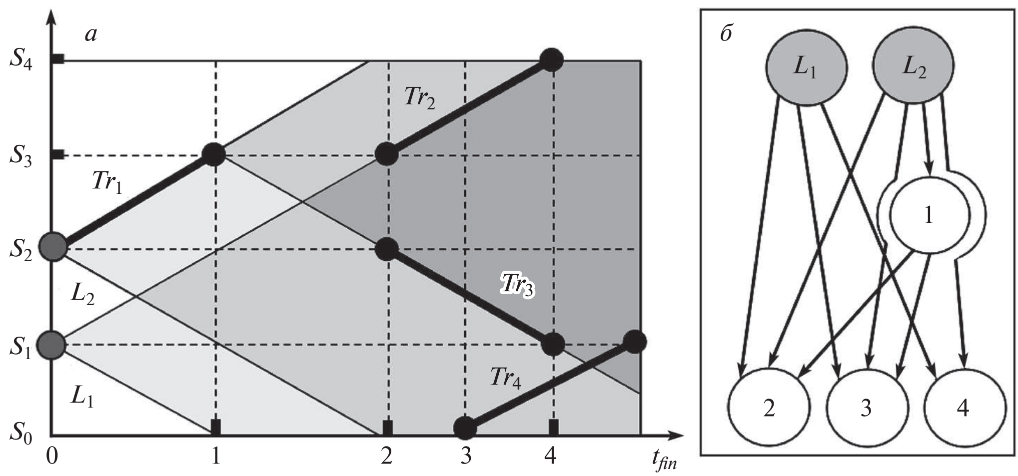

Рис. 2. *а* — Непустые конусы достижимости; *б* — граф вложенности конусов–вершины, соответствующие локо-слотам, представлены их номерами.

В настоящей работе введенный альтернативный граф модифицируется и преобразуется в обычный ориентированный граф с одним типом дуг. Для этого используется понятие конуса достижимости.

Определение 6. *Конусом достижимости с вершиной в точке* (t_i, S_j) *для данного локомотива или локо-слота называется выпуклый многоугольник на графиковой плоскости, ограниченный двумя прямыми, проходящими через точку* (t_i, S_j), *тангенсы углов наклона которых равны* v *и* $-v$ *соответственно, и прямыми, ограничивающими график перевозок:* $t = t_{fin}$, $s = S_0$, $s = S_k$. *Для локомотива* L_p *точка* (t_i, S_j) *задается его расположением* S_j *в указанный момент времени* t_i, *для локо-слота* Tr_q *она соответствует координате его правого конца:* $(t_i, S_j) = f_{Tr_{goal}}(Tr_q)$. *Внутренность конуса достижимости задается системой неравенств:*

$$\begin{cases} s - S_j \leqslant v(t - t_i); \\ s - S_j \geqslant -v(t - t_i); \\ 0 \leqslant t \leqslant t_{fin}; \\ S_0 \leqslant s \leqslant S_k. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, конус достижимости — это выпуклый многоугольник, имеющий от трех до пяти углов. Он образован пересечением неограниченного конуса, заданного двумя лучами скоростей перемещения локомотива, и ограниченного графика перевозок.

Внутри и на границах данного конуса достижимости лежат все локо-слоты, доступные для локомотива, находящегося в его вершине.

Построим конусы из окончаний всех локо-слотов и локомотивов. Получим набор конусов, вложенных друг в друга (рис. 2,*а*). На рисунке отсутствуют все пустые конусы (конусы, не содержащие ни одного локо-слота). Локо-слоты, имеющие пустые конусы, соответствуют конечным перевозкам.

Теперь можно построить *граф вложенности конусов* (рис. 2,*б*). Здесь вершинам соответствуют локомотивы и локо-слоты, а дуги указывают на вложенность их конусов. Нетрудно убедиться, что дуги графа вложенности соответствуют дугам, обозначенным пунктирными линиями на рис. 1,*б*. Этот граф, с некоторыми модификациями, описанными в разделе 4, будет основным предметом исследования.

Замечание 1. В графе вложенности теряется информация (имеющаяся на альтернативном графе) о том, какой длины путь должен пройти локомотив порожняком между двумя последовательными перевозками, и о времени простоя между ними. Для того чтобы две модели были полностью идентичны, дугам графа вложенности можно приписать веса, зависящие от длин соответствующих дуг альтернативного графа. Алгоритм построения плана перевозок будет представлен для графа без весов, затем опишем модификацию этого алгоритма для взвешенного графа.

Задача выполнения перевозок в терминах графа вложенности сводится к поиску его *минимального покрытия путями*. Формальные определения будут даны в следующем разделе.

Из рис. 2,*б* видно, что для данного графа покрытие будет содержать, как минимум, три пути — изолированная вершина также считается простым путем. Отсюда же сразу вытекает, что график, представленный на рис. 2,*а*, при наличии двух локомотивов невыполним полностью.

3. Задача о минимальном покрытии ациклического графа путями

Задача о нахождении минимального покрытия ациклического графа путями за полиномиальное время была решена около полувека назад. Одним из основных ее практических приложений стала оптимизация программного кода. Доказано, что в общем случае задача о нахождении оптимального покрытия ориентированного графа простыми путями, не пересекающимися по вершинам, является NP-сложной. Однако для ациклического графа было найдено изящное решение, сводящее эту задачу к задаче поиска максимального паросочетания в двудольном графе.

Дадим основные определения, следуя [16].

Пусть $D = (V, X)$ – ориентированный граф.

Определение 7. Множество $\{D_1, \ldots, D_k\}$ *подграфов* D, *где* $D_i = (V_i,\ X_i)$, *называется покрытием* D, *не пересекающимся по вершинам, если подмножества* V_i *являются разбиением множества вершин графа, т.е.* $V_i \cap V_j = \emptyset$, *если* $i \neq j$ *и* $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$. *Множество дуг* X_i *подграфа* D_i *состоит из всех дуг* $x_{kl} = (v_k, v_l)$, *таких, что* $v_k, v_l \in V_i$.

Определение 8. Размером покрытия $\{D_1, \ldots, D_k\}$ *называется число подграфов* k.

Количество дуг в покрытии равно $\sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

Определение 9. Покрытие $\{D_1, \ldots, D_k\}$ *будем называть минимальным, если для любого покрытия* $\{D_1, \ldots, D_l\}$ *выполняется неравенство* $l \geqslant k$.

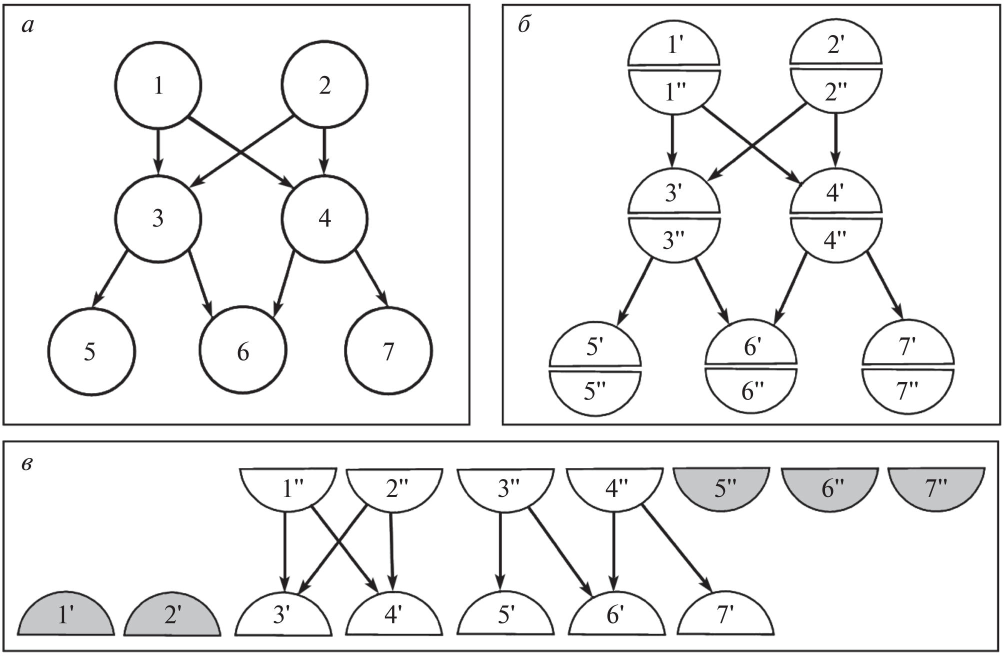

Рис. 3. Построение двудольного графа из произвольного ациклического графа: *а* — исходный граф; *б* — разделение вершин; *в* — соответствующий двудольный граф.

Определение 10. *Покрытие орграфа* $\{D_1, \ldots, D_k\}$ *называется покрытием путями, если все подграфы* D_i *– пути,* $i = \overline{1,k}$.

Будем предполагать, что изолированные вершины являются путями нулевой длины. В этом случае покрытие ориентированного графа путями всегда существует.

Определение 11. *Числом покрытия орграфа* $\zeta(D)$ *называется размер его минимального покрытия путями.*

Доказано [16], что $\zeta(D)$ также является размером такого покрытия орграфа путями, которое содержит максимальное число дуг в сравнении со всеми остальными покрытиями.

Поскольку дуги в рассматриваемой модели соответствуют вложенности конусов, их можно считать дугами потенциально возможных перецепок. Тогда если свести задачу об оптимальном назначении локомотивов к поиску покрытия путями графа вложенности, то число покрытия $\zeta(D)$ будет соответствовать минимальному необходимому числу локомотивов, а максимальное число дуг будет означать их оптимальное использование, т.е. максимальное количество осуществленных перевозок.

Определение 12. *Паросочетание в двудольном графе называется максимальным, если не существует паросочетания, содержащего большее число дуг.*

Замечание 2. Иногда в литературе такое паросочетание называют *наибольшим*, однако здесь будем придерживаться терминологии [16]; такая же терминология принята и в ряде современных источников (см., например, [20, с. 22; 21, с. 136]).

Опишем процесс сведения задачи поиска покрытия путями к поиску максимального паросочетания в двудольном графе. Каждую вершину исходного графа v_i разделим на две: v_i' и v_i''. В вершину v_i' входят все дуги, которые входили в v_i (и ничего не выходит), а из вершины v_i'' выходят все дуги, которые выходили из v_i (и ничего не входит). Все вершины со штрихом попадут в одну долю двудольного графа, все вершины с двумя штрихами в другую.

Процесс построения двудольного графа показан на рис. 3.

Доказано, что задача нахождения минимального покрытия путями сводится к задаче поиска максимального паросочетания на полученном двудольном графе.

4. Метод построения оптимального плана перевозок в задаче без ограничений

Построенный граф вложенности конусов позволяет свести решение задачи об оптимальном плане перевозок к поиску минимального покрытия путями ациклического графа. Перечислим задачи, решающиеся в данной работе, в порядке их усложнения.

1. Пусть есть только набор перевозок, представленных локо-слотами, которые необходимо осуществить в заданные моменты времени. Каково минимальное число локомотивов, способных осуществить весь план?

2. Пусть заданы план перевозок, множество локомотивов и их начальные положения. Возможно ли средствами данных локомотивов осуществить все перевозки? Если да, найти оптимальный план. Если нет, найти план, покрывающий наибольшее количество перевозок.

3. Пусть заданы план перевозок, множество локомотивов и их начальные положения. При этом некоторые локомотивы доступны не на всем интервале времени: они могут начать работу позже или завершить осуществление перевозок в момент времени, находящийся ранее горизонта планирования. Задача состоит в поиске назначений, позволяющих совершить максимальное количество перевозок в условиях заданных ограничений.

Формальное определение задачи с ограничениями будет дано в разделе 5. В настоящем разделе рассмотрим решения двух первых задач. Для этого структурируем и упростим граф вложенности.

4.1. Структурирование графа вложенности

В графе вложенности вместо вершин-локомотивов и вершин-локо-слотов будем рассматривать только вторые. Дадим формальное определение.

Определение 13. Граф вложенности $G = (N, E)$ — это ориентированный ациклический граф, в котором каждая вершина i соответствует локо-слоту Tr_i, а дуги соответствуют отношению вложенности конусов достижимости.

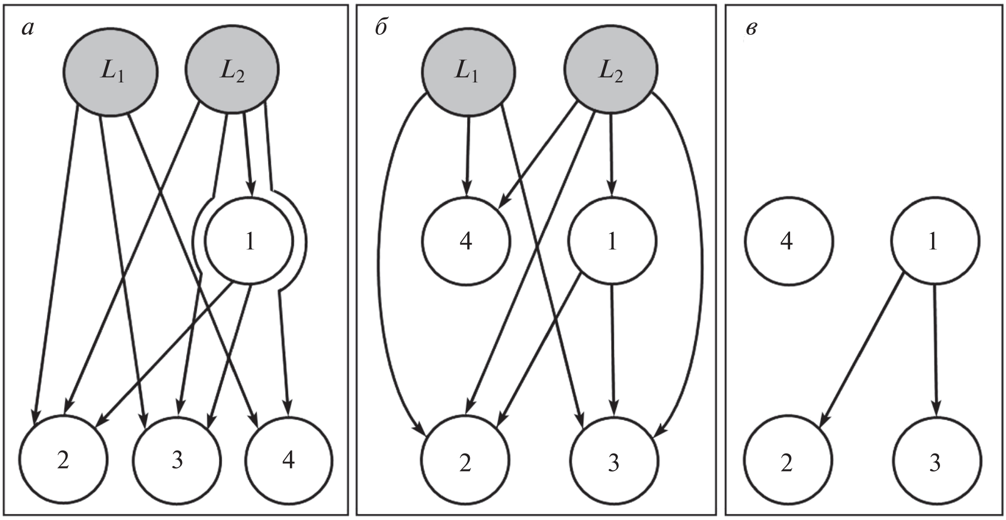

Рис. 4. Графы, соответствующие графику на рис. 2,*а*. Граф без слоев, совпадающий с рис. 2,*б*; *б* — тот же граф с послойной структурой; *в* — граф вложенности, соответствующий определению 13.

4.1.1. Послойная организация графа вложенности. Само построение графа G позволяет представить его в виде послойной структуры. Вершины, соответствующие локо-слотам, не вложенным ни в какие другие конусы, находятся в слое 1; вершины, вложенные в конусы локо-слотов слоя 1 (и не вложенные ни в какие иные конусы), находятся в слое 2 и т.д.

С этой точки зрения на графе вложенности, представленном на рис. 2,*б*, послойная структура нарушена. Несмотря на то что состав, соответствующий локо-слоту Tr_4, по времени отправляется и прибывает последним, он находится в слое 1, поскольку не принадлежит ни одному конусу локо-слотов. Соответствующий послойный граф представлен на рис. 4,*б,в*.

Формальное определение слоя графа вложенности зададим рекурсивно.

Определение 14. Все вершины графа вложенности G, не имеющие входящих дуг, принадлежат слою T_1. Слой T_k содержит все вершины i (и только их), имеющие путь длины 1 от слоя T_{k-1}.

Определение означает, что локо-слот, соответствующий вершине слоя T_k, вложен в $k-1$ последовательно вложенных конусов.

4.1.2. Редукция транзитивного замыкания. В отсутствие временных ограничений на локомотивы графы вложенности представляют собой транзитивное замыкание всех путей. Если граф содержит много слоев, а каждый слой содержит много вершин, в нем хранится большое количество избыточной информации. Кроме того, дуги транзитивного замыкания обозначают ситуацию, в которой при построении покрытия некоторые локо-слоты могут оказаться пропущенными. На рис. 5,*а*, например, дуга $1 \to 5$ означает, что локо-слот 3 будет пропущен, и такой план заведомо неоптимален, поскольку цепочка $1 \to 3 \to 5$ охватит оба локо-слота.

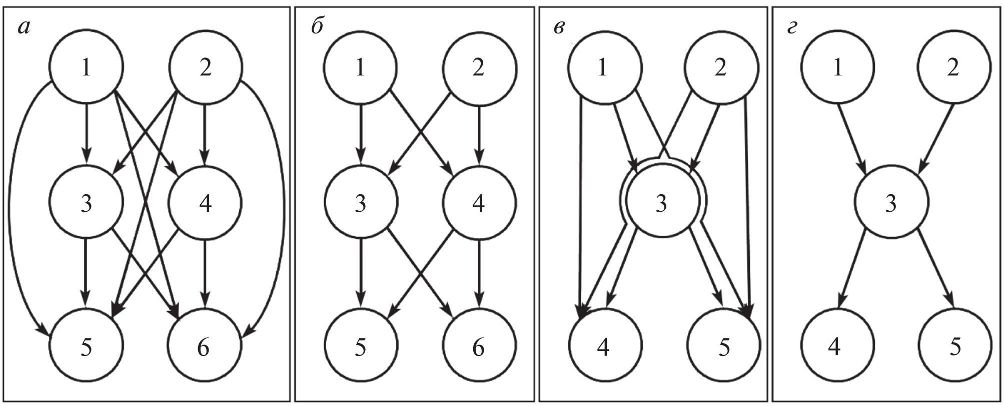

Рис. 5. *а*, *б* — эквивалентные относительно минимального покрытия графы: *а* — с дугами транзитивного замыкания; *б* — редуцированный граф. *в*, *г* — потеря решения при удалении дуг транзитивного замыкания: *в* — исходный граф; *г* — редуцированный граф.

В ряде случаев дуги транзитивного замыкания только усложняют поиск решения и их необходимо удалить. На рис. 5,*а,б* представлены графы с дугами транзитивного замыкания и без них. Очевидно, удаление этих дуг не повлияет на нахождение минимального покрытия, какой бы алгоритм его поиска ни был использован.

Однако в некоторых случаях удаление этих дуг влечет за собой потерю решения. Это хорошо видно на примере рис. 5,*в,г*. Если решать задачу составления расписания на графе из рис. 5,*г*, она не будет иметь решения. Притом что из рис. 5,*в* следует, что решение существует и оно не единственно.

Сформулируем ряд утверждений относительно возможности удаления транзитивного замыкания отношения вложенности без потери решений.

Определение 15. Графы, полученные из графа вложенности G удалением некоторых дуг транзитивного замыкания и имеющие то же множество минимальных покрытий путями, будем называть эквивалентными исходному графу.

Будем подразумевать, что каждой паре слоев (T_i, T_j) соответствует двудольный граф, содержащий все дуги с началом в слое T_i и концом в слое T_j.

Утверждение 1. Если в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} графа G количество вершин одинаково: $|T_{i-1}| = |T_i| = |T_{i+1}|$ и в каждом двудольном графе, образованном парой слоев (T_{i-1}, T_i), (T_i, T_{i+1}), существует совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный графы эквивалентны.

Доказательство. Наличие совершенных паросочетаний в каждой паре означает, что в трех слоях существует покрытие простыми путями длины 2. Оно будет являться минимальным покрытием по определению. Транзитивное замыкание в этом случае является избыточным.

Утверждение 2. Если в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} графа G количество вершин изменяется монотонно: $|T_{i-1}| \leqslant |T_i| \leqslant |T_{i+1}|$

или $|T_{i-1}| \geqslant |T_i| \geqslant |T_{i+1}|$ *и для каждой пары слоев* (T_{i-1}, T_i), (T_i, T_{i+1}) *при удалении любых вершин из слоя с большим их количеством в соответствующем двудольном графе будет существовать совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный граф эквивалентны.*

Доказательство. Условие утверждения означает, что в этих слоях существует такое покрытие простыми путями, что оно будет содержать столько путей длины 2, каково количество вершин в наименьшем слое. Вершины в среднем слое все войдут в пути длины 1. Полученное покрытие минимально для такого графа. Транзитивное замыкание в этом случае является избыточным.

Утверждение 3. Пусть в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} *графа* G *количество вершин в среднем слое* T_i *больше, чем в верхнем и нижнем:* $|T_i| > |T_{i-1}|$, $|T_i| > |T_{i+1}|$. *Если для слоев* T_{i-1}, T_{i+1} *при удалении любых* $|T_i| - |T_{i-1}|$ *и* $|T_i| - |T_{i+1}|$ *вершин соответственно из слоя* T_i *в полученных двудольных графах, образованных этими слоями с редуцированным слоем* T_i, *будет существовать совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный граф эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. В данных слоях будет существовать покрытие, содержащее количество путей длины 2, равное $\min(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|)$. Количество путей длины 1 будет равно $\max(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|) - \min(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|)$. Незадействованные вершины в слое T_i будут путями длины 0. При данной топологии ни одна дуга из слоя T_{i-1} в слой T_{i+1} не будет востребована в минимальном покрытии.

Первые три утверждения локальны. Они позволяют удалять дуги, идущие через слой. Следующее утверждение касается графа в целом. Оно позволяет найти *разбиение графа на независимые подграфы*. Под таким «разбиением» будем понимать отсутствие дуг транзитивного замыкания между подграфами.

Утверждение 4. Пусть в графе G *слой* T_i, $1 < i < p$, *где* p — *общее число слоев, имеет максимальное количество вершин и каждая пара слоев* T_j, T_s, $j < i$, $s > i$ *вместе со слоем* T_i *удовлетворяют условиям утверждения 3. Тогда граф, полученный удалением всех дуг транзитивного замыкания из слоев* T_{i-k} *в слои* T_{i+l}, $0 < k < i$, $0 < l \leqslant p - i$, *эквивалентен графу* G. *Если в графе* G *существует* h *слоев с максимальным количеством вершин (не считая первого и последнего слоя), то редуцированный граф, состоящий из* $h + 1$ *независимых подграфов, полученных удалением дуг транзитивного замыкания, соединяющих вершины, находящиеся по разные стороны от каждого из этих слоев, эквивалентен графу* G.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения 3. Любые два слоя, взятые выше и ниже T_i, будут соединяться только через вершины этого слоя. Транзитивное замыкание в данном случае избыточно.

Это утверждение, несмотря на громоздкость формулировки, достаточно наглядно. Оно говорит о том, что не может существовать путей максимальной длины из слоя выше T_i в слой ниже T_i, не содержащих вершин из T_i.

Редукция транзитивного замыкания позволяет существенно понизить размерность задачи. Двудольный граф, построенный из редуцированного графа G, распадется на $h+1$ несвязных подграфов, в каждом из которых максимальное паросочетание будет находиться независимо от остальных компонент связности.

В частности, если граф состоит из p слоев одинакового размера, как на рис. 5,*а, б*, двудольный граф будет состоять из $p-1$ компонент связности. Задача поиска покрытия графа путями сведется к поиску паросочетаний между каждыми двумя слоями в отдельности.

4.2. Построение оптимального плана перевозок в задаче без ограничений

Задача 1 состоит в определении числа локомотивов, необходимых для осуществления всех перевозок. Как следует из построения графа вложенности, первая задача из списка в начале раздела 4 решается автоматически. Минимальное покрытие графа путями определит наименьшее возможное количество локомотивов и оптимальный план перецепок (последовательность вершин внутри каждого пути из покрытия графа).

Замечание 3. Если дуги графа имеют веса, т.е. заданы штрафы локомотивов за простой и движение порожняком, как функции от длин дуг альтернативного графа (см. замечание 1 из раздела 2.2), решение будет состоять в поиске максимального паросочетания с минимальной суммой весов дуг во взвешенном двудольном графе, полученном из взвешенного графа вложенности. В таком виде задача сводится к классической линейной задаче о назначениях, для решения которой существует ряд полиномиальных алгоритмов.

Задача 2 заключается в том, чтобы при имеющемся множестве локомотивов и заданном их расположении приписать локомотивы максимальному количеству из полученных в задаче 1 путей графа.

Послойная структура графа удобна тем, что сразу дает ответ о минимальном количестве локомотивов, необходимых для осуществления всех перевозок.

Утверждение 5 (необходимое условие выполнения плана перевозок). *Для того чтобы все перевозки были осуществлены, необходимо, чтобы в каждом слое послойного графа было не более $|L|$ вершин, где $|L|$ – число локомотивов.*

Доказательство. Вершины, присутствующие в одном слое, недостижимы друг из друга. Поэтому никакую пару из перевозок, соответствующих этим вершинам, нельзя осуществить последовательно. Пусть в слое T_i содержится k вершин, $k > |L|$. Даже если в слоях выше и ниже T_i содержится число вершин меньшее, чем $|L|$, это не может компенсировать избыток вершин в T_i. Таким образом, для осуществления всех перевозок в слое T_i и, соответственно, во всем графе необходимо, как минимум, k локомотивов.

Следствие 1. Минимальное количество локомотивов, необходимое для осуществления заданного графика, находится как $\max_{i=1,\dots,p} |T_i|$, *где p – количество слоев его графа вложенности.*

Решение задачи 2. Пусть минимальное покрытие графа вложенности путями построено. Построим двудольный граф, в одной доле которого будут вершины–локомотивы, а в другой – вершины, соответствующие найденным путям. Дуги в этом графе обозначают вложенность конуса первой вершины пути в конус соответствующего локомотива. Таким образом, задача свелась к еще одному шагу по определению максимального паросочетания.

При построении максимального паросочетания *локомотивы–пути* возможно несколько исходов:

- Если каждому пути будет приписан локомотив, задача имеет оптимальное решение и весь план перевозок выполним. Количество локомотивов будет минимальным по построению минимального покрытия.
- Если число локомотивов меньше числа путей в покрытии, но все локомотивы входят в максимальное паросочетание, план перевозок невыполним полностью. При этом среди допустимых частичных решений, если их больше одного, можно найти оптимальное. В построенном двудольном графе *локомотивы–пути* припишем дугам веса: чем длиннее путь в графе вложенности, тем больше вес ведущих к нему дуг. Таким образом, паросочетание с максимальным весом, в котором участвуют все вершины–локомотивы, будет соответствовать осуществлению максимально возможного числа перевозок. Если при этом граф вложенности был взвешенным (см. замечания 1, 3), решение нужно оптимизировать, используя максиминную стратегию: суммарный штраф каждой последовательности перевозок можно считать весом соответствующей вершины, тогда среди полученных паросочетаний, максимальных по сумме весов дуг (если их более одного), нужно найти минимальное по суммарному весу (штрафу) вершин, обозначающих пути.
- Если в полученном максимальном паросочетании остались пути без локомотивов и при этом остались свободные вершины–локомотивы, это означает, что при данном расположении локомотивов все перевозки не могут быть осуществлены. При этом существует возможность, что найденное решение будет неполным: может оказаться, что некоторая последовательность перевозок, оставшаяся вне паросочетания, может быть частично осуществлена некоторым свободным локомотивом — не с первой перевозки, а со второй, третьей и далее, т.е. данный локомотив не успеет прибыть в пункт отправления первой перевозки (или нескольких первых перевозок) в нужный момент времени. Если такая ситуация возникла, будем считать, что попали в рамки задачи с ограничениями на локомотивы, только вместо раннего завершения здесь имеет место «позднее начало». Этот случай, как и случай, когда локомотивы доступны на ограниченном отрезке времени, будет исследован в следующем разделе (п. 5.1.2).

5. Метод построения оптимального плана перевозок в задаче с ограничениями

Если некоторый локомотив доступен не на всем отрезке времени $[0, t_{fin}]$, это означает, что у него есть временное ограничение на осуществление перевозок. Пусть локомотив L_j доступен на отрезке $[t_0^j, t_{fin}^j] \subset [0, t_{fin}]$. Тогда он

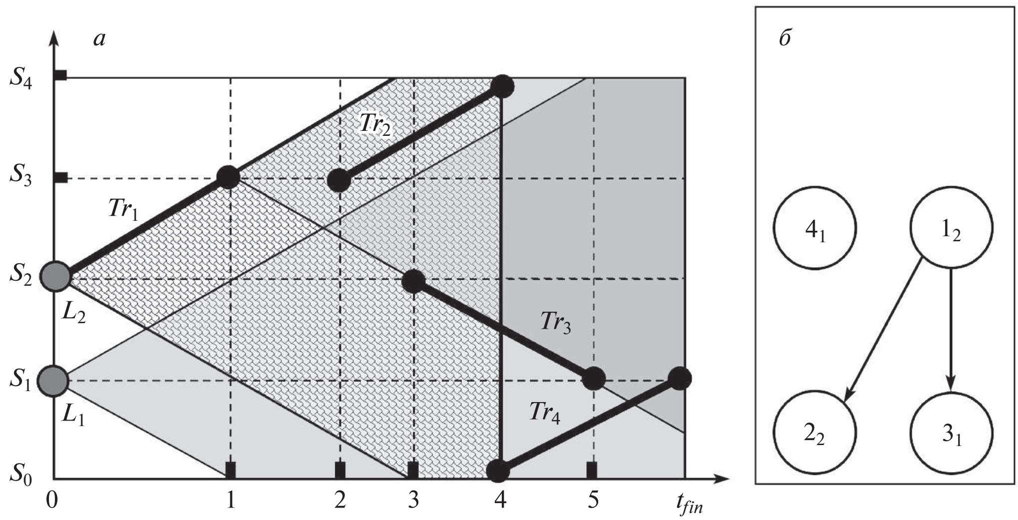

Рис. 6. График a и граф вложенности $б$ в задаче с ограничениями. Временное ограничение наложено на локомотив L_2.

не может осуществить перевозку, начинающуюся ранее t_0^j или заканчивающуюся позже t_{fin}^j. В этом случае третья строка в системе неравенств (4), описывающая конус достижимости локомотива L_j без ограничений, модифицируется следующим образом: $t_0^j \leqslant t \leqslant t_{fin}^j$.

Ситуация временного ограничения для локомотива L_2 изображена на рис. 6,a. Для этого локомотива имеет место: $t_0^2 = 0$, $t_{fin}^2 = 4 < t_{fin}$.

Временные ограничения, наложенные на локомотивы, делают не все пути в графе вложенности допустимыми для этих локомотивов — последовательность перевозок может быть не осуществима целиком. Это усложняет поиск оптимального решения, и даже ответ на вопрос о существовании решения для найденного покрытия становится нетривиальным.

5.1. Введение индексов локомотивов

Введем дополнительные характеристики вершин графа вложенности. Каждой вершине будем приписывать индексы, соответствующие номерам локомотивов, способных осуществить перевозку соответствующего локо-слота.

5.1.1. Ограничения «справа». Рассмотрим сначала временные ограничения «справа», т.е. завершение работы ранее горизонта планирования (рис. 6,a). Формально ограничение «справа» для локомотива L_j описывается неравенством $t_{fin}^j < t_{fin}$.

Утверждение 6. *В задаче без ограничений «справа» множество индексов каждой вершины из промежуточного или конечного слоя содержит в себе объединение индексов ее родителей.*

Утверждение справедливо, поскольку в отсутствие ограничений «справа» отношение вложенности транзитивно. Множество индексов вершины является объединением индексов ее родителей и, возможно, содержит некоторые новые индексы, соответствующие локомотивам с «поздним началом».

Тогда в терминах графа вложенности можно дать следующее определение ограничению «справа».

Определение 16. *Будем говорить, что локомотив L_j имеет ограничение «справа», если в графе вложенности существует хотя бы одна вершина начального или промежуточного слоя с индексом j такая, что j не является индексом хотя бы одного из ее потомков.*

Таким образом, если нет ограничений «справа», начальной вершине каждого пути достаточно поставить в соответствие локомотив, и этот локомотив гарантированно осуществит все последующие перевозки по цепочке вложенности.

Если некоторые локомотивы заканчивают работу раньше наступления горизонта планирования, такой алгоритм перестает работать. Из рис. 6,*б* видно, что путь $1 \to 3$ неосуществим ни первым, ни вторым локомотивом, хотя на рис. 4,*в* в таком же графе без меток последовательность перевозок $1 \to 3$ является допустимой.

При решении задачи с ограничениями первый этап остается неизменным: строится минимальное покрытие графа вложенности путями. Однако теперь недостаточно найти паросочетания между началами всех путей из найденного покрытия и локомотивами. Не каждая последовательность перевозок, составляющая путь, может быть осуществлена целиком некоторым локомотивом с ограничениями. Для того чтобы стало возможным корректное приписывание локомотива некоторому пути, необходимо и достаточно, чтобы индекс локомотива «протекал» из начальной вершины в конечную. На рис. 6,*б* видно, что в пути $1 \to 3$ индекс локомотива 2 не протек вниз.

Соответственно, не каждое решение задачи без ограничений будет таковым для задачи с ограничениями «справа». Необходимо осуществить проверку найденного решения на допустимость. Если оно допустимо, оптимальный план перевозок построен. В случае если найденные пути не удовлетворяют задаче с ограничениями, нужно осуществить модификацию решения. Методы модификации описаны в разделе 5.2.

5.1.2. Ограничения «слева». Ограничение «слева» в отличие от предыдущего нельзя задать сходным неравенством $t_0^j > 0$, потому что возможны ситуации, когда все локомотивы доступны с нулевого момента времени, но имеют *пространственные ограничения*, т.е. могут не успеть доехать ни до одного состава, соответствующего вершинам первого слоя.

Определение 17. *Будем говорить, что локомотив L_j имеет ограничение «слева», если в графе вложенности существует хотя бы одна вершина промежуточного или конечного слоя с индексом j такая, что j не принадлежит объединению индексов ее родителей.*

Это определение сочетает в себе как временные, так и пространственные ограничения.

При ограничении «слева» проблема поиска решения состоит в том, что паросочетание, в котором участвуют все пути, без дополнительных преобразований построить невозможно: при построении паросочетания локомотивов и путей нельзя сопоставить пару *локомотив–путь*, если путь доступен для локомотива не с первой вершины.

Отличие ограничений «слева» и «справа» состоит в том, что при ограничениях «справа» может существовать паросочетание локомотивы–пути, содержащее все пути, которое из-за ограничений не является полностью допустимым (существуют перевозки, находящиеся ближе к горизонту планирования, для которых локомотивы окажутся неподходящими). Такое решение можно попытаться исправить, перераспределив пути между локомотивами или совершив обмен участками между двумя и более путями. В некоторых случаях при ограничениях «справа» можно добиться того, чтобы все перевозки были выполнены.

При существовании ограничений «слева» для полученного минимального покрытия может не существовать паросочетания локомотивы–пути, содержащего в себе все пути и все локомотивы.

Казалось бы, если при построении максимального паросочетания локомотивы–пути некоторые пути и некоторые локомотивы остались без пары, то даже при исправлении решения оно все равно не может быть полным — если первой перевозке (или нескольким первым) нельзя назначить локомотив, то полного покрытия не существует. Однако, как будет показано в следующем разделе, это не всегда так.

5.2. Дублирование вершин

Произведем еще одну модификацию графа вложенности, без которой существующее решение задачи назначения локомотивов с учетом ограничений не всегда может быть найдено. С ее помощью задачи ограничений «слева» и «справа», несмотря на их значительные отличия, становятся симметричными и решаются одинаково.

Введем операцию *дублирования вершин*. Прежде чем давать формальное определение, рассмотрим ее на примере. Граф вложенности на рис. 7,*а* содержит вершины с индексами локомотивов. В нем представлены сразу оба типа ограничений: метка локомотива 3 появляется лишь на втором слое в вершине 3 (ограничение «слева»). Метка локомотива 2 заканчивается на этом же слое в вершине 4 (ограничение «справа»). При построении минимального покрытия этого графа какие бы дуги ни были выбраны, получатся два пути — из первого слоя в третий. При этом никакое решение не будет допустимым в рамках ограничений. Конечная вершина пути, начавшегося в вершине 2, не будет иметь с ней общих индексов, будь то вершина 5 или 6. При этом локомотив 3 не имеет возможности совершить ни одну перевозку.

Чтобы избежать такой ситуации, продублируем вершины из внутренних слоев, в которых проявляются ограничения, т.е. некоторый индекс встречается впервые или, наоборот, заканчивается, и вынесем дубли соответственно в первый и последний слои. Это является указанием на то, что они могут стать граничными — начальными или конечными — вершинами некоторого пути. На рис. 7,*б* дубль вершины 3 будет вынесен в верхний слой из-за

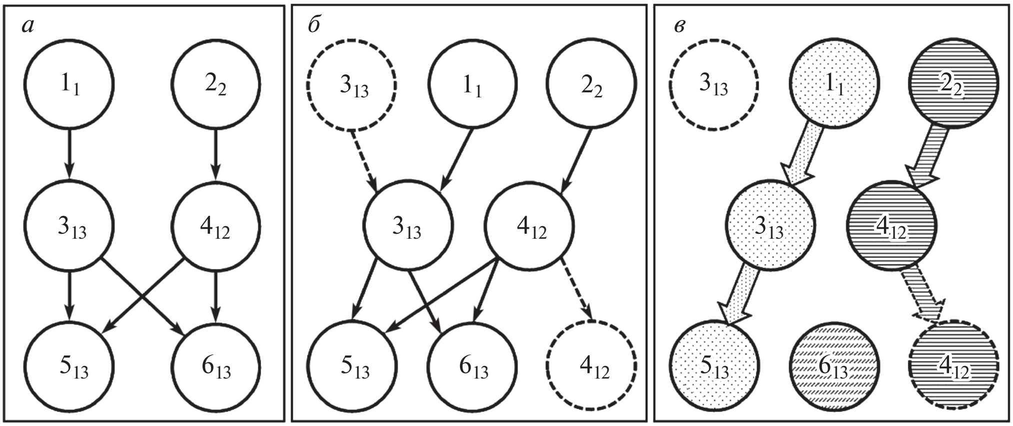

Рис. 7. Дублирование вершин во внешние слои: *а* — исходный граф, *б* — дубли двух вершин в верхний и нижний слои, *в* — минимальное покрытие с учетом ограничений: путь для локомотива $L_1 - 1 \to 3 \to 5$, путь для локомотива L_2 — $2 \to 4$ (и вспомогательная вершина 4-дубль), путь, состоящий из одной вершины, для локомотива L_3 — 6; вершина-дубль 3 не вошла в полученное покрытие.

появившегося у нее индекса 3, дубль вершины 4 будет вынесен в нижний слой, поскольку метка 2 на ней прервалась.

Каждая вершина-дубль связана со своим «оригиналом» дугой. Других новых дуг при этой операции не появляется.

Часть вершин-дублей может оказаться избыточной. На рис. 7,*в*, например, избыточна вершина-дубль 3. Однако это действие позволит найти решение задачи с ограничениями, если оно существует.

Опишем формальную процедуру поиска вершин для дублирования и образования дублей.

Определение 18. *Будем говорить, что задача о назначении локомотивов является задачей с ограничениями, если хотя бы один локомотив имеет ограничение «слева» или «справа».*

При ограничении «слева» все вершины промежуточных (или конечного) слоев, в которых появляется индекс, не принадлежащий их родителям, будут потенциальными *точками входа* для соответствующего локомотива при решении задачи о назначениях. Для всех точек входа создаются дубли, которые выносятся на верхний слой. Из каждой вершины-дубля выходит единственная дуга, соединяющая ее с «оригиналом».

Ограничение локомотива L_j «справа» означает, что индекс j в некоторой вершине промежуточного слоя встречается в последний раз и дальше вниз «не протекает».

Все вершины промежуточных слоев, в которых индекс встречается в последний раз, являются потенциальными *точками выхода* для соответствующего локомотива. Для них также создаются дубли и выносятся в нижний слой. При этом добавляется дуга, соединяющая вершину-оригинал и ее дубль.

При поиске минимального покрытия графа путями вершины-дубли участвуют в формировании путей в последнюю очередь, если ни одной «оригинальной» вершины нельзя больше задействовать. Это свойство достигается взвешиванием дуг. Дугам, соединяющим вершины-дубли с обычными вершинами, назначаются заведомо большие штрафы. При поиске максимального паросочетания с минимальным весом такие дуги будут задействованы в последнюю очередь.

