

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Номер 4, 2022

---

---

Экспериментальное исследование смесительного устройства форсажной камеры газотурбинного двигателя <i>Е. Ю. Марчуков, А. Н. Мухин, И. А. Лепешинский, В. А. Решетников, Н. А. Кучеров</i>	3
Неустойчивости, бифуркации и нелинейная динамика в двумерных обобщениях течения Колмогорова <i>И. И. Вертгейм, М. А. Закс, Р. В. Сагитов, А. Н. Шарифулин</i>	11
Анализ характеристик пульсационного движения в турбулентной струе в процессах смешения и шумообразования <i>С. Ю. Крашенинников, П. А. Семенёв</i>	26
Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов <i>Д. А. Губайдуллин, К. А. Панин, Ю. В. Федоров</i>	41
Колебания жидкости в сосуде с треугольным основанием <i>В. А. Калинин</i>	52
Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с двумерными сдвиговыми течениями <i>В. В. Булатов, И. Ю. Владимиров</i>	60
Задача Коши–Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом <i>И. В. Стурова</i>	69
Одно точное решение об обжатии полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде <i>А. Н. Голубятников, Д. В. Украинский</i>	77
Плоские и осесимметричные тела, обтекаемые с наибольшими “критическими” числами Маха <i>А. Н. Крайко, В. А. Шаповалов</i>	86
Исследование теплообмена керамики на основе $\text{HfB}_2\text{-SiC}$ в недорасширенных струях диссоциированного азота и анализ поверхности <i>А. Ф. Колесников, Н. Т. Кузнецов, Т. И. Муравьева, И. А. Нагорнов, В. И. Сахаров, В. Г. Севастьянов, Е. П. Симоненко, Н. П. Симоненко, А. В. Чаплыгин, О. О. Щербакова</i>	96
Сравнительный анализ характеристик вихревого следа за машущим крылом, совершающим колебания различного типа <i>V. K. Vineeth, D. K. Patel</i>	108
Экспериментальное исследование влияния полукруглого спирального выступа на турбулентное обтекание цилиндра <i>F. Koca and A. Ozturk</i>	134

---

---



УДК 523.529:621.45.04:53.082

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕСИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ФОРСАЖНОЙ КАМЕРЫ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

© 2022 г. Е. Ю. Марчуков<sup>a,\*</sup>, А. Н. Мухин<sup>a,\*\*</sup>, И. А. Лепешинский<sup>b,\*\*\*</sup>,  
В. А. Решетников<sup>b,\*\*\*\*</sup>, Н. А. Кучеров<sup>b,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> ОКБ им. А. Люльки ОАО филиал “УМПО”, Москва, Россия

<sup>b</sup> МАИ (Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)),  
Москва, Россия

\*E-mail: evgeny.marchukov@okb.umpo.ru

\*\*E-mail: powersystems@yandex.ru

\*\*\*E-mail: igorlepeh@yandex.ru

\*\*\*\*E-mail: vresh031152@mail.ru

\*\*\*\*\*E-mail: n.kutcherov@bk.ru

Поступила в редакцию 28.01.2022 г.

После доработки 28.02.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Изучаются процессы формирования топливно-воздушной смеси в форсажной камере газотурбинного двигателя. Эксперименты проводятся на элементе смесителя с двухфазным рабочим телом, содержащим ряд отверстий, выполняющих роль струйных форсунок. Исследовано влияние соотношения расхода жидкости к расходу газа, которое пропорционально коэффициенту избытка воздуха, на работу смесителя. Установлено, что наличие возрастающего поля давления вдоль канала смесителя приводит к неравномерным расходам жидкости и газа по форсункам и параметрам распыла.

*Ключевые слова:* форсажная камера сгорания, смеситель, двухфазное рабочее тело, распыл смеси жидкости с газом

DOI: 10.31857/S0568528122040090

### 1. ПОСТАНОВКА РАБОТЫ

Цель работы – экспериментальное определение полей расходов, скоростей, дисперсности капель на выходе из смесителя с использованием модельного рабочего тела вода-воздух. Для проведения исследований использовался стенд, оснащенный лазерно-оптическими системами, позволяющими использовать метод лазерно-оптического микроскопа для измерения размеров и концентрации частиц, PIV-метод для измерения скоростей капель распыленной жидкости, и зондовыми методами для измерения расходов фаз. Получены новые данные о полях параметров смесительного устройства при работе на двух режимах. Смесительное устройство (рис. 1) представляет собой цилиндр с равномерно расположенным вдоль него рядом отверстий одинакового диаметра, выполняющих роль струйных форсунок, через которые происходит распыливание двухфазной смеси воздуха и топлива, движущихся вдоль канала смесителя. Для обеспечения горения смеси ее состав (отношение расхода топлива к расходу воздуха) должен находиться в определенных пределах, причем топливо должно находиться в газовой фазе. А испарение топлива зависит от размера капель. Основной целью исследования являлось измерение полей скорости и расходов фаз, истекающих из форсунок, а также размеров образующихся капель. В настоящей работе топливо моделируется водой. Воздух и вода подаются на вход смесителя с одного его конца, где образуется двухфазное рабочее тело для дальнейшего прохождения в смесителе и последовательного распыления через форсунки. Другой конец смесителя закрыт. На рис. 1 показана средняя часть (примерно половина смесителя). Всего смеситель содержит 29 форсунок. Для измерения расходов фаз и скоростей газа (воздуха) использовались зондовые методы [1–4], а для измерения скоростей и размеров капель – лазерные методы [3, 5–7].

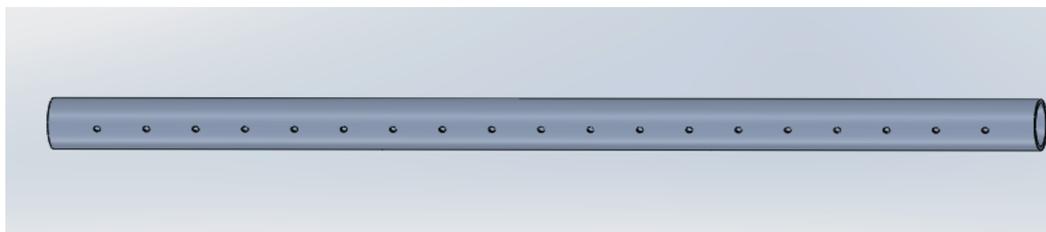


Рис. 1. Смеситель.

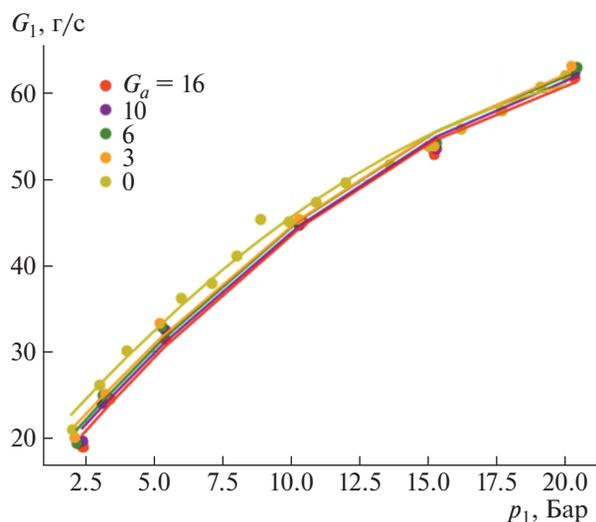


Рис. 2. Расходная характеристика смесителя.

Для рассматриваемого смесителя предварительно снималась зависимость расхода жидкости от давления при различных значениях расхода воздуха (характеристика смесителя с двухфазным рабочим телом), представленная на рис. 2. Как следует из графика полученной расходной характеристики для выбранной конструкции и способа подачи компонентов, расход жидкости практически зависит только от давления жидкости и не зависит от расхода газа.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки влияния расходов рабочих тел на работу смесителя он исследовался на двух режимах. Параметры режимов исследования представлены в табл. 1, где  $p_l$  обозначает давление, измеряемое после расходомера жидкости,  $p_a$  – давление воздуха, измеряемое после расходомера воздуха,  $p^*$  – давление, измеряемое в торце смесителя,  $G$  означает расходы фаз, индексы “a” – воздух, “l” – жидкость, капли.

В табл. 1 представлены значения избыточного давления, т.е. разница между абсолютным значением давления и атмосферным. Смеситель располагался вертикально, рабочие тела подава-

Таблица 1. Режимы исследования

№ режима	$p_l$ (кгс/см <sup>2</sup> )	$G_l$ (г/с)	$p^*$ (кгс/см <sup>2</sup> )	$p_a$ (кгс/см <sup>2</sup> )	$G_a$ (г/с)
1	5.3	30.35	0.29	10	12.12
2	5.3	30.13	0.63	14.5	16.81

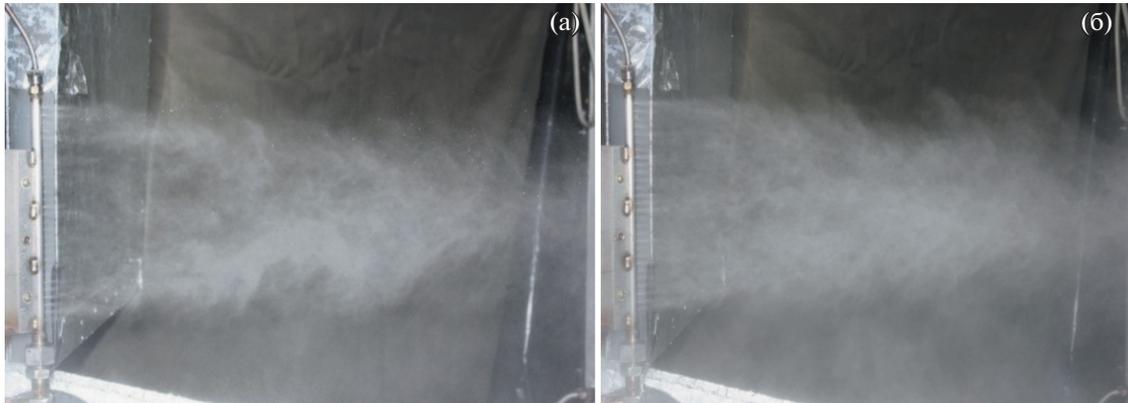


Рис. 3. Режимы № 1 (а) и № 2 (б).

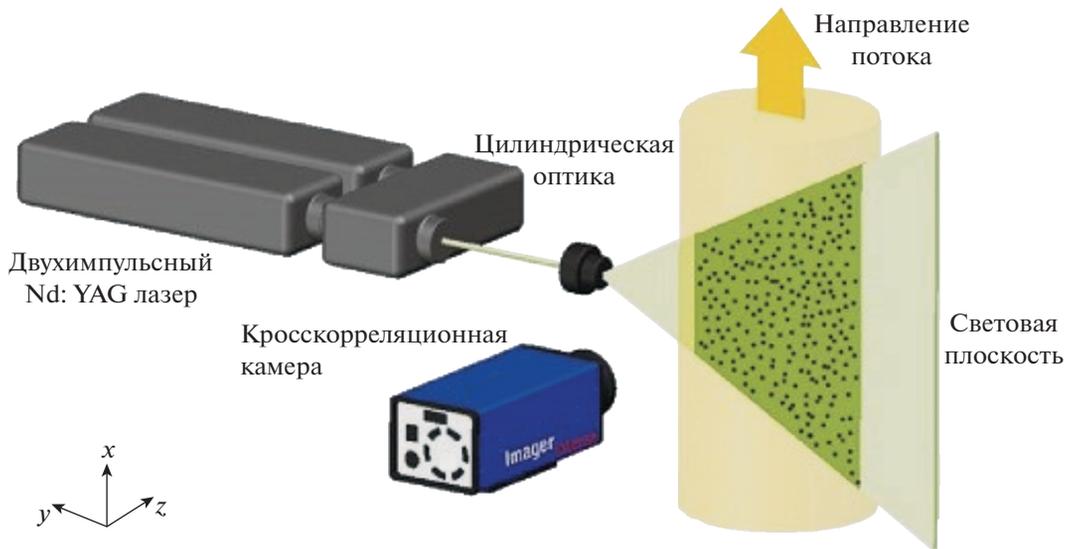
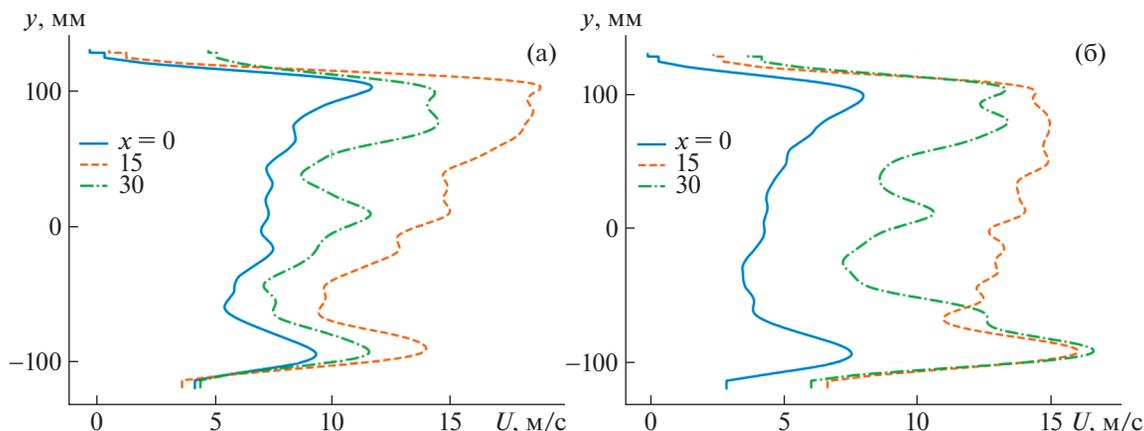


Рис. 4. Схема PIV-метода.

лись в нижней части смесителя. Параметры потока каплей, истекающего из него, обозначались индексом “ $l$ ”. Результаты фотографирования режимов № 1 и № 2 представлены на рис. 3. Из него заметно, что распыление на режиме № 1 неравномерно и имеет ярко выраженный “провал” в центре. С увеличением расхода газа на режиме № 2 факел распыла визуально становится более равномерным. Из чего можно сделать вывод о положительном влиянии расхода воздуха на равномерность распыления.

Поля скоростей каплей жидкости измерялись PIV-методом [5, 8]. В данной работе использовался один из PIV-методов, основанный на регистрации двух-экспозиционных изображений. В двух-экспозиционном методе изображение движущейся частицы регистрируется дважды через задаваемый временной интервал, в результате чего получаются два изображения частицы в разное время. Эти изображения регистрируются на скоростные цифровые кросскорреляционные видеокамеры высокого разрешения при помощи мощных наносекундных импульсных лазеров с регулируемым временем между импульсами. В этих методах освещение потока частиц осуществляется импульсным лазером при помощи лазерного “ножа”, который формируется цилиндрической оптикой (см. рис. 4). Рассеянный свет регистрируется в направлении, ортого-



**Рис. 5.** Осредненные профили проекции осевой скорости капель  $u_l$  в трех сечениях на режимах № 1 (а) и № 2 (б).

нальном направлении распространения лазерного луча. В простейшем случае, когда измеряются только две проекции вектора скорости, используется одна кросскорреляционная камера.

Изображения, соответствующие первой и второй экспозициям, регистрируются камерой на разные кадры.

В нашем эксперименте для регистрации параметров потока луч лазера разворачивался в вертикальной плоскости, а само устройство (смеситель) имело возможность перемещаться в горизонтальной плоскости, что позволяло регистрировать параметры во всей области распыла (конусе распыла) двухфазного потока.

Здесь примем следующую систему координат. Начало координат расположено в середине отверстия сопла форсунки № 15, ось  $Oy$  направлена вертикально (вдоль смесителя), ось  $Ox$  направлена по оси форсунки № 15, ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости  $Oxy$ . Луч лазера разворачивается в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью  $Oxy$ . Будем называть эту плоскость основной. Рассеянный от объектов свет в направлении оси  $Oz$  регистрируется кросскорреляционной камерой (см. рис. 4).

На рис. 5 представлены осредненные по времени значения осевой проекции скорости капель  $U_l$  в плоскости  $Oxy$  в точках, расположенных на расстояниях  $x_1 = 0$  мм,  $x_2 = 15$  мм,  $x_3 = 30$  мм от начала координат на режимах № 1 и № 2 (табл. 1). Измерения скоростей проводились также в вертикальных сечениях, параллельных плоскости  $Oxy$  и расположенных на разных расстояниях  $z$  от выходного сечения форсунок смесителя. Измерения в этих сечениях обеспечивались перемещением смесителя в горизонтальной плоскости вдоль оси  $Oz$ . Это позволило построить пространственное распределение полей скоростей, полученных на разных расстояниях  $x$  от смесителя вдоль оси  $Ox$ , проходящей через оси форсунок. На рис. 6 представлены пространственные распределения скоростей капель жидкости  $U_l$  от разных форсунок на режимах № 1 и № 2.

На режимах № 1 и № 2 (рис. 5 и 6) наблюдаются неравномерные поля с максимумами в области крайних форсунок, а также провал в центральной части. Наибольший максимум появляется в области крайних форсунок, на режиме № 2 (рис. 5 и 6), при этом существенно увеличивается скорость. Это связано с повышенным давлением в этих точках и, как следствие, увеличенными скоростями.

Таким образом, полученный результат свидетельствует о том, что, меняя соотношение параметров потоков жидкости и газа, подводимых к смесителю, можно управлять полем скоростей капель на выходе из смесителя.

Расходы и скорости жидкости и газа определялись путем измерения давления торможения и отбора пробы двухфазного потока, вытекающего из форсунки, с помощью специального устройства (типа трубки Пито), модифицированного для управления режимами измерения (подробнее см. [3]). Измерялись только значения параметров на выходе из форсунок, между форсунками измерения зондовым методом не производились. На рис. 7, 8 размещены графики приведенных

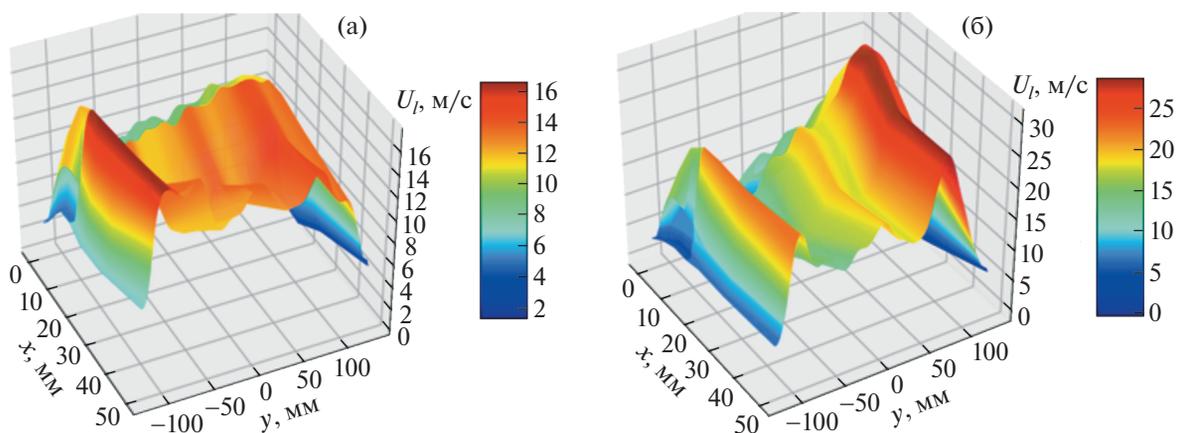


Рис. 6. Изменение горизонтальной проекции скорости каплей  $u_l$  по  $x$  и  $y$  на режимах № 1 (а) и № 2 (б).

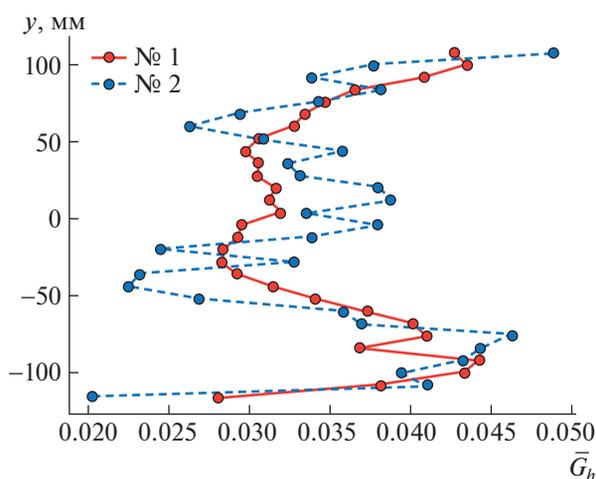


Рис. 7. Приведенные расходы жидкости на режимах № 1 и № 2.

расходов жидкости  $\bar{G}_{li} = G_{li} / \sum_{i=1}^{29} G_{li}$  и воздуха  $\bar{G}_{ai} = G_{ai} / \sum_{i=1}^{29} G_{ai}$  на режимах № 1 и № 2 и скоростей воздуха измеренных методом зондового отбора пробы. Приведенным расходом называют отношение измеренного значения расхода форсунки к суммарному расходу всех форсунок. Точки на графиках показывают положение форсунок с приведенным расходом  $\bar{G}_{ai}$ ,  $i$  – номер форсунки. Из графиков видно, что увеличение расхода воздуха (снижение концентрации жидкости) при переходе от режима № 1 к режиму № 2 увеличивает неравномерность поля расходов, однако “провал” в центральной части сохраняется. Суммарный расход газа всех форсунок, полученный по зондовым измерениям, имел погрешность 10% с общим расходом, измеренным расходомером подачи воздуха.

Представленные графики расходов и скоростей газа (рис. 8) качественно соответствуют графикам расходов и скоростей жидкости, показанным ранее. Имеется в виду, что положение максимумов и минимумов параметров на графиках соответствует друг другу.

Следует отметить некоторые особенности экспериментов.

1. Формирование поля концентрации фаз и скоростей на входе в смеситель не проводилось, что могло существенно влиять на профили параметров внутри смесителя, в том числе приводить к образованию и срыву пленок жидкости на стенках.

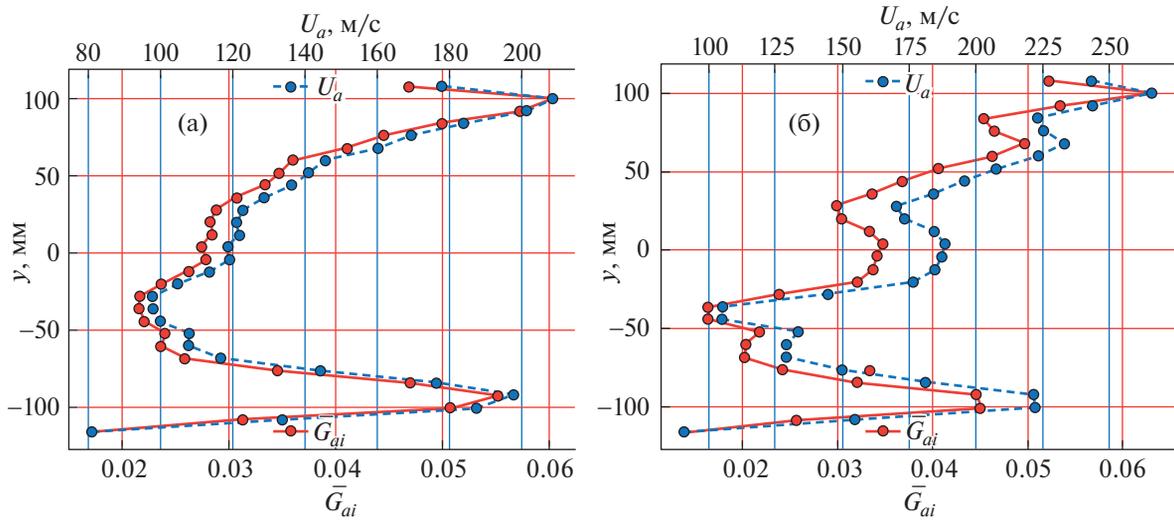


Рис. 8. Приведенный расход и скорость воздуха в поперечном сечении на режимах № 1 (а) и № 2 (б).

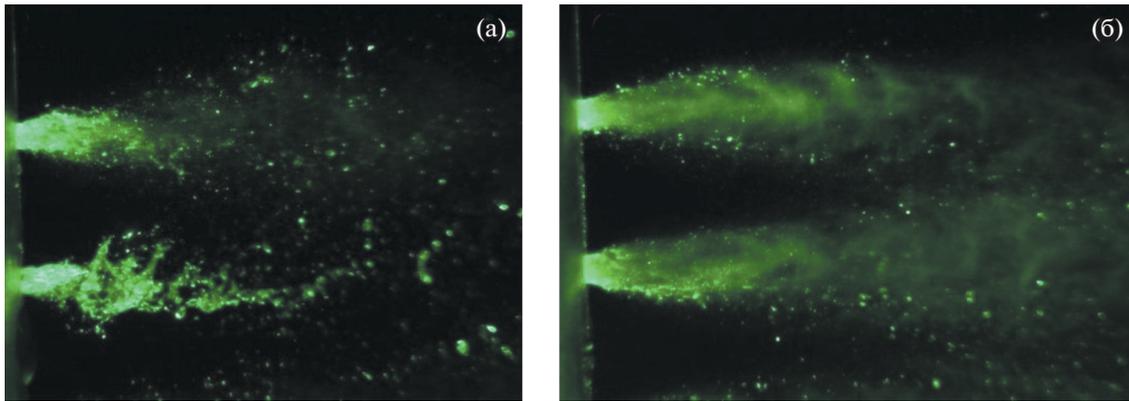


Рис. 9. Работа форсунок 28 и 29 на режимах № 1 (а) и № 2 (б).

2. Использовался смеситель относительно большой протяженности, что могло оказывать аналогичное влияние.

3. При течении потока с отводом массы в соответствии с законом обращения воздействия его статическое давление увеличивается по длине смесителя, т.е. оно переменное и в конце смесителя оказывается наибольшим. Это подтверждается увеличением скоростей истечения фаз в основной части смесителя (кроме крайних форсунок) и регистрацией избыточного давления  $p^*$  в торце смесителя.

4. Скорость истечения двухфазного потока определяется уравнением Бернулли, т.е. определяется перепадом давления, причем скорости фаз получаются разными и зависят от концентрации (массового соотношения между фазами). Этот фактор влияет на равномерность изменения давления. Из-за этого на графиках наблюдается “пиление”.

5. Способ формирования потока на входе в смеситель приводил к повышенному давлению на входе, которое потом снижалось в соответствии с геометрией смесителя. А затем оно возрастало из-за отвода массы (см. выше пункт 3). Отсюда и качественный “провал” в средней части.

6. Уменьшение скорости на последней форсунке № 29 связано с торможением потока (торец закрыт) и образованием вихря у торцевой стенки.

Таким образом, полученные результаты демонстрируют влияние соотношения между расходами фаз и статического давления вдоль канала смесителя на поля скоростей и расходов фаз.

Дисперсность капель измерялась на двух последних форсунках, расположенных в конце канала с номерами № 28 и № 29, причем № 29 – это последняя форсунка, расположенная у торца смесителя. Фотографии работы этих форсунок, полученные при освещении лазерным ножом, показаны на рис. 9 и 10. Форсунка № 29 расположена в верхней части фотографии. Фотографии демонстрируют, что длина сплошной части струи форсунок примерно одинакова на режиме № 1 и сокращается на режиме № 2 по сравнению с режимом № 1.

Для регистрации капель при их высокой концентрации использовался высокочастотный лазер со схемой микроскопа [5, 6], что позволило получить изображения единичных капель. С помощью оптики изображение объема, окружающего измеряемую область, переносится на необходимое расстояние, исключая влияние изучаемого объекта на результаты измерения. Далее эта область изучается по схеме микроскопа, что позволяет существенно увеличить размер изучаемого объекта, в частности, изображение капель, и сравнить его с тест-объектом, размер которого заранее известен.

Полученные результаты по определению размеров капель дисперсной фазы были аппроксимированы распределением Розин-Раммлера [9–11], которое характеризуется частотной и интегральной кривыми:

$$y = \frac{n}{\bar{d}^n} d^{n-1} \exp(-(d/\bar{d})^n), \quad V = 1 - \exp(-(d/\bar{d})^n)$$

Здесь  $d$  – диаметр капель в спектре распыливания,  $\bar{d}$  – константа размера,  $n$  – константа распределения. Приведены данные, полученные на расстоянии 5–10 мм от выходного сечения форсунок. Форсунка № 29 показала значения: на режиме № 1  $\bar{d} = 56$  мкм,  $n = 1.3$ ; на режиме № 2  $\bar{d} = 54$  мкм,  $n = 1.3$ . Форсунка № 28 показала значения: на режиме № 1  $\bar{d} = 68$  мкм,  $n = 1.3$ ; на режиме № 2  $\bar{d} = 44$  мкм,  $n = 1.3$ . Снижение размера капель у форсунки № 28 связано с повышенным давлением (скорости капель выше) по сравнению № 29 (см. рис. 8).

Значения констант показывают влияние режимов течения и расположения форсунок на получаемые результаты по дисперсности капель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного экспериментального исследования смесителя путем моделирования его работы на водно-воздушном рабочем теле впервые получена информация об особенностях работы такого смесителя как устройства для формирования топливовоздушной смеси, а также о параметрах, влияющих на его характеристики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лепешинский И.А., Зуев Ю.В., Бажанов В.И.* Зондовый метод измерения параметров фаз двухфазного двухкомпонентного потока // Газотермодинамика многофазных потоков в энергоустановках. 1978. Вып. 1. С. 123–128.
2. *Бузов А.А., Дудченко С.Г., Лепешинский И.А.* Исследование работы изокинетического зонда для замера параметров двухфазного дисперсного потока // Газотермодинамика многофазных потоков в энергоустановках. 1979. Вып. 2. С. 157–159.
3. *Лепешинский И.А., Ципенко А.В., Решетников В.А., Кучеров Н.А., Ся Сюй.* Измерение параметров двухфазного потока при совместном использовании лазерно-оптических и зондовых методов. Вестник МАИ. Т. 26. № 3. 2019. С. 152–160.
4. *Лепешинский И.А., Зуев Ю.В., Яковлев А.А., Молесон Г.В., Воронецкий А.В., Онес В.И., Ципенко А.В.* Численное и экспериментальное исследование газочапельного течения в сопле с большими концентрациями дисперсной фазы // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 7. С. 121–127.
5. *Raffel M., Willert C., Kompenhans J.* Particle Image Velocimetry. Berlin: Springer, 1998. 252 p.
6. *Lin J., Qian L. and Xiong H.* Relationship Between Deposition Properties and Operating Parameters for Droplet on to Surface in the Atomization Impinging Spray, Powder Technology, V. 191. № 3. April 2009. P. 340–348.

7. Зуев Ю.В., Истомин Е.А., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Чабанов В.А. Лазерный измерительный комплекс диагностики дисперсности двухфазных потоков // Материалы X Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях “NPNG’ 2014”, 25–31 мая 2014, Алушта. М.: МАИ, 2014. С. 93–95.
8. Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonell V.G., Samuelsen G.S. On the evolution of particle-laden jet flows: a theoretical and experimental study // AIAA Paper. № 2. 1989. P. 167–183.
9. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Истомин Е.А. Особенности двухфазных струй с большой концентрацией дисперсной фазы // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 129–142.
10. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А. Влияние инерционности частиц на кинематические характеристики двухфазной струи // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 70–74.
11. Раушенбах Б.В., Белый С.А., Беспалов И.В. и др. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1964. 526 с.

УДК 532.517

## НЕУСТОЙЧИВОСТИ, БИФУРКАЦИИ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДВУМЕРНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

© 2022 г. И. И. Вертгейм<sup>a,\*</sup>, М. А. Закс<sup>b</sup>, Р. В. Сагитов<sup>c</sup>, А. Н. Шарифулин<sup>d</sup><sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия<sup>b</sup> Университет им. Гумбольдтов, Берлин, Германия<sup>c</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия<sup>d</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

\*E-mail: wertg@icmm.ru

Поступила в редакцию 08.02.2022 г.

После доработки 12.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Рассматривается семейство двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости в плоской прямоугольной области с периодическими граничными условиями (двумерный тор). Течения вызваны силой, периодической по двум пространственным координатам и постоянной по времени. В частном случае гармонической зависимости силы от одной координаты и отсутствия осредненного течения реализуется известное течение Колмогорова. В общем двумерном случае численно изучены структурные перестройки стационарных решений уравнений Навье–Стокса, определены области устойчивости в пространстве определяющих физических и геометрических параметров – чисел Рейнольдса, амплитуд силы, пространственных размеров ячейки периодичности. Выяснено, что в квадратной области, сторона которой равна пространственному периоду внешней силы, основное стационарное течение сохраняет устойчивость при изменении амплитуды силы и чисел Рейнольдса. Напротив, в ячейках, в стороны которых укладывается несколько периодов силы, изменение параметров дестабилизирует стационарное течение. Исследованы стационарные и автоколебательные нелинейные вторичные режимы течения. Обсуждается влияние нестационарности на лагранжеву динамику: механизмы перехода к хаотической адвекции пассивных частиц зависят от соизмеримости чисел Рейнольдса, характеризующих осредненное течение во взаимно перпендикулярных направлениях.

*Ключевые слова:* вязкая несжимаемая жидкость, двумерные пространственно-периодические течения, обобщения течения Колмогорова, динамика лагранжевых частиц

DOI: 10.31857/S0568528122040119

Двумерные течения вязкой несжимаемой жидкости, вызванные постоянной по времени пространственно-периодической силой при наличии постоянной прокачки вдоль взаимно перпендикулярных направлений, являются двумерными обобщениями известного пространственно-периодического течения Колмогорова [1], предложенного как модель каскадного переноса энергии в турбулентном потоке. В [2–4] определены границы монотонной устойчивости течения Колмогорова, установлен ее длинноволновый характер и исследованы вторичные пространственно-периодические течения вблизи порога. В дальнейших теоретических и численных исследованиях было показано, что введение боковых границ существенно снижает длину волны опасного возмущений [5], а при высоких числах Рейнольдса ведет к возникновению крупномасштабного когерентного вихря [6]; найдены различные нестационарные режимы течения, включая квазипериодические и перемежаемость [7].

Похожие структуры реализованы и в экспериментах [8–11] с магнитогидродинамическими течениями в тонких слоях слабопроводящей жидкости, где были подтверждены неустойчивость основного течения и переход к вторичным режимам с периодичностью по двум координатам.

Для некоторых конфигураций силы известны стационарные решения уравнений Навье–Стокса, в которых поле скорости двоякопериодично, и периоды по каждой из координат кратны пространственному периоду силы: в частности, двухвихревое с прокачкой в двух направлениях [12] и одновихревое типа “кошачьи глаза” [13]. Лагранжева динамика частиц пассивной

примеси в определенной области параметров таких течений необычна, ее свойства являются промежуточными между ламинарными и турбулентными: фрактальный спектр скорости переносимых частиц, аномальные характеристики транспорта и т.п. Известными частными случаями таких течений являются течение Колмогорова (далее K59) [1] и течение с двухкомпонентной двоякопериодической вынуждающей силой (далее ZPK96) [12]. В обоих случаях основное решение с функцией тока, периодичной по одной или двум координатам, устойчиво для возмущений с длиной волны, не превышающей периода вынуждающей силы, и проявляет длинноволновую неустойчивость, монотонную для K59 [2], и, в зависимости от характеристик прокачки, монотонную либо колебательную для его двумерных обобщений [14].

Описанные исследования показали необходимость более глубокого изучения устойчивости известных стационарных течений, развития вторичных режимов и соответствующей им лагранжевой динамики. Ниже, для течения ZPK96 с учетом параметризованного через числа Рейнольдса  $Re_x$  и  $Re_y$  ненулевого расхода жидкости в  $x$ - и  $y$ -направлениях, исследована устойчивость основных и вторичных семейств течений, рассмотрено нелинейное развитие вторичных режимов после потери устойчивости и проведен анализ качественных изменений в лагранжевой динамике переносимых частиц.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной ячейке бесконечного слоя с условиями периодичности по координатам  $x$  и  $y$  (двумерный тор), вызванное постоянной по времени двоякопериодической по пространству силой  $\mathbf{F}(x, y) = (f_1 \sin(y/L), f_2 \sin(x/L))$ . В размерных переменных уравнения Навье–Стокса для скорости  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}$  имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_f} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

а условия периодичности и задания расходов жидкости в перпендикулярных направлениях выглядят:

$$\mathbf{v}(x + L_x, y) = \mathbf{v}(x, y + L_y) = \mathbf{v}(x, y) \quad \forall x, y;$$

$$\frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} v_x dy = \alpha, \quad \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} dy \int_0^{L_x} v_y dx = \beta.$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $L_x, L_y$  – размерные длина и ширина ячейки периодичности;  $L/(2\pi), f_1, f_2$  – размерные пространственный период и амплитуды внешней силы,  $\alpha$  и  $\beta$  – размерные расходы течения по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно.

В безразмерном виде, записанные в терминах функции тока  $\Psi(x, y)$ , для которой  $\partial \Psi / \partial y = v_x$ ,  $\partial \Psi / \partial x = -v_y$ , уравнения (1.1) принимают вид:

$$-\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \Delta \Delta \Psi = -\lambda_1 \cos y + \lambda_2 \cos x \quad (1.2)$$

а расходы жидкости в перпендикулярных направлениях равны, соответственно,

$$\frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} dx \cdot (\Psi(x, l_y) - \Psi(x, 0)) = Re_x; \quad -\frac{1}{l_y} \int_0^{l_y} dy \cdot (\Psi(l_x, y) - \Psi(0, y)) = Re_y. \quad (1.3)$$

Задачу (1.2)–(1.3) характеризуют следующие безразмерные параметры:

числа Рейнольдса  $Re_x = \alpha/\nu$ ,  $Re_y = \beta/\nu$ ;

внешняя сила с компонентами  $\lambda_1 = f_1 L^3/\nu^2$ ;  $\lambda_2 = f_2 L^3/\nu^2$ ;

размеры ячейки:  $l_x = L_x/L$ ;  $l_y = L_y/L$ .

Удобно разбить функцию тока на линейные по  $x$  и  $y$  слагаемые, обеспечивающие прокачку, и часть, периодическую по обеим координатам:  $\Psi(x, y) = \text{Re}_x y - \text{Re}_y x + \Psi'(x, y)$ . Тогда условия периодичности поля скорости записываются как  $\Psi'(x + l_x, y) = \Psi'(x, y + l_y) = \Psi'(x, y)$ .

## 2. ИЗВЕСТНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Частными решениями задачи (1.2) являются течение Колмогорова K59 [1] ( $\lambda_2 = \text{Re}_x = \text{Re}_y = 0$ ) и течение ZPK96 в квадратной области с периодическими граничными условиями, эквивалентное потоку по поверхности двумерного тора [12] ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ). В обоих случаях известны стационарные решения задачи (1.2). В первом случае это  $\Psi_0(x, y) = \lambda_1 \cos(y)$ , которое, как показано в [2–4], устойчиво при  $l_x < 2\pi$ . Длинноволновая неустойчивость ( $l_x \rightarrow \infty$ ) получена при  $\lambda_{1cr} = \sqrt{2}$ , для ячеек конечной длины  $l_x > 2\pi$  колебательная неустойчивость найдена в [15], а также для более общего случая при ненулевом расходе  $\text{Re}_x$  в [14]. Стационарное решение ZPK96 [12] при  $l_x = l_y = 2\pi$  имеет вид:

$$\Psi_0(x, y) = \text{Re}_x y - \text{Re}_y x + \lambda \frac{\sin(x + \phi_x)}{\sqrt{\text{Re}_x^2 + 1}} - \lambda \frac{\sin(y + \phi_y)}{\sqrt{\text{Re}_y^2 + 1}} \quad (2.1)$$

$$\phi_x = \arctg\left(\frac{1}{\text{Re}_x}\right); \quad \phi_y = \arctg\left(\frac{1}{\text{Re}_y}\right)$$

В отсутствие внешней силы ( $\lambda = 0$ ) реализуется тривиальное течение на двумерном торе с числом вращения  $\rho = \text{Re}_x/\text{Re}_y$ , с прямыми линиями тока и однородной скоростью. Течение “глобально”: частица жидкости, находящаяся первоначально в любой точке области, обходит тор снова и снова, и при иррациональном числе вращения проходит как угодно близко от любого заданного места. Как показано в [12], с ростом амплитуды силы  $\lambda$  линии тока искривляются, а при  $\lambda = \lambda_{cr} = \sqrt{\text{Re}_x^2 \cdot \text{Re}_y^2 + \max(\text{Re}_x^2, \text{Re}_y^2)}$  происходит топологическая перестройка: на двух линиях тока возникает по точке сборки – точке стагнации течения, в которых обе компоненты скорости одновременно обращаются в нуль. При дальнейшем росте  $\lambda$  вырожденные точки стагнации распадаются на седловые и эллиптические точки застоя, и на поверхности тора, помимо “глобальной”, формируется “локальная” структура течения; ее образуют два заполненных замкнутыми линиями тока вихря вокруг эллиптических точек. Вихри, отделенные от глобальной компоненты течения сепаратрисами седловых точек, малы непосредственно после своего рождения, но с ростом  $\lambda$  они увеличиваются, постепенно занимая все большую долю площади ячейки периодичности. При  $\lambda > \lambda_{cr}$  и иррациональных числах вращения в глобальной компоненте течения существует нетривиальная лагранжева динамика: поскольку любая линия тока в глобальной компоненте снова и снова проходит как угодно близко к седловой неподвижной точке, в траектории частицы, транспортируемой вдоль этой линии, эпохи относительно быстрого дрейфа чередуются с замедлениями вплоть до полной остановки. Это приводит к ослаблению временных корреляций и вызывает аномальный транспорт частиц-трассеров в субдиффузионном режиме. Заметим, что перестройка топологии течения при  $\lambda = \lambda_{cr}$ , несмотря на глубинные изменения, вносимые ею в динамику, не является бифуркацией: новые решения не ответвляются, а устойчивость существующего не меняется.

Мы провели численное исследование задачи (1.2). Для нахождения стационарных решений системы (кроме решения (2.1)) использован многомерный метод Ньютона, примененный для системы алгебраических уравнений дискретного аналога (2.1) [16].

Разложим пространственно-периодическую часть функции тока  $\Psi'(x, y)$  в ряд Фурье

$$\Psi'(x, y, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \Psi_{m,n}(t) \cdot e^{\frac{imx + iny}{l'_x l'_y}}; \quad l'_x = \frac{l_x}{2\pi}; \quad l'_y = \frac{l_y}{2\pi}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.2) и применяя к полученной системе уравнений стандартную процедуру умножения на комплексную экспоненту с последующим интегрированием по поверхности тора получим  $(2M + 1) \times (2N + 1) - 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений, задающих эволюцию во времени коэффициентов рядов Фурье

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{m^2}{l_x'^2} + \frac{n^2}{l_y'^2} \right) \left( \frac{d}{dt} + \frac{m^2}{l_x'^2} + \frac{n^2}{l_y'^2} + \frac{im}{l_x'} \operatorname{Re}_x + \frac{in}{l_y'} \operatorname{Re}_y \right) \Psi_{m,n} - \\
& - \sum_{m_1=\max(-M, m-M)}^{\min(M, m+M)} \sum_{n_1=\max(-N, n-N)}^{\min(N, n+N)} \frac{n_1 m - m_1 n}{l_x' l_y'} \left( \frac{(m - m_1)^2}{l_x'^2} + \frac{(n - n_1)^2}{l_y'^2} \right) \Psi_{m_1, n_1} \Psi_{m-m_1, n-n_1} + F_{m,n} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь  $F_{m,n} = 0$ , для всех  $m, n$ , кроме  $F_{l_x', 0} = F_{-l_x', 0} = -\frac{\lambda_2}{2}$  и  $F_{0, l_y'} = F_{0, -l_y'} = \frac{\lambda_1}{2}$ . Штрихованные индексы являются целочисленными в силу выбора сторон ячейки периодичности (длины  $l_x$  и ширины  $l_y$ ) и определяют, сколько периодов силы ( $2\pi$ ) в них содержится.

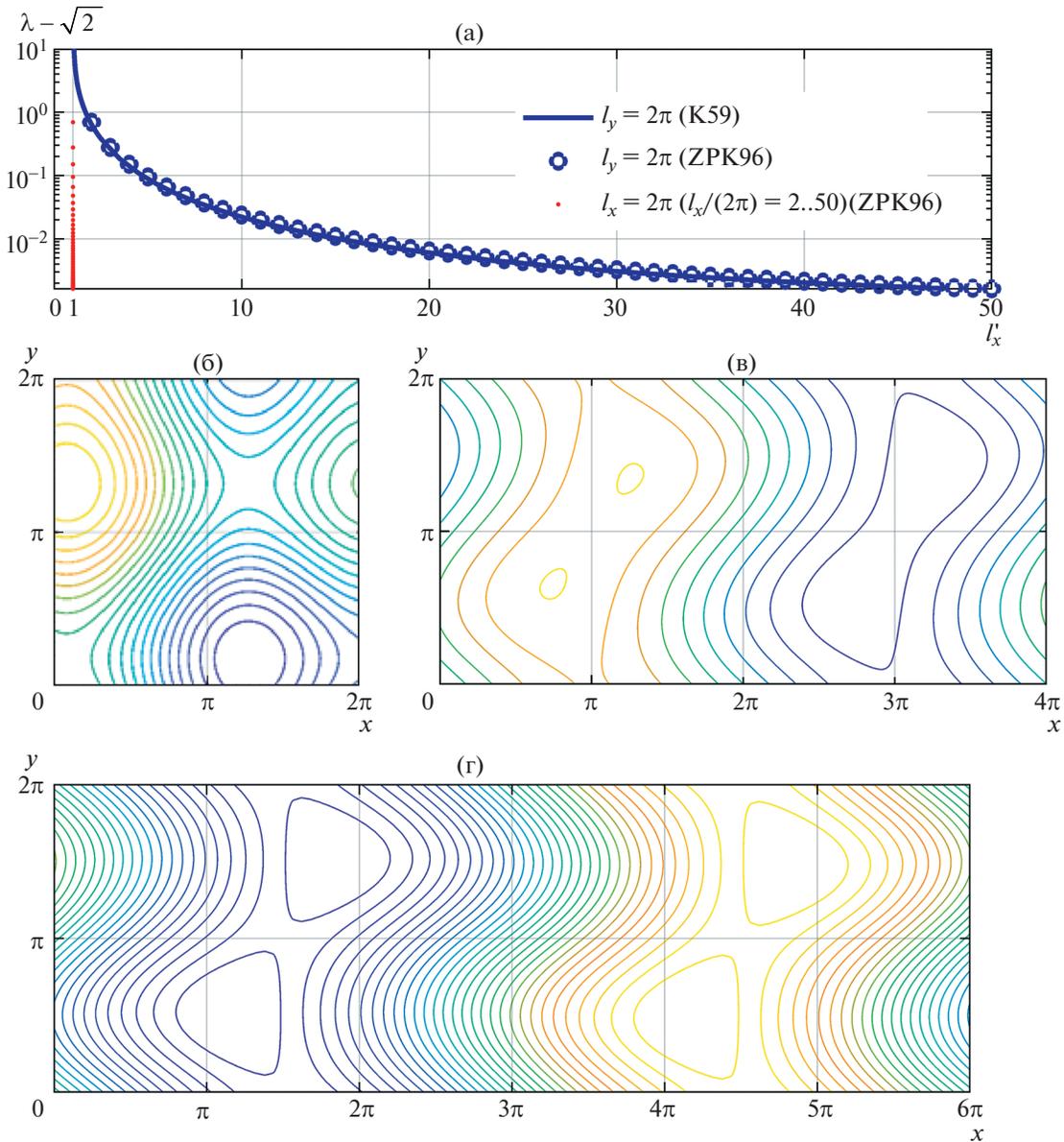
Для количества мод  $M$  и  $N$  в разложении  $\Psi'$  в ряд Фурье, критерием служит точность определения критических значений амплитуды силы, соответствующих различным вариантам дестабилизации течения (2.1). При  $M = N = 5$  верно определяются 8 десятичных знаков в критическом значении  $\lambda$ , а использование величин  $M$  и  $N$ , превышающих 15, смещает пороговые значения на величину, сравнимую с ошибкой округления. Чтобы создать “запас прочности” для аккуратного нахождения нестационарных решений, мы пользовались в расчетах значениями  $M = N = 20$ .

Линеаризация (2.3) около стационарного течения (2.1) характеризует устойчивость (2.1) в рамках уравнений Навье–Стокса. Мы определили в пространстве параметров  $\operatorname{Re}_x, \operatorname{Re}_y, \lambda$  области устойчивости. В частности, в расчетах установлен несколько неожиданный факт: в квадратной ячейке с длинами сторон, равными периоду вынуждающей силы ( $l_x = l_y = 2\pi$ ), стационарное течение (2.1) устойчиво даже при достаточно больших значениях амплитуды силы  $0 \leq \lambda \leq 100$  и в широком интервале значений расходов  $-10 \leq (\operatorname{Re}_x, \operatorname{Re}_y) \leq 10$ . Увеличение размеров полости до нескольких периодов вынуждающей силы создает возможности для длинноволновых возмущений; расчеты показали, в частности, что в прямоугольных ячейках периодичности ( $l_x = 2\pi m, l_y = 2\pi n; \max(m, n) > 1; m, n \in \mathbb{N}$ ) возможна дестабилизация течения (2.1), причем, в зависимости от параметров задачи, вторичные течения могут носить как стационарный, так и автоколебательный характер (рис. 1).

При изменении длины ячейки периодичности  $l_x$  от  $2\pi$  до  $l_x \rightarrow \infty$  и фиксированной ширине  $l_y = 2\pi$  порог неустойчивости монотонно убывает от  $\lambda_{inst} \rightarrow \infty$  для квадратной ячейки до значения  $\lambda_{inst} = \sqrt{2}$ , соответствующего порогу для течения Колмогорова K59.

На рис. 2 для случая ячейки с  $l_x = 4\pi, l_y = 2\pi$  проиллюстрированы зависимости критических значений амплитуды силы  $\lambda$  и частоты нейтральных возмущений  $\omega$  от параметров прокачки  $\operatorname{Re}_x, \operatorname{Re}_y$ . Для сравнения здесь же приведены значения  $\lambda_{cr}$ , соответствующие возникновению стационарных вихрей в структуре течения (2.1).

Видно, что возможны как колебательная, так и монотонная неустойчивости решения (2.1), с порогами неустойчивости, соответственно  $\lambda_o$  и  $\lambda_m$ . Возможны различные соотношения этих пороговых значений между собой, а также со значением  $\lambda_{cr}$ , при котором в структуре течения (2.1) на фоне глобальной компоненты образуются локализованные стационарные вихри. Из результатов линейного анализа можно сделать вывод, что неустойчивость этого течения для рассмотренной геометрии (при  $l_x = 4\pi, l_y = 2\pi$ ) определяется в основном параметром прокачки вдоль оси  $x$  ( $\operatorname{Re}_x$ ), рост  $\operatorname{Re}_y$  приводит к существенной стабилизации течения. При отсутствии прокачки всегда реализуется монотонная неустойчивость, при росте  $\operatorname{Re}_x$  появляются колебательные моды неустойчивости (2.1). Ниже мы рассмотрим различные варианты развития неустойчивости и исследуем соответствующие им типы вторичных нелинейных режимов течения на основе численного анализа полных нелинейных уравнений (2.3). В расчетах использовались многомерный метод Ньютона [14, 16] для нахождения стационарных решений и собственных значений  $\lambda$ , метод Рунге–Кутты–Фельберга с адаптивным шагом по времени для численного интегрирования (2.3) в случае нестационарных (в частности колебательных) решений, в сочетании с методом продолжения (отслеживания) по параметру, и идентификации бифуркаций по спектру собственных значений якобиана.



**Рис. 1.** Пороги неустойчивости течений K59 и ZPK96 в зависимости от длины ячейки периодичности  $l_x$  (а); вид основного течения ZPK96 (б) и его критических возмущений при  $l_x/2\pi = 2$  (в) и  $l_x/2\pi = 3$  (г), при  $l_y = 2\pi$ .

### 3. БИФУРКАЦИИ И ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Для иллюстрации перестроек режимов течения мы выбираем ячейку с соотношением сторон 2:1, так что по ее длине (вдоль координаты  $x$ ) укладывается два периода стационарной внешней силы, а по ширине (вдоль координаты  $y$ ), соответственно, один период. По отношению к удвоенной ячейке с периодическими граничными условиями по  $x$ , стационарное течение (2.1) обладает симметрией: оно инвариантно относительно сдвига на половину длины ячейки. Соответственно, уравнения (2.3), записанные в терминах фурье-коэффициентов  $\psi_{m,n}$ , инвариантны относительно смены знака всех коэффициентов с нечетными значениями  $m$ , а спонтанное нарушение этой симметрии при монотонном росте возмущений приводит к вилочной бифуркации состояния равновесия.

Рисунок 3 содержит карту основных режимов течения для такой ячейки при фиксированной интенсивности прокачки вдоль координаты  $y$ :  $Re_y = 1$ . Область устойчивости решения (2.1) выделена серым фоном.

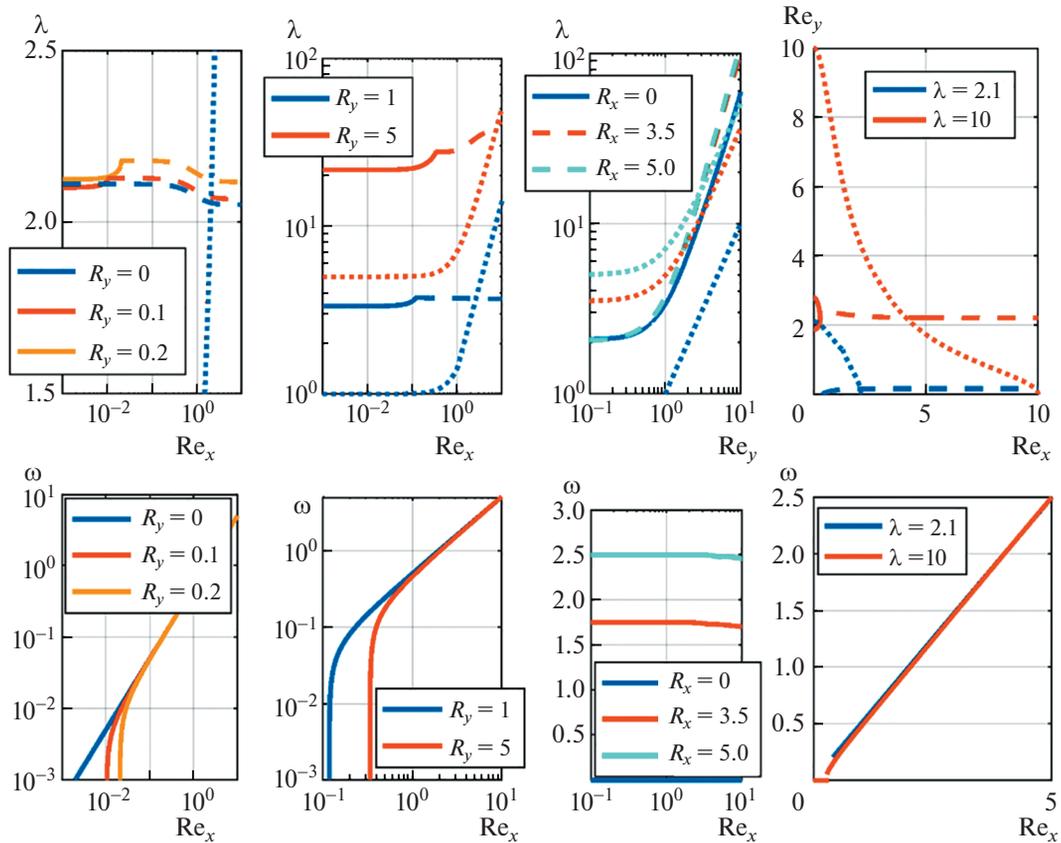
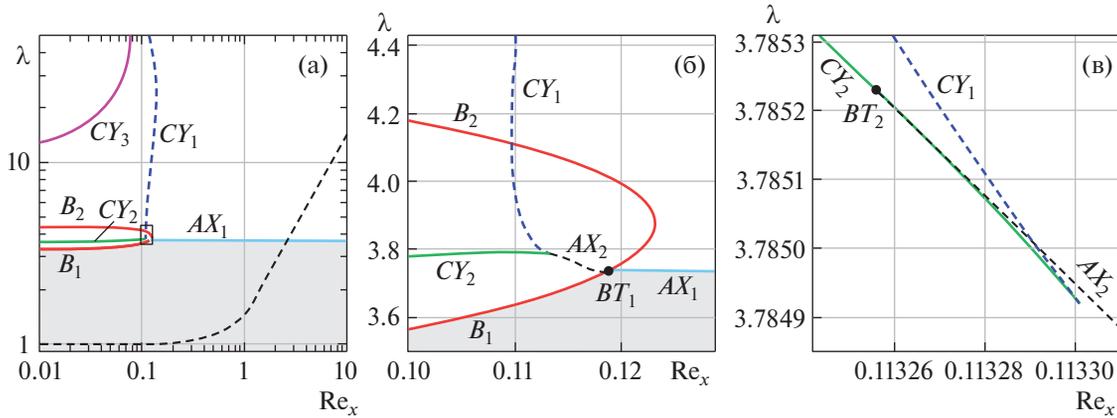


Рис. 2. Нейтральные кривые на плоскостях  $(\text{Re}_x, \lambda)$ ,  $(\text{Re}_y, \lambda)$ ,  $(\text{Re}_x, \text{Re}_y)$ , (верхний ряд слева направо) и зависимость частоты критических возмущений от  $\text{Re}_x$ ,  $\text{Re}_y$ . Кривые из точек соответствуют  $\lambda_{\text{кр}}$ .

Как показано на левой (а) и центральной (б) панелях рисунка, при малых значениях  $\text{Re}_x$  неустойчивость течения (2.1) носит монотонный характер и сопровождается вилочными бифуркациями  $B_1$ ,  $B_2$ , порождающими симметричные пары стационарных течений (элементы пары переходят друг в друга при сдвиге на  $2\pi$  вдоль оси  $x$ ). При этом бифуркация  $B_1$  является надкритической, а бифуркация  $B_2$  – подкритическая, так что ветви стационарных решений, рождающиеся из (2.1) на линии  $B_1$ , заканчиваются на  $B_2$ . При  $\text{Re}_x = 0.1233$  линии  $B_1$  и  $B_2$  сливаются; выше этого значения  $\text{Re}_x$  вилочных бифуркаций течения (2.1) нет. Но еще несколько ранее, при  $\text{Re}_x = 0.1189$  на линии  $B_1$  происходит другое определяющее событие: в точке  $BT_1$  одновременно обращаются в 0 два собственных значения линеаризованной задачи. В результате этого явления коразмерности 2, известного как бифуркация Богданова–Тakensа [17], бифуркационный сценарий меняется: при более высоких значениях  $\text{Re}_x$  неустойчивость течения (2.1) носит колебательный характер, так что на линии  $AX_1$  бифуркация Андронова–Хопфа порождает из равновесия, соответствующего течению (2.1), устойчивый предельный цикл, и структура течения периодически осциллирует.

Из-за упомянутой симметрии течения (2.1) бифуркация Богданова–Тakensа в точке  $BT_1$  имеет особенный характер [17]. Поскольку первичное решение не исчезает на  $B_1$ , а лишь теряет устойчивость, то, как видно на средней панели рис. 3б, выходящая направо из точки  $BT_1$  линия  $AX_1$  имеет продолжение и при меньших значениях  $\text{Re}_x$ : это линия  $AX_2$ , на которой бифуркация Андронова–Хопфа происходит со вторичными стационарными режимами, ответвившимися от (2.1) на линии  $B_1$ .

Помимо бифуркаций, непосредственно затрагивающих основное течение (2.1), при малых значениях  $\text{Re}_x$  имеет место и конечноамплитудное рождение/исчезновение вторичных стационарных течений: оно происходит в результате седлоузловых бифуркаций на линиях  $SU_1$  и  $SU_2$ . Линии  $SU_1$  и  $SU_2$  заканчиваются в точке “сборки” при  $\text{Re}_x = 0.1133$ ; в клине, образованном этими



**Рис. 3.** Карта режимов в плоскости параметров  $(Re_x, \lambda)$  течения в ячейке периодичности  $l_x = 4\pi, l_y = 2\pi$  при фиксированном среднем расходе  $Re_y = 1$ . Стационарное течение (2.1) устойчиво в области с серым фоном. Бифуркационные кривые:  $B_{1,2}$  – вилочные бифуркации стационарных течений,  $AX_{1,2}$  – возникновение автоколебаний (бифуркация Андронова–Хопфа),  $CY_{1,2,3}$  – седлоузловые бифуркации конечноамплитудного рождения стационарных течений. Темные кружки  $BT_{1,2}$  – точки бифуркаций Богданова–Тakensа. Штриховая линия (a) соответствует значению  $\lambda_{cr}$ , когда образуется пара вихрей в течении (2.1). Панель (a): общий план в логарифмических координатах. Панель (б): область вокруг точки  $BT_1$ . Панель (в): область вблизи точки сборки, образованной линиями  $CY_1$  и  $CY_2$ .

линиями, имеет место мультистабильность: сосуществование при фиксированном значении параметров нескольких устойчивых стационарных течений. Как видно на правой панели рис. 3, в этот клин заходит справа и линия  $AX_2$  бифуркации Андронова–Хопфа; эта линия заканчивается на  $CY_2$  в точке  $BT_2$  другой бифуркации Богданова–Тakensа, происходящей со вторичными стационарными течениями. Таким образом, обе концевые точки линии  $AX_2$  на плоскости параметров – это точки Богданова–Тakensа. Поскольку вторичные стационарные течения не обладают симметрией по отношению к пространственному сдвигу, бифуркация  $BT_2$  (в отличие от  $BT_1$ ) носит общий характер.

Движение вверх вдоль линии  $CY_1$  приводит к изменению характера происходящей на ней седлоузловой бифуркации: в фазовом пространстве из локальной (затрагивающей два равновесия) она становится глобальной, и включает гомоклиническую траекторию к седлоузловой точке. Разрушение этой траектории, в современной литературе нередко именуемое бифуркацией SNIC (Saddle-Node on Invariant Circle), порождает устойчивое периодическое движение, период которого неограниченно нарастает по мере приближения к бифуркационному значению параметра. При  $Re_x = 0$  (отсутствие среднего расхода жидкости вдоль оси  $x$ ) основное течение обладает еще одной симметрией: инвариантностью к зеркальному отражению относительно прямой, параллельной оси  $y$ . Эту симметрию наследуют и вторичные стационарные течения, возникающие при седло-узловых бифуркациях. Поэтому монотонная неустойчивость таких течений приводит к новой вилочной бифуркации и возникновению пар зеркально симметричных третичных стационарных течений. При как угодно малых ненулевых значениях прокачки вдоль оси  $x$  симметрия отсутствует, и вилочная бифуркация разрушается, заменяясь еще одной седлоузловой бифуркацией (линия  $CY_3$  на рис. 3). На рис. 3а указана и линия, на которой происходит описанное выше изменение топологической структуры основного течения (2.1): рождение точек застоя и стационарных вихрей. На рисунке видно, что при достаточно больших значениях  $Re_x$  колебательная неустойчивость основного стационарного течения может предшествовать этой перестройке.

На рис. 4 мы приводим несколько типичных бифуркационных диаграмм, соответствующих движению вдоль вертикальных линий на рис. 3: увеличению амплитуды силы  $\lambda$  при фиксации параметра  $Re_x$ . В качестве количественной характеристики течения использована величина  $\delta = v_y(0,0) - v_{y0}(0,0)$  (здесь и ниже индекс “0” указывает на характеристики основного течения (2.1)). Для стационарного решения  $\delta$  соответствует отклонению  $y$ -компоненты скорости течения от значения для основного стационарного решения (2.1), колебательное решение характе-

ризуется максимальным  $\delta_{\max}$  и минимальным  $\delta_{\min}$  значениями этого отклонения по периоду, а также величиной периода  $T$ . Кроме этого, для построения фазовых траекторий использованы эйлеровы переменные  $(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta \Psi_c)$ , где:

$$\Delta v_x = v_x(0,0) - v_{x0}(0,0), \quad \Delta v_y = \delta$$

$$\Delta \Psi_c = \left( \Psi \left( \frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} \right) - \Psi(0,0) \right) - \left( \Psi_0 \left( \frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} \right) - \Psi_0(0,0) \right)$$

Здесь же показаны соответствующие зависимости  $T(\lambda)$  в случае колебательных решений. Сплошные и точечные линии характеризуют, соответственно, устойчивые и неустойчивые стационарные течения, а штриховые линии — устойчивые автоколебательные режимы. Вилочные бифуркации отмечены на бифуркационных диаграммах рис. 4 индексами  $B_1$  и  $B_2$ , бифуркации Андронова–Хопфа — индексами  $AX_1$  и  $AX_2$ . Оба эти типа бифуркаций могут быть надкритическими ( $B_1$ ) либо подкритическими ( $B_2, AX_1, AX_2$ ). Седлоузловые бифуркации указаны индексами  $SU_1, SU_2, \dots$ , сюда относится и ранее упомянутая бифуркация SNIC появления седлоузла на инвариантном цикле (рис. 4 в, г при  $\lambda \approx 6.3$ ; рис. 4ж при  $\lambda \approx 11$ ).

Наиболее сложная картина бифуркационных переходов получена при малых, но конечных значениях прокачки  $Re_x$  вдоль координаты  $x$ . При отсутствии прокачки ( $Re_x = 0$ , рис. 4а), или при слабой прокачке ( $Re_x = 0.01$ , рис. 4б) все моды неустойчивости монотонны, первая из колебательных мод возникает правее точки  $BT_2$  при  $Re_x \sim 0.113$ , затем при  $Re_x \sim 0.117$  эта мода переходит в колебательную моду неустойчивости решения (2.1)  $AX_1$ , которая при дальнейшем росте  $Re_x$  остается наиболее опасной.

Таким образом, общая картина и разнообразие бифуркаций основного решения определяются в основном величиной прокачки по направлению  $x$ , соответствующему максимальной стороне ячейки периодичности ( $l_x = 4\pi$ ). При слабой прокачке чередуются вторичные стационарные течения, при более сильной устанавливаются автоколебания, которые могут появляться либо как результат бифуркации Андронова–Хопфа основного решения (2.1) при достаточно больших значениях  $Re_x$  и амплитуды силы  $\lambda$ , либо в области их промежуточных значений как результат разрушения седлоузловой гомоклинической траектории (бифуркация SNIC). Перечисленные варианты динамики системы можно видеть на рис. 5. Насколько общими являются эти закономерности, покажут дальнейшие расчеты для других ячеек периодичности.

#### 4. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ ЖИДКОСТИ В ЭЙЛЕРОВОМ И ЛАГРАНЖЕВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Система уравнений (2.3) записана в лабораторной системе отсчета: в эйлеровых переменных, привязанных к конкретным точкам физического пространства. Для наблюдаемых, выраженных в терминах таких переменных, обсуждавшиеся выше динамические режимы либо не зависят от времени (основное и вторичные стационарные течения), либо являются его периодическими функциями (течения, возникшие в ходе развития колебательных неустойчивостей). Гораздо более богатую динамику демонстрируют выражаемые через лагранжевы переменные наблюдаемые, соответствующие пассивным частицам, переносимым вдоль линий тока.

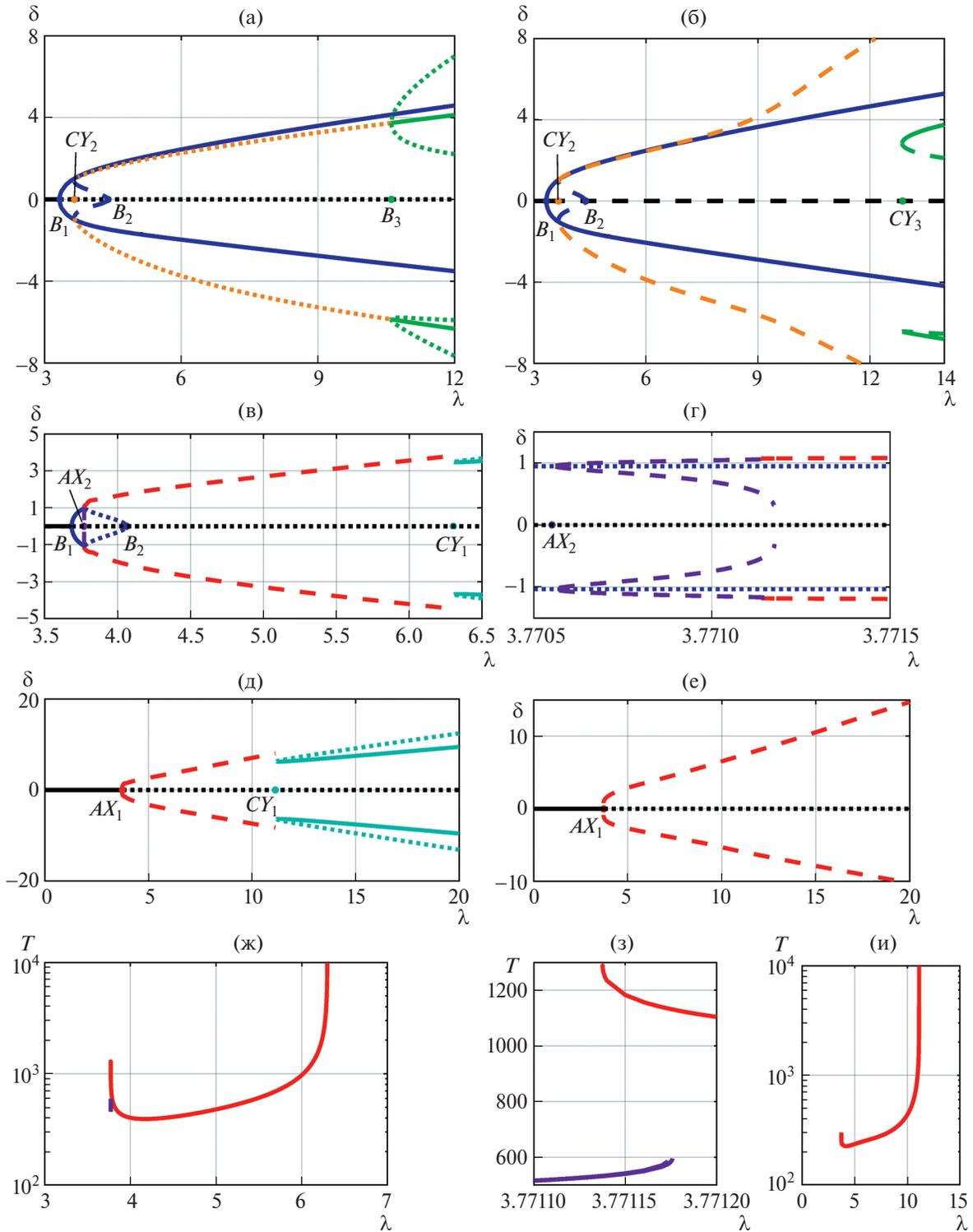
Транспортные уравнения таких частиц

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, t); \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, t).$$

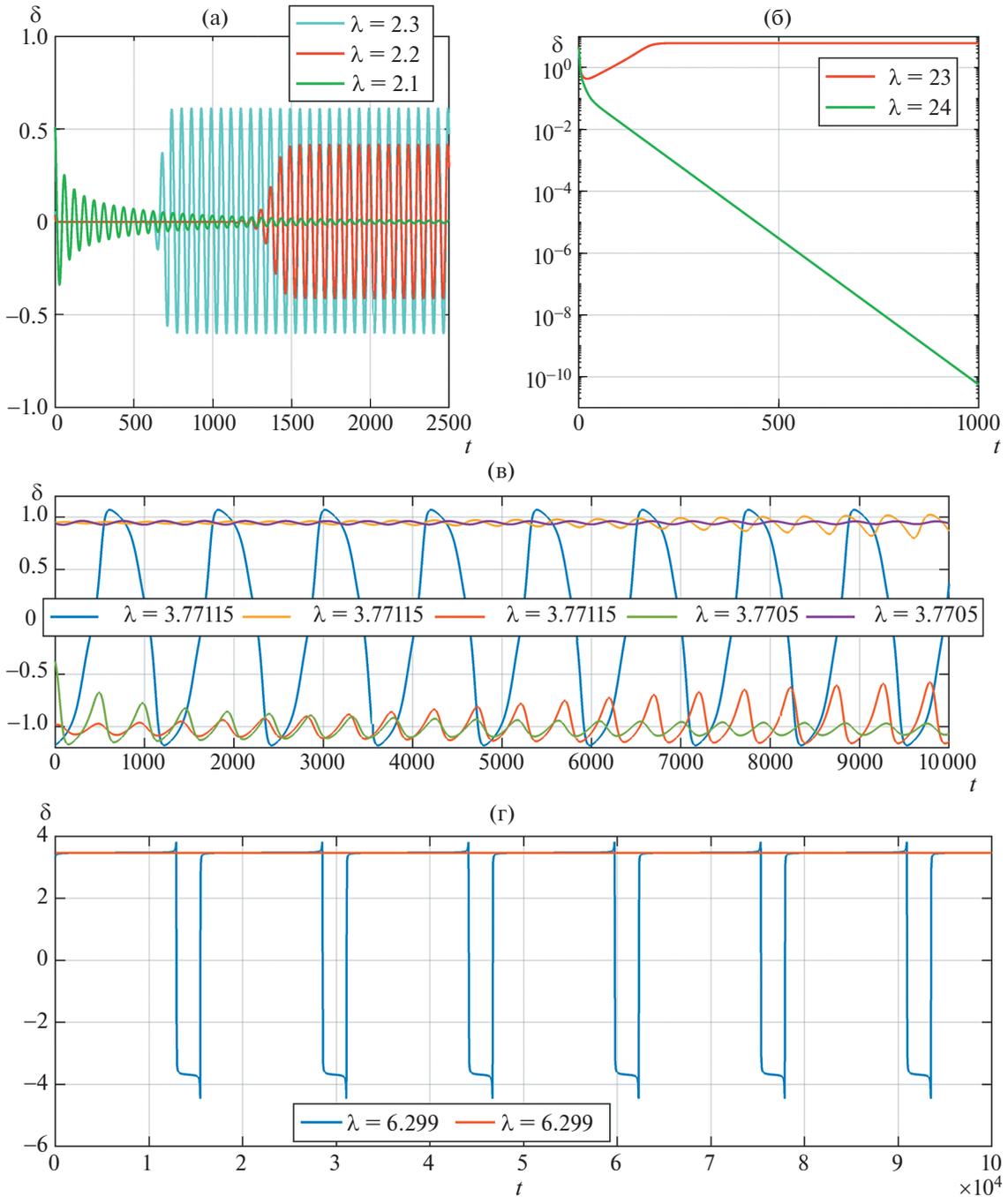
Они решались для поля скорости  $(v_x, v_y)$ , полученного численным интегрированием уравнений (2.3). Для визуализации лагранжевой динамики строились фазовые портреты в координатах  $(v_x, v_y, \Psi')$ .

Приводимые ниже результаты относятся к случаю  $l_x = 4\pi, l_y = 2\pi, M = 20, N = 20$ .

Начнем с поля скорости, не зависящего от времени. Уравнения лагранжевой динамики для любого двумерного стационарного течения несжимаемой жидкости задаются консервативной динамической системой с одной степенью свободы, в которой функция тока играет роль гамильтониана. Траектории лагранжевых частиц совпадают с линиями тока, и в случае отсутствия точек стагнации у течения (что для течения ZPK96 (2.1) соответствует  $\lambda < \lambda_{cr}$ ) лагранжева динамика



**Рис. 4.** Бифуркационные диаграммы  $\delta(\lambda)$  течения в ячейке периодичности  $l_x = 4\pi, l_y = 2\pi$  при фиксированном среднем расходе  $Re_y = 1$  и характерных значениях среднего расхода  $Re_x$ . Сплошные линии: устойчивые стационарные течения. Точечные линии: неустойчивые стационарные течения. Штриховые линии: устойчивые автоколебательные решения. Бифуркации  $B_{1,2,3}$  – вилочные бифуркации стационарных течений,  $CY_{1,2,3}$  – седлоузловые бифуркации конечноамплитудного рождения стационарных течений,  $AX_{1,2}$  – бифуркации Андронова–Хопфа (возникновение автоколебаний). (а):  $Re_x = 0$ ; (б):  $Re_x = 0.01$ ; (в, г):  $Re_x = 0.115$  (д):  $Re_x = 0.125$ ; (е):  $Re_x = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Панели (ж, з, и): Зависимость периода колебаний от амплитуды силы  $\lambda$ :  $Re_x = 0.115$  (ж, з) и  $Re_x = 0.125$  (и).



**Рис. 5.** Характерные зависимости отклонения от стационарного течения (2.1)  $\delta$  от времени: (а) – поведение возмущений вблизи порога колебательной неустойчивости  $AX_1$ :  $Re_x = 0.2$ ,  $Re_y = 0$  ( $\lambda_{cr} \cong 0.2$ ,  $\lambda_{oI} = 2.1$ ),  $\lambda = 2.1$  – затухание колебаний,  $\lambda = 2.2, 2.3$  – установление колебательного вторичного режима; (б) – поведение возмущений вблизи порога монотонной вилочной неустойчивости  $B_1$ :  $Re_x = 0.2$ ,  $Re_y = 5$  ( $\lambda_{cr} \cong 7.074$ ,  $\lambda_{m1} = 23.5$ ),  $\lambda = 23$  – затухание возмущений,  $\lambda = 24$  – установление стационарного вторичного режима (логарифмический масштаб по оси ординат); (в) – сосуществование трех устойчивых колебательных режимов вблизи бифуркации БТ:  $Re_x = 0.115$ ,  $Re_y = 1$  ( $\lambda_{cr} \cong 1.006$ ,  $\lambda_{o2} = 3.7705$ ); (г) – колебательные и стационарные режимы при бифуркации SNIC.  $Re_x = 0.115$ ,  $Re_y = 1$  ( $\lambda_{cr} \cong 1.006$ ,  $\lambda_{s1} = 6.3$ ).

может быть только периодической или квазипериодической, в зависимости от числа вращения  $\rho = Re_x/Re_y$ .

Спектр мощности скорости частиц в обоих случаях дискретен [18]. При рациональных числах вращения поверхность тора расслаивается на континуум неоднократно обходящих его замкнутых линий тока: каждая частица жидкости движется периодически, причем период этого движения зависит от линии тока. При иррациональных  $\rho$  имеет место эргодичность, и каждая траектория плотна на торе.

При  $\lambda > \lambda_{cr}$  в структуре линий тока появляются особые точки и траектории. Для ячейки периодичности размером  $2\pi m \times 2\pi n$  это  $2mn$  седловых точек и их сепаратрисы, ограничивающие  $2mn$  вихрей: зон локализованного течения, внутри каждой из которых находится стационарная эллиптическая точка, окруженная континуумом замкнутых линий тока. Траектории частиц из “глобальной компоненты” не могут проникнуть внутрь вихрей, а на границах вихрей около седловых точек происходит существенное замедление скорости частиц (время обтекания вихря имеет особенность логарифмического типа). Вследствие этого динамика лагранжевых частиц в глобальной компоненте существенно меняется. Поскольку при иррациональных числах вращения траектории глобальной компоненты всюду плотны в ней, они снова и снова возвращаются в окрестности седловых точек и снова покидают их: эффект многократных ускорений и замедлений аккумулируется, приводя к качественным переменам. Хотя из-за двумерности фазового пространства траектории лагранжевых частиц по-прежнему не могут быть хаотическими, они проявляют ряд необычных свойств, промежуточных между ламинарным и турбулентным течением: сингулярно-фрактальный характер спектра мощности, степенное убывание корреляций скорости и аномалии характеристик транспорта [12, 13].

Монотонные неустойчивости основного течения (2.1) не вносят качественных изменений в эту картину: они (так же как и бифуркация SNIC) порождают новые устойчивые стационарные поля скорости, причем любое стационарное течение, вне зависимости от деталей его структуры, по-прежнему характеризуется тем же числом вращения  $\rho$ , разбивается на глобальную и локализованные компоненты, а лагранжевы наблюдаемые в случае иррационального  $\rho$  демонстрируют декорреляцию и слабую неупорядоченность во времени.

Совершенно иной характер носят перемены, вызываемые колебательной неустойчивостью основного течения. Как отмечалось выше, такая неустойчивость наблюдается в широком диапазоне параметров, что приводит к появлению зависящего от времени вторичного течения (периодического в эйлеровых переменных). Периодическими по времени являются и режимы, рождающиеся с конечной амплитудой в результате бифуркации SNIC. Фазовое пространство системы, описывающей динамику лагранжевой частицы в периодически зависящем от времени плоском поле скорости, трехмерно. Поскольку система сохраняет фазовый объем, ее типичные траектории экспоненциально неустойчивы [19]. Это явление – хаотическая динамика частиц жидкости в полях скорости с простыми эйлеровыми свойствами – известно как “лагранжев хаос” или “хаотическая адвекция” [20].

Ниже мы ограничимся влиянием автоколебательного характера течения на общий вид лагранжевой траектории; влияние на спектральные и корреляционные характеристики скорости лагранжевой частицы будет рассмотрено в других публикациях.

Присутствие хаотических линий тока приводит к перемешиванию фазовых траекторий, которые могут проникать (при  $\lambda > \lambda_{cr}$ ) и в ранее недоступные области с вихрями. Как и прежде, детали процесса зависят от того, является ли число вращения  $\rho$  рациональным. До возникновения неустойчивости фазовое пространство двумерно и при рациональном  $\rho$  представляет из себя континуум замкнутых линий тока: “однооборотных” в компоненте течения, локализованной внутри вихрей, и многооборотных в глобальной компоненте. Появление нового масштаба времени, соответствующего периоду автоколебаний в эйлеровых переменных, делает фазовое пространство трехмерным, а континуумы периодических орбит превращаются в семейства двумерных так называемых КАМ-торов (торов Колмогорова-Арнольда-Мозера [21]). Новорожденные двумерные торы вложены друг в друга и образуют в трехмерном фазовом пространстве непроницаемую структуру: каждая частица жидкости квазипериодически движется вдоль поверхности соответствующего тора, не смещаясь поперек структуры. По мере интенсификации эйлеровских автоколебаний КАМ-торы начинают разрушаться, что ведет к постепенному исчезновению барьеров и расширению доли пространства, доступной каждой частице. По-видимому, первыми распадаются торы, лежащие вблизи седловых точек стагнации; это порождает (первоначально слабо) перемешивание между локализованной и глобальной компонентами течения. Разрушение торов приводит к хаотизации движения. Поначалу лагранжев хаос не глобален: существует множество хаотических компонент, между которыми нет обмена, поскольку каждая из них “зажата” между еще неразрушенными КАМ-торами. Некоторые из компонент соответствуют многократным

(в соответствии со знаменателем числа вращения) проходят через всю ячейку периодичности, в то время как другие ограничиваются слабо хаотизированными вращениями внутри бывших вихрей. Постепенно хаотические компоненты сливаются, и после разрушения последнего КАМ-тора все фазовое пространство делается доступным всем хаотическим траекториям.

В ситуации иррационального числа вращения картина несколько иная: здесь после перехода к автоколебаниям эйлеровских переменных континуум КАМ-торов возникает только в локализованной компоненте течения. Хаотизация глобального движения происходит около седловых неподвижных точек: их инвариантные многообразия ответственны за геометрию перемешивания в фазовом пространстве [22]. В результате по мере роста  $\lambda$  глобальные хаотические траектории все глубже проникают в бывшие внутренние области вихрей, где, тем временем, идет процесс разрушения КАМ-торов, и, в конечном счете, развитой лагранжев хаос занимает все фазовое пространство.

В рассматриваемой задаче это общее описание эволюции лагранжева хаоса при росте параметра справедливо для относительно высоких значений параметра  $Re_x$ : к примеру, при  $Re_y = 1$ , в области  $Re_x > 0.15$ . При более низких  $Re_x$  бифуркация SNIC резко прерывает механизм постепенного расширения области хаотической адвекции: автоколебания эйлеровских переменных прекращаются, и система возвращается к стационарным полям скорости, подобным вышеописанным.

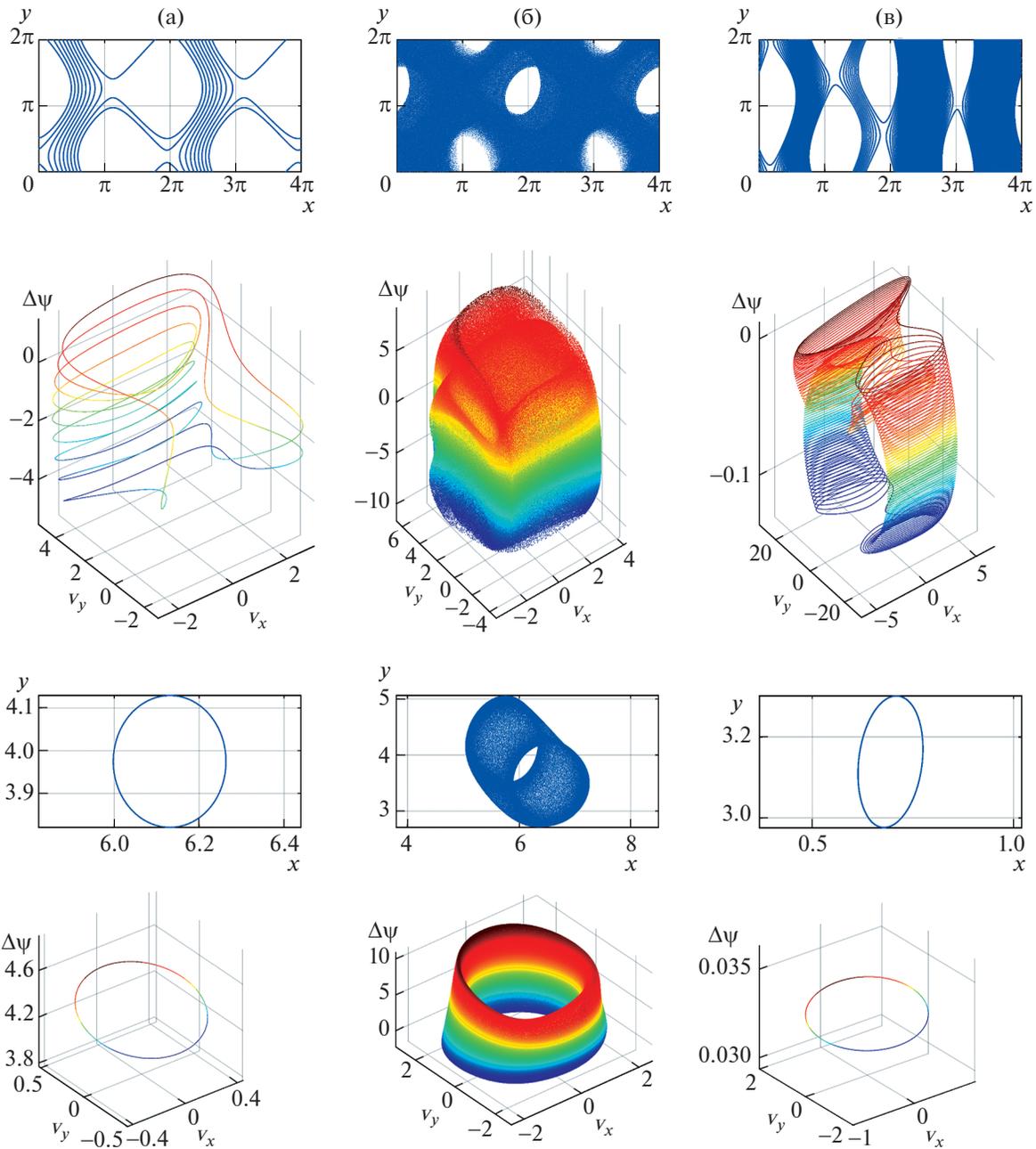
Рисунки 6 и 7 иллюстрируют эти переходы: при рациональном значении  $\rho$  переход к лагранжеву хаосу происходит от периодического решения (замкнутая орбита на торе) при  $\lambda < \lambda_{cr}$ , через квазипериодический режим, и затем к новому стационарному режиму после бифуркации SNIC (рис. 6), а при иррациональном — от квазипериодического режима при  $\lambda < \lambda_{cr}$ , через режим с сингулярно-фрактальным спектром (рис. 7).

Видно, что по мере роста амплитуды колебаний с увеличением  $\lambda$  площадь “запретной области” для лагранжевой траектории в окрестностях вихрей постепенно уменьшается и затем эта область исчезает. Ранее неявно предполагалось, что неустойчивость наступает при наличии вихрей. Возникновение лагранжевого хаоса при отсутствии вихрей, что, как отмечено выше, реализуется для некоторой области параметров  $(Re_x, Re_y)$ , имеет другой характер, соответствующий переходу от периодического или квазипериодического режима к хаотическому.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ устойчивости рассматриваемого семейства стационарных по времени пространственно-периодических плоских течений показал, что возникновение гидродинамической неустойчивости требует, чтобы длина хотя бы одной из сторон полости вмещала несколько периодов вынуждающей пространственной силы. В квадратной полости с длиной стороны, равной периоду силы, основное течение остается устойчивым в широком диапазоне амплитуд внешней силы и интенсивностей прокачки. В вытянутых полостях неустойчивость, возникающая при достаточно большой вынуждающей силе, может, в зависимости от величин среднего расхода жидкости в двух перпендикулярных направлениях, быть монотонной либо колебательной. В пространстве параметров задачи диаграмма состояний организована вокруг бифуркации Богданова-Тakensа, в которой два собственных числа линеаризации около основного течения одновременно обращаются в нуль. Лагранжева динамика пассивных частиц, переносимых нелинейными вторичными течениями, определяется отсутствием или наличием зависимости эйлеровского поля скорости от времени. Так, вторичные стационарные течения в результате повторяющихся медленных проходов частиц около точек застоя обладают теми же свойствами, что и основное течение: дальние временные корреляции, сингулярно-непрерывный Фурье-спектр скорости, аномальный перенос. Если же вторичные течения в эйлеровом представлении периодичны по времени, то достаточно высокие амплитуды внешней силы приводят к разрушению в фазовом пространстве задачи вложенных друг в друга КАМ-торов, и к установлению хаотической адвекции (“лагранжева хаоса”) пассивных частиц.

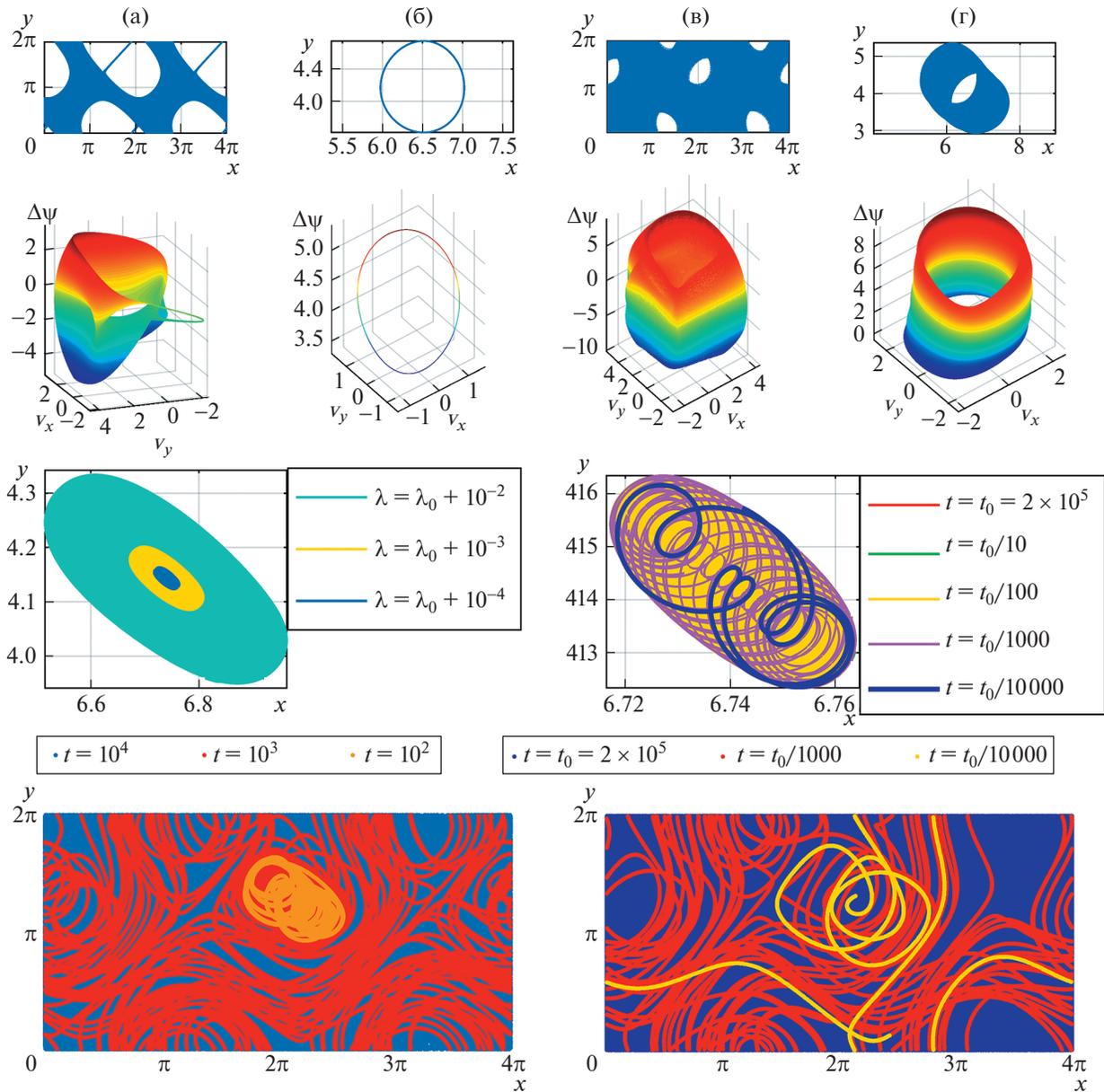
Общность обсуждаемых результатов не ограничена применявшимися соотношением сторон ячейки периодичности и простой геометрией вынуждающей силы. В рамках нашего подхода возможен расчет аналогичных бифуркационных диаграмм и для ячеек, у которых отношение длин сторон нецелочисленно; длины могут быть и несоизмеримы. Для возникновения вторичных течений, длина хотя бы одной из сторон ячейки должна превосходить пространственные периоды силы (которые могут и не совпадать друг с другом). Если сила явно зависит от более высоких Фурье-гармоник пространственных координат, структура основного стационарного тече-



**Рис. 6.** Варианты лагранжевой динамики при рациональном числе вращения  $\rho = 1/8$ :  $l_x = 4\pi$ ,  $l_y = 2\pi$ ,  $Re_x = 0.125$ ,  $Re_y = 1$ ;  $\lambda_{cr} = 1.008$ ,  $\lambda_{o1} = 3.737$ ,  $\lambda_{s1} = 11.20$ , вар. рис. 4 д.

По горизонтали сверху – глобальные траектории лагранжевых частиц, начинающиеся в точке (1,1); второй ряд – фазовые портреты для глобальных траекторий, третий ряд – траектории частиц, начинающиеся вблизи центра вихря, снизу – фазовые портреты для этих траекторий. Для рядов по вертикали амплитуды силы равны: (а) –  $\lambda = 3.7$ , (б) –  $\lambda = 3.8$ , (в) –  $\lambda = 20$ .

ния делается более сложной, содержащей вихри разного размера. С точки зрения лагранжевых характеристик – спектра мощности и корреляционных функций скорости частиц-трассеров – важна не геометрия силы, а отношение интенсивностей прокачки в перпендикулярных направлениях: при рациональных значениях этого отношения спектр у всех (!) стационарных течений дискретен, а корреляции не затухают. Напротив, иррациональность отношения интенсивностей прокачки влечет за собой наличие (сингулярно) непрерывной спектральной компоненты и алгебраическое затухание корреляций. В этой связи нужно отметить, что транспортные аномалии



**Рис. 7.** Варианты лагранжевой динамики при иррациональных числах вращения: ( $l_x = 4\pi$ ;  $l_y = 2\pi$ ). По горизонтали сверху – глобальные траектории лагранжевых частиц, второй ряд – фазовые портреты для этих траекторий, для следующих амплитуд силы и начальных точек: а)  $\lambda = 3.7$  ( $I, I$ ), б)  $\lambda = 3.7$  ( $б, 4$ ), в)  $\lambda = 3.728$  ( $I, I$ ), г)  $\lambda = 3.728$  ( $б, 3.75$ );  $Re_x = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $Re_y = 1$ ;  $\lambda_{cr} = 1.175$ ,  $\lambda_{ml} = 3.727$ .

Третий и четвертый ряды (д, е, ж, з) – изменение фазовых портретов для траекторий, начинающихся вблизи центра вихря, при росте амплитуды колебаний после колебательной потери устойчивости основного решения при  $\lambda = \lambda_0$ :  $R_x = 1$ ,  $R_y = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $\lambda_{cr} = 1.272$ ,  $\lambda_0 = 2.712561$ ; д)  $\lambda = \lambda_0 + 10^{-4}$ ;  $\lambda_0 + 10^{-3}$ ;  $\lambda_0 + 10^{-2}$ ; е)  $\lambda = \lambda_0 + 10^{-4}$ ; ж)  $\lambda = \lambda_0 + 3 \times 10^{-1}$ ; з)  $\lambda = \lambda_0 + 4 \times 10^{-1}$ .

при переносе частиц таким стационарным течением усиливаются, если в его структуре вихри, вращающиеся по часовой стрелке и против часовой стрелки, несбалансированы. Для нестационарных течений, развившихся в ходе колебательных неустойчивостей, количественные характеристики, разумеется, зависят от геометрии вынуждающей силы, однако общая картина перехода к лагранжеву хаосу остается неизменной.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-12010 ННИО\_а) и Немецкого Научно-исследовательского общества (DFG: Projekt ZA 658/3-1). Часть работы выполнена в рамках госбюджетной темы FUUS-2021-0001 “Междисциплинарные исследования в гидродинамике” (ИВ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обухов А.М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. Вып. 4 (232). С. 101–111.
2. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. № 6. С. 1700–1705.
3. *Юдович В.И.* Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 242–249.
4. *Непомнящий А.А.* Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. С. 836–841.
5. *Thess A.* Instabilities in two-dimensional spatially periodic flows. Part I: Kolmogorov flow // Physics of Fluids. 1992. A4. P. 1385–1395.
6. *Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V.* Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids. 2021. V. 33. 011704.
7. *Armbruster D., Heiland R., Kostelich E.J., Nicolaenko B.* Phase-space analysis of bursting behavior in Kolmogorov flow // Physica D. 1992. V. 58 (1). P. 392–401.
8. *Бондаренко Н.Ф., Гак М.З., Должанский Ф.В.* Лабораторная и теоретические модели плоского периодического течения // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1979. Т. 15. № 10. С. 1017–1026.
9. *Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 139–168.
10. *Cardoso O., Marteau D., and Tabeling P.* Quantitative experimental study of the free decay of quasi-two-dimensional turbulence // Physical Review E. 1994. V. 49. P. 454–461.
11. *Tithof J., Suri B., Pallantla R.K., Grigoriev R.O., Schatz M.F.* Bifurcations in a quasi-two-dimensional Kolmogorov-like flow // J. Fluid Mech. 2017. V. 828. P. 837–866.
12. *Zaks M.A., Pikovskiy A.S., Kurths J.* Steady viscous flow with fractal power spectrum // Physical Review Letters. 1996. V. 77. P. 4338–4341.
13. *Pöschke P., Sokolov I.M., Zaks M.A., Nepomnyashchy A.A.* Transport on intermediate time scales in flows with cat’s eye patterns // Physical Review E. 2017. V. 96 (6). 062128.
14. *Wertgeim I.I., Zaks M.A., Sagitov R.V., Sharifulin A.N.* Stability and nonlinear secondary modes of double-periodic flows with pumping // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publishing, 2020. V. 1675. № 1. P. 012002.
15. *Мелехов А.П., Ревина С.В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 41–56.
16. *Сagitov P.B., Шарифулин А.Н.* Бифуркации и устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямоугольной полости // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 2. С. 185–201.
17. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2002. 561 с.
18. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. Акад. Наук СССР. Сер. мат. 1953. Т. 93. С. 763–766.
19. *Arnold V.I.* Sur la Géométrie Différentielle des Groupes de Lie de Dimension Infinie et ses Applications a l’Hydrodynamique des Fluides Parfaits // Annales de l’Institut Fourier. 1966. V. XVI. P. 319–361.
20. *Aref H.* Stirring by Chaotic Advection. J. Fluid Mech. 1984. V. 143. P. 1–21.
21. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
22. *Rot-Kedar V.* Homoclinic tangles – classification and applications // Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 441–473.

УДК 532.517.4: 534.23

## АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ В ПРОЦЕССАХ СМЕШЕНИЯ И ШУМООБРАЗОВАНИЯ

© 2022 г. С. Ю. Крашенинников<sup>а,\*</sup>, П. А. Семенёв<sup>а</sup><sup>а</sup> Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

\*E-mail: krashenin@ciam.ru

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.

После доработки 15.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

На основе известных экспериментальных данных анализируются особенности динамических процессов в пульсационном движении в слое смешения дозвуковой турбулентной струи. Анализ построен на основании известного соотношения для порождения турбулентности в однородном градиентном потоке (без учета вязкости), с использованием экспериментальных данных о безразмерных распределениях осредненных параметров, характеризующих значения скорости и интенсивности пульсаций в плоском слое смешения. Рассматривается также возможность определения свойств слоя смешения турбулентной струи с привлечением анализа индуцируемого струей течения. Показано, что расширение слоя смешения определяется отношением значения корреляции пульсаций продольной и поперечной скорости к общей интенсивности пульсаций. Для определения основных характеристик рассматриваемого течения необходимо учесть динамическое взаимодействие струи и внешней среды, обусловленное понижением статического давления в слое смешения. При этом интенсивность пульсаций скорости связана с индуцируемым втеканием в струю и может быть определена. На основании анализа процесса понижения статического давления в струе подтверждены характерные размеры крупномасштабных неоднородностей в пульсационном движении в слое смешения, создающих акустические возмущения.

*Ключевые слова:* турбулентные струи, слой смешения, характеристики турбулентности, эволюция турбулентности, индуцированное течение, шумообразование

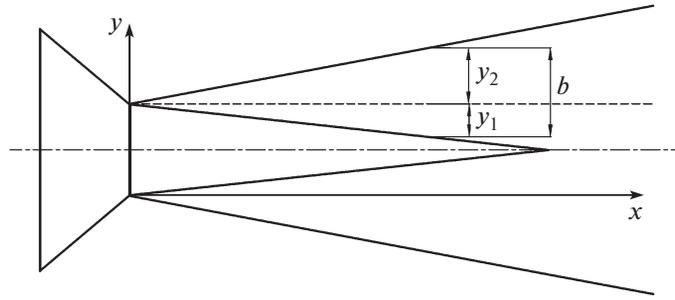
DOI: 10.31857/S0568528122040089

Согласно результатам многочисленных исследований затопленных турбулентных струй при дозвуковых скоростях истечения и числах Рейнольдса по параметрам истечения более  $10^5$ , слой смешения струи на удалении до 5 диаметров сопла имеет устойчивую и хорошо воспроизводимую в различных экспериментах структуру. Это относится к пространственному распределению характерных параметров течения. Возникает слой турбулентного смешения, свойства которого практически универсальны. Значение константы  $c$ , которая характеризует интенсивность нарастания толщины слоя смешения  $b: c = b_x^1$  с достаточной точностью воспроизводится в различных экспериментах. Значения параметров, характеризующих распределение осредненных и пульсационных компонент скорости также практически универсальны. Наблюдается также хорошая воспроизводимость акустических характеристик струй в различных экспериментах. Данные опытов показывают, что длина волны излучаемого шума в соответствующем сечении определяется линейным масштабом  $L \approx 1.5b$ .

Указанные константы являются “описательными”, их значения не отражают свойств турбулентности рассматриваемого течения. Тем не менее их определение или интерпретация, на основе свойств турбулентного “сдвигового” течения, является актуальной задачей. В монографии А.А. Таунсенда [1] изложены результаты анализа, предпринятого автором, направленного на установление взаимосвязи отдельных элементов турбулентного течения в струе, а также попытка независимо определить параметр, аналогичный интенсивности расширения слоя смешения.

Основным соотношением для описания порождения энергии турбулентности является соотношение для порождения турбулентности в потоке с поперечным градиентом скорости.

Использование этого соотношения для общего анализа структуры течения в слое смешения, по-видимому, является оправданным, поскольку оно описывает основной механизм генерации



**Рис. 1.** Схема течения в слое смешения в начальном участке плоской струи,  $x$  – продольная координата, отсчитываемая от кромки сопла,  $y$  – поперечная координата.

турбулентности [2] при пренебрежении вязкими эффектами. В [1] используется также, по-видимому, полученное экспериментально (но без каких-либо ссылок), отношение значения взаимной корреляции продольной и поперечной пульсационных скоростей к квадрату интенсивности пульсаций продольной скорости.

Этих соотношений оказывается недостаточно и Таунсенд в своем анализе использует представление слоя смешения в виде двух типов вихрей (“двойная структура течения”) – крупномасштабных, и более мелких, наполняющих среду, движущуюся под действием крупномасштабных пульсаций. При этом тем и другим вихрям приписываются свойства, определяющие их взаимодействие.

Итогом проведенного Таунсендом анализа явилось определение значений параметров, сходных с интенсивностью расширения слоя смешения, характеризующих “величину турбулентной вязкости”, а значит и интенсивность турбулентного смешения в слое смешения, с точностью около 50%. В анализе Таунсенда рассматриваются только свойства слоя смешения. Учет взаимодействия струи с внешней средой заменен упомянутыми, фактически гипотетическими, представлениями о свойствах вихревых структур.

Представленный далее анализ показывает, что при использовании относительных данных для автомодельных экспериментальных профилей распределения пульсаций и осредненной скорости можно с достаточной точностью определить основные характеристики турбулентного течения в слое смешения турбулентной струи, если учесть динамическое воздействие струи на окружающую среду.

Несмотря на то что именно Таунсенд указал на появление разрежения в слое смешения струи из-за наличия пульсаций скорости [1], возникающее при этом динамическое воздействие турбулентной струи на окружающую среду [3, 4] он не учитывает. В то время как учет появления понижения статического давления в слое смешения и возникновение, из-за этого, эффекта “всасывания” в струю [3] позволяет в целом представить физически обоснованную схему турбулентного течения в слое смешения струи, а также шумообразования при динамическом воздействии струи на окружающую среду. При этом появляется возможность независимого получения значений указанных ранее констант.

## 1. СХЕМА РАССМАТРИВАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ

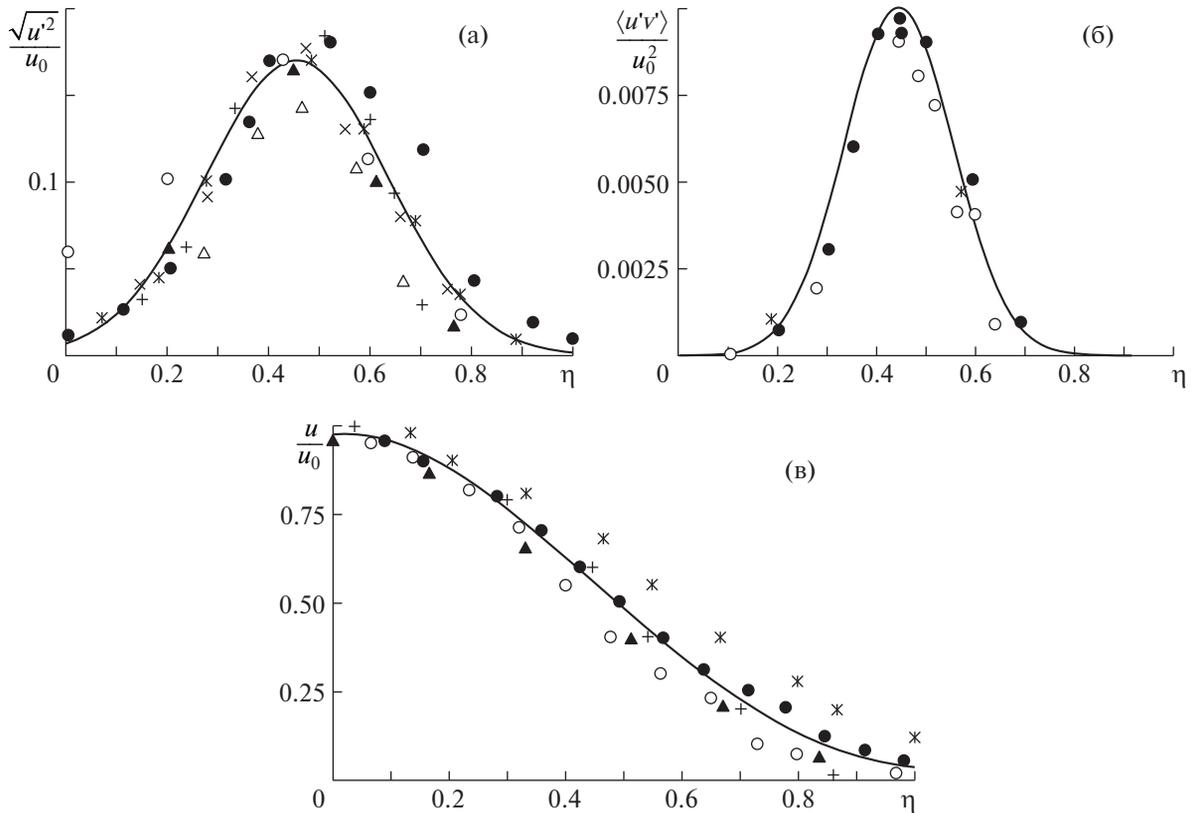
Так же, как и в [1], будет рассмотрен плоский слой смешения. На рис. 1 приведена общепринятая [5] схема течения в начальном участке затопленной турбулентной струи. В дальнейшем эта схема будет рассматриваться как основа схемы течения в плоском турбулентном слое смешения, в котором пульсационная структура трехмерная, а само течение плоское, слаборасширяющееся, при анализе которого применимо приближение пограничного слоя. Совокупность известных экспериментальных данных [5] показывает, что такое допущение приемлемо для определения основных параметров течения.

Для дальнейшего анализа потребуются данные о распределении пульсаций скорости в слое смешения. Они могут быть представлены в виде зависимости от поперечной координаты  $y$ , отсчитываемой от границы слоя смешения (внутренней)  $y_1$  до внешней границы струи  $y_2$

$$y_2 + |y_1| = b,$$

безразмерная поперечная координата  $\eta$  отсчитывается от внутренней границы слоя смешения:

$$\eta = y/b.$$



**Рис. 2.** Зависимости относительной интенсивности пульсаций продольной скорости  $\sqrt{u'^2}/u_0$  – (а), взаимной корреляции пульсаций продольной и поперечной скорости  $\langle u'v' \rangle / u_0^2$  – (б) и средней скорости  $u/u_0$  – (в) в слое смешения от безразмерной координаты  $\eta$ ;  $u_0$  – скорость истечения струи.

Значению  $\eta = (y_2 + |y_1|)/b = 1$  соответствует внешняя граница слоя смешения, расширяющегося по закону  $b'_x = \text{const}$ .

Обычно принимается, что

$$b'_x = 0.27-0.30.$$

Данные о распределении параметров в слое смешения взяты из [5], где приведены результаты экспериментов различных исследователей. При этом используется экспериментально установленное представление, что отличие распределения пульсационных параметров в слоях смешения в начальном участке плоских и осесимметричных струй находится в пределах разброса экспериментальных данных.

На рис. 2 приведены данные по распределению интенсивности турбулентных пульсаций скорости и средней скорости в различных сечениях слоя смешения:  $u_0$  – скорость истечения струи,  $u/u_0$  – относительная средняя продольная скорость,  $\sqrt{u'^2}/u_0$  – средние по времени значения интенсивности пульсаций продольной скорости и корреляции пульсаций продольной и поперечной скорости –  $\langle u'v' \rangle / u_0^2$ .

Представленные на рис. 2 данные позволяют в дальнейшем характеризовать распределения параметров по двум величинам: максимальное значение и интеграл от безразмерного распределения параметра по ширине слоя смешения.