Т е о р е м а 1. *Если решение задачи с ограничениями на локомотивы существует, оно представляет собой паросочетание между некоторым подмножеством локомотивов и всеми путями, составляющими минимальное покрытие графа вложенности с дублированными вершинами* (*за исключением, возможно, некоторых изолированных вершин-дублей*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пример, представленный на рис. 7, показывает, что дублирование вершин для некоторых ограничений является необходимым условием нахождения решения. Докажем его достаточность для произвольного графа и произвольных ограничений.

По построению для каждого локомотива с любым ограничением («слева», «справа» или обоими сразу) в графе с дублированными вершинами будут присутствовать пути максимально возможной длины, не являющиеся подпутями других путей, — при этом начала и/или концы таких путей будут вершинами-дублями. Другими словами, в графе с дублированными вершинами к каждому пути с ограничениями добавляется ответвление в первый или последний слой, соответствующее пути без ограничений. То есть в этом графе для любой начальной вершины с любым набором индексов существует такой путь, что хотя бы один индекс для него «протечет» с первого слоя в последний. Следовательно, для каждого пути в графе с дублированными вершинами существует, по крайней мере, один подходящий локомотив.

При этом пути, начинающиеся или заканчивающиеся вершинами-дублями, снимают ограничения с локомотивов, и задача сводится к задаче без ограничений.

Для задачи без ограничений существование решения равносильно существованию паросочетания между некоторым подмножеством локомотивов и всеми путями минимального покрытия за исключением путей, представляющих собой изолированные вершины-дубли.

Теорема 1 говорит о том, что построен граф, на котором решение задачи с ограничениями, если оно существует, может быть найдено. В следующем разделе опишем процесс поиска этого решения.

5.3. Поиск решения в задаче с ограничениями на локомотивы

5.3.1. Проверка найденного покрытия графа на допустимость. На первом шаге осуществим дублирование вершин.

Далее, найдем произвольное минимальное покрытие путями с помощью алгоритма, описанного в разделе 3.

После нахождения этого минимального покрытия графа вложенности нужно каждому пути назначить доступный локомотив. Дублирование вер-

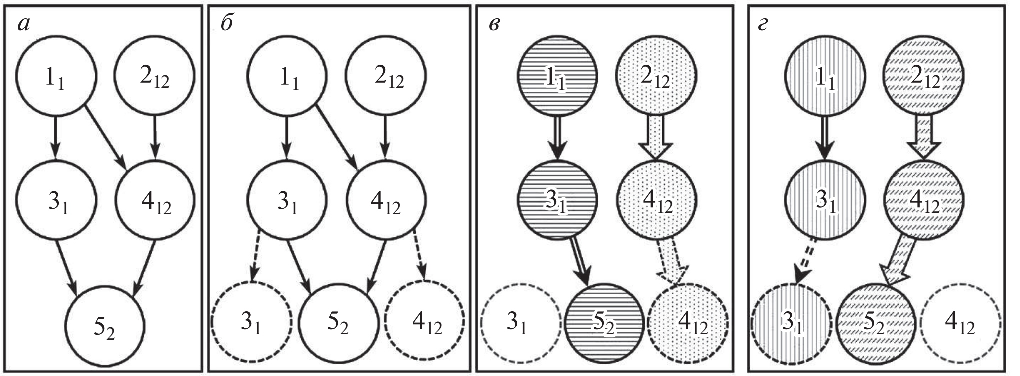

Рис. 8. Поиск минимальных покрытий: *а* — граф вложенности; *б* — граф с дублированными вершинами 3 и 4; *в* — недопустимое покрытие в задаче с ограничениями; *г* — допустимое покрытие.

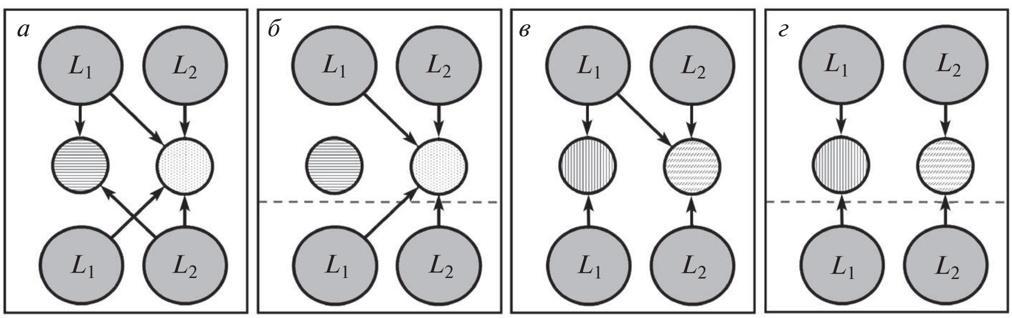

Рис. 9. Трехслойные графы, соответствующие двум минимальным покрытиям графа вложенности на рис. 8,*а*: *а*, *б* — графы, соответствующие покрытию на рис. 8,*в*; *в*, *г* — графы, соответствующие покрытию на рис. 8,*г*. На рис. *в* и *г* удалены дуги, несимметричные относительно среднего слоя.

шин в верхний слой автоматически снимает ограничения «слева», но ограничения «справа» нужно отслеживать отдельно. Каждый локомотив должен быть доступен на протяжении всего пути – не только в его начале, но и в конце. Поэтому нужно следить не только за стартовыми, но и за конечными вершинами путей.

На рис. 8 приведен пример двух найденных минимальных покрытий. Покрытие на рис. 8,*в* недопустимо при ограничении на первый локомотив, покрытие на рис. 8,*г* допустимо — оно описывает оптимальный план перевозок и при этом содержит дублированную вершину. В окончательном решении все дубли должны быть удалены.

Пусть в графе вложенности построено минимальное покрытие путями. Построим новый *трехслойный граф* следующим образом. В среднем слое расположим вершины, каждая из которых представляет собой путь в найденном покрытии. Верхний и нижний слои одинаковы. В них расположены вершины–локомотивы. Соединим эти слои следующим образом. Из верхнего слоя в средний ведут дуги, соединяющие локомотивы с теми путями, в *начальных* вершинах которых присутствуют соответствующие индексы. Из нижнего слоя в средний ведут дуги, соединяющие локомотивы с теми путями, в *конечных* вершинах которых присутствуют соответствующие индексы. На рис. 9,*а* и 9,*в* построены трехслойные графы, соответствующие найденным покрытиями на рис. 8,*в* и 8,*г* соответственно.

Допустимыми являются только те назначения, для которых в этом графе есть дуги от одноименных вершин сверху и снизу в средний слой. На рис. 9,*б* и 9,*г* оставлены только такие дуги. После того как непарные дуги удалены, получается граф, симметричный относительно среднего слоя. В силу симметричности нижний слой можно отсечь – это показано пунктирными линиями на рис. 9,*б* и 9,*г*. Тогда решение задачи с ограничениями сведется к поиску паросочетания в полученном двудольном графе, содержащего все вершины, соответствующие путям. Если число путей и локомотивов одинаково, паросочетание должно быть совершенным.

Если, как на рис. 9,*б*, совершенного паросочетания не существует, должен быть предложен алгоритм, позволяющий «исправить» все недопустимые пути в найденном минимальном покрытии и обладающий невысокой вычислительной сложностью.

Дадим следующее определение недопустимого пути.

Определение 19. Недопустимый путь — это путь в графе вложенности, в котором множества индексов начальной и конечной вершин имеют пустое пересечение.

5.3.2. Эвристический алгоритм перестроения недопустимых путей в минимальном покрытии. В ходе решения задачи был предложен ряд дальнейших преобразований графа, а также последовательность алгоритмов для нахождения решения во все более редких исключениях, обладающих значительной вычислительной сложностью. В настоящей работе приведем эвристический алгоритм, который способен найти допустимое решение в большинстве случаев (см. замечание 4 ниже).

Неформально его можно проиллюстрировать рис. 10, на котором представлен трехслойный граф из рис. 8,*а* и его последующее исправление.

Предложенный эвристический алгоритм ищет новое совершенное паросочетание по очереди в каждом независимом подграфе, т.е. таком подграфе, который соответствует изолированному двудольному графу (раздел 4.1.2).

Найдя недопустимый путь (обозначим его как $Path_i$), в каждом независимом подграфе по очереди нужно выполнить следующие действия.

1. Удалить дугу, принадлежащую $Path_i$. Построить новое совершенное паросочетание в соответствующем двудольном графе. Если оно существует и новый путь, соответствующий началу пути $Path_i$, стал допустимым, не испортив другие пути, то выход.

2. Если оно существует и новый путь недопустим, перейти к п. 1, оставаясь в этом же независимом подграфе.

3. Если в данном независимом подграфе нельзя найти дугу, приводящую к безопасному исправлению пути, не портящему другие пути (т.е. удалены все

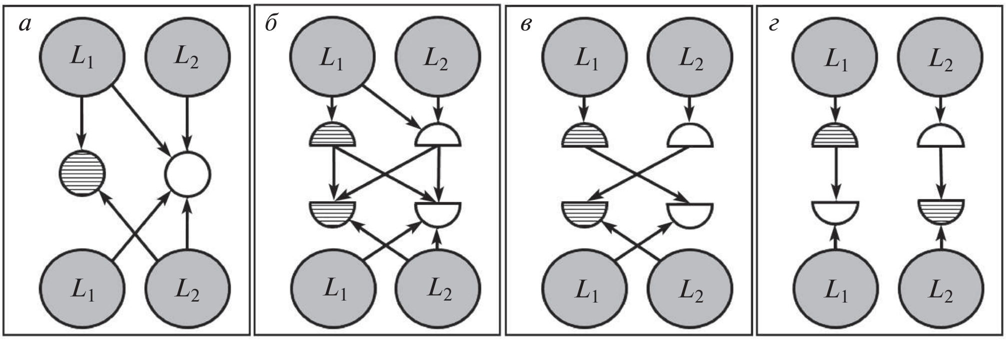

Рис. 10. Построение допустимого покрытия: *а* — трехслойный граф, для которого не существует допустимого покрытия; *б* — «раздвигание» путей; *в* — обмен двух путей участками; *г* — допустимое покрытие.

дуги, описанные в п. 1), вернуть все удаленные дуги и перейти в следующий подграф.

4. Если путь исправлен.

- Если покрытие стало допустимым, решение найдено; выход.
- Если существуют другие недопустимые пути, перейти к п. 1.

Замечание 4. Этот алгоритм сможет найти допустимое покрытие во всех случаях, когда исправления, приводящие к нему, таковы, что все они могут быть сделаны с помощью одного обмена участками двух путей, как показано на рис. 10. Если же нужно делать более одного обмена между путями — как последовательно в разных подграфах, так и параллельно в одном подграфе (например, циклическую перестановку окончаний нескольких путей), то этот алгоритм может не привести к решению. Однако такие случаи являются скорее исключениями. Для них разработаны точные методы решения, которые остались за рамками данной статьи.

6. Заключение

В работе предложена новая графовая модель перевозок на линейном участке железной дороги. Построен граф вложенности, который позволяет применить для решения задачи об оптимальных назначениях статические графовые алгоритмы.

Поиск решения для задачи без временных ограничений на локомотивы состоит из двух этапов. В этом случае задача сводится к поиску минимального покрытия ациклического графа путями. А эта задача, в свою очередь, сводится к задаче нахождения максимального паросочетания на двудольном графе и соответственно имеет полиномиальную сложность.

При наличии временных ограничений на локомотивы добавляется еще три этапа. Сначала преобразуется граф вложенности — вершинам добавляются индексы локомотивов и происходит дублирование выделенных вершин. Затем строится минимальное покрытие нового графа путями, это покрытие проверяется на допустимость. Если покрытие недопустимо, т.е. некоторые пути соответствуют последовательностям перевозок, которые невозможно осуществить одним локомотивом, происходит преобразование покрытия. С его помощью строятся новые пути, описывающие допустимые последовательности перевозок, т.е. последовательности, которые можно осуществить некоторым локомотивом от начала и до конца.

Предложен эвристический алгоритм, превращающий недопустимое покрытие в допустимое. Он имеет невысокую сложность и хорошую эффективность.

Следует отметить что рассматриваемая графовая модель о назначениях во многом совпадает с моделью «умного» производства (см. [22]), а разработанные алгоритмы оптимального назначения могут быть применены для управления роботизированным производством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall: United States, 1993.
2. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии: Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
3. *Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В.* Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.
4. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах. СПб.: ДиаСофтЮП, 2002.
5. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов н/Д : Изд-во Южного федерального ун-та, 2009.
6. *Ерусалимский Я.М.* Потоки в сетях с нестандартной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2012. № 1. С. 5–7.
7. *Matyukhin V.G., Shabunin A.B., Kuznetsov N.A., Takmazian A.K.* Rail Transport Control by Combinatorial Optimization Approach // 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies. 2017. Conference Proceedings. V. 1. P. 419–422.
8. *Такмазьян А.К., Шабунин А.Б.* Приложение метода оптимального сетевого потока к задаче подбора локомотивов для грузовых поездов на Восточном полигоне // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 6. С. 94–106.
9. *Жилякова Л.Ю., Кузнецов Н.А., Матюхин В.Г., Шабунин А.Б., Такмазьян А.К.* Графовая модель распределения локомотивов для грузовых перевозок на линейном участке железной дороги. Задача о максимальном по включению покрытии графика // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 65–75.
10. *Ahuja R.K., Liu J., Orlin J.B., Sharma D., Shughart L.A.* Solving Real-Life Locomotive Scheduling Problems // Transport. Sci. 2005. V. 39. No. 4. P. 503–517.
11. *Jaumard B., Tian H.* Multi-Column Generation Model for the Locomotive Assignment Problem // Proc. of 16th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS'16). 2016. P. 6:1–6:13.
12. *Азанов В.М., Буянов М.В., Иванов С.В., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Оптимизация локомотивного парка, предназначенного для перевозки грузовых составов // Тр. 3-й научно-техн. конф. ИСУЖТ-2016. С. 94–96.

13. *Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. Вып. 38. С. 161–169.

14. *Архипов Д.И., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Использование метода программирования в ограничениях для решения задачи о назначении локомотивов и локомотивных бригад на грузовые перевозки // Тр. 6-й Межд. научно-технич. конф. "Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте" (ИСУЖТ-2017, Москва). М.: ОАО НИИАС, 2017. С. 56–59.

15. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // АиТ. 2018. № 12. С. 142–166.

    Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. The Decomposition Problem for the Set of Paths in a Directed Graph and Its Application // Autom Remote Control. 2018. V. 79. P. 2217–2236.

16. *Boesch F.T., Gimpel J.F.* Covering the Points of Digraph with Point-Disjoint Paths and Its Application to Code Optimization // J. Associat. Comput. Machin. 1977. V. 24. No. 2. P. 192–198.

17. *Noorvash Sh.* Covering the Vertices of a Graph by Vertex-Disjoint Paths // Pacific J. Math. 1975. V. 58. No. 1. P. 159–168.

18. *Jackson B., Ordaz O.* Chvátal–Erdös Conditions for Paths and Cycles in Graphs and digraphs. A survey // Discret. Math. 1990. V. 84. No. 3. P. 241–254.

19. *Chvátal V., Erdös P.* A note on Hamilonian circuits // Discret. Math. 1972. No. 2. P. 111–113.

20. *Алескеров Ф., Хабина Э., Шварц Д.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. 2-е изд. перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.

21. *Рубчинский А.А.* Дискретные математические модели. Начальные понятия и стандартные задачи. М.: Директ-Медиа, 2014.

22. *Каляев И.А., Капустян С.Г.* Метод мультиагентного управления «умным» интернет-производством // Робототехника и техническая кибернетика, № 1 (18), Санкт-Петербург, ЦНИИ РТК, 2018, С. 34–48.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 31.10.2019

После доработки 14.10.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

© 2021 г. Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ, д-р физ.-мат. наук (ludne@mail.ru), А.В. КЕБА (mir.na.mig7@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного MAP-потока (Markovian Arrival Process) с n состояниями, являющегося одной из математических моделей реальных информационных потоков сообщений. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний исследуемого потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты расчетов оценок состояний на основании построенной имитационной модели обобщенного MAP-потока событий.

Ключевые слова: обобщенный MAP-поток событий с произвольным числом состояний, оптимальное оценивание состояний, апостериорные вероятности, критерий максимума апостериорной вероятности.

DOI: 10.31857/S0005231021050056

1. Введение

Интенсивное развитие компьютерных систем, расширение информационных сетей связи дало толчок к формированию широкой сферы приложений аппарата теории массового обслуживания (ТМО), а именно: проектирование, внедрение, эксплуатация информационно-вычислительных сетей, систем спутниковой связи, телекоммуникационных сетей и т.п. Это стало причиной введения в рассмотрение новой математической модели входящего потока событий, адекватно описывающей реальные информационные потоки случайных событий.

Так как зачастую на практике все параметры потока известны частично или полностью неизвестны, или изменяются со временем (нередко изменения носят случайный характер), то в качестве математических моделей реальных потоков событий в середине 80-х годов прошлого века вошли в рассмотрение дважды стохастические потоки. Такие потоки характеризуются случайностью моментов времени наступления событий в потоке, представлением интенсивности потока как случайного процесса и подразделяются на два класса: 1) интенсивность потоков есть непрерывный случайный процесс [1]; 2) интенсивность потоков представляет собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [2, 3]. Потоки второго класса, к которым относится обобщенный MAP-поток событий с произвольным числом состояний [4], в [2] получили название MC-потоков (Markov Chain).

Дважды стохастические потоки событий, как правило, являются коррелированными потоками. В этой связи исследование как самих потоков, так и систем массового обслуживания (СМО), составной частью которых являются коррелированные входящие потоки событий, является актуальной задачей. Исчерпывающий анализ современного состояния теории очередей с коррелированными потоками приведен в книге [5].

При исследовании дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат наблюдения за моментами времени наступления событий: 1) оценка состояний (фильтрация) потока событий [6–11]; 2) оценка параметров потока [12–17].

В данной статье решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний потока, согласно которому решение о состоянии выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Критерий обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения.

2. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный MAP-поток событий (далее — поток), сопровождающий процесс $\lambda(t)$ которого является случайным кусочно-постоянным принципиально ненаблюдаемым процессом с n состояниями: $S_1, \ldots, S_n$. Если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, то будем говорить, что имеет место i-е состояние (S_i) процесса $\lambda(t)$, причем $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии ($i = \overline{1, n}$) определяется случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i-м состоянии, т.е. $\lambda(t) = \lambda_i$, то в момент окончания i-го состояния происходит следующий розыгрыш состояний: 1) наступает событие потока в i-м состоянии, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е состояние с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$; 2) не наступает событие потока в i-м состоянии, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е состояние с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$. При этом выполняется условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} P_0(\lambda_j|\lambda_i) + \sum_{j=1}^{n} P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

З а м е ч а н и е 1. Обобщение MAP-потока событий с произвольным числом состояний заключается во введении вероятности $P_0(\lambda_i|\lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в i-е без наступления события потока.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеет вид

$$D = \|D_0|D_1\|,$$

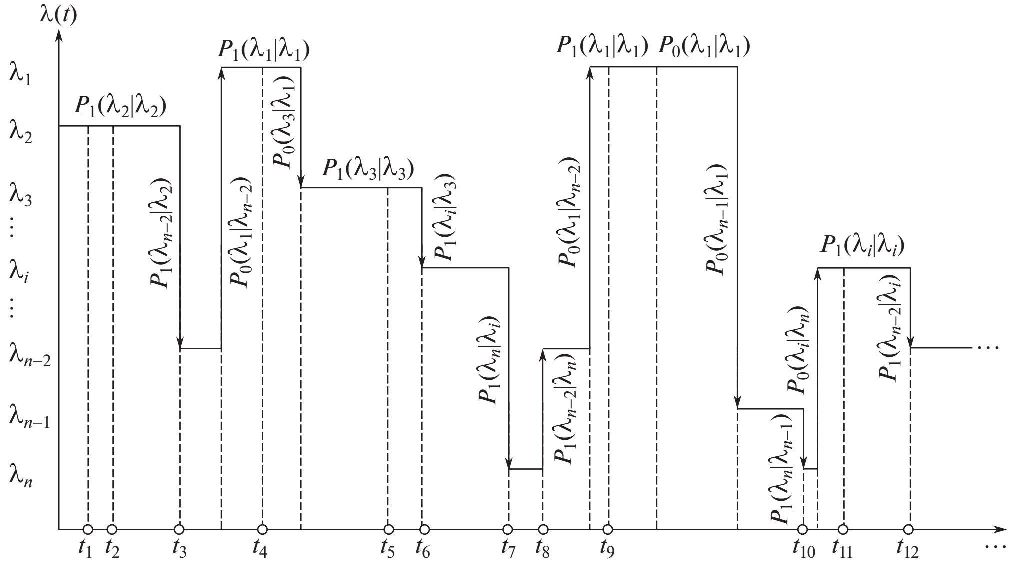

Рис. 1. Реализация обобщенного MAP-потока событий с n состояниями.

где

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -\lambda_1(1-P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -\lambda_2(1-P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) \\ \lambda_3 P_0(\lambda_1|\lambda_3) & \lambda_3 P_0(\lambda_2|\lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_0(\lambda_n|\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1-P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{Vmatrix}_{n\times n},$$

$$D_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n|\lambda_2) \\ \lambda_3 P_1(\lambda_1|\lambda_3) & \lambda_3 P_1(\lambda_2|\lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_1(\lambda_n|\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n|\lambda_n) \end{Vmatrix}_{n\times n}.$$

Элементы $d_{ii}^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$, матрицы D_0 — интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком; элементы $d_{ij}^{(0)}$ — интенсивности переходов из состояния i в состояние j без наступления события, $i,j=\overline{1,n}$, $i\neq j$. Элементами $d_{ij}^{(1)}$ матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j с наступлением события, $i,j=\overline{1,n}$.

Утверждение 1. *Процесс $\lambda(t)$ для обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний является скрытым марковским процессом.*

Одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и обобщенного MAP-потока событий с n состояниями изображена на рис. 1, где $t_1, t_2, \ldots$ — моменты наступления событий.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t необходимо получить явный вид апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t_1, \ldots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i|t_1, \ldots, \underline{t_m, t)} = w(\lambda_i|t)$ того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, при условии, что известна реализация $t_1, \ldots, t_m$ (наблюдения) моментов времени наступления событий потока на интервале $(t_0; t)$, где t_0 — момент начала наблюдения, t — момент окончания наблюдения.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами пренебрегаем и без ограничения общности полагаем $t_0 = 0$.

Оптимальное оценивание состояния процесса $\lambda(t)$ в смысле минимума полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения [18] осуществляется по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в момент времени t: если $w(\lambda_i|t) \geqslant w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

3. Алгоритм оптимальной оценки состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний

3.1. Вывод рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей состояний

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$ и время t изменяется дискретно с шагом Δt: $t^{(l)} = l\Delta t$, $l = 0, 1, \ldots$ [19]. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(l)}, r_l)$, где $\lambda^{(l)} = \lambda(l\Delta t)$ — значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)} = l\Delta t$ ($\lambda^{(l)} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$); $r_l = r_l(\Delta t) = r(l\Delta t) - r((l-1)\Delta t)$ — число событий потока, наступивших на интервале времени $((l-1)\Delta t; l\Delta t)$ длительности Δt, $r_l = 0, 1, \ldots$. Поскольку на интервале $(-\Delta t; 0)$ наблюдение за потоком не производится, то r_0 можем положить произвольным, например $r_0 = 0$.

Утверждение 2. *Случайный процесс $(\lambda^{(l)}, r_l)$ для обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний является марковским процессом.*

Введем $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \ldots, r_m)$ — последовательность значений количества наблюденных событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((l-1)\Delta t; l\Delta t)$ длительности Δt, $l = \overline{0, m}$; $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ — последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(l\Delta t)$ в моменты времени $l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$).

Введем $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ — совместную вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ и $\mathbf{r}_m$; $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}|\mathbf{r}_m)$ — условная вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$; $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)$ — условная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$, $w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1})$ — условная вероятность значения $\lambda^{(m+1)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_{m+1}$.

Для двумерного марковского случайного процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей [20]:

$$w\left(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}, \tag{1}$$

где $p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}) = p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m)$ — вероятность перехода процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$ за один шаг Δt.

Рассмотрим вероятность $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)}|r_0(\Delta t), r_1(\Delta t), \ldots, r_m(\Delta t))$. Компонента $r_l(\Delta t) = r(l\Delta t) - r((l-1)\Delta t)$ вектора $\mathbf{r}_m$ зависит от текущего времени $t^{(l)} = l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$; при этом $t^{(m)} = m\Delta t = t$ — момент окончания наблюдения. Тогда

$$\mathbf{r}_m = \left(r_0(t^{(0)}), r_1(t^{(1)}), \ldots, r_m(t^{(m)})\right) =$$
$$= \left(r_0(t=0), r_1\left(\frac{t}{m}\right), r_2\left(\frac{2t}{m}\right), \ldots, r_m(t)\right) = \mathbf{r}_m(t),$$

т.е. вектор наблюдений $\mathbf{r}_m$ является функцией времени t $\left(t^{(l)} = \frac{l}{m}t\right)$.

В связи с этим $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m(t)) = w(\lambda^{(m)}|t)$; $w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}(t+\Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)}|t+\Delta t)$.

Тогда рекуррентное соотношение (1) принимает вид

$$w\left(\lambda^{(m+1)}|t+\Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}. \tag{2}$$

Утверждение 3. В силу конструкции случайного процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ и его марковости переходная вероятность в (2) для обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний выпишется в виде

$$p\left(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) =$$
$$= p\left(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right).$$

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$ в (2), т.е. на интервале $(t; t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m + 1)\Delta t$, нет событий обобщенного MAP-потока. Этот случай описывает поведение апостериорной вероятности на интервале времени между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, наступления соседних событий потока. Положим в (2) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_i$. Тогда с учетом утверждения 3 рекуррентное соотношение (2) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)}|t)$, $w(\lambda^{(m+1)}|t + \Delta t)$ состояний обобщенного MAP-потока запишется в виде

$$w\left(\lambda_i|t+\Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)})p(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)},\lambda^{(m+1)}=\lambda_i)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n}\sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)})p(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)},\lambda^{(m+1)})}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i|t+\Delta t) = 1,\ i = \overline{1,n}.$$

3.2. Явный вид апостериорных вероятностей

Найдем вероятность перехода $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i)p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)$, $i = \overline{1,n}$, в формуле (3).

Введем событие $(\lambda^{(m)} = \lambda_i, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)$ — процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_i, и на интервале $(t; t + \Delta t)$ не наступает событие потока, и в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i. Тогда вероятность описанной ситуации представляется в виде

$$p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right) p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right),$$

откуда следует

$$p\left(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right) = \frac{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right)}{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right)}$$

или

$$p\left(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right) = \frac{p(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}=\lambda_i)}{p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}=\lambda_i)}.$$

Из последнего равенства, учитывая, что

$$p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}=\lambda_i\right) = 1 - \lambda_i\left(1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i)\right)\Delta t + o(\Delta t),$$

находим

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}=\lambda_i\right) p\left(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)}=\lambda_i, \lambda^{(m+1)}=\lambda_i\right) =$$
$$= 1 - \lambda_i\left(1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i)\right)\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Аналогично для вероятностей перехода при $i \neq j,\ i,j=\overline{1,n}$, имеет место равенство

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}=\lambda_j\right)p\left(r_{m+1}=0|\lambda^{(m)}=\lambda_j,\lambda^{(m+1)}\right)=$$
$$=\lambda_j P_0\left(\lambda_i|\lambda_j\right)\Delta t+o(\Delta t).$$

Подставляя выписанные выражения для вероятностей перехода в (3), находим числитель A и знаменатель B в виде

$$A=w(\lambda_i|t)+\left[-\lambda_i w(\lambda_i|t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j)w(\lambda_j|t)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$
$$B=1-\left[\sum_{d=1}^{n}\lambda_d\left(1-\sum_{j=1}^{n}P_0(\lambda_j|\lambda_d)\right)w(\lambda_d|t)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

где $w(\lambda_i|t)=w(\lambda^{(m)}=\lambda_i|t),\ i=\overline{1,n}$.

Учитывая, что

$$B^{-1}=1+\left[\sum_{d=1}^{n}\lambda_d\left(1-\sum_{j=1}^{n}P_0(\lambda_j|\lambda_d)\right)w(\lambda_d|t)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

и проделывая необходимые преобразования, находим (3) в виде

$$w(\lambda_i|t+\Delta t)-w(\lambda_i|t)=\Bigg[-\lambda_i w(\lambda_i|t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j)w(\lambda_j|t)+$$
$$+w(\lambda_i|t)\sum_{d=1}^{n}\lambda_d\left(1-\sum_{j=1}^{n}P_0(\lambda_j|\lambda_d)\right)w(\lambda_d|t)\Bigg]\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}.$$

Разделив обе части последнего соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно апостериорных вероятностей:

$$\begin{aligned}w'(\lambda_i|t)&=-\lambda_i w(\lambda_i|t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j)w(\lambda_j|t)+\\&+w(\lambda_i|t)\sum_{d=1}^{n}\lambda_d\left(1-\sum_{j=1}^{n}P_0(\lambda_j|\lambda_d)\right)w(\lambda_d|t),\ i=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{4}$$

Обозначим $u_d=1-\sum\limits_{j=1}^{n}P_0(\lambda_j|\lambda_d)=\sum\limits_{j=1}^{n}P_1(\lambda_j|\lambda_d)$.

С учетом сделанного обозначения система уравнений (4) преобразуется к виду

$$
w'(\lambda_i|t) = -\lambda_i w(\lambda_i|t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) w(\lambda_j|t) + \tag{5}
$$
$$
+ w(\lambda_i|t) \sum_{d=1}^{n} \lambda_d u_d w(\lambda_d|t), \quad i = \overline{1,n}.
$$

Теорема 1. Апостериорные вероятности состояний обобщенного MAP-потока событий с n состояниями, $n = 2, 3, \ldots$, на интервалах времени $(t_0; t_1)$ и $(t_k; t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют вид

$$
w(\lambda_i|t) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s (t-t_k)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s (t-t_k)}}, \tag{6}
$$
$$
i = \overline{1,n}, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,
$$
$$
\sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i|t) = 1,
$$

где величины $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_{js}$, $\alpha_i^{(s)}$, β_s определяются в ходе доказательства.

Доказательство. Обозначим $\psi(t) = \sum\limits_{d=1}^{n} \lambda_d u_d w(\lambda_d|t)$ и в (5) выполним замену переменных

$$
w(\lambda_i|t) = x_i(t) e^{\int_{t_k}^{t} \psi(\tau) d\tau}, \tag{7}
$$

где $x_i(t)$ — новые неизвестные функции, $i = \overline{1,n}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда (5) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений:

$$
x_i'(t) = -\lambda_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) x_j(t), \ i = \overline{1,n}.
$$

Последнюю систему представим в матричном виде

$$
\dot{X} = AX, \ X = \left\| x_i(t) \right\|, \ i = \overline{1,n}, \tag{8}
$$
$$
A = \begin{Vmatrix} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & \ldots & \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) \\ \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \ldots & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) & \ldots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{Vmatrix}_{n \times n}.
$$

Будем искать решение системы (8) в виде $X = \widetilde{A} e^{\beta t}$, где вектор-столбец $\widetilde{A} = \left\| \alpha_i \right\|$, $i = \overline{1,n}$. Тогда, подставляя X в (8), получим систему линейных однородных уравнений относительно α_i:

$$
(A - \beta E)\widetilde{A} = O, \tag{9}
$$

где E — единичная матрица, O — нулевой вектор-столбец.

Для того чтобы уравнению (9) удовлетворял нетривиальный вектор $\widetilde{A}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (9) был равен нулю, т.е.

$$|A - \beta E| = 0. \tag{10}$$

Для каждого корня β_s, $s = \overline{1, n}$, характеристического уравнения (10) из (9) определяется вектор $\widetilde{A}^{(s)} \neq 0$. Будем рассматривать только случай, когда все корни β_s характеристического уравнения (10) действительны и различны. Получаем n линейно независимых решений $X_s = \widetilde{A}^{(s)} e^{\beta_s t}$, где $\widetilde{A}^{(s)} = \left\| \alpha_i^{(s)} \right\|$, $i, s = \overline{1, n}$. Постоянные $\alpha_i^{(s)}$, $i, s = \overline{1, n}$ определяются из (9) неоднозначно. Общее решение системы (8) имеет вид

$$X = \sum_{s=1}^{n} C_s \widetilde{A}^{(s)} e^{\beta_s t},\ x_i(t) = \sum_{s=1}^{n} C_s \alpha_i^{(s)} e^{\beta_s t},\ i = \overline{1, n},$$

где C_s — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий. Учитывая (7), в момент $t = t_k$ находим $x_i(t_k) = w(\lambda_i | t_k)$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда имеем систему n линейных неоднородных уравнений для нахождения произвольных постоянных C_s:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s \alpha_i^{(s)} e^{\beta_s t_k} = w(\lambda_i | t_k),\ i = \overline{1, n},$$

с отличным от нуля определителем для n линейно независимых решений соответствующей однородной системы. Решая полученную систему с использованием правила Крамера, находим

$$C_s = e^{-\beta_s t_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} w(\lambda_j | t_k),\ s = \overline{1, n},$$

где $\widetilde{A}_{js}$ — алгебраические дополнения элементов $\widetilde{\alpha}_{js}$ матрицы $\widetilde{A}_1$ ($\widetilde{\alpha}_{js} = \alpha_j^{(s)}$); $\det \widetilde{A}_1$ — определитель матрицы $\widetilde{A}_1 = \left\| \widetilde{A}^{(1)} \quad \widetilde{A}^{(2)} \quad \ldots \quad \widetilde{A}^{(n)} \right\|$.

Поэтапно возвращаясь к ранее сделанным заменам, получаем (7) в виде

$$w(\lambda_i | t) = e^{\int_{t_k}^{t} \psi(\tau) d\tau} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j | t_k) e^{\beta_s (t - t_k)},\ i = \overline{1, n}. \tag{11}$$

С учетом условия нормировки из (11) находится явный вид функции

$$e^{\int_{t_k}^{t} \psi(\tau) d\tau} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j | t_k) e^{\beta_s (t - t_k)} \right)^{-1}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), приходим к (6). Теорема 1 доказана.

Для того чтобы найти значение $w(\lambda_i|t)$ в произвольный момент времени t, необходимо знать $w(\lambda_j|t_k)$, $j=\overline{1,n}$, — значение апостериорной вероятности в момент времени t_k, $k=1,2,\ldots$, наступления события потока.

Апостериорная вероятность $w(\lambda_j|t_k)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 2. В момент времени t_k наблюдения события в обобщенном MAP-потоке для апостериорных вероятностей $w(\lambda_j|t_k)$, $j=\overline{1,n}$, имеет место формула пересчета

$$
\begin{gathered}
w(\lambda_j|t_k) = w(\lambda_j|t_k+0) = \\
= \frac{\sum\limits_{d=1}^{n} \lambda_d P_1(\lambda_j|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k-0)}{\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_d P_1(\lambda_s|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k-0)},\ j=\overline{1,n},\ k=1,2,\ldots, \\
\sum_{j=1}^{n} w(\lambda_j|t_k+0) = 1; \\
w(\lambda_d|t_k-0) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1}+0) e^{\beta_s(t_k-t_{k-1})}}{\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{A}_{js}}{\det \widetilde{A}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1}+0) e^{\beta_s(t_k-t_{k-1})}}, \\
d=\overline{1,n},\ k=1,2,\ldots, \\
\sum_{d=1}^{n} w(\lambda_d|t_k-0) = 1.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда в (2) $r_{m+1}=1$, т.е. на интервале времени $(t;t+\Delta t)$ наступает событие потока, допустим, в момент времени t_k. Положим в (2) $\lambda^{(m+1)}=\lambda_i$. Тогда, с учетом утверждения 3, рекуррентное соотношение (2) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)}|t)$, $w(\lambda^{(m+1)}|t+\Delta t)$ состояний потока запишется в виде

$$
\begin{gathered}
w(\lambda_i|t+\Delta t) = \\
= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t) p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_i|\lambda^{(m)}) p(r_{m+1}=1|\lambda^{(m)},\lambda^{(m+1)}=\lambda_i)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n}\ \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t) p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}) p(r_{m+1}=1|\lambda^{(m)},\lambda^{(m+1)})},\ i=\overline{1,n}.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим два смежных интервала $(t;t_k)$ и $(t_k;t+\Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t+\Delta t - t_k$ соответственно. Выполняя в последнем рекуррентном соотношении введенные замены $t = t_k - \Delta t'$, $t+\Delta t = t_k + \Delta t''$, расписывая вероятности перехода подобно случаю $r_{m+1}=0$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ ($\Delta t' \to 0$ и $\Delta t'' \to 0$ соответственно), приходим к (13). Теорема 2 доказана.

Случаи $r_{m+1} = 2, 3, \ldots$, не рассматриваются, так как имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Замечание 2. В точке t_k, $k = 1, 2, \ldots$, (момент времени наступления события потока) апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, претерпевает разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

Осталось рассмотреть поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, на отрезке $[t_0; t_1]$, где t_0 — момент начала наблюдения за потоком, t_1 — момент наступления первого события потока. В момент времени t_0 начала наблюдения за потоком апостериорную вероятность $w(\lambda_i|t)$ положим равной априорной финальной вероятности π_i, $i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$.

3.3. Выражения для априорных финальных вероятностей состояний потока

Обозначим $\pi_i(t|t^0)$ — априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, при условии, что функционирование потока началось в момент времени t^0.

Теорема 3. Априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного MAP-потока событий имеют вид

$$\pi_j = \frac{P_{nj}}{\det P},\ j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

где P_{nj} – алгебраическое дополнение элемента p_{nj} матрицы $P = \|p_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i \left(1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i) - P_1(\lambda_i|\lambda_i)\right), & i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j \left(P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)\right), & i \neq j,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, n}; \\ 1, & i = n,\ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что для априорных вероятностей $\pi_i(t|t^0)$, $i = \overline{1, n}$, справедлива система дифференциальных уравнений:

$$\pi_i'(t|t^0) = -\lambda_i \pi_i(t|t^0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)\right] \pi_j(t|t^0),\ i = \overline{1, n}, \tag{15}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t|t^0) = 1.$$

Учитывая тот факт, что рассматривается стационарный режим функционирования потока и $\lambda(t)$ — марковский процесс, имеем: $\lim_{t\to\infty} \pi_i(t|t^0) = \pi_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда система (15) принимает вид

$$-\lambda_i \pi_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)\right] \pi_j = 0,\ i = \overline{1, n},\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

В силу линейной зависимости уравнений последней системы заменим последнее уравнение при $i = n$ условием нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ и, решая систему с использованием формул Крамера, приходим к (14). Теорема 3 доказана.

Полученные аналитические формулы (6), (13) и (14) позволяют сформулировать следующий алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t:

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_i|t_0 + 0)$, $i = \overline{1,n}$, выбирается априорная финальная вероятность π_i, $i = \overline{1,n}$, вычисляемая по формуле (14), т.е. $w(\lambda_i|t_0 + 0) = w(\lambda_i|t_0 = 0) = \pi_i$;

2) по формуле (6) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, в любой момент времени t, $t_0 < t < t_1$, где t_1 — момент наблюдения первого события потока;

3) по формуле (6) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, в момент времени t_1, т.е. $w(\lambda_i|t_1) = w(\lambda_i|t_1 - 0)$;

4) по формуле (13) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_1, т.е. вычисляется величина $w(\lambda_i|t_1 + 0)$, $i = \overline{1,n}$, — начальное условие для $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, на интервале $(t_1; t_2)$;

5) по формуле (6) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, для любого момента времени t, $t_1 < t < t_2$, где t_2 — момент наблюдения второго события потока и т.д.

При расчете апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1,n}$, в произвольный момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geqslant w(\lambda_j|t)$, $i,j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

4. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов с использованием формул (6), (13) и (14) разработан алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, описанный в разделе 3 данной работы. Программа реализована на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015.

Первый этап заключается в имитационном моделировании обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний с целью получения выборки моментов времени наступления событий; второй этап — вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $t_0 < t < t_1$; $w(\lambda_i|t_k + 0)$ и $w(\lambda_i|t)$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1,n}$, где n — число состояний процесса $\lambda(t)$, и определение в произвольный момент времени t оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$ методом максимума апостериорной вероятности на основе полученной выборки моментов наступления событий $t_1, \ldots, t_m$ в наблюдаемом потоке.

Для числа состояний $n = 3$, значений вероятностей, приведенных в табл. 1, значений $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$, времени моделирования $T_m = 100$ ед. времени проведены расчеты по нахождению оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$.

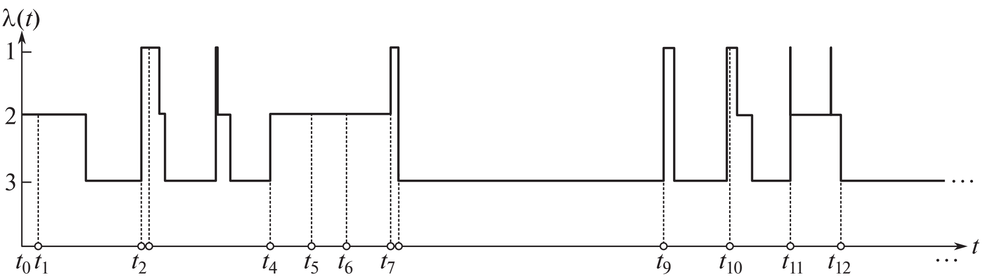

Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$.

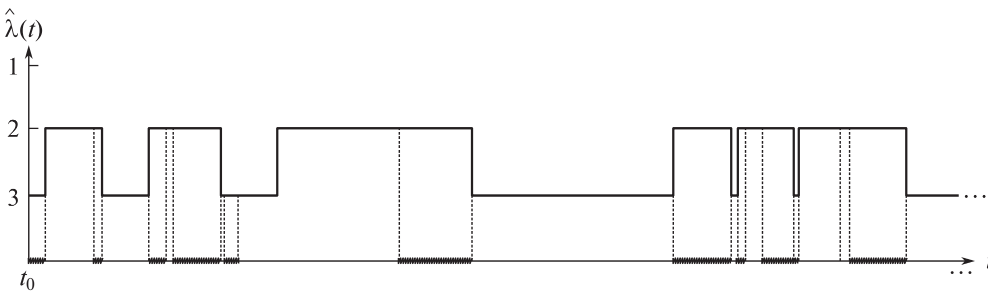

Рис. 3. Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория поведения процесса $\lambda(t)$ (истинная реализация процесса), полученная путем имитационного моделирования, где 1, 2, 3 — состояния процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \ldots$ — моменты времени наступления событий потока.

На рис. 3 приведена траектория поведения оценки $\hat{\lambda}(t)$, где $1, 2, 3$ — состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0{,}001$. Штриховкой на оси абсцисс на рис. 3 отмечены области принятия ошибочного решения, когда значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

Ни рис. 4–6 продемонстрированы траектории поведения апостериорных вероятностей $w(\lambda_1|t), w(\lambda_2|t), w(\lambda_3|t)$, синхронизированные с моментами наступления событий $t_1, t_2, \ldots$, приведенными на рис. 2. При этом в любой момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant T_m$, выполняется условие нормировки $w(\lambda_1|t) + w(\lambda_2|t) + w(\lambda_3|t) = 1$.

Таблица 1. Исходные данные для эксперимента

$P_0(\lambda_1\|\lambda_1) = 0{,}15$	$P_0(\lambda_1\|\lambda_2) = 0{,}09$	$P_0(\lambda_1\|\lambda_3) = 0{,}21$
$P_0(\lambda_2\|\lambda_1) = 0{,}24$	$P_0(\lambda_2\|\lambda_2) = 0{,}13$	$P_0(\lambda_2\|\lambda_3) = 0{,}07$
$P_0(\lambda_3\|\lambda_1) = 0{,}12$	$P_0(\lambda_3\|\lambda_2) = 0{,}25$	$P_0(\lambda_3\|\lambda_3) = 0{,}15$
$P_1(\lambda_1\|\lambda_1) = 0{,}19$	$P_1(\lambda_1\|\lambda_2) = 0{,}16$	$P_1(\lambda_1\|\lambda_3) = 0{,}18$
$P_1(\lambda_2\|\lambda_1) = 0{,}23$	$P_1(\lambda_2\|\lambda_2) = 0{,}23$	$P_1(\lambda_2\|\lambda_3) = 0{,}27$
$P_1(\lambda_3\|\lambda_1) = 0{,}07$	$P_1(\lambda_3\|\lambda_2) = 0{,}14$	$P_1(\lambda_3\|\lambda_3) = 0{,}12$

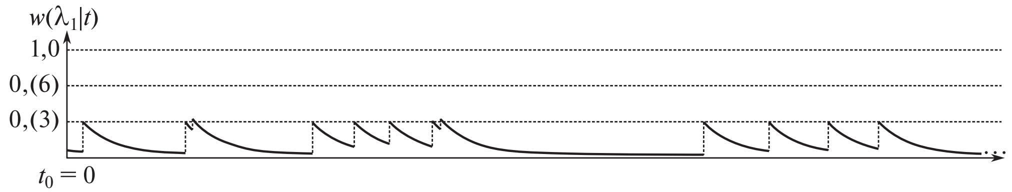

Рис. 4. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1|t)$.

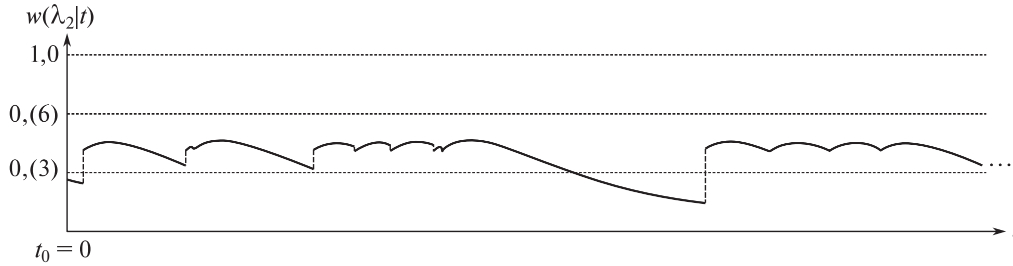

Рис. 5. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_2|t)$.

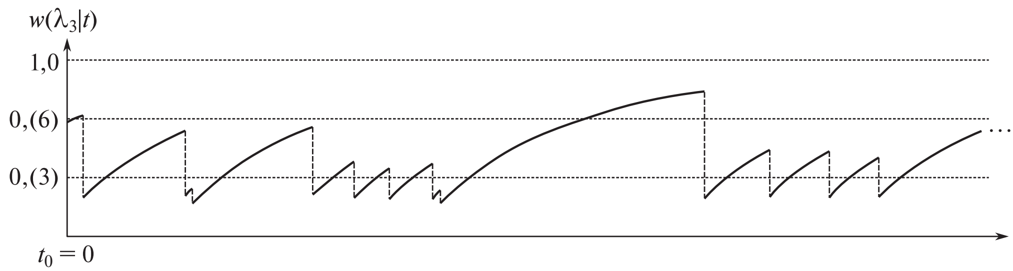

Рис. 6. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_3|t)$.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по реализации обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров (значений λ_i, $i = \overline{1, n}$, значений вероятностей $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$) осуществляется моделирование обобщенного MAP-потока с n состояниями на заданном отрезке времени моделирования $[0; T_m]$ (отдельный ν-й эксперимент);

2) осуществляется расчет апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке моделирования $[0; T_m]$ по формулам (6), (13), (14);

3) осуществляется оценивание траекторий процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t на отрезке $[0; T_m]$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geqslant w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$;

4) определяется (для отдельного ν-го эксперимента) d_ν — суммарная протяженность интервалов, на которых истинное значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с полученной оценкой $\hat{\lambda}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_m$;

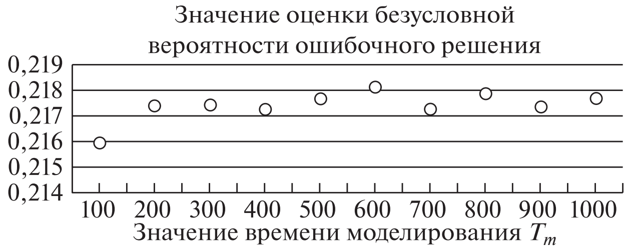

Рис. 7. График зависимости $\hat{P}_0$ от значений T_m.

5) вычисляется значение $\hat{p}_\nu = \frac{d_\nu}{T_m}$ — доля ошибочных решений;

6) шаги 1)–5) повторяются N раз ($\nu = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки оценивания состояний случайного процесса $\lambda(t)$ на рассматриваемом отрезке $[0; T_m]$.

Результатом реализации вышеприведенного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений при проведении N экспериментов. На основании полученных данных вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибки принятия решения $\hat{P}_0 = \frac{1}{N}\sum\limits_{\nu=1}^{N}\hat{p}_\nu$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_0 = \frac{1}{N-1}\sum\limits_{\nu=1}^{N}(\hat{p}_\nu - \hat{P}_0)^2$.

Эксперимент 1. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значения параметров $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$ и вероятности, представленные в табл. 1. При этом время моделирования $T_m \in \{100, 200, \ldots, 1000\}$. Цель первого эксперимента заключается в установлении стационарного режима.

В табл. 2 при заданных параметрах потока устанавливается зависимость оценок $\hat{P}_0$ и $\hat{D}_0$ от времени имитационного моделирования T_m.

Из табл. 2 и рис. 7 вытекает, что для принятых значений параметров потока стационарный режим устанавливается для $T_m \geqslant 200$ ед. времени. В связи с этим для дальнейших экспериментов полагаем $T_m = 1000$ ед. времени.

Эксперимент 2. Фиксируются число состояний $n = 3$, значение времени моделирования $T_m = 1000$, количество опытов $N = 100$, значения параметров $\lambda_1 = 21$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$ и вероятности, представленные в табл. 1. Второй эксперимент отличается от первого заданием значений λ_i, $i = \overline{1, n}$, когда состояния процесса более различимы.

При заданных параметрах в эксперименте 2 вычисляются $\hat{P}_0 = 0{,}072305$ и $\hat{D}_0 = 0{,}0000011$. Из сравнения результатов эксперимента 2 и эксперимента 1

Таблица 2. Результаты первого статистического эксперимента

T_m	100	200	300	400	500	...	1000
$\hat{P}_0$	0,215952	0,217409	0,217452	0,217273	0,217682	...	0,217707
$\hat{D}_0$	0,000105	0,000068	0,000036	0,000031	0,000022	...	0,000009

Таблица 3. Исходные данные для третьего статистического эксперимента

$P_0(\lambda_1\|\lambda_1)=0{,}02$	$P_0(\lambda_1\|\lambda_2)=0{,}02$	$P_0(\lambda_1\|\lambda_3)=0{,}02$
$P_0(\lambda_2\|\lambda_1)=0{,}02$	$P_0(\lambda_2\|\lambda_2)=0{,}02$	$P_0(\lambda_2\|\lambda_3)=0{,}02$
$P_0(\lambda_3\|\lambda_1)=0{,}02$	$P_0(\lambda_3\|\lambda_2)=0{,}02$	$P_0(\lambda_3\|\lambda_3)=0{,}02$
$P_1(\lambda_1\|\lambda_1)=0{,}7$	$P_1(\lambda_1\|\lambda_2)=0{,}12$	$P_1(\lambda_1\|\lambda_3)=0{,}12$
$P_1(\lambda_2\|\lambda_1)=0{,}12$	$P_1(\lambda_2\|\lambda_2)=0{,}7$	$P_1(\lambda_2\|\lambda_3)=0{,}12$
$P_1(\lambda_3\|\lambda_1)=0{,}12$	$P_1(\lambda_3\|\lambda_2)=0{,}12$	$P_1(\lambda_3\|\lambda_3)=0{,}7$

Таблица 4. Результаты третьего статистического эксперимента

значения состояний процесса $\lambda(t)$	$\hat{P}_0$	$\hat{D}_0$
$\lambda_1=5, \lambda_2=2, \lambda_3=1$	0,307015	0,00010933
$\lambda_1=10, \lambda_2=3, \lambda_3=1$	0,181478	0,00005049
$\lambda_1=21, \lambda_2=10, \lambda_3=1$	0,065359	0,00000982

следует, что оценка $\hat{P}_0$ существенно меньше для второго эксперимента, что является естественным, так как состояния процесса $\lambda(t)$ более различимы.

Эксперимент 3. Фиксируются число состояний $n=3$, значение времени моделирования $T_m=1000$, количество опытов $N=100$ и вероятности, заданные в табл. 3. Стоит отметить, что в данном эксперименте вероятности $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i,j=\overline{1,n}$, задаются следующим образом: увеличиваются вероятности наступления событий при переходе процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния i-е, $i=\overline{1,3}$, тем самым поток становится более интенсивным в каждом из своих трех состояний, и значительно уменьшаются значения вероятностей ненаступления событий.

В рамках данного эксперимента рассматриваются три случая задания значений параметров процесса $\lambda(t)$. В табл. 4 приведены величины оценок $\hat{P}_0$ и $\hat{D}_0$ в зависимости от значений λ_i, $i=\overline{1,3}$.

Представленные численные результаты табл. 4 свидетельствуют о том, что оценивание тем лучше, чем состояния процесса $\lambda(t)$ более различимы, т.е. обеспечивается лучшее (в смысле малости оценки вероятности ошибки принятия решения) качество оценивания состояний рассматриваемого потока событий.

5. Заключение

Полученные результаты демонстрируют возможность оценивания состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний по текущим наблюдениям, что позволяет адекватно реагировать на изменение интенсивности входящего потока (изменять режимы работы системы обслуживания в зависимости от того или иного состояния обобщенного MAP-потока). Так как апостериорные вероятности состояний потока получены в явном аналитическом виде, то нет необходимости прибегать к привлечению численных методов. Предложенный в статье алгоритм состояний исследуемого потока обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cox D.R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. No. 3. P. 433–441.

2. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.

3. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.

4. *Кеба А.В., Нежельская Л.А.* Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний // Тр. Том. гос. ун-та. Серия физико-математическая. 2018. Т. 302. С. 157–164.

5. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.

6. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I.* Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics J. 1993. V. 36. No. 12. P. 1153–1167.

7. *Бушланов И.В., Горцев А.М.* Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // АиТ. 2004. № 9. С. 40–51.

   Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal Estimation of the States of a Synchronous Double Stochastic Flow of Events // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1389–1399.

8. *Centanni S., Minozzo M.* Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultrahigh-frequency financial data // Stat. Model. 2006. No. 6. P. 97–118.

9. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* The Probability of Wrong Decisions in the Estimation of States of a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2012. V. 19. Is. 2. P. 88–101.

10. *Bakholdina M.A., Gortsev A.M.* Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Appl. Math. Sci. 2015. V. 9. No. 29–32. P. 1433–1451.

11. *Nezhelskaya L., Sidorova E.* Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communicat. Comp. Inform. Sci. 2018. V. 912. P. 157–171.

12. *Telek M., Horvath G.* A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. No. 9. P. 1153–1168.

13. *Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S.* Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. No. 4. P. 1326–1339.

14. *Leonova M.A., Nezhelskaya L.A.* Maximum Likelihood Estimation of Dead Time Value at a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2013. V. 23. Is. 2. P. 54–63.

15. *Gortsev A.M., Leonova M.A., Nezhelskaya L.A.* The Comparison of Maximum Likelihood Estimation and Method of Moments Estimation of Dead Time Value in a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2013. V. 25. Is. 4. P. 32–42.

16. *Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics J. 2016. V. 59. Is. 5. P. 651–662.
17. *Nezhelskaya L., Tumashkina D.* Estimation of the probability density parameters of the interval duration between events in correlated semi-synchronous event flow of the second order by the method of moments // Communicat. Comp. Inform. Sci. 2019. V. 1109. P. 60–72.
18. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968. 504 с.
19. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
20. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Optimal Estimate of the States of a Generalized Asynchronous Event Flow with an Arbitrary Number of States // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2019. Is. 47. P. 12–23.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 21.12.2019

После доработки 08.09.2020

Принята к публикации 08.12.2020

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Управление в технических системах

© 2021 г. БИНЬ СУНЬ, канд. физ.-мат. наук (sunbin_bsu@hotmail.com)
(Университет Науки и Технологии Внутренней Монголии, Баотоу, КНР),
С.А. ДУДИН, канд. физ.-мат. наук (dudins@bsu.by),
О.С. ДУДИНА, канд. физ.-мат. наук (dudina@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск),
А.Н. ДУДИН, д-р физ.-мат. наук (dudin@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск;
Российский университет дружбы народов, Москва)

МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ МОБИЛЬНЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В СОТЕ С АДАПТИВНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ[1]

Исследованы характеристики производительности соты мобильной сети, в которой скорость обслуживания пользователя зависит от зоны соты, где он находится. Разделение соты на зоны определяется качеством сигнала и зависит от расстояния до базовой станции, наличием препятствий и помех для радиосигнала. Входящий поток запросов описывается маркированным марковским входным потоком, где тип запроса соответствует зоне, в которой он генерируется. Во время обслуживания запросы могут перемещаться между зонами, что приводит к изменению их типов. Учтена возможность флуктуации параметров потоков и процессов обслуживания под влиянием внешних случайных воздействий (случайной среды). Численно проиллюстрированы важность учета зависимости параметров от состояния случайной среды и возможность использования результатов для решения оптимизационных задач.

Ключевые слова: сота мобильной сети связи, перемещение пользователей, система массового обслуживания, случайная среда, маркированный марковский входной поток.

DOI: 10.31857/S0005231021050068

1. Введение

В современных сотовых сетях связи доминирующим является уже не речевой, а потоковый мультимедийный трафик. Поэтому для их проектирования уже недостаточно использования классических моделей телетрафика, например для расчета необходимого числа логических каналов с фиксированной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China) (грант № 61262083) и программы стратегического академического лидерства РУДН (RUDN University Strategic Academic Leadership Program).

скоростью передачи информации. Необходимо учитывать возможность динамического изменения схемы модуляции для обеспечения необходимого качества обслуживания пользователей. На возможность выбора схемы, в частности, влияет качество сигнала, получаемого конкретным пользователем от базовой станции. На качество сигнала влияет ряд факторов, наиболее существенными из которых являются расстояние между пользователем и базовой станцией, наличие различного рода препятствий и шумов в передающей среде. Необходимость учета этих факторов привела к появлению исследований моделей работы сот, в которых сота делится на несколько непересекающихся зон и скорость обслуживания пользователя зависит от текущей зоны, в которой он находится, см., например, [1, 2]. Более общая модель, предполагающая произвольное число зон, возможность неоднократного пересечения пользователем границ зон и более общий, маркированный марковский, поток запросов, была рассмотрена в [3].

Недостатком модели, изученной в [3], является то, что все параметры, характеризующие входной поток, скорости обслуживания запросов, находящихся в определенной зоне, и их перемещения, не изменяются во времени, являются постоянными. Во многих реальных сотовых сетях эти параметры могут изменяться в зависимости, например, от времени суток, доступности сетевых ресурсов, зашумленности каналов и т.д. Известным способом адекватного учета такого рода зависимостей является рассмотрение соответствующих моделей систем обслуживания, функционирующих в случайной среде. Под случайной средой понимается некоторый внешний случайный процесс, как правило, цепь Маркова с конечным пространством состояний. Все или некоторые параметры системы зависят от состояния этой среды и скачкообразно изменяют свои значения при изменении состояния среды. Исследование систем, функционирующих в случайной среде, было начато, по-видимому, в [4] под названием систем с частичным выходом прибора из строя. Ссылки на многочисленные более поздние публикации можно найти, например, в [5].

В данной статье исследование модели соты с зависимостью параметров входного потока и процесса обслуживания от зоны, в которой находится пользователь, обобщено на случай, когда эти параметры зависят еще и от состояний внешней случайной среды.

В разделе 2 описана изучаемая математическая модель системы массового обслуживания. В разделе 3 процесс функционирования системы описан многомерной цепью Маркова и обсуждена проблема нахождения ее стационарного распределения. Формулы для вычисления характеристик производительности системы приведены в разделе 4. Раздел 5 содержит описание численного эксперимента, иллюстрирующего важность учета влияния случайной среды.

2. Математическая модель

В качестве модели работы соты рассматриваем N-линейную систему массового обслуживания без буфера, где N есть максимальное число пользователей, которые могут получать обслуживание одновременно. Сота разделена на R зон, $1 < R < \infty$. Во время обслуживания запроса в соте пользователь может перемещаться между зонами или покинуть соту. Мощность сигнала, получаемого пользователем, и, следовательно, скорость обслуживания запроса зависят от зоны в соте, в которой находится запрос. Для учета этого условно делим все запросы, получающие обслуживание в системе, на R типов. Прибытие запроса типа r в соту соответствует генерации соединения с базовой станцией пользователем, находящимся в r-й зоне, где $r = \overline{1, R}$.

Предполагается, что параметры системы, включая параметры, задающие входной поток и процесс обслуживания, зависят от состояния некоторого внешнего случайного процесса k_t, $t \geqslant 0$, называемого случайной средой. Предполагается, что этот процесс является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $\{1, 2, \ldots, K\}$ и инфинитезимальным генератором H.

Считаем, что процесс поступления запросов задается маркированным марковским входным потоком (Marked Markov Arrival Process — $MMAP$), введенным в [6] как обобщение широко известного марковского входного потока (Markov Arrival Process — MAP), см., например, [7–9], на случай разнородных запросов. Возможные моменты прибытия запросов в рассматриваемом потоке определяются как моменты скачков некоторого процесса с непрерывным временем $\nu_t, t \geqslant 0$, с конечным пространством состояний $\{1, 2, \ldots, W\}$, такого что двумерный процесс $\{k_t, \nu_t\}$, $t \geqslant 0$, является цепью Маркова с непрерывным временем. При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, процесса k_t (случайной среды) входной поток определяется набором квадратных матриц $D_0^{(k)}$, $D_r^{(k)}$, $r = \overline{1, R}$. Элементы матрицы $D_r^{(k)}$ определяют интенсивности переходов процесса ν_t при фиксированном состоянии k процесса k_t, которые сопровождаются прибытием запроса типа r, $r = \overline{1, R}$. Обозначим $D^{(k)} = \sum_{r=1}^{R} D_r^{(k)}$. Недиагональные элементы матрицы $D_0^{(k)}$ определяют интенсивность переходов процесса ν_t, которые не сопровождаются прибытием запроса. Диагональные элементы матрицы $D_0^{(k)}$ определяют интенсивность выхода процесса ν_t из соответствующих состояний. Обозначим $D^{(k)}(1) = D_0^{(k)} + D^{(k)}$.

Средняя интенсивность $\lambda^{(k)}$ поступления запросов при фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды задается формулой

$$\lambda^{(k)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} D^{(k)} \mathbf{e},$$

где $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ – вектор-строка, которая является единственным решением системы

$$\boldsymbol{\theta}^{(k)} D^{(k)}(1) = \mathbf{0}, \ \ \boldsymbol{\theta}^{(k)} \mathbf{e} = 1.$$

Здесь $\mathbf{e}$ – вектор-столбец соответствующего размера, состоящий из единиц, и $\mathbf{0}$ – вектор-строка соответствующего размера, состоящий из нулей.

Средняя интенсивность $\lambda_r^{(k)}$ поступления запросов типа r при фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды равна

$$\lambda_r^{(k)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} D_r^{(k)} \mathbf{e}, \ \ r = \overline{1, R}.$$

При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды коэффициент вариации $c_{var}^{(k)}$ длин последовательных интервалов между поступлением запросов определяется как

$$c_{var}^{(k)} = 2\lambda^{(k)}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{e} - 1.$$

При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды коэффициент корреляции $c_{cor}^{(k)}$ длин двух соседних интервалов между поступлением запросов вычисляется как

$$c_{cor}^{(k)} = \left(\lambda^{(k)}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} D^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{e} - 1\right) / c_{var^{(k)}}.$$

Введем матрицы:

$$\tilde{D}_r = \mathrm{diag}\left\{D_r^{(k)}, \, k = \overline{1, K}\right\}, \; r = \overline{1, R},$$

$$\tilde{D}_0 = H \otimes I_W + \mathrm{diag}\left\{D_0^{(k)}, \, k = \overline{1, K}\right\},$$

$$\tilde{D} = \sum_{r=1}^{R} \tilde{D}_r, \; \tilde{D}(1) = \tilde{D}_0 + \tilde{D}.$$

Здесь $\mathrm{diag}\{\dots\}$ означает диагональную матрицу с диагональными блоками, перечисленными в скобках, а $\otimes$ есть символ Кронекерова произведения матриц, см., например, [10].

Средние интенсивности входного потока запросов λ и потока запросов r-го типа λ_r определяются как

$$\lambda = \boldsymbol{\theta}\tilde{D}\mathbf{e}, \; \lambda_r = \boldsymbol{\theta}\tilde{D}_r\mathbf{e}, \; r = \overline{1, R}, \tag{1}$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}$ является единственным решением системы уравнений

$$\boldsymbol{\theta}\tilde{D}(1) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}\mathbf{e} = 1.$$

Коэффициент вариации c_{var} длин интервалов между моментами поступления запросов определяется как

$$c_{var} = 2\lambda\boldsymbol{\theta}(-\tilde{D}_0)^{-1}\mathbf{e} - 1.$$

Коэффициент корреляции c_{cor} двух соседних интервалов между моментами поступления запросов вычисляется как

$$c_{cor} = \left(\lambda\boldsymbol{\theta}(-\tilde{D}_0)^{-1}\tilde{D}_1(-\tilde{D}_0)^{-1}\mathbf{e} - 1\right) / c_{var}.$$

Предполагается, что если в произвольный момент поступления запроса в системе уже обслуживаются N пользователей, запрос покидает систему без обслуживания (теряется). Иначе запрос принимается в систему и начинает обслуживание. Это предположение объясняется тем, что, как правило, в мобильных сотовых сетях отсутствует механизм буферизации запросов и запрос, заставший в системе максимально допустимое число запросов, N, либо теряется, либо совершает повторные попытки попасть на обслуживание через случайные интервалы времени. Правильный выбор параметра N (с учетом имеющихся технических или экономических возможностей) позволяет минимизировать вероятности потери запросов или непредоставления обслуживания при первой попытке запроса.

Предполагаем, что время нахождения обслуживаемого пользователя в r-й зоне имеет (при фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды) экспоненциальное распределение с интенсивностью $\mu_r^{(k)}$, $r = \overline{1, R}$.

Пользователь может покинуть зону r по следующим причинам:

1) его обслуживание успешно завершено;

2) пользователь переходит в зону r' (и становится запросом типа r');

3) обслуживание пользователя прекращается досрочно и он покидает соту без полного обслуживания. Такое завершение может быть интерпретировано как потеря соединения или передача обслуживания в другую соту. Это прекращение обслуживания будем также называть уходом из соты из-за нетерпеливости.

Каждая из этих возможностей имеет определенную вероятность, и, умножая интенсивность $\mu_r^{(k)}$ на эти вероятности, получаем интенсивности $\mu_{r,+}^{(k)}$, ${\mu_{r,r'}}^{(k)}$, $\mu_{r,-}^{(k)}$ успешного завершения обслуживания, перехода запроса в r'-ю зону, прекращение обслуживания из-за нетерпеливости соответственно. Ясно, что

$$\mu_r^{(k)} = \mu_{r,+}^{(k)} + \mu_{r,-}^{(k)} + \sum_{r'=1, r' \neq r}^{R} \mu_{r,r'}^{(k)}.$$

Представленное описание характеризует время обслуживания пользователя только в r-й зоне. Очевидно, что из-за возможности посещения пользователем в течение времени его обслуживания в соте случайного количества зон, общее время обслуживания произвольного запроса в соте состоит из случайного числа экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами распределения, зависящими от посещаемых им зон. Следовательно, хорошо известное распределение фазового типа (PH) (см., например, [11]) является подходящим для описания общего времени обслуживания произвольного запроса в соте. Распределение PH включает в себя множество ранее известных распределений (экспоненциальное, эрланговское, гиперэрланговское, коксовское и т.д.) и популярно в литературе благодаря своей простой вероятностной трактовке и потому, что его можно успешно использовать для аппроксимации произвольного распределения на неотрицательной полуоси, см. [12]. Тем не менее распределение PH в своем первоначальном виде, см. [11], соответствует описанию времен обслуживания *однородных* запросов, тогда как в рассматриваемой модели запросы являются *неоднородными*.

Еще один недостаток классического распределения PH с точки зрения целей данного исследования – отсутствие дифференциации результатов обслуживания запроса; напротив, в исследуемой модели общее время обслуживания может заканчиваться либо успешно, либо неуспешно (запрос покидает соту до завершения обслуживания). Таким образом, чтобы значительно упростить исследование системы, будем использовать для описания времени обслуживания произвольного запроса в соте так называемое обобщенное распределение фазового типа (GPH), введенное в [13] и [14].

Определим общее время обслуживания запроса в соте как время, в течение которого неприводимая цепь Маркова η_t, $t \geqslant 0$, с переходными состояниями $\{1, \dots, R\}$ и двумя поглощающими состояниями достигает одного из поглощающих состояний. Эта цепь Маркова описывается следующим образом. Начальное состояние цепи η_t выбирается среди переходных состояний в зависимости от типа запроса, принятого на обслуживание. Если этот запрос начинает обслуживание в зоне r, то начальное состояние цепи η_t — это состояние r, $r = \overline{1, R}$.

При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов процесса η_t между переходными состояниями определяются субгенератором

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} -\mu_1^{(k)} & \mu_{1,2}^{(k)} & \mu_{1,3}^{(k)} & \dots & \mu_{1,R}^{(k)} \\ \mu_{2,1}^{(k)} & -\mu_2^{(k)} & \mu_{2,3}^{(k)} & \dots & \mu_{2,R}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{R,1}^{(k)} & \mu_{R,2}^{(k)} & \mu_{R,3}^{(k)} & \dots & -\mu_R^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Когда процесс η_t находится в переходном состоянии r, запрос получает обслуживание типа r. Переход процесса η_t из одного переходного состояния в другое означает соответствующее изменение зоны, в которой находится запрос. Переход в первое поглощающее состояние соответствует успешному завершению обслуживания запроса. При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов в это поглощающее состояние определяются компонентами вектора-столбца

$$\mathbf{S}_+{}^{(k)} = \left(\mu_{1,+}^{(k)}, \mu_{2,+}^{(k)}, \dots, \mu_{R,+}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $^{\mathrm{T}}$ – символ транспонирования.

Переход процесса η_t во второе поглощающее состояние соответствует уходу из соты без завершения обслуживания (из-за нетерпеливости). При фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов в это поглощающее состояние определяются вектором-столбцом

$$\mathbf{S}_-{}^{(k)} = \left(\mu_{1,-}^{(k)}, \mu_{2,-}^{(k)}, \dots, \mu_{R,-}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Считаем, что в моменты переходов процесса k_t, $t \geqslant 0$, состояния процессов ν_t и η_t, $t \geqslant 0$, не изменяются, только изменяются интенсивности последующих переходов этих процессов.

Отметим, что в данной статье предполагаем, что все введенные выше параметры системы массового обслуживания известны, и концентрируемся на исследовании случайных процессов, описывающих динамику системы. Важная проблема нахождения значений этих параметров, основываясь на доступной информации о реальном объекте, который моделирует данная система, в статье не рассматривается. Отметим, что эта проблема активно изучается в современной литературе. Например, существуют десятки серьезных работ, посвященных построению моделей MAP или $MMAP$, основываясь на результатах наблюдения за реальными потоками. Для ссылок см., например, [15–17] и статьи, цитируемые в этих публикациях. Проблема описания мобильности пользователей рассматривалась, например, в [18, 19].

Полностью определив входной процесс и процесс обслуживания запросов, можем приступить к анализу стационарного поведения системы.

3. Процесс изменения состояний системы

Поведение рассматриваемой системы может быть описано регулярной неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем

$$\xi_t = \{n_t, k_t, \nu_t, \mathbf{m}_t\}, \quad t \geqslant 0,$$

где в момент времени t

n_t – число обслуживающихся пользователей, $n_t = \overline{0, N}$;

k_t – состояние случайной среды, $k_t = \overline{1, K}$;

ν_t – состояние управляющего процесса $MMAP$, $\nu_t = \overline{1, W}$;

$\mathbf{m}_t = \left(m_t^{(1)}, \ldots, m_t^{(R)}\right)$, где $m_t^{(r)}$ – число пользователей в r-й зоне, $m_t^{(r)} = \overline{0, n_t}$, $\sum_{r=1}^{R} m_t^{(r)} = n_t$, $r = \overline{1, R}$.

Здесь используем подход к заданию цепи Маркова, учитывающий количество пользователей в каждой зоне вместо учета зоны обслуживания для каждого обслуживаемого пользователя. Данный подход восходит к работе В. Рамасвами и Д. Лукантони [20] и позволяет строить цепь с гораздо меньшим пространством состояний и соответственно получать численные результаты для систем с существенно большим числом R зон и обслуживающих каналов N в соте.

Размерность пространства состояний процесса ξ_t равна

$$KW \sum_{n=0}^{N} J_n = KWC_{N+R}^{R},$$

где

$$J_n = C_{n+R-1}^{R-1} = \frac{(n+R-1)!}{n!(R-1)!}.$$

Цепь Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$, неприводимая и имеет конечное пространство состояний. Следовательно, стационарные вероятности состояний этой цепи и описываемой ею системы обслуживания

$$\pi\left(n,k,\nu,m^{(1)},\ldots,m^{(R)}\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty}P\left\{n_t=n,k_t=k,\nu_t=\nu,m_t^{(1)}=m^{(1)},\ldots,m_t^{(R)}=m^{(R)}\right\},$$
$$n=\overline{0,N},\quad k=\overline{1,K},\quad \nu=\overline{1,W},\quad m^{(r)}=\overline{0,n},\quad \sum_{r=1}^{R}m^{(r)}=n,\quad r=\overline{1,R},$$

существуют при любых значениях параметров системы.

Сформируем векторы-строки $\boldsymbol{\pi}(n,k)$, $n=\overline{0,N}$, $k=\overline{1,K}$, из этих вероятностей, перенумеровав их в обратном лексикографическом порядке компонент $m^{(1)},\ldots,m^{(R)}$ и прямом лексикографическом порядке компоненты ν.

Далее построим векторы $\boldsymbol{\pi}_n$, $n=\overline{0,N}$, как

$$\boldsymbol{\pi}_n=(\boldsymbol{\pi}(n,1),\boldsymbol{\pi}(n,2),\ldots,\boldsymbol{\pi}(n,K)).$$

Хорошо известно, что векторы вероятностей $\boldsymbol{\pi}_n$, $n=\overline{0,N}$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (уравнений равновесия):

$$(\boldsymbol{\pi}_0,\boldsymbol{\pi}_1,\ldots,\boldsymbol{\pi}_N)Q=\mathbf{0},\ \ (\boldsymbol{\pi}_0,\boldsymbol{\pi}_1,\ldots,\boldsymbol{\pi}_N)\mathbf{e}=1,$$

где Q – инфинитезимальный генератор цепи Маркова $\xi_t,\ t\geqslant 0$.

Чтобы вычислить стационарные вероятности состояний системы, нужно получить генератор Q цепи Маркова $\xi_t,\ t\geqslant 0$.

Для этого введем следующие обозначения:

I – единичная матрица и O – нулевая матрица соответствующей размерности;

$\oplus$ – символ кронекеровой суммы матриц;

$\tilde{S}_1^{(k)}=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_+{}^{(k)} & S^{(k)}\end{pmatrix}$; $\tilde{S}_2^{(k)}=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_-{}^{(k)} & S^{(k)}\end{pmatrix}$, $k=\overline{1,K}$;

$\boldsymbol{\beta}^{(r)}$, $r=\overline{1,R}$, – вектор-строка размера R со всеми нулевыми компонентами кроме r-й компоненты, равной единице.

Согласно подходу Рамасвами–Лукантони пусть при условии, что в момент перехода цепи Маркова ξ_t в системе обслуживается n запросов:

матрица $P_n(\boldsymbol{\beta}_r)$ определяет вероятности переходов процесса $\mathbf{m}_t,\ t\geqslant 0$, в момент, когда запрос r-го типа начинает новое обслуживание;

матрица $L_{N-n}(N,\tilde{S}_l^{(k)})$ определяет интенсивности переходов процесса $\mathbf{m}_t$ при переходе управляющего процесса обслуживания одного из запросов в поглощающее состояние l, $l=1,2$, при фиксированном состоянии среды $k,\ k=\overline{1,K}$;

матрица $A_n(N,S^{(k)})$ определяет интенсивности переходов процесса $\mathbf{m}_t$ между переходными состояниями при фиксированном состоянии среды k, $k=\overline{1,K}$;

модули диагональных элементов диагональной матрицы $\Delta_n^{(k)}$ определяют общую интенсивность выхода из соответствующего состояния процесса $\mathbf{m}_t$ при фиксированном состоянии k, $k = \overline{1, K}$.

Подробное описание этих матриц и алгоритмы, используемые для их расчета, представлены в [21]. Стоит отметить, что подход Рамасвами–Лукантони предполагает существование одного поглощающего состояния. Поскольку в анализируемой модели есть два поглощающих состояния, в данной статье была разработана и реализована определенная модификация этого подхода по сравнению с [20] и [21].

Анализируя все возможные переходы цепи Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$, в течение интервала бесконечно малой длины и переписывая интенсивности этих переходов в блочно-матричной форме, получаем следующий результат.