По этим данным были определены значения соответствующих безразмерных величин, определяемых интегрированием профилей параметров

$$k_1 = \int_0^1 \frac{u}{u_0} d\eta, \quad k_2 = \int_0^1 \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 d\eta, \quad k_{eu} = \int_0^1 \frac{e^2}{e_m^2} \frac{u}{u_0} d\eta, \quad k_\tau = \int_0^1 \frac{u'v'}{(u'v')_m} d\eta,$$

**Таблица 1.** Значения параметров, использованные при расчетах(первая часть)

	$\epsilon_m$ по $u', v', w'$	$k_\epsilon$ по $u', v', w'$	$k_{eu}$	$k_\tau$	$e_m^2/u_0^2$
По экспериментальным данным из [5]	0.17, 0.153, 0.17	0.319–	0.175–0.193	0.25–0.27	0.04
По использованным соотношениям при $\epsilon_{vm} = \text{var}$		0.319	0.18–0.193	0.25–0.27	0.0395–0.045
Заданные параметры при $b'_x = 0.3$			0.18	0.25	

$$k_{v\epsilon} = \int_0^1 \frac{\epsilon_v^2}{\epsilon_{vm}^2} d\eta, \quad k_\epsilon = \int_0^1 \frac{\epsilon^2}{\epsilon_m^2} d\eta, \quad \eta = \frac{y + |y_1|}{b}.$$

Их использованные значения приведены в табл. 1.

Здесь  $e^2$  – энергии турбулентных пульсаций,  $\epsilon$  – интенсивность пульсаций скорости,  $\epsilon_m$  – ее максимальное значение. Индекс  $u$  соответствует продольной скорости,  $v$  и  $w$  – двум поперечным компонентам скорости, причем  $v$  – компонента вдоль оси  $y$ .

Согласно представленным и данным измерений [5] максимальное значение интенсивности пульсаций продольной скорости и поперечных пульсаций

$$\epsilon_{um} = \epsilon_{vm} \approx 0.17.$$

Соответствующие значения для поперечных пульсаций скорости в вертикальной плоскости  $\epsilon_{vm}$  ниже приблизительно на 10%. В дальнейшем будет принято распределение корреляции с максимальным значением

$$\langle u'v' \rangle_m \approx 0.01u_0^2.$$

В совокупности с данными рис. 1 и 2 оказываются определенными основные свойства слоя смешения, интенсивность нарастания потока массы и потока кинетической энергии. При использовании условия сохранения импульса  $J$  определяется положение границ слоя смешения в системе координат, отсчитываемых от кромки сопла (рис. 1)

Импульс

$$J = u_0^2 (H - y_{1a}) + \int_{y_1}^{y_2} u^2 dy = u_0^2 (H - y_{1a}) + bu_0^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\eta =$$

$$= u_0^2 (H - y_{1a}) + k_2 bu_0^2 = u_0^2 (H - y_{1a} + k_2 (y_2 + y_{1a})),$$

$$k_2 = \int_0^1 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\eta, \quad \eta = \frac{y + |y_1|}{b}, \quad y_{1a} = -y_1, \quad H - \text{полувысота сопла.}$$

(В условии сохранения импульса не учитывается статическое давление, поскольку его изменение незначительно).

Условие сохранения импульса

$$\frac{dJ}{dx} = 0, \quad \text{т.е.} \quad -y'_{1a} + k_2 y'_2 + k_2 y'_{1a} = 0, \quad y_2 + |y_1| = b,$$

отсюда

$$-y'_{1a} + k_2 b' = 0, \quad |y'_1| = k_2 b'. \tag{1}$$

Полученные соотношения показывают, что основные характеристики течения подчиняются условию линейного расширения слоя смешения, т.е.

$$b'_x = c = \text{const}. \tag{2}$$

**Таблица 2.** Значения параметров, использованные при расчетах (вторая часть)

	$k_1$	$k_2$	$b'_x$	$v_n/u_0$
По экспериментальным данным из [5]	0.6–0.5	0.45–0.358	0.27–0.3	0.0415
По использованным соотношениям при $\varepsilon_{vm} = \text{var}$	0.5	0.358	0.29–0.32	0.0395–0.0465
Заданные параметры при $b'_x = 0.3$	0.5	0.358		

Для получения значения констант в (1) и (2) необходимо привлечение данных о процессах турбулентного движения в слое смешения.

## 2. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

Согласно представлениям о порождении энергии турбулентных пульсаций скорости, используемым Таунсендом [1] и приводимых в монографиях [2, 6], в турбулентном сдвиговом слое (слое смешения) при пренебрежении вязкими эффектами для энергии турбулентных пульсаций  $e^2$  можно записать балансное соотношение

$$\frac{de^2}{dt} = u'v' \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

(Подразумеваются осредненные значения параметров и корреляции  $u'v'$ )

Это соотношение связывает интенсивность порождения энергии турбулентности с осредненными значениями градиента скорости и корреляции пульсаций продольной и поперечной скоростей (корреляция обращается в 0 в случае изотропной турбулентности).

В слаборасширяющемся течении для потока порожденной энергии пульсаций  $e^2u$  при  $x=ut$  из (3) получается

$$\frac{de^2u}{dx} = u'v' \frac{\partial u}{\partial y},$$

$u'v'$  – среднее по времени значение корреляции продольной и поперечной пульсационных скоростей.

В плоском случае

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_0}{b}.$$

Приближенность этих соотношений может быть учтена, в дальнейшем, с помощью поправочного коэффициента

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{u_0}{b}, \quad \frac{de^2u}{dx} = u'v' \frac{u_0}{b}, \quad b = b'_x x. \quad (4)$$

Интеграл по площади потока в слое смешения  $F$  будет

$$\frac{d}{dx} \int e^2 u dF = \int u'v' \frac{u_0}{b} dF, \quad F = b.$$

Окончательно получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^b e^2 u dy = \int_0^b u'v' \frac{u_0}{b} dy. \quad (5)$$

Чтобы раскрыть соотношение (5), используем экспериментально установленное свойство подобия профилей параметров в слое смешения.

Для энергии турбулентных пульсаций скорости примем

$$e^2 = \frac{\langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} u_\varepsilon^2. \quad (6)$$

(Здесь и в дальнейшем подразумеваются среднеквадратичные значения пульсационных параметров.)

Положим для максимального значения

$$\frac{3}{2} u_{\varepsilon m}^2 = e_m^2. \quad (7)$$

В соответствии с указанными ранее значениями интенсивности пульсаций

$$e_m^2 \approx 0.04 u_0^2.$$

Интеграл под знаком производной будет

$$\int_0^b e^2 u dy = b e_m^2 u_0 \int_0^1 \frac{e^2}{e_m^2} \frac{u}{u_0} d\eta. \quad (8)$$

В итоге определится связь интенсивности расширения слоя смешения и параметров течения. В соответствии с (5)–(7) после дифференцирования в (8)

$$b'_x e_m^2 u_0 \int_0^1 \frac{e^2}{e_m^2} \frac{u}{u_0} d\eta = u_0 (u' v')_m \int_0^1 \frac{u' v'}{(u' v')_m} d\eta. \quad (9)$$

Это соотношение показывает, что интенсивность расширения слоя смешения в первую очередь определяется отношением корреляции  $u' v'$  к общей интенсивности пульсаций, определяемой величиной  $e^2$ .

Преобразуя соотношение (9), получаем

$$b'_x = \frac{k_\tau}{k_{eu}} \frac{(u' v')_m}{e_m^2}, \quad k_\tau = \int_0^1 \frac{u' v'}{(u' v')_m} d\eta, \quad k_{eu} = \int_0^1 \frac{e^2}{e_m^2} \frac{u}{u_0} d\eta, \quad (10)$$

$$\frac{(u' v')_m}{e_m^2} = \theta. \quad (11)$$

Если принять, что максимальное осредненное значение корреляции  $u' v'$  в 4 раза меньше максимального значения  $e^2$ , то общепринятое значение  $b'_x$  будет приблизительно соответствовать представленным соотношениям. Можно более точно согласовать значение  $b'_x$  с экспериментальными данными, например, для осесимметричной струи, используя параметр  $\gamma$ . Значение  $b'_x \approx 0.3$  имеет место при  $\gamma = 0.86$ .

В [1] (без конкретной ссылки) приводится соотношение

$$\frac{\langle u' v' \rangle_m}{u_0^2} = 0.4 \left\langle \frac{u_m'^2}{u_0^2} \right\rangle.$$

По-видимому, Таунсенд предполагает, что это соотношение выражает определенное свойство турбулентности в рассматриваемом течении. Следуя этому представлению, в дальнейшем, значение параметра  $\theta$  будет приниматься неизменным.

Если обратиться к данным работ [1, 5, 7], где приведены результаты соответствующих измерений, то согласно этим данным

$$\frac{\langle u' v' \rangle_m}{u_0^2} \approx 0.01.$$

Это согласуется с указанным значением отношения величин  $u' v'$  и  $e_m^2$  (см. рис. 2).

Таким образом, интенсивность расширения слоя смешения в первую очередь зависит от относительного вклада порождения энергии турбулентных пульсаций, который определяется па-

раметром  $\theta$ . Интенсивность расширения слоя смешения оказывается зависящей от двух параметров:  $\theta$  и  $k_\tau/k_{eu}$ . Первую из этих относительных величин можно считать универсальной [1], а вторая зависит от профилей продольной скорости, которые могут различаться для плоского и осесимметричного течений.

В этом случае ( $\theta = \text{const}$ ) согласно соотношениям (10)–(11), уровень пульсаций скорости не проявляется в интенсивности расширения слоя смешения и эти соотношения не позволяют определить уровень турбулентных пульсаций скорости. Для его определения необходимо учесть взаимодействие слоя смешения с внешней средой.

### 3. ВТЕКАНИЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ В СЛОЙ СМЕШЕНИЯ

Расширение слоя смешения обусловлено вовлечением окружающей среды. Представленная выше схема течения позволяет связать интенсивность расширения слоя смешения и нарастание потока массы в струе и интенсивность втекания в слой смешения.

Поток массы в слое смешения

$$G_b = \int_{y_1}^{y_2} u dy = u_0 b \int_0^1 \frac{u}{u_0} d\eta.$$

Его увеличение происходит за счет втекания через внешнюю границу со скоростью  $v_n$  и через внутреннюю границу  $y_1$  со скоростью  $u_0$

$$\begin{aligned} \frac{dG_b}{dx} &= \frac{db}{dx} u_0 k_1 = v + u_0 \frac{d|y_1|}{dx}, & k_1 &= \int_0^1 \frac{u}{u_0} d\eta, \\ v_n &= b'_x u_0 k_1 - u_0 b'_x k_2, & k_2 &= \int_0^1 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

(Можно отметить, что при возможных, согласно [5], значениях интегралов  $k_1 \approx 0.5$  и  $k_2 \approx 0.358$  и  $b'_x = 0.3$  величина скорости втекания

$$v_n \approx 0.043u_0,$$

что соответствует известным экспериментальным данным [5, 7, 8]).

Согласно результатам специальных исследований [3, 4, 8] втекание внешней среды в слой смешения происходит под действием перепада статического давления, возникающего из-за пульсационного движения в слое смешения.

Рассматривая осредненные уравнения Рейнольдса в приближении пограничного слоя при больших числах Рейнольдса, Таунсенд показал, что в слое смешения возникает разрежение  $\Delta P$ , зависящее от поперечной координаты

$$\Delta P = P - P_a = \rho^* \langle v'^2 \rangle. \quad (13)$$

Здесь  $P$  – среднее значение статического давления,  $P_a$  – статическое давление в окружающей среде.

Это следует из уравнений Рейнольдса для осредненных параметров течения в слабо расширяющемся слое смешения [1, 3]. В этом случае  $v = u$ ,  $\partial/\partial x = \partial/\partial y$ . Слой считается плоским

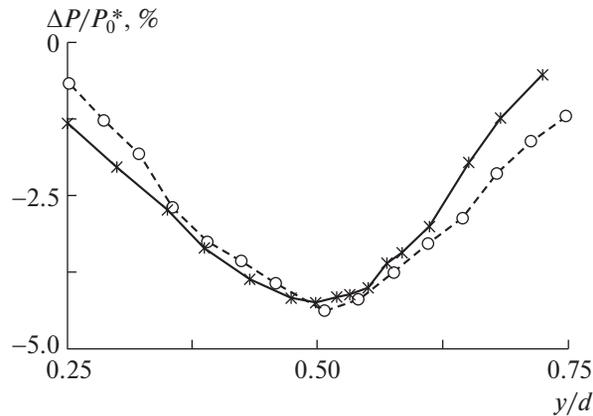
$$\frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \approx \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

при больших числах Рейнольдса

$$\rho \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \approx \frac{dP}{dy}.$$

Отсюда следует (13). (Схожее соотношение приведено в [2] в разделе “Неизотропная свободная турбулентность”).

Разрежение возникает вследствие турбулизации течения, по-видимому, как результат энергетического баланса пульсационного движения.



**Рис. 3.** Сопоставление результатов измерений статического давления в слое смешения турбулентной струи (кружки) с данными, полученными по результатам измерения пульсаций поперечной скорости (звездочки),  $P_0^*$  – скоростной напор в струе.

Специально проведенные эксперименты [3, 4] подтверждают этот эффект. На рис. 3 приведены результаты измерений распределения среднего по времени статического давления в поперечном сечении слоя смешения при их сопоставлении с данными одновременных измерений поперечных пульсаций скорости [4].

В разделе монографии [5], написанном Г.Н. Абрамовичем, рассматривается возможность существования, в процессе вихреобразования в слое смешения турбулентной струи, областей с пониженным статическим давлением. При этом характерный размер этих областей близок к характерной толщине слоя смешения.

В работах [3, 4, 8] показано, что динамическое воздействие распространяющейся турбулентной струи на окружающую среду, в которой происходит ее распространение, формируется при непосредственном воздействии локального разрежения на движение внешней среды. Она приводится в движение из-за перепада давления, определяемого соотношением (13). Следует заметить, что в представленных зависимостях речь идет об осредненных параметрах течения. При этом механизм воздействия разрежения в струе на внешнюю среду имеет пульсационный характер, как и все течение в слое смешения струи. На рис. 4 показана “мгновенная” картина течения в слое смешения, полученная по результатам вычислительного эксперимента, представленным в [3, 4].

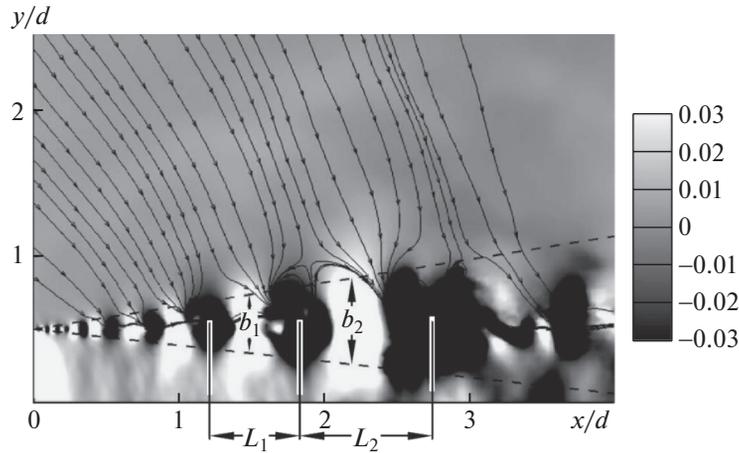
На рис. 4 иллюстрируется “мгновенное” распределение статического давления с помощью обозначения величины давления различным уровнем серого. Темный фон соответствует разрежению, светлый – превышению давления над его величиной во внешней среде.

Можно видеть крупномасштабные области повышенного и пониженного давления. Сравнение данных для различных моментов времени [3, 4] показывает, что эти области, медленно изменяясь по форме, постепенно увеличиваясь, движутся вдоль потока со скоростью конвекции, которая составляет около половины скорости истечения. При этом среднее по времени значение давления в каждой (неподвижной) точке слоя смешения ниже атмосферного и соответствует данным рис. 3 и соотношениям (13). То есть на удалении от слоя смешения интенсивность индуцируемого течения определяется осредненным значением разрежения в струе. В то же время в непосредственной близости к слою смешения поток трансформируется.

На рис. 4 показано “мгновенное” положение линий тока втекающей жидкости, полученных по значениям поперечной компоненты скорости в вертикальной плоскости. Можно видеть, что втекание в слой смешения происходит под действием перепада давления: линии тока огибают области повышенного давления и “устремляются” к областям с пониженным давлением.

В работах [3, 4, 8] показано, что скорость втекания внешней среды в слой смешения может быть определена по соотношению, в котором характерное среднее значение разрежения связано с максимальной интенсивностью пульсаций

$$v_n = \beta \sqrt{|\Delta P_m| / \rho} \quad \text{или} \quad v_n = \beta u_0 \epsilon_{vm},$$



**Рис. 4.** Мгновенное распределение статического давления, темный цвет – разрежение, светлый – превышение давления относительно внешней среды. Сплошные линии – линии тока, штриховые – границы слоя смешения для  $b \approx 0.27x$ . Диаграмма справа – уровень перепада давления по отношению к скоростному напору струи.  $L_1/b_1 = 1.55$ ;  $L_2/b_2 = 1.5$ .

здесь  $\beta$  – экспериментальный коэффициент, значение которого для осесимметричных течений  $\beta \approx 0.2$  [3, 4].

В рассматриваемом случае, для плоского течения, значение  $\beta$  может быть другим. Его значение, в этом случае, можно определить по вычисляемой по балансу расходов величине скорости втекания  $v_n$  и известной из экспериментов [5, 7] величины  $\varepsilon_v$  – интенсивности поперечных пульсаций скорости.

Отличие этого коэффициента от единицы связано с тем, что уровень понижения статического давления распределен в слое смешения также, как и уровень пульсаций, как это показано на рис. 3. Можно предположить, что “всасывающее” действие этого перепада статического давления характеризуется его осредненным значением в поперечном сечении слоя смешения, если проводить осреднение по величине индуцированной скорости  $v_i$

$$v_i = \sqrt{|\Delta P_m|/\rho} = u_0 \varepsilon_v = \sqrt{\langle v'^2 \rangle}. \quad (14)$$

Обращаясь к картине течения на рис. 4 можно видеть, что при втекании внешней среды поток дополнительно ускоряется из-за того, что поток огибает области повышенного статического давления. Протяженность областей повышенного и пониженного давления одинакова и среднее значение скорости индуцированного потока на некотором удалении.

$$v_n \approx \frac{1}{2} v_i. \quad (15)$$

Тогда для значения скорости втекания получается соотношение

$$v_i^2 \approx \langle v'^2 \rangle = u_0^2 \varepsilon_{vm}^2 \int_0^1 \frac{\varepsilon_v^2}{\varepsilon_{vm}^2} d\eta = u_0^2 \varepsilon_{vm}^2 k_{vm}.$$

Для плоского слоя смешения получается при использовании данных о распределении пульсаций скорости [5, 7]:

$$v_i^2 \approx u_0^2 \varepsilon_{vm}^2 \cdot 0.319.$$

(Принимается, что безразмерный профиль интенсивности поперечных пульсаций скорости такой же, как и продольной)

В соответствии с (15)

$$v_n \approx 0.565 u_0 \varepsilon_{vm} / 2. \quad (16)$$

Если принять, что в плоском слое смешения интенсивность пульсаций скорости несколько больше, чем по данным для осесимметричных струй, приведенных выше, можно задаться значением  $\epsilon_{vm} \approx 0.165$ , близким к данным для продольной скорости.

Тогда

$$v_n \approx 0.0465u_0.$$

Такое значение скорости втекания соответствует известным данным.

Учет рассмотренного механизма образования общей структуры движения среды для слоя смешения позволяет конкретизировать связь интенсивности расширения слоя смешения струи с интенсивностью пульсаций скорости.

Кроме того, данные рис. 4 позволяют определить характерные размеры движущихся в слое смешения динамических неоднородностей. На рисунке обозначены характерные размеры движущихся неоднородностей  $L_1$  и  $L_2$ , определенных по расстоянию между “центрами” областей с пониженным давлением. Для этих неоднородностей статического давления показаны характерные значения ширины слоя смешения  $b_1$  и  $b_2$ . Можно видеть, что относительный размер общей неоднородности распределения статического давления

$$\frac{L_1}{b_1} \approx \frac{L_2}{b_2} \approx 1.5.$$

То есть, в слое смешения

$$L/b \approx 1.5. \quad (17)$$

Для характерной ширины слоя смешения на рис. 4  $b = 0.27x$ . В этом случае

$$L \approx 0.38x. \quad (18)$$

Следует отметить, что в случае формирования какой-либо неоднородности в расширяющемся слое смешения из двух, расположенных рядом и имеющих размер, близкий к ширине слоя смешения для каждой, общий размер неоднородности будет соответствовать (17).

#### 4. О ФОРМИРОВАНИИ ИСТОЧНИКОВ ШУМА ПРИ ВТЕКАНИИ (“ВСАСЫВАНИИ”) ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ В СЛОЙ СМЕШЕНИЯ

Анализ процессов, связанных с наличием в слое смешения движущихся неоднородностей статического давления, позволяет объяснить отдельные свойства процесса шумообразования в струях. Распространение турбулентной струи происходит при ее динамическом воздействии на окружающую среду [3, 4]. Струя создает шум при своем воздействии на внешнюю среду. Акустические возмущения образуются из-за крупномасштабных пульсаций, возникающих в слое смешения [9]. Согласно общим представлениям, возникновение акустических пульсаций обусловлено периодическими процессами гидродинамического происхождения [10].

Такие периодические процессы наблюдаются при корреляционных термоанемометрических измерениях в слое смешения [11–13]. В [13] приведены результаты корреляционных измерений, которые обнаруживают на фоне турбулентных пульсаций периодические пульсации скорости. Эти и аналогичные измерения показывают, что в слое смешения в фиксированных сечениях струи наблюдается продольное движение динамических образований, имеющих характерный продольный масштаб  $L$  и конвективную скорость движения  $u_c$  порядка  $(0.5...0.6)u_0$ . Измерения показывают, что характерный продольный размер этих неоднородностей [11, 12] существенно превышает ширину слоя смешения, и, в соответствии с результатами измерений, соответствует соотношению  $L \approx 0.38x$ , что соответствует (18) и приблизительно в полтора раза больше ширины слоя смешения в данном сечении струи (см. рис. 4).

В [12, 14, 15] представлены результаты экспериментов, в которых определялось положение источников шума для фиксированных частот в затопленных струях.

Проводились фазовые измерения в акустическом поле дозвуковых турбулентных струй, выполнявшиеся несколькими взаимно удаленными микрофонами. По разнице фаз определялось положение источника для заданной частоты. В результате измерений установлена зависимость

частоты излучения от удаления соответствующего сечения струи от среза сопла. Безразмерная частота излучения определяется соотношением:

$$Sh = \frac{fd}{u_0} \approx 1.55 \frac{d}{x}. \quad (19)$$

Здесь  $d$  – диаметр сопла,  $x$  – расстояние от среза сопла.

Можно показать, что этот результат соответствует определенному выше продольному размеру динамических неоднородностей в слое смешения  $L$ .

Эти данные согласуются с результатами определения характеристик периодического движения в слое смешения струи. Они были определены в [12].

Частота пульсаций  $f$ , создаваемых неоднородностями, движущимися непрерывным потоком в сечении струи, соответствует периоду их прохождения  $T$  в данном сечении. Он определяется скоростью движения  $u_c$  и продольным размером этих неоднородностей  $L_f$ :

$$T = \frac{L_f}{u_c}.$$

Частота пульсаций будет

$$f = \frac{1}{T} = \frac{u_c}{L_f}. \quad (20)$$

Как уже указывалось, скорость движения неоднородности, определявшаяся в экспериментах

$$u_c \approx 0.6u_0.$$

Она практически совпадает со значением средней скорости в слое смешения на линии, продолжающей кромку сопла.

Сопоставляя (19) и (20), получаем

$$L_f = 0.385x.$$

Значение характерного продольного масштаба неоднородностей, формирующих акустическое излучение, совпадает со значением масштаба  $L$  из (18), соответствующего продольному характерному размеру движущихся неоднородностей статического давления.

Положение сечения, в котором формируется звуковое излучение заданной длины волны, согласно (17)–(20) определяется соотношением для числа Струхала, полученным по данным опытов и вычислительного эксперимента в [12–16].

Объяснение того, почему размер гидродинамической неоднородности, создающей звуковые возмущения, имеет такую величину и существенно превосходит ширину слоя смешения, связано с имеющими место упомянутыми ранее медленно изменяющимися неоднородностями в распределении статического давления.

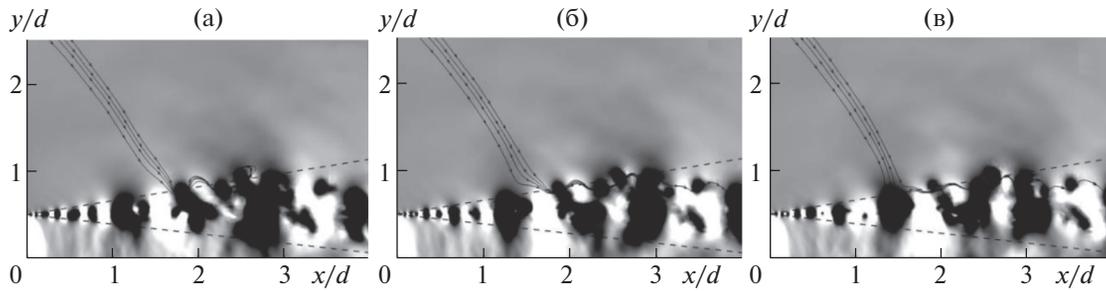
На рис. 5 приведены картины течения в слое смешения из [13], полученные для одного периода движения неоднородностей в слое смешения струи. Показана последовательность положения линий тока, вовлекаемых областью пониженного давления в начальный, промежуточный и конечный моменты времени рассматриваемого периода. Согласно результатам сравнения полученных данных и корреляционных измерений, представленных в [13], период этих перемещений линий тока соответствует зависимости (20).

Данные рис. 5 показывают, что “движущаяся неоднородность” статического давления состоит из двух частей, каждая из которых имеет размер, близкий к ширине слоя смешения в соответствующем сечении струи (см. также рис. 4). Экстремальные значения статического давления могут составить для максимума 10–15% от скоростного напора струи, для минимума – 15–20% скоростного напора.

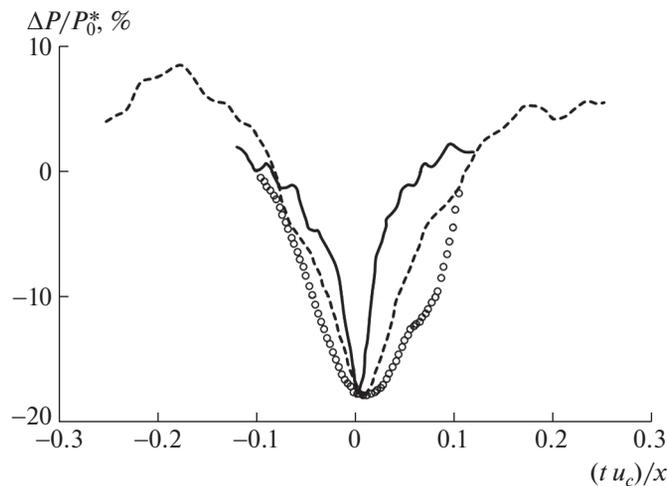
Первоначально [4] появились данные о значительных неоднородностях и больших величинах изменения статического давления в пульсационном движении в слое смешения струи, полученные при использовании вычислительного моделирования.

Эти данные стимулировали проведение соответствующих измерений с помощью высокочувствительных и малоинерционных датчиков статического давления.

На рис. 6 приведены результаты измерений и расчета “мгновенных” распределений статического давления из [3, 4].



**Рис. 5.** Последовательность картин течения в слое смешения турбулентной струи по результатам расчетов “мгновенных” распределений статического давления (см. рис. 3).



**Рис. 6.** Продольное распределение статического давления в середине слоя смешения в системе координат, движущейся с потоком: эксперимент: штриховая линия –  $x/d = 2.2$ ; сплошная линия –  $x/d = 4.2$ ; расчет: маркеры –  $x/d = 1.6$ .

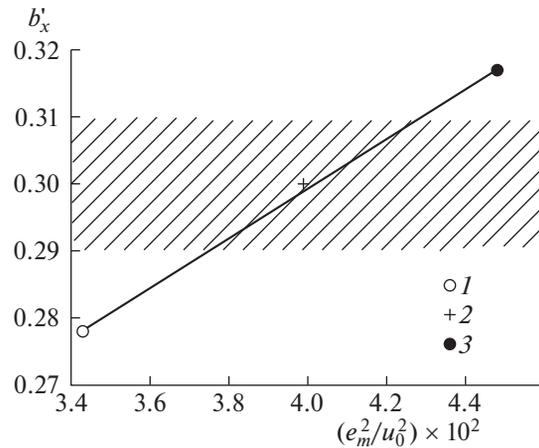
Следует заметить, что представленные на рис. 6 данные получены при определении экстремальных значений статического давления в динамических неоднородностях потока, независимо от данных рис. 4–5. Согласно измерениям, среднее значение давления соответствует соотношению Таунсенда (13), см. также рис. 3.

Данные рис. 6 также показывают, что характерный размер неоднородности, включающий в себя области повышенного и пониженного давления, соответствует упомянутым данным корреляционных измерений пульсаций скорости [12] и приблизительно в 1.5 раза превышает ширину слоя смешения (17).

### 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ СМЕШЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Турбулентная струя приводит в движение окружающую среду, возникает эффект эжекции с втеканием в струю внешней среды [3–5].

Согласно результатам исследований [3, 4], проведенных на основе измерительных и вычислительных экспериментов, динамическое взаимодействие турбулентной струи с окружающей средой обусловлено пониженным статическим давлением в зоне турбулентных пульсаций. При втекании в струю возникает взаимодействие турбулентного и нетурбулентного потоков. Последний турбулизуется при таком взаимодействии. Это должно снижать уровень турбулентных пульсаций в турбулентном потоке в слое смешения. При понижении уровня турбулентных пульсаций будет снижаться, согласно (13), (14), “всасывающее” воздействие. Это обозначает, что в реаль-



**Рис. 7.** Область значений интенсивности расширения слоя смешения  $b'_x$  и относительная скорость втекания в слой смешения  $v_n^o = v_n/u_0$  в зависимости от максимального значения энергии пульсаций скорости  $e_m^2$ .  
 1 –  $v_n^o = 0.0395$ ; 2 –  $v_n^o = 0.0425$ ; 3 –  $v_n^o = 0.0465$ .

ных условиях существует равновесие между уровнем пульсаций скорости и уровнем скорости втекания в струю. То есть полученные данные о порождении энергии турбулентности в слое смешения и связи эффекта втекания в струю с интенсивностью пульсаций скорости позволяют в целом охарактеризовать основные параметры рассматриваемого течения в плоском слое смешения.

Данные разделов 3 и 4 позволяют связать значение интенсивности пульсаций в слое смешения и значение скорости втекания в струю при эжекции. Для этого можно воспользоваться соотношениями (10), (11) для интенсивности расширения слоя смешения:

$$b'_x = \frac{k_\tau}{k_{eu}} \frac{(u' v')_m}{e_m^2}.$$

Представленное соотношение не позволяет определить уровень интенсивности пульсаций, в слое смешения, поскольку при принятой схеме процесса порождения турбулентности в слое смешения, логично сделать предположение, что отношение максимальных значений корреляции и энергии турбулентных пульсаций скорости универсально. Интенсивность турбулентных пульсаций скорости может быть определена только по скорости втекания в струю  $v_n$ .

Скорость втекания связана с интенсивностью расширения слоя смешения – соотношение (12)

$$v_n = b'_x u_0 k_1 - u_0 b'_x k_2.$$

Определить характерное значение интенсивности пульсаций скорости можно подбором значения  $\epsilon_{vm}$ , при котором удовлетворялись бы соотношение (12), и, с учетом поправки на коэффициент  $\gamma$ , соотношения (10), (11), см. (4).

При этом проявляется влияние профиля распределения продольной скорости в слое смешения, по которому определяются коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ . При известных значениях  $k_1$  и  $k_2$ , которые были определены по данным, представленным в разд. 1, по значению  $v_n$  определяется величина  $b'_x$ , которая должна соответствовать соотношению (10).

На рис. 7 заштрихованной областью показан диапазон значений интенсивности расширения слоя смешения  $b'_x$ , который соответствует возможному диапазону неточности в определении параметров в соотношениях (10) и (11). Сюда входят параметры  $k_\tau$ ,  $k_{eu}$ ,  $\theta$  и  $\gamma$ .

Значения последних не варьировались  $\theta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.86$ . Варьировались коэффициенты  $k_\tau$  и  $k_{eu}$ , при  $b'_x = 0.3$  отношение  $k_\tau/k_{eu}$  составляло 1.38.

Для скорости втекания было получено соотношение, связывающее ее значение с интенсивностью турбулентных пульсаций поперечной скорости (14, 15)

$$v_n \approx \frac{1}{2} v_i, \quad v_i^2 \approx \langle v^2 \rangle = u_0^2 \epsilon_{vm}^2 \int_0^1 \frac{\epsilon_v^2}{\epsilon_{vm}^2} d\eta = u_0^2 \epsilon_{vm}^2 k_{vm}.$$

При этом нужно учесть, что согласно данным экспериментов уровень пульсаций поперечной скорости приблизительно на 10% ниже, чем для других компонент пульсационного движения.

В табл. 1 (первая часть) приведены значения параметров, характеризующих свойства течения в слое смешения в начальном участке турбулентной затопленной струи, по данным, приведенным в [5].

В табл. 1 (вторая часть), для сравнения, приведены данные, полученные в результате независимого определения параметров течения в плоском слое смешения по соотношениям (6), (10), (12), (14), (15). Для этого последовательно подбирались значения интенсивности пульсаций с использованием соотношений (14), (15) для определения скорости  $v_m$ , чтобы одновременно удовлетворялись соотношения (12) и (6). Значение  $\varepsilon_m$  вычислялось по (6)–(7). При этом принималось, что максимальные значения интенсивности пульсаций одинаковы для  $u'$  и  $w'$ , а интенсивность пульсаций поперечной скорости  $v$  (в соответствии с данными [5]) меньше. Достаточно хорошее взаимное согласование данных получено при использовании предположения, что в плоском слое смешения уровень пульсаций несколько выше, чем в слое смешения осесимметричной струи.

В табл. 1 представлен итог исследования свойств течения в слое смешения в начальном участке турбулентной струи, которое позволяет обозначить основные параметры, определяющие его свойства.

Для получения значения интенсивности расширения слоя смешения использована известная закономерность для порождения энергии турбулентности в однородном градиентном потоке, без учета вязкости. При этом оказалось необходимым сделать дополнительное, хотя и достаточно очевидное, предположение физического характера. Нужно знать соотношение между корреляцией  $\langle u'v' \rangle$  и энергией турбулентности  $e^2$ . Его характеризует параметр  $\theta$ , известный из эксперимента ( $\theta \approx 0.01$ ). Определяемая при этом интенсивность расширения струи  $b'_x$  удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, но при этом уровень турбулентных пульсаций скорости остается неизвестным.

Для его определения необходимо использование модели течения, основанной на представлении общей картины течения, как динамического взаимодействия слоя смешения с внешней средой из-за всасывающего действия струи.

Для конкретного определения параметров, характеризующих свойства слоя смешения, достаточно данных о профилях распределения интенсивности турбулентных пульсаций скорости и средней скорости в слое смешения и общей схемы течения.

В соответствии с рис. 7, проведенный анализ показывает, что для реальных значений актуальных параметров течения в слое смешения, соответствующих табл. 1, уровень энергии турбулентных пульсаций  $\varepsilon_m^2 \approx 0.04$ , что соответствует наблюдаемому максимальному уровню пульсаций скорости в слое смешения – 17%, и интенсивности расширения слоя смешения  $b'_x \approx 0.3$ .

Схема движения динамических неоднородностей в слое смешения, как последовательность движущихся областей повышенного и пониженного статического давления, каждая из которых в данном сечении имеет характерный размер, близкий к ширине слоя смешения, показывает, что при этом общий продольный размер неоднородности  $L = 0.38x \approx 1.5b$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использовано представление слоя смешения, как слабо расширяющегося двумерного сдвигового слоя с трехмерным пульсационным движением, взаимодействующим с окружающей средой вследствие эжекции, вызванной понижением статического давления в слое смешения из-за турбулентных пульсаций. Такой подход позволил получить физически обоснованную схему течения в слое смешения турбулентной струи.

Проведен анализ свойств пульсационного движения в слое смешения с использованием известного соотношения для порождения энергии турбулентных пульсаций в градиентном потоке. Результаты проведенного анализа показывают, что общие свойства слоя смешения обусловлены основной характеристикой течения: отношением корреляции пульсаций продольной и поперечной скоростей к общей интенсивности турбулентных пульсаций скорости. Эту характеристику можно считать известной и, приблизительно, универсальной, поскольку имеются соответствующие результаты измерений. В этом случае результаты анализа взаимодействия течения в слое

смешения и внешнего течения, индуцированного пониженным статическим давлением в слое смешения, дают возможность определить уровень пульсаций скорости в слое смешения.

Полученные данные позволяют представить общую схему течения в слое смешения, который взаимодействует с внешней средой из-за наличия в нем областей с пониженным статическим давлением. Общий уровень понижения статического давления однозначно связан с интенсивностью пульсаций скорости. Он также определяет интенсивность эжекции в слой смешения.

Определенный из условия согласования интенсивности расширения слоя смешения и, индуцированного пониженным давлением в слое смешения, внешнего течения, уровень интенсивности пульсаций в слое смешения согласуется с экспериментальными данными.

Структура и характерные масштабы движущихся неоднородностей распределения статического давления в слое смешения определяют местоположение источников акустического излучения струи по характерным частотам излучения звука.

Авторы выражают благодарность Г.А. Любимову за обсуждение и полезные замечания по тексту статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.
2. Хинце И.О. Турбулентность ее механизм и теория. М.: Физматлит, 1963. 680 с.
3. Крашенинников С.Ю., Миронов А.К., Бендерский Л.А. Динамическое воздействие турбулентной струи на окружающую среду // Доклады РАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 491. № 1. С. 80–84.
4. Бендерский Л.А., Крашенинников С.Ю., Миронов А.К. Исследование образования индуцированных течений, создаваемых дозвуковыми турбулентными струями и их связи с эффектом понижения статического давления в струе // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 6. С. 50–60.
5. Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
6. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
7. Абрамович Г.Н., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974. 272 с.
8. Крашенинников С.Ю. К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 71–80.
9. Крашенинников С.Ю., Семенёв П.А. О двух механизмах шумообразования в турбулентных струях // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 26–39.
10. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
11. Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К. Исследование волновой структуры течений в начальном участке струи при различных уровнях начальной турбулентности // Уч. записки ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 1. С. 25–32.
12. Крашенинников С.Ю., Миронов А.К. Попытка определения положения источников звука в турбулентной струе по результатам измерений акустического поля и корреляций пульсаций скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 69–83.
13. Крашенинников С.Ю., Миронов А.К., Бендерский Л.А. Анализ шумообразования турбулентных струй на основании исследования их ближнего акустического поля // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 6. С. 704–717.
14. Fisher M.J., Harper-Bourne M., Glegg S.A.L. Jet engine noise source location: The polar correlation technique // J. Sound and Vibr. 1977. V. 51. № 1. P. 23–54.
15. Zaman K.B.M.Q. Flow field and near and far sound field of a subsonic jet // J. Sound and Vibr. 1986. V. 106. № 1. P. 1–16.
16. Крашенинников С.Ю., Бендерский Л.А., Семенёв П.А., Польняков Н.А. Анализ возможных механизмов шумообразования в турбулентных струях // III Всероссийская акустическая конференция. Санкт-Петербург, 21–25 сентября 2020 года. С. 554–561.

УДК 532.529:534.2

## АКУСТИКА ЖИДКОСТИ С ПОКРЫТЫМИ ОБОЛОЧКОЙ КАПЛЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

© 2022 г. Д. А. Губайдуллин<sup>а,\*</sup>, К. А. Панин<sup>а,\*\*</sup>, Ю. В. Федоров<sup>а,\*\*\*</sup><sup>а</sup> Казанский научный центр РАН, Институт механики и машиностроения, Казань, Россия

\*E-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

\*\*E-mail: paninkirill590@gmail.com

\*\*\*E-mail: kopperfildd@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.01.2022 г.

После доработки 09.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Выведено модифицированное уравнение Релея–Ламба, учитывающее радиальные колебания покрытой вязкоупругой оболочкой капли жидкости, в центре которой находится пузырек пара, и находящейся в вязкоупругой среде. Для малых колебаний включения решена задача тепломассообмена между паром, жидкой фазой, оболочкой и несущей жидкостью. Найдено уравнение энергии. На основе полученных уравнений радиальных колебаний включения, энергии и известного волнового уравнения для пузырьковой жидкости определено дисперсионное соотношение. Для смеси жидкости с покрытыми оболочкой каплями додекафторпентана  $C_5F_{12}$  и октафторпропана  $C_3F_8$  с пузырьками пара в центре построены зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений. Проиллюстрировано влияние фазовых переходов, оболочки включений и упругой несущей фазы на динамику акустических волн. В частном случае проведено сравнение теории с известными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* акустические волны, капля жидкости, пузырек пара, вязкоупругая оболочка, массообмен

DOI: 10.31857/S056852812204003X

В последнее время большой интерес представляет изучение эмульсий с фазовыми переходами, обладающих следующей особенностью. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки пара. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [1]. Использование данных эмульсий имеет огромный потенциал в биомедицине [2, 3], поскольку, в отличие от обычных газовых микропузырьков капли жидкости могут быть достаточно маленькими и могут спокойно протекать через тонкие капилляры. К примеру, при использовании эхографической визуализации капли жидкости, протекающие через сосудистую систему опухолей, могут испаряться и использоваться в качестве контрастных веществ для получения изображения внутренней структуры опухоли [4]. В качестве капель жидкости обычно используют капли перфторуглерода, такие как декафторбутан  $C_4F_{10}$ , октафторпропан  $C_3F_8$  и додекафторпентан  $C_5F_{12}$  [5–7]. Выбор данных веществ связан с тем, что они остаются метастабильными при физиологической температуре и не могут самопроизвольно испаряться. Для их испарения требуется акустическая энергия. Чтобы предотвратить быстрое растворение капель в несущей жидкости их обычно покрывают полимерной оболочкой [8].

Аналитическое решение задачи об испарении капли впервые получено в работе [9]. Здесь выведено уравнение Релея–Плессета, описывающее эволюцию пузырька внутри перегретой капли перфторуглерода, расположенной в центре жесткой трубы. Однако данная модель была получена при сильном упрощении. Считалось, что скорость испарения капли постоянна на протяжении всего процесса парообразования. Описание теплообмена и скорости испарения в зависимости от температуры представлено в [10, 11] на основе подхода, который используется при моделировании пузырька пара в обычной жидкости [12]. Дано сравнение численных расчетов со сверхбыстрыми оптическими измерениями роста парогазового пузырька. Подчеркнута важная роль диффузии газа в росте включения. Однако обе модели получены в предположении, что пу-

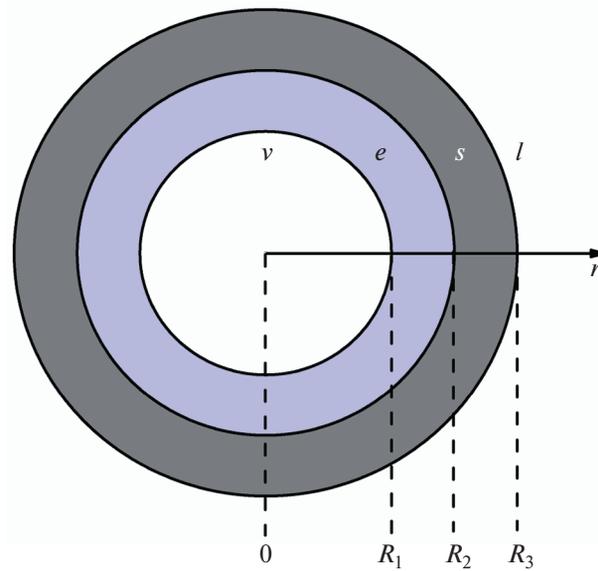


Рис. 1. Схема включения:  $v$  — пар,  $e$  — жидкая фаза,  $s$  — оболочка,  $l$  — несущая жидкость.

зырек пара находится в бесконечной жидкой среде перфторуглерода. В работе [13] предложена математическая модель динамики роста парового пузырька, находящегося в капле жидкости конечного размера. Найдено хорошее сопоставление теоретических расчетов изменения радиуса парового пузырька в каплях  $C_5F_{12}$ ,  $C_3F_8$ ,  $C_4F_{10}$ , находящихся в воде, с экспериментальными данными. Учет вязкоупругой оболочки капли проведен в работах [14, 15]. Показано существенное влияние наличия упругой оболочки на процесс испарения капли. Влияние реологических свойств несущей жидкости на динамику пузырька исследовано в [16, 17]. В настоящей работе впервые рассмотрена динамика акустических волн в вязкоупругой среде с покрытыми упругой оболочкой каплями жидкости, внутри которых находятся пузырьки пара.

## 1. УРАВНЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим покрытую вязкоупругой оболочкой каплю жидкости с пузырьком пара в центре, и находящейся во внешней вязкоупругой жидкости (рис. 1). Уравнения неразрывности и импульса в сферической системе координат при наличии центральной симметрии записываются следующим образом

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_v \rho_v) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}, \quad r < R_1 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_k) = 0, \quad r > R_1, \quad k = e, s, l \quad (1.2)$$

$$\rho_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_k}{\partial r}, \quad r > R_1, \quad k = e, s, l \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $r$  — радиальная координата,  $t$  — время,  $u$  — радиальная скорость,  $p$  — давление. Решения уравнений (1.1) и (1.2) имеют вид

$$u_v = \frac{r}{R_1} U_v, \quad u_k = \frac{R_1^2}{r^2} U_k, \quad k = e, s, l \quad (1.4)$$

где  $U_v$  и  $U_k$  — соответственно скорости пара, жидкости и оболочки на границах включения. Следует заметить, что рассматривается только однородная деформация пара.

Записываются граничные условия на границе  $R_1$  с учетом фазовых переходов,  $R_2$  и  $R_3$  без фазовых переходов

$$p_e(R_1) - p_v(R_1) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_e(R_1) - \tau_v(R_1) + J(u_e(R_1) - u_v(R_1)) \quad (1.5)$$

$$J = \rho_v(\dot{R}_1 - U_v) = \rho_e(\dot{R}_1 - U_e)$$

$$p_s(R_2) - p_e(R_2) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_s(R_2) - \tau_e(R_2), \quad u_e(R_2) = u_s(R_2) = \dot{R}_2 \quad (1.6)$$

$$p_l(R_3) - p_s(R_3) + \frac{2\sigma_3}{R_3} = \tau_l(R_3) - \tau_s(R_3), \quad u_s(R_3) = u_l(R_3) = \dot{R}_3 \quad (1.7)$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\tau$  – нормальные напряжения,  $J$  – интенсивность фазовых переходов. Нормальные напряжения для пара, капли жидкости, вязкоупругой оболочки и несущей жидкости задаются в виде [18, 19]

$$\begin{aligned} \tau_v &= 2\mu_v \frac{\partial u_v}{\partial r}, & \tau_e &= 2\mu_e \frac{\partial u_e}{\partial r} \\ \tau_s &= -\frac{4R_2^2}{r^3} \left( \frac{G_s R_2}{3} \left( 1 - \frac{R_{20}^3}{R_2^3} \right) + \mu_s u_s \right), & \tau_l &= -\frac{4R_3^2}{r^3} \left( \frac{G_l R_3}{3} \left( 1 - \frac{R_{30}^3}{R_3^3} \right) + \mu_l u_l \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость,  $G$  – модуль сдвига, индекс 0 относится к начальному радиусу в состоянии покоя. Следует заметить, что вязкоупругость оболочки и несущей жидкости учитывается по реологической модели Кельвина–Фойгта. Поскольку вязкость пара меньше, чем вязкость жидкости, поэтому  $\tau_v \ll \tau_e$  и, следовательно, в дальнейшем величиной  $\tau_v$  можно пренебречь. Уравнение импульса (1.3) интегрируется от  $R_1$  до бесконечности. В этом случае интервал от  $R_1$  до  $R_2$  будет соответствовать параметрам капли жидкости, от  $R_2$  до  $R_3$  – параметрам вязкоупругой оболочки капли, от  $R_3$  до бесконечности – параметрам несущей жидкости. Тогда, приняв во внимание (1.4)–(1.8), можно получить уравнение радиальных колебаний рассматриваемого включения

$$\begin{aligned} \rho_d R_1 \dot{U}_e - 0.5 \rho_{d2} U_e^2 + 2 \rho_d \dot{R}_1 U_e &= p_v - p_\infty - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - \frac{2\sigma_3}{R_3} + \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_e} \right) J^2 - \\ &- \frac{4}{R_1} \mu_d U_e - \frac{4G_s}{3} \left( 1 - \frac{R_2^3}{R_3^3} \right) \left( 1 - \frac{R_{20}^3}{R_2^3} \right) - \frac{4G_l}{3} \left( 1 - \frac{R_{30}^3}{R_3^3} \right), \quad U_e = \dot{R}_1 - \frac{J}{\rho_e} \\ \rho_d &= \rho_e + (\rho_s - \rho_e) \frac{R_1}{R_2} + (\rho_l - \rho_s) \frac{R_1}{R_3}, \quad \rho_{d2} = \rho_e + (\rho_s - \rho_e) \frac{R_1^4}{R_2^4} + (\rho_l - \rho_s) \frac{R_1^4}{R_3^4} \\ \mu_d &= \mu_e \left( 1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) + \mu_s \left( \frac{R_1^3}{R_2^3} - \frac{R_1^3}{R_3^3} \right) + \mu_l \frac{R_1^3}{R_3^3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Линеаризуем уравнение (1.9):  $\psi = \psi_0 + \psi'$ ,  $\psi' \ll \psi_0$ ,  $\psi = R_1, R_2, R_3, p, J$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_{d0} R_{10} \ddot{R}_1' - \frac{\rho_{d0} R_{10}}{\rho_e} J' + \frac{4\mu_{d0}}{R_{10}} \dot{R}_1' - \frac{4\mu_{d0}}{\rho_e R_{10}} J' &= p'_v - p'_\infty + \frac{2\sigma_1}{R_{10}^2} R_1' + \frac{2\sigma_2}{R_{20}^2} R_2' + \frac{2\sigma_3}{R_{30}^2} R_3' - \\ &- \frac{4G_s}{R_{20}} \left( 1 - \frac{R_{20}^3}{R_{30}^3} \right) R_2' - \frac{4G_l}{R_{30}} R_3', \quad R_{30}^2 \dot{R}_3' = R_{20}^2 \dot{R}_2' = R_{10}^2 \left( \dot{R}_1' - \frac{J'}{\rho_e} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь индекс “0” относится к параметрам равновесного состояния. В случае, когда отсутствуют фазовые переходы  $J = J' = 0$  уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид [20].

## 2. МЕЖФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССОБМЕН

Для учета межфазного тепломассообмена записываются уравнения теплопроводности для пара, жидкой фазы и оболочки [18, 19]

$$\rho_v c_{pv} \frac{\partial T_v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_v r^2 \frac{\partial T_v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_v}{\partial t}, \quad 0 < r < R_1 \quad (2.1)$$

$$\rho_e c_{pe} \frac{\partial T_e}{\partial t} = \lambda_e \frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2}, \quad R_1 < r < R_2 \quad (2.2)$$

$$\rho_s c_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}, \quad R_2 < r < R_3 \quad (2.3)$$

где  $T$  – температура,  $c_p$  – удельная теплоемкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности. Здесь и далее предполагается, что толщина внутреннего слоя жидкой фазы и оболочки капли много меньше, чем размер пузырька пара, поэтому уравнения теплопроводности (2.2) и (2.3) для них записаны в плоско-одномерном приближении. При отсутствии внешнего подвода тепла средне-массовую температуру несущей жидкости будем считать постоянной  $T_l = T_0 = \text{const}$ . В уравнении (2.1) давление  $p_v$  считается только функцией времени  $p_v(t)$ , тем самым выполняется условие гомобаричности [18]. Это предположение позволит избежать решения уравнения движения пара внутри пузырька и тем самым упростить систему уравнений. При постановке задачи необходимо задать граничные условия, которые для температур имеют вид

$$r = 0: \frac{\partial T_v}{\partial r} = 0, \quad r = R_1: T_v = T_e = T_a, \quad J = \frac{1}{L} \left( \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} - \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \right) \quad (2.4)$$

$$r = R_2: T_e = T_s, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r}, \quad r = R_3: T_s = T_l = T_0 = \text{const} \quad (2.5)$$

Следует отметить, что здесь принята квазиравновесная схема фазового перехода, о чем свидетельствует условие равенства температуры на поверхности пузырька пара температуре насыщения  $T_a$ . Таким образом, интенсивность фазовых переходов  $J$  определяется по последнему соотношению (2.4) из решения уравнения теплопроводности для жидкости (2.2) и пара (2.1). Температура насыщения  $T_a$  определяется из уравнения Клапейрона–Клаузиуса

$$T_a = \left( \frac{1}{T_{a0}} - \frac{B_v}{L} \ln \left( \frac{p_v}{p_\infty} \right) \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Здесь  $T_{a0}$  – температура на линии насыщения, зависящая от вида жидкости,  $B_v$  – приведенная паровая постоянная,  $L$  – удельная теплота парообразования жидкости. Решение выше поставленной задачи (2.1)–(2.6) для случая малых колебаний включения с малой амплитудой определяется в виде действительных частей комплексных функций [21]

$$T_j = T_0 + T_j' \exp(i\omega t), \quad j = v, e, s, \quad p_v = p_\infty + p_v' \exp(i\omega t) \quad (2.7)$$

где  $\omega$  – частота возмущений. Уравнение (2.1) с учетом решения вида (2.7) запишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 T_v'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_v'}{\partial r} - \frac{i\omega}{\kappa_v} T_v' = -\frac{i\omega}{\lambda_v} p_v', \quad \kappa_v = \frac{\lambda_v}{\rho_v c_{pv}} \quad (2.8)$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (2.8) находится в виде суммы частного решения  $T_v' = \kappa_v p_v' / \lambda_v$  и линейной комбинации двух независимых решений однородного уравнения

$$T_v' = \frac{\kappa_v}{\lambda_v} \left( 1 + V_1 \frac{\text{sh}(rY_v)}{r} + V_2 \frac{\text{ch}(rY_v)}{r} \right), \quad Y_v = \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa_v}}$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – неизвестные переменные. Аналогично выписываются решения уравнений (2.2) и (2.3)

$$T'_e = E_1 \text{sh}[(r - R_{10})Y_e] + E_2 \text{ch}[(r - R_{10})Y_e], \quad Y_e = \sqrt{i\omega/\kappa_e}$$

$$T'_s = S_1 \text{sh}[(r - R_{20})Y_s] + S_2 \text{ch}[(r - R_{20})Y_s], \quad Y_s = \sqrt{i\omega/\kappa_s}$$

Неизвестные переменные  $V_1, V_2, E_1, E_2, S_1$  и  $S_2$  определяются из граничных условий (2.4)–(2.6). Таким образом, определяются аналитические выражения для распределения температур пара  $T_v$ , капли жидкости  $T_e$ , оболочки  $T_s$  и интенсивности фазовых переходов  $J$ . На следующем этапе выводится уравнение энергии для пузырька пара. В качестве уравнения состояния пара используется уравнение Клапейрона–Менделеева

$$p_v = \rho_v B_v T_v = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_{pv} \rho_v T_v \tag{2.9}$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты. Уравнение (2.9) дифференцируется по времени  $t$  и с учетом (1.1) примет вид

$$\frac{dp_v}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_v c_{pv} \frac{dT_v}{dt} - \frac{2}{r} p_v u_v \tag{2.10}$$

Уравнение притока тепла для паровой фазы (2.1) интегрируется по радиальной координате от нуля до  $R_{10}$ , линеаризуется и, приняв во внимание (2.10), записывается следующим образом

$$\frac{dp'_v}{dt} = -\frac{3\gamma p_{v0}}{R_{10}} U'_v + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_v}{R_{10}} \left( \frac{\partial T'_v}{\partial r} \right)_{r=R_{10}}, \quad U'_v = \dot{R}'_1 - J' / \rho_v,$$

С учетом найденных выражений для  $T'_v$  и  $J'$  данное уравнение окончательно примет вид

$$\frac{dp'_v}{dt} = -\frac{3\gamma p_{v0}}{R_{10}} \frac{dR'_1}{dt} - 3i\omega\Psi p'_v$$

$$\Psi = 3(\gamma - 1) \frac{y_v \text{cthy}_v - 1}{y_v^2} \left( 1 - \frac{\lambda_v \tau_v}{\kappa_v} \right) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{v0}}{\rho_v L} \right) - 3i \frac{\gamma p_{v0}}{\rho_v R_{10}} \frac{\lambda_e y_e}{L r_e} \frac{W \tau_v}{\omega}$$

$$\tau_v = \frac{B_v}{p_{v0} L} \left( \frac{1}{T_{a0}} - \frac{B_v}{L} \ln \left( \frac{p_{v0}}{p_\infty} \right) \right)^{-2}, \quad W = \frac{1 + \chi \text{cthy}_s \text{cthy}_e}{\text{cthy}_e + \chi \text{cthy}_s}, \quad \chi = \frac{\lambda_s y_s r_e}{\lambda_e y_e r_s}$$

$$y_v = \sqrt{\frac{i\omega R_{10}^2}{\kappa_v}}, \quad y_e = \sqrt{\frac{i\omega r_e^2}{\kappa_e}}, \quad y_s = \sqrt{\frac{i\omega r_s^2}{\kappa_s}}, \quad r_e = R_{20} - R_{10}, \quad r_s = R_{30} - R_{20}$$

Здесь  $r_e$  – толщина внутреннего слоя жидкой фазы,  $r_s$  – толщина оболочки.

### 3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Представим решения уравнений (1.10) и (2.11) в виде бегущих волн  $R'_j = \Delta R_j \exp(i\omega t), j = 1, 2, 3, p'_v = \Delta p_v \exp(i\omega t), J' = \Delta J \exp(i\omega t)$ , где  $\Delta R_j, \Delta J$  и  $\Delta p_v$  – амплитуды волн. Определим из полученной системы уравнений  $\Delta R_1$

$$\Delta R_1 = -\frac{\Delta p_\infty}{\rho_{d0} R_{10} (\omega_0^2 + i\omega\delta - \omega^2)} \tag{3.1}$$

$$\omega_0^2 = X + \frac{p_{v0}}{\rho_{d0} R_{10}^2} \text{Re } \Phi + \frac{\omega \text{Im } J_0}{\rho_e} - \frac{4\mu_{d0}}{\rho_{d0} \rho_e} \frac{\text{Re } J_0}{R_{10}^2} - \frac{\text{Im } J_0}{\omega \rho_e} \left( X + \frac{2\sigma_1}{\rho_{d0} R_{10}^3} \right)$$

$$\delta = \frac{4\mu_{d0}}{\rho_{d0} R_{10}^2} + \frac{p_{v0}}{\rho_{d0} R_{10}^2} \frac{\text{Im } \Phi}{\omega} - \frac{\text{Re } J_0}{\rho_e} - \frac{4\mu_{d0}}{\rho_{d0} \rho_e} \frac{\text{Im } J_0}{\omega R_{10}^2} + \frac{\text{Re } J_0}{\rho_e \omega^2} \left( X + \frac{2\sigma_1}{\rho_{d0} R_{10}^3} \right)$$

$$J_0 = \frac{p_{v0}\Phi}{LR_{10}} \left( \frac{\lambda_e y_e}{r_e} W \tau_v - i\omega R_{10} \frac{y_v \operatorname{cthy}_v - 1}{y_v^2} \left( 1 - \frac{\lambda_v \tau_v}{\kappa_v} \right) \right), \quad \Phi = \frac{3\gamma}{1 + \Psi} \quad (3.2)$$

$$X = \frac{1}{\rho_{a0} R_{10}^2} \left( \frac{4G_s R_{10}^3}{R_{20}^3} \left( 1 - \frac{R_{20}^3}{R_{30}^3} \right) + \frac{4G_l R_{10}^3}{R_{30}^3} - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} - \frac{2\sigma_3 R_{10}^3}{R_{30}^4} \right)$$

$$p_{v0} = p_\infty + \frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} + \frac{2\sigma_3}{R_{30}}$$

Следует заметить, что если не учитываются фазовые переходы  $J_0 = 0$ , то выражения для затухания радиальных колебаний  $\delta$  и резонансной частоты включения  $\omega_0$  по виду совпадают с соответствующими выражениями, полученными в работах [20, 22]. В случае, когда имеется только паровой пузырек в жидкости, выражения для  $\delta$  и  $\omega_0$  приобретают вид [23]. Рассмотрим распространение акустической волны в вязкоупругой среде, когда в ней имеется множество расположенных хаотически на длине волны покрытых каплей жидкости, внутри которых имеются пузырьки пара. Будем считать, что расстояния между включениями много больше их размера. Как было отмечено выше, размеры внутреннего жидкого слоя и оболочки капли удовлетворяют условиям  $r_e \ll R_{10}$ ,  $r_s \ll R_{10}$ . В этом случае учет многократного рассеяния волны может производиться обычным для пузырьковой среды способом на основе известного волнового уравнения типа Фолди в длинноволновом приближении [24]

$$\frac{1}{C_l^2} \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial x^2} = 4\pi r_l \int_0^\infty R_{10}^2 \ddot{R}_l f dR_{10} \quad (3.3)$$

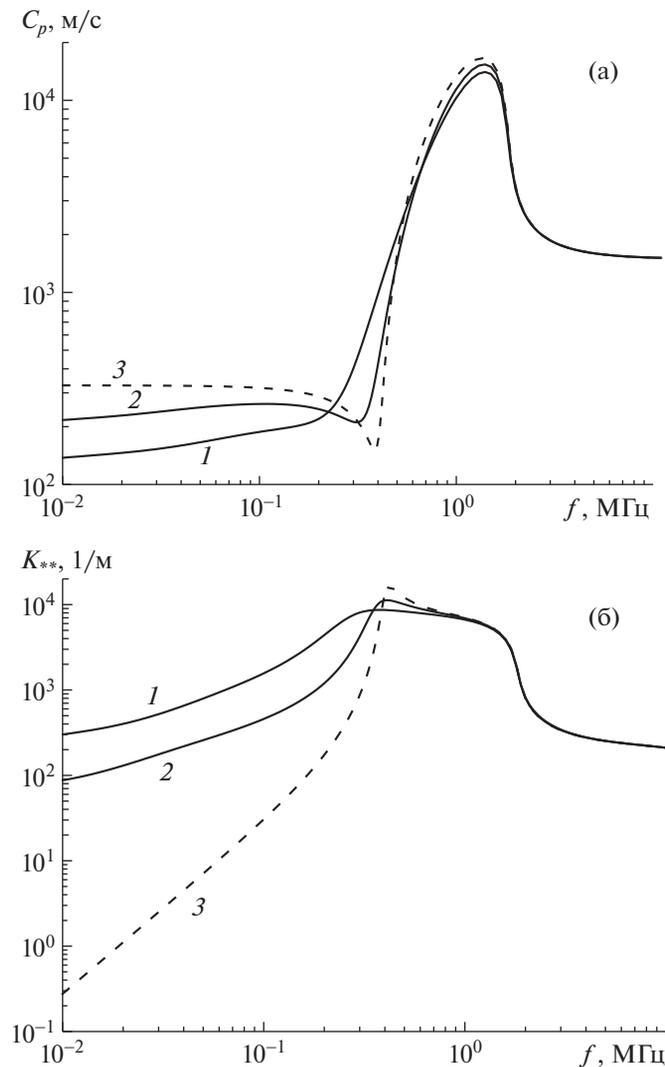
Здесь  $f$  – функция распределения включений по размерам,  $C_l$  – скорость звука в несущей жидкости. С учетом того, что  $\ddot{R}_l = -\omega^2 \Delta R_l$ ,  $\partial^2 p_\infty / \partial t^2 = -\omega^2 \Delta p_\infty$  и выражения (3.1), волновое уравнение (3.3) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Delta p_\infty}{\partial x^2} + K_*^2 \Delta p_\infty = 0, \quad \frac{K_*^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_l^2} + 4\pi r_l \int_0^\infty \frac{R_{10} f}{\rho_{a0} (\omega_0^2 + i\omega\delta - \omega^2)} dR_{10} \quad (3.4)$$

где  $K_*$  – комплексное волновое число, а второе уравнение (3.4) является дисперсионным уравнением. Если выбрать  $f = n\delta(R - R_{10})$ , где  $\delta$  – функция Дирака,  $n = 3\alpha/4\pi R_{10}^3$  – количество включений в единице объема жидкости, то интеграл в (3.4) можно опустить и включения считать монодисперсными.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2 представлены результаты сравнения зависимостей фазовой скорости  $C_p = \omega / \operatorname{Re} K_*$  (а) и коэффициента затухания  $K_{**} = \operatorname{Im} K_*$  (б) для смеси воды с каплями додекафторпентана  $C_5F_{12}$  (DDFP) и пузырьками пара в центре (кривая 1), каплями октафторпропана  $C_3F_8$  (OFP) и пузырьками пара в центре (кривая 2). Следует заметить, что для двух различных веществ DDFP и OFP без учета фазовых переходов дисперсионные кривые практически одинаковы, поэтому на рис. 2 приведена единственная кривая 3. Температура смеси  $T_0 = 310$  К,  $p_\infty = 10^5$  Па, объемное содержание включений  $\alpha = 0.001$ , радиус пузырьков пара  $R_{10} = 7 \times 10^{-6}$  м, толщина капель жидкости  $r_e = 10^{-6}$  м. На данном этапе упругая оболочка капель не учитывается, поэтому  $r_s = 0$ . Расчеты проведены с помощью дисперсионного уравнения (3.4). Теплофизические параметры веществ DDFP и OFP взяты из работ [13, 25] и приведены в табл. 1. Как видно из рис. 2, наличие фазовых переходов приводит к существенному уменьшению фазовой скорости (а) и увеличению коэффициента затухания (б) на частотах, меньших резонансной частоты включений. При этом сама резонансная частота включений тоже зависит от интенсивности фазовых переходов, что следует также из формулы (3.2). Для капель DDFP интенсивность массообмена выше, чем для капель OFP, о чем свидетельствуют низкая скорость звука и высокий коэффициент затухания. Данный результат согласуется с выводами [5–7]: для испарения капли DDFP нужно затратить больше акустической энергии по сравнению с каплей OFP. Отметим, что в частном случае для



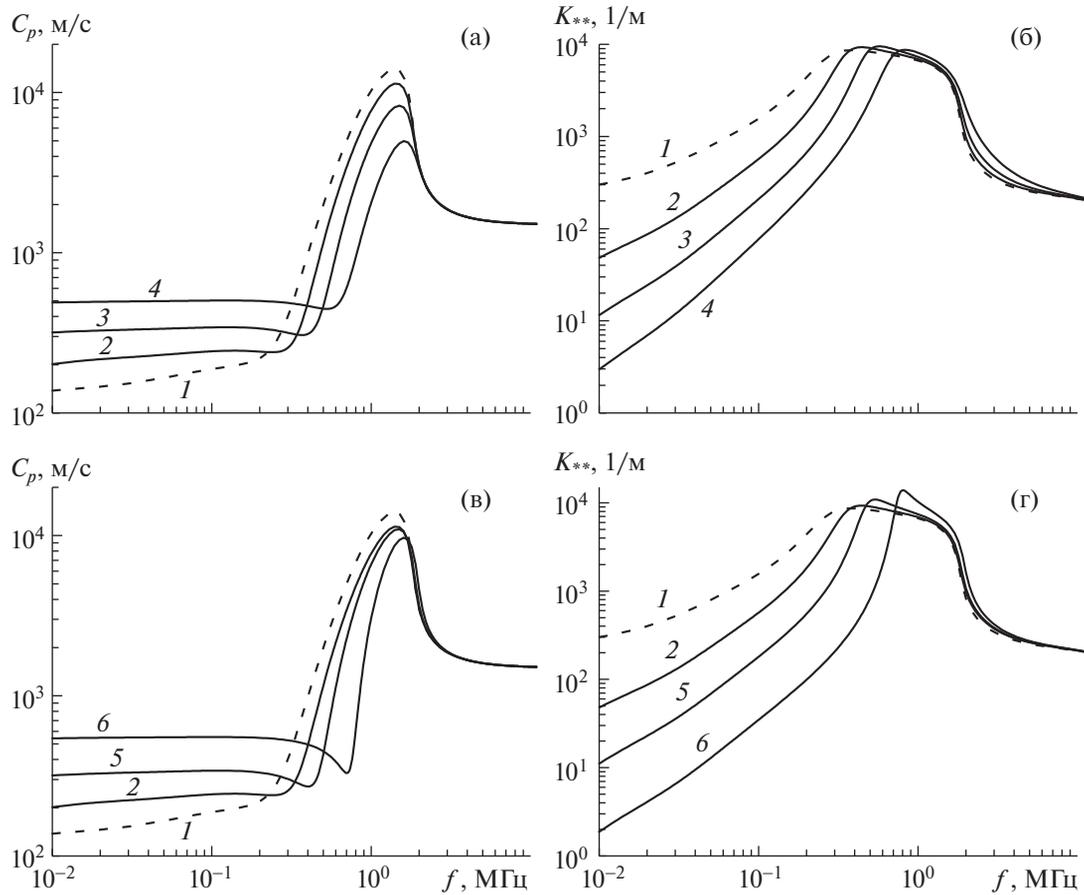
**Рис. 2.** Зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений для смеси воды с каплями жидкости и пузырьками пара в центре: 1 – DDFP, 2 – OFP, 3 – без учета массообмена.

смеси воды с паровыми пузырьками наблюдается похожая картина [23, 26]. Учет процессов массообмена приводит к уменьшению резонансной частоты пузырьков и фазовой скорости, а также к увеличению коэффициента затухания на дорезонансных частотах.

На рис. 3 приведены зависимости фазовой скорости (а), (в) и коэффициента затухания (б), (г) для смеси воды с покрытыми полимерной оболочкой каплями DDFP и пузырьками пара в центре при различных размерах оболочки  $r_s$  и модулях сдвига  $G_s$ . Параметры оболочки:  $\rho_s = 1475 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_s = 0.99 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 2. В случае, когда упругая оболочка

**Таблица 1.** Теплофизические параметры

	$c_{pv}$ Дж/кг·К	$\mu_v \times 10^{-6}$ Па·с	$B_v$	$\gamma$	$\lambda_v \times 10^{-2}$ кг·м/с <sup>3</sup> ·К	$L \times 10^5$ м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$T_{a0}$ К	$\rho_e$ кг/м <sup>3</sup>	$\mu_e \times 10^{-4}$ Па·с	$c_{pe}$ Дж/кг·К	$\lambda_e \times 10^{-2}$ кг·м/с <sup>3</sup> ·К
DDFP	842	2.37	28.8	1.05	2	1.16	302	1590	6.52	1090	5.6
OFP	1110	2.3	44.2	1.04	1.38	2.43	236.4	1600	1.08	1270	3.85

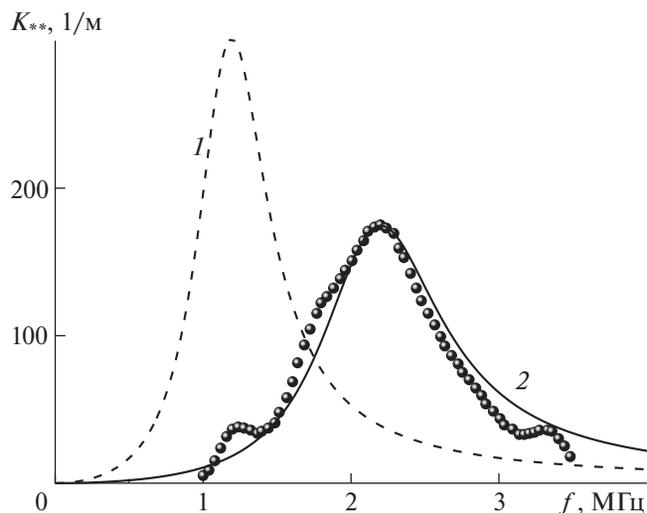


**Рис. 3.** Фазовая скорость (а), (в) и коэффициент затухания (б), (г) при различных толщинах оболочки  $r_s$  (а), (б) и модулях сдвига  $G_s$  (в), (г): 1–4 –  $r_s = 0, 10^{-8}, 3 \times 10^{-8}, 8 \times 10^{-8}$  при  $G_s = 10^7$  Па; 5–6 –  $G_s = 3 \times 10^7, 10^8$  Па при  $r_s = 10^{-8}$  м.

капли отсутствует  $r_s = 0$ , а также не учитываются поверхностные натяжения и упругость несущей фазы  $G_l = 0$ , то для резонансной частоты включения из формулы (3.2) можно получить

$$f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{p_\infty}{\rho_{d0} R_{l0}^2} \operatorname{Re} \Phi + \frac{\omega \operatorname{Im} J_0}{\rho_e} - \frac{4\mu_{d0}}{\rho_{d0} \rho_e} \frac{\operatorname{Re} J_0}{R_{l0}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом, из рис. 3 следует, что увеличение толщины и модуля сдвига упругой оболочки капли приводит к уменьшению коэффициента затухания акустической волны и увеличению фазовой скорости на частотах  $f < f_r$ . При этом сама резонансная частота включений увеличивается, а диапазон изменения фазовой скорости уменьшается. Расчеты также показали, что при увеличении модуля сдвига  $G_l$  несущей среды полученные дисперсионные кривые качественно совпадают с кривыми на рис. 3 в, г, поэтому здесь они не приводятся. Вышеприведенные утверждения хорошо согласуются с экспериментами [27, 28] для упругой среды с пузырьками газа и для воды с пузырьками газа, покрытыми резиновой оболочкой. Сравнение теории с этими экспериментальными данными проведено в работах авторов [29, 30]. Отметим, что размеры пузырьков в этих экспериментах были порядка 1 мм и 1 см. Более близкие к медицинским приложениям экспериментальные измерения коэффициента затухания в смеси жидкости с инкапсулированными пузырьками типа Sonazoid представлены в работах [31, 32]. Пузырьки покрыты полимерным материалом и заполнены фторуглеродным газом. Средний размер пузырьков  $R_{l0} = 2.6 \times 10^{-6}$  м,



**Рис. 4.** Сравнение зависимостей коэффициента затухания от частоты возмущений с экспериментальными данными [31],  $l-2-r_s = 0,4 \times 10^{-9}$  м.

количество пузырьков в единице объема жидкости  $n = 2.5 \times 10^{10}$ , толщина оболочки  $r_s = 4 \times 10^{-9}$  м, вязкость  $\mu_s = 0.9$  Па · с, модуль сдвига  $G_s = 50 \times 10^6$  Па. На рис. 4 приведено сопоставление теории с данными результатами измерений. Расчет выполнен по формуле (3.4) в предположении отсутствия фазовых переходов  $J_0 = 0$  и жидкой прослойки  $r_e = 0$ . Как показано на рис. 4, наличие достаточно тонкой упругой оболочки пузырьков (толщина оболочки в 650 раз меньше радиуса пузырька газа) приводит к более высокому значению резонансной частоты, а также к заметному уменьшению пикового значения коэффициента затухания, что и подтверждается экспериментальными данными. Физически это объясняется следующим образом. Оболочка пузырька или упругая несущая фаза сдерживает его радиальные колебания. Чем больше толщина оболочки или модуль сдвига, тем радиальные колебания проходят менее интенсивно и вследствие этого акустическая волна рассеивается менее существенно по сравнению с обычными пузырьковыми средами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые рассмотрена динамика акустических волн в вязкоупругой среде с покрытыми упругой оболочкой каплями жидкости, внутри которых находятся пузырьки пара.

Установлено, что при распространении акустической волны в смеси жидкости с каплями перфторуглерода и пузырьками пара в центре фазовые переходы приводят к существенному уменьшению фазовой скорости и увеличению коэффициента затухания на частотах, меньших резонансной частоты включения, которая также зависит от интенсивности фазовых переходов. Поскольку при рассмотрении капель додекафторпентана  $C_5F_{12}$  фазовая скорость меньше, а коэффициент затухания волны больше, чем для капель октафторпропана  $C_3F_8$ , поэтому интенсивность фазовых переходов для  $C_5F_{12}$  выше, чем для  $C_3F_8$ .

Получено, что увеличение толщины и модуля сдвига упругой оболочки капли, модуля сдвига упругой несущей среды приводит к сдвигу дисперсионных кривых в сторону увеличения частоты возмущений. В частном случае для смеси жидкости с инкапсулированными пузырьками газа найдено хорошее согласие теоретической зависимости коэффициента затухания волны с известными экспериментальными данными. Показано, что наличие достаточно тонкой упругой оболочки пузырьков приводит к заметному уменьшению пикового значения коэффициента затухания и к более высокому значению резонансной частоты пузырьков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00025).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kripfgans O.D., Fowlkes J.B., Miller D.L., Eldevik O.P., Carson P.L.* Acoustic droplet vaporization for therapeutic and diagnostic applications // *Ultrasound Med. Biol.* 2000. V. 26. P. 1177–1189.
2. *Sheeran P.S., Dayton P.A.* Phase-change contrast agents for imaging and therapy // *Curr. Pharm. Des.* 2012. V. 18. P. 2152–2165.
3. *Kee A.L.J., Teo B.M.* Biomedical applications of acoustically responsive phase shift nanodroplets: current status and future directions // *Ultrason. Sonochem.* 2019. V. 56. P. 37–45.
4. *Rapoport N., Gao Z., Kennedy A.* Multifunctional nanoparticles for combining ultrasonic tumor imaging and targeted chemotherapy // *J. Natl Cancer Inst.* 2007. V. 99. № 14. P. 1095–1106.
5. *Sheeran P.S., Wong V.P., Luois S., McFarland R.J., Ross W.D., Feingold S., Matsunaga T.O., Dayton P.A.* Decafluorobutane as a phase-change contrast agent for low-energy extravascular ultrasonic imaging // *Ultrasound Med. Biol.* 2011. V. 37. P. 1518–1530.
6. *Sheeran P.S., Luois S., Dayton P.A., Matsunaga T.O.* Formulation and acoustic studies of a new phase-shift agent for diagnostic and therapeutic ultrasound // *Langmuir.* 2011. V. 27. P. 10412–10420.
7. *Sheeran P.S., Luois S., Mullin L.B., Matsunaga T.O., Dayton P.A.* Design of ultrasonically-activatable nanoparticles using low boiling point perfluorocarbons // *Biomaterials.* 2012. V. 33. P. 3262–3269.
8. *Rapoport N.* Phase-shift, stimuli-responsive perfluorocarbon nanodroplets for drug delivery to cancer // *Wiley Interdiscip Rev Nanomed Nanobiotechnol.* 2012. V. 4. № 5. P. 492–510.
9. *Qamar A., Wong Z.Z., Fowlkes J.B., Bull J.L.* Dynamics of acoustic droplet vaporization in gas embolotherapy // *Appl. Phys. Lett.* 2010. V. 96. P. 143702.
10. *Shpak O., Kokhuis T.A., Luan J., Lohse D., Jong D., Fowlkes B., Fabiilli M., Versluis M.* Ultrafast dynamics of the acoustic vaporization of phase-change microdroplets // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. P. 1610–1621.
11. *Shpak O., Stricker L., Versluis M., Lohse D.* The role of gas in ultrasonically driven vapor bubble growth // *Phys. Med. Biol.* 2013. V. 58. P. 2523–2535.
12. *Hao Y., Prosperetti A.* The dynamics of vapor bubbles in acoustic pressure fields // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. P. 2008–2019.
13. *Doinikov A.A., Sheeran P.S., Bouakaz A., Dayton P.A.* Vaporization dynamics of volatile perfluorocarbon droplets: A theoretical model and in vitro validation // *Med. Phys.* 2014. V. 41. P. 102901.
14. *Lacour T., Guedra M., Brasier T., Coulouvrat F.* A model for acoustic vaporization dynamics of a bubble/droplet system encapsulated within a hyperelastic shell // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 143. P. 23–37.
15. *Lacour T., Brasier T., Coulouvrat F.* Ultimate fate of a dynamical bubble/droplet system following acoustic vaporization // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. P. 051702.
16. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 52–62.
17. *Чжан Ц., Ци Н., Цзян Ц.* Влияние вязкости гидравлической жидкости на кавитационную люминесценцию // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 3. С. 67–79.
18. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
19. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1986.
20. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Волновая динамика покрытых оболочкой включений в вязкоупругой среде // *ПМТФ.* 2020. Т. 61. № 4. С. 22–30.
21. *Петров А.Г.* Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2010. 520 с.
22. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Акустические волны в жидкости с газовыми включениями, имеющими жидкую прослойку и вязкоупругую оболочку // *ТВТ.* 2021. Т. 59. № 4. С. 533–540.
23. *Fuster D., Montel F.* Mass transfer effects on linear wave propagation in diluted bubbly liquids // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 779. P. 598–621.
24. *Commander K.W., Prosperetti A.* Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. № 2. P. 732–746.
25. *Park S., Son G.* Numerical investigation of acoustic vaporization threshold of microdroplets // *Ultrason. Sonochem.* 2021. V. 71. P. 105361.
26. *Шаганов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И.* Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкостей при прямом их падении // *ТВТ.* 2019. Т. 57. № 2. С. 284–290.

27. *Lee K.M., Wilson P.S., Wochner M.S.* Attenuation of low-frequency underwater sound using an array of air-filled balloons and comparison to effective medium theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 142. № 6. P. 3443–3449.
28. *Leroy V., Strybulevich A., Page J.H., Scanlon M.G.* Influence of positional correlations on the propagation of waves in a complex medium with polydisperse resonant scatterers // *Phys. Rev. E.* 2011. V. 83. P. 046605.
29. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Акустические волны в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 2. С. 126–133.
30. *Gubaidullin D.A., Fedorov Yu.V.* Acoustics of a viscoelastic medium with encapsulated bubbles // *J. Hydrodyn.* 2021. V. 33. № 1. P. 55–62.
31. *Xia L., Porter T.M., Sarkar K.* Interpreting attenuation at different excitation amplitudes to estimate strain-dependent interfacial rheological properties of lipid-coated monodisperse microbubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 138. № 6. P. 3994–4003.
32. *Sarkar K., Shi W.T., Chatterjee D., Forsberg F.* Characterization of ultrasound contrast microbubbles using in vitro experiments and viscous and viscoelastic interface models for encapsulation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 118. № 1. P. 539–550.

УДК 532.59

## КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ С ТРЕУГОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

© 2022 г. В. А. Калиниченко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 26.01.2022 г.

После доработки 27.02.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Обсуждаются результаты экспериментов по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в призматическом сосуде с поперечным сечением в виде треугольника. Принципиальным отличием от волновых движений жидкости в прямоугольном сосуде является отсутствие пространственной симметрии профиля максимального развития и увеличение высоты стоячей волны к вершине клиновидного сосуда. Для описания эксперимента используются численно-аналитическая модель длинных волн в сосуде переменной ширины и линейная модель стоячих волн в цилиндре с основанием в виде кругового сектора с малым центральным углом.

*Ключевые слова:* стоячие волны, параметрический резонанс, основание сосуда, волновой профиль, приближение длинных волн

**DOI:** 10.31857/S0568528122040053

Задача о стоячих волнах в сосуде с треугольным основанием по постановке близка рассмотрению волн в цилиндрических резервуарах, основание которых представляет собой сектор окружности с малым центральным углом. В 1960-х годах для уменьшения интенсивных колебаний ракетного топлива в цилиндрических баках с круглым основанием была предложена установка диаметральных перегородок, обеспечивших переход к бакам с основанием в виде секторных цилиндрических баков. Собственная частота колебаний жидкости в таких резервуарах увеличивается, а динамические нагрузки на конструкцию снижаются. Ряд экспериментов был посвящен оценке частотного и силового факторов; см., например, [1, 2]. Отметим, что резервуары с углом сектора меньше  $\pi/4$  в экспериментах не использовались.

В данной работе экспериментально исследуются гравитационные волны Фарадея в клиновидном сосуде, малый угол при вершине которого составляет  $\pi/36$ . Сравнение проводится с волнами в прямоугольном сосуде. Отметим, что указанная геометрия ранее использовалась в [3], однако какие-либо количественные оценки не проводились. Рассматриваемые колебания жидкости имеют практическое приложение к явлению сейш в водоемах сложной геометрии [4] и распространению приливных волн в сильно сходящихся руслах [5, 6].

### 1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперименты проводились на электромеханическом вибростенде Динамики и структуры осциллирующих течений [7], входящем в состав Уникальных исследовательских установок “ГФК ИПМех РАН”. Волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея [3, 8], когда частота вертикальных колебаний сосуда вдвое превышает частоту возбуждаемых волн ( $\Omega \sim 2\omega$ ). При фиксированной амплитуде сосуда  $s = 0.7$  см вариации  $\Omega$  обеспечивали возбуждение соответствующей волновой моды номера  $n$  и высоты  $H$ .

Исследовались третья и четвертая моды ( $n = 3, 4$ ) гравитационных волн в сосудах с прямоугольным основанием  $60 \times 5.2$  см и с основанием в форме удлиненного прямоугольного треугольника с катетами  $l = 60$  и  $b = 5.2$  см и углом при вершине  $\alpha = \pi/36 = 5^\circ$  (рис. 1). Сосуды заполнялись водой до глубины  $h = 3.8\text{--}4$  см – рис. 1. Отметим значительный капиллярный подъем воды в вершине клина (рис. 1а). Данный эффект [9] характерен для жидкости между двумя вер-

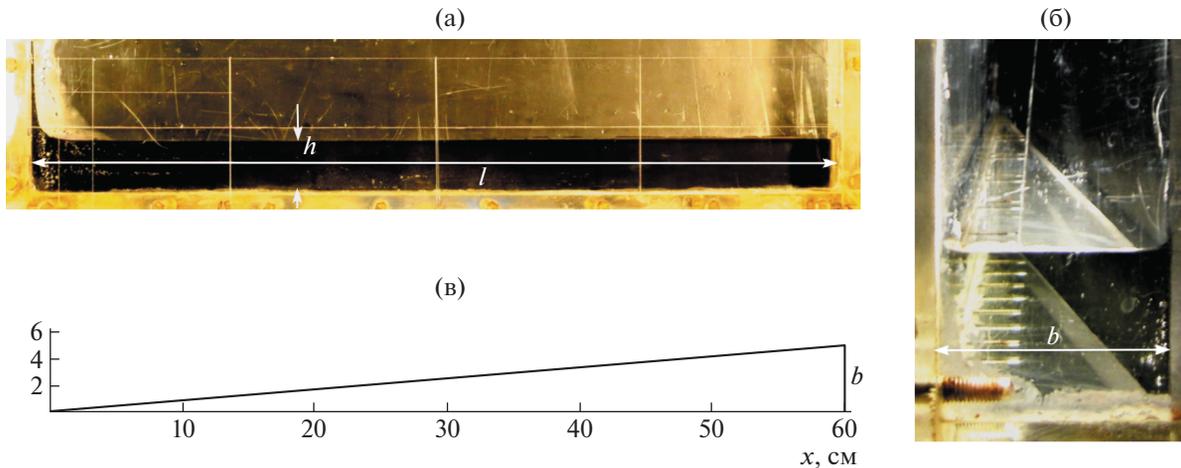


Рис. 1. Сосуд с треугольным основанием – фронтальное изображение (а), вид с торца (б) и в плане (в).

тикальными плоскостями, расположенными под малым углом, и в описываемых экспериментах не исследовался.

Волновая картина регистрировалась цифровой камерой Canon PowerShot SX50HS (скорость видеосъемки 30 и 120 кадров в секунду). Разрешение видеоизображения составляло 0.15 мм/пиксель. Последующая обработка видеок кадров производилась при использовании программы ImageJ. Все эксперименты проводились при комнатной температуре 21–22°C.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим сначала двумерные стоячие волны в прямоугольном сосуде – рис. 2. Из анализа профилей (а, б) волн максимального развития следует, что пучности волн не меняют своего положения; узлы совершают малые горизонтальные колебания; ординаты вершин и подошв волн постоянны вдоль сосуда. Таким образом, имеем стоячую регулярную нелинейную волну постоянной высоты.

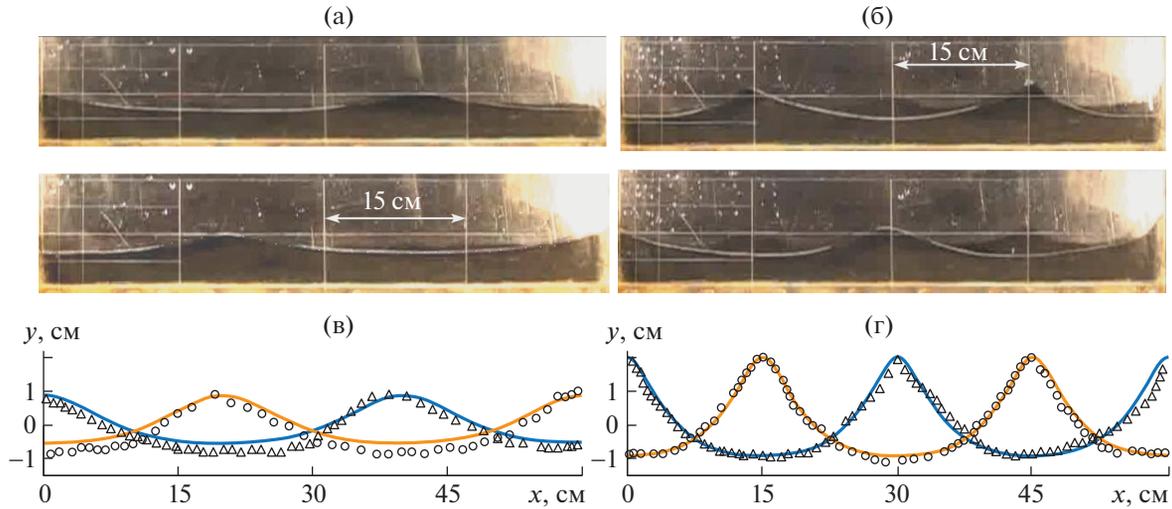
Используя модель [10, 11] нелинейных поверхностных волн Фарадея в прямоугольном сосуде, можно построить профиль свободной поверхности ( $b = 0$ ) в переменных Лагранжа ( $a, b, t$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a - H \frac{chkh}{2shkh} \sin ka \cos \psi + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32sh^2kh} (1 + \cos 2\psi) - \frac{3}{64} H^2 k \frac{ch2kh}{sh^4kh} \sin 2ka \cos 2\psi + \\ + \frac{1}{16} H^2 k \frac{ch2kh}{sh^22kh} \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \psi + H^2 k \frac{sh2kh}{32sh^2kh} (1 + \cos 2\psi) + \frac{3}{64} H^2 k \frac{sh2kh}{sh^4kh} \cos 2ka \cos 2\psi - \\ - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{sh^22kh} \cos 2ka, \\ \psi = \omega t/2, \quad \lambda = \pi n/l, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad a \in [0, l], \quad b \in [-h, 0] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Согласно рис. 2в,г имеем полное количественное соответствие данных эксперимента и модели.

На рис. 3 показаны профили третьей (а) и четвертой (б) волновых мод, возбуждаемых в клиновидном сосуде. Волны имели периоды  $T_{3,4} = 0.645$  и  $0.540$  с и соответствующие частоты  $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 9.593$  и  $11.635$  с<sup>-1</sup>. Представленные видеок кадры полностью отражают особенности волновых движений жидкости в течение одного периода.

Прежде всего рассматриваемые волны классифицируются как стоячие, поскольку их пучности не перемещаются по горизонтали. Волны – нелинейные, что проявляется в колебаниях узлов стоячей волны, в заострении гребней и уплощении ложбин. Для обеих мод (рис. 3) отметим нарушение пространственной симметрии профиля максимального развития при  $t = 0$  относитель-



**Рис. 2.** Профили волн максимального развития для третьей (а) и четвертой (б) мод ( $n = 3$  и  $4$ ) в прямоугольном сосуде. (в, г) Сравнение экспериментальных (точки) и рассчитанных по (2.1) (кривые) профилей. Здесь период волн  $T_{3,4} = 0.706$  и  $0.590$  с; частота  $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 8.900$  и  $10.650$  с $^{-1}$ ; высота волн  $H_{3,4} = 1.4$  и  $2.9$  см.

но вертикали, проведенной через вершину волны. Ординаты вершин и подошв волновых мод в этот момент возрастают от правой к левой стенке сосуда, на которой смещение свободной поверхности максимально. Волны — регулярные, поскольку характеризуются временной периодичностью профиля. Частоты  $\omega_{3,4} = 9.578$  и  $11.635$  с $^{-1}$  наблюдаемых волновых мод больше соответствующих значений  $\omega_{3,4} = 8.900$  и  $10.650$  с $^{-1}$  для волн в прямоугольном сосуде. Обработка волновых профилей рис. 3 показала, что размах колебаний свободной поверхности воды на правой стенке сосуда для обеих мод составляет величину  $H \sim 1.7$  см. На левой стенке (вершина клиновидного сосуда) имеем  $H \sim 7$  см для третьей моды (рис. 3а) и  $H \sim 8$  см для четвертой моды (рис. 3б). Таким образом, рассматриваемая геометрия сосуда обеспечивает четырехкратное возрастание высоты стоячей гравитационной волны.

В работе [3] для четвертой моды в аналогичном клиновидном сосуде был выявлен режим прогрессивно-стоячих волн, при котором в левой половине сосуда наблюдается бегущая волна (перемещение пучностей волны, эллиптические траектории частиц-трассеров), а в правой — стоячая волна. При этом размах колебаний свободной поверхности воды на правой стенке сосуда составлял  $H \sim 4$  см, а в вершине клина —  $H > 16$  см. Поскольку в настоящих экспериментах значения  $H$  существенно ниже, можно предположить, наблюдавшийся в [3] особый режим колебаний воды связан с проявлением нелинейных эффектов, характерных для волн большой амплитуды.

В условиях настоящего эксперимента отношение глубины жидкости к длине волны составляло величину  $h/\lambda \sim 0.1$ , что позволяет для интерпретации результатов использовать приближение длинных волн и рассмотреть задачу о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменного прямоугольного сечения. Уравнение волновых движений жидкости имеет вид [12]

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{d(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

Здесь  $\eta = \eta(x, t)$  — возвышение жидкости,  $d(x)$  — переменная ширина сосуда,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $S = S(x) = d(x)h$  — площадь поперечного сечения сосуда, перпендикулярного горизонтальной оси  $x$ ,  $h$  — постоянная глубина жидкости. Для стоячих волн на торцевых стенках сосуда  $x = 0, l$  выполняются краевые условия непротекания

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x=l} = 0, \quad t \geq t_0$$

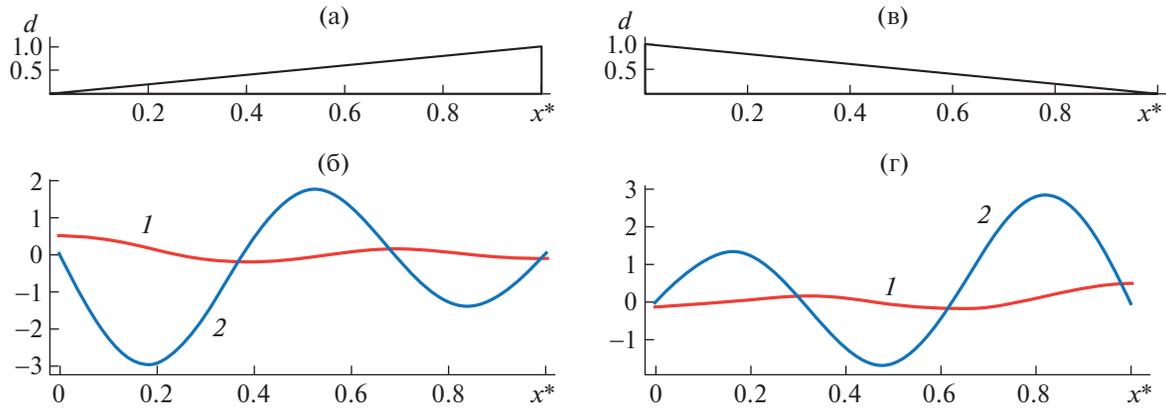


**Рис. 3.** Стоячие гравитационные волны на свободной поверхности воды в клиновидном сосуде: а–б – третья и четвертая волновые моды  $n = 3, 4$  (по результатам видеосъемки 120 к/с). Здесь период волн  $T_{3,4} = 0.656$  и  $0.540$  с; частота  $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 9.578$  и  $11.635$  с $^{-1}$ .

Если  $\eta(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ , то рассматриваемая краевая задача на собственные значения  $\lambda_n$  и функции приводится к виду

$$\frac{d}{dx} \left( d^* (x^*) \frac{dW_n}{dx^*} \right) + d^* (x^*) \lambda_n W_n = 0, \quad W_n'(0) = W_n'(1) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $x^*$  и  $d^*$  – горизонтальная координата и ширина сосуда, нормированные на  $l, b$  соответственно. Искомый параметр  $\lambda_n$  связан с частотой  $\omega$  соотношением  $\lambda_n = \omega^2 l^2 / (gh) = (\pi n)^2$ .



**Рис. 4.** (а, в) Сосуды с треугольным основанием  $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$ ,  $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$  и (б, г) собственные функции  $W_3(x^*)$  (1) и их производные  $W_3'(x^*)$  (2) для третьей волновой моды: (б) –  $W(0) = 0.5$ ,  $W(1) = -0.1$ ; (г) –  $W(0) = -0.1$ ,  $W(1) = 0.5$ ;  $b_0 = 0.01$  см,  $b = 5.2$  см.

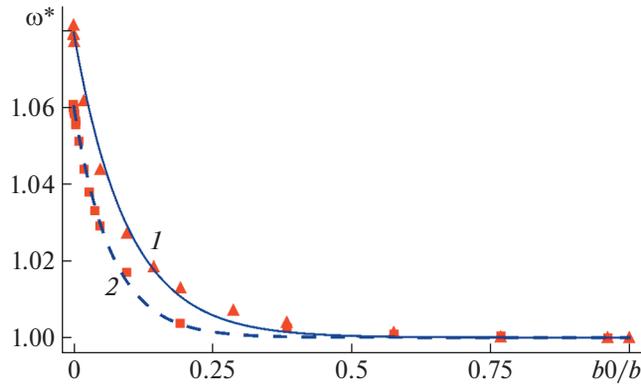
Для определения собственных значений  $\lambda_n$  и функций  $W_n(x)$  задачи (2.2) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма–Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [13], апробированный в экспериментах со стоячими волнами в прямоугольном сосуде, имеющем локальные нерегулярности дна и стенок [14]. Детальное описание метода и особенностей его использования также приводится в [14].

В расчетах для исключения локальной особенности в вершине клинообразного основания использовались функции  $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$  и  $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$ , описывающие ширину сосуда – рис. 4а, в. Отметим, что диапазон значений  $b_0 = 0.0001–0.01$  см вполне соответствует точности задания  $d \approx 0$  в вершине клина, поскольку в условиях эксперимента ширина сосуда в вершине не равна нулю из-за неидеальности склейки стенок сосуда. Необходимость рассмотрения двух зависимостей  $d^*(x^*)$  обусловлена тем обстоятельством, что для эксперимента более важными являются задание смещения свободной поверхности на широкой торцевой стенке сосуда и численная оценка высоты волна в вершине клина. В случае  $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$  задаются параметры волны при  $x^* = 0$  (вершина клина), и модель дает оценки  $W(1)$  при выполнении условия  $W'(1) = 0$  – рис. 4б. При  $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$  (рис. 4г) определяется  $W(1)$  при  $W'(1) = 0$ . Приведенные на (б, г) графики (2) подтверждают выполнение граничного условия  $W'(1) = 0$  для двух функций  $d^*(x^*)$ , описывающих ширину сосуда. Последнее свидетельствует о возможности получения численных оценок смещения жидкости в вершине клина при известной амплитуде волны на торцевой стенке. С целью сопоставления с экспериментом для рассчитанных таким образом размерных зависимостей  $W_n(x)$  можно использовать пространственную инверсию и сдвиг по координате  $x$ . Результаты численно-аналитической модели для двух конфигураций основания сосуда (рис. 4б, г) полностью совпадают при  $b_0 = 0.01$  см.

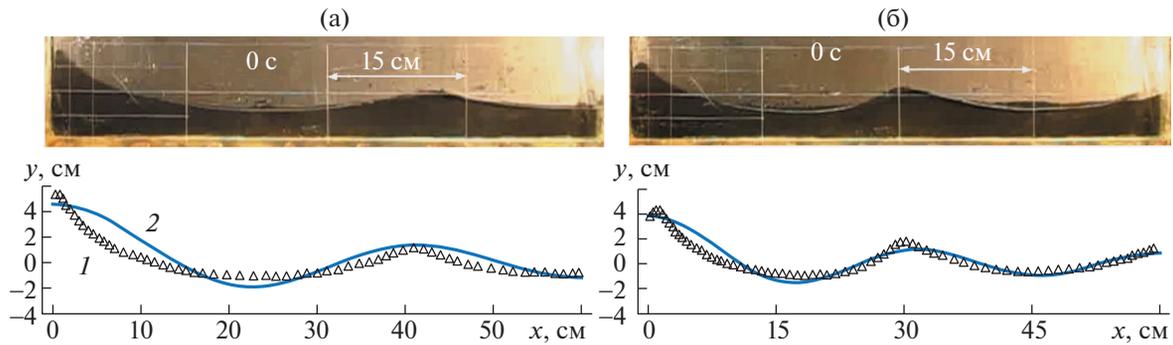
Использованная в настоящей работе численно-аналитическая модель длинных волн позволяет оценить частоты стоячих волн при изменении формы основания сосуда от прямоугольного к треугольному. Пусть ширина сосуда описывается функцией  $d(x) = b - (b - b_0)x/l$ ; введем безразмерную частоту

$$\omega^* = \frac{\lambda_n}{(\pi n)^2} = \frac{\omega^2 l^2}{gh_0 (\pi n)^2}$$

определяемую собственным значением  $\lambda_n$  задачи (2.2). Величина  $\lambda_n$  зависит от  $b_0$ ; соответствующие рассчитанные зависимости  $\omega^*$  от  $b_0/b$  для третьей и четвертой волновых мод ( $n = 3, 4$ ) приведены на рис. 5. При  $b_0 = b = 5.2$  см имеем сосуд постоянной ширины и  $\omega^* = 1$ . При уменьшении  $b_0$  от 5.2 см до 0 частота  $\omega^*$  экспоненциально растет и достигает максимума при  $b_0/b = 0$ . Отметим, что для третьей моды  $n = 3$  частота возрастает на интервале  $b_0/b < 0.5$  (данные 1), в случае



**Рис. 5.** Увеличение частоты стоячих волн при переходе от сосуда с прямоугольным основанием к клиновидному сосуду: 1, 2 –  $n = 3, 4$ . Аппроксимирующие расчетные данные 1, 2 функции:  $1 + Ae^{-Bx}$  ( $A, B = \text{const}$ ).



**Рис. 6.** Экспериментальные – 1 и рассчитанные – 2 волновые профили: (а, б) –  $n = 3, 4$ .

$n = 4$  – при  $b_0/b < 0.25$  (данные 2). Отметим, что при переходе к клиновидному сосуду частота третьей моды увеличивается на 8%, для четвертой моды – на 6%.

На рис. 6 представлены волновые профили, наблюдаемые в эксперименте и рассчитанные в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости. Видно неплохое соответствие опытных 1 и расчетных 2 данных. Для обеих мод модель достаточно точно определяет горизонтальные положения и высоты гребней и подошв волн, причем наивысшие значения гребня волны ( $x = 0$ , вершина клина) рассчитывались при задании смещения свободной поверхности на торцевой стенке сосуда ( $x = 60$  см) – данные 2.

Основание призматического сосуда в виде треугольника с малым углом при вершине (а) можно рассматривать как сектор окружности с центральным углом  $\alpha$  (б) – рис. 7. Согласно [14], в полярных координатах ( $r, \theta$ ) потенциал скорости стоячей волны определяется как

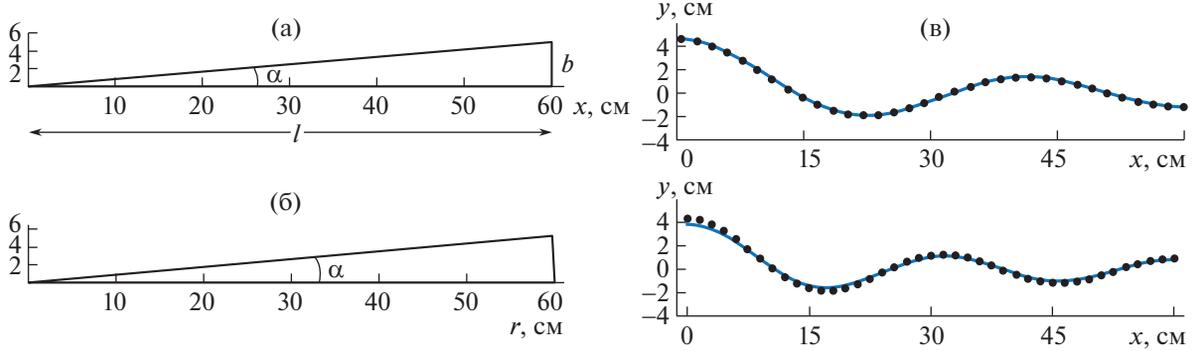
$$\Phi = A \operatorname{ch} m(y + h) J_{s\pi/\alpha}(mr) \cos \frac{s\pi}{\alpha} \theta \cos \omega t$$

Здесь  $\alpha$  – центральный угол сектора;  $J_{s\pi/\alpha}(mr)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $s\pi/\alpha$ ;  $m$  – положительные корни уравнения

$$\left( \frac{dJ_{s\pi/\alpha}(mr)}{dr} \right)_{r=l} = 0$$

В нашем случае  $s \equiv 0$  – рассматриваются только радиальные волны, а профиль стоячей волны в сосуде с основанием в форме кругового сектора определяется соотношением

$$\eta(r) = A_0 J_0(m_n r) \cos \omega_n t \tag{2.3}$$



**Рис. 7.** Основание сосуда в виде треугольника (а) и кругового сектора (б) с малым углом  $\alpha = \pi/36$  при вершине; (в) – волновые профили третьей и четвертой мод, рассчитанные с использованием алгоритма ускоренной сходимости (точки) и по (2.3) (кривые).

где  $A_0$  – смещение свободной поверхности жидкости в точке  $r = 0$ ;  $m_n$  – корень трансцендентного уравнения

$$J'_0(m_n l) = 0$$

и

$$\omega_n^2 = m_n g \operatorname{th} m_n h$$

В условиях эксперимента  $l = 60$  см,  $\alpha = \pi/36$  и  $h = 4$  см; для третьей и четвертой волновых мод ( $n = 3, 4$ ) получаем

$$m_{3,4} = 0.170, 0.222 \text{ см}^{-1}$$

$$\omega_{3,4} = 9.910, 12.441 \text{ с}^{-1}$$

На рис. 7в представлены профили третьей и четвертой мод, рассчитанные по формуле (2.3) (кривые) и в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости (точки). Видно, что эти два подхода приводят к абсолютно совпадающим профилям стоячей гравитационной волны. Отметим, что если модель стоячих волн для кругового сектора требует задания смещения свободной поверхности жидкости в центре кругового сектора ( $r = 0$ ), то алгоритм ускоренной сходимости позволяет это смещение оценить по смещению свободной поверхности воды на торцевой стенке клина. С другой стороны, модель стоячих волн в сосуде с основанием в виде кругового сектора допускает проведение кинематического анализа волн в линейном приближении, а также при учете более высоких приближений оценку нелинейных эффектов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в клиновидном сосуде. Показано их принципиальное отличие от волновых движений жидкости в прямоугольном сосуде – отсутствие пространственной симметрии для профиля максимального развития и возрастание амплитуды волны к острию клина.

В приближении длинных волн сформулирована и численно решена задача о стоячих волнах в сосуде переменной ширины при использовании алгоритма ускоренной сходимости. Результаты расчета адекватно описывают экспериментальные волновые профили для третьей и четвертой мод.

Для интерпретации данных эксперимента успешно использована линейная аналитическая модель стоячих волн в цилиндрическом сосуде с основанием в виде кругового сектора с малым центральным углом. Показано, что для проведенных опытов эта модель продуктивно дополняет численные оценки длинноволнового приближения.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7. Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D.* Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers // *J. Appl. Mech.* 1966. V. 33 (4). P. 777–784.  
<https://doi.org/10.1115/1.36251827>
2. *Микушев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968, 532 с.
3. *Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Возбуждение прогрессивно-стоячих волн Фарадея // *ДАН.* 2011. Т. 438. № 4. С. 475–479.
4. *Wilson B. Seiches* // *Advances in Hydrosience.* 1972. V. 8. P. 1–94.  
<https://doi.org/10.1016/b978-0-12-021808-0.50006-1>
5. *Friedrichs C.T., Aubrey D.G.* Tidal propagation in strongly convergent channels // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99 (C2). P. 3321–3336.  
<https://doi.org/10.1029/93jc03219>
6. *Дроздова Ю.А., Куликовский А.Г.* Об описании длинных нелинейных волн в каналах // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 5. С. 136–145.
7. Стенд “Исследования динамики и структуры осциллирующих течений” (ДСО). УИУ “ГФК ИПМех РАН”: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#aboutDSO>
8. *Калиниченко В.А.* Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 74–83.  
<https://doi.org/10.31857/s0568528121060050>
9. *Higuera F.J., Medina A., Liñán A.* Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle // *Phys. Fluids.* 2008. V. 20 (10).  
<https://doi.org/10.1063/1.3000425>
10. *Нестеров С.В.* Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // *Морские гидрофиз. исследования.* 1969. № 3 (45). С. 87–97.
11. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 1. С. 122–129.
12. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 303 с.
13. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
14. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // *Изв. РАН. МЖГ.* 2017. № 2. С. 65–74.  
<https://doi.org/10.7868/S0568528117020104>
15. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves. in *Encyclopedia of Physics.* Springer Verlag, 1960. V. IX. P. 446–778.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-45944-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45944-3_6)

УДК 532.59:534.143

## ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ С ДВУХМЕРНЫМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

© 2022 г. В. В. Булатов<sup>a,\*</sup>, И. Ю. Владимиров<sup>b,\*\*</sup><sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия<sup>b</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия\*E-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)\*\*E-mail: [iyuvladimirov@rambler.ru](mailto:iyuvladimirov@rambler.ru)

Поступила в редакцию 31.01.2022 г.

После доработки 15.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Рассмотрена задача о генерации внутренних гравитационных волн локализованным гармоническим источником возмущений в стратифицированной среде с двухмерными линейными сдвиговыми течениями. В предположении постоянства частоты плавучести получены интегральные представления решений при выполнении условия устойчивости Майлса–Ховарда. Исследованы свойства спектральной задачи при малых волновых числах. Для различных линейных распределений сдвиговых течений приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых и фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Показано, что учет двухмерности сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии как дисперсионных кривых, так и линий равной фазы. Численно изучена трансформация фазовых картин полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации.

*Ключевые слова:* стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, сдвиговые течения, спектральная задача, дисперсионные зависимости, фазовые картины

DOI: 10.31857/S0568528122040016

В реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) генерация и распространение внутренних гравитационных волн (ВГВ) в значительной степени связаны с вертикальной и горизонтальной динамикой фоновых сдвиговых течений [1–3]. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на эволюцию ВГВ [4, 5]. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении [1, 2, 6, 7]. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных [1, 4, 5, 8–13].

Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно рассматривать различные модельные представления частоты плавучести и сдвиговых течений [1, 6, 7, 14–17]. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественное представление о волновых процессах с учетом сдвиговых течений. Одним из основных методов решения задач волновой динамики стратифицированных сред со сдвиговыми течениями является метод Фурье. Полученные с помощью этого метода интегральные представления решений требуют численного и асимптотического анализа. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с асимптотическими решениями модельных задач [4, 5, 12]. Поэтому для исследования ВГВ в реальных природных средах необходимо сочетание, как точных численных методов исследова-

ния волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих изучать основные качественные особенности возбуждаемых волн.

В [7, 14–17] были рассмотрены задачи о генерации полей ВГВ в стратифицированных средах с модельными и реальными распределениями одномерного сдвигового течения. Целью настоящей работы является построение решений, описывающих фазовую структуру полей ВГВ, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений в слое стратифицированной среды с двухмерными модельными сдвиговыми течениями. В качестве такого механизма возбуждения ВГВ в океане можно рассматривать, например, генерацию волн периодическим течением на склонах поперечных хребтов в морских проливах [3, 4, 18–20].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины  $H$ . Исходной является линеаризованная система уравнений гидродинамики относительно невозмущенного состояния, которая имеет вид [1, 2, 7]

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{DU_1}{Dt} + \frac{dU}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \left( \frac{DU_2}{Dt} + \frac{dV}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q(x, y, z, t), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

где  $(U(z), V(z), 0)$  – вектор фонового сдвигового течения на горизонте  $z$ ,  $(U_1, U_2, W)$  – компоненты возмущенной скорости,  $(p, \rho)$  – возмущения давления и плотности,  $\rho_0(z)$  – невозмущенная плотность среды,  $Q(x, y, z, t)$  – плотность распределения источников массы. В приближении Буссинеска уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты скорости можно представить в виде [6, 7, 14, 15]

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left( \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) W + N^2(z) \Delta W = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{DQ}{Dt} \right) \right) \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = - \frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $N^2(z)$  – квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести),  $g$  – ускорение свободного падения. Граничные условия берутся в виде (вертикальная ось  $z$  направлена вверх):  $W = 0$  при  $z = 0, -H$ .