Теорема. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$, имеет следующую блочно-трехдиагональную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots & O & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & \dots & O & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & Q_{N,N-1} & Q_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки определяются следующим образом:

$$Q_{0,0} = \tilde{D}_0 = \mathrm{diag}\left\{D_0^{(k)},\, k = \overline{1, K}\right\} + H \otimes I_W,$$

$$Q_{n,n} = \mathrm{diag}\left\{D_0^{(k)} \oplus \left(A_n\left(N, S^{(k)}\right) + \Delta_n^{(k)}\right),\, k = \overline{1, K}\right\} + H \otimes I_{WJ_n},\ n = \overline{1, N-1},$$

$$Q_{N,N} = \mathrm{diag}\left\{D_0^{(k)} \oplus \left(A_N\left(N, S^{(k)}\right) + \Delta_n^{(k)}\right) + D^{(k)} \otimes I_{J_N},\, k = \overline{1, K}\right\} + H \otimes I_{WJ_N},$$

$$Q_{n,n-1} = \mathrm{diag}\left\{I_W \otimes \left(L_{N-n}\left(N, \tilde{S}_1^{(k)}\right) + L_{N-n}\left(N, \tilde{S}_2^{(k)}\right)\right),\, k = \overline{1, K}\right\},\ n = \overline{1, N},$$

$$Q_{n,n+1} = \mathrm{diag}\left\{\sum_{r=1}^{R} D_r^{(k)} \otimes P_n(\boldsymbol{\beta}_r),\, k = \overline{1, K}\right\},\ n = \overline{0, N-1}.$$

Доказательство. Диагональные элементы матрицы $Q_{n,n}$ отрицательны и с точностью до знака определяют интенсивность выхода из соответствующего состояния цепи Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$. В случае если число запросов в системе равно нулю, выход из соответствующего состояния цепи может произойти из-за перехода управляющего процесса входного потока запросов (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $\mathrm{diag}\{D_0^{(k)},\, k = \overline{1, K}\}$) или изменения состояния случайной среды (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $H \otimes I_W$). В случае если число запросов в системе n больше нуля, выход из соответствующего состояния цепи Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$, может произойти также из-за перехода управляющего процесса обслуживания одного из запросов (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $\mathrm{diag}\{I_W \otimes \Delta_n^{(k)},\ k=\overline{1,K}\}$). Заметим, что если число запросов в системе равно N, приход запроса без изменения состояния управляющего процесса ν_t не приводит к изменению состояния цепи ξ_t, $t \geqslant 0$, из-за того что поступающий запрос теряется. Таким образом, в данном случае из общей интенсивности выхода из соответствующего состояния необходимо отнять интенсивность перехода процесса ν_t в то же самое состояние с генерацией запроса, определяемую соответствующим диагональным элементом матрицы $\mathrm{diag}\{D^{(k)} \otimes I_{J_N},\ k=\overline{1,K}\}$. Отметим также, что в $MMAP$-потоке не допускаются переходы управляющего процесса в то же состояние без генерации запроса. Недиагональные элементы матриц $Q_{n,n}$ определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t, $t \geqslant 0$, которые не приводят к изменению значения компоненты n_t – числа запросов в системе, $n_t=\overline{0,N}$. Такими переходами являются:

- переход управляющего процесса $MMAP$ без генерации запроса (интенсивности такого перехода определяются недиагональными элементами матрицы $\mathrm{diag}\{D_0^{(k)},\ k=\overline{1,K}\}$);
- изменение состояния случайной среды (интенсивности определяются недиагональными элементами матрицы $H \otimes I_W$);
- в случае наличия n, $n=\overline{1,N}$, запросов – переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов, не приводящие к окончанию обслуживания (интенсивности таких переходов определяются элементами матрицы $\mathrm{diag}\{I_W \otimes A_n(N, S^{(k)}),\ k=\overline{1,K}\}$);
- в случае присутствия в системе N запросов – переходы управляющего процесса ν_t, сопровождающиеся поступлением (и последующей потерей) запроса (интенсивности таких переходов определяются недиагональными элементами матрицы $\mathrm{diag}\{D^{(k)} \otimes I_{J_N},\ k=\overline{1,K}\}$).

Записывая описанные интенсивности переходов в виде блочных матриц, получим блоки генератора $Q_{n,n},\ n=\overline{0,N}$.

Элементы матриц $Q_{n,n-1}$, $n=\overline{1,N}$, определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t, которые приводят к уменьшению на единицу числа запросов в системе. Такими переходами в случае наличия n запросов, $n=\overline{1,N}$, являются:

- переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов в первое поглощающее состояние, означающие успешное окончание обслуживания (интенсивности таких переходов определяются элементами матрицы $\mathrm{diag}\{I_W \otimes L_{N-n}(N, \tilde{S}_1^{(k)}),\ k=\overline{1,K}\}$);
- переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов во второе поглощающее состояние, означающие досрочное окончание обслуживания (интенсивности определяются элементами матрицы $\mathrm{diag}\{I_W \otimes$ $\otimes L_{N-n}(N, \tilde{S}_2^{(k)}),\ k=\overline{1,K}\}$).

Записывая данные интенсивности переходов в виде блочных матриц, получаем доказываемый вид блоков генератора $Q_{n,n-1},\ n=\overline{1,N}$.

Элементы матриц $Q_{n,n+1},\ n = \overline{0, N-1}$, определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t, которые приводят к увеличению на единицу числа запросов в системе. Увеличение числа запросов в системе происходит в моменты переходов управляющего процесса $MMAP$ с генерацией запроса любого типа (при состоянии случайной среды k интенсивности определяются элементами матриц $D_r^{(k)},\ r = \overline{1, R}$) при условии, что система не заполнена. В случае поступления запроса r-го типа увеличивается число запросов, находящихся на r-й фазе обслуживания (вероятности переходов компонент цепи, задающих состояние процесса обслуживания, определяются элементами матрицы $P_n(\boldsymbol{\beta}_r)$ при условии, что в системе в момент поступления было n запросов). Таким образом, получаем, что блоки $Q_{n,n+1},\ n = \overline{0, N-1}$, имеют вид $Q_{n,n+1} = \mathrm{diag}\left\{\sum_{r=1}^{R} D_r^{(k)} \otimes P_n(\boldsymbol{\beta}_r),\ k = \overline{1, K}\right\}$. Теорема доказана.

Для нахождения стационарного распределения системы может быть использован следующий численно устойчивый алгоритм.

Алгоритм 1. 1. Вычисляем матрицу

$$G_1 = -Q_{1,0}(G_{0,0})^{-1}.$$

2. Вычисляем матрицы $G_n,\ n = \overline{2, N}$, с помощью рекурсии

$$G_n = -Q_{n,n-1}(Q_{n-1,n-1} + G_{n-1}Q_{n-2,n-1})^{-1}.$$

3. Вычисляем матрицы F_k с помощью обратной рекурсии:

$$F_N = I,\ F_n = F_{n+1}G_{n+1},\ n = \overline{1, N}.$$

4. Находим вектор $\boldsymbol{\pi}_N$ как единственное решение системы

$$\boldsymbol{\pi}_N(Q_{N,N} + G_N Q_{N-1,N}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n=0}^{N} F_n \mathbf{e} = 1.$$

5. Вычисляем векторы $\boldsymbol{\pi}_n,\ n = \overline{1, N}$, как

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_N F_n,\ n = \overline{0, N-1}.$$

Численная устойчивость алгоритма обеспечена оперированием в ходе его выполнения только неотрицательными матрицами, что гарантирует невозможность потери значащих цифр при компьютерной реализации.

4. Характеристики производительности

Вычислив векторы $\boldsymbol{\pi}_n,\ n = \overline{0, N}$, можно подсчитать значения различных характеристик производительности системы.

Среднее число запросов в системе вычисляется по формуле

$$N_c = \sum_{n=1}^{N} n \boldsymbol{\pi}_n \mathbf{e}.$$

Интенсивность выходного потока успешно обслуженных запросов определяется как

$$\mu_+ = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\pi}(n,k)\left(I_W \otimes L_{N-n}\left(N, \tilde{S}_1^{(k)}\right)\right)\mathbf{e}.$$

Интенсивность выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, определяется как

$$\mu_- = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\pi}(n,k)\left(I_W \otimes L_{N-n}\left(N, \tilde{S}_2^{(k)}\right)\right)\mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного запроса из-за нетерпеливости определяется как

$$P_{imp} = \frac{\mu_-}{\lambda}.$$

Вероятность потери произвольного запроса, поступающего в r-ю зону из-за переполненности системы, определяется как

$$P_{ent}^{(r)} = \lambda_r^{-1}\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\pi}(N,k)\left(D_r^{(k)} \otimes I_{J_N}\right)\mathbf{e}, \quad r = \overline{1,R}.$$

Вероятность потери произвольного запроса из-за переполненности системы определяется как

$$P_{ent} = \lambda^{-1}\boldsymbol{\pi}_N(\tilde{D} \otimes I_{J_N})\mathbf{e} = 1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\lambda} = \frac{\sum_{r=1}^{R}\lambda_r P_{ent}^{(r)}}{\lambda}.$$

Вероятность потери произвольного запроса вычисляется как

$$P_{loss} = P_{imp} + P_{ent} = 1 - \frac{\mu_+}{\lambda}.$$

Вероятность успешного обслуживания произвольного запроса определяется как

$$P_{succ} = 1 - P_{loss}.$$

5. Численный эксперимент

Задачами численного эксперимента являются:

1) показать важность учета зависимости параметров рассмотренной системы от состояния случайной среды;

2) показать, как с помощью полученных результатов можно решать различные оптимизационные задачи.

Для начала рассмотрим следующий набор входных данных, который будем обозначать как *withRE*. Считаем, что сота условно делится на $R = 3$ зоны. Предполагаем, что сота функционирует в случайной среде, которая имеет $K = 2$ состояния. Генератор среды определяется матрицей H, имеющей следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} -0{,}0019 & 0{,}0019 \\ 0{,}0012 & -0{,}0012 \end{pmatrix}.$$

Вероятность того, что в произвольный момент времени среда находится в первом состоянии, равна $p_1 = 0{,}3871$, а во втором – $p_2 = 0{,}6129$.

При первом состоянии среды в соту поступает поток запросов, характеризующийся матрицами:

$$D_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 9{,}16 & 0{,}04 \\ 0{,}012 & 0{,}404 \end{pmatrix},$$

$$D_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}2 \\ 0{,}024 & 1{,}16 \end{pmatrix}, \quad D_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Этот поток имеет среднюю интенсивность $\lambda^{(1)}$, равную 2,911, средние интенсивности поступления запросов различных типов определяются как $\lambda_1^{(1)} = 1{,}41671$, $\lambda_2^{(1)} = 1{,}09013$, $\lambda_3^{(1)} = 0{,}404557$, коэффициент корреляции интервалов между моментами поступления равен $c_{cor} = 0{,}187$, а коэффициент их вариации c_{var} равен 1,646.

При первом состоянии среды среднее время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 определяется как $\frac{1}{0{,}6}$, $\frac{1}{0{,}51}$ и $\frac{1}{0{,}37}$ соответственно. Вероятности успешного завершения обслуживания во время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 равны $\frac{0{,}49}{0{,}6}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{0{,}27}{0{,}37}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 1 в зону 2 и из зоны 2 в зону 1 равны $\frac{0{,}1}{0{,}6}$ и $\frac{0{,}08}{0{,}51}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 2 в зону 3 и из зоны 3 в зону 2 равны $\frac{0{,}08}{0{,}51}$ и $\frac{0{,}08}{0{,}37}$ соответственно. Вероятности потери запроса из-за нетерпеливости из зоны 1, 2 и 3 равны $\frac{0{,}01}{0{,}6}$, $\frac{0{,}01}{0{,}51}$ и $\frac{0{,}01}{0{,}37}$ соответственно.

Таким образом,

$$\mu_1^{(1)} = 0{,}6, \quad \mu_2^{(1)} = 0{,}51, \quad \mu_3^{(1)} = 0{,}37,$$

$$\mu_{1,+}^{(1)} = 0{,}49, \quad \mu_{2,+}^{(1)} = 0{,}34, \quad \mu_{3,+}^{(1)} = 0{,}27,$$

$$\mu_{1,2}^{(1)} = 0{,}1, \quad \mu_{1,3}^{(1)} = 0, \quad \mu_{2,1}^{(1)} = 0{,}08,$$

$$\mu_{2,3}^{(1)} = 0{,}08, \quad \mu_{3,1}^{(1)} = 0, \quad \mu_{3,2}^{(1)} = 0{,}08,$$

$$\mu_{1,-}^{(1)} = 0{,}01, \quad \mu_{2,-}^{(1)} = 0, 01, \quad \mu_{3,-}^{(1)} = 0{,}02.$$

При втором состоянии среды в соту поступает поток запросов, характеризующийся матрицами:

$$D_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -6{,}4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}28 \end{pmatrix},$$
$$D_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}4 \\ 0{,}144 & 0{,}56 \end{pmatrix}, \quad D_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 5{,}2 & 0{,}04 \\ 0{,}012 & 0{,}004 \end{pmatrix}.$$

Этот поток имеет среднюю интенсивность $\lambda^{(2)}$, равную 2,413, средние интенсивности поступления запросов различных типов определяются как $\lambda_1^{(2)} = 0{,}363758$, $\lambda_2^{(2)} = 0{,}666309$, $\lambda_3^{(2)} = 1{,}38336$, коэффициент корреляции равен $c_{cor} = 0{,}247$ и коэффициент вариации c_{var} равен 2,76.

При втором состоянии среды среднее время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 определяется как $\frac{1}{0{,}4}$, $\frac{1}{0{,}21}$ и $\frac{1}{0{,}17}$ соответственно. Вероятности успешного завершения обслуживания во время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 равны $\frac{0{,}34}{0{,}4}$, $\frac{0{,}12}{0{,}21}$ и $\frac{0{,}11}{0{,}17}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 1 в зону 2 и из зоны 2 в зону 1 равны $\frac{0{,}05}{0{,}4}$ и $\frac{0{,}04}{0{,}21}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 2 в зону 3 и из зоны 3 в зону 2 равны $\frac{0{,}04}{0{,}21}$ и $\frac{0{,}04}{0{,}17}$ соответственно. Вероятности потери запроса из-за нетерпеливости из зоны 1, 2 и 3 равны $\frac{0{,}01}{0{,}4}$, $\frac{0{,}01}{0{,}21}$ и $\frac{0{,}01}{0{,}17}$.

Соответственно имеем, что:

$$\mu_1^{(2)} = 0{,}4, \quad \mu_2^{(2)} = 0{,}21, \quad \mu_3^{(2)} = 0{,}17,$$
$$\mu_{1,+}^{(2)} = 0{,}34, \quad \mu_{2,+}^{(2)} = 0{,}12, \quad \mu_{3,+}^{(2)} = 0{,}11,$$
$$\mu_{1,2}^{(2)} = 0{,}05, \quad \mu_{1,3}^{(2)} = 0, \quad \mu_{2,1}^{(2)} = 0{,}04,$$
$$\mu_{2,3}^{(2)} = 0{,}04, \quad \mu_{3,1}^{(2)} = 0, \quad \mu_{3,2}^{(2)} = 0{,}04,$$
$$\mu_{1,-}^{(2)} = 0{,}01, \quad \mu_{2,-}^{(2)} = 0{,}01, \quad \mu_{3,-}^{(2)} = 0{,}02.$$

Для того чтобы показать важность учета корреляции и влияния случайной среды, рассмотрим второй набор входных данных, который будем обозначать как $withoutRE$. Рассмотрим систему, в которую разного типа запросы поступают, перемещаются, обслуживаются и уходят из-за нетерпеливости независимо от состояния среды с такой же средней интенсивностью, как и ранее. Другими словами, предположим, что в систему поступают стационарные пуассоновские потоки запросов трех типов с интенсивностями λ_1, λ_2, λ_3 соответственно, где λ_r, $r = \overline{1, R}$, находятся по формуле (1). Средние интенсивности переходов, перемещения и ухода из-за нетерпеливости определяются как соответствующие интенсивности при первом состоянии случайной среды, умноженные на вероятность p_1 того, что система находится в первом состоянии среды, плюс соответствующие интенсивности при втором состоянии случайной среды, умноженные на вероятность p_2 того, что система находится во втором состоянии среды. Например, средняя интенсивность ухода

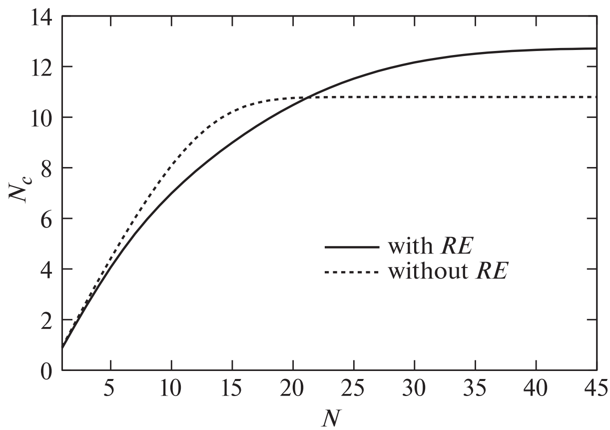

Рис. 1. Зависимость среднего числа запросов в системе N_c от параметра N.

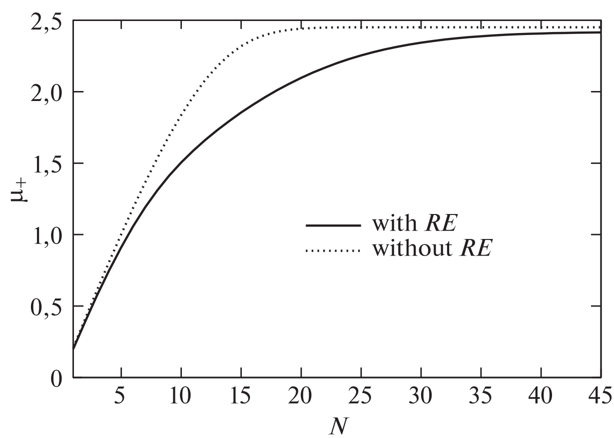

Рис. 2. Зависимость интенсивности μ_+ выходного потока успешно обслуженных запросов от параметра N.

из-за переходов запросов из третьей зоны во вторую может быть найдена по формуле $p_1\mu_{3,2}^{(1)} + p_2\mu_{3,2}^{(2)}$ и равняется 0,0554839.

Рассмотрим влияние числа каналов в соте на характеристики ее производительности. Для этого будем изменять параметр N в интервале от 1 до 45.

Рисунки 1 и 2 показывают зависимость среднего числа запросов в системе N_c и интенсивности μ_+ выходного потока успешно обслуженных запросов от параметра N для двух наборов входных данных.

Рисунки 3 и 4 показывают зависимость интенсивности μ_- выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, и вероятности P_{imp} потери произвольного запроса из-за нетерпеливости от параметра N для двух наборов входных данных.

Рисунки 5 и 6 показывают зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N (изменяе-

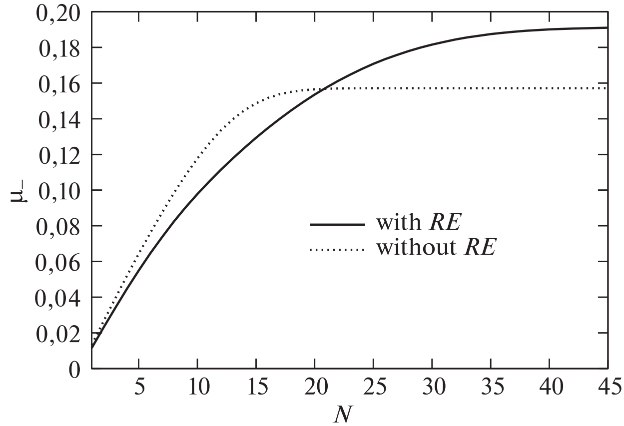

Рис. 3. Зависимость интенсивности μ_- выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, от параметра N.

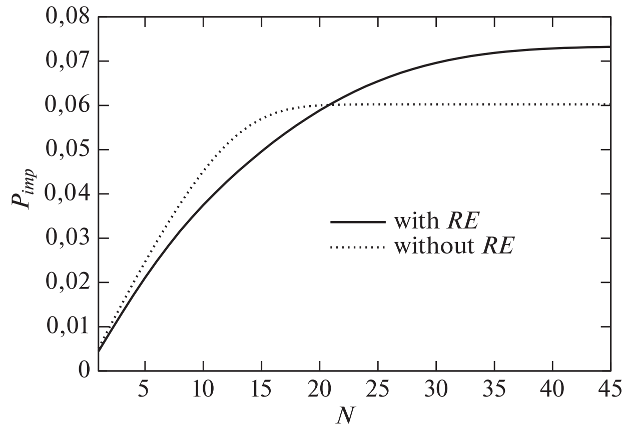

Рис. 4. Зависимость вероятности P_{imp} потери произвольного запроса из-за нетерпеливости от параметра N.

мого в диапазонах от 1 до 45 и от 15 до 45 соответственно) для двух наборов входных данных. На рис. 6 дополнительно проведена горизонтальная пунктирная линия, соответствующая значению 0,0015 этой вероятности.

Рисунок 7 показывает зависимость от параметра N для двух наборов входных данных вероятности P_{loss} потери произвольного запроса.

Как видно из приведенных рисунков, характеристики системы сильно зависят от корреляции входного потока и влияния случайной среды. При тех же самых средних интенсивностях поступления, обслуживания, перемещения и ухода из-за нетерпеливости характеристики производительности системы без влияния среды существенно лучше, чем для системы, на функционирование которой оказывает влияние случайная среда.

Предположим, что задачей оптимизации системы является задача определения минимальной емкости системы N, при которой вероятность потери

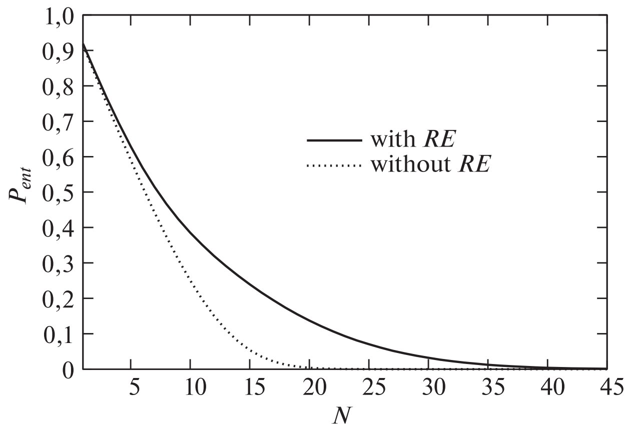

Рис. 5. Зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N.

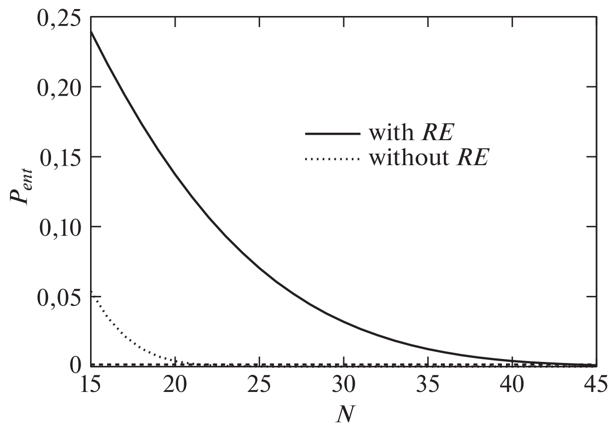

Рис. 6. Зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N.

произвольного запроса на входе в систему не превышала бы 0,0015. Как видно из рис. 5 и 6, для системы, которая игнорирует влияние среды, оптимальным значением емкости системы является емкость $N = 22$. В то же время для системы, учитывающей влияние среды, при $N = 22$ вероятность потери $P_{ent} = 0{,}10657$, что в 71 раз больше, чем требуется. Если система подвержена влиянию среды и проектируем емкость, равную $N = 22$, полученную из расчета по упрощенной модели, ожидая при этом, что на входе в систему получат отказ 15 запросов из 10 000, то в реальности будем терять больше, чем 1 запрос из 10. Для того чтобы добиться требуемой вероятности потери P_{ent} для системы, функционирующей в случайной среде, необходимо проектировать емкость системы $N = 44$.

Отметим, что время, затраченное на расчет значений описанных выше характеристик производительности системы для значений N от 1 до 45 на

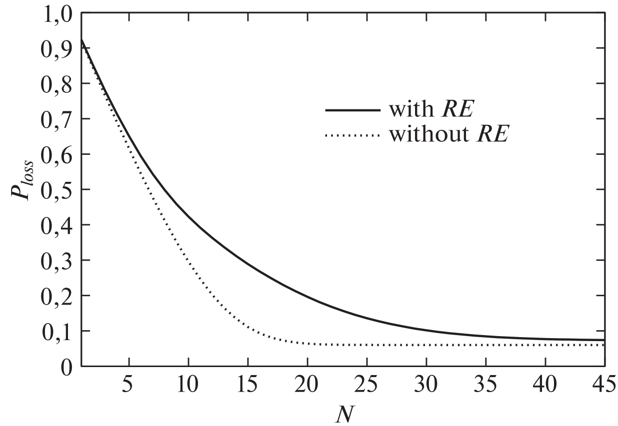

Рис. 7. Зависимость вероятности P_{loss} потери произвольного запроса от параметра N.

ноутбуке с характеристиками: процессор Inter(R) Core(TM) i7-10750H CPU @2.60GHz, оперативная память 16.0 ГБ, Wolfram Mathematica 11.0, составило около 19 мин С ростом N время счета существенно растет. Например, для $N = 60$ (при этом максимальный размер одного блока генератора равен 7564) время счета составило более 10 мин (616 с). Использование для расчетов более мощных компьютеров и особенно графических процессоров (GPU) может позволить существенно снизить время счета.

6. Заключение

В статье найдено стационарное распределение вероятностей состояний системы массового обслуживания, являющейся моделью работы соты мобильной сети связи. Сота разделена на зоны, которые определяют скорость обслуживания находящихся в них пользователей. Разделение соты на зоны определяется их расстоянием от базовой станции, наличием препятствий и помех для распространения радиосигнала. Поступление запросов описывается маркированным марковским потоком. Все параметры системы зависят от состояний некоторого внешнего случайного процесса (случайной среды). Численно проиллюстрированы возможность нахождения зависимости значений важнейших характеристик системы от числа каналов для передачи информации и решения задачи минимально необходимого числа каналов. Показано, что игнорирование учета влияния случайной среды (за счет соответствующего усреднения параметров системы) может привести к большим ошибкам в оценивании этого количества каналов.

В качестве направлений для будущих исследований отметим необходимость учета возможности совершения повторных попыток пользователями, не получившими доступ в систему, а также возможности разделения ресурса базовой станции между пользователями не только в зависимости от зоны, в которой находится пользователь, но и от общего числа активных пользователей в соте. Последняя возможность исследовалась в публикации [22], но без учета возможного влияния случайной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee Y.L., et al.* Recent Advances in Radio Resource Management for Heterogeneous LTE/LTE-A Networks // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2014. V. 16. No. 4. P. 2142–2180.
2. *Cao P., Xie J.* Optimal Control of a Multiclass Queueing System when Customers Can Change Types // Queueing Systems. 2016. V. 82. No. 3–4. P. 285–313.
3. *Dudin S., Kim C.* Analysis of Multi-Server Queue With Spatial Generation of Customers and Service Rate Depending on Customers' Location as a Model of Cell Operation // IEEE T. Commun. 2017. V. 65. P. 4325–4333.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Киев: КВИРТУ, 1963.
5. *Dudin A., et al.* Priority Retrial Queueing Model Operating in Random Environment with Varying Number and Reservation of Servers // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 269. P. 674–690.
6. *He Q.M.* Queues with Marked Customers // Advances in Applied Probability. 1996. P. 567–587.
7. *Chakravarthy S.R.* The Batch Markovian Arrival Process: a Review and Future Work // Advances in probability theory and stochastic processes. 2001. V. 1. P. 21–49.
8. *Lucantoni D.M.* New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
9. *Вишневский В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.

   Vishnevskii V.M., Dudin A.N. Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
10. *Graham A.* Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. Courier Dover Publications, 2018.
11. *Neuts M.F.* Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. Courier Corporation, 1994.
12. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. Springer Science & Business Media, 2008. V. 51.
13. *Kim C., et al.* Tandem Queueing System with Infinite and Finite Intermediate Buffers and Generalized Phase-type Service Time Distribution // Eur. J. Operational Research. 2014. V. 235. No. 1. P. 170–179.
14. *Dudin A., et al.* Multi-server Queueing System with a Generalized Phase-type Service Time Distribution as a Model of Call Center with a Call-back Option // Annals of Operations Research. 2016. V. 239. No. 2. P. 401–428.
15. *Brazenas M., Horvath G., Telek M.* Parallel Algorithms for Fitting Markov Arrival Processes // Performance Evaluation. 2018. V. 123. P. 50–67.
16. *Buchholz P., Kriege J.* Fitting Correlated Arrival and Service Times and Related Queueing Performance // Queueing Systems. 2017. V. 85. P. 337–359.
17. *Blume A., Buchholz P., Kriege J.* Parallelization of EM-Algorithms for Markovian Arrival Processes // Lect. Notes in Comput. Sci. 2020. V. 12040. P. 173–189.
18. *Daduna H.* Graph-Based Mobility Models: Asymptotic and Stationary Node Distribution // Lect. Notes in Comput. Sci. 2020. V. 12040. P. 155–172.

19. *Leo Y., et al.* Call Detail Records to Characterize Usages and Mobility Events of Phone Users // Computer Communications. 2016. V. 95. P. 43–53.
20. *Ramaswami V., Lucantoni D.M.* Algorithms for the Multi-Server Queue with Phase Type Service // Stochastic Models. 1985. V. 1. No. 3. P. 393–417.
21. *Kim C., et al.* Queueing System $MAP/PH/N/N+R$ with Impatient Heterogeneous Customers as a Model of Call Center // Appl. Math. Modelling. 2013. V. 37. No. 3. P. 958–976.
22. *Kim C., et al.* Mathematical Models for the Operation of a Cell With Bandwidth Sharing and Moving Users // IEEE Trans. on Wireless Communications. 2020. V. 19. No. 2. P. 744–755.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 27.10.2020

После доработки 17.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

© 2021 г. **В.С. ВИКТОРОВА, д-р техн. наук (vsviktorova@gmail.com), А.С. СТЕПАНЯНЦ (a.s.stepanyants@gmail.com) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ В НЕМОНОТОННЫХ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается логико-вероятностное моделирование надежностного поведения многоуровневых систем, описываемое немонотонными функциями алгебры логики. Предлагается метод вычисления параметра потока переходов в заданное немонотонной функцией подмножество состояний. Описывается подход к вычислению на логико-вероятностных моделях оценок интервальных показателей надежности, эффективности, безопасности многоуровневых систем. Приводится пример расчета показателей эксплуатационной готовности многоуровневой системы с немонотонными логическими критериями перехода между уровнями. Проводится сравнение полученных значений показателей с результатами марковского моделирования.

Ключевые слова: надежность, логико-вероятностные методы, немонотонные модели, интервальные показатели, параметр потока отказов, коэффициент сохранения эффективности.

DOI: 10.31857/S000523102105007X

1. Введение

В современных системах управления и технологических комплексах достижение высоких показателей эффективности, надежности, безопасности обеспечивается не только выбором более надежных элементов, резервированием, но и реализацией многоуровневого функционирования системы [1–3]. В классических двухуровневых моделях надежности все множество состояний системы, определяемых работоспособностью, отказами элементов системы, представляется двумя классами — класс работоспособных состояний системы (уровень эффективности $E_{\max}$, в частности 100 %) и класс неработоспособных состояний (уровень эффективности $E_0 \leqslant 0$, в частности 0 %). Надежностное поведение многоуровневых систем характеризуется тем, что при возникновении отказов уровень эффективности функционирования E_i может снижаться и принимать дискретные значения $E_0 < E_1 < \ldots < E_{\max}$, промежуточные между $E_{\max}$ и E_0. Множество состояний многоуровневой системы разбивается на классы K_i, соответствующие этим уровням. Состояния отказа системы также могут быть разбиты на классы, соответствующие уровням критичности отказов, что привело к разработке и исследованию надежностных моделей анализа безопасности [4].

[1] Посвящается памяти Александра Сергеевича Можаева.

Для исследования надежностного поведения многоуровневых систем могут применяться марковские процессы [5–7]. Подход на основе марковских моделей является универсальным в смысле учета различных особенностей сложного надежностного поведения систем и возможности вычисления практически всех показателей надежности как мгновенных (дифференциальных), так и интервальных (интегральных). Еще одним из подходов к моделированию многоуровневых систем является подход, основанный на методе производящих функций, предложенном И.А. Ушаковым [8] и развитом в [9–12]. При практических расчетах надежности сложных многокомпонентных, многоуровневых систем приходится прибегать к логико-вероятностным методам (ЛВМ) [13, 14]. Это связано с рядом причин, основными из которых являются:

— “взрывной” рост размерности марковских моделей при увеличении числа компонентов системы;

— использование производящей функции имеет преимущество в случаях, когда не только система, но и ее элементы являются многоуровневыми, а при бинарных элементах может оказаться полезным, если не возникнет проблема размерности [3, раздел 3.5];

— ЛВМ с визуальной интерпретацией в виде деревьев отказов являются стандартом де факто при анализе надежности в атомной энергетике, авиастроении, газовой отрасли [15, 16] и других ответственных областях.

Недостатками логико-вероятностных моделей и методов являются:

— ограничение на надежностное поведение моделируемого объекта, связанное с независимостью функционирования, отказов и восстановлений его элементов; это ограничение приводит к возможности отражения в логико-вероятностных моделях надежности только нагруженного резервирования и неограниченного восстановления;

— возможные трудности, которые могут возникнуть при задании произвольного начального состояния (в момент $t = 0$), особенно для элементов с неэкспоненциальными функциями распределения соответствующих случайных величин;

— ЛВМ для восстанавливаемых систем позволяют рассчитывать лишь дифференциальные показатели надежности, определяемые в момент времени t.

Отметим, что коэффициент готовности $A(t)$ и параметр потока отказов $\omega(t)$, по существу, исчерпывают список основных показателей надежности для момента времени t (на стационарном или нестационарном участках работы системы). Непосредственное вычисление показателей безотказности (вероятность отказа и безотказной работы на интервале $(0, t)$, интенсивность отказов, средняя наработка до отказа и ряда других важных показателей надежности) в ЛВМ невозможно.

Решением здесь является построение оценок этих показателей, используя $A(t)$ и $\omega(t)$. В [17–19] получены оценки для показателей безотказности. Верхняя оценка интенсивности отказов $\lambda(t)$ и нижняя оценка вероятности безотказной работы $R(t)$:

$$\lambda(t) \approx \frac{\omega(t)}{A(t)};\ R(t) \approx \exp\left\{-\int\limits_0^t \frac{\omega(\tau)}{A(\tau)} d\tau\right\}. \tag{1}$$

Вероятность отказа на интервале $Q(0,t)$ и среднюю наработку до первого отказа $MTTFF$ можно вычислить по известным соотношениям:

$$Q(t) = 1 - R(t);\ MTTFF = \int\limits_0^\infty R(\tau) d\tau. \tag{2}$$

Пусть $A^{\Omega_d}(t)$ – вероятность застать систему в момент t в выделенном подмножестве ее состояний Ω_d, а $\omega^{\Omega_d}(t)$ – параметр потока переходов в это подмножество. Интегрирование $A^{\Omega_d}(t)$ и $\omega^{\Omega_d}(t)$ в заданных пределах дает точные выражения для показателей среднего времени пребывания $T_\Sigma^{\Omega_d}(0,t)$ и среднего числа переходов $N_\Sigma^{\Omega_d}(0,t)$ в Ω_d:

$$T_\Sigma^{\Omega_d}(0,t) = \int\limits_0^t A^{\Omega_d}(\tau) d\tau;\ N_\Sigma^{\Omega_d}(0,t) = \int\limits_0^t \omega^{\Omega_d}(\tau) d\tau. \tag{3}$$

Для надежностного анализа многоуровневых систем в отечественную нормативную документацию был введен показатель — коэффициент сохранения эффективности $C(0,t)$, который определяется как отношение математического ожидания эффективности использования объекта по назначению за определенную продолжительность эксплуатации к номинальному значению эффективности, вычисленному при условии, что отказы объекта в течение того же периода не возникают. Конкретизация понятия эффективности осуществляется, исходя из существа задачи анализа надежности, особенностей функционирования и назначения системы. Для многоуровневых систем важным показателем эффективности функционирования является усредненное по уровням значение интегральной эффективности E на интервале $(0,t)$

$$E(0,t) = \sum_i h_i \int\limits_0^t A_i(\tau) d\tau + \sum_{i,j,j\neq i} h_{ij} \int\limits_0^t \omega_{ij}(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где $A_i(t)$ – вероятность застать систему в момент t в i-м классе состояний (K_i); $\omega_{ij}(t)$ – параметр потока переходов в момент t из K_i в K_j; h_i – доход (потери) в единицу времени от пребывания системы в K_i; h_{ij} – единовременные доходы (потери) за переход из K_i в K_j, обусловленные затратами на восстановление работоспособности, штрафами, потерями находящегося в обработке продукта (сырья, заготовки).

Коэффициент сохранения эффективности определяется как

$$C(0,t) = \frac{E(0,t)}{h_{100\%} t}. \tag{5}$$

Для стационарного участка работы системы можно вычислить показатели средней наработки между отказами $MTTF$ и среднего времени между отказами $MTBF$ через стационарные значения коэффициента готовности A и параметра потока отказов ω:

$$MTTF = \frac{A}{\omega};\ MTBF = \frac{1}{\omega}. \tag{6}$$

Зная $MTTF$ и $MTBF$, очевидным образом определяется среднее стационарное время восстановления $MTTR = MTBF - MTTF$.

Показатель $MTBF$ не входит в перечень показателей надежности отечественных стандартов. Однако он часто упоминается в зарубежной литературе и требования по его обязательному вычислению выдвигаются при международной сертификации ответственных объектов. Отметим, что в отечественной практике (например, авиастроении) часто показатель $MTTFF$ вычисляют правильно по приведенному выше интегральному выражению (2), а обозначают его $MTBF$, что неверно.

Таким образом, не прибегая к марковскому моделированию, можно вычислять различные показатели надежности, эффективности, безопасности, выражая их через коэффициент готовности и параметр потока отказов, которые непосредственно вычисляются в логико-вероятностных моделях.

Традиционно ЛВМ работают с монотонными системами, а именно с системами, модель надежности которых представляется монотонной логической функцией отказа/работоспособности [20, с. 77]. В таких системах не может быть ни одного элемента, отказ которого увеличивает, а восстановление снижает надежность системы. Методы расчета дифференциальных показателей надежности монотонных систем известны [13, 14, 21, 22].

Формализация многоуровневых систем осуществляется немонотонными функциями алгебры логики (ФАЛ) относительно каждого уровня эффективности функционирования E_i [3, 23]. Немонотонность порождается тем, что для реализации промежуточных уровней необходимо, чтобы какая-то часть системы отказала, а другие части были работоспособными. Деревья отказов, соответствующие немонотонной ФАЛ, называют некогерентными деревьями отказов [24, с. 251]. Методы вычисления вероятности застать систему в момент времени t в классе состояний K_i, соответствующих немонотонной ФАЛ (коэффициент готовности относительно уровня E_i), известны и не представляют принципиальных трудностей. Определение параметра потока отказов для немонотонного случая — достаточно трудная и нетривиальная задача, характеризующаяся большим объемом вычислений. Подход к вычислению ω немонотонных восстанавливаемых систем, основанный на двоичных диаграммах решений (BDD), описан в [25]. Эффективность этого подхода при программной реализации достигается за счет представления логической функции бинарным деревом. Авторами данной статьи предлагается рекурсивный метод вычисления параметра потока переходов (ППП) в класс состояний K_i и между классами состояний K_i, K_j, показавший свою эффективность как при программной реализации, так и в случае расчетов вручную.

2. Метод вычисления дифференциальных показателей надежности в логико-вероятностных моделях

2.1. Монотонные модели

Кратко сформулируем основные положения логико-вероятностного моделирования, в классе которого и рассматривается предлагаемый метод, и результаты по вычислению коэффициента готовности и параметра потока отказов для монотонных моделей, полученные в [22, 26].

Пусть элементы системы $x_i,\ i=\overline{1,n}$ и система $S(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}=\{x_i\}$ могут находиться в двух состояниях — работоспособном и неработоспособном:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если элемент } i \text{ исправен}, \\ 0, \text{если элемент } i \text{ отказал}, \end{cases}$$

$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{если система исправна}, \\ 0, \text{если система отказала}. \end{cases}$$

Пусть состояние системы полностью определяется состоянием в момент t ее элементов. Обозначим: $A=\{A_j\}$ – множество всех минимальных путей работоспособности системы, $C=\{C_j\}$ – множество всех минимальных сечений неработоспособности системы [24, с. 227–240], [27, с. 82–83]. Тогда работоспособность системы в момент t записывается как

$$S(\mathbf{x},t) = \left\{ \bigvee_{j=1}^{r} A_j \right\} = 1, \tag{7}$$

а неработоспособность —

$$\overline{S}(\mathbf{x},t) = \left\{ \bigvee_{j=1}^{l} C_j \right\} = 1. \tag{8}$$

Каждый минимальный путь (сечение) представляет собой конъюнкцию некоторого набора из работоспособных (отказавших) элементов $\mathbf{x}=\{x_i\}$. Коэффициент готовности (простоя) системы определяется по выражениям:

$$P\{S(\mathbf{x},t)=1\} = P\left\{\overline{S}(\mathbf{x},t)=0\right\} = P\left\{ \bigvee_{j=1}^{r} A_j = 1 \right\} = 1 - P\left\{ \bigvee_{j=1}^{l} C_j = 1 \right\}, \tag{9}$$

$$P\{S(\mathbf{x},t)=0\} = P\left\{\overline{S}(\mathbf{x},t)=1\right\} = P\left\{ \bigvee_{j=1}^{l} C_j = 1 \right\} = 1 - P\left\{ \bigvee_{j=1}^{r} A_j = 1 \right\}, \tag{10}$$

где $P\{.\}$ – вероятность наступления в момент t заключенного в скобки события.

Параметр потока отказов системы — это производная в момент времени t от среднего числа отказов на $(0,t)$. Можно сказать, что параметр потока отказов есть математическое ожидание появления отказа системы в момент времени t (т.е. на $(t,t+\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$), что означает возникновение по крайней мере одного сечения в момент времени $t + \Delta t$. Пусть e_i – событие появления i-го сечения в $(t, t + \Delta t)$, где $e_i(t, t + \Delta t)$ – конъюнкция n_i переменных (элементов), образующих сечение C_i. Так как базовым допущением ЛВМ является ординарность потока отказов, то вероятность появления на Δt сечения e_i определяется как

$$P\{e_i\} = \omega_i^*(t)\,\Delta t = \sum_{j_i=1}^{n_i}\left[\omega_{j_i}(t)\prod_{g_i \neq j_i}^{n_i} Q_{g_i}(t)\right]\Delta t, \tag{11}$$

где $\omega_{j_i}(t)$, $Q_{g_i}(t)$ – параметр потока отказов и коэффициент простоя (неготовность) элементов j_i, g_i в момент времени t; $\omega_i^*(t)$ – параметр потока отказов, обусловленный появлением сечения C_i.

Вероятность отказа системы на Δt можно представить выражением

$$\omega_s \Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^{l} e_i\right)\right\}. \tag{12}$$

Основные соотношения разработанного в [22, 26] рекурсивного метода оценки параметра потока отказов следующие:

$$\omega^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^{l} e_i\right)/x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 1\right\}; \tag{13}$$

$$\nu^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^{l} e_i\right)/x_{k+1} = 0, x_{k+2} = \ldots = x_n = 1\right\},$$

где $\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^{l} e_i\right)/x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 1\right\}$ – условное событие работоспособности системы в момент времени t и появления на Δt отказа (реализация появления хотя бы одного сечения) при условии работоспособности элементов $x_{k+1}, \ldots, x_n$; $\omega^k(t)$, $\nu^k(t)$ – условный параметр потока отказов системы на k-м шаге рекурсии.

Параметр потока отказов системы на шаге $k + 1$ рекурсивно вычисляется как

$$\begin{gathered} \omega^{k+1}(t) = R_{k+1}(t)\omega^k(t) + Q_{k+1}(t)\nu^k(t) + (p^k(t) - r^k(t))\omega_{k+1}(t), \\ \omega^0(t) = \nu^0(t) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $R_i(t)$, $Q_i(t)$, $\omega_i(t)$ – коэффициент готовности, коэффициент простоя, параметр потока отказов элемента x_i, а

$$p^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) = 1)/x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 1\}, \tag{15}$$

$$r^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) = 1)/x_{k+1} = 0, x_{k+2} = \ldots = x_n = 1\}$$

— условные вероятности работоспособности системы в момент t.

Причем $p^0(t) = 1$, а $p^{k+1}(t) = R_{k+1}(t)p^k(t) + Q_{k+1}(t)r^k(t)$. Последовательно вычисляя $p^1(t), p^2(t), \ldots, p^n(t)$, на последнем n-м шаге рекурсии получим коэффициент готовности системы и аналогично, последовательно вычисляя $\omega^1(t), \omega^2(t), \ldots, \omega^n(t)$, получаем параметр потока отказов системы $\omega(t) = \omega^n(t)$.

Немонотонные логико-вероятностные модели систем не могут быть представлены логическим выражением, содержащим только работоспособные наборы элементов (например, как при задании множества минимальных путей работоспособности системы) или только неработоспособные наборы элементов (как при задании минимальных сечений отказа). Немонотонные модели формализуют некоторые промежуточные состояния системы, в которых обязательно присутствуют как отказавшие наборы элементов, так и работоспособные. На рис. 1 приведена надежностная модель в виде графа состояний и переходов гипотетической системы, в которой стрелки от состояний с меньшими номерами к состояниям с большими — это потоки отказов элементов, а стрелки от состояний с большими номерами к состояниям с меньшими — это потоки восстановления элементов.

Пусть обведенные состояния $4, 5, n-1$ определяют класс (подмножество) состояний системы, в которых эффективность функционирования составляет уровень E_j. Тогда переходы в это подмножество состояний определяются как потоком отказов (стрелки из состояний с меньшими номерами), так и потоком восстановления (стрелки из состояний с бо́льшими номерами). Отметим, что в классе монотонных двухуровневых моделей все множество состояний разделено на два подмножества, одно соответствует работоспособности системы, другое — отказу, а переходы из одного подмножества в другое определяются одним потоком — либо отказов, либо восстановления.

Логическая функция $Y(E_j)$, выделяющая класс состояний, эквивалентных промежуточному уровню E_j, может быть разделена на две составляющие A и $\overline{B}$, объединенные конъюнкцией

$$Y(E_j) = A \wedge \overline{B}, \tag{16}$$

где A – логическое выражение работоспособности части структуры системы, необходимой для обеспечения уровня не ниже E_j; $\overline{B}$ – логическое выраже-

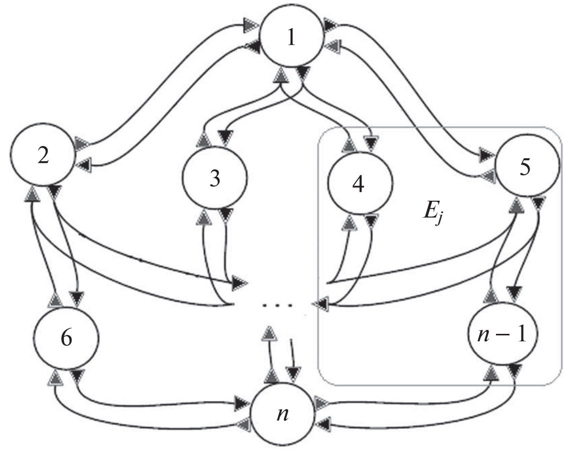

Рис. 1. Граф состояний и переходов немонотонной модели надежности.

ние неработоспособности части структуры системы, приводящей к тому, что система не может функционировать на уровнях выше E_j.

Параметр потока переходов в подмножество состояний, определяемое логическим выражением (16), будет состоять из суммы параметров – потока отказов по составляющей $\overline{B}$ и потока восстановления по составляющей A. Поэтому чтобы определять параметр потока переходов в заданное немонотонной функцией подмножество состояний, необходимо написать выражения для вычисления параметра потока восстановления.

Параметр потока восстановления рекурсивным способом может быть вычислен в соответствии с выражениями:

$$(17)\qquad \psi^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x},t)=0)\wedge\left(\bigcup_{i=1}^{r}\eta_i\right)/x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0\right\};$$

$$\varphi^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x},t)=0)\wedge\left(\bigcup_{i=1}^{r}\eta_i\right)/x_{k+1}=1,x_{k+2}=\ldots=x_n=0\right\},$$

$$(18)\qquad \psi^{k+1}(t)=Q_{k+1}(t)\psi^k(t)+R_{k+1}(t)\varphi^k(t)+\left(g^k(t)-f^k(t)\right)\psi_{k+1}(t),$$
$$\psi^0(t)=\varphi^0(t)=0,$$

где $\psi^k(t)$, $\varphi^k(t)$ – условные параметры потока восстановления системы на k-м шаге рекурсии; $\psi_{k+1}(t)$ – параметр потока восстановления элемента x_{k+1}; η – множество минимальных путей попадания в состояния, определяемые составляющей A в логической функции $Y(E_j)$; $g^k(t)$, $f^k(t)$ – условные вероятности неработоспособности системы в момент t:

$$(19)\qquad g^k(t)=P\{(S(x_1,x_2,\ldots,x_k;t)=0)/x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0\},$$
$$f^k(t)=P\{(S(x_1,x_2,\ldots,x_k;t)=0)/x_{k+1}=1,x_{k+2}=\ldots=x_n=0\}.$$

Параметр потока восстановления системы равен $\psi(t)=\psi^n(t)$.

Запись общего выражения для параметра потока переходов из подмножества состояний $\overline{Y}(E_j)$ в подмножество $Y(E_j)$ основывается на следующих положениях:

1. Элементы составляющих A и $\overline{B}$ располагаются в определенном порядке и помечаются (при необходимости перенумеровываются, если говорить об алгоритмизации вычислений), чтобы для одних рекурсивно записывать параметр потока восстановлений (для путей, входящих в A), а для других (для сечений, входящих в $\overline{B}$) – параметр потока отказов;

2. Пусть K_i – событие появления i-й конъюнкции, содержащей пересечение одного сечения из $\overline{B}$ и одного пути из A, в $(t,t+\Delta t)$, т.е. i-я конъюнкция имеет вид $K_i=e_i\wedge\eta_i$, причем в e_i и η_i нет общих элементов. При ординарном потоке отказов, восстановления появление K_i на Δt означает: а) либо в момент t неработоспособными были (n_i-1) элементов сечения e_i (n_i – число элементов сечения e_i, h_i – число элементов пути η_i) и произошел отказ на Δt одного (работоспособного в момент t) элемента, при этом все элементы пути η_i – работоспособны; б) либо в момент t работоспособными были (h_i-1)

элементов пути η_i и произошло восстановление одного (неработоспособного в момент t) элемента, при этом все элементы сечения e_i – неработоспособны. Тогда вероятность появления на Δt конъюнкции K_i определится по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P\{K_i\} = \gamma_i^*(t)\Delta t = \prod_{r=1}^{h_i} R_r(t) \sum_{j_i=1}^{n_i} \left[w_{j_i}(t) \prod_{g_i \neq j_i}^{n_i} Q_{g_i}(t) \right] \Delta t + \\ + \prod_{r=1}^{n_i} Q_r(t) \sum_{j_i=1}^{h_i} \left[\psi_{j_i}(t) \prod_{g_i \neq j_i}^{h_i} R_{g_i}(t) \right] \Delta t, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\omega_{j_i}(t), \psi_{j_i}, Q_r(t), R_r(t)$ – параметр потока отказов и восстановления элементов j_i, а также коэффициент простоя (неготовность) и коэффициент готовности элементов r, g_i в момент времени t; $\gamma_i^*(t)$ – параметр потока переходов, обусловленный появлением конъюнкции K_i;

3. В общем случае предлагаемый рекурсивный метод оперирует не каждой в отдельности конъюнкцией K_i, а записывается условный ППП (отказов, восстановления) для системы при указанных в условии состояниях элементов. При алгоритмизации метода для вычисления условных параметров потоков отказов, восстановления необходимо реализовывать новые итерации определения этих параметров потоков, но с меньшим числом элементов. При второй, третьей и т.д. итерации вновь применяется рекурсивный метод вычисления. Обычно после первых итераций анализируемая структура сводится к последовательным, параллельным и “m из n” надежностным схемам, поэтому повторные итерации можно не применять и определять параметры соответствующих потоков, используя стандартные формулы. Это повышает эффективность процедуры вычисления.

3. Пример вычисления параметра потока переходов в немонотонной модели

Работу предложенного метода продемонстрируем на вычислении ППП мостиковой схемы с немонотонным логическим критерием, интересующим аналитика. Выбор именно этой схемы для иллюстрации работы метода обусловлен двумя факторами. Во-первых, “мостик” является классическим примером для демонстрации особенностей вычислительных методов логико-вероятностных моделей [28, 29], так как его логическое описание не сводится к бесповторным формам. В импликанты логического описания мостиковой схемы могут входить одни и те же переменные (элементы структуры), что приводит к зависимости соответствующих случайных событий и, как результат, усложнению задачи преобразования логических выражений в вероятностные. Во-вторых, мостиковая структура [20, с. 67–71] имеет важное прикладное значение, так как она описывает обширный класс реальных технических систем, в частности бортовых электроэнергетических установок [27, с. 16–21].

Рассмотрим мостиковую структуру (рис. 2), записав для нее немонотонный логический критерий, а именно: работа только одного из выходов схемы.

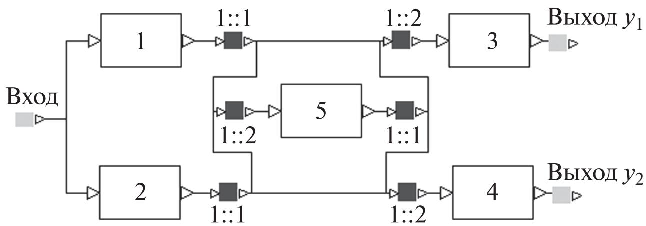

Рис. 2. Блок-схема надежности мостиковой структуры.

Пусть необходимо вычислить параметр потока переходов в подмножество состояний, заданное логическим выражением $Y(E_j) = y_1 \wedge \overline{y}_2$.

Логические выражения для работоспособности (неработоспособности) по выходам y_1, y_2 имеют вид:

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad & y_1 = x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_5;\ \overline{y}_1 = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2;\\
& y_2 = x_2 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_4 \wedge x_5;\ \overline{y}_2 = \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2.
\end{aligned}
$$

$$
(22) \qquad Y(E_j) = (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_5 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_5).
$$

Сечения e_i для y_2: $e_1 = \overline{x}_4$; $e_2 = \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_5$; $e_3 = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$.

Пути η_i для y_1: $\eta_1 = x_1 \wedge x_3$; $\eta_2 = x_2 \wedge x_3 \wedge x_5$.

Обозначим для элементов x_i их вероятностные характеристики: p_i (готовность), q_i (неготовность), ω_i (параметр потока отказов), ψ_i (параметр потока восстановлений).

Вычислим параметр потока отказов для $\overline{y}_2$. Так как в общее логическое выражение (22) вошли только 3 элемента из четырех, входящих в $\overline{y}_2$, то рекурсию можно делать только по этим трем элементам, уменьшая размерность задачи. Расположим элементы в следующем порядке x_4, x_2, x_5. Отметим также, что готовностью (для параметра потока переходов по отказам) являются состояния $\overline{Y}(E_j)$, из которых происходит переход в состояния $Y(E_j)$. Таким образом, для рассматриваемых элементов x_4, x_2, x_5 при вычислении параметра потока отказов состояния $S(x_2, x_4, x_5; t) = S(x, t) = y_2 = x_2 \wedge x_4 \vee x_4 \wedge x_5$ определяют искомые вероятности p^i, r^i (15). Тогда

$$
\begin{aligned}
& p^0(t) = P\{S(x,t) = 1/x_2 = x_4 = x_5 = 1\} = 1,\\
& r^0(t) = P\{S(x,t) = 1/x_4 = 0, x_2 = x_5 = 1\} = 0,\\
& p^1(t) = P\{S(x,t) = 1/x_2 = x_5 = 1\} = p_4 p^0 + q_4 r^0 = p_4,\\
& r^1(t) = P\{S(x,t) = 1/x_2 = 0, x_5 = 1\} = p_4,\\
& p^2(t) = P\{S(x,t) = 1/x_5 = 1\} = p_2 p^1 + q_2 r^1 = p_4,\\
& r^2(t) = P\{S(x,t) = 1/x_5 = 0\} = p_2 p_4,\\
& p^3(t) = P\{S(x,t) = 1\} = p_4 p_5 + q_5 p_2 p_4.
\end{aligned}
$$

Теперь рекурсивно определим параметр потока переходов по отказам в $Y(E_j)$ (14) с учетом обеспечения необходимого состояния по составляющей y_1:

$$\omega^0(t) = [\omega(t)/x_2 = x_4 = x_5 = 1] = 0,$$
$$\nu^0(t) = [\omega(t)/x_4 = 0, x_2 = x_5 = 1] = 0,$$
$$\omega^1(t) = [\omega(x_4,t)/(x_2 = x_5 = 1)][P\{y_1(x)/(x_2 = x_5 = 1, (\overrightarrow{x_4} = 0)) = 1\}] =$$
$$= p_4\omega^0 + q_4\nu^0 + \omega_4(p^0 - r^0)p_3 = \omega_4 p_3,$$
$$\nu^1(t) = [\omega(x_4,t)/(x_2 = 0, x_5 = 1)][P\{y_1(x)/(x_2 = 0, x_5 = 1, (\overrightarrow{x_4} = 0)) = 1\}] =$$
$$= \omega_4 p_1 p_3,$$
$$\omega^2(t) = [\omega(x_2,t)/x_5 = 1][P\{y_1(x)/(x_5 = 1, (\overrightarrow{x_2} = 0)) = 1\}] =$$
$$= p_2\omega^1 + q_2\nu^1 + \omega_2(p^1 - r^1)p_1p_3 =$$
$$= \omega_4 p_2 p_3 + \omega_4 p_1 p_3 q_2 + \omega_2(p_4 - p_4)p_1p_3 =$$
$$= \omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3),$$
$$\nu^2(t) = [\omega(x_4,x_2,t)/(x_5 = 0)][P\{y_1(x)/(x_5 = 0, (\overrightarrow{x_4, x_2} = 0)) = 1\}] =$$
$$= p_1p_3p_4\omega_2 + p_1p_2p_3\omega_4,$$
$$\omega^3(t) = [\omega(x_4,x_2,x_5,t)][P\{y_1(x)/(x_5 = 1, (\overrightarrow{x_4, x_2, x_5}) = 0)) = 1\}] =$$
$$= p_5\omega^2 + q_5\nu^2 + \omega_5(p^2 - r^2)p_1p_3 =$$
$$= p_5\omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3) + q_5(p_4\omega_2 + p_2\omega_4)p_1p_3 + \omega_5(p_4 - p_4p_2)p_1p_3.$$

Поясним запись и результат для $\nu^1(t)$. Будем обозначать те переменные, от которых зависит параметр в первой квадратной скобке и которые входят в дополнительные условия выражений для $P\{\cdot\}$, в круглых скобках со стрелкой сверху. Если число этих переменных равно единице, например $[\omega(x_i,t)/(\cdots)]$, то это означает, что когда для условного параметра потока записывается параметр этого элемента $\omega_i(\psi_i)$, то дополнительным условием для $P\{\cdot\}$ является $x_i = 0$ ($x_i = 1$). Если число переменных больше единицы, то параметр записывается по очереди для каждой из них, и именно эта переменная принимает значение, равное нулю (единицы для параметра восстановления) в дополнительных условиях для $P\{\cdot\}$. В алгоритме вычисления по (14) для ω^{k+1} и (18) для ψ^{k+1} вторая квадратная скобка с вероятностью по второй составляющей появляется только для третьего слагаемого. Так, для $\nu^1(t)$ элемент x_4 не входит в условие, и именно от него зависит вычисляемый на этом шаге параметр потока отказов. Таким образом, условием является $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, что и написано в первой квадратной скобке выражения $\nu^1(t)$. Вторая квадратная скобка – это вероятность того, что состояние системы по составляющей y_1 принадлежит искомому подмножеству состояний. Условиями для этой вероятности являются, во-первых, условия составляющей шага рекурсии, а во-вторых, добавляется условие равенства нулю состояния того элемента, для которого по составляющей y_2 записывается параметр потока отказов. Имеем $\omega(x_4,t)/(x_2 = 0, x_5 = 1) = \omega_4$, так как исключено сечение с $\overline{x}_1$, то остается одно сечение $\overline{y}_2/(x_2 = 0, x_5 = 1) = \overline{x}_4$. Во второй квадратной скобке добавляется условие $x_4 = 0$ и тогда $P\{\overline{y}_1(x)/(x_2 = 0, x_5 = 1, x_4 = 0)\} = P\{x_1 \wedge x_3 = 1\} = p_1p_3$. Окончательно получаем $\nu^1(t) = \omega_4 p_1 p_3$.

Вычислим параметр потока восстановления для y_1. Расположим элементы в следующем порядке x_1, x_2, x_3, x_5. Для этих элементов при вычислении параметра потока восстановления состояния $\overline{S}(x_1, x_2, x_3, x_5; t) = \overline{S}(x; t) = = \overline{y}_1 = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ определяют искомые вероятности g^i, f^i (19).

Тогда

$$f^0(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_5 = 0\} = 1,$$
$$g^1(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_2 = x_3 = x_5 = 0\} = q_1 \cdot 1 + p_1 \cdot 1 = 1,$$
$$f^1(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0\} = 1,$$
$$g^2(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_3 = x_5 = 0\} = q_2 \cdot 1 + p_2 \cdot 1 = 1,$$
$$f^2(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_3 = 1, x_5 = 0\} = q_1,$$
$$g^3(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_5 = 0\} = q_3 \cdot 1 + p_3 q_1 = q_3 + p_3 q_1,$$
$$f^3(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1/x_5 = 1\} = P\{\overline{x}_3 \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)\} = q_3 + p_3 q_1 q_2,$$
$$g^4(t) = P\{\overline{S}(x,t) = 1\} = q_5(q_3 + p_3 q_1) + p_5(q_3 + p_3 q_1 q_2).$$

Теперь рекурсивно определим параметр потока переходов в $Y(E_j)$ по восстановлению элементов (17) с учетом обеспечения необходимого состояния по составляющей $\overline{y}_2$:

$$\psi^0(t) = \psi(x,t)/(x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_5 = 0) = 0,$$
$$\varphi^0(t) = \psi(x,t)/(x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_5 = 0) = 0,$$
$$\psi^1(t) = q_1 \cdot 0 + p_1 \cdot 0 + [\psi_1(1-1)] \times$$
$$\times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_2 = x_3 = x_5 = 0, (\overrightarrow{x_1} = 1)) = 1\}] = 0,$$
$$\varphi^1(t) = [\psi(x_1,t)/(x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0)] \times$$
$$\times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0, (\overrightarrow{x_1} = 1)) = 1\}] = 0,$$
$$\psi^2(t) = q_2 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + [\psi^2(1-1)] \times$$
$$\times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_3 = x_5 = 0, (\overrightarrow{x_2} = 1)) = 1\}] = 0,$$
$$\varphi^2(t) = [\psi(x_1, x_2, t)/(x_3 = 1, x_5 = 0)] \times$$
$$\times [P\{\overline{y}_2(x_1, x_2)/(x_3 = 1, x_5 = 0, (\overrightarrow{x_1, x_2} = 1)) = 1\}] = \psi_1(q_4 + p_4 q_2),$$
$$\psi^3(t) = q_3 \cdot 0 + p_3 \psi_1(q_4 + p_4 q_2) + [\psi_3(1 - q_1)] \times$$
$$\times [P\{\overline{y}_2(x_1, x_2, x_4)/(x_5 = 0, (\overrightarrow{x_3} = 1)) = 1\}] =$$
$$= p_3 \psi_1(q_4 + p_4 q_2) + \psi_3 p_1(q_4 + p_4 q_2),$$
$$\varphi^3(t) = [\psi(x_1, x_2, x_3, t)/(x_5 = 1)] \times$$
$$\times [P\{y_2(x_1, x_2, x_3, x_4)/(x_5 = 1, (\overrightarrow{x_1, x_2, x_3} = 1)) = 1\}] =$$
$$= \psi_3(p_1 + q_1 p_2)[P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_5 + \overline{x}_2\overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1) = 1\}] +$$
$$+ p_3 \psi_1 q_2 [P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_5 + \overline{x}_2\overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1, x_1 = 1) = 1\}] +$$
$$+ \psi_2 q_1 [P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_5 + \overline{x}_2\overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1) = 1\}] =$$
$$= \psi_3(p_1 + q_1 p_2) q_4 + p_3(\psi_1 q_2 q_4 + \psi_2 q_1 q_4),$$
$$\psi^4(t) = q_5(\psi_1 p_3 + \psi_3 p_1)(q_4 + p_4 q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1 p_2) + p_3(\psi_1 q_2 + \psi_2 q_1)) q_4 +$$
$$+ [\psi_5(q_3 + p_3 q_1 - q_3 - p_3 q_1 q_2)][P\{\overline{y}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)/(x_5 = 1) = 1\}] =$$
$$= q_5(\psi_1 p_3 + \psi_3 p_1)(q_4 + p_4 q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1 p_2) + p_3(\psi_1 q_2 + \psi_2 q_1)) q_4 +$$
$$+ \psi_5(p_3 q_1 p_2) q_4.$$

Окончательно записываем параметр $\gamma(t)$ потока переходов в подмножество состояний $Y(E_j) = y_1 \wedge \overline{y}_2$ как сумму параметров потока переходов по отказам и по восстановлению, т.е.

$$\gamma(\overline{Y}(E_j) \Rightarrow Y(E_j), t) = \omega^3(t) + \psi^4 =$$
$$= [p_5\omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3) + q_5(p_4\omega_2 + p_2\omega_4)p_1p_3 + \omega_5p_4q_2p_1p_3]+$$
$$+[q_5(\psi_1p_3 + \psi_3p_1)(q_4 + p_4q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1p_2) + p_3(\psi_1q_2 + \psi_2q_1))q_4 +$$
$$+ \psi_5(p_3q_1p_2)q_4].$$

4. Сравнение рекурсивного логико-вероятностного метода определения ППП с марковским моделированием

Рекурсивная природа предложенного алгоритма определения ППП обеспечивает простоту программирования и хорошее быстродействие полученного программного кода. Для подтверждения корректности алгоритма сравним результаты вычисления параметра потока переходов “многоуровневого мостика” с результатами марковского моделирования. В предположении экспоненциального распределения случайных времен до отказа и восстановления элементов соответствующая марковская модель (ММ) приведена на рис. 3. Вершинам марковского графа соотнесен код “i*j*k”, соответствующий номерам отказавших элементов схемы. Все множество состояний Ω марковской и логико-вероятностной моделей разбито на классы K_i (см. табл. 1) в соответствии с тремя уровнями эффективности 100, 50, 0 % и удельными доходами в единицу времени при пребывании в состоянии класса. В последнем столбце таблицы приводятся ФАЛ, определяющие класс состояний в ЛВМ.

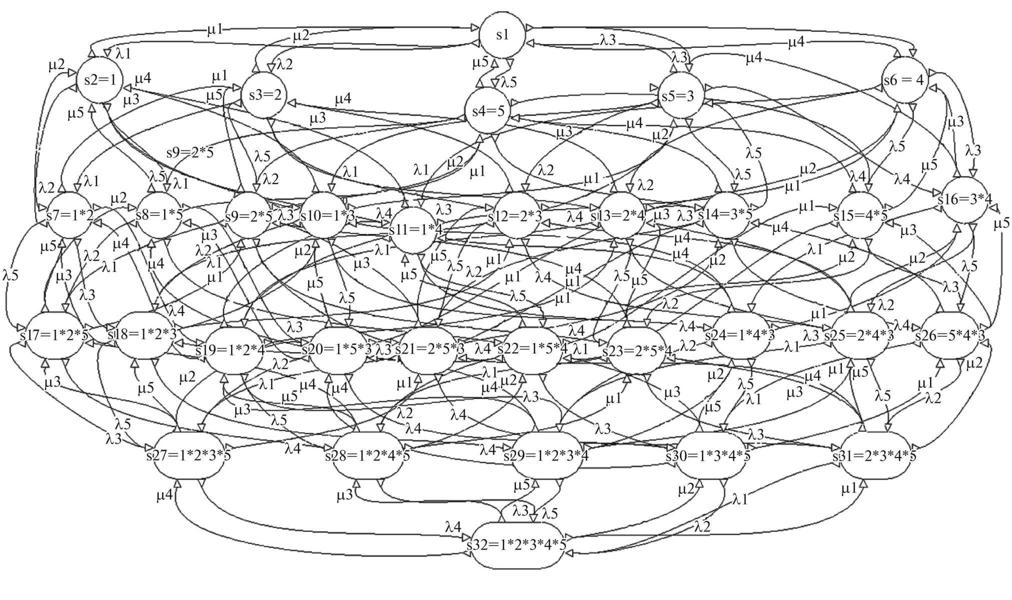

Рис. 3. Граф состояний и переходов марковской модели надежности мостиковой структуры.

Таблица 1. Классы состояний мостиковой структуры

Класс	Уровень, %	Доход, 1/ч	Описание	Состояния ММ	ФАЛ ЛВМ
K_1	$E_1 = 100$	$h_1 = 1$	Работа всех выходов	s1 ,s2, s3, s4	$y_1 \wedge y_2$
K_2	$E_2 = 50$	$h_2 = 0{,}5$	Работа только первого выхода	s6, s9, s11, s13, s15, s23	$y_1 \wedge \overline{y}_2$
K_3	$E_2 = 50$	$h_3 = 0{,}5$	Работа только второго выхода	s5, s8, s10, s12, s14, s20	$\overline{y}_1 \wedge y_2$
K_4	$E_3 = 0$	$h_4 = 0$	Отказ (не работают оба выхода)	s7, s16, ..., s19, s21, s22, s24, ..., s32	$\overline{y}_1 \wedge \overline{y}_2$

Таблица 2. ППП в класс состояний K_2

Время, ч	100	200	300	400	500
ММ	0,001611514	0,001658442	0,001662286	0,001662396	0,001662321
ЛВМ	0,001611512	0,0016584404	0,0016622856	0,0016623961	0,0016623211

Параметр потока переходов в марковской модели определяется как взвешенная сумма элементов вектора вероятностей состояний $P(t)$

$$\omega(t) = \sum_{i \in \Omega_g} \sum_{j \in \Omega_f} P_i(t) \lambda_{ij}, \tag{23}$$

где Ω_f – множество интересующих аналитика состояний, Ω_g – множество состояний, из которых возможен непосредственный переход в Ω_f. Для данного случая $\Omega_f = K_2$, а $\Omega_g = \Omega \setminus \Omega_f$.

В табл. 2 приведены результаты расчета параметра потока переходов в класс состояний K_2, выполненные логико-вероятностным методом по предложенному рекурсивному алгоритму и на марковской модели, набранной в специализированном программном средстве Windchill Quality Solutions (PTC). Расчет проводился при следующих значениях интенсивностей отказов и восстановлений элементов мостика: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}003$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0{,}001$, $\lambda_5 = 0{,}004$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = 0{,}02$, $\mu_3 = \mu_4 = 0{,}01$. Результаты идентичны, однако, очевидно, что задание марковской модели намного сложнее. Если в рассмотренную схему будет добавлен хотя бы один дополнительный канал и две перемычки для попарной связи всех трех каналов (известная 35 задача И.А. Рябинина), то построение марковской модели будет практически невозможным. Единственным аналитическим инструментом исследования многоуровневого функционирования структурно-сложных схем будет логико-вероятностное моделирование, нахождение ППП по предложенному рекурсивному методу наращивания переменных и далее определение показателей (1)–(6). Серьезным преимуществом логико-вероятностного моделирования надежности также является возможность учета неэкспоненциальных распределений соответствующих случайных величин.

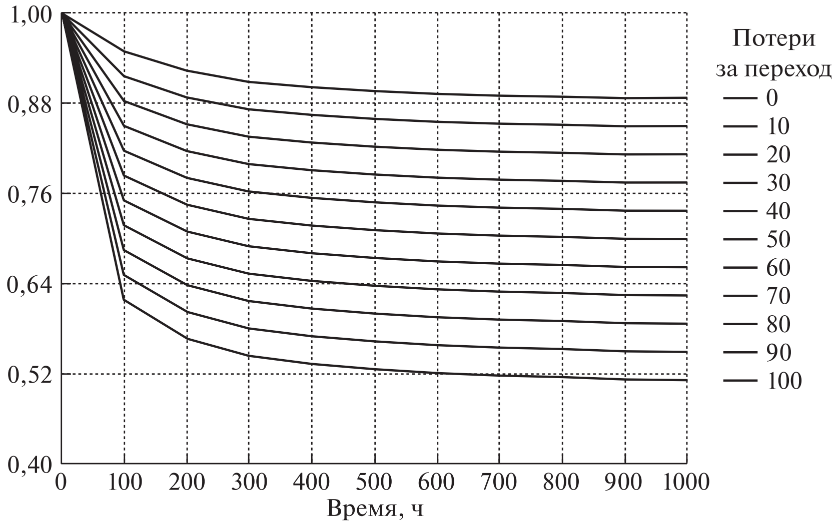

Рис. 4. Коэффициент сохранения эффективности мостиковой структуры.

Представленный метод определения ППП позволяет провести анализ по показателям коэффициента сохранения эффективности $C(0,t)$ и среднего числа снижений эффективности $N_{decl}(0,t)$ на заданном интервале. Отметим, что эти показатели являются основными надежностными показателями производственных комплексов. Так, именно они были включены в требования по эксплуатационной готовности технологического комплекса Штокмановского газоконденсатного месторождения (морское и наземное базирование). В случае “многоуровневого мостика” $C(0,t)$ вычисляется по (4), (5), а $N_{decl}(0,t)$ определяется, исходя из (3), где $\omega^{\Omega_d}(t)$ есть параметр потока отказов при переходе из класса K_1 в классы K_2, K_3, K_4 и из классов K_2, K_3 в класс K_4. Значения удельных доходов h_i за единицу времени пребывания в классах состояний K_i приведены в табл. 1. Величина единовременного дохода за переход была выбрана, исходя из предположения, что усредненные потери из-за снижения эффективности в 10 раз превосходят часовой доход при полной работоспособности, т.е. $h_{ij} = -10$. В табл. 3 приведены результаты расчета этих показателей. Расчеты показывают, что, несмотря на достаточно резкий рост во времени числа снижений эффективности, коэффициенты готовности и сохранения эффективности быстро достигают удовлетворительных стационарных значений за счет интенсивного восстановления и многоуровневости. На рис. 4 демонстрируется поведение $N_{decl}(0,t)$ при разных значениях единовременных потерь.

Таблица 3. Результаты расчета показателей эксплуатационной готовности

Время, ч	168 (неделя)	720 (месяц)	8760 (год)
Коэффициент готовности	0,975344	0,971745	0,971738
Коэффициент сохранения эффективности	0,891883	0,848911	0,834657
Среднее число снижений эффективности	0,588877	2,6863	33,182402

5. Заключение

Логико-вероятностное моделирование немонотонными функциями алгебры логики является одним из наиболее эффективных аналитических аппаратов для исследования надежности и эффективности структурно-сложных многоуровневых систем. ЛВМ позволяют вычислять распределение готовностей классов состояний, характеризующихся различными уровнями эффективности функционирования. Недостатком логико-вероятностного подхода является невозможность вычисления интервальных показателей, чрезвычайно важных с практической точки зрения и обязательно включаемых в технические требования стадии проектирования. Предложенный в статье метод вычисления параметра потока переходов между классами состояний многоуровневой модели позволяет устранить этот недостаток и получать на интервале $(0, t)$ оценки следующих показателей: вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа, среднее суммарное время пребывания системы в выделенных подмножествах состояний, среднее число переходов в выделенные подмножества состояний, среднее число снижений эффективности функционирования, усредненная на интервале готовность выделенных подмножеств состояний, усредненный на интервале интегральный доход, коэффициент сохранения эффективности. Рекурсивная процедура метода удобна для программной реализации [30] и позволяет работать с многоуровневыми системами большой размерности. Применение метода не ограничено предположением об экспоненциальности распределений для элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lisnianski A., Frenkel I., Ding Y.* Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers. London: Springer, 2010.
2. *Natvig B.* Multistate Systems Reliability. Theory with Applications. N.Y.: Wiley, 2011.
3. *Викторова В.С., Степанянц А.С.* Анализ надежности и эффективности многоуровневых технических систем. М.: ЛЕНАНД, 2020.
4. *Волик Б.Г.* Анализ и обеспечение техногенной безопасности технических объектов // Датчики и системы. 2012. № 6. С. 57–63.
5. *Волик Б.Г., Буянов Б.Б., Лубков Н.В. и др.* Методы анализа и синтеза структур управляющих систем. М.: Энергоатомиздат, 1988.
6. *Reibman A.L., Smith R., Trivedi K.S.* Markov and Markov Reward Model Transient Analysis: An Overview of Numerical Approaches // Eur. J. Operat. Res. 1989. V. 40. P. 257–267.
7. *Викторова В.С., Лубков Н.В., Степанянц А.С.* A Unified Approach to Reliability, Availability, Performability Analysis Based on Markov Processes with Rewards // Advances in Systems Science and Applications. 2018. Т. 18. № 4. С. 13–38. https://ijassa.ipu.ru/index.php/ijassa/article/view/624/467.
8. *Ушаков И.А.* Универсальная производящая функция // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 3. С. 37–49.
9. *Ushakov I.A.* The Method of Generating Sequences // Eur. J. Operat. Res. 2000. 125 (2). P. 316–323.
10. *Levitin G.* The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization. London: Springer, 2005.

11. *Lisnianski A.* Lz – transform for a Discrete-state Continuous-time Markov Process and its Applications to Multi-state System Reliability. / A. Lisnianski, I. Frenkel, Eds. Recent Advances in System Reliability. Signatures, Multi-state Systems and Statistical Inference. London: Springer, 2012. P. 79–96.
12. *Lisnianski A.* Application of Extended Universal Generating Function Technique to Dynamic Reliability Analysis of a Multi-state System // Second Int. Sympos. on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO). 2016. P. 1–10.
13. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь. 1981.
14. *Можаев А.С., Громов В.Н.* Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем. СПб.: ВИТУ, 2000.
15. *NUREG-0492.* Fault Tree Handbook. 1981.
16. *SAE ARP4761* Guidelines and Methods for Conducting the Safety Assessment Process on Civil Airborne Systems and Equipment. Dec., 1996.
17. *Schneeweiss W.G.* Computing Failure Frequency, MTBF & MTTR via Mixed Products of Availabilities and Unavailabilities // IEEE Trans. Reliab. 1981. V. 30. P. 362–363.
18. *Amari S.V.* Generic Rules to Evaluate System-Failure Frequency // IEEE Trans. Reliab. 2000. V. 49. P. 85–87.
19. *Amari S.V.* Addendum to: Generic Rules to Evaluate System-Failure Frequency // IEEE Trans. Reliab. 2002. V. 51. P. 378–379.
20. *Райншке К., Ушаков И.А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988.
21. *Korczak E.* New Formula for the Failure/Repair Frequency of Multi-State Monotone Systems and its Applications // Control and Cybernetics. 2007. V. 36. No. 1.
22. *Степанянц А.С.* Вычисление параметра потока отказов в логико-вероятностных моделях методом рекурсивного наращивания переменных // АиТ. 2007. № 9. С. 161–175.

    Stepanyants A.S. Computing the Failure Flow Parameter in Logical-and-Probabilistic Models by the Variable Recursive Growing Method // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 9. P. 1618–1630.
23. *Викторова В.С., Свердлик Ю.М., Степанянц А.С.* Анализ надежности систем сложной структуры на многоуровневых моделях // АиТ. 2010. № 7. С. 143–148.