Далее используются следующие предположения. Рассматривается гармонический источник возмущений интенсивности  $q$ , расположенный на горизонте  $z_0$ :  $Q(x, y, z, z_0, t) = q \exp(i\omega t) \delta(x) \delta(z) (z - z_0)$ . Частота плавучести предполагается постоянной:  $N(z) = N = \text{const}$ . Предполагается также, что выполнено условие устойчивости Майлса–Ховарда для числа Ричардсона [1, 2, 21]:

$$Ri = N^2 / \left( \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right) > 1/4.$$

Так как при наличии фоновых сдвиговых течений ВГВ взаимодействуют с этими течениями и обмениваются с ними энергией, то собственные волновые колебания могут быть экспоненциально нарастающими [1, 12, 22, 23]. Поэтому необходимо, чтобы вертикальный градиент фоновых сдвиговых течений был невелик по сравнению с частотой плавучести. Если выполнено условие Майлса–Ховарда, то соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений [1, 13, 24, 25]. Характерные значения чисел Ричардсона в реальных океанических условиях при отсутствии динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервалах от 2 до 20 [3, 4, 18–20]. Функции  $U(z), V(z)$  – линейные:  $U(z) = U_0 + (U_0 - U_H)z/H, V(z) = V_0 + (V_0 - V_H)z/H, U_0 = U(0), U_H = U(-H), V_0 = V(0), V_H = V(-H)$ . В безразмерных переменных  $x^* = \pi x/H, y^* = \pi y/H, z^* = \pi z/H, W^* = WH^2/\pi^2 q$ ,

$\omega^* = \omega/N$ ,  $t^* = tN$ ,  $M_x(z^*) = \pi U(z^*)/NH = a_x + b_x z^*$ ,  $a_x = \pi U_0/NH$ ,  $b_x = (U_0 - U_H)/NH$ ,  $M_y(z^*) = \pi V(z^*)/NH = a_y + b_y z^*$ ,  $a_y = \pi V_0/NH$ ,  $b_y = (V_0 - V_H)/NH$  (индекс “\*” далее опускается) уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + N^2(z) \Delta W &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{D}{Dt} (\exp(i\omega t) \delta(x) \delta(z) \delta(z - z_0)) \right) \right) \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \\ W &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Параметр  $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$  есть величина, обратная квадратному корню из числа Ричардсона:  $b = 1/\sqrt{Ri}$ . Условие устойчивости Майлса–Ховарда означает, что  $|b| < 2$ . Параметр  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  определяет отношение модуля скорости течения на поверхности  $\sqrt{U_0^2 + V_0^2}$  к максимальной групповой скорости распространения ВГВ в стратифицированной среде конечной глубины, равной  $NH/\pi$  [2, 6].

Решение (1.2) ищется в виде [7, 14, 15]

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y - \omega t)) d\nu d\mu$$

где функция  $\varphi(\mu, \nu, z)$  определяется из решения краевой задачи

$$\begin{aligned} (\omega - f(z))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_2 (1 - (\omega - f(z))^2) \varphi &= \Pi \\ \Pi &= (\omega - f(z))^2 \delta'(z - z_0) - f'(z) (\omega - f(z)) \delta(z - z_0) \\ \varphi(\omega, \mu, \nu, -\pi) &= \varphi(\omega, \mu, \nu, 0) = 0, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad f(z) = \mu M_x(z) + \nu M_y(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решения для источников более общего вида определяются соответствующей сверткой [2, 6, 7].

## 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В общем случае аналитическое исследование краевой задачи (1.3) представляет значительную математическую трудность, и для произвольных распределений  $N(z)$ ,  $V(z)$ ,  $U(z)$  возможно только ее численное решение [1, 5–7, 9, 25]. При изучении одномерного модельного сдвигового течения ( $V(z) = 0$ ,  $M_y(z) = 0$ ) аналитическое решение краевой задачи (1.3) с нулевой правой частью выражается через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса [7, 16, 17]:

$$\varphi(\omega, z, \mu) = i(f_+(\omega, 0, \mu) f_-(\omega, z, \mu) - f_-(\omega, 0, \mu) f_+(\omega, z, \mu)),$$

$f_{\pm}(\omega, z, \mu) = \sqrt{2\beta r(z)} I_{\pm i\lambda}(\beta r(z))$ ,  $r(z) = \omega - \mu M_x(z)$ ,  $\lambda = \sqrt{\beta^2 - 1/4}$ ,  $\beta = k/b_x \mu$ , где  $I_{\pm i\lambda}$  – модифицированная функция Бесселя мнимого индекса  $\pm i\lambda$ . Так как условие Майлса–Ховарда для числа Ричардсона означает, что  $b^2 < 4$ , поэтому  $\beta^2 > 1/4$  и значения  $\lambda$  действительны. Функция  $I_{i\lambda}(\tau)$  при действительных значениях  $\lambda$  и при  $|\tau| < \lambda$  осциллирует. При мнимых значениях  $\lambda$  функция  $I_{i\lambda}(\tau)$  стремится к бесконечности при больших  $\tau$  и нигде не осциллирует при  $\tau > 0$ . Поэтому для того, чтобы значения  $\lambda$  были действительными для любых  $k, \mu$ , достаточно, чтобы  $b^2 < 4$ , что совпадает с условием Майлса–Ховарда для числа Ричардсона [16, 17]. Собственные значения определяются из дисперсионного уравнения:  $I_{i\lambda}(\beta r(0)) I_{-i\lambda}(\beta r(-\pi)) - I_{-i\lambda}(\beta r(0)) I_{i\lambda}(\beta r(-\pi)) = 0$ . Результаты численного решения краевой задачи (1.3) для произвольного одномерного сдвигового течения приведены в [7, 14, 15].

Фазовая структура дальних полей ВГВ, генерируемых точечным источником возмущений в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями, зависит от поведения стационарных точек фазовой функции  $S = t(\mu V_x + \nu V_y - \omega_n(\mu, \nu))$ , которые определяются из решения системы

уравнений [6, 7]:  $V_x = x/t = \frac{\partial \omega_n(\mu, \nu)}{\partial \mu}$ ,  $V_y = y/t = \frac{\partial \omega_n(\mu, \nu)}{\partial \nu}$ . Множество точек на горизонтальной плоскости  $(x, y)$ , для которых существуют решения этой системы уравнений, определяет для каждой отдельной моды ВГВ пространственную зону, внутри которой волновое поле осциллирует, вне этой зоны при больших временах волновое поле экспоненциально мало. Поведение волнового поля на границах волновой зоны определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений.

Для реальных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений волновая зона может быть ограничена двумя замкнутыми кривыми: передним и задним фронтом. Передний волновой фронт определяется асимптотикой поведения дисперсионных соотношений при малых волновых числах. Задний волновой фронт зависит от характера асимптотик дисперсионных соотношений при больших волновых числах. При отсутствии течений передний фронт – окружность с радиусом  $Ct$ , где  $C$  – максимальная групповая скорость отдельной волновой моды, а задний фронт стягивается в начало координат. Максимальная групповая скорость ВГВ в стратифицированной среде без учета наличия сдвиговых течений и вращения достигается при  $k = 0$  [2, 6, 7].

Для данного модельного линейного двухмерного распределения сдвигового течения возможно построить асимптотики собственных функций  $\varphi_n(\mu, \nu, z)$  и собственных значений  $\omega_n(\mu, \nu)$  спектральной задачи (1.3) с нулевой правой частью при малых волновых числах. Введем полярные координаты:  $\mu = k \cos \psi$ ,  $\nu = k \sin \psi$ . В результате из (1.3) можно получить

$$\begin{aligned} (\xi_n - (a + bz))^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + (1 - k^2(\xi_n - (a + bz))^2) \varphi_n &= 0 \\ \varphi_n &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\xi_n = \omega_n/k$  и,  $a = a_x \cos \psi + a_y \sin \psi$ ,  $b = b_x \cos \psi + b_y \sin \psi$ . Решение задачи (2.1) при малых значениях волновых чисел ищется в виде [6, 26]

$$\begin{aligned} \varphi_n(k, \psi, z) &= \varphi_n^0(\psi, z) + k^2 \varphi_n^1(\psi, z) + O(k^4) \\ \xi_n(k) &= \xi_n^0(\psi) + k^2 \xi_n^1(\psi) + O(k^4) \end{aligned}$$

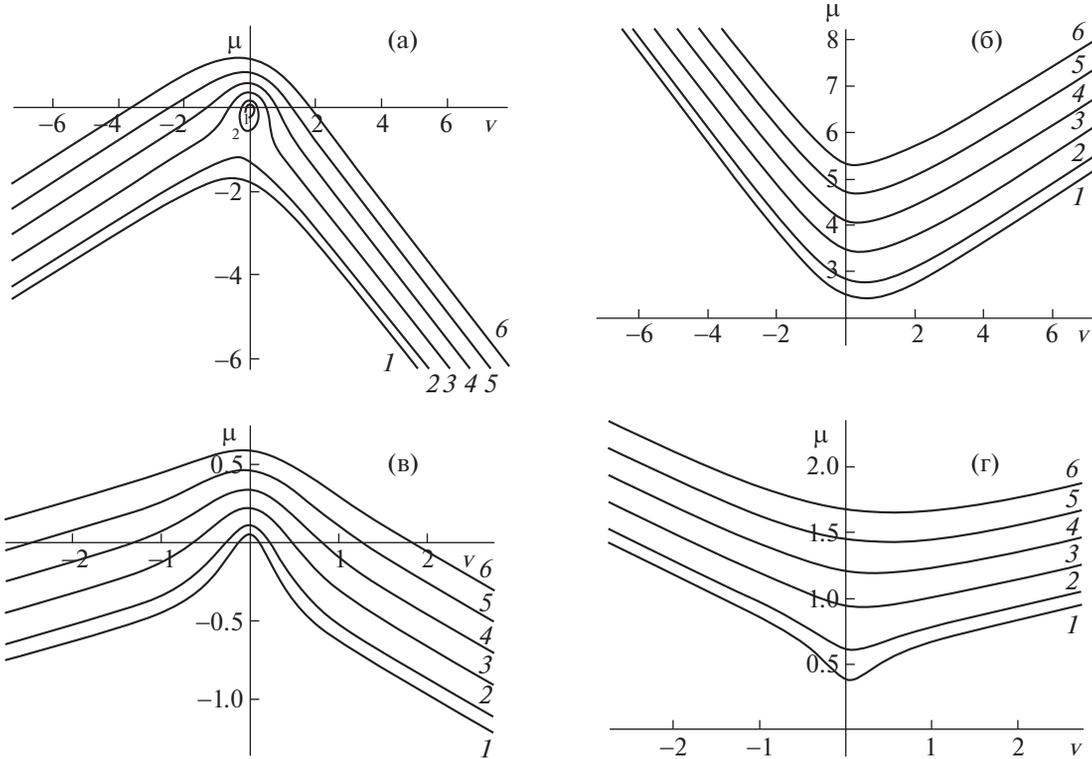
Тогда для определения функций  $\varphi_n^0(\psi, z)$ ,  $\xi_n^0(\psi)$  можно получить

$$\begin{aligned} (\xi_n^0 - (a + bz))^2 \frac{\partial^2 \varphi_n^0}{\partial z^2} + \varphi_n^0 &= 0 \\ \varphi_n^0(\psi, 0) &= \varphi_n^0(\psi, -\pi) = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Общее решение (2.2) имеет вид:  $\varphi_n^0 = \sqrt{\xi} (C_1 \cos(B \ln |\xi|) + C_2 \sin(B \ln |\xi|))$ , где  $\xi = \xi_n^0 - (a + bz)$ ,  $B = \sqrt{1/b^2 - 1/4}$  (в силу условия Майлса–Ховарда  $|b| < 2$ ). Значения  $C_{1,2}$  определяются из граничных условий. В результате можно получить:  $\xi_n^0(\psi) = a + \pi b/D$ ,  $D = \exp(\text{sign}(b)\pi n/B) - 1$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом, при малых волновых числах собственные значения спектральной задачи (1.3) в первом приближении имеют вид:  $\omega_n(k) = (a + \pi b/D)k + O(k^3)$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Собственные значения краевой задачи (1.3) можно представить в виде  $\omega_n(\mu, \nu)$  или  $\mu_n(\nu, \omega)$ . Далее рассматриваются дисперсионные зависимости  $\mu_n(\nu)(\omega)$  – фиксированный параметр). В использованных моделях линейных двухмерных сдвиговых течений параметр  $a < 1$ , это означает, что амплитуды скорости сдвиговых течений на поверхности не превышают (по порядку величины) максимальной групповой скорости распространения ВГВ, что наблюдаемо в условиях Мирового океана [3, 4, 18–20]. Параметр  $\omega$  определяет отношение частоты свободной волны к значению частоты плавучести, и в численных расчетах использовались типичные значения этого параметра, наблюдаемые при измерении ВГВ в реальных океанических условиях [3, 4, 18–20].



**Рис. 1.** Нижние (а, в) и верхние (б, г) ветви дисперсионной кривой: 1–6 –  $\omega = 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ ;  $U(z) = 2\pi/15$  (а, б),  $U(z) = 6\pi/15$  (в, г),  $V(z) = 2\pi/15 + 0.2z$  (а, б, в, г).

В настоящей работе используется гидрологическая модель двумерного линейного сдвигового течения, в том числе с возможностью изменением своего направления с увеличением глубины. Это означает, в частности, что выбрав соответствующую систему координат можно, без ограничения общности, рассматривать постоянную и линейную зависимости компонент сдвигового течения от глубины. Действительно, пусть  $(U'(z), V'(z))$  – компоненты вектора скорости сдвигового течения в системе координат  $Ox'y'$ , которая получается из исходной системы координат  $Oxz$  поворотом на некоторый угол  $\alpha$  относительно начала координат. Тогда в новой системе координат компоненты вектора сдвигового течения можно представить в виде

$$U'(z) = (a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha) + (b_x \cos \alpha + b_y \sin \alpha)z = ax' + bx'z$$

$$V'(z) = (-a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha) + (-b_x \sin \alpha + b_y \cos \alpha)z = ay' + by'z$$

Выбирая угол поворота  $\alpha$  таким образом, что  $\operatorname{tg} \alpha = -b_x/b_y$ , можно получить:  $bx' = 0$ , и, соответственно, если  $\operatorname{tg} \alpha = b_y/b_x$ , то  $by' = 0$ .

На рис. 1 представлены результаты расчетов дисперсионных кривых  $\mu(v)$  для различных значений частоты  $\omega$  и параметров течения: линии 1–6 –  $\omega = 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ . Здесь и далее все расчеты приведены для первой волновой моды, индекс  $n$  опущен. Исходя из многочисленных результатов океанологических наблюдений фоновых сдвиговых течений в различных акваториях Мирового океана [3, 4, 18–20], для численных расчетов использовались следующие модельные распределения двумерного сдвигового течения по глубине – функций  $U(z), V(z)$ :  $U(z) = 2\pi/15$  (рис. 1а, б, 2–4),  $U(z) = 6\pi/15$  (рис. 1в, г, 5–6),  $V(z) = 2\pi/15 + 0.2z$  (рис. 1–6).

На рис. 2–6 изображены результаты расчетов линий равной фазы, которые имеют вид параметрического (с параметром  $v$ ) семейства кривых

$$x(v) = \frac{S}{\mu(v) - v\mu'(v)}, \quad y(v) = \frac{-\mu'(v)S}{\mu(v) - v\mu'(v)}$$

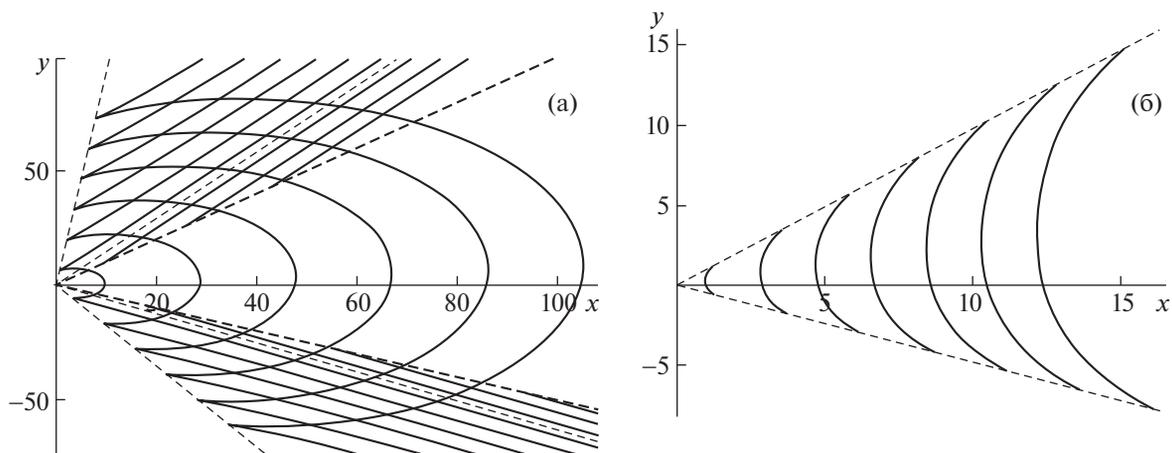


Рис. 2. Линии равной фазы  $S = 2\pi k$  для нижней (а) и верхней (б) ветвей:  $k = -3, -2, \dots, 5$  (а),  $k = -2, -1, \dots, 2$  (б).

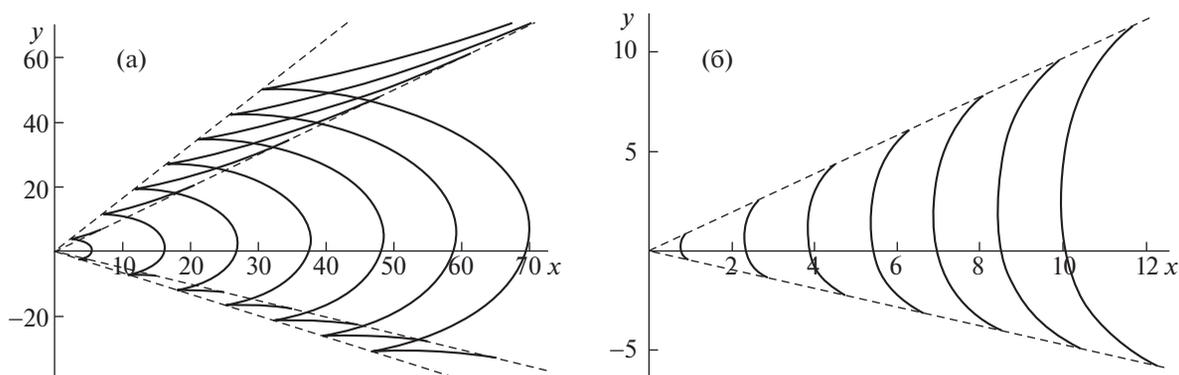


Рис. 3. Линии равной фазы  $S = 2\pi k$ ,  $k = -4, -3, \dots, 2$  для нижней (а) и верхней (б) ветвей.

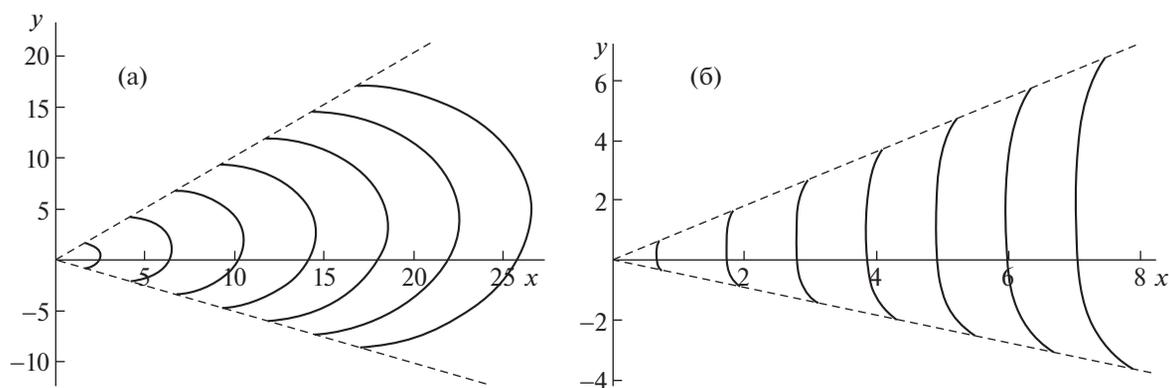


Рис. 4. Линии равной фазы  $S = 2\pi k$ ,  $k = -4, -3, \dots, 2$  для нижней (а) и верхней (б) ветвей.

Значения параметров для численных расчетов были следующие:  $\omega = 0.45$ ,  $t = 35$  (рис. 2),  $\omega = 0.75$ ,  $t = 21$  (рис. 3, б),  $\omega = 1.5$ ,  $t = 11$  (рис. 4),  $\omega = 0.125$ ,  $t = 125$  (рис. 5). Сплошные линии на рис. 2–6 – линии равной фазы, штриховые линии – волновые фронты.

Численные расчеты показывают, что двумерность сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии дисперсионных зависимостей  $\mu(v)$  относительно оси  $Oz$ . Различный харак-

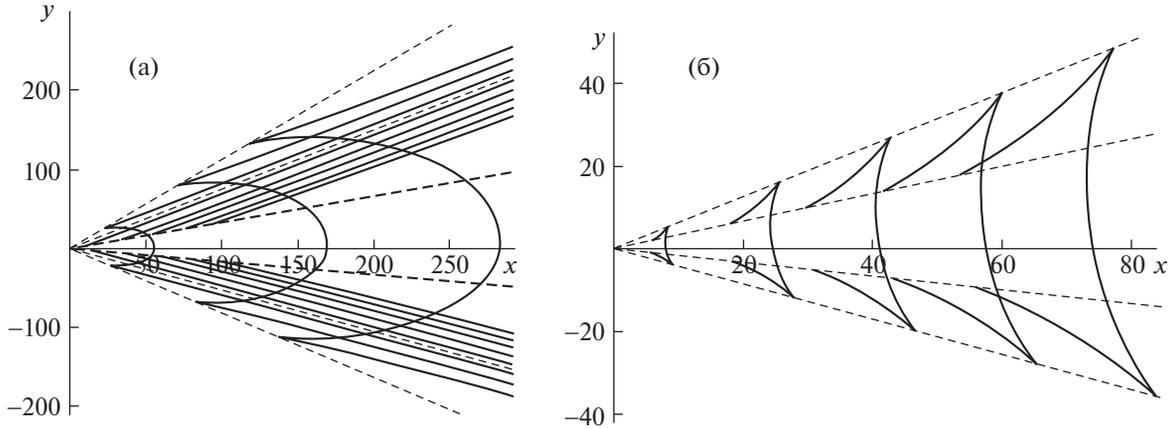


Рис. 5. Линии равной фазы  $S = 2\pi k$  для нижней (а) и верхней (б) ветвей:  $k = 0, 1, \dots, 7$  (а),  $k = -2, -1, \dots, 2$  (б).

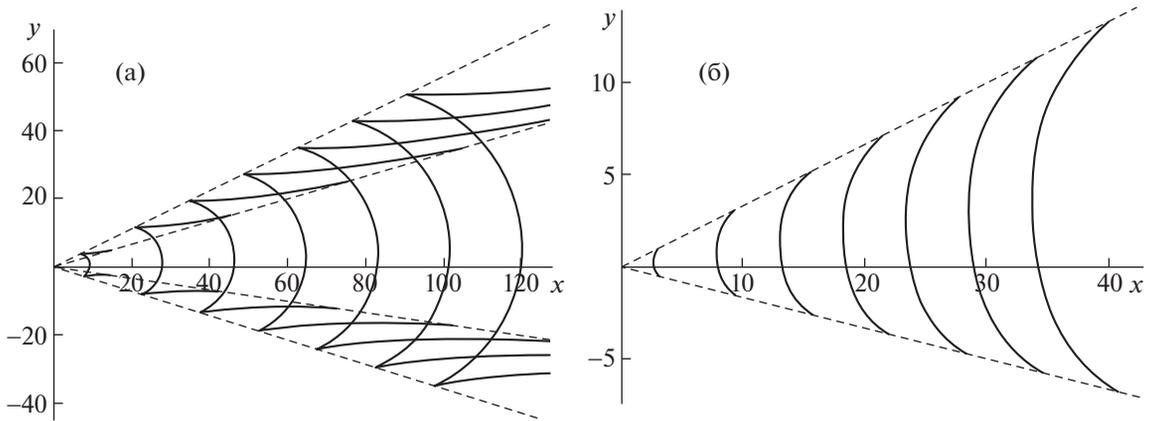


Рис. 6. Линии равной фазы  $S = 2\pi k$ ,  $k = -4, -3, \dots, 2$  для нижней (а) и верхней (б) ветвей.

тер поведения функций  $\mu(v)$  при  $v \rightarrow \pm\infty$  может приводить к появлению дополнительных волновых фронтов. Каждая дисперсионная кривая при фиксированных значениях параметра  $\omega$  состоит из нескольких ветвей: нижней и верхней. Значения  $\mu(v)$  на верхней ветви всегда больше нуля, и эта ветвь представляет собой одну разомкнутую линию с одним минимумом, причем значение этого минимума уменьшается при уменьшении параметра  $\omega$ . Значения  $\mu(v)$  на нижней ветви могут быть как положительными, так и отрицательными, и эта ветвь может состоять как из одной, так и двух линий. При относительно небольших значениях параметра  $\omega$  нижняя ветвь может состоять из одной замкнутой и одной разомкнутой кривой. Далее, по мере увеличения частоты  $\omega$  происходит качественная перестройка этих двух кривых, и при некотором значении  $\omega$  ветви могут сливаться, образуя одну омега-образную линию, отвечающую многозначности функции  $\mu(v)$  для определенных интервалов значений  $v$ . По мере увеличении параметра  $\omega$  происходит размыкание замкнутых кривых, и нижние ветви дисперсионных кривых становятся однозначными функциями переменной  $v$ .

Двухмерность сдвиговых течений является причиной заметной пространственной (относительно оси  $Ox$ ) асимметрии линий равной фазы. Генерируемая волновая система состоит из волн двух типов: кольцевых (поперечных) и клиновидных (продольных). Кольцевые (поперечные) волны занимают все пространственную область внутри волнового клина с углом раствора  $\gamma$  ( $\gamma = |\arctg(\mu'(v_1^*)) - \arctg(\mu'(v_2^*))|$ ), где  $v_{1,2}^*$  – корни уравнения  $\mu''(v) = 0$  для рис. 2а, 3а, 5а, б, 6а, и  $v_{1,2}^* = \pm\infty$  для рис. 2б, 3б, 4а, б, 6б и могут иметь форму вогнутых (рис. 3а, 4а, 5а, б, 6а) или выпуклых (рис. 2б, 3б, 4б, 6б) дуг. Клиновидные (продольные) волны каждой моды ограничены как

волновым фронтом с углом раствора  $\gamma$ , так и одной (рис. 3а, 5б, 6а) или двумя (рис. 2а, 5а) парами внутренних волновых фронтов. Внутренние фронты на рис. 3а, 5б, 6а, а также внутренняя пара из двух пар внутренних фронтов на рис. 2а, 5а задаются уравнениями  $y = -\mu'(\pm\infty)x$ . Внешняя пара из двух пар волновых фронтов на рис. 2а, 5а (т.е. средняя пара из трех пар фронтов) определяется уравнениями  $y = -\mu'(v_{1,2})x$ , где  $v_{1,2}$  – корни уравнения  $\mu'(v) = \mu(v)/v$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о генерации полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений в конечном слое стратифицированной среды с двумерными модельными линейными сдвиговыми течениями в предположении постоянства частоты плавучести. Построены асимптотики дисперсионных зависимостей при малых волновых числах. Численно исследованы дисперсионные соотношения и фазовые картины возбуждаемых волновых полей для различных режимов волновой генерации, характерных для реальных условий Мирового океана. Показано, что учет двухмерности сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии как дисперсионных кривых, так и линий равной фазы. Аналитические оценки и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и сдвиговых скоростей качественно верно могут описывать фазовую структуру ВГВ.

Асимптотики дисперсионных соотношений позволяют в дальнейшем исследовать более реалистичную задачу изучения динамики ВГВ в океане медленноменяющимися и нестационарными параметрами. В этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей. Конкретный выбор фазовой функции (модельных интегралов) определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений, зависящих от реальной гидрологии океана. Аналитические выражения дисперсионных кривых также могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки дистанционных методов обнаружения ВГВ методами радиолокации.

Полученные результаты дают возможность эффективно рассчитывать фазовую структуру волновых полей, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и сдвиговых течений.

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов (№ АААА-А20-120011690131-7), И.Ю. Владимиров (№ FMWE-2021-0002) и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fabrikant A.L., Stepanyants Yu.A.* Propagation of waves in shear flows. World Scientific Publishing, 1998. 304 p.
2. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001. 406 p.
3. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
4. *Velarde M.G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
5. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K.* Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Булатов В.В.* Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. М.: Изд-во "ОнтоПринт", 2021. 277 с.
8. *Young W.R., Phines P., Garret C.J.R.* Shear flows dispersion, internal waves and horizontal mixing // J. Phys. Oceanography, 1982. V. 2(6). P. 515–527.
9. *Bouruet-Aubertot P.I., Thorpe S.A.* Numerical experiments of internal gravity waves an accelerating shear flow // Dyn. Atm. Oceans. 1999. V. 29. P. 41–63.
10. *Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G.* Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory // J. Fluid Mech. 2018. V. 846. P. 752–788.
11. *Fraternali F., Domenicale L., Staffilan G., Tordella D.* Internal waves in sheared flows: lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space // Phys. Rev. 2018. V. 97. № 6. P. 063102.
12. *Slepyshev A.A., Voronnikov D.I.* Generation of vertical fine structure by internal waves in a shear flows // Open J. Fluid Mechanics, 2019. V. 9. P. 140–157.

13. *Howland C.J., Taylor J.R., Caulfield C.P.* Shear-induced breaking of internal gravity waves // *J. Fluid Mechanics*. 2021. V. 921. A24.
14. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане // *Изв. РАН. ФАО*. 2021. Т. 57. № 3. С. 362–373.
15. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю. Фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в океане со сдвигом скорости течений // *Морск. гидрофиз. журн.* 2021. Т. 37. № 4. С. 473–489.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // *Russ. J. Earth Sciences*. 2020. V. 20. ES4004
17. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде с модельными распределениями сдвиговых течений // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. № 5. С. 56–60.
18. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // *J. Oceanography*. 2018. V. 74 (2). P. 147–167.
19. *Frey D.I., Novigatsky A.N., Kravchishina M.D., Morozov E.G.* Water structure and currents in the Bear Island Trough in July–August 2017 // *Russ. J. Earth Sciences*. 2017. V. 17. ES3003.
20. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russ. J. Earth. Science*. 2020. V. 20. ES2006.
21. *Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10 (4). P. 495–509.
22. *Hirota M., Morrison P.J.* Stability boundaries and sufficient stability conditions for stably stratified, monotonic shear flows // *Phys. Letters A*. 2016. 380 (21). P. 1856–1860.
23. *Churilov S.* On the stability analysis of sharply stratified shear flows // *Ocean Dynamics*. 2018. 68. P. 867–884.
24. *Carpenter J.R., Balmforth N.J., Lawrence G.A.* Identifying unstable modes in stratified shear layers. // *Phys. Fluids*. 2010. 22. P. 054104.
25. *Gavrileva A.A., Gubarev Yu.G., Lebedev M.P.* The Miles theorem and the first boundary value problem for the Taylor–Goldstein equation // *J. Appl. Industrial Math.* 2019. 13 (3). P. 460–471.
26. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1984. 536 с.

УДК 532.59:539.3

## ЗАДАЧА КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ И НЕРАВНОМЕРНО СЖАТЫМ ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

© 2022 г. И. В. Стурова

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия**E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.

После доработки 15.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

В линейном приближении решена трехмерная нестационарная задача о генерации изгибно-гравитационных волн, вызванных начальным осесимметричным возмущением жидкости, на поверхности которой плавают безграничный ледяной покров, моделируемый тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий. В невозмущенном состоянии обе горизонтальные компоненты скорости жидкости линейно меняются по глубине. Получено интегральное представление решения, описывающего поведение ледяного покрова.

*Ключевые слова:* плавающая упругая пластина, изгибно-гравитационные волны, неравномерные сжимающие усилия, сдвиговые течения, эволюция начального возмущения

DOI: 10.31857/S0568528122040107

В последние десятилетия активно исследуются волновые движения, возникающие в жидкости, которая ограничена сверху плавающей тонкой упругой пластиной. Это необходимо для проектирования и эксплуатации искусственных платформ больших размеров, а также учета плавающего ледяного покрова [1]. Волны, возникающие в такой жидкости, называются изгибно-гравитационными (ИГВ), так как их свойства зависят как от свойств жидкости, так и от свойств упругого покрытия. К настоящему времени сравнительно хорошо исследованы процессы генерации, развития и распространения пространственных ИГВ в покоящейся в невозмущенном состоянии среде или в потоке жидкости, текущей с постоянной по глубине скоростью (см., например, [2]). Однако в реальных морских условиях вертикальное распределение скорости течения в некоторых случаях показывает значительные изменения величины и направления по глубине. Этот факт свидетельствует о том, что исследование ИГВ следует проводить также в рамках таких теоретических моделей, которые учитывают вертикальную структуру течений. Большое число исследований посвящено развитию вынужденных поверхностных волн при наличии сдвиговых течений в жидкости под свободной поверхностью (см. библиографию в [3, 4]). Трехмерные задачи о поведении ИГВ в жидкости со сдвиговым течением пока не рассматривались.

Наиболее простой нестационарной задачей в волновой гидродинамике является так называемая задача Коши–Пуассона о развитии во времени начального возмущения на верхней границе жидкости. В данной работе представлено решение линейной задачи о генерации волн, вызванных начальным осесимметричным возмущением в жидкости под ледяным покровом, который моделируется тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий. Сплошной безграничный ледяной покров плавает на поверхности потока жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Построено интегральное представление решения, описывающее поведение ледяного покрова. Двумерный случай этой задачи исследован в [5].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях поток идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины  $H$  с вертикальным сдвигом скорости. Система декартовых координат  $x, y, z$  введена так, что оси  $x$  и  $y$  лежат на невозмущенной горизонтальной верхней границе жидкости, а ось  $z$  направлена вертикально вверх. Вектор скорости невозмущенного

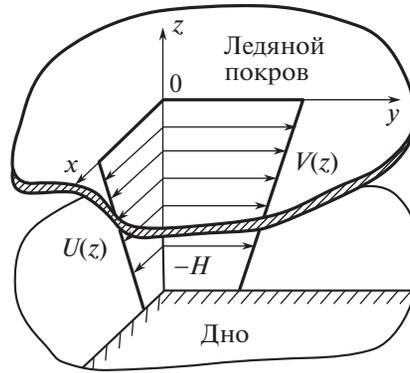


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии.

потока обозначим  $\mathbf{V} = (U(z), V(z), 0)$ , где компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  имеют линейную зависимость

$$U(z) = U_0 + \alpha z, \quad V(z) = V_0 + \beta z$$

На поверхности потока жидкости плавает сплошной ледяной покров, который моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины и плотности. Предполагается, что в упругой пластине существуют продольные, поперечные и сдвиговые напряжения, и во все моменты времени жидкость находится в контакте с пластиной. Схема течения приведена на рис. 1.

В начальный момент времени  $t = 0$  верхняя граница жидкости отклоняется от невозмущенного горизонтального положения. Обозначим  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми. Развитие последующего волнового движения в жидкости описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + w \frac{d\mathbf{V}}{dz} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

где  $p(x, y, z, t)$  — динамический добавок давления,  $\rho$  — плотность жидкости.

Кинематическое и динамическое условия на верхней границе жидкости ( $z = 0$ ) имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = w \quad (1.2)$$

$$D \Delta_2^2 \eta + Q_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2Q_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + M \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho g \eta = p, \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

Здесь  $\eta(x, y, t)$  — вертикальный прогиб ледяного покрова, его цилиндрическая жесткость равна  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $M = \rho_1 h$ ;  $E, \rho_1, h, \nu$  — модуль Юнга, плотность, толщина и коэффициент Пуассона;  $Q_1, Q_2, Q_3$  — продольное, поперечное и сдвиговое сжатие по соответствующим направлениям. Первое слагаемое в динамическом условии описывает упругие свойства ледяного покрова, сумма последующих трех слагаемых представляет влияние сжимающих напряжений в нем, а пятое слагаемое — его инерционные свойства. В дальнейшем предполагается, что инерционное слагаемое мало по сравнению с другими слагаемыми и им можно пренебречь.

На ровном горизонтальном дне выполняется условие непротекания

$$w = 0 \quad (z = -H) \quad (1.4)$$

Начальные условия равны

$$\eta = \eta_0(r), \quad |\mathbf{v}| = 0 \quad (t = 0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.5)$$

где  $\eta_0(r)$  — осесимметричное начальное возвышение верхней границы жидкости.

Для решения задачи (1.1)–(1.5) используется двойное преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\lambda, \mu, z, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z, t) \exp[-i(\lambda x + \mu y)] dx dy \quad (1.6)$$

Аналогичные преобразования вводятся для остальных искомых функций. В результате система уравнений (1.1) примет вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + Z\tilde{u} + \alpha\tilde{w} + i\lambda P = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + Z\tilde{v} + \beta\tilde{w} + i\mu P = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + Z\tilde{w} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad i(\lambda\tilde{u} + \mu\tilde{v}) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

где  $Z(\lambda, \mu, z) = i[\lambda U(z) + \mu V(z)]$ ,  $P = \tilde{p}/\rho$ .

Дифференцируя уравнения в (1.7) по  $z$  и используя уравнения (1.8), сведем данную систему к одному уравнению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + Z \right] \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{w} \right) = 0, \quad k^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

С учетом граничного условия на дне (1.4) получим

$$\tilde{w} = A(\lambda, \mu, t) \text{sh}[k(z + H)]$$

где  $A(\lambda, \mu, t)$  – неизвестная функция. Выполняя двойное преобразование Фурье для кинематического (1.2) и динамического (1.3) условий, находим

$$\tilde{p}|_{z=0} = -\frac{\rho}{k} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + i\zeta_1 A \right] \text{ch}(kH) - \frac{i\zeta_2}{k} A \text{sh}(kH) \Big\}$$

где  $\zeta_1(\lambda, \mu) = \lambda U_0 + \mu V_0$ ,  $\zeta_2(\lambda, \mu) = \lambda\alpha + \mu\beta$ . В результате уравнение для определения  $\tilde{\eta}(\lambda, \mu, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + i \left[ 2\zeta_1 - \frac{\zeta_2}{k} \text{th}(kH) \right] \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \left[ \left( \frac{k}{\rho} \zeta_3 + \frac{\zeta_1 \zeta_2}{k} \right) \text{th}(kH) - \zeta_1^2 \right] \tilde{\eta} = 0 \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0(k), \quad \partial \tilde{\eta} / \partial t = 0 \quad (t = 0) \quad (1.10)$$

где  $\zeta_3(\lambda, \mu) = Dk^4 - \lambda^2 Q_1 - \mu^2 Q_2 - 2\lambda\mu Q_3 + \rho g$ . Коэффициенты уравнения (1.9) не зависят от времени и это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение.

Следуя [6], выведем дисперсионное соотношение для ИГВ в рассматриваемой задаче. Решение уравнения (1.9) пропорционально  $\exp[-i(\zeta_1 + \omega_{\pm})t]$ , где

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(k, \theta) &= \pm \sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2} - \zeta_4 \quad (1.11) \\ \omega_0^2(k, \theta) &= \frac{k}{\rho} \zeta_3 \text{th}(kH), \quad \zeta_4(k, \theta) = \frac{\zeta_2 \text{th}(kH)}{2k}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Здесь функция  $\omega_0(k, \theta)$  является дисперсионным соотношением для ИГВ в жидкости без сдвига скорости. С учетом инерционного слагаемого в (1.3) (т.е. при  $M \neq 0$ ) дисперсионное соотношение для ИГВ в системе жидкость – упругая пластина с неравномерным сжатием дано в работах [2, 7, 8]. Ограничиваясь положительным значением в левой части (1.11), получим зависимость  $\omega(k, \theta)$  для частоты ИГВ в жидкости со сдвигом скорости

$$\omega(k, \theta) = \sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2} - \zeta_4 \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.9) с начальными условиями (1.10) имеет вид

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 \exp(i\zeta_5 t) \left[ \cos(\zeta_6 t) - \frac{i\zeta_5}{\zeta_6} \sin(\zeta_6 t) \right]$$

где

$$\zeta_5(k, \theta) = \zeta_4 - \zeta_1, \quad \zeta_6(k, \theta) = \sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2}$$

Для начального возмущения

$$\eta_0(r) = a \exp(-br^2)$$

после двойного преобразования Фурье (1.6) получим

$$\tilde{\eta}_0(k) = \frac{\pi a}{b} \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right)$$

Далее введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{(x, y)}{H}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{g}{H}} t, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \quad \bar{b} = H^2 b, \quad \bar{k} = Hk, \quad (\bar{U}_0, \bar{V}_0) = \frac{(U_0, V_0)}{\sqrt{gH}} \\ \bar{D} &= \frac{D}{\rho g H^4}, \quad \bar{Q}_j = \frac{Q_j}{\rho g H^2} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sqrt{\frac{H}{g}} \frac{(\alpha, \beta)}{2}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{H}{g}} \omega \end{aligned}$$

После выполнения обратных преобразований Фурье и перехода в подвижную систему координат (черта сверху далее опущена)

$$X = x - U_0 t, \quad Y = y - V_0 t$$

получим решение для вертикального прогиба ледяного покрова

$$\eta(X, Y, t) = \frac{1}{4\pi b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty k \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right) \left[1 + \frac{\gamma(k, \theta)}{\sigma(k, \theta)}\right] \cos \psi(k, \theta, t) dk \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(k, \theta) &= f(\theta) \operatorname{th} k - k(U_0 \cos \theta + V_0 \sin \theta), \quad f(\theta) = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ \sigma(k, \theta) &= \sqrt{\omega_0^2(k, \theta) + [f(\theta) \operatorname{th} k]^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2(k, \theta) &= k \operatorname{th} k [Dk^4 - Q(\theta)k^2 + 1], \quad Q(\theta) = Q_1 \cos^2 \theta + Q_2 \sin^2 \theta + Q_3 \sin(2\theta) \\ \psi(k, \theta, t) &= (X \cos \theta + Y \sin \theta)k - \omega(k, \theta)t, \quad \omega(k, \theta) = \sigma(k, \theta) - f(\theta) \operatorname{th} k \end{aligned} \quad (1.15)$$

При  $D = 0$ ,  $Q_1 = Q_2 = -T$  ( $T > 0$ ),  $Q_3 = 0$  решение (1.13) является решением задачи Коши–Пуассона для жидкости со свободной поверхностью с учетом коэффициента поверхностного натяжения  $T$ . Решение этой задачи при наличии только одной компоненты горизонтальной скорости основного потока, т.е.  $V(z) = 0$ , дано в [6]. Выполнен подробный анализ поведения капиллярно-гравитационных волн в зависимости от глубины жидкости и параметра сдвига.

Волновое движение, описываемое решением (1.13), становится осесимметричным только при отсутствии основного потока  $U(z) = V(z) = 0$  и равномерном сжатии ледяного покрова  $Q_1 = Q_2$ ,  $Q_3 = 0$ . В этом случае решение (1.13) сводится к однократному интегралу

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2b} \int_0^\infty k \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right) J_0(kr) \cos[\omega_1(k)t] dk \quad (1.16)$$

где

$$\omega_1(k) = \sqrt{k \operatorname{th} k (Dk^4 - Q_1 k^2 + 1)}$$

$J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Решение данной задачи для бесконечно глубокой жидкости и ненапряженного ледяного покрова ( $Q_1 = 0$ ) получено в [9]. Используя результаты работы [10], можно определить равномерные и неравномерные асимптотические решения для (1.16) при больших значениях  $r$  и  $t$ , выражающиеся через функцию Эйри и ее производную.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Зависимость  $\omega(k, \theta)$  в (1.15) (в размерных переменных (1.12)) устанавливает связь между частотой  $\omega$  и волновым числом ИГВ  $k$  при различных значениях угла  $\theta$ . Для существования вещественного значения частоты  $\omega$  необходимо, чтобы при всех возможных значениях  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  подкоренное выражение в (1.14) было неотрицательным. Это условие гарантирует устойчивость плавающей упругой пластины. При отсутствии сдвигового течения все значения  $q_j \equiv Q_j/\sqrt{D}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) не должны превышать 2 (см. подробнее [8]). С возрастанием сдвигового сжатия  $q_3$  область возможных значений  $q_1$  и  $q_2$  уменьшается. Наличие сдвигового потока приводит к некоторому увеличению области допустимых значений  $q_1$  и  $q_2$  при фиксированном значении  $q_3$ . Для определения допустимых значений  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) необходимо при заданных параметрах  $D, \alpha, \beta$  и фиксированных двух значениях параметров сжатия, например  $q_1$  и  $q_3$ , для каждого значения  $\theta$  решить систему уравнений

$$G(k_*, \theta) = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial k} \right|_{k=k_*} = 0 \tag{2.1}$$

где

$$G(k, \theta) = k[Dk^4 - Q(\theta)k^2 + 1] + f^2(\theta)thk$$

Используя первое уравнение в (2.1), выразим

$$Q(\theta) = [Dk^5 + k + f^2(\theta)thk]/k^3 \tag{2.2}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (2.1), получим уравнение для определения  $k_*(\theta)$

$$2(Dk^4 - 1) + f^2(\theta)(1 - th^2k - 3thk/k) = 0$$

Это уравнение всегда имеет только один положительный корень. Используя (2.2), находим  $Q_*(\theta) = Q(\theta)|_{k=k_*}$  и определяем минимальное положительное значение  $q_2$  при изменении  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$q_2(\theta) = \frac{Q_*(\theta)/\sqrt{D} - q_1 \cos^2 \theta - q_3 \sin(2\theta)}{\sin^2 \theta}$$

Значение фазовой скорости ИГВ  $c(k, \theta)$  равно

$$c(k, \theta) = \omega(k, \theta)/k \tag{2.3}$$

Эта характеристика важна для объяснения картины волнового движения.

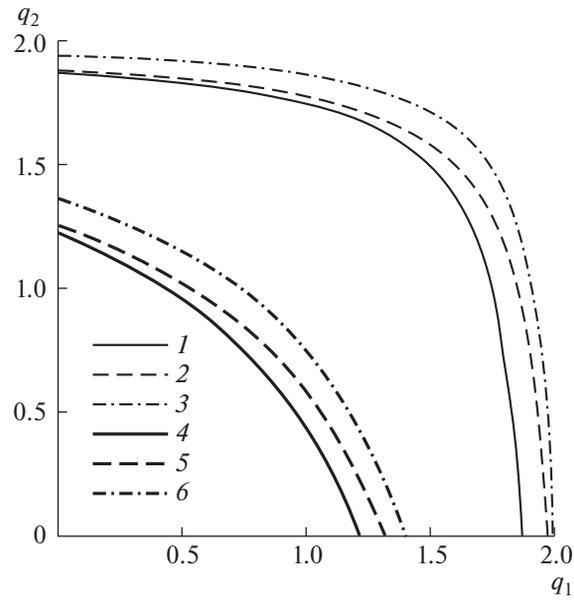
3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Представленные ниже расчеты выполнены при следующих параметрах ледяного покрова и жидкости:

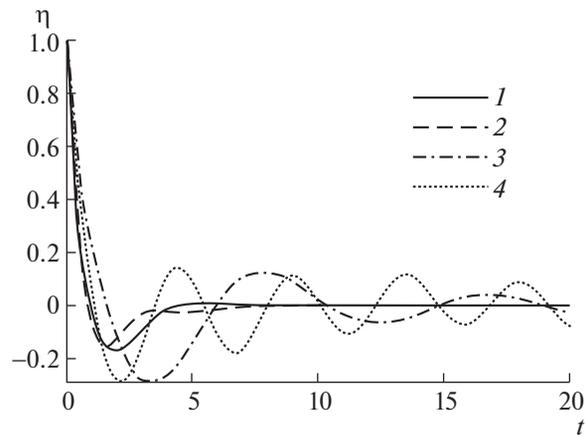
$$E = 5 \times 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.5 \text{ м}, \quad \rho = 1025 \text{ кг/м}^3, \quad H = 20 \text{ м}$$

На рис. 2 для двух значений  $q_3 = 0.5, 1.25$  при различных параметрах сдвигового потока  $\alpha$  и  $\beta$  представлены кривые, которые на плоскости  $(q_1, q_2)$  ограничивают область устойчивости упругой пластины, т.е. для значений  $q_1$  и  $q_2$  ниже этих кривых при заданных параметрах  $q_3, \alpha, \beta$  и всех возможных значениях угла  $\theta$  подкоренное выражение в (1.14) является неотрицательным. На рис. 2 кривые 1–3 относятся к случаю  $q_3 = 0.5$ , кривые 4–6 – к случаю  $q_3 = 1.25$ . Кривые 1, 4 соответствуют значениям  $\alpha = \beta = 0$ , кривые 2, 5 – значениям  $\alpha = 0.5, \beta = 0$ , а кривые 3, 6 – значениям  $\alpha = 0.5, \beta = 0.3$ . Видно, что с увеличением параметров сдвига  $\alpha$  и  $\beta$  область допустимых значений  $q_1$  и  $q_2$  увеличивается.

Представленные ниже прогибы ледяного покрова  $\eta(X, Y, t)$ , определенные в (1.13), вычислены для четырех вариантов значений параметров сжатия и сдвигового потока (см. табл. 1) при  $bH^2 = 2$ . На рис. 3 представлены зависимости функции  $\eta(0, 0, t)$  в эпицентре начального возмущения от



**Рис. 2.** Области значений  $q_1$  и  $q_2$ , которые ограничивают зоны устойчивости упругой пластины: 1–3 –  $q_3 = 0.5$ ; 4–6 –  $q_3 = 1.25$ ; 1, 4 –  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ ; 2, 5 –  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0)$ ; 3, 6 –  $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.3)$ .

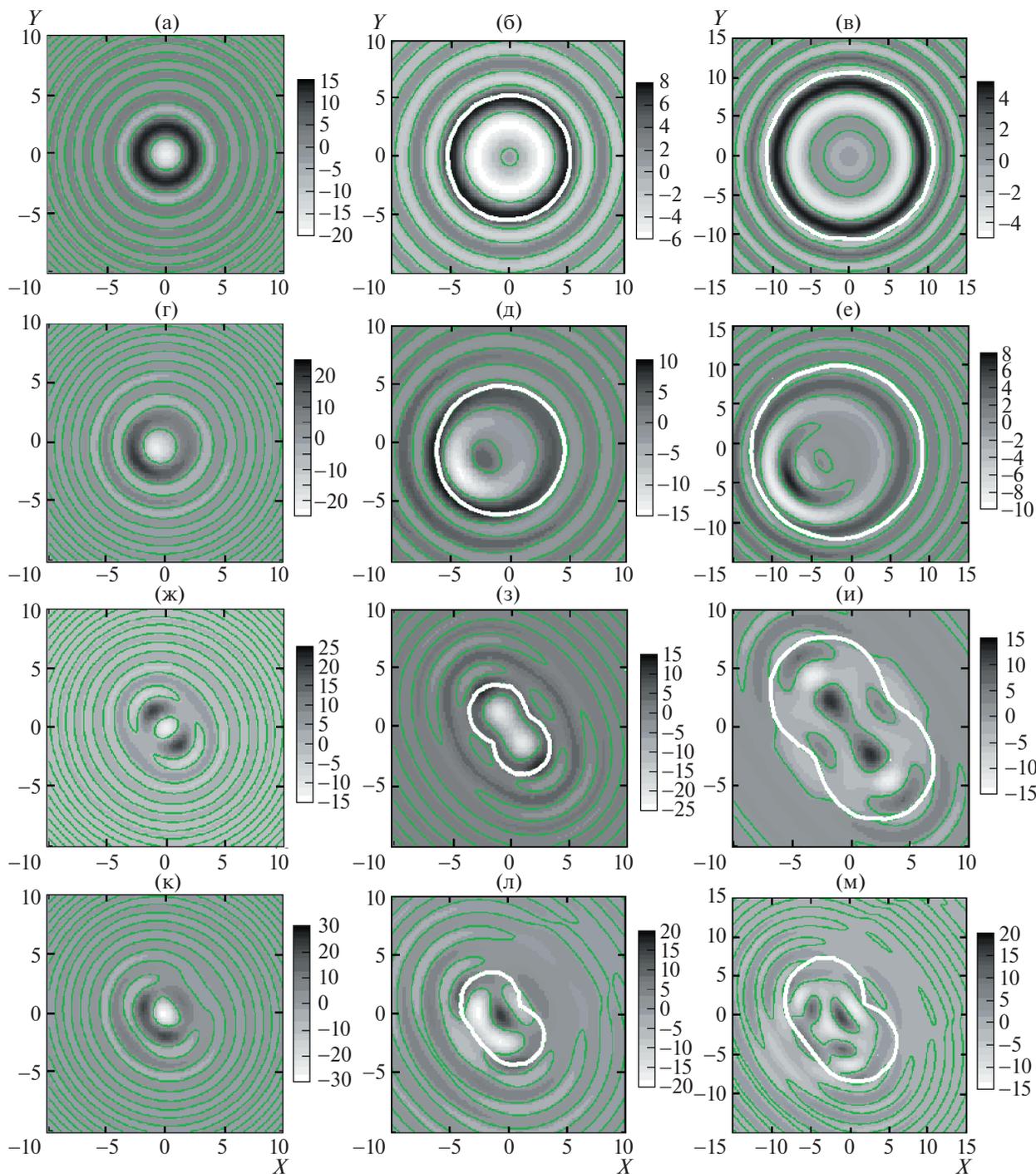


**Рис. 3.** Прогобы ледяного покрова  $\eta(0, 0, t)$  в зависимости от времени. Номера кривых 1–4 соответствуют номеру варианта в табл. 1.

времени. Номера кривых соответствуют номеру варианта в табл. 1. Видно, что при отсутствии сжимающих усилий в ледяном покрове его прогиб быстро убывает (кривые 1, 2), тогда как при наличии сжимающих усилий (кривые 3, 4) функция  $\eta(0, 0, t)$  имеет осциллирующий характер с довольно слабым затуханием колебаний особенно для варианта 4, в котором присутствует сдвиговое течение.

**Таблица 1**

Вариант	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\alpha$	$\beta$	$U_0$	$V_0$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.5	0.3	0.6	0.4
3	1.5	1.2	0.5	0	0	0	0
4	1.5	1.2	0.5	0.5	0.3	0.6	0.4



**Рис. 4.** Волновые картины вертикальных прогибов ледяного покрова для трех моментов времени:  $t = 2$  (а, г, ж, к);  $t = 5$  (б, д, з, л);  $t = 10$  (в, е, и, м). Палитра справа показывает значения функции  $10^2 \cdot \eta(X, Y, t)$ . Исходные параметры представлены в табл. 1: вариант 1 (а, б, в); вариант 2 (г, д, е); вариант 3 (ж, з, и); вариант 4 (к, л, м). Тонкие линии соответствуют нулевым изолиниям функции  $\eta(X, Y, t)$ . Замкнутая кривая, показанная жирной линией белого цвета, соответствует волновому фронту ИГВ.

На рис. 4 представлены двумерные картины вертикальных прогибов ледяного покрова  $10^2 \cdot \eta(X, Y, t)$  для трех моментов времени:  $t = 2$  (рис. 4а, г, ж, к);  $t = 5$  (рис. 4б, д, з, л);  $t = 10$  (рис. 4в, е, и, м). Тонкие линии соответствуют нулевым изолиниям функции  $\eta(X, Y, t)$ . Для вари-

анта 1 картина волнового движения является осесимметричной и соответствует решению (1.16), так как для этого варианта отсутствуют сжимающие усилия в ледяном покрове и жидкость является первоначально покоящейся. Во всех остальных рассмотренных вариантах волновое движение не является осесимметричным. Для значений времени  $t = 5$  и  $t = 10$  замкнутая кривая, показанная жирной линией белого цвета, соответствует волновому фронту ИГВ, который определяется как произведение  $tc(K, \theta)$  аналогично [6]. Значение фазовой скорости в (2.3) вычисляется для волнового числа  $K = 2\sqrt{b}$ , при котором степень в экспоненциальном множителе подынтегрального выражения в (1.13) равна  $-1$ , и значение  $\theta$  меняется от 0 до  $2\pi$ . При отсутствии неравномерных сжимающих усилий в ледяном покрове (варианты 1 и 2) волновой фронт представляет собой окружность, координаты центра которой и радиус зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  сдвигового потока.