    Viktorova V.S., Sverdlik U.M., Stepanyants A.S. Analyzing Reliability for Systems with Complex Structure on Multilevel Models // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 7. P. 1410–1414.
24. *Kumamoto H., Henley E.J.* Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists, 2nd Edition. April 2000. Wiley-IEEE Press.
25. *Wang D., Trivedi K.S.* Computing Steady-State MTTF for Non-Coherent Repairable Systems // IEEE Trans. Reliab. Sept. 2005. V. 54. P. 506–516.
26. *Stepanyants A., Victorova V.* Failure Frequency Calculation Technique in Logical-Probabilictic Models // Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications / Electronic Journal of International Group on Reliability. 2009. V. 2. No. 4. ISSN 1932–2321. P. 8–23.
27. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007.
28. *Gadani J.P., Misra K.B.* A Heuristic Algorithm for System Failure Frequence // IEEE Trans. Reliab. Oct. 1981. V. 30. P. 357–361.

29. *Heidtmann K.D.* Smaller Sums of Disjoint Products by Subproduct Inversion // IEEE Trans. Reliab. Aug. 1989. V. 38. P. 305–309.

30. *Викторова В.С., Лубков Н.В., Степанянц А.С.* Программа расчета показателей технической эффективности на многоуровневых моделях надежности газоперерабатывающего оборудования: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660233 РФ; Зарег. 19.09.2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 03.09.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Управление в социально-экономических системах

© 2021 г. **Т.Ю. ПАШИНСКАЯ, канд. физ.-мат. наук (tatyana.obedko@mail.ru),**
В.В. ДОМБРОВСКИЙ, д-р техн. наук (dombrovs.ef@tsu.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ СО СКРЫТЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ И MS VAR МОДЕЛЬЮ ДОХОДНОСТЕЙ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключением режимов с учетом ограничений на объемы вложений и займов. Предполагается, что доходности рисковых активов описываются векторной авторегрессионной моделью со скрытым переключением режимов (Markov Switching Vector Autoregression, MS VAR). Для оценки параметров используется EM-алгоритм. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, прогнозирующее управление, векторная авторегрессионная модель с переключением режимов, скрытая марковская цепь.

DOI: 10.31857/S0005231021050081

1. Введение

Задача управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из ключевых в финансовой инженерии. Финансовые временны́е ряды представляют собой нестационарные динамические стохастические системы с высокой волатильностью и скачкообразными изменениями. В связи с этим для описания динамики ИП широко используются модели с марковскими скачками.

Задаче управления ИП на финансовом рынке с марковским переключением режимов посвящены публикации [1–7], в которых предполагается, что цепь Маркова является наблюдаемой. Однако на практике при управлении реальным ИП состояние цепи, как правило, недоступно прямому наблюдению. В [8, 9] рассматривается задача управления ИП на скачкообразном рынке со скрытой сменой режимов цепи. В частности, публикация [8] посвящена задаче управления по критерию “mean-variance”. Оценки параметров модели скрытой цепи Маркова получены с использованием EM-алгоритма. Оптимизационная задача сводится к решению уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. В [9] рассматривается задача оптимизации ИП по критерию “mean-variance” с учетом квадратичных транзакционных издержек и ограничений. Для решения задачи используется метод управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control).

Известные результаты по управлению ИП на рынке с переключением режимов ограничиваются рассмотрением модели экономического броуновского движения со скачкообразно меняющимися параметрами, в основе которой лежит предложение о независимости и одинаковой распределенности доходностей рисковых активов. Однако на практике данное предположение, как правило, не выполняется.

В данной статье рассматривается динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов. Предполагается, что доходности рисковых финансовых активов описываются векторной авторегрессионной моделью со скрытым переключением режимов (Markov Switching Vector Autoregression Model, MS VAR модель) [10, гл. 1, с. 10]. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения со скользящим горизонтом инвестирования за эталонным портфелем, имеющим заданную доходность [11]. Для оценки параметров MS VAR модели используется EM-алгоритм, предложенный в [10, гл. 6, с. 104]. Данная статья является обобщением результатов, полученных авторами в [7], где предполагается, что состояние цепи Маркова доступно прямому наблюдению. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

2. Описание модели и постановка задач управления

Рассмотрим ИП, состоящий из n видов рисковых финансовых активов и одного безрискового финансового актива (банковский счет или надежные облигации). Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета. Капитал, помещенный в i-й рисковый актив в момент времени k, равен $u_i(k)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, а в безрисковый – $u_0(k)$. Тогда общий объем вложений (капитал портфеля) в момент времени k равен:

$$V(k) = \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_0(k). \tag{2.1}$$

Отметим, что если $u_i(k) < 0$ $(i = \overline{1, n})$, то это означает участие в операции “продажа без покрытия” на сумму $|u_i(k)|$. В начальный момент времени весь капитал помещен в безрисковый актив и заемные средства не используются: $u_i(0) = 0$ $(i = \overline{1, n})$, $u_0(0) = V(0)$.

Пусть $\eta_i(k+1)$ – ставка доходности i-го рискового актива за период времени $[k, k+1]$. Это случайная ненаблюдаемая в момент времени k величина, определяемая по формуле

$$\eta_i(k+1) = \left(Z_i(k+1) - Z_i(k)\right) / Z_i(k), \tag{2.2}$$

где $Z_i(k)$ – рыночная цена i-го рискового актива в момент времени k.

Отметим, что величина $u_i(k)$ $(i=\overline{1,n})$, полученная в момент времени k, означает для инвестора необходимость совершения сделки на покупку или на продажу актива i-го вида объемом $|u_i(k)-[1+\eta_i(k)]u_i(k-1)|$, где $\eta_i(k)$ – наблюдаемая в момент времени k величина.

В момент времени $k+1$ капитал ИП станет равен:

$$V(k+1)=\sum_{i=1}^{n}\left[1+\eta_i(k+1)\right]u_i(k)+\left[1+r(k+1)\right]u_0(k), \tag{2.3}$$

где $r(k+1)$ – доходность безрисковых вложений.

С учетом $u_0(k)=V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)$, уравнение (2.3) преобразуем к виду

$$V(k+1)=\left[1+r(k+1)\right]V(k)+\sum_{i=1}^{n}\left[\eta_i(k+1)-r(k+1)\right]u_i(k). \tag{2.4}$$

Будем полагать, что вектор доходностей рисковых активов $\eta(k)=$ $=[\eta_1(k),\ldots,\eta_n(k)]^{\mathrm{T}}$ описывается уравнением

$$\eta(k+1)=\mu\left[\theta(k+1)\right]+y(k+1), \tag{2.5}$$

где $\theta(k)=[\delta(\alpha(k),1),\ldots,\delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha(k),j)$ — функция Кронекера $(j=1,2,\ldots,\nu)$; $\alpha(k)$ — однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P=[P_{ij}]\ (i,j\in\{1,2,\ldots,\nu\}),\quad P_{ji}=P\{\alpha(k+1)=j\,|\,\alpha(k)=i\},\quad \sum_{j=1}^{\nu}P_{ji}=1,$$

и начальным распределением $p_i=P\{\alpha(0)=i\}$ $(i=\overline{1,\nu})$, $\sum_{i=1}^{\nu}p_i=1$; $\mu[\theta(k)]=$ $=[\mu_1[\theta(k)],\ldots,\mu_n[\theta(k)]]^{\mathrm{T}}$ – вектор ожидаемых доходностей (средних значений) рисковых активов; вектор $y(k)\in\mathbb{R}^n$ описывается векторной авторегрессионной моделью порядка p без свободного члена, коэффициенты которой зависят от состояния цепи Маркова $\theta(k)$ (MS VAR, Markov Switching Vector Autoregression Model) [10, гл. 1, с. 13]:

$$\begin{aligned} y(k+1)=\gamma_1[\theta(k+1)]y(k)+\ldots+\gamma_p[\theta(k+1)]y(k-p+1)+\\ +\Sigma[\theta(k+1)]w(k+1).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $w(k)\in\mathbb{R}^n$ – вектор белых шумов с нулевым средним и матрицей ковариации $E\left\{w(k)w^{\mathrm{T}}(k)\right\}=I_n$, I_n – единичная матрица размерности n.

Параметры уравнений (2.5), (2.6) принимают одно из возможных значений из заданного набора в зависимости от состояния цепи Маркова при $\alpha(k)=i$:

$$\mu_j[\theta(k)]=\mu_j^{(i)}\ (j=\overline{1,n}),\quad \Sigma\left[\theta(k)\right]=\Sigma^{(i)},\quad \gamma_j\left[\theta(k)\right]=\gamma_j^{(i)}\ (j=\overline{1,p}).$$

Цепь Маркова $\theta(k)$ определяет режим рынка: рынок в состоянии высокой или низкой волатильности и/или рынок в состоянии восходящего или нисходящего тренда.

Предполагается также, что доходность безрискового актива $r[\theta(k)]$ зависит от состояния цепи Маркова $\theta(k)$ и принимает одно из возможных значений $\left\{r^{(i)} \in \mathbb{R} : i = \overline{1,\nu}\right\}$.

Вектор $\theta(k)$ допускает представление в пространстве состояний [12, гл. 2, с. 17]:

$$\theta\,(k+1) = P\theta(k) + \upsilon(k+1), \tag{2.7}$$

где $\{\upsilon(k)\}$ – последовательность мартингал-разностей.

Процесс, описываемый MS VAR моделью порядка p, может быть представлен в виде процесса первого порядка MS VAR (1):

$$\begin{gathered} Y(k+1) = \gamma[\theta(k+1)]Y(k) + \sigma[\theta(k+1)]W(k+1), \\ Y(k) = \left[y^{\mathrm{T}}(k), y^{\mathrm{T}}(k-1), \ldots, y^{\mathrm{T}}(k+p-1)\right]^{\mathrm{T}}{}_{np\times 1}, \\ W(k) = \left[w^{\mathrm{T}}(k), 0_{1\times n}, 0_{1\times n}, \ldots, 0_{1\times n}\right]^{\mathrm{T}}{}_{np\times 1}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\sigma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k)\sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(i)} = \operatorname{diag}\left\{\Sigma^{(i)}, 0, \ldots, 0\right\}_{np\times np}, \tag{2.9}$$

$$\gamma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k)\gamma^{(i)}, \quad \gamma^{(i)} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \ldots & \gamma_{p-1}^{(i)} & \gamma_p^{(i)} \\ I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{np\times np}, \tag{2.10}$$

$\theta_i(k)$ $(i = \overline{1,\nu})$ – компоненты вектора $\theta(k)$.

С учетом (2.5) и (2.8) уравнение (2.4) примет вид

$$V(k+1) = A[\theta(k+1)]V(k) + B[Y(k+1)]u(k) + D[\theta(k+1)]u(k), \tag{2.11}$$

где $u(k) = [u_1(k), \ldots, u_n(k)]^{\mathrm{T}}$,

$$A[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)A^{(i)}, \quad A^{(i)} = 1 + r^{(i)}, \tag{2.12}$$

$$D[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)D^{(i)}, \quad D^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc} \mu_1^{(i)} - r^{(i)} & \ldots & \mu_n^{(i)} - r^{(i)} \end{array}\right], \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} B\left[Y(k+1)\right] = \left[\begin{array}{cccc} y_1(k+1) & y_2(k+1) & \ldots & y_n(k+1) \end{array}\right] = \\ = Y^{\mathrm{T}}(k+1)L^{\mathrm{T}}, \quad L = \left[I_n, 0_{n\times n(p-1)}\right]. \end{gathered} \tag{2.14}$$

При управлении портфелем учитываются ограничения:

$$u_i{}^{\min}(k) \le u_i(k) \le u_i{}^{\max}(k) \ (i = \overline{1,n}), \tag{2.15}$$

$$u_0{}^{\min}(k) \le V(k) - \sum_{i=1}^{n} u_i(k) \le u_0{}^{\max}(k). \tag{2.16}$$

Если ${u_i}^{\min}(k) < 0$ $(i = \overline{1,n})$, то для рискового актива i-го вида допустимо участие в операции “продажа без покрытия” на сумму не более $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$, то операции “продажа без покрытия” для рискового актива i-го вида запрещены; $u_0^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный размер капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив, $u_i^{\max}(k) \geq 0$ $(i = \overline{1,n})$ определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковый актив i-го вида; $u_0^{\min}(k) \leq 0$, величина $\left|u_0^{\min}(k)\right|$ определяет максимальный размер займа безрискового актива. Отметим, что величины $u_i^{\min}(k)$ $(i = \overline{1,n})$, $u_i^{\max}(k)$ $(i = \overline{0,n})$ на практике часто зависят от капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i' V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \gamma_i'' V(k)$, где γ_i', γ_i'' – постоянные коэффициенты.

Представим ограничения (2.15)–(2.16) в матричном виде

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \tag{2.17}$$

где

$$\begin{gathered}
u^{\min}(k) = \left[u_1^{\min}(k), \ldots, u_n^{\min}(k), u_0^{\min}(k) - V(k)\right]^{\mathrm{T}}, \\
u^{\max}(k) = [u_1^{\max}(k), \ldots, u_n^{\max}(k), u_0^{\max}(k) - V(k)]^{\mathrm{T}}, \\
S(k) = \left[\begin{array}{cc} I_n & -1_n \end{array}\right], \\
-1_n = [-1, \ldots, -1],
\end{gathered}$$

I_n – единичная матрица размерности n.

Будем определять стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу заданного инвестором эталонного портфеля с желаемой доходностью μ_0, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k), \quad V^0(0) = V(0). \tag{2.18}$$

Для управления ИП используем стратегии управления с прогнозирующей моделью. На каждом шаге k будем минимизировать квадратичный критерий со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{gathered}
J(k+m\,|\,k) = \sum_{i=1}^{m} E\Big\{\rho_1(k+i)\left[V(k+i\,|\,k) - V^0(k+i)\right]^2 - \\
- \rho_2(k+i)\left[V(k+i\,|\,k) - V^0(k+i)\right] + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k+i-1\,|\,k)R(k+i-1)u(k+i-1\,|\,k)\,\Big|\, V(k), Y(k), \theta(k)\Big\},
\end{gathered} \tag{2.19}$$

где m – горизонт прогноза; k – текущий момент времени; $V(k+i\,|\,k)$ – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнению динамики (2.11), $u(k+i) = [u_1(k+i), \ldots, u_n(k+i)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений; $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ – весовые коэффициенты (скалярные величины); $R(k+i) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица размерности n.

Критерий (2.19) представляет собой линейную комбинацию квадратичной части, минимизирующей среднеквадратическое отклонение капитала реального портфеля от эталонной траектории, и линейной части, которая штрафует прогнозные значения капитала ИП, меньшие желаемого значения. Третье слагаемое неявно накладывает “штраф” за большие объемы вложений в рисковые активы, а также гарантирует существование решения задачи оптимизации (см. замечание к теореме).

Критерий (2.19) может быть записан в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} J(k+m\,|\,k) = \sum_{i=1}^{m} E\Big\{ & R_1(k+i)V^2(k+i\,|\,k) - \\ & - R_2(k+i)V(k+i\,|\,k) + \\ & +u^{\mathrm{T}}(k+i-1\,|\,k)R(k+i-1)u(k+i-1\,|\,k)\,\Big|\, V(k), Y(k), \theta(k)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$R_1(k+i) = \rho_1(k+i), \quad R_2(k+i) = 2V^0(k+i)\rho_1(k+i) + \rho_2(k+i).$$

Таким образом, имеем задачу управления ИП, динамика которого описывается уравнением (2.11), по критерию (2.20) при ограничениях (2.17).

3. Алгоритм оценки скрытой цепи Маркова

На практике состояние цепи $\alpha(k)$ (или $\theta(k)$) является скрытым. Наблюдению доступен вектор доходностей $\eta(k)$. Будем полагать, что доходности безрисковых активов $r^{(i)}$ и ожидаемые доходности рисковых активов $\mu_j^{(i)}$ известны (оцениваются отдельно). Для оценки состояния скрытой цепи Маркова и параметров MS VAR(p) модели вида (2.6) будем использовать EM-алгоритм [10, гл. 6, с. 104]. Альтернативным подходом к оценке MS VAR моделей является метод “сэмплирования” Гиббса [10, гл. 8, с. 148]. Преимуществом метода является его робастность по отношению к форме графика функции максимума правдоподобия. Однако он требует значительных вычислительных затрат. В [13] предложен адаптивный EM-алгоритм (рекурсивная оценка максимального правдоподобия). Недостатком подхода является высокая чувствительность к адаптивной матрице, вычисление которой становится трудоемким для моделей с большим количеством параметров. В частности, в [13] результаты ограничиваются моделью с восемью параметрами.

Предположим, что в модели (2.6) случайная составляющая $w(k)$ подчиняется стандартному нормальному распределению. Неизвестными параметрами являются $\Big\{\beta^{(i)} = vec(\gamma_1^{(i)}, \ldots, \gamma_p^{(i)}), \Sigma^{(i)}, i = \overline{1,\nu}; \rho = vec(P), \theta(0)\Big\}$, $vec(\cdot)$ означает операцию векторизации матрицы. Обозначим через λ вектор, содержащий все неизвестные параметры модели. Обозначим через $Y_t = \big\{y^{\mathrm{T}}(t), y^{\mathrm{T}}(t-1), \ldots, y^{\mathrm{T}}(1), y^{\mathrm{T}}(0), \ldots, y^{\mathrm{T}}(1-p)\big\}^{\mathrm{T}}$ переменные, наблюдаемые до момента времени t включительно, $Y \equiv Y_T$ – вся выборка наблюдений, доступная на момент времени k, размера T. Обозначим через η_t вектор условных плотностей процесса $y(t)$:

$$
\begin{gathered}
\eta_t = f(y(t)\,|\,\theta(t), Y_{t-1}) = \\
= \left[f\left(y(t)\,|\,\theta(t) = e_1, Y_{t-1}\right), \ldots, f\left(y(t)\,|\,\theta(t) = e_\nu, Y_{t-1}\right)\right]^{\mathrm{T}}, \\
f\left(y(t)\,|\,\theta(t) = e_i, Y_{t-1}\right) = \\
= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma^{(i)}\right|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y(t) - \overline{y}^{(i)}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Sigma^{(i)}\right)^{-1}\left(y(t) - \overline{y}^{(i)}(t)\right)\right\}, \\
\overline{y}^{(i)}(t) = \gamma_1^{(i)} y(t-1) + \gamma_2^{(i)} y(t-2) + \ldots + \gamma_p^{(i)} y(t-p), \quad i = \overline{1,\nu}.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Пошагово ЕМ-*алгоритм* имеет вид:

1. Инициализация. Задаются начальные значения параметров модели:

$$
\left\{\beta^{(i)}, \Sigma^{(i)}, i = \overline{1,\nu}; \rho, \theta(0) = \xi_{1|0}\right\}.
$$

2. Е-шаг. Определяются отфильтрованные вероятности $\xi_{t|t} = [\xi_{1,t\ t}, \ldots$ $\ldots, \xi_{\nu,t|t}]^{\mathrm{T}}$ по формуле (прямая рекурсия):

$$
\xi_{t|t} = \frac{\eta_t \odot \xi_{t|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}}\left(\eta_t \odot \xi_{t|t-1}\right)} = \frac{\eta_t \odot P\xi_{t-1|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}}\left(\eta_t \odot P\xi_{t-1|t-1}\right)}, \quad t = \overline{1,T}, \quad 1_\nu = [1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}.
$$

Определяются сглаженные вероятности по формуле (обратная рекурсия):

$$
\xi_{T-j|T} = \left[P^{\mathrm{T}}\left(\xi_{T-j+1|T} \oslash \xi_{T-j+1|T-j}\right)\right] \odot \xi_{T-j|T-j}, j = \overline{1, T-1},
$$

где $\xi_{T-j+1|T-j} = P\xi_{T-j|T-j}$. Рекурсия начинается с отфильтрованной вероятности $\xi_{T|T}$. Символы $\odot$, $\oslash$ означают поэлементное матричное умножение и деление соответственно.

3. М-шаг. Оценки коэффициентов уравнения авторегрессии равны:

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta^{(i)} &= \left((X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)} \otimes I_n\right) y, \\
\Sigma^{(i)} &= \left(T^{(i)}\right)^{-1}\left(U^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}U^{(i)},
\end{aligned}
\right. \qquad i = \overline{1,\nu},
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\Upsilon^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}Y, \quad \Xi^{(i)} = \operatorname{diag}\left\{\left(\xi_{i,1|T}, \ldots, \xi_{i,T|T}\right)\right\}, \\
T^{(i)} = \sum_{t=1}^{T}\xi_{i,t|T}, \quad \left(U^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} = Y - X\left(\Upsilon^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{T\times n}, \\
X = [Y_{-1}, \ldots, Y_{-p}] \in \mathbb{R}^{T\times np}, \quad Y_{-i} = [y(1-j), \ldots, y(T-j)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{T\times n}, \\
y = \left[y^{\mathrm{T}}(1), \ldots, y^{\mathrm{T}}(T)\right] \in \mathbb{R}^{Tn\times 1}.
\end{gathered}
$$

Вероятности перехода равны

$$\rho = \xi^{(2)} \oslash \left(1_\nu \otimes \xi^{(1)}\right), \tag{3.3}$$

$$\xi^{(2)} = \sum_{t=1}^{T} \xi^{(2)}_{t|T}, \quad \xi^{(2)}_{t|T} = vec(P) \odot \left[\left(\xi_{t+1|T}\right) \oslash \left(\xi_{t+1|k}\right) \otimes \left(\xi_{t|t}\right)\right],$$

$$\xi^{(1)} = \left(1^{\mathrm{T}}_\nu \otimes I_\nu\right) \xi^{(2)}$$

символ $\otimes$ означает прямое произведение матриц.

Оценка начального распределения состояния цепи Маркова равна $\xi_0 = \xi_{1|T}$.

4. Шаги 2–3 повторяются до момента выполнения условий сходимости [10, гл. 6, с. 111].

4. Синтез адаптивных стратегий управления ИП

Решение задачи управления ИП с динамикой (2.11) по критерию (2.20) при ограничениях (2.17) в условиях скрытой цепи Маркова дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть капитал ИП описывается уравнением (2.11) *при ограничениях* (2.17). *Состояние скрытой цепи Маркова и оценки параметров MS VAR модели* (2.6) *производятся EM-алгоритмом. Тогда стратегия прогнозирующего управления* $u(k+i\,|\,k)$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ *со скользящим горизонтом* m*, минимизирующая критерий* (2.20)*, на каждом шаге* k *определяется уравнением*

$$u(k) = \left[\ I_n \quad 0_n \quad \ldots \quad 0_n\ \right] U(k),$$

где I_n *– единичная матрица размерности* n*,* 0_n *– нулевая матрица размерности* n*;* $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k\,|\,k), \ldots, u^{\mathrm{T}}(k+m-1\,|\,k)]^{\mathrm{T}}$ *– последовательность прогнозирующих управлений, которая определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием*

$$\overline{J}(k+m\,|\,k) = [2V(k)G(k) - F(k)]\, U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \le \overline{S}(k)U(k) \le U_{\max}(k), \quad \overline{S}(k) = \mathrm{diag}\left\{S(k), 0 \ldots, 0\right\}, \tag{4.2}$$

где

$$U_{\min}(k) = \left[u^{\mathrm{T}}_{\min}(k), \ldots, u^{\mathrm{T}}_{\min}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$U_{\max}(k) = \left[u^{\mathrm{T}}_{\max}(k), \ldots, u^{\mathrm{T}}_{\max}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}};$$

$H(k)=\{H_{tf}(k)\}$, $G(t)=\{G_t(k)\}$, $F(t)=\{F_t(k)\}$ $(t,f=\overline{1,m})$ – *блочные матрицы, блоки которых удовлетворяют уравнениям*

$$H_{tt}(k)=R(k+t-1)+\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm T}Q^{(i_t)}(k)D^{(i_t)}+ \tag{4.3}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{\nu}\dots\sum_{i_t=1}^{\nu}\Big(B\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]+2D^{(i_t)}\Big)^{\mathrm T}Q^{(i_1,\dots,i_t)}(k)B\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i_j=1}^{\nu}\dots\sum_{i_t=1}^{\nu}L^{\mathrm T}\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}\right]Q^{(i_j,\dots,i_t)}(k)\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}\right]^{\mathrm T}L,$$

$$H_{tf}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\dots\sum_{i_f=1}^{\nu}\left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm T}A^{(i_{t+1})}\dots A^{(i_f)}Q^{(i_t,\dots,i_f)}(k)D^{(i_f)}+ \tag{4.4}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{\nu}\dots\sum_{i_f=1}^{\nu}\left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm T}A^{(i_{t+1})}\dots A^{(i_f)}Q^{(i_1,\dots,i_f)}(k)B\left[\gamma^{(i_f)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{\nu}\dots\sum_{i_f=1}^{\nu}B^{\mathrm T}\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]A^{(i_{t+1})}\dots A^{(i_f)}Q^{(i_1,\dots,i_f)}(k)\Big(D^{(i_f)}+$$

$$+B\left[\gamma^{(i_f)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i_j=1}^{\nu}\dots\sum_{i_f=1}^{\nu}L^{\mathrm T}\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}\right]A^{(i_{t+1})}\dots$$

$$\dots A^{(i_f)}Q^{(i_j,\dots,i_f)}(k)\left[\gamma^{(i_f)}\dots\gamma^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}\right]^{\mathrm T}L, t,f=\overline{1,m}, f>t,$$

$$H_{tf}(k)=\left(H_{ft}(k)\right)^{\mathrm T},\quad f<t, \tag{4.5}$$

$$G_t(k)=\sum_{i_1=1}^{\nu}\dots\sum_{i_t=1}^{\nu}A^{(i_1)}\dots A^{(i_t)}Q^{(i_1,\dots,i_t)}(k)\Big(D^{(i_t)}+ \tag{4.6}$$

$$+B\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right]\Big),$$

$$F_t(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}Q_2^{(i_t)}(k)D^{(i_t)}+ \tag{4.7}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{\nu}\dots\sum_{i_t=1}^{\nu}Q_2^{(i_1,\dots,i_t)}(k)B\left[\gamma^{(i_t)}\dots\gamma^{(i_1)}Y(k)\right],\quad t=\overline{1,m}.$$

Матрицы $Q^{(i_t)}(k), Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k),\ Q_2^{(i_t)}(k), Q_2^{(i_t,\dots,i_s)}(k)$ *определяются уравнениями*

$$Q^{(i_t)}(k) = e_{i_t} P^t \theta(k) R_1(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^{\nu} \left(A^{(i_{t+1})}\right)^2 Q^{(i_t,i_{t+1})}(k), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.8}$$

$$Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = \Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) R_1(k+s) + \sum_{i_{s+1}=1}^{\nu} \left(A^{(i_{s+1})}\right)^2 Q^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k), \quad t = \overline{1, m-2}, s > t, \tag{4.9}$$

$$Q_2^{(i_t)}(k) = e_{i_t} P^t \theta(k) R_2(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^{\nu} Q_2^{(i_t,i_{t+1})}(k) A^{(i_{t+1})}, \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.10}$$

$$Q_2^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = \Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) R_2(k+s) + + \sum_{i_{s+1}=1}^{\nu} Q_2^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k) A^{(i_{s+1})}, \quad t = \overline{1, m-2}, \quad t < s < m, \tag{4.11}$$

с граничными условиями

$$Q^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_1(k+m), Q^{(i_t,\dots,i_m)}(k) = = \Theta^{(i_t,\dots,i_m)}(k) R_1(k+m), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.12}$$

$$Q_2^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_2(k+m), Q_2^{(i_t,\dots,i_m)}(k) = = \Theta^{(i_t,\dots,i_m)}(k) R_2(k+m), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.13}$$

где $e_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{1\times\nu}$ $(i_t = \overline{1,\nu},\ t = \overline{1,m})$,

$$\Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = P_{i_s,i_{s-1}} P_{i_{s-1},i_{s-2}} \dots P_{i_{t+1},i_t} \theta_{i_t}(k+t \,|\, k), \quad t = \overline{1, m-1}, s > t, \tag{4.14}$$

$\theta_{i_t}(k+t\,|\,k)$ — *компонента вектора прогноза состояния цепи Маркова* $\theta(k+t\,|\,k) = P^t\theta(k)$, $\theta(k) = \theta_{T\,|\,T}(k)$ – *отфильтрованные вероятности, определяемые уравнениями*

$$\theta_{t|t} = \frac{\eta_t \odot P\theta_{t-1|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}} \left(\eta_t \odot P\theta_{t-1|t-1}\right)}, \quad t = \overline{1, T};$$

$$\theta_{T-j|T} = \left[P^{\mathrm{T}} \left(\theta_{T-j+1|T} \oslash \theta_{T-j+1|T-j}\right)\right] \odot \theta_{T-j|T-j}, \quad j = \overline{1, T-1},$$

где $\theta_{T-j+1|T-j} = P\theta_{T-j|T-j}$, η_t *определяется выражением* (3.1) *при* $t = k$, *оценки* $\gamma^{(i_t)}$, $\sigma^{(i_j)}$, P *определяются выражениями* (3.2)–(3.3).

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Замечание. Условие $R(k+i) > 0$ гарантирует, что критерий (4.1) является выпуклым, так как данный критерий получен посредством выпуклого преобразования критерия (2.20). Следовательно, решение задачи квадратичного программирования с критерием (4.1) существует и единственное, если ограничения (4.2) совместны.

5. Численное моделирование

Приведем результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка. Предложен адаптивный, реализуемый на практике алгоритм оценки параметров скрытой цепи.

Рассматривался ИП, состоящий из банковского счета и обыкновенных акций: ПАО "Сбербанк России" (SBER), ПАО "Газпром" (GAZP), ПАО "ГМК "Норильский никель" (GMKN), ПАО "ЛУКОЙЛ" (LKOH), ПАО "НК "Роснефть" (ROSN). Период инвестирования: 02.08.2010 г.–23.08.2019 г. ($T = 2282$ торговых дня). Моделирование производилось по ценам закрытия; данные взяты с www.finam.ru. Предполагалось, что в модели ИП (2.11) скрытая цепь Маркова может находиться в двух состояниях ($\nu = 2$). Вектор $y(k)$ описывается MS VAR моделью порядка $p = 1$ вида (2.6). Проводились численные эксперименты с порядками авторегрессий от единицы до пяти, однако результаты не показали улучшения качества слежения для высоких порядков.

Из-за значительного количества оцениваемых параметров на основе EM-алгоритма была реализована упрощенная адаптивная процедура оценки. Параметры уравнений авторегрессии и матрица переходных вероятностей оценивались по выборке объемом $N = 600$ наблюдений, предшествующих периоду инвестирования, и предполагались фиксированными на весь горизонт инвестирования T. На каждом шаге $k = 1, \dots, T$ для оценки состояния скрытой цепи переоценивались только отфильтрованные и сглаженные вероятности по выборке объемом N наблюдений, предшествующих моменту времени k. Количество итераций EM-алгоритма не превышало 200. Матрица переходных вероятностей на начальном шаге (при $k = 1$) задавалась произвольно. В качестве начальных значений вероятностей состояний $\xi_{1\,|\,T}$ использовались эргодические вероятности: $p_1 = P_{12}/(P_{12} + P_{21})$, $p_2 = 1 - p_1$. При $k = 2, 3, \dots$ для инициализации алгоритма использовались оценки вероятностей состояний, полученные на шаге $k - 1$.

Векторы ожидаемых доходностей рисковых активов в каждом состоянии цепи $\{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}\}$ на каждом k-м шаге оценивались адаптивно методом простой скользящей средней с периодом $l[\theta(k)]$, зависящим от состояния цепи, по формуле:

$$(5.1) \qquad \hat{\mu}[\theta(k)] = \frac{1}{l[\theta(k)]} \sum_{i=1}^{l[\theta(k)]} \eta(k-i+1), \quad l[\theta(k)] \in \{l^{(1)}, l^{(2)}\}, \quad l^{(1)} > l^{(2)}.$$

Предполагалось, что в состоянии низкой волатильности на рынке наблюдается долгосрочный тренд, поэтому применялась скользящая средняя с более длинным периодом: $l^{(1)} = 24$, $l^{(2)} = 9$. Доходность безрискового актива $r[\theta(k)]$ полагалась равной $r^{(1)} = 0{,}00001$, $r^{(2)} = 0{,}00005$. Капитал реального ИП вычислялся по формуле (2.4), где $\eta_i(k+1)$ $(i = \overline{1, n})$, $r(k+1)$ –

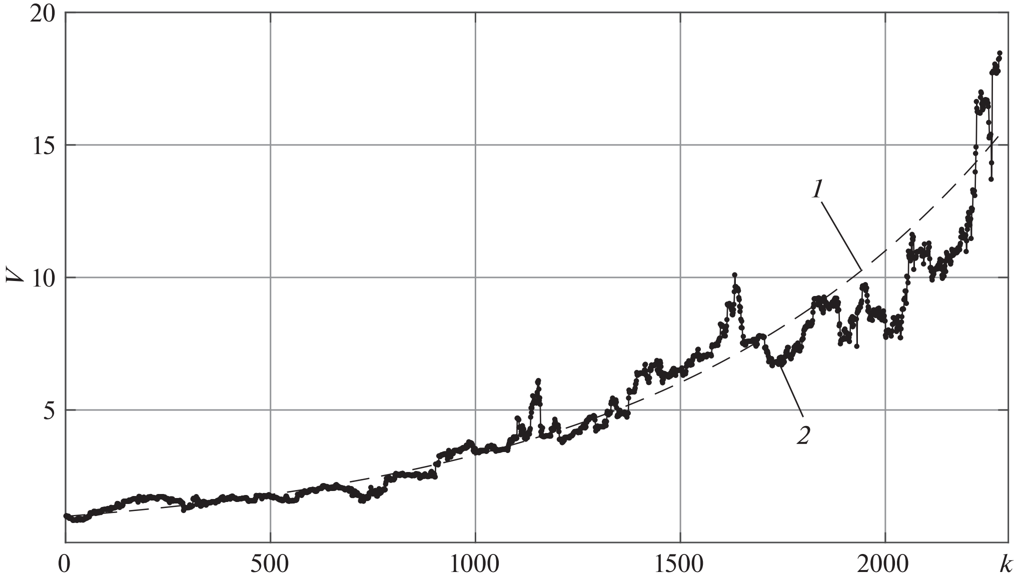

Рис. 1. Динамика капиталов эталонного ИП (линия *1*) и управляемого ИП (линия *2*).

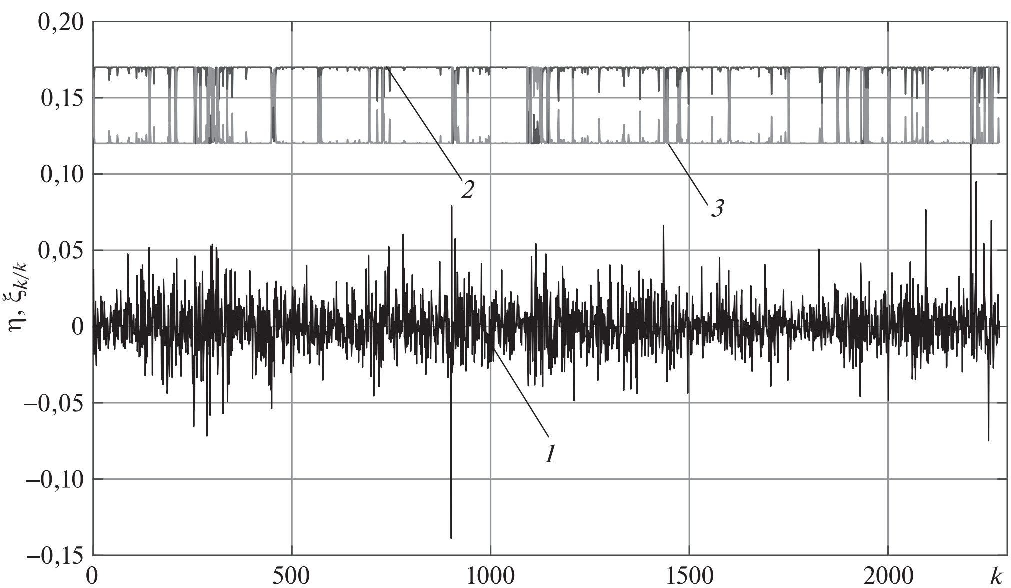

Рис. 2. Динамика доходности акции GAZP (линия *1*) и сглаженные вероятности (линия *2* – состояние 1, линия *3* – состояние 2).

реальные доходности активов. Доходность эталонного ИП $\mu_0 = 0{,}0012$ (0,12 % в день). Весовые коэффициенты $R(k+i) = \mathrm{diag}\{10^{-4}, \ldots, 10^{-4}\}$, $\rho_1(k+i) = 1$, $\rho_2(k+i) = 0{,}3$ для всех k, i. Горизонт прогноза $m = 10$. При управлении ИП учитывались ограничения в виде (2.15)–(2.16) с параметрами: $\gamma_i' = 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$, $\gamma i = 3$ $(i = 0, \ldots, 5)$. Задача квадратичного программирования решалась численно с использованием функции quadprog.m в MATLAB.

На рис. 1 показана динамика капиталов эталонного портфеля $V^0(k)$ и управляемого портфеля $V(k)$. Рисунок 2 иллюстрирует динамику доходностей акции GAZP и оценки вероятностей состояний рыночного режима. Из рис. 1 видно, что траектория капитала реального портфеля следует капиталу эталонного портфеля.