При наличии неравномерного сжатия в ледяном покрове (варианты 3, 4) форма волнового фронта становится более сложной, так как она определяется совместным влиянием сжимающих усилий и сдвигового потока. Для рассмотренных четырех вариантов наименьшие волновые возмущения наблюдаются для варианта 1, а наибольшие – для варианта 4.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена нестационарная трехмерная задача о развитии начального осесимметричного возмущения в жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает ледяной покров. В невозмущенном состоянии продольная и поперечная составляющие скорости жидкости линейно меняются с глубиной. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий.

В рамках линейной теории волн построено интегральное представление решения, описывающего поведение ледяного покрова. Показано, что наличие сжимающих усилий в ледяном покрове и сдвигового течения в жидкости существенно влияет на поведение вертикальных прогибов ледяного покрова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A.* Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18. № 4. P. 241–253.
2. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ. 2017. 360 с.
3. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М. и др.* Динамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка. 1988. 192 с.
4. *Li Y., Smeltzer B.K., Ellingsen S.Å.* Transient wave resistance upon a real shear current // Eur. J. Mech. B / Fluids. 2019. V. 73. P. 180–192.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.012>
5. *Стурова И.В.* Задача Коши–Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 1–10.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528122010108>
6. *Ellingsen S.Å.* Initial surface disturbance on a shear current: the Cauchy–Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. № 8. P. 082104.  
<https://doi.org/10.1063/1.4891640>
7. *Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
8. *Стурова И.В.* Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 2. С. 63–71.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528121020110>
9. *Maiti P., Mandal B.N.* Water waves generated due to initial axisymmetric disturbances in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2005. V. 74. № 9. P. 629–636.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0384-7>
10. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника // ПММ. 2021. Т. 85. № 5. С. 626–634.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823521050039>

## ОДНО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБ ОБЖАТИИ ПОЛОСТИ В ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

© 2022 г. А. Н. Голубятников<sup>а</sup>, Д. В. Украинский<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: d.v.ukrainskiy@gmail.com

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.

После доработки 15.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

Представлено частично сферически-симметричное точное решение уравнений динамики теплопроводной среды с термодинамическими уравнениями состояния совершенного газа, для которой тензор вязких напряжений произвольным образом зависит от тензора скоростей деформаций. Предполагается однородность скоростей деформаций и давления, а также отсутствие ускорения, тогда уравнения движения тождественно удовлетворяются. В результате разделения переменных в уравнении притока тепла для зависимости плотности от лагранжевых координат получено трехмерное уравнение Пуассона. Его решение моделирует обжатие в данной среде области существенно переменной плотности, например, в случае полной сферической симметрии пузырька или капли. Возможны и не сферические поверхности уровня плотности. Течение может происходить из состояния покоя с конечной массой среды за счет движения сжимающего сферического поршня. Исследованы степенные неньютоновские жидкости. Вычислена энергия среды и представлено ее поведение в окрестности момента сжатия в точку.

*Ключевые слова:* сжатие пузырька, сжимаемая среда, вязкость, теплопроводность, точное решение, концентрация энергии

DOI: 10.31857/S0568528122040028

Для решения проблемы о концентрации энергии в сжимаемой среде в адиабатическом случае в работе [1] был применен подход к построению решений уравнений газовой динамики, двойственных [2] к решению задачи о точечном взрыве [3]. Под двойственностью понимается переход к новому решению путем взаимного аналитического продолжения состояний газа относительно разрыва с последующим изменением знака времени. Однако данные исследования показывают, что из-за автономности решения с образованием ударной волны для концентрации конечной энергии газа необходимо приложить бесконечную работу сжимающего поршня. Кроме того, вопрос о концентрации энергии был подробно исследован для несжимаемых идеальных [4] и ньютоновских [5] жидкостей, а также реологических сред со степенной зависимостью вязкости от скорости деформации [6]. В работе [5, с. 110] также указано, что “может играть роль нагревание внутренних слоев из-за вязкости”. В настоящей работе дано точное решение задачи динамики вязкого теплопроводного совершенного газа при однородном давлении и скорости, пропорциональной расстоянию до центра симметрии [7, 3], но с переменной плотностью, которая входит в коэффициент теплопроводности, а ее логарифм в результате разделения переменных удовлетворяет пространственному уравнению Пуассона. При этом допускается произвольная зависимость тензора напряжений от однородного тензора скоростей деформаций, в результате чего полностью удовлетворяются уравнения движения. Данные исследования могут быть обобщены на вязкоупругие среды [8] и действие однородных сил, зависящих от времени, типа сил инерции, а также на зависимость коэффициентов вязкости и температуропроводности от давления. Существенным моментом в работе [8] была минимизация полной диссипации кинетической энергии при заданном импульсе, которая достигается на однородных деформациях. Исследование захлопывания кавитационного пузырька около стенки с образованием кумулятивной струйки в рамках идеальной несжимаемой жидкости дано в работе [9]. Современным вопросам физических процессов в кавитирующих пузырьках посвящена статья [10].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о сжатии нелинейно-вязкого теплопроводного совершенного газа с однородной деформацией, вызванное движением сферического поршня с постоянной скоростью  $v_p < 0$ .

Уравнения неразрывности и движения сплошной среды при отсутствии массовых сил имеют вид [11]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \nabla_j (\tau^{ij} \mathbf{e}_i) \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $p$  – давление,  $\tau^{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений и  $\mathbf{e}_i$  – базисные векторы.

К системе (1.1) нужно добавить уравнения состояния. Предполагается, что тензор вязких напряжений зависит только от тензора скоростей деформаций изотропным образом. Общий вид такой зависимости указан в добавлении 1 к книге [11]. Он представляет собой формулу Гамильтона–Кэли, которая состоит из трех тензорных членов – шарового тензора, линейной части и квадратичной с коэффициентами, зависящими от трех инвариантов тензора скоростей деформаций  $e_j^i$

$$\tau_j^i = \tau_j^i(e_j^i), \quad e_j^i = \frac{1}{2}(\nabla_i v^j + \nabla_j v^i)$$

Также считается, что справедливы термодинамические соотношения для совершенного газа

$$p = c_v(\gamma - 1)\rho T, \quad u = c_v T, \quad f := A \exp(s/c_v) = p/\rho^\gamma$$

при постоянных удельной теплоемкости  $c_v$  и показателе адиабаты  $\gamma$ . Здесь  $u$  и  $s$  – удельные внутренняя энергия и энтропия соответственно,  $f$  – так называемая энтропийная функция.

Для определения температуры  $T$  добавляется уравнение притока тепла

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \tau^{ij} e_{ij} + \nabla_i (c_v \rho k \nabla^i T)$$

где коэффициент температуропроводности  $k$  также рассматривается постоянным.

Кинематические и динамические условия на поршне имеют вид

$$v_n = v_p, \quad \mathbf{v}_\tau = 0 \quad (1.2)$$

$$-p\mathbf{n} + \tau^{ij} \mathbf{e}_j n_i = \mathbf{p}_p \quad (1.3)$$

Таким образом, предполагается, что поршень за счет  $\mathbf{p}_p$  уравнивает любую поверхностную силу, создаваемую средой. Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя к среде нормаль,  $v_n$  – нормальная компонента скорости и  $\mathbf{v}_\tau$  – вектор касательной скорости.

Температура поршня считается равной температуре среды. Кроме этого, выставляется условие равенства для потоков тепла и работ поверхностных сил, что с учетом (1.2) и (1.3) дает

$$T = T_p, \quad q_n = q_p \quad (1.4)$$

Ищется решение уравнений (1.1), которое удовлетворяет кинематическим условиям на поршне (1.2). Рассматривается сферически-симметричное движение с однородной деформацией, для которого скорость в декартовых координатах и давление имеют вид

$$v_i = x_i/t, \quad p = p(t)$$

Тогда компоненты  $v_i$  вектора  $\mathbf{v}$  представляют собой три лагранжевы переменные. Таким образом, ускорение равно нулю, а компоненты тензоров скоростей деформаций и вязких напряжений представляются в виде

$$e_j^i = \delta_j^i/t, \quad |e|^2 = e^{ij} e_{ij} = 3/t^2, \quad \tau_j^i = \sigma(t) \delta_j^i, \quad \tau^{ij} e_{ij} = 3\sigma(t)/t \quad (1.5)$$

где  $\delta_j^i$  – символы Кронекера. Вид  $\sigma(t)$  зависит от вида реологического состояния среды. Уравнения движения в (1.1) удовлетворяются.

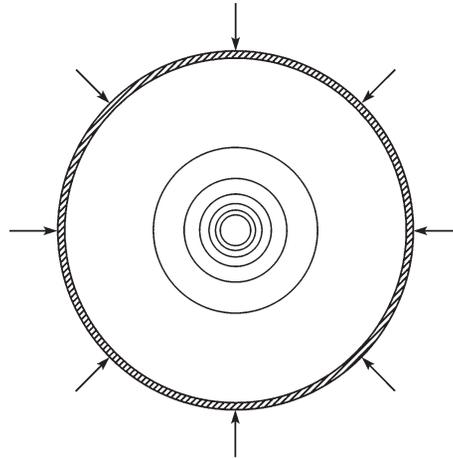


Рис. 1. Пузырек в сжимаемой поршнем среде.

При сжатии  $t < 0$ . Состояние покоя  $\mathbf{v} = 0$  в начальных условиях соответствует начальной точке  $t = -\infty$ .

Схематически задача изображена на рис. 1, где указаны линии уровня плотности, чередующиеся через 0.1 от ее максимального значения. На уровне 0.9 расположен поршень. Сгущение этих линий отражает большой градиент уменьшения плотности.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнение неразрывности приводит к разделению переменных для плотности

$$\rho = \rho_1(t)\rho_2(v_i), \quad \rho_1(t) = |t|^{-3}$$

что вместе с однородностью давления дает разделение переменных и для энтропийной функции

$$f = f_1(t)f_2(v_i), \quad f_1(t) = p(t)|t|^{3\gamma}$$

Переменные  $t$  и  $v_i$  в уравнении притока тепла также разделяются

$$-\Delta_v(\ln \rho_2(v_i)) \equiv \lambda \equiv \frac{t^2}{kf_1(t)} \left( \frac{df_1(t)}{dt} - (\gamma - 1)\tau^{ij}e_{ij}|t|^{3\gamma} \right) \quad (2.1)$$

где  $\Delta_v$  – оператор Лапласа в переменных  $v_i$ .

Следовательно, для  $\ln \rho_2(v_i)$  получается уравнение Пуассона. Его решение приводит к формуле

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} + \varphi(v_i)\right) \quad (2.2)$$

где  $\varphi(v_i)$  – произвольное решение уравнения Лапласа  $\Delta_v\varphi(v_i) = 0$ .

Итак, имеется сферически-симметричное движение газа с однородным давлением и плотностью, допускающей разделение переменных  $t$  и  $v_i$ .

Формальное решение уравнения (2.1) для функции  $f_1(t)$  имеет вид

$$f_1(t) = \left( C + (\gamma - 1) \int \tau^{ij}e_{ij}|t|^{3\gamma} \exp\left(-\frac{\lambda k}{|t|}\right) dt \right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right) \quad (2.3)$$

Вычисление полной энергии между центром и поршнем дает

$$E = K + U = \int_{V_0} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right) \rho_2 dV = \int_{V_0} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \rho_2 dV + \frac{4\pi f_1(t)|V_p|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}}$$

где  $V_0$  – объем шара радиуса  $|V_p|$ .

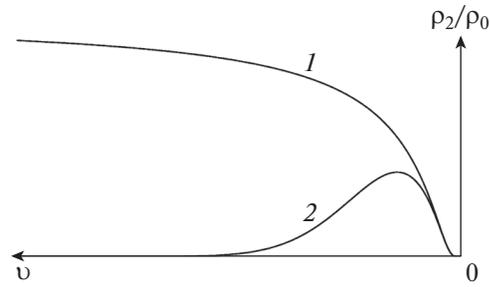


Рис. 2. Качественный график функции  $\rho_2/\rho_0$  для случаев  $(\lambda = 0, \alpha = 1)$  – кривая 1 и  $(\lambda = 1, \alpha = 1)$  – кривая 2.

Исходя из уравнения (2.1) для величины  $U$  выгодны значения  $\lambda \geq 0$ , связанные с увеличением роста  $f_1(t)$ . В дальнейшем рассматриваются только неотрицательные  $\lambda$ .

Таким образом, кинетическая энергия при сжатии сохраняется и конечна, в то время как внутренняя энергия растет до бесконечности при  $t \rightarrow -0$ , если порядок функции  $f_1(t)$  ниже, чем  $O(|t|^{3(\gamma-1)})$ . Если порядок  $f_1(t)$  равен  $O(|t|^{3(\gamma-1)})$ , то получается постоянная. Если выше, то ноль.

Данный метод построения решений применим и для случаев цилиндрической и плоской симметрий, когда  $e_1^1 = e_2^2 = 1/t$ ,  $e_3^3 = 0$  или  $e_1^1 = 1/t$ ,  $e_2^2 = e_3^3 = 0$  соответственно.

### 3. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

В случае сферической симметрии для описания движения лучше использовать массовую лагранжеву переменную  $m$ , отсчитываемую от центра.

Тогда радиальная координата равна

$$r(m, t) = v(m)t$$

где  $v(m) < 0$  – радиальная скорость, являющаяся однозначной функцией переменной  $m$ , для которой предполагается  $v(0) = 0$ . В начальный момент времени  $t = -\infty$  газ покоится, а при  $t = 0$  – сжимается в точку.

Плотность газа имеет вид

$$\rho = (4\pi r^2 r_m)^{-1} = \rho_1(t)\rho_2(m)$$

$$\rho_1(t) = |t|^{-3}, \quad \rho_2(m) = (4\pi v^2(m)|v'(m)|)^{-1}$$

Общее решение уравнения (2.1) для функции  $\rho_2(v)$  представляется в виде

$$\rho_2(v) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda v^2}{6} + \frac{\alpha}{v}\right) \quad (3.1)$$

откуда

$$m(v) = 4\pi\rho_0 \int_v^0 \xi^2 \exp\left(-\frac{\lambda \xi^2}{6} + \frac{\alpha}{\xi}\right) d\xi$$

Для обезразмеривания соотношения (3.1) можно использовать модуль скорости поршня  $|v_p|$ .

При  $\alpha > 0$  вблизи центра имеется полость, характерные графики решения приведены на рис. 2. Если  $\lambda = 0$  функция  $\rho_2(v)$  монотонно выходит на значение  $\rho_0$  при стремлении  $|v|$  к бесконечности, при  $\lambda > 0$  – стремится к 0. Кроме того, в последней ситуации существует максимум плотности в точке

$$v_* = -(3\alpha/\lambda)^{1/3} \quad (3.2)$$

Допускается следующая физическая интерпретация: в первом случае вблизи центра имеется пузырек, во втором – капля с пузырьком. При  $\alpha = 0$  и  $\lambda > 0$  имеется капля без пузырька. Следует

отметить, что движение поршня может быть медленным, но термодинамическое состояние газа, например, плотность, с течением времени существенно растет.

Поскольку давление однородно, то при возрастании плотности с ростом  $|v|$  температура убывает и, следовательно, в пузырьке поток тепла направлен от центра. При убывании плотности с ростом  $|v|$  поток тепла направлен к центру. Если движение среды совершается под действием “вмороженного” в нее поршня, то его лучше расположить в точке максимума (3.2) функции  $\rho_2(v)$ , т.е. принять  $v_p = v_*$ . При этом нет ухода тепла через поршень,  $q_p = 0$ . Потоки тепла создаются за счет действия сил вязкости, которые разогревают среду.

Решение имеет достаточно глубокую и широкую полость вблизи центра, ее границу можно отсчитывать от ближайшей точки перегиба. Например, при  $\lambda = 0$  она расположена в точке  $v_{**} = -\alpha/2$  со значением  $\rho_2(v_{**})/\rho_0 = \exp(-2)$ .

Полная энергия газа в случае сферической симметрии имеет вид

$$E(m, t) = \int_0^m \left( \frac{v^2(\xi)}{2} + u(\xi, t) \right) d\xi = \int_0^m \frac{v^2(\xi)}{2} d\xi + \frac{4\pi f_1(t) |v(m)|^3}{3(\gamma - 1) |t|^{3(\gamma-1)}}$$

#### 4. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СЖИМАЕМЫЕ ЖИДКОСТИ

В решении (2.3) можно явно задать пределы интегрирования

$$f_1(t) = \left( f_1(-\infty) + (\gamma - 1) \int_{-\infty}^t \tau^{ij} e_{ij} |\theta|^{3\gamma} \exp(-\lambda k / |\theta|) d\theta \right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right) \quad (4.1)$$

За счет положительности интеграла внутри (4.1) функция  $f_1(t)$  в случае  $\lambda > 0$  стремится к бесконечности при  $t \rightarrow -0$ , так же ведут себя давление, плотность и энергия.

Для исследования сходимости интеграла делается замена переменной  $\theta = -1/\eta$

$$\int_{-\infty}^t \tau^{ij} e_{ij} |\theta|^{3\gamma} \exp(-\lambda k / |\theta|) d\theta = \int_0^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \exp(-\lambda k \eta) d\eta$$

Поскольку

$$\exp(-\lambda k / |t|) \leq \exp(-\lambda k \eta) \leq 1, \quad \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \geq 0$$

справедлива оценка

$$\exp(-\lambda k / |t|) \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} d\eta \leq \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \exp(-\lambda k \eta) d\eta \leq \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} d\eta \quad (4.2)$$

где  $\varepsilon \rightarrow +0$ , что отражает рассуждения классической теоремы о среднем значении интеграла. Исходя из (4.2) видно, что экспонента под интегралом не влияет на его сходимость при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Сходимость зависит от выбора реологического закона  $\tau_j^i(e_j^i)$ . Например, если

$$\tau_j^i = 2\mu |e|^{2\beta-1} e_j^i, \quad \tau^{ij} e_{ij} = 2\sqrt{3}\mu 3^\beta |t|^{-(2\beta+1)}$$

что соответствует модели степенной неньютоновской жидкости, которая использовалась в работе [6], сходимость интеграла для фиксированного момента  $t < 0$  будет достигаться при условии  $\beta > (3/2)\gamma$ , т.е. в случае твердеющих дилатантных жидкостей. Расходимости интеграла также можно избежать, если начальный момент времени взять равным  $t = t_0 > -\infty$ , однако в этом случае необходимо обеспечить задание начальной скорости газа, что усложняет физическую реализацию решения.

Вычисление радиальной составляющей  $p_p^r$  вектора  $\mathbf{p}_p$ , необходимой для поддержания процесса сжатия, с учетом (1.3) и (1.5) дает

$$p_p^r = -p(t) + \sigma(t) = -\left( \frac{f_1(t)}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\mu 3^\beta}{\sqrt{3}|t|^{2(\beta+1)}} \right)$$

Интеграл в (4.1) легко вычисляется в случаях  $\lambda = 0, \beta > (3/2)\gamma$  или  $\lambda > 0, \beta = (3\gamma + 1)/2$ .

При  $\lambda = 0$  и  $\beta > (3/2)\gamma$  имеется

$$f_1(t) = f_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta (\gamma - 1)}{(2\beta - 3\gamma)|t|^{2\beta - 3\gamma}}$$

$$-p_p^r = \frac{f_1(-\infty)}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta (\gamma - 1)}{(2\beta - 3\gamma)|t|^{2\beta}} + \frac{2\mu 3^\beta}{\sqrt{3}|t|^{2(\beta+1)}} \quad (4.3)$$

Главным членом в (4.3) при  $|t| \rightarrow 0$  является третье слагаемое.

Если  $\lambda > 0$  и  $\beta = (3\gamma + 1)/2$ , то получается

$$f_1(t) = \left( f_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta (\gamma - 1)}{\lambda k} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda k}{|t|}\right) \right] \right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right)$$

$$-p_p^r = \left( f_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta (\gamma - 1)}{\lambda k} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda k}{|t|}\right) \right] \right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right) \frac{1}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\mu 3^\beta}{\sqrt{3}|t|^{3(\gamma+1)}} \quad (4.4)$$

При  $|t| \rightarrow 0$  главным членом роста в (4.4) является  $\exp(\lambda k/|t|)|t|^{-3\gamma}$  с коэффициентом порядка единицы.

В случае сферической симметрии при  $\lambda = 0$  нельзя считать  $q_n = 0$  на поршне, вычисления при  $\beta > (3/2)\gamma$  показывают, что должен быть отток тепла

$$q_p = -c_v k \left( \rho \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{v=v_p} = \left( f_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta (\gamma - 1)}{(2\beta - 3\gamma)|t|^{2\beta - 3\gamma}} \right) \frac{k\alpha}{(\gamma - 1)|t|^{3\gamma + 1} v_p^2} \quad (4.5)$$

где  $v_p < 0$  — задаваемая скорость поршня. Главным членом в (4.5) является второе слагаемое в скобках.

Как отмечено в предыдущем пункте, в случае  $\lambda > 0$  всегда можно выбрать скорость поршня в виде (3.2), тогда  $q_p = 0$ .

Во всех приведенных примерах вязкость играет существенную роль.

## 5. СЛУЧАЙ ОТЛИЧИЯ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Анализ решения (2.2) при различных функциях  $\rho_2(v_i)$  может быть проведен, например, в случае осевой симметрии, где  $Ov_3$  — ось симметрии. Здесь рассмотрены две ситуации: аргумент экспоненты возмущается решениями уравнения Лапласа первой и второй степени по  $|\mathbf{v}|$ , не изменяющими поведения плотности в центре и на бесконечности. Графики изображаются на плоскости  $(v_1, v_3)$ , т.е. при  $v_2 = 0$ .

Случай 1.

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} - \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|} + \delta_1 v_3\right) \quad (5.1)$$

На рис. 3 приведена форма распределения плотности, как функции  $(v_1, v_3)$ , при  $\lambda = 1, \alpha = 1$  и  $\delta_1 = 0.1$ . На рис. 4 указаны линии уровня объемной фигуры, приведенной на рис. 3. В результате сжатия при  $t \rightarrow -0$  значение функции  $\rho = |t|^{-3} \rho_2(v_i)$  будет увеличиваться, что можно интерпретировать как движение неоднородности плотности к центру, своего вида осесимметричная струйка.

Случай 2.

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} - \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|} + \delta_2 [3v_3^2 - |\mathbf{v}|^2]\right) \quad (5.2)$$

На рис. 5 приведена форма распределения плотности при  $\lambda = 1, \alpha = 1$  и  $\delta_2 = 0.05$ . На рис. 6 указаны линии уровня данной фигуры. Здесь будут две симметричные струйки, направленные к центру.

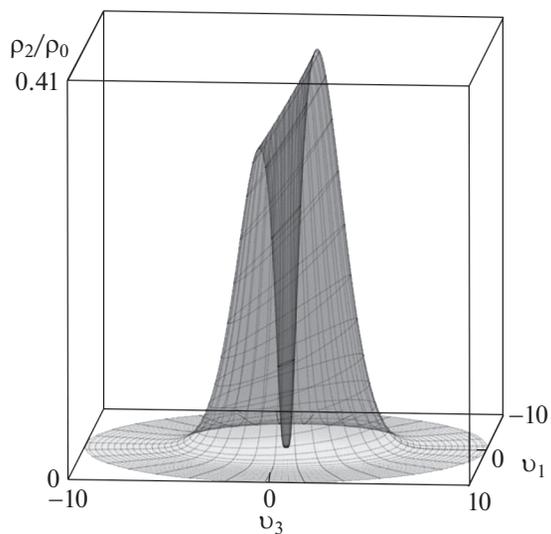


Рис. 3. Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (5.1).

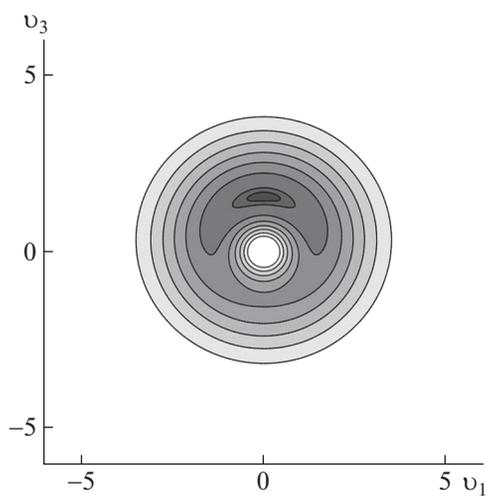


Рис. 4. Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (5.1).

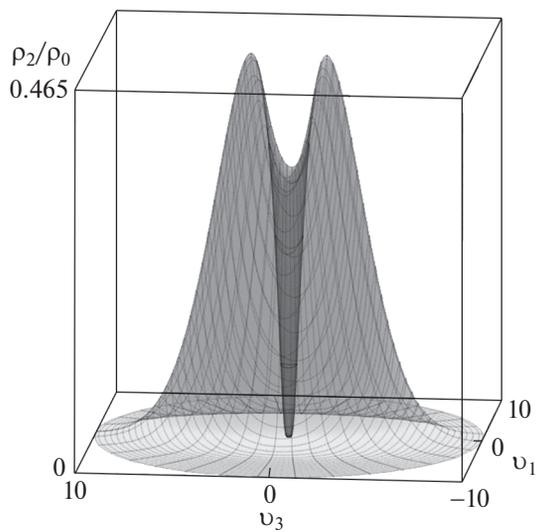


Рис. 5. Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (5.2).

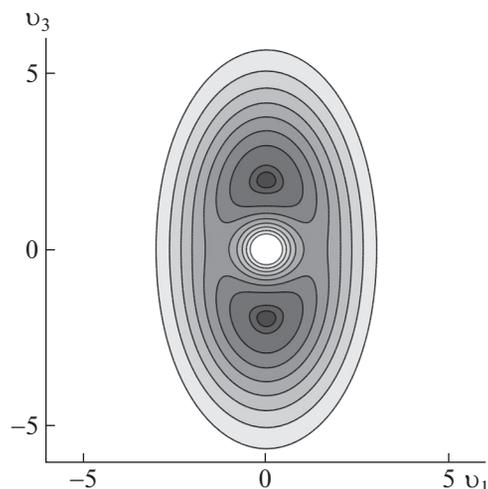


Рис. 6. Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (5.2).

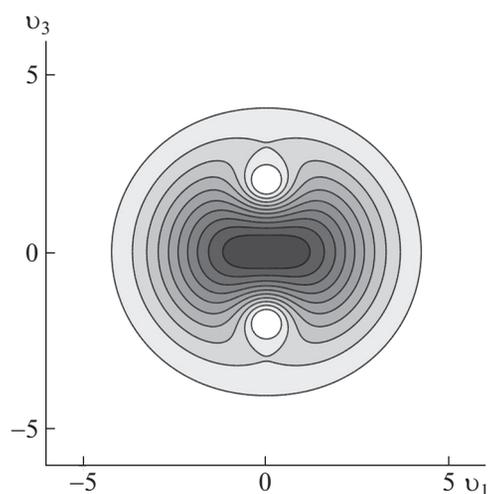


Рис. 7. Контурный график системы двух пузырьков.

Графики пространственных фигур – полупрозрачные, соответственно, внутренность затемнена. На контурных графиках более светлые области соответствуют меньшим значениям плотности.

В принципе, можно рассмотреть любые гармонические функции  $\varphi(v_i)$ , например, представляющие произвольное количество пузырьков с центрами в особых точках типа источника  $\sum_k (-\alpha_k)/|v - v_k|$ . На рис. 7 указана система двух пузырьков для значений параметров  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $v_1 = (0, 0, 2)$ ,  $v_2 = (0, 0, -2)$ .

Стоит заметить, что температура перед поршнем распределена не сферически-симметричным образом, но в условии (1.4) будут присутствовать только радиальные компоненты вектора потока тепла. Рационально выбирать скорость поршня так, чтобы средний по сфере поток тепла равнялся нулю.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, дано точное частично сферически-симметричное решение вида  $v = r/t$  уравнений динамики вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости, формулы термодинамического состояния которой соответствуют совершенному газу. Решение представлено в элементарных

функциях. Предполагается однородность давления и зависимость тензора вязких напряжений только от тензора скоростей деформации, в данном случае однородной. Также отсутствует ускорение, что позволяет полностью удовлетворить уравнениям движения. В результате разделения переменных для зависимости плотности от лагранжевых координат  $\gamma$  получено трехмерное уравнение Пуассона, которое эффективно решается. Решение моделирует обжатие в данной среде области существенно переменной плотности, например, в случае полной сферической симметрии пузырька или капли. Рассматриваются также случаи и осесимметрического распределения плотности, моделирующие сжатие при наличии струек, приведены графики. Течение может происходить из состояния покоя с конечной массой газа за счет движения сжимающего поршня сферической формы. Вычислена полная энергия среды, как функция времени, представлено ее поведение в момент окончательного сжатия. При этом кинетическая энергия сохраняется и ограничена, а внутренняя энергия при определенных значениях параметров задачи стремится к бесконечности, при этом существенную роль играет вязкость, повышающая энтропию. Показано, что на участках, где плотность массы возрастает, температура убывает и, таким образом, происходит отток тепла.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубятников А.Н. Об ускорении ударных волн и концентрации энергии // Труды МИАН имени В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 162–169.
2. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Lord Rayleigh (*Strutt J. W.*) On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine. Series 6.* 1917. V. 34. Issue 200. P. 94–98.
5. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 173 с.
6. Голубятников А.Н., Украинский Д.В. О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 4. С. 52–62.
7. Овсянников Л.В. Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111. № 1. С. 47–49.
8. Голубятников А.Н. Оптимизация ускорения вязкоупругого тела // Тез. докл. междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, посв. 110-летию акад. Л.И. Седова. 2017. С. 79–80.
9. Воинов В.В., Воинов О.В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // ДАН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 63–66.
10. Нигматулин Р.И., Лэхи (мл.) Р.Т., Талейархан Р.П., Вест К.Д., Блок Р.С. О термоядерных процессах в кавитирующих пузырьках // Успехи физических наук. 2014. Т. 184. № 9. С. 947–960.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.

УДК 533.6.011

## ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЛА, ОБТЕКАЕМЫЕ С НАИБОЛЬШИМИ “КРИТИЧЕСКИМИ” ЧИСЛАМИ МАХА

© 2022 г. А. Н. Крайко<sup>а,\*</sup>, В. А. Шаповалов<sup>а</sup><sup>а</sup> Центральнй институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

\*E-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.

После доработки 15.03.2022 г.

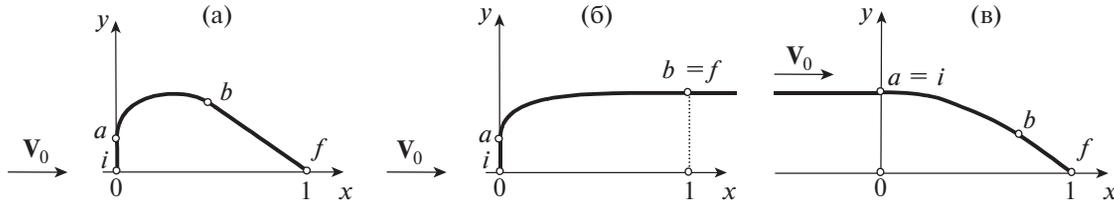
Принята к публикации 15.03.2022 г.

Строятся двумерные (плоские и осесимметричные) тела, которые при ряде дополнительных ограничений обтекаются идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом с наибольшими “критическими” числами Маха  $M^*$ . Если число Маха набегающего потока  $M_0 < M^*$ , то во всем потоке, включая обтекаемые поверхности,  $M < 1$ , отсутствуют ударные волны и, как следствие, равно нулю волновое сопротивление. При  $M_0 = M^*$  равенство  $M = 1$  выполняется хотя бы в одной точке потока, а при  $M_0 > M^*$  появляются сверхзвуковые зоны, в общем случае с образованием ударных волн и волновым сопротивлением, растущим с ростом  $M_0$ . Как известно, максимальные  $M^*$  реализуют двумерные конфигурации, при обтекании которых потоком с  $M_0 = M^*$  часть их контуров – отрезки звуковых линий тока. Тривиальными примерами таких конфигураций служат не возмущающие течение пластина под нулевым углом атаки и отрезок прямой (“осесимметричная игла”) в равномерном потоке с  $M \equiv M_0 \equiv M^* \equiv 1$ . Отнесенная к квадрату фиксированной хорды площадь их продольного сечения  $S = 0$ . Если в дополнение к длине хорды задать площадь  $S > 0$ , то критические контуры таких тел составят передний и задний торцы и соединяющие их без изломов верхняя и симметричная нижняя звуковые линии тока. При  $S \rightarrow 0$  высота торцов стремится к нулю,  $M_0$  и  $M^*$  стремятся к единице и получаются тривиальные решения. Чтобы при  $S > 0$  избавиться от практически неизбежных отрывов за телами, построенными в предположении безотрывного обтекания, вводится ограничение на величину угла наклона контуров их кормовых частей. В результате вместо задних торцов появляются наклонные прямолинейные отрезки, и плоская критическая конфигурация становится симметричным профилем крыла. При принципиальной простоте структуры двумерных критических конфигураций известные методы их построения весьма сложны. Численные “инструменты”, примененные в данном исследовании, оказались более простыми. В их основе лежат генетический алгоритм “прямой” оптимизации с представлением искомым отрезком звуковых линий тока кривыми Бернштейна–Безье и процедура установления с интегрированием уравнений течения идеального газа модифицированной схемой Годунова повышенного (на гладких решениях) порядка аппроксимации. Ранее эти инструменты развивались и применялись авторами и их коллегами при построении широкого круга оптимальных аэродинамических форм.

**Ключевые слова:** плоские и осесимметричные тела, обтекаемые с наибольшими критическими числами Маха, отрезки звуковых линий тока, кривые Бернштейна–Безье, прямые методы оптимизации, генетический алгоритм

DOI: 10.31857/S0568528122040077

Наличие отрезков звуковых линий тока в контурах симметричных профилей и тел вращения, обтекаемых под нулевым углом атаки равномерным безграничным набегающим потоком идеального газа с наибольшими критическими числами Маха набегающего потока  $M_0 = M^* < 1$ , установлено в [1]. Последующие обобщения [2] на тела в цилиндрических каналах и в решетках, на контуры с отрезками горизонталей и даже с конечными областями поступательного звукового потока не столь принципиальны. Поскольку при числах Маха набегающего потока  $M_0 \leq M^*$  эти тела не имеют волнового сопротивления, то их естественно называть и “критическими”, и “оптимальными”. Анализ обтекания таких тел [1, 2] включал доказательство и применение “свойства прямолинейности” звуковых линий (“линий перехода”), отличных от звуковых линий тока,



**Рис. 1.** Структура оптимальных по  $M^*$  контуров: симметричного профиля или тела вращения (а), головной (б) и кормовой (в) частей;  $ab$  – отрезки звуковых (при  $M_0 = M^*$ ) линий тока.

“теорем сравнения” и “принципа максимума” для дозвуковых течений. Как и в [1, 2], под “дозвуковыми” здесь и далее понимаются течения, в которых  $M \leq 1$ .

Построенные в [3–10] примеры оптимальных тел в безграничном равномерном дозвуковом набегающем потоке включают симметричные профили и замкнутые тела вращения, обтекаемые под нулевым углом атаки, а также головные или кормовые части полубесконечных пластины и кругового цилиндра. Для их построения в [3–10] созданы численно-аналитические инструменты с неизменно весьма сложными аналитическими составляющими. В этом отношении подход, возможности которого иллюстрируют приводимые ниже примеры, намного проще. В его основе прямой метод оптимального профилирования с численным решением “установлением” уравнений Эйлера, описывающих дозвуковое обтекание идеальным газом искомых плоских и осесимметричных тел, представление выпуклых звуковых участков их контуров кривыми Бернштейна–Безье (КББ) и нахождение оптимальных КББ с помощью генетического алгоритма. При этом в задачах оптимального профилирования минимизируется интеграл по выпуклому участку контура от  $(p - p_*)^2$  – квадрата разности давления  $p$  и его известной (см. ниже) “критической” величины  $p_*$ , отвечающей  $M = 1$ . У оптимальных тел выпуклые участки – отрезки звуковых линий тока и этот интеграл или сумма интегралов, если таких участков несколько, равен нулю.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО $M^*$ ДВУМЕРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

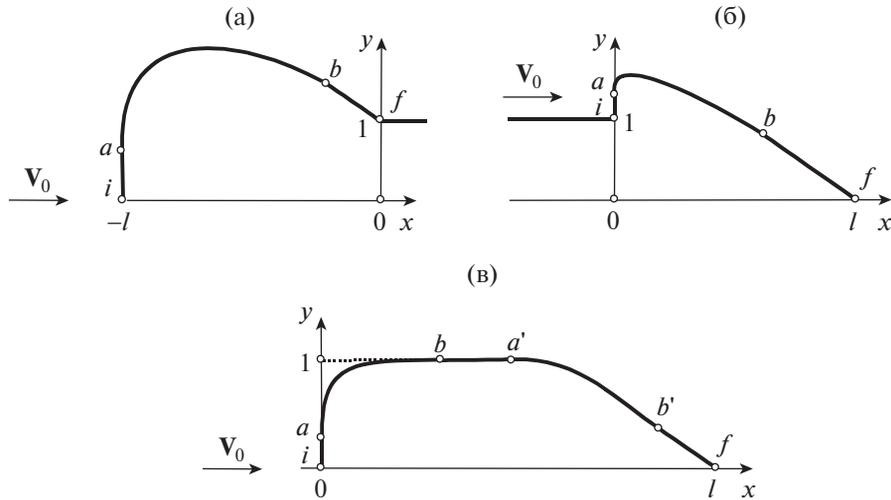
Несколько плоских и осесимметричных оптимальных тел, обтекаемых равномерным набегающим потоком идеального газа с наибольшими критическими числами Маха  $M^*$ , изображены на рис. 1. Это – обтекаемые под нулевым углом атаки симметричный профиль или тело вращения (а) и головная (б) и кормовая (в) части полубесконечных пластины или кругового цилиндра (далее – “головные или кормовые части”). Во всех примерах ось  $x$  декартовых или цилиндрических координат  $xu$  направлена по скорости  $V_0$  набегающего потока и совмещена с осью или плоскостью симметрии оптимальных тел. Начало координат и линейный масштаб выбраны так, что, если не оговорено особо, то  $0 \leq x \leq 1$ .

При построении оптимальных по  $M^*$  конфигураций наряду с заданием длины, принятой за линейный масштаб, ставятся дополнительные условия. Для головных и кормовых частей естественно задаются ординаты точек гладкой стыковки искомого контура  $y = y(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  с горизонтальной образующей пластины или кругового цилиндра ( $y_f$  и  $y_i$  на рис. 1б и 1в, индексы  $i, f, \dots$  метят переменные в точках  $i, f, \dots$ ). Возможны и иные ограничения, например,

$$\frac{dy}{dx} \equiv \text{tg}\theta \geq \text{tg}\theta_m, \quad S \equiv \int_i^f y dx \geq S_m, \quad y \leq y^m \tag{1.1}$$

с заданными константами  $\theta_m < 0$ ,  $S_m > 0$  и  $y^m$ .

Как уже отмечалось, первое ограничение (1.1), вводимое, в первую очередь, для профилей, тел вращения (рис. 1а) и кормовых частей (рис. 1в), приводит к появлению у них наклонных прямолинейных участков  $dy/dx = \text{tg}\theta_m$ , заканчивающихся в точке  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Ограничение на площадь “продольного” сечения  $S$ , введенное еще в [1], привело к появлению в искомом контуре выпуклого участка – отрезка звуковой линии тока, на котором  $M = 1$  и  $p = p_*$ . У оптимальных головных и кормовых частей выпуклые отрезки звуковых линий тока появляются без этого условия. Получающаяся при этом площадь продольного сечения  $S = S^0(l, \theta_m)$  – функция удлинения  $l$ , равного



**Рис. 2.** Возможные оптимальные по  $M^*$  при ограничениях (1.1) контуры: головной (а) и кормовой (б) частей и профиля или тела вращения (в);  $ab$  и  $a'b'$  – отрезки звуковых (при  $M_0 = M^*$ ) линий тока.

отношению длины к  $y_f$  или  $y_i$ , и  $\theta_m$ . Ограничение площади  $S$  влияет на форму оптимальной головной или кормовой части и на величину  $M^*$  при  $S_m$ , превышающих  $S^0(l, \theta_m)$ . Для таких  $S_m$  у оптимальной головной части также появляется наклонный концевой участок  $bf$ , на котором (рис. 2а)  $dy/dx = \operatorname{tg}\theta_m$ , а у оптимальной кормовой части – торец  $ia$  (рис. 2б). Из-за увеличения их длины здесь за линейный масштаб взята ордината полубесконечной горизонтальной образующей.

Ограничение на максимально допустимую ординату – третье условие (1.1), вводимое в дополнение к двум первым, также начинает работать не сразу, а лишь тогда, когда растущая с увеличением  $S_m$  максимальная ордината оптимального контура на рис. 1а, 2а или 2б превзойдет  $y^m$ . При таких  $S_m$  один звуковой отрезок ( $ab$  на рис. 1а) оптимального контура заменят два выпуклых звуковых отрезка ( $ab$  и  $a'b'$  на рис. 2в) и горизонтальный дозвуковой  $y = y^m$  между ними ( $ba'$  на рис. 2в). При появлении горизонтального участка у профиля или тела вращения за линейный масштаб берется его ордината (рис. 2в). Если при построении оптимальной головной части (рис. 1б) заданное  $y^m = y_f$ , то при  $S_m > S^0$  наряду с единственным звуковым участком  $ab$  появляется дозвуковой ( $M < 1$ ) горизонтальный участок  $bfc$  с  $y = y^m$ . Если  $y^m = y_i$ , то аналогичная ситуация возникает при построении оптимальной кормовой части.

При гладкой стыковке всех участков оптимальных образующих (непрерывности угла наклона касательной к ним  $\theta$ ) кривизна звуковых участков в их концевых точках обращается в бесконечность [7–11]. При приближении к этим точкам по отрезкам  $\theta = \operatorname{const}$  бесконечны производные  $p$  и  $V$ , а при приближении по нормали к контуру – производные всех параметров [11].

Сказанное выше о структуре изображенных на рис. 1 и на рис. 2 оптимальных конфигураций либо установлено в [1, 2], либо получается с привлечением сформулированных и доказанных в этих работах утверждений, справедливых для названных дозвуковыми течениями, в которых  $M \leq 1$ . Не вдаваясь в подробности, перечислим указанные утверждения. Первое из них – свойство прямолинейности звуковых линий, отличных от звуковых линий тока, отрезки которых при безграничном набегающем потоке с  $M_0 = M^* < 1$  формируют оптимальные контуры. Второе утверждение – принцип максимума. Согласно ему в таких течениях число Маха может достигать своего максимального значения  $M = 1$  только на обтекаемых контурах. Свойство прямолинейности звуковых линий тока и принцип максимума справедливы и при дозвуковом (с  $M \leq 1$ ) обтекании несимметричных профилей. Однако для них доказать ключевые (при выяснении структуры оптимальных тел рис. 1 и 2) утверждения, названные в [1] “теоремой сравнения” и “леммой граничной точки”, не удалось.

## 2. ПРЯМОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ, ОБТЕКАЕМЫХ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С НАИБОЛЬШИМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ МАХА

Как уже отмечалось, в применяемом далее прямом методе минимизируется интеграл по звуковому для оптимального тела выпуклому участку контура

$$I = \int_a^b (p - p_*)^2 d\xi, \quad (2.1)$$

Здесь  $\xi$  – расстояние, отсчитываемое вдоль контура,  $p_*$  – отвечающее  $M = 1$  критическое давление. Далее за масштабы плотности и скорости взяты их размерные (с индексом “градус”) критические величины  $\rho_*^\circ$  и  $a_*^\circ$ , а давление отнесено к  $\rho_*^\circ a_*^{\circ 2}$ . При этом для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (показателем адиабаты)  $\gamma$  безразмерное  $p_* = 1/\gamma$ .

Наряду с равным нулю для оптимальных контуров функционалом  $I$  ниже вычисляются коэффициент волнового сопротивления  $c_x$  и площадь или объем

$$c_x = \frac{2}{\rho_0 V_0^2} \int_i^f (p - p_0) dy^v, \quad S = \int_i^f y^v dx \quad (2.2)$$

с  $v = 1$  и  $2$  для плоских и осесимметричных конфигураций. Для совершенного газа входящие в формулу для  $c_x$  в (2.2)  $\rho_0 V_0^2$  и давление газа в набегающем потоке  $p_0$  – функции его числа Маха

$$V_0^2 = \frac{(\gamma + 1)M_0^2}{2 + (\gamma - 1)M_0^2}, \quad p_0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} V_0^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}, \quad \rho_0 V_0^2 = \gamma p_0 M_0^2.$$

Выпуклые участки искомого оптимального контура аппроксимировались кривыми Бернштейна–Безье (КББ). КББ задается параметрически [12]

$$P(t) = \sum_{k=0}^K B_k^K(t) P_k, \quad B_k^K(t) = \frac{K!}{k!(K-k)!} t^k (1-t)^{K-k}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Здесь  $P$  – координаты КББ  $x$  и  $y$ ,  $t$  – параметр,  $B_k^K(t)$  – полиномы Бернштейна, а  $P_k$  – координаты концов (контрольных точек) отрезков ломаной (“полигона”). В общем случае КББ проходит лишь через крайние контрольные точки, касаясь в них соответствующего отрезка полигона. Важное достоинство КББ – линейная зависимость ее координат от координат  $P_k$  контрольных точек.

Как КББ представляет выпуклый звуковой (при  $M_0 = M^*$ ) отрезок образующей симметричного профиля, демонстрирует рис. 3 с тремя первыми контрольными точками (0–2) на оси  $y$  и тремя последними (6–8) на продолжении прямого отрезка  $bf$  и с многократно увеличенной (для наглядности) ординатой. Такое расположение точек 0–2 и 6–8 обеспечивает гладкую стыковку искомого звукового участка контура с передним торцом и с приходящим в точку  $f$  прямым концевым отрезком  $dy/dx = \operatorname{tg} \theta_m$ .

В рассчитанных далее примерах абсциссы  $K$  контрольных точек кроме предпоследней ( $x_{K-1}$ ), фиксировались. При построении оптимальных профилей у первых трех точек они, как на рис. 3, были нулевыми, а у точек с  $k$  от 3 до  $(K-2)$  задавались формулой  $x_k = 0.85(k-2)/(K-3)$ . Это обеспечивало равномерное разбиение ими отрезка оси  $x$  от  $x_a = 0$  до  $x_K = x_b = 0.85$  – абсциссы точки  $b$ , заданной вместо  $\theta_m$  и  $S_m$ , которые находились в процессе оптимизации. Предпоследняя контрольная точка с изменяющейся координатой  $x_{K-1}$  лежит на наклонной прямой с  $dy/dx = \operatorname{tg} \theta_m$  между  $(K-2)$ -й и  $K$ -й точками. Поэтому в процессе счета справедливы неравенства:  $0.85(K-4)/(K-3) < x_{K-1} < 0.85$ .

При построении оптимальных головных частей первые три контрольные точки также были на оси  $y$ ; у последней точки ( $b$ )  $x_K = 1$ ; ординаты трех последних контрольных точек  $y_k = y_b = 1/l$  при  $k = K-2, K-1, K$ , реализуя плавную стыковку с полубесконечной горизонтальной образующей, а абсциссы точек с  $k$  от 3 до  $K-1$  находились в процессе оптимизации (были “свободными”).

Все оптимальные профили и головные части строились прямым методом, который ранее развивался и применялся при профилировании оптимальных форм в до-, транс- и сверхзвуковых потоках в [12–17]. При этом оптимальные параметры КББ – оставшиеся не заданными (“свобод-

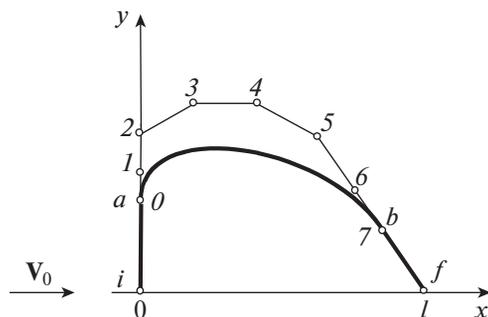


Рис. 3. К построению полигона КББ, задающего выпуклый участок оптимального контура; 0–7 – контрольные точки полигона.

ными”) координаты контрольных точек, обеспечивающие близкие к нулю значения введенных в (2.1) и (2.2) функционалов  $I$  и  $c_x$ , находил двухкритериальный “генетический алгоритм (ГА)”. В нем наряду с  $I$  при заданном  $M_0$  у профиля минимизировался  $c_x$ , а у головной части – удлинение  $l = 1/y_f$ .

В ГА “начальную популяцию” контуров создает случайный выбор свободных параметров. Из них отбираются “решения-родители”, такие, что среди всех оставшихся нет лучших по обоим критериям. Решения-родители образуют “Парето-оптимальный фронт” – совокупность лучших из всех построенных по этим критериям решений. Новые контуры генерирует вариация (“мутация”) параметров случайно выбранного родителя. Для более близкого приближения решения к оптимальному в процессе оптимизации амплитуда мутаций постепенно уменьшается.

Величины  $I$  и  $c_x$  при стационарном обтекании каждого сгенерированного ГА профиля и головной части находились установлением по времени при численном решении уравнений течения идеального газа (“уравнений Эйлера”). Записанные в дивергентной форме нестационарные уравнения Эйлера интегрировались схемой Годунова [18] повышенного согласно [19, 20] порядка аппроксимации (на гладких решениях). В плоскости  $xu$  расчет велся в области, ограниченной окружностью: для профилей  $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2} = 15$ , а для головных частей  $r = 100y_f$  с параметрами невозмущенного потока в примыкающем к окружности слое “вспомогательных” ячеек [21]. Ячейки разностной сетки, адаптированной к обтекаемым телам, увеличивались линейно по  $r$ . Чтобы избежать связанного с этим роста времени установления, интегрирование уравнений велось по неявной схеме [22] с числом Куранта  $cu = 10-20$ . Расчеты, выполненные с увеличением  $r$  и числа ячеек разностной сетки  $N$ , показали, что в представляемых ниже примерах  $r = 15$  и  $N = 6.2 \times 10^3$  для профилей и  $r = 100y_f$  и  $N = 6.4 \times 10^3$  для головных частей обеспечивали необходимую точность результатов. При таких  $r$  и  $N$  для профиля время 2780 прямых расчетов составило 85 ядрочасов, а для головной части время  $10^3$  прямых расчетов – около 70 ядрочасов.

### 3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО М\* ПРОФИЛЕЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ

Все расчеты выполнены для  $\gamma = 7/5 = 1.4$  с заданием выпуклых звуковых участков симметричных профилей кривыми Бернштейна–Безье 11-го порядка ( $K = 11$ ), а головных частей – КББ 5-го порядка ( $K = 5$ ). При представлении полей параметров координаты  $x$  и  $y$  будем относить к хорде профиля, а для головных частей – к радиусу цилиндра.

В табл. 1 собраны координаты контрольных точек полигона КББ, которая определила форму оптимального звукового участка симметричного профиля, реализовавшего наибольшее число

Таблица 1. Координаты контрольных точек полигона КББ профиля

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_k$	0	0	0	0.106	0.212	0.318	0.421	0.53	0.636	0.744	0.842	0.85
$y_k \times 10^4$	137	142	367	485	521	526	618	548	519	463	349	332

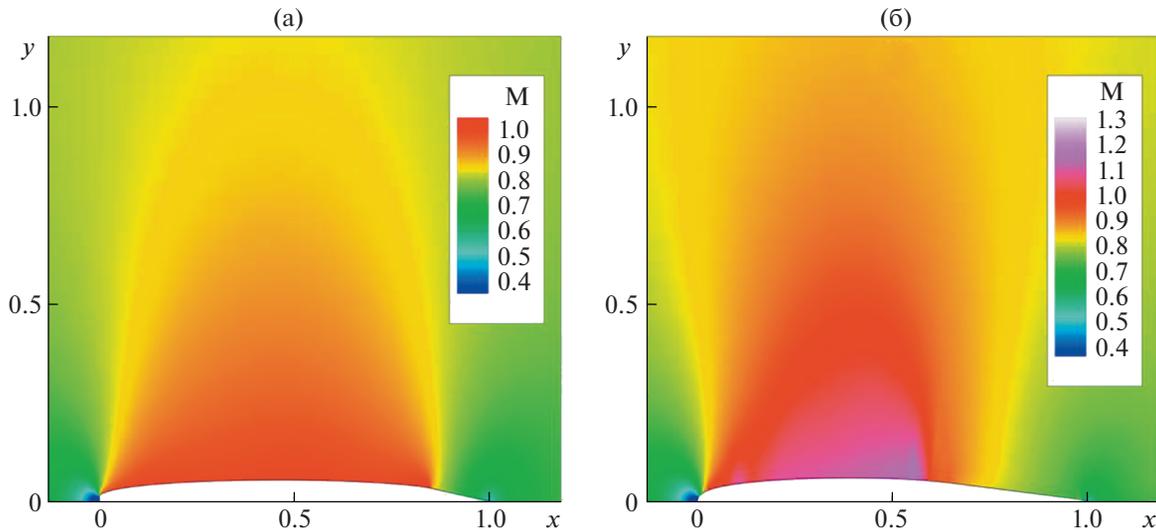


Рис. 4. Поля чисел Маха над профилями: оптимальным по  $M^* = 0.8$  при  $\text{tg}\theta_m = -0.22$  и  $S_m = 0.04212$  (а) и NACA0012 с  $S = 0.04208$  (б) в набегающем потоке с  $M_0 = 0.8$ .

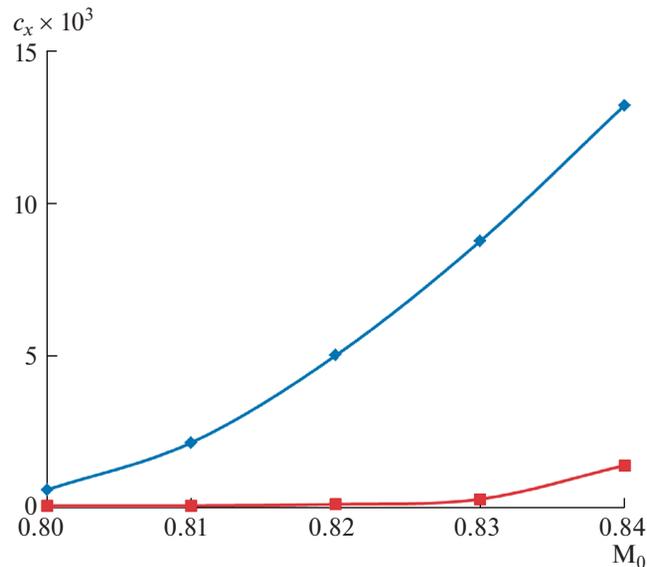
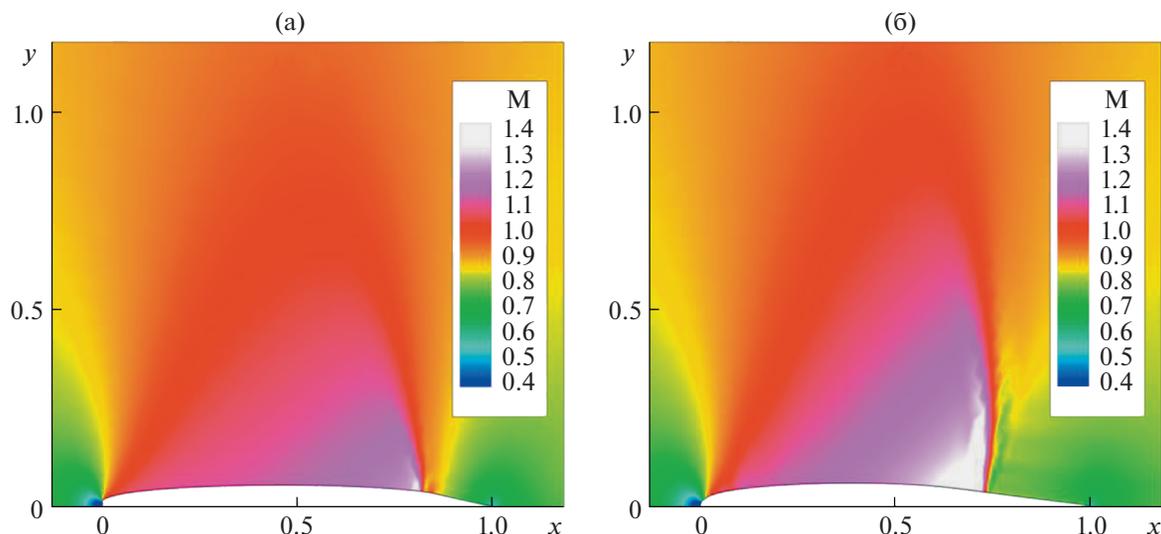


Рис. 5. Рост  $c_x$  с увеличением  $M_0$  профилей: оптимального по  $M^* = 0.8$  (нижняя кривая) и NACA0012 (верхняя кривая).