6. Заключение

В статье решена задача управления ИП с прогнозирующей моделью на финансовом рынке со скрытым переключением режимов и MS VAR моделью доходностей с учетом ограничений на объемы вложений и займов. Для оценки параметров скрытой цепи использовался EM-алгоритм. Проведено численное моделирование стратегии управления на реальных данных с использованием адаптивной процедуры оценки параметров скрытой цепи. Результаты демонстрируют эффективность предложенной стратегии управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Алгоритм доказательства основан на результатах, полученных в [7]. Используя сглаживающее свойство условного математического ожидания, критерий (2.20) может быть представлен в виде

$$\begin{gathered}
J(k+m\,|\,k) = E\Big\{V^2(k+1\,|\,k)R_1(k+1) - R_2(k+1)V(k+1\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k\,|\,k)R(k+1)u(k\,|\,k) + \\
+ E\Big\{V^2(k+2\,|\,k)R_1(k+2) - R_2(k+2)V(k+2\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k+1\,|\,k)R(k+2)u(k+1\,|\,k) + \\
+ \ldots + E\Big\{V^2(k+m\,|\,k)R_1(k+m) - R_2(k+m)V(k+m\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k+m-1\,|\,k)R(k+m)u(k+m-1\,|\,k)\,|\,V(k+m-1), \theta(k+m-1)\Big\}\ldots \\
\ldots\,|\,V(k+1), \theta(k+1)\Big\}\ldots\,|\,V(k), \theta(k)\Big\}.
\end{gathered} \tag{П.1}$$

Используя (2.8)–(2.10), (2.11)–(2.14) и (2.7), получим:

$$\begin{gathered}
V(k+m-t\,|\,k) = \\
= \sum_{i_{m-t}=1}^{\nu} e_{i_{m-t}}[P\theta(k+m-t-1) + \upsilon(k+m-t)]\Big[A^{(i_{m-t})}V(k+m-t-1\,|\,k) + \\
+\Big(B\Big[\gamma^{(i_{m-t})}Y(k+m-t-1) + \sigma^{(i_{m-t})}W(k+m-t)\Big] + \\
+ D^{(i_{m-t})}\Big)u(k+m-t-1\,|\,k)\Big], \quad t = \overline{0, m-1}.
\end{gathered} \tag{П.2}$$

Последовательное вычисление математических ожиданий в (П.1) с учетом (П.2) и с заменой параметров их оценками (3.1)–(3.3) приводит к выражению

$$J(k+m\,|\,k) = V^2(k)\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{(i_1)}\right)^2 Q^{(i_1)}(k) - \sum_{i_1=1}^{\nu} Q_2^{(i_1)}(k)A^{(i_1)}V(k) + \\ + [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k), \tag{П.3}$$

матрицы $G(k)$, $F(k)$, $H(k)$ имеют вид (4.3)–(4.7), матрицы $Q^{(i_t)}(k)$, $Q^{(i_t,\ldots,i_s)}(k)$, $Q_2^{(i_1)}(k)$, $Q_2^{(i_s,\ldots,i_s)}(k)$ имеют вид (4.8)–(4.13). Очевидно, что задача минимизации критерия (П.3) при ограничениях (2.17) эквивалентна задаче минимизации критерия (4.1), где удалены слагаемые, не зависящие от управлений, при ограничениях (4.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Costa O.L.V., Araujo M.V.* A Generalized Multi-Period Portfolio Optimization with Markov Switching Parameters // Automatica. 2008. V. 44. No. 10. P. 2487–2497. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.02.014.
2. *Bäuerle N., Rieder U.* Portfolio Optimization with Markov-Modulated Stock Prices and Interest Rates // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 3. P. 442–447. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.824471.
3. *Sotomayor L.R., Cadenillas A.* Explicit Solutions of Consumption-Investment Problems in Financial Markets with Regime Switching // Math. Finance. 2009. V. 19. No. 2. P. 251–279. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2009.00366.x.
4. *Wu H.* Mean-Variance Portfolio Selection with a Stochastic Cash Flow in a Markov-switching Jump-Diffusion Market // J. Optim. Theory Appl. 2013. V. 158. P. 918–934. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0292-x.
5. *Levy M., Kaplanski G.* Portfolio Selection in Two–regime World // Eur. J. Oper. Res. 2015. V. 241. P. 514–524. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.10.012.
6. *Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M.* Model Predictive Control of Constrained Markovian Jump Nonlinear Stochastic Systems and Portfolio Optimization under Market Frictions // Automatica. 2018. V. 87. No. 1. P. 61–68. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.018.
7. *Dombrovskii V., Pashinskaya T.* Model Predictive Control Design for Constrained Markov Jump Bilinear Stochastic Systems with an Application in Finance // Int. J. Syst. Sci. 2020. V. 51. No. 16. P. 3269–3284.

   https://doi.org/10.1080/00207721.2020.1814892.
8. *Ishijima H., Uchida M.* Log Mean-Variance Portfolio Selection Under Regime Switching // Asia-Pacific Financial Markets. 2011. V. 18. No. 2. P. 213–229.

   https://doi.org/10.1007/s10690-010-9132-2.
9. *Nystrup P., Boyd S., Lindström E., Madsen H.* Multi-Period Portfolio Selection with Drawdown Control // Ann. Oper. Res. 2018. P. 1–27.

   https://doi.org/10.1007/s10479-018-2947-3.
10. *Krolzig H.-M.* Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis. Berlin: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-3-642-51684-9.

11. *Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A.* Investment Portfolio Optimization with Transaction Costs and Constraints Using Model Predictive Control // Proc. 8th Russian-Korean Int. Sympos. on Science and Technology. Tomsk: TPU. 2004. P. 202–205. https://doi.org/10.1109/KORUS.2004.1555724.
12. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1995.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-84854-9.
13. *Holst U., Lindgren G., Holst J., Thuvesholmen M.* Recursive Estimation in Switching Autoregressions with Markov Regime // J. Time Series Analysis. 1994. V. 15. No. 5. P. 489–506. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1994.tb00206.x.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 31.10.2020

После доработки 08.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

© 2021 г. А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук (sandro_ch@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва)

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ МЕДИАННОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ ИНДИВИДОВ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ[1]

Рассматривается модель предпочтений индивидов, в которой предпочтение каждого индивида характеризуется стохастическим вектором (стохастическая модель предпочтений). При помощи социологического опроса либо анализа действий пользователей в онлайновой социальной сети можно получить вероятностное распределение предпочтений индивидов. Поставлена и решена задача нахождения медианного предпочтения: вектора, минимизирующего ожидаемое расстояние до предпочтений индивидов. Показано, что для нахождения медианного предпочтения достаточно знания частных (маргинальных) распределений. Приведены иллюстративные примеры нахождения медианных предпочтений для трехмерного случая.

Ключевые слова: предпочтения индивидов, стохастическая модель предпочтений, ДЛС-модель, расстояние общей вариации, задача оптимизации, медианное предпочтение.

DOI: 10.31857/S0005231021050093

1. Введение

Выявление предпочтений широких масс населения было актуальной задачей во все времена. Эти предпочтения интересуют политиков и политические партии (стремящиеся снискать популярность у избирателей), корпорации и фирмы (стремящиеся предлагать наиболее востребованные продукты и услуги) и т.д. Примерно сто лет назад стали активно развиваться математические методы, позволяющие на основании опросов делать обоснованные выводы о предпочтениях индивидов (см., например, [1, 2]).

На протяжении последнего десятилетия заметно возросла роль онлайновых социальных сетей (Facebook, Twitter, ВКонтакте и др.) в жизни общества. Они стали ареной активного обмена мнениями, информационного управления и противоборства [3]. Поэтому неудивительно, что теоретики и практики исследуют различные аспекты динамики состояния сетей (например, достижение консенсуса [3, 4]) и во многих случаях делают выводы о предпочтениях пользователей, их взаимном влиянии и т.п. на основании не результатов опроса (т.е. ответов на специально составленные вопросы), а на основании поведения в социальных сетях (см. [5–12] и др.).

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20059) в части решения задачи нахождения медианного предпочтения.

В [11] были предложены две модели машинного обучения для автоматического определения политических взглядов российских пользователей ВКонтакте. В результате апробации на выборке, состоящей из 22 млн цифровых отпечатков аккаунтов совершеннолетних пользователей, были построены две оценки распределения симпатий соответствующих пользователей в преддверии выборов Президента РФ 2018 г. При использовании этих оценок для построения ретроспективного прогноза результатов выборов средние абсолютные ошибки составили 12 и 19,4 % соответственно.

В [13] была предложена математическая модель, позволяющая оценивать идейно-политические предпочтения пользователей и использовать полученную оценку для выбора политическим деятелем той стратегии идеологического позиционирования, которая потенциально позволит получить наибольшую поддержку у заданного конечного множества пользователей. В данной статье исходными данными для нахождения стратегии оптимального позиционирования является плотность вероятностного распределения на множестве предпочтений индивидов. Эта плотность может быть определена как методом традиционных социологических опросов, так и при помощи анализа действий в виртуальном пространстве (онлайновых социальных сетях), либо при помощи сочетания этих двух подходов.

Далее во втором разделе описана стохастическая модель предпочтений, в рамках которой в третьем разделе исследуется задача нахождения медианного предпочтения индивидов. В четвертом разделе приводятся примеры нахождения медианного предпочтения для заданных вероятностных распределений. В заключении приведены основные выводы и намечены направления дальнейших исследований.

2. Стохастическая модель предпочтений

Разнообразие внутреннего мира и поведения людей является предметом исследования различных отраслей науки. Это разнообразие учитывалось при создании теорий и моделей путем введения в рассмотрение типизации индивидов в соответствии с их свойствами или отношением к тем или иным объектам. Например, психологами был разработан ряд подходов, позволяющих определять как темперамент, так и другие психологические характеристики индивида (см. [14–16] и др.). Отметим, что «чистые» типы индивидов встречаются относительно редко, поэтому для описания индивидов используют различные методы определения промежуточных, «смешанных» типов.

Богатая традиция типизации идейно-политических взглядов существует в социолого-политологических исследованиях. Приведем несколько примеров.

Одна из первых классификаций была предложена М. Рокичем в книге «Природа человеческих ценностей» [17]. Рокич выдвинул идею о том, что содержание главных четырех идеологических течений XX века — социализма, коммунизма, фашизма и капитализма — можно представить в виде двумерной шкалы, образованной системами координат двух ценностей: свободы и равенства. Эта модель содержит четыре ячейки, образованные высоким и низким положением каждой из этих ценностей.

В [18] была предложена классификация, состоящая из шести политических направлений: социал-государственники, социал-демократы, радикальные националисты, державники, радикальные рыночники, западники. В [19] были предложены четыре типа политических ценностей: рыночные, демократические, социалистические, державнические.

В [13] идейно-политические взгляды современных россиян предлагается рассматривать как смесь трех ярко выраженных базисных установок: Державник-Либерал-Социалист. Компонента «Державник» описывает, насколько индивид привержен идее о едином, сильном и независимом государстве. Компонента «Либерал» выражает важность для индивида уважения со стороны государства его (индивида) личных прав и свобод (в первую очередь политических и экономических). Компонента «Социалист» отвечает за стремление индивида к социально-экономической справедливости. В рамках предлагаемой модели (*ДЛС-модели*, по первым буквам базисных установок) существует три чистых типа, и взгляды каждого индивида представимы в виде ДЛС-вектора (вектора-строки) из трех неотрицательных компонент, в сумме равных единице.

В общем случае можно рассматривать k базисных установок, позволяющих типизировать предпочтения отдельного индивида в виде стохастического вектора (вектора неотрицательных вещественных чисел, в сумме равных единице) $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Величину x_j можно интерпретировать как вероятность совершения индивидом действия, характерного для данной базисной установки, в ситуации выбора из k альтернатив.

Для решения ряда задач, связанных с предпочтениями индивидов, требуется находить расстояние между предпочтениями индивидов. В [12, 13] было применено следующее нормированное (принимающее значения от 0 до 1) расстояние между двумя стохастическими векторами $x^1 = \left(x_1^1, \ldots, x_k^1\right)$ и $x^2 = \left(x_1^2, \ldots, x_k^2\right)$:

$$d\left(x^1, x^2\right) = 1 - \sum_{j=1}^{k} \min\left(x_j^1, x_j^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left|x_j^1 - x_j^2\right|. \tag{1}$$

Отметим, что справедливость второго равенства в (1) для стохастических векторов легко показать:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left|x_j^1 - x_j^2\right| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left(\max\left(x_j^1, x_j^2\right) - \min\left(x_j^1, x_j^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 - \sum_{j=1}^{k} \min\left(x_j^1, x_j^2\right) - \sum_{j=1}^{k} \min\left(x_j^1, x_j^2\right)\right) =$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{k} \min\left(x_j^1, x_j^2\right).$$

Метрика (1) является частным случаем хорошо известного в теории вероятностей расстояния по вариации (total variation distance) — см., например, [20, с. 463]; также (1) совпадает с манхеттенской метрикой (Manhattan metric) с точностью до множителя 1/2. Рассмотрим на примере вопрос о том, в чем ее особенность в предлагаемой модели по сравнению с более традиционной для расчетов в конечномерных пространствах евклидовой метрикой

$$d_E(x^1, x^2) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(x_j^1 - x_j^2\right)^2}.$$

Предположим, что $k = 3$ и имеется три вектора, характеризующих предпочтения первого, второго и третьего индивидов соответственно: $x^1 = (1,\ 0,\ 0)$, $x^2 = (0,\ 1,\ 0)$, $x^3 = (0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$. Первый индивид всегда выбирает действия, характерные для первой базисной установки, в то время как второй и третий индивиды такие действия не выбирают никогда. Можно положить, что второй и третий индивиды одинаково далеки от первого, что соответствует соотношению $d\left(x^1, x^2\right) = d\left(x^1, x^3\right)$, в справедливости которого легко убедиться. В этой логике метрика (1) представляется более адекватной, чем евклидова метрика, в которой расстояния между этими же векторами предпочтений различны: $d_E\left(x^1, x^2\right) \neq d_E\left(x^1, x^3\right)$.

Таким образом, рассматриваемая в данной работе стохастическая модель предпочтений основывается на представлении предпочтений индивидов в виде стохастических векторов с метрикой (1).

3. Постановка и решение задачи нахождения медианного предпочтения

Информацию о предпочтениях индивидов можно использовать различным образом. В данной работе остановимся на одной из возможных задач: найти вектор предпочтений, максимально близкий (в смысле минимизации математического ожидания расстояния (1)) к предпочтениям совокупности индивидов, для которых известна плотность вероятностного распределения.

Медианное предпочтение активно применяется в математическом моделировании политической конкуренции начиная с работ Даунса (см. [21]). Если стохастический вектор отражает идейно-политические предпочтения индивидов [13], то медианное предпочтение можно интерпретировать как оптимальную идейно-политическую позицию политика или политической партии.

Опишем задачу более формально. Пусть k-мерная случайная величина, принимающая значения в пределах стандартного $(k-1)$-мерного симплекса

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \;\middle|\; x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, k\},\ \sum_{j=1}^{k} x_j = 1 \right\},$$

задана при помощи плотности распределения f; соответствующую интегральную функцию распределения обозначим через F. Сформулируем задачу поиска оптимального вектора предпочтений (т.е. медианного предпочтения) $a = (a_1, \ldots, a_k)$ следующим образом:

$$L(a_1, \ldots, a_k) = \int\limits_S d(\sigma, a)\ dF(\sigma) \xrightarrow[(a_1,\ldots,a_k)\in S]{} \min. \tag{2}$$

Задача (2) является, по сути, задачей нахождения многомерной медианы (точнее говоря, одной из многомерных медиан — см. [22–24]). Отметим, что в случае евклидовой метрики задача нахождения медианы множества точек является довольно сложной и трудоемкой для численного решения [25].

С учетом (1) задача (2) записывается следующим образом (для сокращения записи опущен множитель $1/2$ с сохранением того же обозначения L):

$$L(a_1, \ldots, a_k) = \int\limits_S \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - a_j| \right) dF(\sigma) \xrightarrow[(a_1,\ldots,a_k)\in S]{} \min\,. \tag{3}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что минимизируемая функция в (3) является суммой k функций, каждая из которых зависит только от соответствующей i-й компоненты a_i. Поэтому при отсутствии требования принадлежности вектора a симплексу S задача (3) распадается на k независимых оптимизационных задач, решением каждой из которых является медиана одномерного частного (маргинального) распределения переменной x_i. Однако составленный из этих медиан вектор не принадлежит, вообще говоря, симплексу S (см. далее пример 1 в разделе 4), т.е. не является решением задачи (3). ■

Обозначим через $F_j\,(x)$, $x \in [0, 1]$, функцию одномерного частного распределения переменной x_j, являющегося компонентой исходного распределения. Справедливо следующее утверждение, характеризующее необходимое условие решения задачи (3).

Утверждение 1. Если вектор $(a_1, \ldots, a_k)$ *является решением задачи* (3), *то для него выполняется следующее условие:*

$$F_1\,(a_1) = \cdots = F_k\,(a_k)\,. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что некоторый вектор $(a_1, \ldots, a_k) \in$ $\in S$ является решением задачи (3), но условие (4) для него не выполняется. Это означает, что существуют компоненты этого вектора с номерами i и j, для которых справедливо неравенство

$$F_i\,(a_i) < F_j\,(a_j)\,. \tag{5}$$

Обозначим через $L_0 = L(a_1, \ldots, a_k)$ значение целевой функции задачи (3) на этом векторе.

Увеличим a_i на малую величину $\varepsilon > 0$, а a_j уменьшим на ту же величину (в дальнейшем значение ε будет уточнено). Это можно сделать, не выходя за границы отрезка [0,1], поскольку в силу (5) $F_i\,(a_i) < 1$, $a_i < 1$ и $F_j\,(a_j) > 0$, $a_j > 0$.

Тем самым получим новый вектор, принадлежащий симплексу S; значение целевой функции на нем обозначим через L_ε. Запишем разность между значениями L_ε и L_0 (с учетом того, что в сумме под знаком интеграла в (3) изменились только слагаемые, содержащие компоненты a_i и a_j):

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & L_\varepsilon - L_0 = \\
&= \int\limits_S \left(|x_i-(a_i+\varepsilon)|+|x_j-(a_j-\varepsilon)|\right) dF(\sigma) - \int\limits_S \left(|x_i-a_i|+|x_j-a_j|\right) dF(\sigma) = \\
&= \int\limits_S \left(|x_i-a_i-\varepsilon|-|x_i-a_i|\right)\ dF(\sigma) + \int\limits_S \left(|x_j-a_j+\varepsilon)|-|x_j-a_j|\right)\ dF(\sigma).
\end{aligned}
$$

Представим S как объединение трех непересекающихся областей $S_i^{\varepsilon-}$, S_i^{ε} и $S_i^{\varepsilon+}$, на которые ее делят гиперплоскости $x_i = a_i$ и $x_i = a_i+\varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
S_i^{\varepsilon-} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \mid x_i \le a_i\right\}, \\
S_i^{\varepsilon} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \mid a_i < x_i \le a_i+\varepsilon\right\}, \\
S_i^{\varepsilon+} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \mid x_i > a_i+\varepsilon\right\}.
\end{aligned}
$$

Также представим S как объединение трех областей $S_j^{\varepsilon-}$, S_j^{ε} и $S_j^{\varepsilon+}$, на которые ее делят гиперплоскости $x_j = a_j-\varepsilon$ и $x_j = a_j$:

$$
\begin{aligned}
S_j^{\varepsilon-} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \mid x_j \le a_j-\varepsilon\right\}, \\
S_j^{\varepsilon} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \;\middle|\; a_j-\varepsilon < x_j \le a_j\right\}, \\
S_j^{\varepsilon+} &= \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in S \mid x_j > a_j\right\}.
\end{aligned}
$$

Эти обозначения позволяют записать $L_\varepsilon - L_0$ следующим образом (продолжая (6)):

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad L_\varepsilon - L_0 &= \int\limits_{S_i^{\varepsilon-}} \varepsilon\, dF(\sigma) + \int\limits_{S_i^{\varepsilon}} (-2x_i+2a_i+\varepsilon)\ dF(\sigma) - \int\limits_{S_i^{\varepsilon+}} \varepsilon\, dF(\sigma) - \\
&- \int\limits_{S_j^{\varepsilon-}} \varepsilon\, dF(\sigma) + \int\limits_{S_j^{\varepsilon}} (2x_j-2a_j+\varepsilon)\ dF(\sigma) + \int\limits_{S_j^{\varepsilon+}} \varepsilon\, dF(\sigma) \le
\end{aligned}
$$

$$
\le \varepsilon \left(\int\limits_{S_i^{\varepsilon-}} dF(\sigma) + \int\limits_{S_i^{\varepsilon}} dF(\sigma) - \int\limits_{S_i^{\varepsilon+}} dF(\sigma) - \int\limits_{S_j^{\varepsilon-}} dF(\sigma) + \int\limits_{S_j^{\varepsilon}} dF(\sigma) + \int\limits_{S_j^{\varepsilon+}} dF(\sigma) \right).
$$

Рассмотрим поведение правой части (7) при стремлении ε к нулю справа. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon \to +0$ выполняются следующие соотношения:

$$
\int\limits_{S_i^{\varepsilon-}} dF(\sigma) = F_i(a_i), \quad \int\limits_{S_i^{\varepsilon}} dF(\sigma) \to 0, \quad \int\limits_{S_i^{\varepsilon+}} dF(\sigma) \to 1-F_i(a_i),
$$

$$
\int\limits_{S_j^{\varepsilon-}} dF(\sigma) \to F_j(a_j), \quad \int\limits_{S_j^{\varepsilon}} dF(\sigma) \to 0, \quad \int\limits_{S_j^{\varepsilon+}} dF(\sigma) = 1-F_j(a_j).
$$

Поэтому сумма интегралов в скобках правой части (7) стремится при $\varepsilon \to +0$ к строго отрицательному (см. (5)) пределу $2\left(F_i\left(a_i\right) - F_j\left(a_j\right)\right)$.

Таким образом, существует (близкое к нулю) число $\varepsilon_0 > 0$, для которого выполняется неравенство $L_{\varepsilon_0} - L_0 < 0$. Это противоречит исходному предположению об оптимальности вектора $(a_1, \ldots, a_k)$. Утверждение 1 доказано. ■

Следующее утверждение показывает, что если для двух стохастических векторов выполняется условие (4), то значения целевой функции L на этих векторах совпадают.

Утверждение 2. Пусть для двух стохастических векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ *и* $(b_1, \ldots, b_k)$ *выполнены следующие условия:*

$$F_1\left(a_1\right) = \cdots = F_k\left(a_k\right) = t_1, \quad F_1\left(b_1\right) = \cdots = F_k\left(b_k\right) = t_2. \tag{8}$$

Тогда

$$t_1 = t_2 \quad \text{и} \quad L\left(a_1, \ldots, a_k\right) = L(b_1, \ldots, b_k).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $t_1 = t_2$. Предположим, что $t_1 < t_2$; тогда для каждого j выполняется неравенство $F_j\left(a_j\right) < F_j\left(b_j\right)$, откуда следует $a_j < b_j$. Суммируя по всем j, получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} a_j < \sum_{j=1}^{k} b_j,$$

которое противоречит стохастичности обоих векторов.

Итак, $t_1 = t_2 = t$. Заметим, что равенство двух значений одномерной функции распределения для данного j в (8) свидетельствует о равенстве нулю интеграла на промежутке между a_j и b_j, т.е. для любого j от 1 до k выполняется равенство

$$\int_{a_j}^{b_j} dF_i(x) = F_i(b_i) - F_i(a_i) = 0. \tag{9}$$

Введем следующие обозначения:

$$S_j^{a-} = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in S \mid x_j \le a_j\right\}, \quad S_j^{a+} = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in S \mid x_j > a_j\right\},$$
$$S_j^{b-} = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in S \mid x_j \le b_j\right\}, \quad S_j^{b+} = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in S \mid x_j > b_j\right\}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\int_{S_j^{a-}} dF(\sigma) = \int_{S_j^{b-}} dF(\sigma) = t, \quad \int_{S_j^{a+}} dF(\sigma) = \int_{S_j^{b+}} dF(\sigma) = 1 - t.$$

Воспользовавшись этими равенствами, найдем с учетом (9) разность между значениями $L(a_1, \ldots, a_k)$ и $L(b_1, \ldots, b_k)$:

$$L(a_1, \ldots, a_k) - L(b_1, \ldots, b_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\int\limits_{S_j^{a-}} (a_j - x_j)\, dF(\sigma) + \int\limits_{S_j^{a+}} (x_j - a_j)\, dF(\sigma) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{S_j^{b-}} (b_j - x_j)\, dF(\sigma) - \int\limits_{S_j^{b+}} (x_j - b_j)\, dF(\sigma) \right) = (2t-1) \sum_{j=1}^{k} (a_j - b_j) = 0.$$

Утверждение 2 доказано. ■

Утверждения 1 и 2 позволяют полностью описать решение оптимизационной задачи (3). Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 3. Для того чтобы стохастический вектор $(a_1, \ldots, a_k)$ *был решением оптимизационной задачи* (3), *необходимо и достаточно выполнение условия* (4).

Доказательство. Обозначим через $S^=$ множество стохастических векторов, для которых выполняется условие (4). Поскольку множество S стохастических векторов является компактным, а функция L непрерывной, задача (3) имеет решение. В соответствии с утверждением 1 все решения задачи (3) содержатся в $S^=$. В соответствии с утверждением 2 на всех векторах из $S^=$ целевая функция принимает одно и то же значение, поэтому множество решений задачи (3) совпадает с $S^=$. Утверждение 3 доказано. ■

В заключение данного раздела отметим, что определение стохастических представлений индивидов (т.е. позиционирования предпочтений индивида в симплексе S) является тем более сложным, чем большее значение принимает размерность вектора предпочтений k. Однако утверждение 3 показывает, что для определения медианного предпочтения не требуется знания общего многомерного распределения, достаточно знания одномерных частных распределений. Поэтому для оценки медианного предпочтения достаточно провести k более простых («одномерных») социологических опросов либо исследований активности в социальных сетях.

4. Примеры

В данном разделе рассмотрим два иллюстративных примера нахождения медианного предпочтения $(a, b, c) \in S$ для случая трехкомпонентного вектора предпочтений,

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0,\ x + y + z = 1\},$$

и вероятностного распределения, заданного в виде плотности $f(x, y, z)$. В этом случае симплекс S является ограниченной частью плоскости (треугольником). Поэтому симплекс S или его часть можно представить как график функции от двух переменных, а нахождение поверхностного интеграла сводится к нахождению повторного интеграла.

Рассмотрим, например, область

$$S_{\alpha\beta} = \{(x, y, z) \in S \mid \alpha \le x \le \beta\}.$$

Интеграл по плотности f можно вычислить, рассматривая $S_{\alpha\beta}$ как часть графика функции $z = 1 - x - y$, следующим образом:

$$\int\limits_{S_{\alpha\beta}} f(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x, y, 1-x-y)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy.$$

Из последнего соотношения видно, что одномерное частное распределение переменной x задается плотностью $f_1(x)$ следующего вида:

$$f_1(x) = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1-x} f(x, y, 1-x-y)dy.$$

Аналогично, частные распределения переменных y и z задаются соответственно формулами

$$f_2(y) = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1-y} f(1-y-z, y, z)dz,$$

$$f_3(z) = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1-z} f(x, 1-x-z, z)dx.$$

Пример 1. Пусть плотность распределения является константой: $f(x, y, z) = 2/\sqrt{3}$. Тогда плотность частного распределения $f_1(x)$ имеет вид

$$f_1(x) = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{1-x} \frac{2}{\sqrt{3}} dy = 2(1-x),$$

а функция частного распределения $F_1(x)$ — вид

$$F_1(x) = 2x - x^2.$$

Аналогичный вид имеют остальные два частных распределения. Поэтому условие медианного предпочтения (4) вместе с условием стохастичности приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 2a - a^2 = 2b - b^2 = 2c - c^2, \\ a + b + c = 1, \end{cases}$$

решение которой является медианным предпочтением ($a = b = c = 1/3$).

Заметим, что медианой частного распределения $F_1(x)$ является решение уравнения $F_1(x) = \frac{1}{2}$, т.е. $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это же значение принимают медианы остальных двух частных распределений. Легко видеть, что вектор $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0{,}293;\ 0{,}293;\ 0{,}293)$ медиан частных распределений не принадлежит поверхности S и, следовательно, не может быть решением задачи (3).

Пример 2. Пусть плотность распределения имеет вид $f(x, y, z) = 2\sqrt{3}x$. Тогда плотность частного распределения $f_1(x)$ имеет вид

$$f_1(x) = \sqrt{3}\int\limits_0^{1-x} 2\sqrt{3}x dy = 6(x - x^2),$$

а функция частного распределения $F_1(x)$ — вид

$$F_1(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

Далее, плотность частного распределения $f_2(y)$ имеет вид

$$f_2(y) = \sqrt{3}\int\limits_0^{1-y} 2\sqrt{3}(1 - y - z) dz = 3(1 - y)^2,$$

а функция частного распределения $F_2(y)$ — вид

$$F_2(y) = 3y - 3y^2 + y^3.$$

Аналогичный вид имеет функция частного распределения $F_3(z)$.

Условие медианного предпочтения (4) вместе с условием стохастичности приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 3a^2 - 2a^3 = 3b - 3b^2 + b^3 = 3c - 3c^2 + c^3, \\ a + b + c = 1, \end{cases}$$

решение которой является медианным предпочтением ($a \approx 0{,}533$; $b = c \approx$ $\approx 0{,}233$).

5. Заключение

В данной статье рассмотрена стохастическая модель предпочтений индивидов, в которой предпочтение каждого индивида характеризуется стохастическим вектором. Решена задача нахождения медианного предпочтения: вектора, минимизирующего ожидаемое расстояние до предпочтений индивидов. Показано, что для нахождения медианного предпочтения достаточно знания частных (маргинальных) распределений. Приведены примеры расчета медианного предпочтения при заданном вероятностном распределении.

Отметим, что стохастическая модель предпочтений является не только теоретической конструкцией, но и основой методики практического исследования идейно-политических [13, 26], электоральных [11] и других предпочтений.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется как исследование других свойств стохастической модели предпочтений, так и ее практическое применение для анализа общественного сознания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Девятко И.Ф.* Диагностическая процедура в социологии. Очерк истории и теории. М.: Наука, 1993.
2. *Толстова Ю.Н.* Тестовая традиция в социологии. М.: КДУ, 2007.
3. *Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A.* Social Networks: Models of information influence, control and confrontation. Springer, 2018.
4. *Проскурников А.В.* Консенсус в нелинейных стационарных сетях с идентичными агентами // АиТ. 2015. № 9. С. 44–63.

   Proskurnikov A.V. Consensus in Nonlinear Stationary Networks with Identical Agents // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1551–1565.
5. *Козякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I. Асинхронные модели консенсуса // АиТ. 2019. № 4. С. 3–40.

   Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Chebotarev P.Y. Consensus in Asynchronous Multiagent Systems. I. Asynchronous Consensus Models // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 593–623.
6. *Gayo-Avello D.* A meta-analysis of state-of-the-art electoral prediction from Twitter data // Social Science Computer Review. 2013. V. 3. No. 6. P. 649–679.
7. *Petrov A.P., Proncheva O.G.* Modeling Position Selection by Individuals during Informational Warfare with a Two-Component Agenda // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12. No. 2. P. 154–163.
8. *Barberá P.* Birds of the same feather tweet together: Bayesian ideal point estimation using Twitter data // Political analysis. 2015. V. 23. No. 1. P. 76–91.
9. *Makazhanov A., Rafiei D., Waqar M.* Predicting political preference of Twitter users // Social Network Analysis and Mining. 2014. V. 4. No. 1. P. 193.
10. *Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г.* Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. 2016. № 6. С. 12–17.

    Gubanov D.A., Chkhartishvili A.G. Influence Levels of Users and Meta-users of a Social Network // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 3. P. 545–553.
11. *Kozitsin I.V., Chkhartishvili A.G., Marchenko A.M. et al.* Modeling Political Preferences of Russian Users Exemplified by the Social Network Vkontakte // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12. No. 2. P. 185–194.
12. *Chkhartishvili A.G., Kozitsin I.V., Goiko V.L., Saifulin E.R.* On an Approach to Measure the Level of Polarization of Individuals' Opinions // Twelfth International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD). Moscow. 2019. P. 1–5.
13. *Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г.* Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей // Проблемы управления. 2020. № 4. С. 15–26.

14. *Goldberg L.R.* The development of markers for the Big-Five factor structure // Psychological Assessment. 1992. No. 4. P. 26–42.
15. *Eysenck S.B.G., Eysenck H.J., Barrett P.* A revised version of the psychoticism scale // Personality and Individual Difference. 1985. Vol. 6. No. 1. P. 21–29.
16. *Keirsey D., Bate M.* Please Understand Me: Character and Temperament Types. Del Mar, CA. Prometheus Nemesis books. 1984.
17. *Rokeach M.* The nature of human values. N.Y.: Free Press, 1973.
18. *Бызов Л.Г.* Динамика идейно-политических предпочтений за 25 лет. Три этапа трансформации общественного сознания // Россия XXI. 2019. № 2. С. 6–21.
19. *Блинов В.В.* Типы идеологических сторонников в современной России // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. 2010. № 6 (100).
20. *Ширяев А.Н.* Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд., перераб. и доп. М.: МЦНМО, 2004.
21. *Downs A.* An Economic Theory of Democracy. N.Y.: Harper, 1957.
22. *Small C.G.* A survey of multidimensional medians // International Statistical Review. № 58. 1990. P. 263–277.
23. *Vardi Y., Zhang C.-H.* The multivariate $L1$-median and associated data depth // Proceedings of the National Academy of Sciences Feb 2000, No. 97 (4). P. 1423–1426. https://doi.org/10.1073/pnas.97.4.1423
24. *Chen F., Nason G.* A new method for computing the projection median, its influence curve and techniques for the production of projected quantile plots // PLoS ONE. 2020. No. 15(5): e0229845. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0229845
25. *Croux C., Filzmoser P., Fritz H.* A comparison of algorithms for the multivariate L1-median // Computational Statistics. 2010. V. 27. No. 3. P. 1–18.
26. *Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г.* О выявлении идейно-политических предпочтений пользователей городских сообществ в онлайновой социальной сети // Труды 10-й Международной социологической Грушинской конференции «Жить в России. Жить в мире. Социология повседневности», 20 мая–14 ноября 2020 г. М.: ВЦИОМ, 2020. С. 291–297.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 22.10.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. Ш.Х. ИШКИНА (shaura-ishkina@yandex.ru)
(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва),
К. В. ВОРОНЦОВ, д-р физ.-мат. наук (vokov@forecsys.ru)
(Московский физико-технический институт)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВЫШЕННОСТИ ОЦЕНОК ПЕРЕОБУЧЕНИЯ ПОРОГОВЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ[1]

Данная статья посвящена проблеме вычисления точной верхней оценки функционалов обобщающей способности семейства одномерных пороговых решающих правил. Исследуется алгоритм, решающий поставленную задачу, полиномиальный по общему числу объектов выборки и по объему обучающей выборки. Доказывается теорема для вычисления оценки функционала ожидаемой переобученности семейства и оценки частоты ошибок метода минимизации эмпирического риска на контрольной выборке. Проводится сравнение точных оценок, вычисленных с помощью теоремы, с известными ранее быстро вычислимыми верхними оценками с целью оценить порядки их завышенности и выявить те оценки, которые можно было бы использовать в реальных задачах.

Ключевые слова: пороговый классификатор, обобщающая способность, комбинаторная теория, вероятность переобучения, полный скользящий контроль, Радемахеровская сложность.

DOI: 10.31857/S000523102105010X

1. Введение

При решении задачи обучения на основании обучающей выборки объектов, часто называемой обучением по прецедентам, строится алгоритм, восстанавливающий зависимость выходных переменных от входных на объектах из обучающей выборки. В задаче классификации выходная переменная одна и принимает бинарные значения, а алгоритмы называются классификаторами. Для успешного применения построенного классификатора он должен иметь высокую обобщающую способность, т.е. хорошо работать на произвольных объектах, не обязательно входящих в обучение. Если же качество классификатора на независимой выборке, называемой контрольной, оказывается значительно хуже, чем на обучающей выборке, то говорят, что произошло переобучение. В качестве характеристик обобщающей способности используются функционалы вероятности переобучения и полного скользящего контроля [1].

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (соглашение № 075-15-2019-1926).

Получение оценок обобщающей способности семейства классификаторов на основе информации об обучающей выборке и о структуре семейства с публикации [2] остается одной из основных задач теории статистического обучения. В конце 70-х годов XX века советские ученые В.Н. Вапник и А.Я. Червоненкис сформулировали основные статистические проблемы обучения в терминах проблемы минимизации среднего риска, т.е. вероятности ошибки классификатора на новом объекте, и предложили методы оценки среднего риска по эмпирическим данным [3, 4]. Вапник и Червоненкис получили равномерные по семействам классификаторов оценки, связывающие вероятность уклонения среднего риска от эмпирического с длиной обучающей выборки и сложностью семейства, над которыми минимизируется средний риск. Этот фундаментальный результат активно используется и сегодня.

Однако оценки Вапника–Червоненкиса являются завышенными. Экспериментальные исследования показывают, что оценки могут быть завышены на 6–12 порядков [5], что может приводить к неоптимальному выбору структурных параметров [6–8]. Кроме того, завышенные оценки не дают возможности исследовать явление переобучения, оценивать и контролировать его значения при решении реальных задач. В [5] исследуются причины завышенности оценок, из которых основной является независимость оценок от конкретной выборки. Оценка Вапника–Червоненкиса универсальна и, следовательно, является оценкой худшего случая.

Теория статистического обучения продолжает активно развиваться, последователи теории занимаются повышением точности равномерных оценок с учетом особенностей данных и конкретных алгоритмов классификации [9, 10]. Среди плодотворных подходов можно выделить оценки, адаптирующиеся к данным и использующие понятие Радемахеровской сложности, предложенной в 1999 г. В. Колчинским [11].

В комбинаторной теории [12], предложенной К.В. Воронцовым, для обобщающей способности была получена оценка расслоения–связности [13], учитывающая особенности способа построения классификатора по обучающей выборке, а также локальные свойства семейства классификаторов – эффекты расслоения и связности [14]. В [15] получены условия, при которых оценка расслоения–связности является точной. Имеются уточнения данной оценки за счет учета попарного взаимодействия классификаторов [16] и за счет учета сходства классификаторов [17], но оценки по-прежнему остаются завышенными.

В комбинаторной теории вероятностью переобучения называют долю разбиений конечного множества объектов на обучающую и контрольную выборки фиксированной длины, при которых произошло переобучение. Данное определение ранее появлялось в [18] для частного случая контрольной выборки, состоящей из одного объекта.

Точность эмпирических оценок функционалов обобщающей способности, полученных методом Монте-Карло, зависит от числа случайных разбиений. Вычисление точных оценок по определению требует экспоненциального по общему количеству объектов перебора всех возможных разбиений. Но для некоторых модельных семейств классификаторов удается аналитически вычислить точные оценки вероятности переобучения. К настоящему времени точные оценки получены для слоев и интервалов булева куба, монотонных и унимодальных цепей [19] и многомерных сетей [20], хэмминговых шаров и некоторых их разреженных подмножеств [21]. Разработан теоретико-групповой подход [22], который позволяет получать точные оценки для семейств с произвольными симметриями.

В [23] предложен способ аппроксимации вероятности переобучения стандартных методов классификации (нейронных сетей, решающих деревьев, ближайшего соседа) на реальных задачах с помощью монотонных сетей подходящей размерности. Оценки переобучения могут использоваться в качестве критерия отбора признаков при построении элементарных конъюнкций в логических алгоритмах классификации [13] или в качестве критерия ветвления в решающих деревьях [20].

В данной статье, являющейся продолжением публикации [24], рассматривается задача построения точных верхних оценок обобщающей способности одномерных пороговых решающих правил.

Практический интерес связан с тем, что данная задача возникает при построении алгоритмов классификации, в частности в решающих деревьях, логических закономерностях [25], алгоритмах вычисления оценок [26], а также при построении линейных классификаторов методом покоординатной оптимизации.

Теоретический интерес связан с тем, что в рамках комбинаторного подхода до сих пор не удавалось получать точные оценки обобщающей способности для данного семейства. Точные оценки были известны только для частных случаев задач классификации, где классы были линейно разделимы [19]. Также для частного случая, когда признак принимает попарно различные значения на объектах, был известен алгоритм вычисления верхней и нижней оценок обобщающей способности [27]. Однако завышенность верхней оценки остается неизученной.

В [24] был предложен алгоритм вычисления точных оценок вероятности переобучения и полного скользящего контроля одномерных пороговых решающих правил, полиномиальный по общему количеству объектов. Алгоритм допускает наличие связок во множестве значений признака и различные методы обучения.

В данной статье демонстрируется универсальность алгоритма по отношению к вычисляемым функционалам обобщающей способности. Доказывается теорема для вычисления оценки функционала ожидаемой переобученности порогового классификатора, т.е. разности доли ошибочно классифицированных объектов на обучающей и контрольной выборках.

Недостатком алгоритма является его большая вычислительная сложность. В данной статье проводится сравнение точных оценок, вычисленных с помощью алгоритма, с известными ранее быстро вычислимыми верхними оценками, с целью оценить порядки их завышенности и выявить те оценки, которые можно было бы использовать в реальных задачах.

2. Основные определения

Пусть задано конечное множество $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_L\}$, элементы которого называются *объектами*, и конечное множество $\mathbb{A}$, элементы которого называются *классификаторами*. Множество $\mathbb{A}$ называется *семейством классификаторов.*

Пусть задана функция $I\colon \mathbb{A} \times \mathbb{X} \to \{0,\,1\}$, называемая *индикатором ошибки*. Если $I(a,x) = 1$, то говорят, что на элементе x классификатор a *допускает ошибку*. Если $I(a,x) = 0$, то говорят, что классификатор *не ошибается* на данном элементе.

Предполагается, что каждому классификатору $a \in \mathbb{A}$ взаимно однозначно соответствует его вектор ошибок $(I(a,x_i))_{i=1}^L$, т.е. два классификатора с одинаковыми векторами ошибок отождествляются. Далее через a будет обозначаться как сам классификатор, так и его вектор ошибок.

Числом ошибок классификатора a на выборке $X \subset \mathbb{X}$ называется величина

$$n(a,X) = \sum_{x \in X} I(a,x).$$

Частотой ошибок классификатора a на выборке $X \subset \mathbb{X}$ называется величина

$$\nu(a,X) = \frac{n(a,X)}{|X|},$$

где через $|X|$ обозначен объем выборки X.

Пусть множество $\mathbb{X}$ разбито на две выборки X и $\bar{X} = \mathbb{X} \backslash X$. Выборка X называется *обучающей*, выборка $\bar{X}$ – *контрольной*. *Переобученностью* классификатора a на двух выборках X и $\bar{X} = \mathbb{X} \backslash X$ называется величина

$$\delta(a,X) = \nu(a,\bar{X}) - \nu(a,X).$$

Методом обучения называется отображение $\mu\colon 2^{\mathbb{X}} \to \mathbb{A}$, которое обучающей выборке ставит в соответствие классификатор из заданного семейства.

Пусть $[\mathbb{X}]^\ell$ – множество всех выборок $X \subset \mathbb{X}$ без возвращения объема $\ell < L$. Введем на $[\mathbb{X}]^\ell$ равномерное распределение

$$\mathsf{P}(X) = \frac{1}{C_L^\ell}.$$

Для фиксированного метода обучения μ, семейства классификаторов $\mathbb{A}$, множества $\mathbb{X}$ и объема обучающей выборки ℓ *вероятностью переобучения метода* μ называется функционал

$$Q_\varepsilon(\mu, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) = \mathsf{P}[\delta(\mu X, X) \geqslant \varepsilon] = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^\ell} [\delta(\mu X, X) \geqslant \varepsilon].$$

Здесь и далее квадратные скобки будут использоваться для преобразования логического условия в числовое значение по правилу [истина] $= 1$, [ложь] $= 0$.

Полным скользящим контролем называется функционал, равный математическому ожиданию числа ошибок метода обучения на контрольной выборке:

$$CCV(\mu, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) = \mathsf{E}\nu(\mu X, \bar{X}) = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^\ell} \nu(\mu X, \bar{X}).$$

Ожидаемой переобученностью называется функционал, равный математическому ожиданию переобученности классификатора, выбранного методом обучения:

$$EOF(\mu, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) = \mathsf{E}\delta(\mu X, \bar{X}) = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^\ell} \nu(\mu X, \bar{X}) - \nu(\mu X, X).$$

Для краткости параметры, от которых зависят данные величины, опускаются.

В данной статье рассматривается метод обучения, *минимизирующий эмпирический риск* (МЭР)

$$\mu X \in M(X) = \operatorname{Arg} \min_{a \in \mathbb{A}} n(a, X),$$

и метод обучения, *максимизирующий переобученность* (МП)

$$\mu X = \arg \max_{a \in \mathbb{A}} \delta(a, \bar{X}).$$

Для получения верхних оценок Q_ε, CCV и EOF вводится понятие метода *пессимистичной минимизации эмпирического риска* (ПМЭР)

$$\mu X = \arg \max_{a \in M(X)} n(a, \mathbb{X}).$$

Это метод МЭР, который в случае неоднозначности среди $M(X)$ выбирает классификатор с наибольшим числом ошибок на множестве $\mathbb{X}$ [19].

3. Постановка задачи

Пусть дано семейство $\mathbb{A} = \{a_0, \dots, a_P\}$. Рассмотрим множество объектов, по которым различаются соседние классификаторы:

$$G_p = \{x \in \mathbb{X} \mid I(a_p, x) \neq I(a_{p+1}, x)\}, \quad p = 0, \dots, P-1. \tag{1}$$

Определение 1. *Прямой последовательностью называется семейство классификаторов, обладающее свойством*

$$G_p \cap G_d = \varnothing \quad \forall\, p, d = 0, \dots, P-1.$$

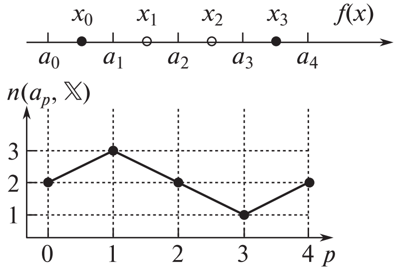

Рис. 1. Пример семейства одномерных пороговых решающих правил. По оси отложены объекты $x \in \mathbb{X}$, упорядоченные по значениям признака $f(x)$. Объекты из разных классов обозначены точками $\bullet$ и $\circ$. Пороги расположены между соседними объектами, каждому значению порога соответствует свой классификатор. Ниже оси изображен график числа ошибок классификаторов.

Определение 2. Прямая последовательность называется прямой цепью, если каждая пара соседних классификаторов различается по одному объекту

$$|G_p| = 1, \quad p = 0, \ldots, P-1.$$

В [24] доказано, что прямые последовательности порождаются семейством одномерных пороговых решающих правил $a_\theta(x) = [f(x) \geqslant \theta]$ над признаком f, полученных варьированием порога θ вдоль значений признака. В случае когда числовой признак принимает попарно различные значения на объектах множества $\mathbb{X}$, семейство является прямой цепью.

На рис. 1 изображен пример данного семейства. По горизонтальной оси отложены объекты множества $\mathbb{X}$, упорядоченные по значениям признака f. Объекты класса 0 обозначены точками $\circ$, объекты класса 1 — точками $\bullet$. Пороги θ расположены между соседними объектами, каждому порогу соответствует свой классификатор. Объекты, расположенные правее порога, классификатор относит к классу 1. Ниже оси изображен график числа ошибок классификаторов. Например, число ошибок классификтора a_2 равно 2: классификатор ошибочно относит объект x_0 к классу 0, а объект x_2 – к классу 1.

Покажем, что переобучение цепи зависит от геометрической структуры классов.

Эмпирической оценкой функции $\phi(X, \bar{X})$, не зависящей от порядка элементов в выборках X и $\bar{X}$, называется величина $\hat{\mathsf{E}}\phi(X, \bar{X})$, полученная методом Монте-Карло путем усреднения по некоторому случайному подмножеству выборок $N \subset [\mathbb{X}]^l$

$$\hat{\mathsf{E}}\phi(X, \bar{X}) = \frac{1}{|N|} \sum_{X \in N} \phi(X, \bar{X}).$$

На рис. 2 изображены прямые цепи различной формы. График частоты ошибок классификаторов на полном множестве изображен линией с точкой. Цепи упорядочены по возрастанию количества классификаторов в нижних

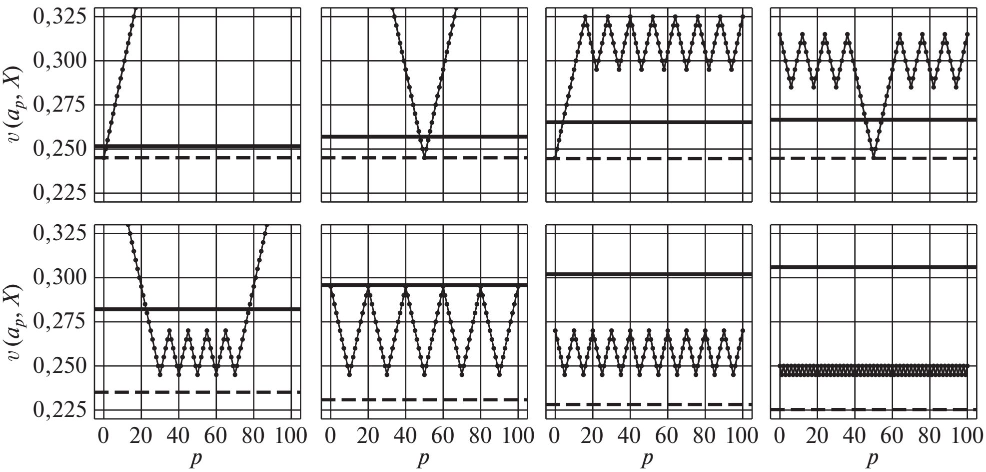

Рис. 2. Сравнение переобучения прямых цепей различной формы. По горизонтали отложены номера p классификаторов цепи. Условия эксперимента: $L = 200$, $\ell = 150$, $\varepsilon = 0{,}05$. Минимальная частота ошибок равна 0,245.

слоях, где слои определяются по числу ошибок. Пилообразные участки соответствуют шуму в данных, где объекты из разных классов чередуются друг с другом. Чем чаще пила, тем выше уровень шума. Рассматриваются случаи, когда пилообразные участки расположены вдали от границы классов (верхний ряд) и вблизи от границы (нижний ряд).

Горизонтальными линиями показаны эмпирические оценки частоты ошибок метода ПМЭР, вычисленные методом Монте-Карло по 10^5 разбиениям. Пунктирной линией изображена оценка на обучающей выборке $\hat{\mathsf{E}}\nu(\mu X, X)$ и сплошной линией – оценка на контрольной выборке $\hat{\mathsf{E}}\nu(\mu X, \bar{X})$. Чем больше расстояние между ними, равное $\hat{\mathsf{E}}\delta(\mu X, X)$, тем сильнее переобучается семейство.

Данный эксперимент показывает, что одни семейства переобучаются значительно сильнее, чем другие: переобучение тем выше, чем больше классификаторов находится в нижних слоях семейства и чем более они различны.

Вследствие этого ставится следующая задача: для прямой последовательности $\mathbb{A}$ общего вида, методов обучения ПМЭР и МП вычислить точные значения вероятности переобучения, полного скользящего контроля и ожидаемой переобученности.

4. Обзор известных оценок вероятности переобучения

При построении оценок используется понятие *гипергеометрической функции распределения*

$$H_L^{l,m}(s) = \frac{1}{C_L^l} \sum_{i=0}^{\min\{\lfloor s \rfloor, \ell, m\}} C_m^i C_{L-m}^{\ell-i},$$

где через $\lfloor x \rfloor$ обозначена целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Гипергеометрическая функция распределения $H_L^{\ell,m}(s)$ для данного множества $\mathbb{X}$ мощности L и выборки $X_0 \subset \mathbb{X}$ объема m равна доле выборок множества $\mathbb{X}$ объема ℓ, содержащих не более s элементов из X_0. Предполагается $C_n^i = 0$ при невыполнении условия $0 \leqslant i \leqslant n$.

4.1. Оценка Вапника–Червоненкиса

Верхняя оценка вероятности переобучения, полученная Вапником и Червоненкисом, является функцией от мощности множества объектов и сложности семейства алгоритмов. Мерой сложности на заданном множестве объектов является коэффициент разнообразия, определяемый как число попарно различных бинарных векторов ошибок, индуцируемых классификаторами семейства. В комбинаторной теории коэффициент разнообразия равен мощности семейства.

Теорема 1 (см. [2]). *Для любого метода обучения, множества $\mathbb{X}$, семейства классификаторов $\mathbb{A}$, объема ℓ обучающей выборки и порога $\varepsilon \in (0,1)$*

$$Q_\varepsilon \leqslant |\mathbb{A}| \max_{n=1,\dots,L} H_L^{\ell,n}\left(\frac{\ell}{L}(n - \varepsilon(L-\ell))\right).$$

4.2. Оценка расслоения–связности

В комбинаторном подходе учитываются геометрические свойства булевых векторов ошибок классификаторов – расслоение и связность.

Под *расслоением* семейства понимается распределение классификаторов по слоям ошибок. *Слоем* называется множество классификаторов, допускающих на множестве $\mathbb{X}$ равное число ошибок. Чем меньше ошибок допускает классификатор, тем ниже его слой.

Связность предполагает, что для каждого классификатора в семействе найдется множество похожих классификаторов, отличающихся от него только на одном объекте выборки.

Пусть дано семейство классификаторов $\mathbb{A} = \{a_0, \dots, a_P\}$ с известными векторами ошибок на множестве $\mathbb{X}$. На множестве классификаторов, как векторов ошибок, существует отношение лексикографического порядка $\leqslant$. Говорят, что классификатор a *предшествует* b и записывают $a \prec b$, если $a \leqslant b$ и расстояние Хемминга между ними равно 1.

Для каждого $a \in \mathbb{A}$ через u, q и n будут обозначаться:

$$\begin{aligned}
&u = |\{b \in \mathbb{A} \mid a \prec b\}|,\\
&q = |\{x \in \mathbb{X} \mid I(a,x) = 1,\ \exists b < a : I(b,x) = 0\}|,\\
&n = n(a, \mathbb{X}).
\end{aligned}$$

Теорема 2 (см. [13]). *Для произвольного множества $\mathbb{X}$, семейства классификаторов $\mathbb{A}$, метода обучения ПМЭР, объема ℓ обучающей выборки и по-*

рога $\varepsilon \in (0,1)$ справедливы оценки

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
Q_\varepsilon &\leqslant \sum_{a\in\mathbb{A}} \frac{C_{L-u-q}^{l-u}}{C_L^\ell} H_{L-u-q}^{\ell-u,n-q}\left(\frac{\ell}{L}(n-\varepsilon(L-\ell))\right),\\
CCV &\leqslant \sum_{a\in\mathbb{A}} \frac{C_{L-u-q}^{l-u}}{C_L^\ell}\left(\frac{n}{L-\ell}-\frac{(n-q)(\ell-u)}{(L-u-q)(L-\ell)}\right).
\end{aligned}
$$

В [16] оценка была улучшена за счет более тонкого анализа эффекта связности.

Теорема 3 (см. [16]). *Пусть S – множество истоков семейства $\mathbb{A}$, т.е. множество классификаторов s таких, что нет классификаторов $a \prec s$. Тогда верна оценка*

$$
(3)\quad Q_\varepsilon \leqslant \sum_{p=0}^{P}\min_{s\in S}\left\{\sum_{i=0}^{\min\{|A_{ps}|,\ |B_{ps}|\}} \frac{C_{|B_{ps}|}^{i} C_{L-u-|B_{ps}|}^{\ell-u-i}}{C_L^\ell}\times \right.
$$
$$
\left.\times H_{L-u-|B_{ps}|}^{\ell-u-i,\ n-|B_{ps}|}\left(\frac{\ell}{L}(n-\varepsilon(L-\ell))-i\right)\right\},
$$

где

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \{x\in\mathbb{X}\,|\,I(a_i,x)=0,\ I(a_j,x)=1\},\\
B_{ij} &= \{x\in\mathbb{X}\,|\,I(a_i,x)=1,\ I(a_j,x)=0\}.
\end{aligned}
$$

5. Обзор известных оценок полного скользящего контроля

В комбинаторной теории наряду с оценкой расслоения–связности (2) для частного случая семейства имеются оценки Гуза.

5.1. Оценки Гуза

Рассмотрим семейство одномерных пороговых решающих правил над числовым признаком, принимающим попарно различные значения на объектах множества $\mathbb{X}$. Пусть порог пробегает все возможные значения. Для данного семейства в [27] был предложен полиномиальный алгоритм вычисления верхней и нижней оценок полного скользящего контроля.

Теорема 4 (см. [27]). *Для произвольного множества $\mathbb{X}$, семейства классификаторов $\mathbb{A}$, метода обучения ПМЭР, объема ℓ обучающей выборки справедливы верхняя и нижняя оценки полного скользящего контроля:*

$$
\frac{1}{L-\ell}\frac{1}{C_L^\ell}\sum_{i=1}^{L}|E^1(i)| \leqslant CCV \leqslant 1-\frac{1}{L-\ell}\frac{1}{C_L^\ell}\sum_{i=1}^{L}|E^0(i)|,
$$

где для каждого i множества $E^0(i)$ безошибочных выборок и $E^1(i)$ ошибочных выборок определены как

$$E^0(i) = \bigl\{X \mid x_i{\in}\bar{X},\ \forall \mu X{\in}M(X)\ I(\mu X, x_i) = 0\bigr\} \subseteq [\mathbb{X}]^\ell,$$
$$E^1(i) = \bigl\{X \mid x_i{\in}\bar{X},\ \forall \mu X{\in}M(X)\ I(\mu X, x_i) = 1\bigr\} \subseteq [\mathbb{X}]^\ell.$$

6. Переобучение прямой последовательности классификаторов

Пусть дана прямая последовательность $\mathbb{A} = \{a_0, \dots, a_P\}$. Определим множество

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{X} \mid \exists\, a, a' \in \mathbb{A}\colon I(a, x) \neq I(a', x)\}, \tag{4}$$

объекты которого будем называть *ребрами* последовательности $\mathbb{A}$.

Объекты множества $\mathbb{N} = \mathbb{X} \setminus \mathbb{D}$ назовем *нейтральными.* На множестве $\mathbb{N}$ классификаторы семейства допускают одинаковое число ошибок

$$m = n(a, \mathbb{N}) \quad \forall a \in \mathbb{A}. \tag{5}$$

Рассмотрим классификатор a_p. Определим величину $D_p(t, e)$, равную числу разбиений множества $\mathbb{D}$, таких что a_p является результатом обучения:

$$D_p(t, e) = \#\bigl\{(X \cap \mathbb{D}, \bar{X} \cap \mathbb{D}) \bigm| \mu X = a_p,\ t = |X \cap \mathbb{D}|,\ e = n(a_p, X \cap \mathbb{D})\bigr\}.$$

Такие разбиения назовем *допустимыми.*

Ранее в [24] были доказаны теоремы о выражении функционалов вероятности переобучения и скользящего контроля через мощность множества допустимых разбиений. В данной статье доказывается аналогичная теорема для функционала ожидаемой переобученности.

Т е о р е м а 5. *Для методов обучения μ МП и ПМЭР, произвольной прямой последовательности классификаторов $\mathbb{A} = \{a_0, \dots, a_P\}$, множества $\mathbb{X}$ мощности L, объема обучающей выборки ℓ выражение для ожидаемой переобученности имеет вид*

$$EOF = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{p=0}^{P} \sum_{(t,e)\in\Psi_p} D_p(t, e) F_p(t, e), \tag{6}$$

где множество $\mathbb{D}$ и параметр m определяются по (4) и (5) и

$$F_p(t, e) = \sum_{s=0}^{\min\{\ell-t, m\}} C_m^s C_{L-P-m}^{\ell-t-s} \left(\frac{1}{L-\ell}\bigl(n(a_p, \mathbb{X}) - (s+e)\bigr) - \frac{1}{\ell}(s+e)\right); \tag{7}$$

$$\Psi_p = \bigl\{(t, e) \mid 0 \leqslant t \leqslant \min\{l, |\mathbb{D}|\},\ 0 \leqslant e \leqslant \min\{t, n(a_p, \mathbb{D})\}\bigr\}. \tag{8}$$

Доказательство данной теоремы приведено в Приложении.

Алгоритм из [24] легко дополняется формулами (6)–(8), добавляя возможность вычисления функционала ожидаемой переобученности. Во избежание дублирования текста публикации [24] полное описание алгоритма не приводится.

Алгоритм вычисления всех трех функционалов обобщающей способности для методов ПМЭР и МП реализован на языке C++ и доступен в репозитории GitHub [28].

7. Оценка частоты ошибок метода ПМЭР на контрольной выборке

В данном разделе доказывается теорема для вычисления оценок частоты ошибок классификатора, выбранного методом ПМЭР, на контрольной выборке.

Пусть задана вероятностная мера P_σ. Для семейства $\mathbb{A}$ и множества $\mathbb{X}$ определим *Радемахеровскую сложность*

$$\mathcal{R}_L(\mathbb{A}, \mathbb{X}) = 2\mathsf{E}_\sigma \sup_{a \in \mathbb{A}} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \sigma_i I(a, x_i),$$

где $I(a, x_i)$ обозначает ошибку классификатора, E_σ – математическое ожидание по мере P_σ, а радемахеровские случайные величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_L$, независимые в совокупности, определяются как

$$\sigma_i = \begin{cases} +1, \mathsf{P}_\sigma = \dfrac{1}{2}, \\ -1, \mathsf{P}_\sigma = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Радемахеровская сложность описывает сложность семейства классификаторов. Чем больше Радемахеровская сложность, тем лучше ошибки классификаторов семейства могут коррелировать со случайным шумом σ_i.

В [29] было продемонстрировано, что функционал ожидаемой переобученности возникает в выражении Радемахеровской сложности, таким образом связывая комбинаторную теорию с теорией эмпирических процессов и неравенств концентрации вероятностной меры:

Лемма 1 (см. [29]). *Для метода обучения μ_δ МП, конечного семейства классификаторов $\mathbb{A}$, множества $\mathbb{X}$ мощности L, объема обучающей выборки $\ell = \frac{L}{2}$ верно*

$$EOF(\mu_\delta, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) = \mathcal{R}_L(\mathbb{A}, \mathbb{X}).$$

Из определения ожидаемой переобученности и метода МП следует лемма 2.

Лемма 2. *Для методов обучения μ_δ МП и μ ПМЭР, конечного семейства классификаторов $\mathbb{A}$, множества $\mathbb{X}$ мощности L, объема обучающей выборки ℓ верно*

$$EOF(\mu, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) \le EOF(\mu_\delta, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell).$$

Из лемм 1 и 2 следует теорема 6.

Теорема 6. Для метода обучения μ ПМЭР, конечного семейства классификаторов $\mathbb{A}$, множества $\mathbb{X}$ мощности L с вероятностью ε верно

$$\nu(\mu X, \bar{X}) \leq \nu(\mu X, X) + EOF(\mu, \mathbb{A}, \mathbb{X}, \ell) + \eta(\varepsilon), \tag{9}$$

$$\nu(\mu X, \bar{X}) \leq \nu(\mu X, X) + \mathcal{R}_L(\mathbb{A}, \mathbb{X}) + \eta(\varepsilon), \tag{10}$$

где поправка $\eta(\varepsilon) = \sqrt{-2\ln\frac{\varepsilon}{2}}$ *и объем обучающей выборки* $\ell = \frac{L}{2}$.

Доказательство данной теоремы приведено в Приложении.

Оценки, предложенные в теореме 6, различаются следующим. Из леммы 2 следует, что оценка (9) является более точной, чем оценка (10). Однако недостатком оценки (9), вычислямой по теореме 5, является большая вычислительная сложность $O(L^5)$, тогда как для Радемахеровской сложности возможно построить быстро вычислимую верхнюю оценку, основанную на лемме Массара [10].

В данной статье мы сравним точные значения ожидаемой переобученности методов обучения ПМЭР μ и МП μ_δ на примере семейства прямых последовательностей. Если зазор между значениями $EOF(\mu_\delta)$ и $EOF(\mu)$ окажется достаточно малым, то в правой части неравенства (10) можно заменить величину $\mathcal{R}_L(\mathbb{A}, \mathbb{X})$ на ее быстро вычислимую оценку и использовать полученную оценку в практических задачах.

8. Вычислительные эксперименты

Напомним обозначения. Дана прямая последовательность $\mathbb{A} = \{a_0, \ldots, a_P\}$, множество $\mathbb{X}$ мощности L, множество $\mathbb{D}$ ребер последовательности. Объем обучающей выборки ℓ. Точность ε. Параметр m равен числу ошибок на множестве $\mathbb{X} \setminus \mathbb{D}$.

8.1. Модельные данные

В экспериментах используются случайные прямые последовательности. Для порождения таких семейств генерируются класс нулей $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ и класс единиц $X_1 \sim \mathcal{N}(\Delta, 1)$ как выборки равной мощности $\frac{L}{2}$ из нормальных распределений. Параметр Δ влияет на минимальное количество ошибок классификаторов семейства. Объединение выборок является множеством $\mathbb{X}$. Множество $\mathbb{D}$ соответствует значениям, которые пробегает порог.

В экспериментах по сравнению оценок полного скользящего контроля в силу ограниченности оценок Гуза рассматриваются прямые цепи. Для порождения таких цепей из выборок X_0 и X_1 удаляются совпадающие элементы. Также оценки Гуза справедливы только для случая, когда порог пробегает все возможные значения, т.е. множество $\mathbb{D}$ совпадает с $\mathbb{X}$.

8.2. Сравнение с существующими оценками вероятности переобучения

На рис. 3 в логарифмической шкале отложены значения оценки Вапника–Червоненкиса (точки ■), оценки расслоения–связности (точки ♦) и оценки

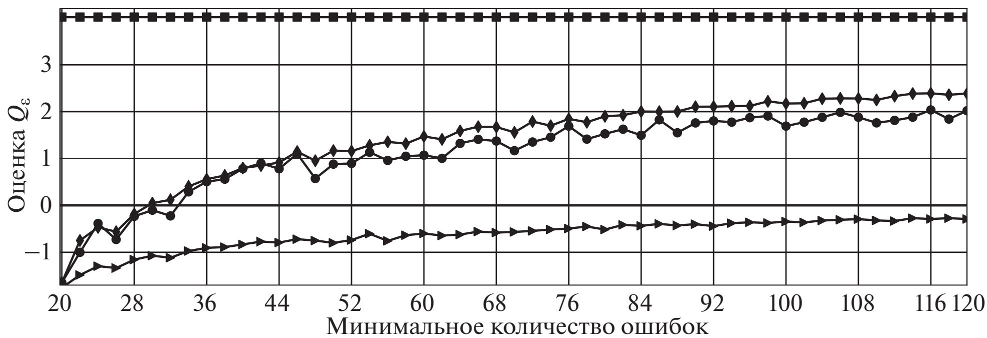

Рис. 3. Сравнение верхних оценок вероятности переобучения в логарифмической шкале. Условия эксперимента: $L = 240$, $\ell = 160$, $m = 20$, $\varepsilon = 0{,}05$. По горизонтали отложено минимальное количество ошибок классификаторов.

Соколова (точки •) в сравнении с точной верхней оценкой вероятности переобучения прямой последовательности (точки ►). Горизонтальной линией указано значение $Q_\varepsilon = 1$.

Оценки расслоения–связности и Соколова являются точными только в одном случае, когда минимальное количество ошибок совпадает с параметром m. В этом случае семейство является унимодальной цепью (второй график в верхнем ряду на рис. 2), т.е. на границе классов отсутствует шум и граница определяется четко. С увеличением минимального количества ошибок оценка (3) начинает превосходить реальное значение вероятности переобучения. Оценка Вапника–Червоненкиса для рассматриваемой последовательности оказывается завышенной при любом значении минимального количества ошибок.

8.3. Сравнение с существующими оценками полного скользящего контроля

На рис. 4 по вертикали в логарифмической шкале отложены значения нижней (точки •) и верхней оценок Гуза (точки ■) и оценки расслоения–связности (точки ♦) в сравнении с точной верхней оценкой (точки ►).

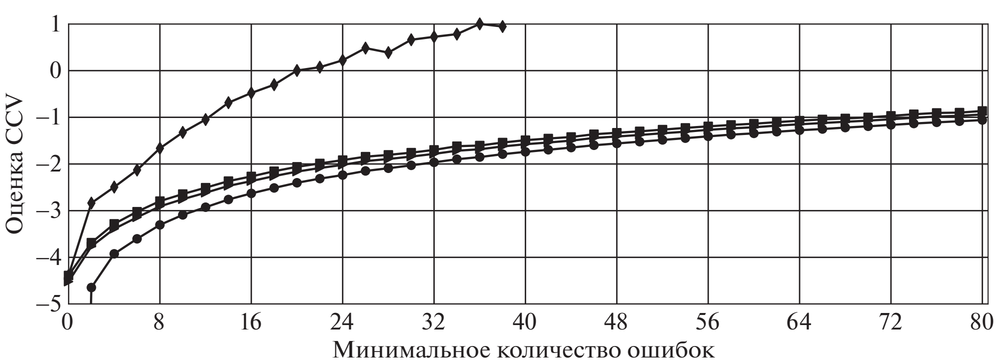

Рис. 4. Сравнение верхних оценок полного скользящего контроля в логарифмической шкале. Условия эксперимента: $L = 240$, $\ell = 160$, $m = 0$. По горизонтали отложено минимальное количество ошибок классификаторов.

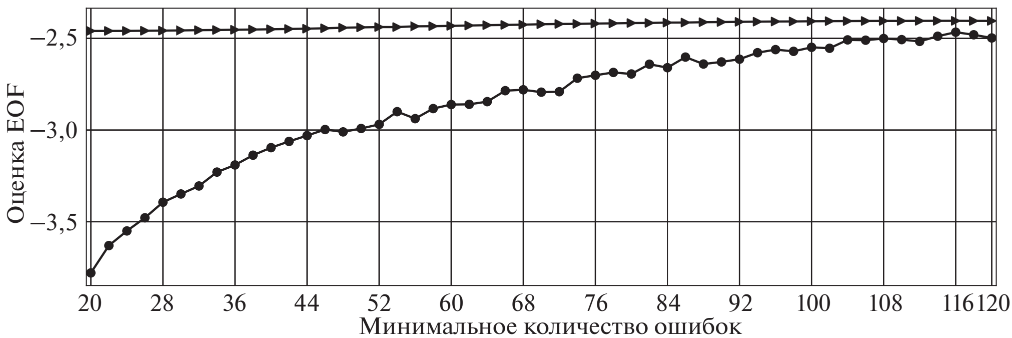

Рис. 5. Сравнение оценок ожидаемой переобученности для методов ПМЭР и МП в логарифмической шкале. Условия эксперимента: $L = 240$, $\ell = 120$, $m = 0$. По горизонтали отложено минимальное количество ошибок классификаторов.

Оценка расслоения–связности оказывается точной только в случае, когда минимальное количество ошибок равно нулю, т.е. когда классы линейно разделимы, для остальных значений параметра она является завышенной. Верхняя оценка Гуза практически совпадает с точной, из чего можно сделать вывод о высокой точности оценок.

8.4. Сравнение с Радемахеровской сложностью

На рис. 5 по вертикали в логарифмической шкале отложены значения ожидаемой переобученности классификатора, выбираемого методами обучения ПМЭР (точки •) и МП (точки ▶). Можно отметить, что с увеличением минимального числа ошибок классификаторов в семействе, т.е. с увеличением шума, два метода обучения начинают давать близкие значения ожидаемой переобученности. В этом случае для получения верхней оценки частоты ошибок классификатора, выбранного методом ПМЭР, на контрольной выборке, можно использовать оценку (10). Но при малом уровне шума ожидаемая переобученность метода ПМЭР оказывается ниже на два порядка. В этом случае для повышения точности оценок необходимо пользоваться оценкой (9).

9. Заключение

Проведено исследование обобщающей способности семейства одномерных пороговых решающих правил, определяемой с помощью функционалов вероятности переобучения, полного скользящего контроля и ожидаемой переобученности.

Показано, что имеющиеся верхние оценки вероятности переобучения являются завышенными на 1–2 порядка. Оценки Вапника–Червоненкиса не учитывают геометрическую структуру классов, от которой, как показано в экспериментах, зависит обобщающая способность семейства. Комбинаторные оценки, несмотря на то что принимают во внимание такие геометрические свойства, как расслоение и связность, все равно являются завышенными для данного семейства.

Оценки Гуза для полного скользящего контроля, полученные в рамках комбинаторной теории переобучения и вычислимые за полиномиальное от общего количества объектов время, демонстрируют высокую точность, что обосновывает возможность применения данных оценок в реальных задачах.

Оценки Радемахеровской сложности оказываются достаточно точными только для задач с высоким уровнем шума на границе классов. В противном случае, когда граница между классами определяется четко, оценки Радемахеровского типа являются завышенными на несколько порядков и неприменимыми на практике.

Поскольку имеющиеся верхние оценки обобщающей способности, за исключением оценок Гуза, не продемонстрировали высокую точность, возникает задача улучшения алгоритма вычисления точных верхних оценок и уменьшения его вычислительной сложности. Также следующей задачей является применение точных оценок для повышения качества алгоритмов классификации, в частности для модификации критериев отбора признаков в жадных алгоритмах индукции конъюнктивных логических закономерностей и других логических алгоритмах классификации.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам за тщательное рассмотрение и ценные замечания, которые были учтены при редактировании и способствовали улучшению изложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 5. Запишем формулу переобученности и переставим в ней знаки суммирования:

$$EOF = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^l} \sum_{p=0}^{P} [\mu X = a_p] \; \delta(a_p, X) =$$

$$= \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{p=0}^{P} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^l} [\mu X = a_p] \; \delta(a_p, X).$$

Рассмотрим множество разбиений $(X, \bar{X})$ с фиксированными значениями t и e:

$$t = |X \cap \mathbb{D}|, \quad e = n(a_p, X \cap \mathbb{D}).$$

Множество допустимых значений (t, e) есть Ψ_p согласно (8).

Обозначим $s = n(a_p, X \cap \mathbb{N})$. Из ограничений $s + t \leqslant l$ и $s \leqslant m$ следует верхняя оценка параметра s в (7).

Поскольку число ошибок классификатора a_p на контрольной выборке равно

$$n\left(a_p, \bar{X}\right) = n\left(a_p, \mathbb{X}\right) - n\left(a_p, X\right) =$$

$$= n\left(a_p, \mathbb{X}\right) - n\left(a_p, X \cap \mathbb{D}\right) - n\left(a_p, X \cap \mathbb{N}\right),$$

переобученность классификатора a_p для данных s и e представляется в виде

$$\delta\left(a_p, X\right)=\frac{1}{L-\ell}\, n\left(a_p, \bar{X}\right)-\frac{1}{\ell}\, n\left(a_p, X\right)=$$
$$=\frac{1}{L-\ell}\,\left(n\left(a_p, \mathbb{X}\right)-(s+e)\right)-\frac{1}{\ell}\,(s+e)\,.$$

В [24] доказано, что выполнение условия $\mu X=a_p$ не зависит от выбора разбиения множества $\mathbb{N}$, и показано, что количество разбиений множества $\mathbb{N}$ для данных t и s равно $C_m^s C_{L-P-m}^{\ell-t-s}$, откуда следует утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. С помощью неравенства Хёфдинга [30] с вероятностью ε можно оценить отклонение $\eta=\eta(\varepsilon)$ переобученности от ее математического ожидания:

$$\delta\left(\mu X, \bar{X}\right) \leq EOF\left(\mu\right)+\eta\left(\varepsilon\right),$$

где отклонение $\eta=\sqrt{-2 \ln \frac{\varepsilon}{2}}$.

Тогда частоту ошибок классификатора, выбранного методом ПМЭР, на контрольной выборке, можно оценить непосредственно через частоту ошибок на обучающей выборке и математическое ожидание переобученности:

$$\nu\left(\mu X, \bar{X}\right)=\nu\left(\mu X, \bar{X}\right)+\delta\left(\mu X, \bar{X}\right) \leq \nu\left(\mu X, X\right)+EOF\left(\mu\right)+\eta\left(\varepsilon\right),$$

что обосновывает неравенство (9). Отсюда и из лемм 1 и 2 следует неравенство (10). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kohavi R.* A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection // Proc. Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence. 1995. P. 1137–1143.
2. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям // Теория вероятности и ее применения. 1971. Т. 16. № 2. С. 264–280.
3. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.
4. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.
5. *Vorontsov K.V.* Combinatorial probability and the tightness of generalization bounds // Patt. Rec. and Image An. 2008. V. 18. No. 2. P. 243–259.
6. *Langford J.* Quantitatively Tight Sample Complexity Bounds: Ph.D. thesis // Carnegie Mellon Thesis, 2002.
7. *Freund Y., Schapire R.E.* A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting // Journal of Computer and System Sciences. 1997. V. 55. No. 1. P. 119–139.
8. *Kearns M.J., et.al.* An experimental and theoretical comparison of model selection methods // Computational Learning Theory. 1995. P. 21–30.
9. *Boucheron S., Bousquet O., Lugosi G.* Theory of classification: A survey of some recent advances // ESAIM: Probability and Statistics. 2005. V. 9. P. 323–375.

10. *Shalev-Shwartz S., Ben-David S.* Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms. Cambridge University Press, 2014.

11. *Koltchinskii V.* Oracle Inequalities in Empirical Risk Minimization and Sparse Recovery Problems: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVIII-2008. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2011.

12. *Воронцов К.В.* Точные оценки вероятности переобучения // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 15–18.

13. *Vorontsov K.V., Ivahnenko A.A.* Tight combinatorial generalization bounds for threshold conjunction rules // 4th Int. Conf. on Pattern Recognition and Machine Intelligence, 2011. Lecture Notes in Computer Science. Springer–Verlag, 2011. P. 66–73.

14. *Vorontsov K.V.* Splitting and similarity phenomena in the sets of classifiers and their effect on the probability of overfitting // Pattern Recogn. and Image Anal. 2009. V. 19. No. 3. P. 412–420.

15. *Животовский Н.К., Воронцов К.В.* Критерии точности комбинаторных оценок обобщающей способности // Интеллектуализация обработки информации (ИОИ-2012). М.: Торус Пресс, 2012. С. 25–28.

16. *Воронцов К.В., Фрей А.И., Соколов Е.А.* Вычислимые комбинаторные оценки вероятности переобучения // Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т. 1. № 6. С. 734–743.

17. *Фрей А.И., Толстихин И.О.* Комбинаторные оценки вероятности переобучения на основе кластеризации и покрытий множества алгоритмов // Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т. 1. № 6. С. 761–778.

18. *Haussler D., Littlestone N., Warmuth M.K.* Predicting 0, 1-functions on randomly drawn points // Information and Computation. 1994. V. 115. No. 2. P. 248–292.

19. *Vorontsov K.V.* Exact combinatorial bounds on the probability of overfitting for empirical risk minimization // Pattern Recogn. and Image Anal. 2010. V. 20. No. 3. P. 269–285.

20. *Botov P.V.* Exact estimates of the probability of overfitting for multidimensional modeling families of algorithms // Pattern Recogn. and Image Anal. 2010. V. 20. No. 4. P. 52–65.

21. *Толстихин И.О.* Вероятность переобучения некоторых разреженных семейств алгоритмов // Междунар. конф. ИОИ-8. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 83–86.

22. *Frei A.I.* Accurate estimates of the generalization ability for symmetric set of predictors and randomized learning algorithms // Pattern Recogn. and Image Anal. 2010. V. 20. No. 3. P. 241–250.

23. *Ботов П.В.* Точные оценки вероятности переобучения для монотонных и унимодальных семейств алгоритмов // Математические методы распознавания образов-14. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 7–10.

24. *Ишкина Ш.Х.* Комбинаторные оценки переобучения пороговых решающих правил // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10. № 1. С. 50–65.

25. *Журавлёв Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В.* Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: ФАЗИС, 2005.

26. *Журавлёв Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. 1978. Т. 33. С. 5–68.

27. *Гуз И.С.* Конструктивные оценки полного скользящего контроля для пороговой классификации // Математическая биология и биоинформатика. 2011. Т. 6. № 2. С. 173–189.

28. GiHub Project `https://github.com/shaurushka/theshold-clfs-gen-bound`
29. *Vorontsov K.V.* Combinatorial Theory of Overfitting: How Connectivity and Splitting Reduces the Local Complexity // 9th IFIP WG 12.5 Int. Conf., AIAI, 2013. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
30. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables // Journal of the American Statistical Association. 1963. No. 58. P. 13–30.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 29.06.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S