Маха набегающего потока  $M_0 = M^* = 0.8$  при  $\text{tg}\theta_m = -0.22$  и  $S_m = 0.04212$ . Максимальное число Маха, получившееся в расчете на этом участке  $M^m = 1.005$ , а коэффициент волнового сопротивления  $c_x = 6 \times 10^{-5}$ . Столь малая величина  $c_x$  – свидетельство высокой точности счета. Обратим внимание на близость точки с  $k = 1$  к точке с  $k = 0$  и точки с  $k = K - 1$  к точке с  $k = K$ . Отмеченная близость отражает стремление ГА с КББ увеличить кривизну звукового контура при приближении к его начальной и конечной точкам. Из-за того, что в параметрическое представление КББ (2.3) входят только положительные целочисленные степени  $t$  и  $(1 - t)$ , кривизна найденных звуковых участков не может стать бесконечной, как требуется согласно [7–11]. Тем не менее она при фиксированном порядке КББ возрастает максимально возможно.

На рис. 4а показано поле чисел Маха вблизи оптимального профиля, а на рис. 4б – вблизи симметричного профиля NACA0012 практически той же площади  $S = 0.04208$  при набегающем потоке с  $M_0 = 0.8$ . При на порядок большем  $c_x = 5.9 \times 10^{-4}$  в таком набегающем потоке его сопротивление с ростом  $M_0$  растет намного быстрее, чем у оптимального профиля (верхняя и нижняя кривые на рис. 5 с  $c_x = 0.0132$  и  $0.00138$  при  $M_0 = 0.84$ ). Здесь и ниже значки – результаты расчета,



**Рис. 6.** Поля чисел Маха над профилями: оптимальным по  $M^* = 0.8$  (а) и NACA0012 (б) в набегающем потоке с  $M_0 = 0.84$ .

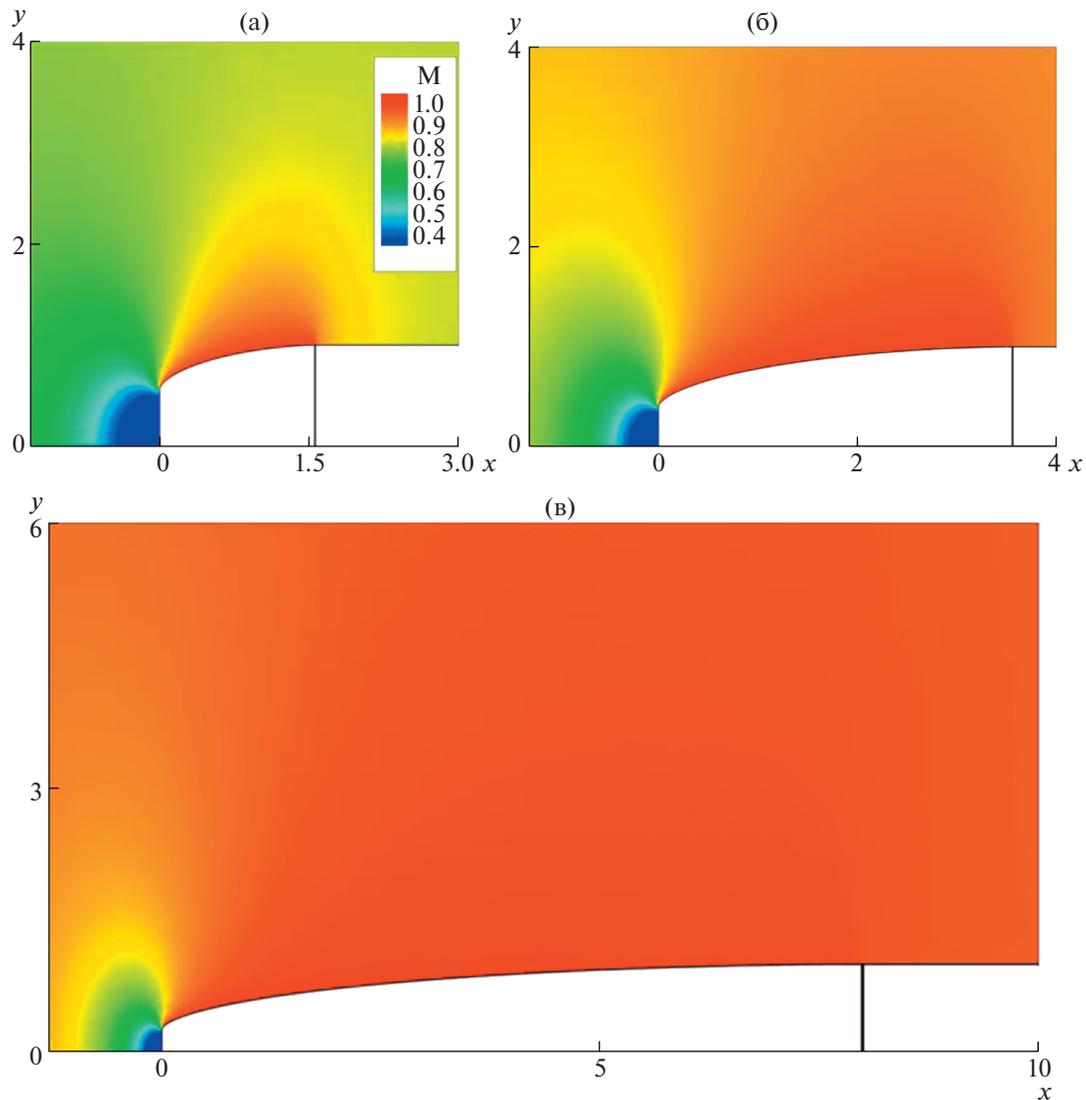
соединенные гладкими кривыми. Поля чисел Маха вблизи этих профилей при  $M_0 = 0.84$  представлены на рис. 6.

В табл. 2 приведены координаты контрольных точек полигонов КББ, которые определили форму оптимальных звуковых участков осесимметричных головных частей, реализующих наибольшие числа Маха набегающего потока  $M_0 = M^* = 0.8, 0.9$  и  $0.96$  при удлинениях  $l = x_b/y_b = x_s/y_s = x_s$ . Как и у оптимального профиля, близость координат точек с  $k = 0$  и 1 и с  $k = 4$  и 5 при  $K = 5$  и с  $k = 5$  и 6 при  $K = 6$  демонстрирует стремление метода максимально возможно увеличить кривизну построенных контуров в начальной и конечной точках их звуковых участков. Величины  $c_x$  и  $l$  у оптимальных головных частей получились в 20–40 раз больше, чем у оптимального профиля. Тем не менее во всех примерах они не превышают  $5 \times 10^{-3}$ . Почти не изменив  $c_x$ , повышение порядка КББ при  $M^* = 0.96$  заметно повлияло лишь на отличие от звуковой скорости газа на выпуклом участке контура (см. ниже).

Поля чисел Маха вблизи оптимальных по  $M^*$  осесимметричных головных частей в набегающих потоках с  $M_0 = M^*$  представлены на рис. 7. Сечения стыковки их контуров и горизонтальных образующих цилиндров даны вертикальными отрезками. Максимальные значения числа Маха  $M^m$ ,

**Таблица 2.** Координаты контрольных точек полигонов КББ головных частей

$M_0 = M^*$	$k$	0	1	2	3	4	5	6	$c_x \times 10^3$	$l \times 10^3$
0.8	$x_k$	0	0	0	0.640	1.565	1.567		2.33	4.71
	$y_k$	0.5613	0.5618	0.764	1	1	1			
0.9	$x_k$	0	0	0	1.678	3.38	3.57		1.41	4.29
	$y_k$	0.3982	0.4020	0.747	1	1	1			
0.96	$x_k$	0	0	0	0.265	7.52	7.89		1.10	3.77
	$y_k$	0.2606	0.2645	0.374	1	1	1			
0.96	$x_k$	0	0	0	3.625	7.25	7.82	8.02	1.09	2.85
	$y_k$	0.2548	0.2637	0.777	0.992	1	1	1		



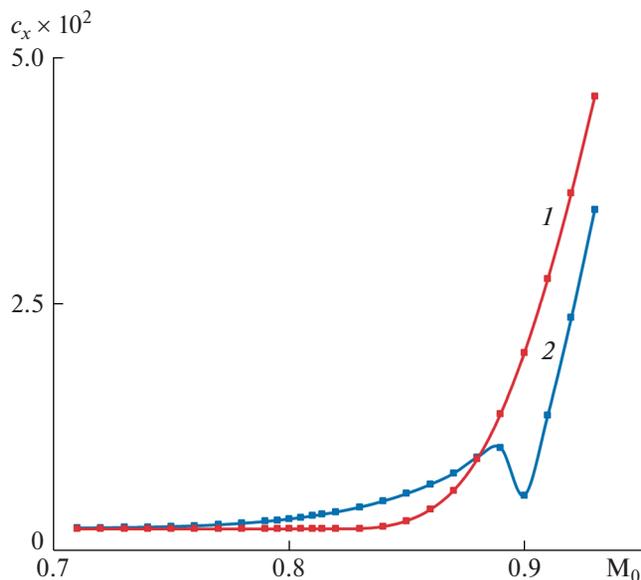
**Рис. 7.** Поля чисел Маха при  $M_0 = M^*$  вблизи оптимальных головных частей трех удлинений:  $l = 1.567$ ,  $M^* = 0.8$ ,  $M^m = 1.002$  (а);  $l = 3.57$ ,  $M^* = 0.9$ ,  $M^m = 1.0001$  (б) и  $l = 7.89$ ,  $M^* = 0.96$ ,  $M^m = 1.027$  при  $K = 5$  и  $1.002$  при  $K = 6$  (в).

которые во всех рассчитанных примерах получались на выпуклых участках контура, указаны в подписи к рис. 7.

С ростом  $M_0 > M^*$  волновое сопротивление оптимальных по  $M^*$  головных частей растет. Монотонное увеличение  $c_x$  оптимальной головной части с  $M^* = 0.8$  демонстрирует на рис. 8 кривая 1. Кривая 2 дает  $c_x = c_x(M_0)$  головной части [23], реализующей минимум полного сопротивления при том же удлинении  $l = 1.567$  в потоке с  $M_0 = 0.9$ . В нем  $c_x$  головной части [23] естественно меньше  $c_x$  головной части, оптимальной по  $M^* = 0.8$ . Намного лучше, однако, она только в малой окрестности  $M_0 = 0.9$ , которая начинается с  $M_0 > 0.88$ . При  $M_0 = 0.9$  волновое сопротивление головной части [23] меньше в 3.6 раза, а уже при  $M_0 = 0.93$  — лишь в 1.3 раза.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При существенном упрощении по сравнению с [3–10] процедуры построения оптимальных по  $M^*$  конфигураций авторам не удалось расширить их круг в направлении построения пусть не оптимальных, но хотя бы близких к оптимальным несущих профилей. В итоге ставшие легко до-



**Рис. 8.** Зависимость  $c_x$  от  $M_0$  головных частей удлинения  $l = 1.567$ : 1 – оптимальной по  $M^* = 0.8$  и 2 – минимального полного сопротивления при  $M_0 = 0.9$ , построенной в [23].

ступными оптимальные по  $M^*$  конфигурации по-прежнему ограничены симметричными профилями, телами вращения и головными и кормовыми частями при том, что все они обтекаются только под нулевым углом атаки. Тем не менее хочется верить, что легкость проб поможет найти структуру принципиально иных оптимальных по  $M^*$  двумерных конфигураций.

Авторы благодарны К.С. Пьянкову за предоставленные программы, консультации и обсуждения и С.А. Таковицкому – за информацию о головных частях минимального сопротивления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов № 19-01-00671 и 20-01-00100).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On Bodies Achieving Extreme Values of the Critical Mach Number. I // *J. Ration. Mech. and Analysis.* 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
2. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *ПММ.* 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
3. *Fisher D.D.* Calculation of Subsonic Cavities with Sonic Free Streamlines // *J. Math. Phys.* 1963. V. 42. № 1. P. 14–26.
4. *Брутян М.А., Ляпунов С.В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1981. Т. 12. № 5. С. 10–22.
5. *Щербаков С.А.* Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.
6. *Schwendeman D.W., Kropinski M.C.A., Cole J.D.* On the Construction and Calculation of Optimal Nonlifting Critical Airfoils // *ZAMP.* 1993. Bd 44. P. 556–571.
7. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
8. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 3. С. 166–172.
9. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О полубесконечных телах вращения, обтекаемых с максимальным критическим числом Маха // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 97–107.
10. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О плоских конфигурациях, обтекаемых потоком идеального газа с максимальным критическим числом Маха // *ПМТФ.* 1998. № 5. С. 106–115.
11. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* О кривизне граничных линий тока течений идеального газа в точках схода и присоединения // *ПММ.* 2022. Т. 96. Вып. 3.
12. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.

13. *Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Многокритериальная многодисциплинарная оптимизация лопатки рабочего колеса вентилятора на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2010. № 3. С. 58–67.
14. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. и др.* Оптимизация биротативного вентилятора с учетом напряженно-деформированного состояния на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2014. № 1. С. 22–34.
15. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование двусторонних несимметричных плоских сопел максимальной тяги // Изв. РАН МЖГ. 2016. № 1. С. 115–120.
16. *Тилляева Н.И.* Сравнение эффективности штыревых и комбинированных кольцевых сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 140–152.
17. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И., Шаповалов В.А.* Внутренние скачки уплотнения при сверхзвуковом обтекании контуров оптимальных тел и сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 121–138.
18. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
19. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
20. *Тилляева Н.И.* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избр. В 2-х Т. Изд. 2-е, исправ. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2005. С. 201–210.
21. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Славянов Н.Н.* Решение задачи о запуске сопла, вмонтированного в торец ударной трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 117–123.
22. *Браилко И.А., Попов Е.Н.* Расчеты стационарных двух- и трехмерных вязких течений в межлопаточных каналах турбин // Тр. НПО Энергомаш им. акад. В.П. Глушко. 2002. № 20. 448 с. С. 4–22.
23. *Мазуров А.П., Таковицкий С.А.* Носовая часть тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением в диапазоне больших дозвуковых скоростей // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 90–100.

УДК 533.6.011.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА КЕРАМИКИ НА ОСНОВЕ $\text{HfB}_2$ -SiC В НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЯХ ДИССОЦИИРОВАННОГО АЗОТА И АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТИ

© 2022 г. А. Ф. Колесников<sup>a,\*</sup>, Н. Т. Кузнецов<sup>c</sup>, Т. И. Муравьева<sup>a</sup>, И. А. Нагорнов<sup>c</sup>, В. И. Сахаров<sup>b,\*\*</sup>, В. Г. Севастьянов<sup>c</sup>, Е. П. Симоненко<sup>c,\*\*\*</sup>, Н. П. Симоненко<sup>c</sup>, А. В. Чаплыгин<sup>a</sup>, О. О. Щербакова<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), Москва, Россия

<sup>b</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

<sup>c</sup> Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН, Россия, Москва

\*E-mail: koles@ipmnet.ru

\*\*E-mail: sakharov@imec.msu.ru

\*\*\*E-mail: ep\_simonenko@mail.ru

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.

После доработки 15.03.2022 г.

Принята к публикации 15.03.2022 г.

На индукционном ВЧ-плазматроне ВГУ-4 (ИПМех РАН) проведены эксперименты по теплообмену в недорасширенных сверхзвуковых струях высокоэнтальпийного азота с образцами керамики на основе  $\text{HfB}_2$ -SiC. Для условий экспериментов в сверхзвуковых режимах численным методом в рамках уравнений Навье–Стокса и упрощенных уравнений Максвелла выполнено моделирование течений плазмы азота в разрядном канале плазматрона и обтекания недорасширенными струями диссоциированного азота цилиндрической державки с образцом керамики. Из сопоставления экспериментальных и расчетных данных определен возможный диапазон значений эффективного коэффициента гетерогенной рекомбинации атомов азота на поверхности керамики (при температуре 2000°С в зависимости от ее интегральной излучательной способности). Изучены микроструктура, элементный и фазовый составы поверхности образца керамики состава  $\text{HfB}_2$ -SiC, а также модифицированного двумя объемами процентами графена образца керамики  $\text{HfB}_2$ -SiC-G после воздействия на них сверхзвукового потока частично диссоциированного азота.

*Ключевые слова:* ВЧ-плазматрон, диссоциированный азот, недорасширенная струя, теплообмен, каталитическая рекомбинация атомов азота, керамика

DOI: 10.31857/S0568528122040065

Высокий научный и технический интерес к разработке методов изготовления [1, 2] и подбору наиболее эффективных составов [3, 4] ультравысокотемпературных керамических материалов (УНТС) на основе  $\text{ZrB}_2(\text{HfB}_2)$ -SiC связан с их высокой перспективностью для применения в условиях аэродинамического нагрева до температур 2000–2500°С. В связи с этим эксперименты по исследованию их поведения под воздействием высокоэнтальпийных потоков различных газов, в частности с применением высокочастотных плазматронов [5–8], имеют особенную важность, поскольку дают возможность оценить применимость такого рода керамических материалов в качестве компонентов наиболее термонагруженных деталей высокоскоростных летательных аппаратов.

С целью повышения трещиностойкости керамики на основе  $\text{ZrB}_2(\text{HfB}_2)$ -SiC, в том числе и для адаптации к условиям циклического нагрева, в их состав вводят модифицирующие компоненты различной химической природы [9–11]. В частности, чрезвычайно перспективными считаются добавки различных форм углерода [12]: углеродных волокон, частиц графита и пластинок графена (G) [13–15].

При достаточно большом количестве публикаций, посвященных исследованиям гетерогенной каталитической рекомбинации атомов азота на поверхности различных материалов [16–26],

в литературе не найдены работы, направленные на взаимодействие ультравысокотемпературной керамики со сверхзвуковыми высокоэнтальпийными потоками чистого азота. Это может быть востребовано для более глубокого осмысления процессов, протекающих при воздействии воздуха и газо-воздушных сред с пониженным содержанием кислорода.

В представленной работе приведены результаты расчетно-экспериментального исследования теплообмена, определения каталитических свойств поверхности образцов ультравысокотемпературной керамики на основе  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$ , нагреваемых в недорасширенных струях диссоциированного азота ВЧ-плазмотрона ВГУ-4. Выполнен анализ микроструктуры, элементного и фазового состава поверхности образца керамического материала состава  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и образца, модифицированного двумя объемными процентами графена ( $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$ ), после воздействия на них сверхзвукового потока частично диссоциированного азота.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЯХ ЧАСТИЧНО ДИССОЦИИРОВАННОГО АЗОТА

Эксперименты в сверхзвуковых режимах работы ВЧ-плазмотрона ВГУ-4 [27, 28] проводились в недорасширенных высокоэнтальпийных струях азота, истекающих из водоохлаждаемого конического сопла с диаметром выходного сечения  $D_s = 50$  мм. Теплообмен водоохлаждаемой медной цилиндрической модели диаметром  $d_m = 30$  мм со скругленной кромкой и плоским образцом керамики в носовой части, расположенным на расстоянии 30 мм от среза сопла, экспериментально исследован при давлении в барокамере установки 8.5 гПа, постоянном расходе газа в разрядном канале 3.6 г/с и мощности ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию 64 кВт. В экспериментах исследованы два вида образцов: ультравысокотемпературная керамика состава  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и модифицированная двумя объемными процентами графена керамика  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$ .

На рис. 1 представлена схема применявшейся модели [29, 30]. Образцы керамики, представлявшие собой цилиндрические таблетки диаметром 15 мм и высотой 3–5 мм, устанавливались в гнезде водоохлаждаемого калориметра на трении, для ограничения тепловых потерь в зазор между стенками водоохлаждаемого калориметра и образцом помещались высокотемпературная гибкая теплоизоляция на основе SiC и углеволокна. Особенности конструкции интегрированного в модель калориметра позволяют надежно фиксировать исследуемый образец и измерять тепловые потери на боковой и тыльной поверхностях образца, при этом образец может быть нагрет до температур выше 2000°C.

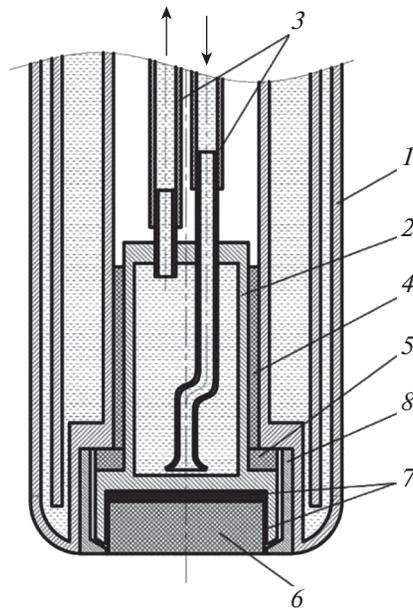
В процессе эксперимента цветовая температура в центре лицевой поверхности керамического образца регистрировалась пирометром спектрального отношения “Mikron M770S”. Точность измерений пирометра в диапазоне температур 1000–3000°C составляет  $\pm 15^\circ\text{C}$ . Показатель визирования используемой модели пирометра – 1:180. Поле температуры на лицевой поверхности образца регистрировалось термовизором “Тандем VS415U”. Массовый расход охлаждающей воды в калориметре измерялся ультразвуковым жидкостным расходомером “Bronkhorst ES-FLOW”. Разность температур охлаждающей воды на выходе из калориметра и на входе в него измерялась экранированной дифференциальной термопарой хромель-алюмель. Массовый расход азота в разрядном канале контролировался с помощью электронного газового ротаметра “Bronkhorst MV-306”.

На рис. 2 представлены характерные зависимости от времени цветовой температуры нагреваемой поверхности керамического образца, давления в барокамере установки ВГУ-4 и мощности ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию, которые регистрировались в процессе экспериментов. Выраженные пульсации цветовой температуры, вероятно, могут быть связаны с химическими реакциями, протекающими на нагреваемой поверхности образца при воздействии высокоэнтальпийного потока азота.

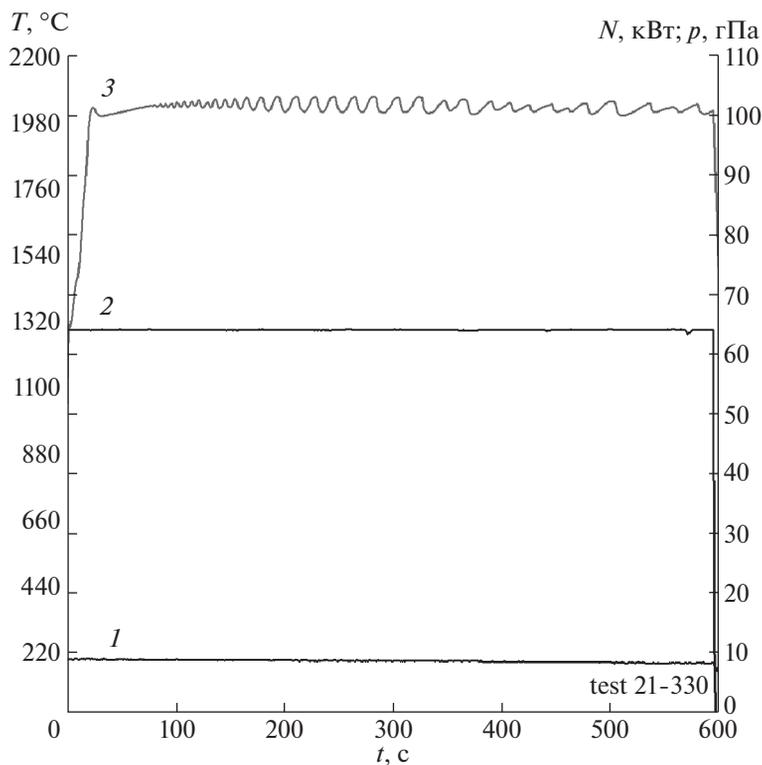
Тепловой поток к поверхности образца в установившемся режиме определялся из уравнения теплового баланса:

$$Q_w = \epsilon_t \cdot \sigma \cdot T_c^4 \cdot A + \Delta T \cdot C_p \cdot g_{water} \quad (1)$$

Здесь  $Q_w$  – тепловой поток к лицевой поверхности образца,  $\epsilon_t$  – интегральная излучательная способность поверхности,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $T_c$  – температура лицевой поверхности по данным пирометра спектрального отношения (К),  $A$  – площадь части поверхности образца, излучающей в окружающее пространство (лицевая поверхность и участок боковой по-



**Рис. 1.** Схема водоохлаждаемой медной цилиндрической модели: 1 – водоохлаждаемая медная державка, 2 – водоохлаждаемый калориметр, 3 – водяные трубопроводы, 4 – фторопластовая теплоизолирующая втулка, 5 – теплоизолирующая шайба, 6 – образец из керамики, 7 – высокотемпературная теплоизоляция, 8 – экранирующая втулка.



**Рис. 2.** Зависимости от времени давления в барокамере  $P_{\infty}$  (1), мощности ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию  $N_{ар}$  (2) и цветовой температуры в центре лицевой поверхности образца  $T_c$  (3) в эксперименте по теплообмену керамики  $HfB_2-SiC$  в недорасширенной высокоэнтальпийной струе азота, истекающей из водоохлаждаемого конического сопла диаметром  $D_s = 50$  мм.

верхности высотой 1 мм),  $\Delta T$  – разность температур охлаждающей воды на выходе из калориметра и на входе в него,  $C_p$  – удельная теплоемкость воды,  $g_{water}$  – массовый расход воды через калориметр.

Измерение температуры пирометром спектрального отношения производится в центре лицевой поверхности образца, для корректного определения теплового потока по формуле (1) исследуемый образец должен быть нагрет достаточно равномерно, что контролируется в процессе эксперимента термовизором “Тандем VS415U”.

Результаты расчета теплового потока по формуле (1) зависят от задаваемого значения интегральной излучательной способности поверхности образца  $\epsilon_i$ . Точное определение излучательной способности поверхности керамического образца, нагретого до высокой температуры химически активным высокоэнтальпийным потоком газа, является сложной самостоятельной экспериментальной задачей. В представленной работе измеренные тепловые потоки приведены для диапазона значений интегральной излучательной способности поверхности от 0.7 до 0.9, что соответствует наиболее распространенным результатам оценок других авторов для схожих по свойствам керамических материалов  $ZrB_2(HfB_2)$ -SiC [31–33].

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование неравновесных течений плазмы азота в разрядном канале ВЧ-плазмотрона с индукционным нагревом газов и в истекающих недорасширенных струях диссоциированного и частично ионизованного азота проводилось для условий работы установки ВГУ-4. Геометрия расчетной области и применявшиеся расчетные методы аналогичны использованным в [29] для образцов из графита. Применялась технология, основанная на комплексе программ численного интегрирования уравнений Навье–Стокса [34] и специальных программ-генераторов, взаимодействующих с базами данных по термодинамическим и переносным свойствам индивидуальных газовых веществ [35].

Система нестационарных уравнений Навье–Стокса в квазитрехмерном приближении решалась численно на структурированной криволинейной сетке методом конечного объема. Система конечно-разностных уравнений состояла из численных аналогов уравнений сохранения для четырехугольных ячеек, покрывающих расчетную область, и разностных аппроксимаций граничных условий. Методом конечного объема определялось приближенное решение – значения физических переменных  $Z_{ij}$  (давления, температуры, вектора скорости, концентраций компонентов) в центре каждой ячейки  $(x_{ij}, y_{ij})$  и в центре каждой стороны ячейки  $(x_{wi}, y_{wi})$ , примыкающей к твердой стенке. Невязкие численные потоки  $F_G^{inv}$  через стороны ячейки вычислялись по результату решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва  $Z_G = Ri(Z_G^L, Z_G^R)$  [36], где  $Ri$  – оператор решения задачи Римана. Граничные значения  $Z_G^{L,R}$  определялись по лимитированным одномерным экстраполяционным формулам вектора  $Z$  от центров ячеек к центрам сторон. Численные значения вязких потоков  $F_G^{vis}$  через стороны ячеек определялись по центральным и одно-сторонним разностным формулам второго порядка точности.

Разностные уравнения решались с помощью двухслойной неявной итерационной схемы, основанной на неявной аппроксимации нестационарных уравнений Навье–Стокса. В конструкции неявного итерационного оператора использовалось расщепление Якобианов численных потоков с учетом знаков собственных значений. Приближенное обращение неявного оператора реализовывалось методом последовательной релаксации Гаусса–Зейделя в линиях с применением  $LU$ -разложения блочно-тридиагональных матриц при решении уравнений на каждой линии.

Использовались следующие граничные условия: во входном сечении разрядного канала задавались все необходимые параметры течения, с учетом закрутки потока. На оси канала использовались условия симметрии. Поскольку одновременно рассчитывалось течение и около цилиндрической модели, располагавшейся в барокамере ВЧ-плазмотрона, то в выходном сечении расчетной области ставились “неотражающие” граничные условия. На всех твердых поверхностях (стенка кварцевой трубки, торец входного участка разрядного канала, поверхности звукового сопла и цилиндрической модели) задавались нулевые значения компонент скорости и определенные значения температуры. Стенка разрядного канала полагалась некаталитической по отношению к рекомбинации атомарных компонентов диссоциированной и частично ионизованной смеси. Полная постановка задачи приведена в [37, 38].

Индуктор в расчете заменялся пятью бесконечно тонкими кольцевыми витками. При расчете высокочастотного вихревого электрического поля на основе локально одномерного приближения использовались предположения: электромагнитное поле считалось монохроматическим с заданной частотой, определяемой высокочастотным током в индукторе (частота тока в индукторе 1.76 МГц); плазма квазинейтральна; магнитная проницаемость плазмы  $\mu = 1$ ; диэлектрическая проницаемость плазмы не зависит от электромагнитного поля и, следовательно, не зависит от координат; током смещения можно пренебречь; изменение электрического поля в осевом направлении пренебрежимо мало по сравнению с его изменением в радиальном направлении. При совместном расчете течения плазмы азота и электромагнитного поля в разрядном канале плазмотрона в качестве определяющего параметра задавалась также мощность  $N_{pl}$ , вкладываемая в разряд, а соответствующий ток в индукторе определялся в процессе решения. Значение  $N_{pl}$ , в свою очередь, определялось с помощью калориметрических измерений выносимой мощности из разрядного канала плазмотрона:  $N_{pl} = N_{ap} * Eff(N_{ap})$ . Полная постановка электромагнитной части задачи приведена в [39].

В данной работе многокомпонентная частично ионизованная плазма азота рассматривалась как смесь идеальных газов, в которой могут протекать химические реакции и реакции ионизации. Вращения и колебания молекул описывались моделью “жесткий ротатор-гармонический осциллятор” с бальмановским распределением по энергетическим уровням. Предполагалось, что все компоненты находятся в основном электронном состоянии, и вращательная и колебательная температуры молекул равны поступательной температуре. В расчетах учитывались 5 нейтральных и ионизованных компонентов смеси азота: N, N<sub>2</sub>, N<sup>+</sup>, N<sub>2</sub><sup>+</sup> и e<sup>-</sup>. Термодинамические и термохимические данные для рассматриваемых компонентов брались из [35]. Числовые значения констант химических реакций, протекающих в высокотемпературной смеси N, N<sub>2</sub>, N<sup>+</sup>, N<sub>2</sub><sup>+</sup> и e<sup>-</sup>, заимствованы из [40–43].

Транспортная модель необходима для вычисления вязких потоков массы компонентов, импульса и энергии в многокомпонентном газе. Молярные диффузионные потоки определялись из соотношений Стефана-Максвелла для частично ионизованной смеси газа [44] с использованием условий квазинейтральности смеси и отсутствия тока проводимости. Термодиффузией пренебрегалось. Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности газовой смеси использовались приближенные формулы Уилке-Васильевой [45]. Проводимость плазмы определялась в пренебрежении скоростью диффузии тяжелых частиц по сравнению с электронами [38].

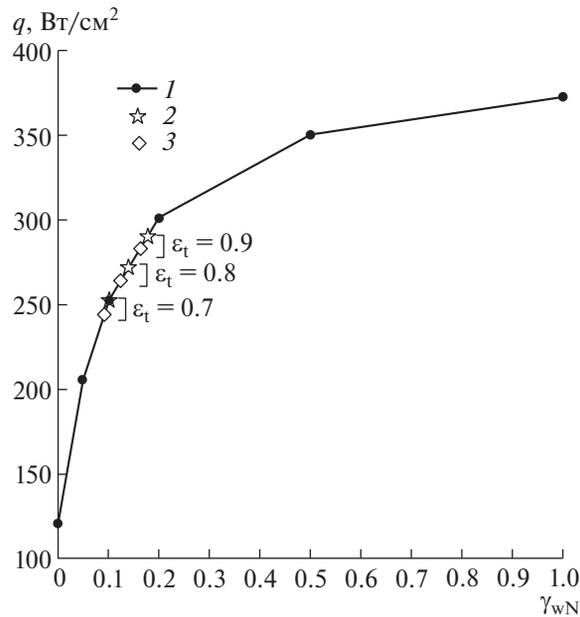
Бинарные коэффициенты диффузии вычислялись по двухпараметрической интерполяционной формуле [46] через сечения упругих столкновений диффузионного типа нейтральных атомов и молекул между собой и с ионами. Эта формула построена на основе значений сечений при низкой ( $T_1 = 300$  К) и высокой ( $T_2 = 20000$  К) температурах. Взаимодействие заряженных частиц описывается в приближении парных столкновений с использованием экранированного кулоновского потенциала. Для расчета интегралов столкновений этого типа используются аппроксимационные зависимости, приведенные в [47]. Числа Шмидта для всех компонентов, необходимые при расчете коэффициентов вязкости и теплопроводности, вычислялись в предположении, что отношение значений всех сечений столкновений “вязкостного” типа к соответствующим сечениям “диффузионного” типа равно 1.1.

В настоящих расчетах химически неравновесных течений для диссоциированного и частично ионизованного азота предполагалось, что каталитическая рекомбинация атомов азота на поверхности образца керамики (S) описывается простой реакцией первого порядка:  $N + N + S \rightarrow N_2 + S$ , массовый диффузионный поток атомов к поверхности керамики имеет вид:

$$J_N = -\rho K_{wN} C_N$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $C_N$  – массовая концентрация атомов N. Константа скорости рекомбинации  $K_{wN}$  выражается через эффективный коэффициент рекомбинации  $\gamma_{wN}$ :

$$K_{wN} = \frac{2\gamma_{wN}}{2 - \gamma_{wN}} \left( \frac{R_A T_w}{2\pi m_N} \right)^{0.5}$$



**Рис. 3.** Рассчитанные зависимости плотностей тепловых потоков в критической точке цилиндрической модели с керамическим образцом от эффективного коэффициента каталитической рекомбинации атомов азота (кривая 1) маркерами 2 и 3 на кривой отмечены экспериментальные данные для образцов  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  соответственно.

### 3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ И ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рис. 3 приведены плотности тепловых потоков в точке торможения в зависимости от величины  $\gamma_{wN}$ . Здесь же даны измеренные значения тепловых потоков для того же режима обтекания для двух образцов керамики ( $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$ ) в зависимости от заданной интегральной излучательной способности поверхности.

В табл. 1, 2 приведены экспериментальные значения тепловых потоков и температуры поверхности керамического образца  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  (табл. 1) и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  (табл. 2).

Расчетное значение давления торможения, осредненное по поверхности образца, для рассмотренного режима обтекания составило 0.028 атм. Как видно из табл. 1, 2, измеренные значения тепловых потоков при одинаковом режиме обтекания для обоих керамических образцов практически совпадают.

Из сравнений величин плотностей тепловых потоков, полученных в расчетах и экспериментах, можно заключить, что для принятого диапазона возможных значений интегральной излучательной способности поверхности образцов  $\gamma_{wN}$  лежит в интервале от 0.09 до 0.18. Таким обра-

**Таблица 1**

Заданное значение интегральной излучательной способности поверхности $\epsilon_t$	Измеренная плотность теплового потока $q_{exp}$ , (Вт/см <sup>2</sup> )	Температура поверхности образца, (°C)
0.7	252	~2000
0.8	272	
0.9	290	

Таблица 2

Заданное значение интегральной излучательной способности поверхности $\epsilon_t$	Измеренная плотность теплового потока $q_{exp}$ , (Вт/см <sup>2</sup> )	Температура поверхности образца, (°С)
0.7	244	~2000
0.8	264	
0.9	283	

зом, в условиях обтекания сверхзвуковой струей диссоциированного азота образцы керамики  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  проявили себя как среднекаталитические материалы.

#### 4. АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность обоих керамических материалов после воздействия на них сверхзвукового потока частично диссоциированного азота изучена с использованием рентгенофазового анализа, а также растровой электронной микроскопии с рентгеноспектральным элементным микроанализом локальных областей.

Рентгенограммы поверхности керамических образцов до и после воздействия записывались на рентгеновском дифрактометре Bruker D8 Advance (излучение  $\text{CuK}\alpha$ , разрешение  $0.02^\circ$  при накоплении сигнала в точке в течение 0.3 с). Рентгенофазовый анализ выполнялся с применением программы MATCH! – Phase Identification from Powder Diffraction, Version 3.8.0.137 (Crystal Impact, Germany), в которую интегрирована база данных Crystallography Open Database (COD).

Изучение микроструктуры поверхности образцов выполнено с использованием растрового электронного микроскопа FEI Quanta 650 при ускоряющем напряжении 10 кВ в режиме детектирования вторичных электронов. Локальный химический анализ областей размером  $25 \times 30$  мкм выполнен с помощью приставки для рентгеноспектрального элементного микроанализа EDAX в режиме детектирования высокоэнергетических обратноотраженных электронов при ускоряющем напряжении 20 кВ.

Как видно из рентгенограмм, представленных на рис. 4, как для материала  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$ , так и для образца  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  происходит практически полное удаление кристаллического карбида кремния. Так, при сохранении высокой интенсивности рефлексов гексагональной фазы  $\text{HfB}_2$  [48] интенсивность рефлексов, относящихся к кубической фазе  $\text{SiC}$  [49] и хорошо проявившихся для исходных образцов (рентгенограммы 1 и 3), снижается почти до нуля (рентгенограммы 2 и 4). Кроме того, появились низкоинтенсивные рефлексы кубического твердого раствора – карбонитрида гафния  $\text{Hf(C,N)}$  ( $\text{HfC}$  [50],  $\text{HfN}$  [51],  $\text{Hf(C}_{0.5}\text{N}_{0.5})}$  [51]). Имеющиеся примеси моноклинного оксида гафния [52], вероятно, связаны с некоторым окислением образцов на стадии охлаждения.

Выполненный элементный анализ микрообластей размером  $25 \times 30$  мкм поверхностей керамических материалов  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  после воздействия (рис. 5) показал, что содержание кремния в результате снизилось в 3–7 раз. Так, атомное соотношение  $n(\text{Hf}):n(\text{Si})$  для первого образца составляет 11.7, а для второго – 6.5 при расчетном значении этой величины 1.6. Это может быть вызвано высокотемпературной диссоциацией карбида кремния и/или взаимодействием  $\text{SiC}$  с молекулярным и, тем более, атомарным азотом с уносом нитрида кремния потоком. Данные процессы приводят к обеднению материала кремнием при сохранении достаточно высокого количества углерода на поверхности, который частично включается в состав твердого раствора  $\text{Hf(C, N)}$ . Кроме того, несмотря на большую погрешность EDS-анализа при определении легких химических элементов, можно сделать вывод о повышенном содержании азота в поверхностных и приповерхностных слоях образцов. При этом содержание углерода существенно выше, чем это можно было бы предполагать, исходя из концентрации карбо-нитрида гафния на рентгенограммах (рис. 4), т.е. можно предположить также его существование в виде аморфной сажи.

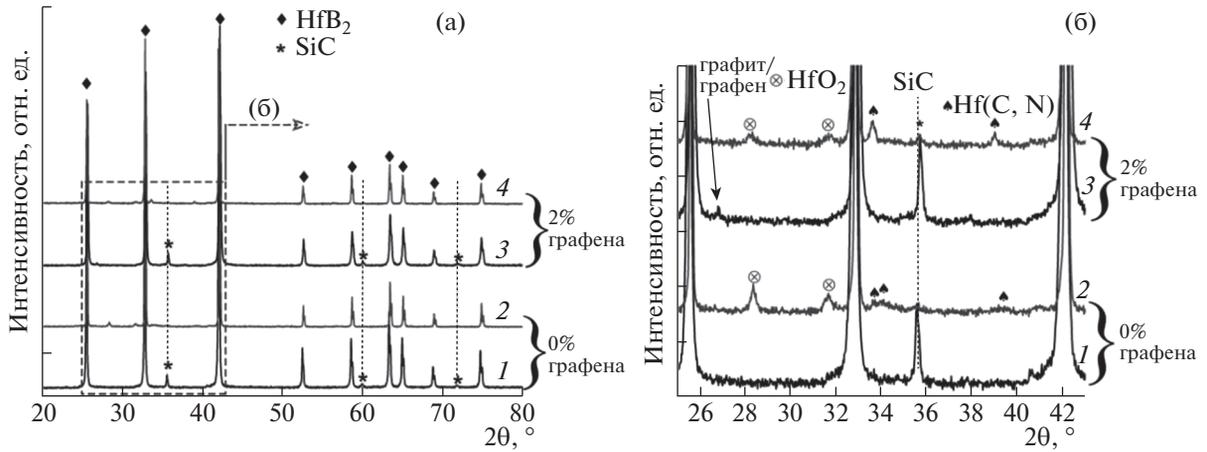


Рис. 4. Рентгенограммы поверхности (а) керамических образцов HfB<sub>2</sub>-SiC (1, 2) и HfB<sub>2</sub>-SiC-G (3, 4) до (1, 3) и после воздействия сверхзвукового потока частично диссоциированного азота (2, 4); укрупненный участок рентгенограмм (б) в диапазоне углов 2θ = 25–43°.

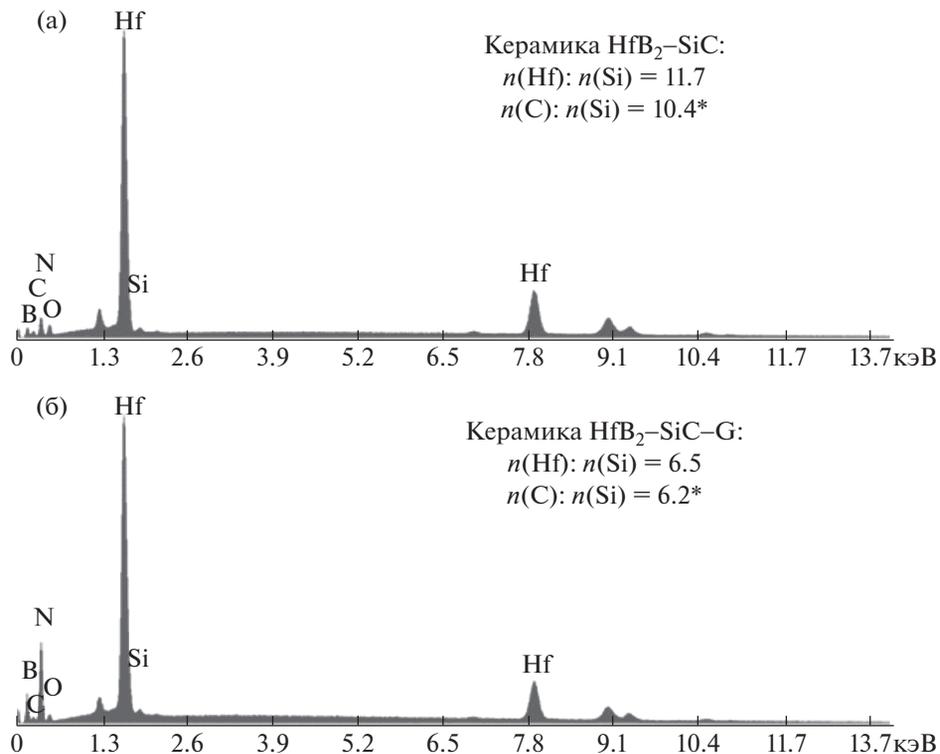
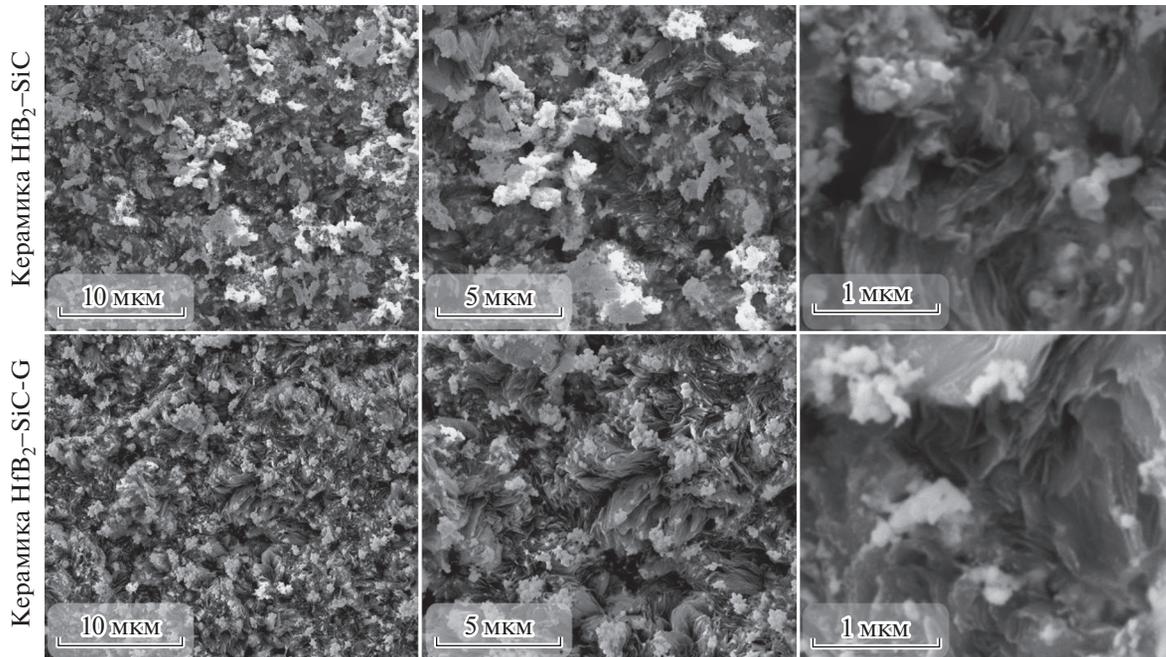


Рис. 5. EDS-спектры поверхности керамических образцов HfB<sub>2</sub>-SiC (а) и HfB<sub>2</sub>-SiC-G (б) после воздействия сверхзвукового потока частично диссоциированного азота; содержание углерода дано ориентировочно из-за высокой погрешности его определения.

Изучение микроструктуры поверхности керамических образцов (рис. 6) показало, что в результате воздействия потока частично диссоциированного азота сформировались иерархически организованные пластинчатые и слоистые структуры, ориентированные преимущественно перпендикулярно к плоскости поверхности, которые свойственны при протекании газофазных реакций. Высокодисперсные светлые частицы на вершинах данных образований, вероятно, относятся к примесной фазе оксида гафния.



**Рис. 6.** Микроструктура поверхности керамических образцов  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  после воздействия сверхзвукового потока частично диссоциированного азота (по данным растровой электронной микроскопии, режим детектирования вторичных электронов).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено экспериментальное и численное исследование течений и теплообмена в недорасширенных струях диссоциированного азота для условий, реализованных на 100-киловаттном ВЧ-плазматроне ВГУ-4.

Из сопоставления экспериментальных и расчетных данных по тепловым потокам к поверхности образцов керамики  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  определен эффективный коэффициент гетерогенной рекомбинации атомов азота  $\gamma_{wN}$  на поверхности при температуре  $2000^\circ\text{C}$ . Для обоих исследованных образцов  $\gamma_{wN}$  лежит в интервале от 0.09 до 0.18 при допущении, что излучательная способность их поверхностей  $\epsilon_t$  находится в интервале от 0.7 до 0.9. Таким образом, образцы керамики  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  в условиях обтекания сверхзвуковым потоком частично диссоциированного азота проявляют себя как среднекаталитичные материалы.

В результате изучения поверхности и приповерхностной области керамических материалов  $\text{HfB}_2\text{-SiC}$  и  $\text{HfB}_2\text{-SiC-G}$  после воздействия на них сверхзвукового потока частично диссоциированного азота показано, что при этом происходят химические процессы, существенным образом изменяющие микроструктуру и состав. С использованием совокупных данных рентгеноспектрального и рентгенофазового анализов установлено, что из-за установившихся температур  $>2000^\circ\text{C}$  при пониженном давлении происходит диссоциация карбида кремния и частичное удаление кремния. Оставшийся углерод, вероятно, может находиться на поверхности как в виде аморфной сажи, так и участвовать в формировании новой фазы карбо-нитрида гафния.

Работа выполнена по темам государственных заданий Института Механики МГУ и ИПМех РАН (№ государственной регистрации АААА-А16-116021110205-0 и АААА-А20-120011690135-5 соответственно) при частичной поддержке гранта РФФИ № 20-01-00056. Изучение фазового состава поверхности образцов выполнено с применением оборудования ЦКП ФМИ ИОНХ РАН, функционирующего при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания ИОНХ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Servadei F., Zoli L., Galizia P., Melandri C., Sciti D.* Preparation of UHTCMCs by hybrid processes coupling Polymer Infiltration and Pyrolysis with Hot Pressing and vice versa // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2022. № 42. P. 2118–2126.  
<https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2021.12.039>
2. *Aguirre T.G., Lamm B.W., Cramer C.L., Mitchell D.J.* Zirconium-diboride silicon-carbide composites: A review // *Ceram. Int.* 2022. № 48. P. 7344–7361.  
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.11.314>
3. *Mungiguerra S., Cecere A., Savino R., Saraga F., Monteverde F., Sciti D.* Improved aero-thermal resistance capabilities of ZrB<sub>2</sub>-based ceramics in hypersonic environment for increasing SiC content // *Corros. Sci.* 2021. № 178. P. 109067.  
<https://doi.org/10.1016/j.corsci.2020.109067>
4. *Mungiguerra S., Di Martino G.D., Cecere A., Savino R., Zoli L., Silvestroni L., Sciti D.* Ultra-high-temperature testing of sintered ZrB<sub>2</sub>-based ceramic composites in atmospheric re-entry environment // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2020. № 156. P. 119910.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119910>
5. *Simonenko E.P., Simonenko N.P., Gordeev A.N., Kolesnikov A.F., Chaplygin A.V., Lysenkov A.S., Nagornov I.A., Sevastyanov V.G., Kuznetsov N.T.* Oxidation of HfB<sub>2</sub>-SiC-Ta<sub>4</sub>HfC<sub>5</sub> ceramic material by a supersonic flow of dissociated air // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2021. № 41. P. 1088–1098.  
<https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2020.10.001>
6. *Zhuravleva P.L., Lutsenko A.N., Lebedeva Y.E., Sorokin O.Y., Gulyaev A.I., Gordeev A.N., Kolesnikov A.F.* Formation of a Glass Layer in Ceramic Composite Materials as a Result of Exposure to High-Enthalpy Flow // *Glas. Ceram.* № 78. 2021. P. 219–225.  
<https://doi.org/10.1007/s10717-021-00383-z>
7. *Sinitsyn D.Y., Anikin V.N., Eremin S.A., Vanyushin V.O., Shvetsov A.A., Bardin N.G.* Heat-Resistant Coatings of ZrB<sub>2</sub>-MoSi<sub>2</sub>-SiC on Carbon-Carbon Composite Materials for Aerospace Applications // *Refract. Ind. Ceram.* 2020. № 61 P. 456–462.  
<https://doi.org/10.1007/s11148-020-00502-3>
8. *Marschall J., Pejakovic D., Fahrenholtz W.G., Hilmas G.E., Panerai F., Chazot O.* Temperature jump phenomenon during plasmatron testing of ZrB<sub>2</sub>-SiC ultrahigh-temperature ceramics // *J. Thermophys. Heat Transf.* 2012. № 26. P. 559–572.  
<https://doi.org/10.2514/1.T3798>
9. *Adibpur F., Tayebifard S.A., Zakeri M., Shahedi Asl M.* Spark plasma sintering of quadruplet ZrB<sub>2</sub>-SiC-ZrC-Cf composites // *Ceram. Int.* 2020. № 46. P. 156–164.  
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.08.243>
10. *Jarman J.D., Fahrenholtz W.G., Hilmas G.E., Watts J.L., King D.S.* Mechanical properties of fusion welded ceramics in the SiC-ZrB<sub>2</sub> and SiC-ZrB<sub>2</sub>-ZrC systems // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2022. № 42. P. 2107–2117.  
<https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2022.01.019>
11. *Liu C., Yuan X., Wang W., Liu H., Li C., Wu H., Hou X.* In-situ fabrication of ZrB<sub>2</sub>-ZrC-SiCnws hybrid nanopowders with tuneable morphology SiCnws // *Ceram. Int.* 2022. № 48. P. 4055–4065.  
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.10.195>
12. *Simonenko E.P., Simonenko N.P., Sevastyanov V.G., Kuznetsov N.T.* ZrB<sub>2</sub>/HfB<sub>2</sub>-SiC ultra-high-temperature ceramic materials modified by carbon components: the review // *Russ. J. Inorg. Chem.* 2018. № 63. P. 1772–1795.  
<https://doi.org/10.1134/S003602361814005X>
13. *Shahedi Asl M., Ghassemi Kakroudi M.* Characterization of hot-pressed graphene reinforced ZrB<sub>2</sub>-SiC composite // *Mater. Sci. Eng. A.* 2015. № 625. P. 385–392.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.028>
14. *Simonenko E.P., Simonenko N.P., Kolesnikov A.F., Chaplygin A.V., Lysenkov A.S., Nagornov I.A., Simonenko T.L., Gubin S.P., Sevastyanov V.G., Kuznetsov N.T.* Oxidation of graphene-modified HfB<sub>2</sub>-SiC ceramics by supersonic dissociated air flow // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2022. № 42. P. 30–42.  
<https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2021.09.020>
15. *Zhang X., An Y., Han J., Han W., Zhao G., Jin X.* Graphene nanosheet reinforced ZrB<sub>2</sub>-SiC ceramic composite by thermal reduction of graphene oxide // *RSC Adv.* 2015. № 5. P. 47060–47065.  
<https://doi.org/10.1039/C5RA05922D>
16. *Hays G.N., Tracy C.J., Oskam H.J.* Surface Catalytic Efficiency of a Sputtered Molybdenum Layer on Quartz and Pyrex of the Recombination of Nitrogen Atoms // *J. Chem. Phys.* 1974. V. 60. № 5. P. 2027–2034.
17. *Halpern B., Rosner D.B.* Chemical Energy Accommodation at Catalytic Surfaces. Flow Reactor Studies of the Association of Nitrogen Atoms at Metals at High Temperatures // *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1978. V. 74. № 8. P. 1883–1912.
18. *Жестков Б.Е., Книвель А.Я.* Взаимодействие диссоциированного потока азота с металлическими поверхностями // *Ученые записки ЦАГИ.* 1979. Т. X. № 6. С. 37–50.

19. Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Якушин М.И. Влияние каталитической активности поверхности на неравновесный теплообмен в дозвуковой струе диссоциированного азота // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 166–172.
20. Kolodziej P., Stewart D.A. Nitrogen Recombination on High-Temperature Reusable Surface Insulation and the Analysis of its Effects on Surface Catalysis // AIAA Paper. 1987. 87–1637.
21. Александров Е.Н., Андропова Ю.И., Жестков Б.Е., Козлов С.Н., Литвин А.С. Определение скоростей гетерогенной рекомбинации атомов азота на металлах и кварце // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. М.: Наука, 1987. С. 132–140.
22. Залогин Г.Н., Итин П.Г., Лунев В.В., Перов С.Л. О сублимации платины при каталитической гетерогенной рекомбинации атомов азота на ее поверхности // Письма в журнал технической физики. 1988. Т. 14. № 22. С. 2077–2081.
23. Васильевский С.А., Колесников А.Ф., Якушин М.И. Определение эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов в условиях влияния на тепловой поток газофазных реакций // ТВТ. 1991. Т. 29. № 3. С. 521–529.
24. Беркут В.Д., Дорошенко В.М., Ковтун В.В., Кудрявцев Н.Н. Неравновесные физико-химические процессы в гиперзвуковой аэродинамике. М.: Энергоатомиздат, 1994. 400 с.
25. Ковалев В.Л. Гетерогенные каталитические процессы при входе в атмосферу. М.: МГУ, 1999. 126 с.
26. Ковалев В.Л., Колесников А.Ф. Экспериментальное и теоретическое моделирование гетерогенного катализа в аэротермохимии (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 3–31.
27. Гордеев А.Н., Колесников А.Ф. Индукционные плазмотроны серии ВГУ // Актуальные проблемы механики. Физико-химическая механика жидкостей и газов. М.: Наука, 2010. С. 151–177.
28. Gordeev A.N., Kolesnikov A.F., Yakushin M.I. An Induction Plasma Application to “Buran’s” Heat Protection Tiles Ground Tests // SAMPE Journal. 1992. № 28 (3). P. 29–33.
29. Колесников А.Ф., Лукомский И.В., Сахаров В.И., Чапыгин А.В. Экспериментальное и численное моделирование теплообмена поверхности графита в недорасширенных струях диссоциированного азота // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 136–144.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528121060074>
30. Патент на полезную модель № 205572 U1 Российская Федерация, МПК G01N 25/00. Устройство для измерения теплового потока к поверхности материала, нагретого в струе высокоэнтальпийного газа до высоких температур: № 2021109253: заявл. 05.04.2021; опубл. 21.07.2021 / И.В. Лукомский, А.В. Чапыгин, А.Ф. Колесников.
31. Marschall J., Pejaković D.A., Fahrenholtz W.G., Hilmas G.E., Panerai F., Chazot O. Temperature jump phenomenon during plasmatron testing of ZrB<sub>2</sub>-SiC ultrahigh-temperature ceramics // Journal of thermophysics and heat transfer. 2012. Т. 26. № 4. С. 559–572.
32. Scatteia L., Borrelli R., Cosentino G., Bêche E., Sans J.L., Balat-Pichelin M. Catalytic and radiative behaviors of ZrB<sub>2</sub>-SiC ultrahigh temperature ceramic composites // Journal of Spacecraft and rockets. 2006. Т. 43. № 5. С. 1004–1012.
33. Marschall J., Fletcher D.G. High-enthalpy test environments, flow modeling and in situ diagnostics for characterizing ultra-high temperature ceramics // Journal of the European Ceramic Society. 2010. Т. 30. № 11. С. 2323–2336.
34. Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V.I. HIGHTEMP technique of high temperature gas flows numerical simulations // Proc. 5th Europ. Symp. on Aerothermodyn. Space Vehicles. Cologne, Germany, 2004. SP 563. Noordwijk: ESTEC. P. 323–328.
35. Термодинамические свойства индивидуальных веществ / ред. В.П. Глушко. М.: Наука, 1978. Т. 1. Кн. 1. 495 с.; Т. 1. Кн. 2. 327 с.
36. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
37. Афонина Н.Е., Васильевский С.А., Громов В.Г., Колесников А.Ф., Першин И.С., Сахаров В.И., Якушин М.И. Течение и теплообмен в недорасширенных струях воздуха, истекающих из звукового сопла плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 156–168.
38. Сахаров В.И. Численное моделирование термически и химически неравновесных течений и теплообмена в недорасширенных струях индукционного плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 157–168.
39. Васильевский С.А., Колесников А.Ф. Численное моделирование течений равновесной индукционной плазмы в цилиндрическом канале плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 164–173.
40. Ибрагимова Л.Б., Смехов Г.Д., Шаталов О.П. Константы скорости диссоциации двухатомных молекул в термически равновесных условиях // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 181–186.
41. Лосев С.А., Макаров В.Н., Погосбекян М.Ю. Модель физико-химической кинетики за фронтом очень сильной ударной волны в воздухе // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 169–182.

42. *Park C.* Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions, Earth Entries // *J. Thermophys and Heat Transfer*. 1993. V. 7. № 3. P. 385–398.
43. *Losev S.A., Makarov V.N., Pogosbekyan M. Ju., Shatalov O.P., Nikol'sky V.S.* Thermochemical nonequilibrium kinetic models in strong shock waves on air // *AIAA Paper*. 1990. № 1994. 13 p.
44. *Гуршфельдер Дж., Кертуисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
45. *Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K.* The Properties of Gases and Liquids. McGraw-Hill, N.Y.: 1977. 688 p.
46. *Afonina N.E., Gromov V.G.* Thermochemical nonequilibrium computations for a MARS express probe // *Proc. 3rd Europ. Symp. Aerothermodynam. Space Vehicles, ESTEC, Noordwijk, The Netherland*. 1998. P. 179–186.
47. *Гордеев О.А., Калинин А.П., Комов А.Л., Люстерник В.Е., Самуйлов Е.В., Соколова И.А., Фокин Л.Р.* Потенциалы взаимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20000 К. Обзоры по теплофизическим свойствам веществ // *ТФЦ*. 1985. № 5 (55). 100 с.
48. *Holleck H.* Legierungsverhalten von  $HfB_2$  mit Uran- und Übergangsmetalldiboriden // *J. Nucl. Mater.* 1967. № 21. P. 14–20.  
[https://doi.org/10.1016/0022-3115\(67\)90724-6](https://doi.org/10.1016/0022-3115(67)90724-6)
49. *Burdick C.L., Owen E.A.* The atomic structure of carborundum determined by X-rays // *J. Am. Chem. Soc.* 1918. № 40. P. 1749–1759.  
<https://doi.org/10.1021/ja02245a001>
50. *Aigner K., Lengauer W., Rafaja D., Ettmayer P.* Lattice parameters and thermal expansion of  $Ti(C_xN_{1-x})$ ,  $Zr(C_xN_{1-x})$ ,  $Hf(C_xN_{1-x})$  and  $TiN_{1-x}$  from 298 to 1473 K as investigated by high-temperature X-ray diffraction // *J. Alloys Compd.* 1994. № 215. P. 121–126.  
[https://doi.org/10.1016/0925-8388\(94\)90828-1](https://doi.org/10.1016/0925-8388(94)90828-1)
51. *Lengauer W., Binder S., Aigner K., Ettmayer P., Guillou A., Debuigne J., Groboth G.* Solid state properties of group IVb carbonitrides // *J. Alloys Compd.* 1995. № 217. P. 137–147.  
[https://doi.org/10.1016/0925-8388\(94\)01315-9](https://doi.org/10.1016/0925-8388(94)01315-9)
52. *Whittle K.R., Lumpkin G.R., Ashbrook S.E.* Neutron diffraction and MAS NMR of Cesium Tungstate defect pyrochlores // *J. Solid State Chem.* 2006. № 179. P. 512–521.  
<https://doi.org/10.1016/j.jssc.2005.11.011>

УДК 533.69

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРЕВОГО СЛЕДА ЗА МАШУЩИМ КРЫЛОМ, СОВЕРШАЮЩИМ КОЛЕБАНИЯ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

© 2022 г. V. K. Vineeth\*, D. K. Patel\*\*

*School of Mechanical Engineering, Vellore Institute of Technology Vellore, India-632014**\*E-mail: vineeth.vk1019@gmail.com**\*\*E-mail: devendra21082@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

После доработки 05.10.2021 г.

Принята к публикации 01.11.2021 г.

Выполнено сравнение характеристик следа за специально спроектированным крыловым профилем, совершающим угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания. Влияние параметров махового движения исследовано при постоянном числе Рейнольдса  $Re_c = 2640$  в диапазоне чисел Струхала  $St_A$ , вычисленных по амплитуде,  $0.1 \leq St_A \leq 0.4$ . Возникновение завихренности над и под профилем зависит от первоначального направления движения профиля и остается одним и тем же для всех типов рассмотренных машущих колебаний. Рассмотрена эволюция вихрей на передней и задней кромках. Вертикальные колебания профиля сильнее влияют на характеристики вихря на передней кромке. След за профилем, совершающим смешанные вертикально-угловые колебания, в основном определяется угловыми колебаниями при  $St_A < 0.24$  и вертикальными колебаниями при  $St_A > 0.24$ . Расчеты силовых характеристик показывают, что существования одной лишь обратной дорожки Кармана недостаточно, чтобы развить тягу на профиле. На характеристики следа существенным образом влияет периодическая компонента пульсаций скорости. Приведены данные по анизотропному полю напряжений, развивающемуся вокруг профиля вследствие периодических пульсаций скорости. При помощи собственно ортогонального разложения идентифицированы когерентные структуры, развивающиеся в следе, и выполнено качественное сравнение этих структур для различных типов машущих колебаний. Перенос энергии от машущего крыла в поток жидкости максимальный в случае вертикальных колебаний, далее следуют смешанные и, наконец, угловые колебания.

*Ключевые слова:* машущий профиль, угловые движения, вертикальные движения, ламинарное течение, когерентные структуры, коэффициенты сил

DOI: 10.31857/S0568528122020128

Механизмы махания, используемые насекомыми, птицами и рыбами, способны обеспечить весьма эффективное передвижение. Развитие беспилотных и микро(нано) летательных аппаратов требует применения очень сложных и эффективных машущих органов. В этой связи много внимания уделялось динамике машущего крылового профиля. Ранее широко исследовались различные механизмы махания, включая угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания. Так, угловые колебания изучались в работах [1–4], вертикальные в [3–8] и смешанные в [9–12]. Вихри за колеблющимся профилем образуют различные конфигурации в следе, такие как дорожки Кармана, обратные дорожки Кармана, отклоненные конфигурации и совершенно нерегулярные конфигурации. В работе [13] наблюдалось образование обратной дорожки Кармана за профилем, совершающим вертикально-угловые колебания, в диапазоне чисел Струхала от 0.25 до 0.35 и прямой дорожки при меньших числах Струхала (параметры машущего движения выражены в безразмерной форме). В [5] показано, что изменение картины течения в следе за профилем в вертикальном движении происходит в диапазоне безразмерной скорости вертикального движения (аналог числа Струхала) от 0.2 до 0.4. Структура отклоненного следа за профилем в вертикальном движении была визуализирована в работе [14], а аналогичная конфигурация за профилем, совершающим колебания смешанного типа, была обнаружена в [15].

В работе [16] показано, что изменение структуры течения за профилем, совершающим угловые колебания, происходит при числах Струхала в диапазоне от 0.1 до 0.3.

В работе [17] отмечается, что при кармановском расположении вихрей в следе след создает сопротивление движению тела, а при обратном расположении он создает тягу. Нарушение симметрии в обратной дорожке Кармана и возникновение отклоненного следа создают и тягу, и подъемную силу. В работе [18] были выявлены переходы в структуре следа за машущим профилем и визуализированы кармановский след, обратный кармановский след и отклоняющийся след. В [19] установлены переходы в следе за вертикально колеблющимся профилем, а в [20] – за профилем, совершающим колебания смешанного типа. В отклоненном следе вихри противоположного знака образуют диполи и распространяются в дальний след. Образование диполей за профилями, совершающими угловые и вертикальные колебания, отмечалось в работах [21] и [22]. Однако все эти работы выполнены для различных форм профилей, различных параметров машущего движения и при различных числах Рейнольдса. Поэтому сопоставление картин переходов в следе за одним и тем же профилем, производящим операции в одном и том же диапазоне параметров, но для различных видов машущего движения, может быть полезно для изучения аэродинамики профиля и возникающих полей течения.

В литературе также отмечались наличие множественных вихревых следов и их влияние на аэродинамические характеристики машущего профиля [23, 24]. В [24] наблюдался переход от сопротивления к тяге в следе с множественными вихрями, в противоположность следу с обратным расположением Кармана. В различных работах проводились измерения сил в следах за профилями, совершающими угловые [25], вертикальные [8] и смешанные колебания [10, 26]. Силовые измерения в работе [26] показали, что оптимальное производство тяги профилем, совершающим смешанные колебания, имеет место при числах Струхала от 0.25 до 0.40. Однако измерения сил были выполнены при различных рабочих числах Рейнольдса, в связи с чем их непосредственное сравнение невозможно. Сравнение различных типов машущих колебаний при одном и том же рабочем числе Рейнольдса было бы полезно для разработки и проектирования микроразмерных летательных аппаратов. Большинство из этих аппаратов предназначено для полетов при числах Рейнольдса от  $10^3$  до  $10^4$  [27]. Соответственно, в настоящей работе для исследования выбрано число Рейнольдса 2640. В литературе подчеркивалось, что оптимальные характеристики профиля достигаются в диапазоне чисел Струхала от 0.1 до 0.4 и именно этот диапазон рассмотрен в настоящей работе. Рассматриваются только периодические колебания, которые представляют собой наиболее распространенную форму двигательной активности биологических объектов.

## 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕТОДИКА

### 1.1. Геометрия и кинематика профиля

Рассматривается симметричный профиль с полукруглой передней кромкой и клиновидной задней кромкой. Отношение толщины твердого профиля к длине хорды  $D/C = 1/6$ . Угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания, совершаемые профилем, представлены на рис. 1. Угловые колебания профиля описываются уравнением

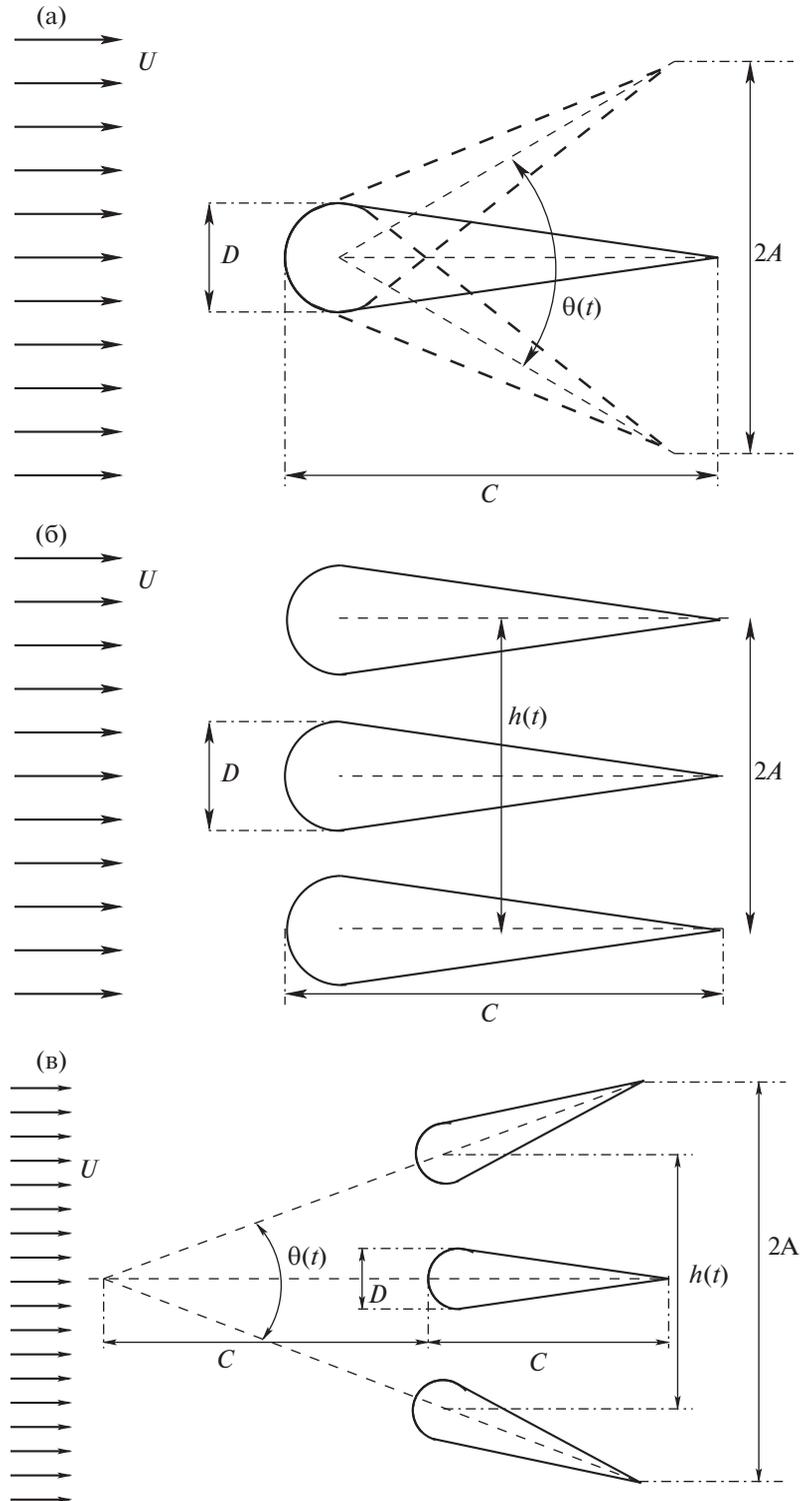
$$\theta(t) = \theta_0 \sin 2\pi f t \quad (1.1)$$

где  $\theta(t)$  – мгновенная амплитуда колебаний, а  $\theta_0$  – максимальная амплитуда;  $f$  – частота машущего движения и  $t$  – время. Вертикальное движение, совершаемое профилем, описывается уравнением

$$h(t) = A \sin 2\pi f t \quad (1.2)$$

где  $h(t)$  – мгновенная амплитуда вертикального колебания, а  $A$  – максимальная амплитуда. Уравнения (1.1) и (1.2), взятые вместе, описывают смешанные, вертикально-угловые колебания. Сдвиг по фазе между угловыми и вертикальными колебаниями не рассматривается. Частота и амплитуда машущего движения представляются в безразмерном виде, как число Струхала  $St_A$ , вычисленное по амплитуде

$$St_A = \frac{2A \times f}{U} \quad (1.3)$$



**Рис. 1.** Схематическое изображение геометрии профиля и кинематики машущих движений, угловых (а), вертикальных (б) и смешанных (в).

Профиль совершает машущее движение, находясь в равномерном набегающем потоке, имеющем скорость  $U$ , направленную по координате  $x$ . Число Рейнольдса  $Re_c$  определено по хорде профиля  $C$ , скорости потока  $U$  и кинематической вязкости жидкости  $\nu$

$$Re_c = \frac{U \times C}{\nu} \quad (1.4)$$

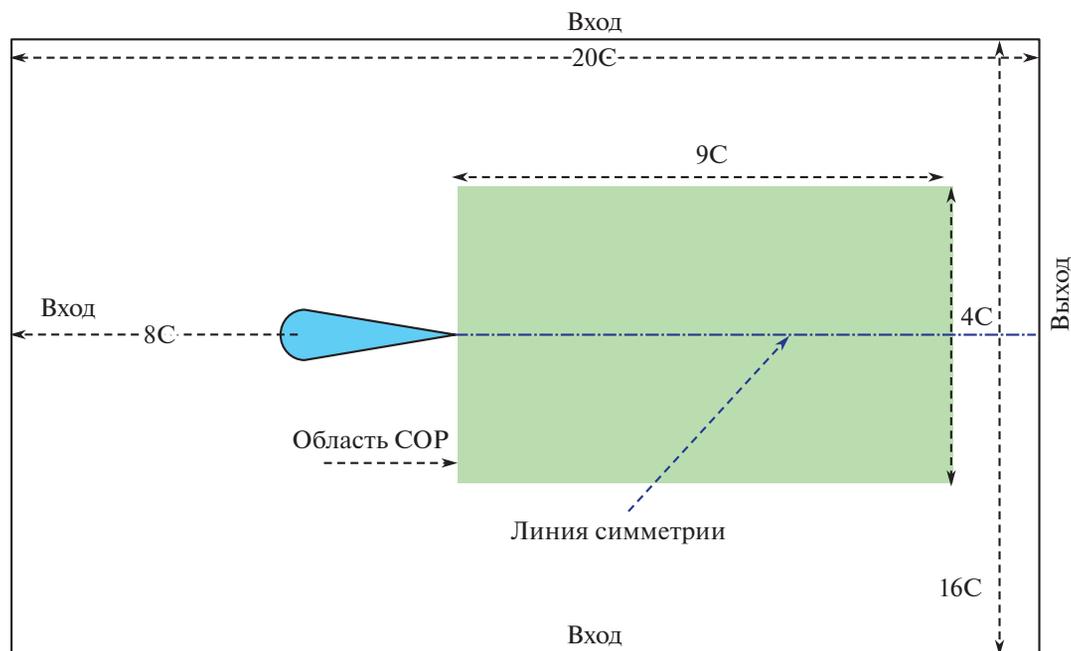


Рис. 2. Схематическое изображение расчетной области.

### 1.2. Численная процедура

Для исследования нестационарного двумерного обтекания машущего профиля ламинарным потоком несжимаемой жидкости используется произвольный лагранжево-эйлеров метод (ПЛЭ) [28]. При решении методом ПЛЭ уравнения Навье–Стокса зарисовываются в виде

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [(\vec{u} - \vec{u}_m) \cdot \nabla] \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.6)$$

Здесь  $p$  — давление в потоке жидкости,  $\vec{u}$  — скорость течения и  $\vec{u}_m$  — скорость узла расчетной сетки. Плотность жидкости  $\rho$  остается постоянной в пространстве и во времени. Дискретизация по времени осуществляется при помощи неявной эйлеровой схемы второго порядка, а шаг по времени выбирается так, что максимальное число Куранта всегда остается меньше, чем 0.5. Адвективные и диффузионные члены уравнений дискретизируются при помощи противопоточной схемы второго порядка и центральной разностной схемы второго порядка соответственно. Взаимосвязь между давлением и плотностью обеспечивается использованием алгоритма PIMPLE с тремя петлями корректора. В настоящей работе используются одна внутренняя петля корректора и две внешних петли. Коррекция давления осуществляется при помощи алгоритма GAMG (обобщенный геометрически-алгебраический многосеточный корректор). Сделанный выбор солвера представляется удачным, так как он снимает необходимость предобуславливания. На каждом шаге по времени критерий сходимости для давления и скорости задается величиной  $10^{-8}$ . Моделирование машущего движения профиля осуществлялось при помощи открытого пакета OpenFOAM [29].

### 1.3. Граничные условия

Расчетная область, использованная в настоящей работе, изображена на рис. 2. Размеры расчетной области достаточно велики, чтобы исключить влияние границ на решение. Левая, верхняя и нижняя границы располагаются на расстоянии  $8C$  от профиля. Задняя граница находится на расстоянии  $12C$  от профиля. Левая, верхняя и нижняя границы расчетной области являются входными, а правая граница — выходная. На входной границе градиент давления задается нулевым, а скорость постоянной. На выходной границе задается атмосферное давление при нулевом градиенте скорости. Профиль рассматривается как движущаяся стенка, на которой ставятся

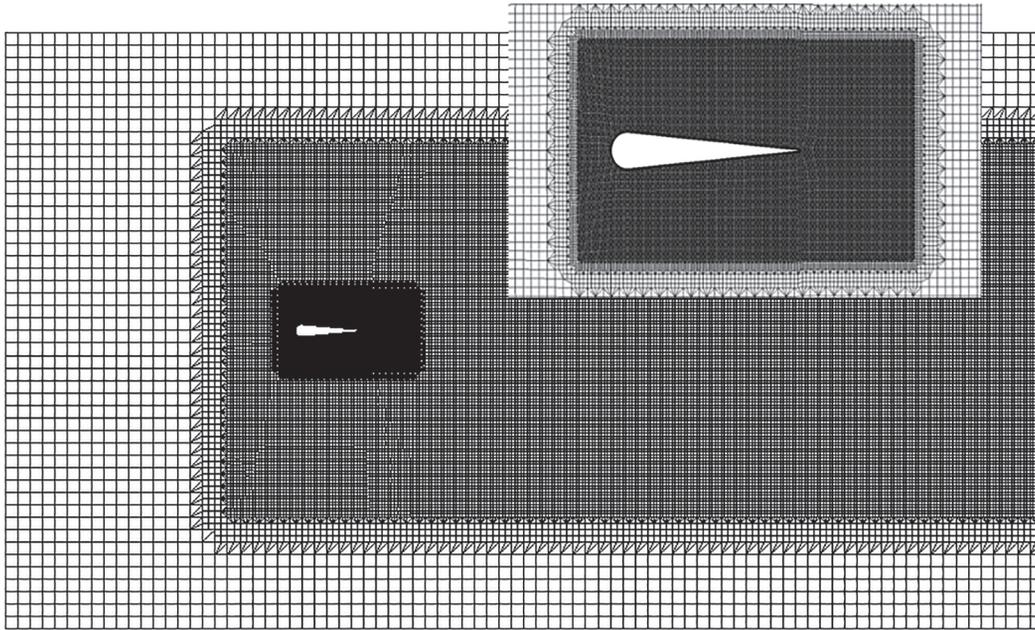
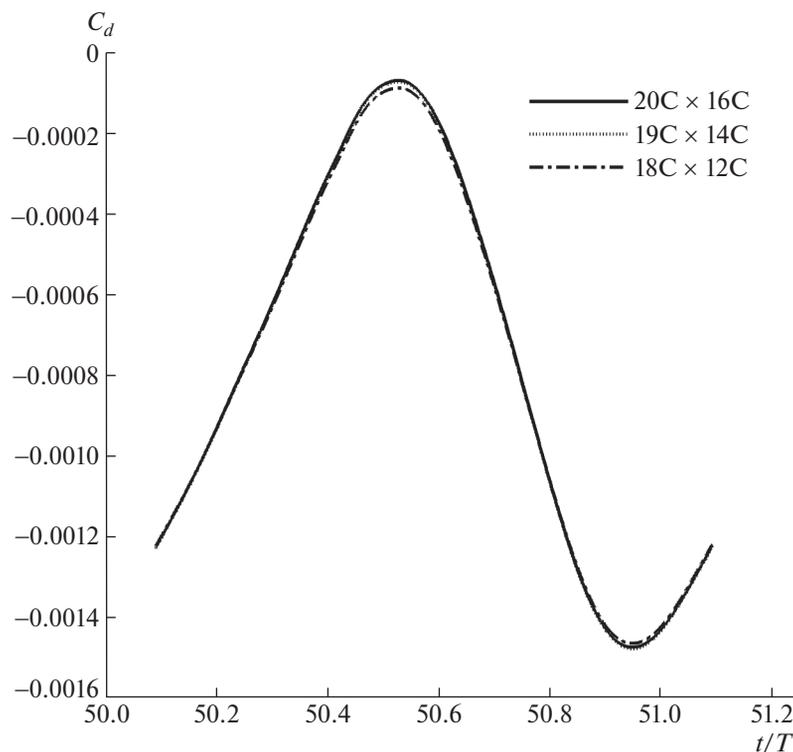


Рис. 3. Расчетная сетка (сетка в окрестности профиля представлена на вставке).

условия прилипания. Расчетная сетка, показанная на рис. 3, имеет сгущения вблизи профиля для правильного определения процессов в пограничном слое. Сетка имеет несколько уровней сгущения, так что максимальный объем ячейки сетки имеет место у дальней границы, а минимальный объем достигается вблизи профиля. Соответственно, минимальный (у профиля) и максимальный (у дальней границы) объемы сочной ячейки равны  $1.5 \times 10^{-13}$  и  $4.1 \times 10^{-9}$ . Максимальная неортогональность сетки равна 50.43 со средним по сетке значением 3.14. Максимальная скошенность сетки ограничена значением 0.71. Внутри расчетной области выбрана область размерами  $9C \times 4C$ , в которой выполняется собственно ортогональное разложение.

#### 1.4. Валидация численной методики

Размеры расчетной области выбраны согласно работам [30, 31], в которых исследовался случай двумерного машущего профиля. Для профиля, совершающего смешанные колебания, исследовалось влияние размеров расчетной области, которые варьировались в продольном и поперечном направлениях. Расстояния от профиля до выходной границы и до верхней и нижней границ увеличивались на расстояние порядка одной длины хорды. Расстояние от профиля до входной границы оставалось неизменным. Зависимость коэффициента сопротивления от времени, рассчитанная в областях размерами  $20C \times 16C$  и  $19C \times 14C$ , оказывается весьма близкой (рис. 4). Для профиля, совершающего смешанные колебания, исследовалось также влияние размеров сетки на решение. Количество узлов сетки в расчетной области увеличивалось, чтобы получить сетки с четырьмя различными плотностями узлов. Для каждого из этих случаев изучались зависимости от времени коэффициента сопротивления  $C_d$  и коэффициента подъемной силы  $C_l$  в течение одного полного цикла. Различные плотности сетки достигались сгущением ее узлов вблизи профиля. На рис. 5а и 5б представлены зависимости от времени коэффициентов сопротивления ( $C_d$ ) и подъемной силы ( $C_l$ ), полученные на различных сетках. Сделан вывод, что сетки с  $3.2 \times 10^5$  ячеек в расчетной области достаточно, чтобы уловить особенности течения вблизи профиля. Для оценки зависимости решения в следе от параметров сетки было рассмотрено поведение средней скорости течения  $U_{mean}$ . Распределения  $U_{mean}$  вдоль линии симметрии и перпендикулярно ей построены на рис. 6. Вдоль линии симметрии профиль  $U_{mean}$  построен до расстояния  $8C$  (рис. 6а), а распределение в перпендикулярном направлении построено на расстоянии  $8C$  от задней кромки профиля (рис. 6б). Распределения  $U_{mean}$  практически не отличаются друг от

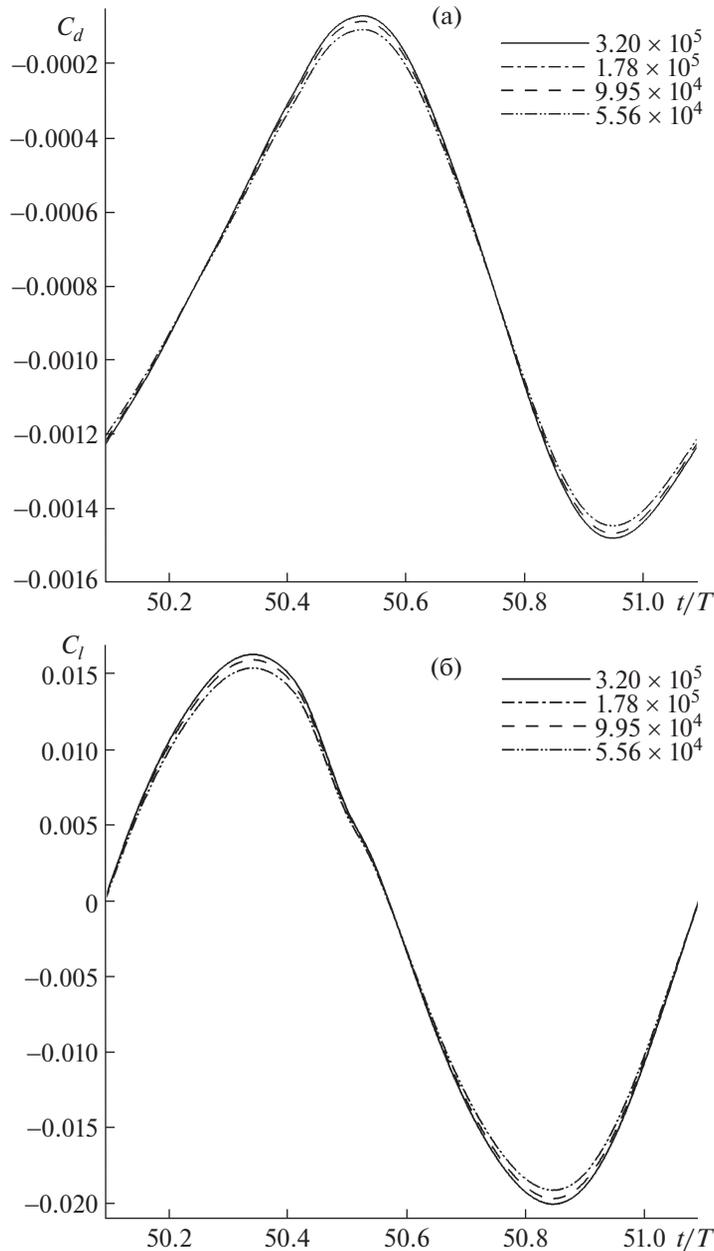


**Рис. 4.** Зависимость коэффициента сопротивления от безразмерного времени для областей трех различных размеров.

друга в расчетах на последовательных сетках с  $3.2 \times 10^5$  и  $1.78 \times 10^5$  ячейками. Для дальнейших расчетов была выбрана сетка с  $3.20 \times 10^5$  ячейками.

Структура следа, полученная в численных решениях настоящей работы, сравнивалась с экспериментальными данными, известными из литературы. Выполнена качественная оценка решений, соответствующих чисто угловым и чисто вертикальным движениям. Результаты визуализации течения в следе за машущим профилем, полученные в работе [32], сравниваются с распределениями завихренности, полученными в численном решении. В [32] получен нейтральный след (рис. 7а) в случае приведенной частоты  $k = 6.7$  и множественный вихревой след при  $k = 3.1$  (рис. 7в). Картины следа, полученные численно (рис. 7б и 7г), находятся в хорошем соответствии с экспериментальными картинками. Результаты визуализации с помощью красителей, полученные в [14] для профиля, совершающего вертикальные колебания, сравниваются с картинками течения в следе, полученными в численном решении, на рис. 8. В [14] след, создающий тягу, был получен для приведенной частоты  $k = 3$  (рис. 8а), а для более высокой частоты  $k = 12.5$  след был отклоненным (рис. 8в). Картины следа, создающего тягу, и отклоненного следа, полученные в данных расчетах (рис. 8б и 8г), находятся в хорошем соответствии с экспериментом.

Количественная валидация численных решений представлена на рис. 9. Зависимость осредненного по времени коэффициента тяги ( $\overline{C}_t$ ) от безразмерной частоты махания ( $f^* = \frac{f \times C}{U}$ ), полученная в настоящих расчетах, сравнивается с экспериментальными измерениями работ [33, 34]. Диапазон частот и значение числа Рейнольдса, рассмотренные в данной работе, отличаются от представленных в упомянутых экспериментальных исследованиях. Поэтому при сравнении экспериментальных и численных результатов для них используются различные масштабы. Масштабы для экспериментальных результатов нанесены на левой и нижней осях рисунка, а для численных результатов — на правой и верхней осях. Измеренные и рассчитанные коэффициенты тяги обнаруживают одну и ту же тенденцию при увеличении частоты маханий.



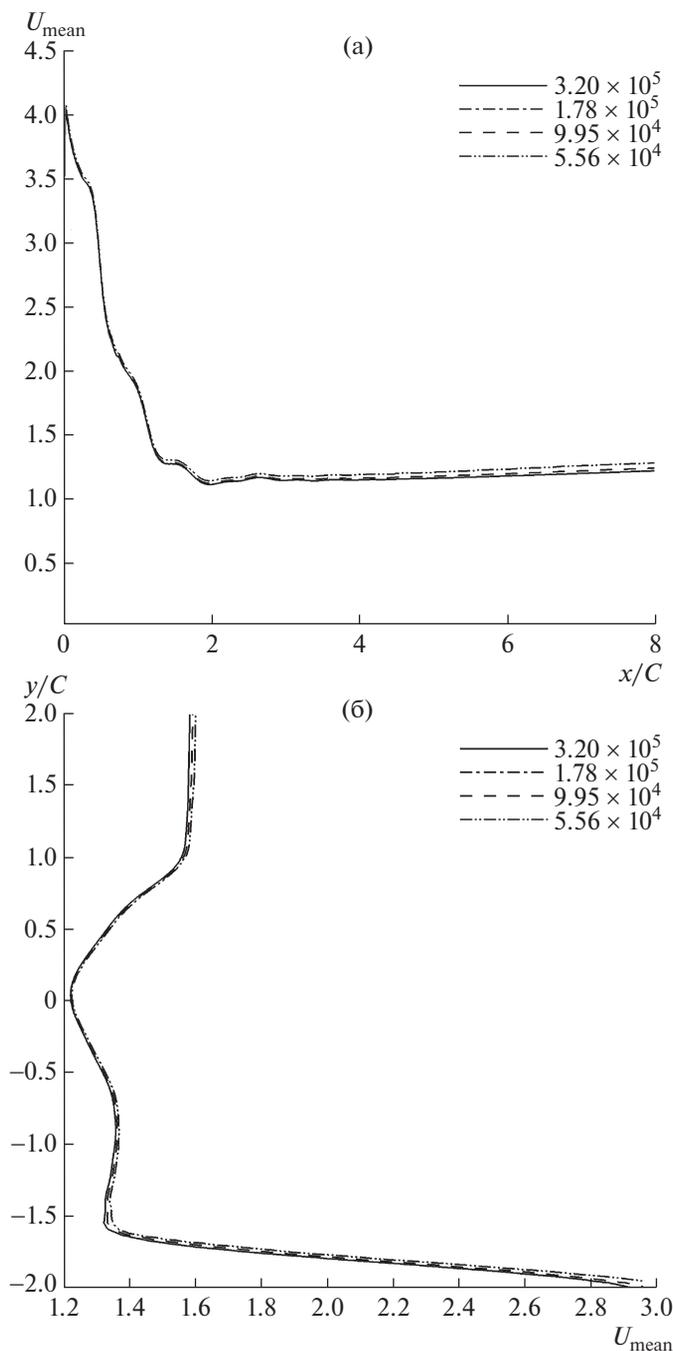
**Рис. 5.** Зависимость коэффициентов сопротивления (а) и подъемной силы (б), действующих на профиль, от безразмерного времени при различных размерах сетки.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численно исследовано обтекание машущего профиля ламинарным потоком несжимаемой жидкости. Угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания профиля изучены в диапазоне чисел Струхала  $St_A$ , вычисленных по амплитуде, от 0.1 до 0.4. Скорость потока была неизменной:  $U = 1.54$  м/с, что соответствует числу Рейнольдса, вычисленному по длине хорды,  $Re_c = 2640$ .

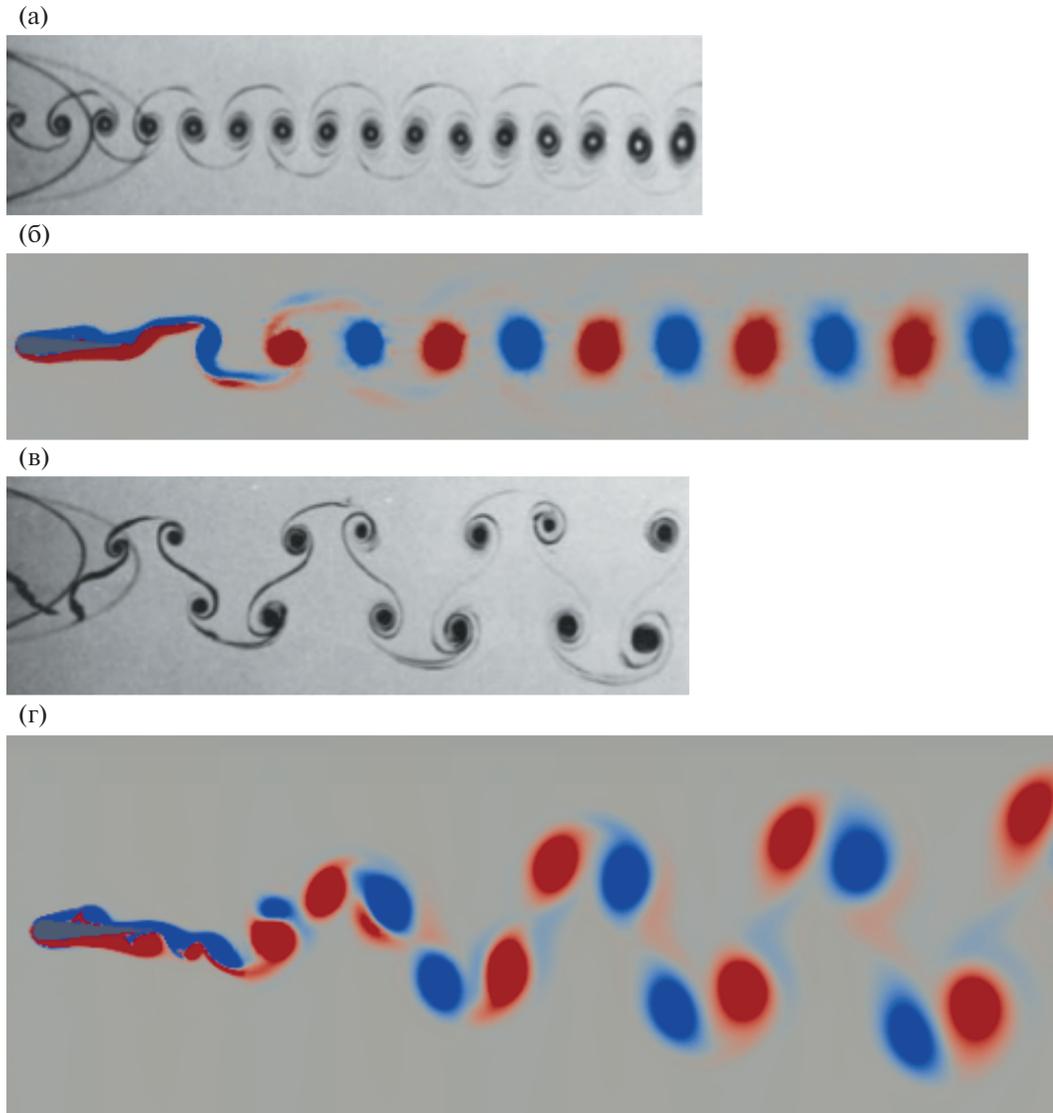
### 2.1. Структура следа

Структура следа визуализирована при помощи линий постоянных значений  $z$  – компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Сила, действующая на машущий профиль, зависит от структуры следа. Для



**Рис. 6.** Зависимость средней скорости ( $U_{mean}$ ) от расстояния вдоль линии симметрии (а) и перпендикулярно линии симметрии при  $x = 8C$  (б) при различных размерах сетки.

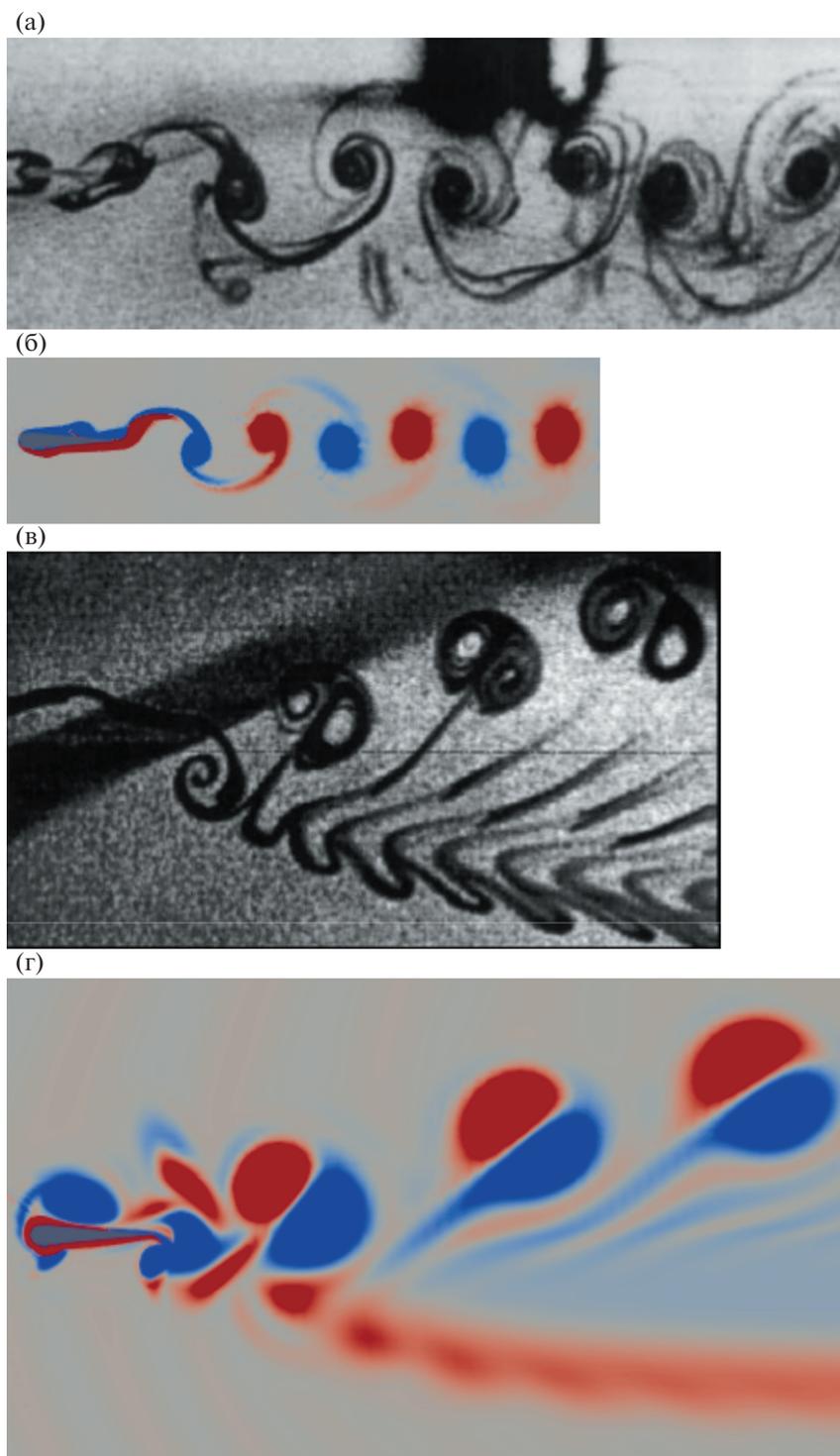
профиля, совершающего угловые колебания при различных значениях  $St_A$ , эта структура представлена на рис. 10. Красный цвет соответствует положительным значениям  $\omega_z$ , т.е. вращению против часовой стрелки, а синий цвет отрицательным значениям  $\omega_z$  (вращению по часовой стрелке). Распределения завихренности в поле течения, полученные в численных расчетах, позволяют идентифицировать структуру следа. Мгновенные изображения полей завихренности используются для того, чтобы представить расположение вихрей в следе. Классификация структур течений в следе проводится на основании направления завихренности, которое обеспечивает визуальное представление о расположении вихревой дорожки. Этот способ классификации мо-



**Рис. 7.** Сравнение рассчитанных картин течения в следе с экспериментальными результатами [32] для профиля, совершающего угловые колебания. Экспериментальная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 6.7$  (а) и  $3.1$  (в) и рассчитанная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 6.7$  (б) и  $3.1$  (г).

жет быть затруднителен в переходной области между прямой и обратной дорожками Кармана. В данной работе идентификация вихревой дорожки в переходной области осуществляется путем расчета завихренности в ядрах вихрей и ее сопоставлением со структурой следа по [35]. При  $St_A = 0.12$  вихри, образовавшиеся над и под профилем, выстраиваются вдоль линии симметрии (рис. 10а); такое их расположение называется нейтральным следом [36]. С ростом  $St_A$  структура следа меняется, как показано на рис. 10б. Вихри, образовавшиеся над профилем, смещаются вниз от линии симметрии и наоборот. Это расположение напоминает вихревую дорожку Кармана, но с противоположным направлением завихренности, и называется обратным следом Кармана. Дальнейшее увеличение  $St_A$  приводит к росту вихрей, тогда как их расположение в следе остается неизменным. Увеличение параметра махания делает вихри более интенсивными.

Структура следа за профилем, совершающим вертикальные колебания, показана на рис. 11. Обратная дорожка Кармана, показанная на рис. 11а, наблюдалась при  $St_A = 0.12$ . Вихрь у передней кромки отделяется от профиля, вместо того чтобы слиться с вихрем у задней кромки. Этот вихрь, значительно меньший в размерах, диффундирует в поле течения, приводя к образованию



**Рис. 8.** Сравнение рассчитанных картин течения в следе с экспериментальными результатами [14] для профиля, совершающего вертикальные колебания. Экспериментальная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 3.0$  (а) и  $12.5$  (в) и рассчитанная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 3.0$  (б) и  $12.5$  (г).

обратного следа Кармана. След за профилем отклоняется с ростом  $St_A$  ( $St_A = 0.18$ ); он представлен на рис. 11б. Вихри противоположного знака образуют пару, как раз перед отклонением следа. Направление отклонения следа зависит от образования вихревой пары. Пара, состоящая из вих-

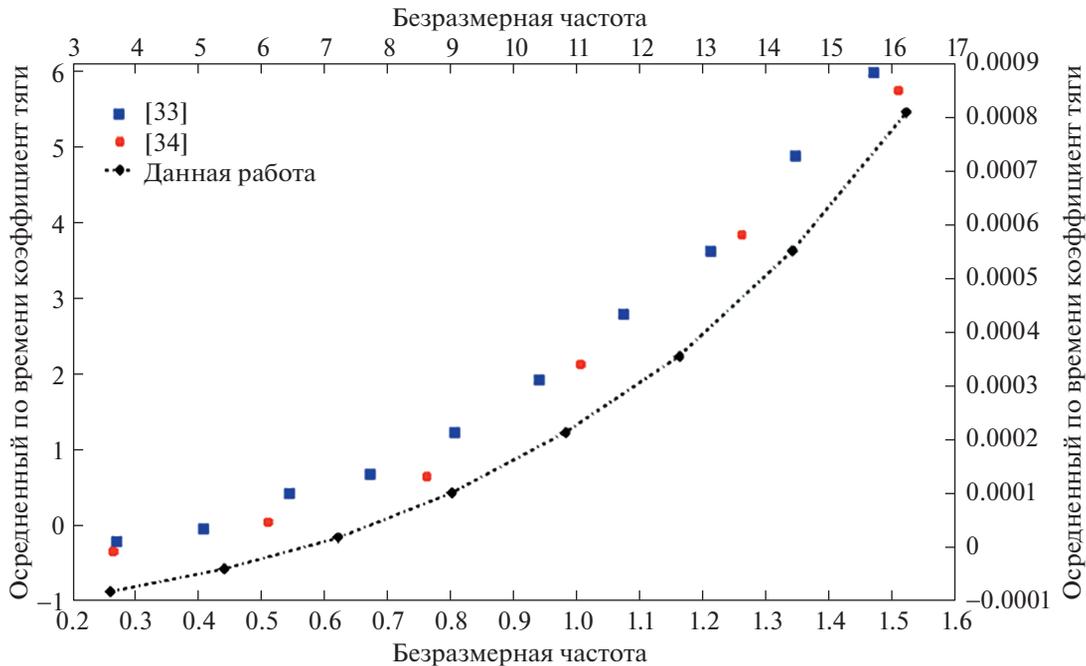


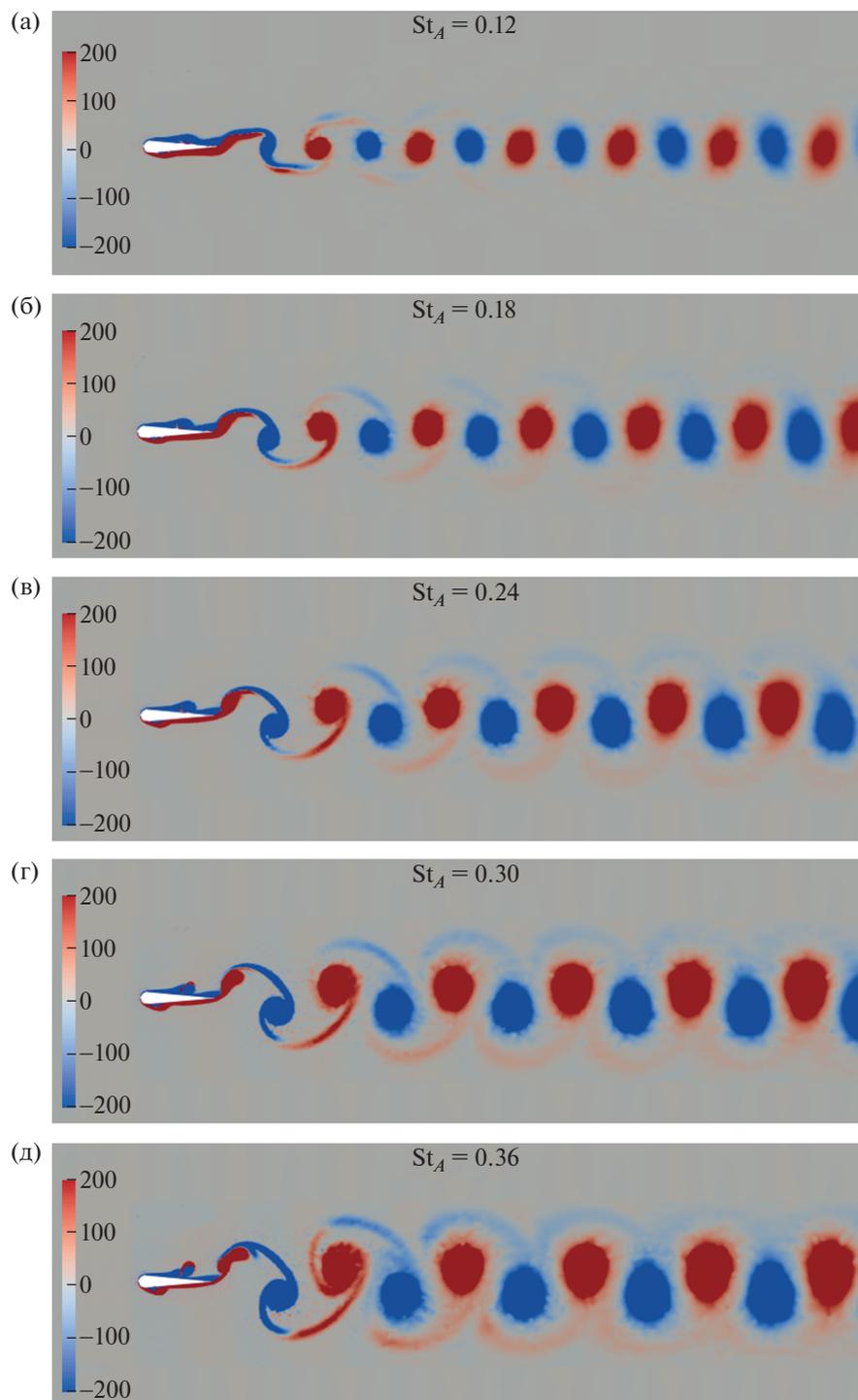
Рис. 9. Зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) от безразмерной частоты машущего движения ( $f^*$ ) для профиля, совершающего смешанные (вертикально-угловые) колебания.

ря, вращающегося по часовой стрелке, и вихря, вращающегося в противоположном направлении, создает диполь, индуцирующий движение вверх и образование отклоненного вверх следа. Пара, состоящая из вихря, вращающегося против часовой стрелки, и вихря, вращающегося в противоположном направлении, создает другой диполь, индуцирующий движение вниз и образование отклоненного вниз следа. Направление отклонения следа меняется при дальнейшем увеличении  $St_A$  до 0.24 (рис. 11в). Явление изменения направления отклоненности следа при изменении параметров махания называется переключением струи [37]. След с отклоненным расположением подвергается возмущениям при дальнейшем росте  $St_A$  до 0.30 (рис. 11г). Вихри у передней кромки, образовавшиеся над профилем, проходят вокруг передней кромки в нижнюю часть профиля и наоборот. Эти вихри в конце концов диффундируют в поле течения и не сказываются на структуре следа. При  $St_A = 0.36$  наблюдается хаотическая структура следа (рис. 11д). Диполи, формирующиеся в хаотическом следе, рассеиваются, образуя полностью нерегулярные структуры.

Структура следа за профилем, совершающим смешанные колебания при различных значениях  $St_A$ , представлена на рис. 12. Обратное кармановское расположение в следе наблюдается при  $St_A = 0.12$  (рис. 12а). С ростом  $St_A$  вихри увеличиваются в размерах (рис. 12б и 12в). Вихри у передней кромки отделяются от профиля, медленно движутся к задней кромке и сливаются с вихрями, образовавшимися у задней кромки, образуя обратную дорожку Кармана. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.30 изменяет поведение вихрей у передней кромки. Вихри, образовавшиеся у передней кромки, вместо того чтобы слиться с вихрями у задней кромки, эжектируются в поток и со временем диффундируют в нем. Увеличение  $St_A$  до 0.36 приводит к росту размеров вихрей у передней кромки и им требуется больше времени, чтобы диффундировать в потоке. Вихри передней кромки, сравнительно небольшие в размерах, располагаются по обе стороны от вихревой дорожки, образованной вихрями с задней кромки. Вихри задней кромки деформируют вихри с передней кромки вскоре после их эжекции в поток, тем увеличивая их диффузию и способствуя установлению обратной дорожки Кармана.

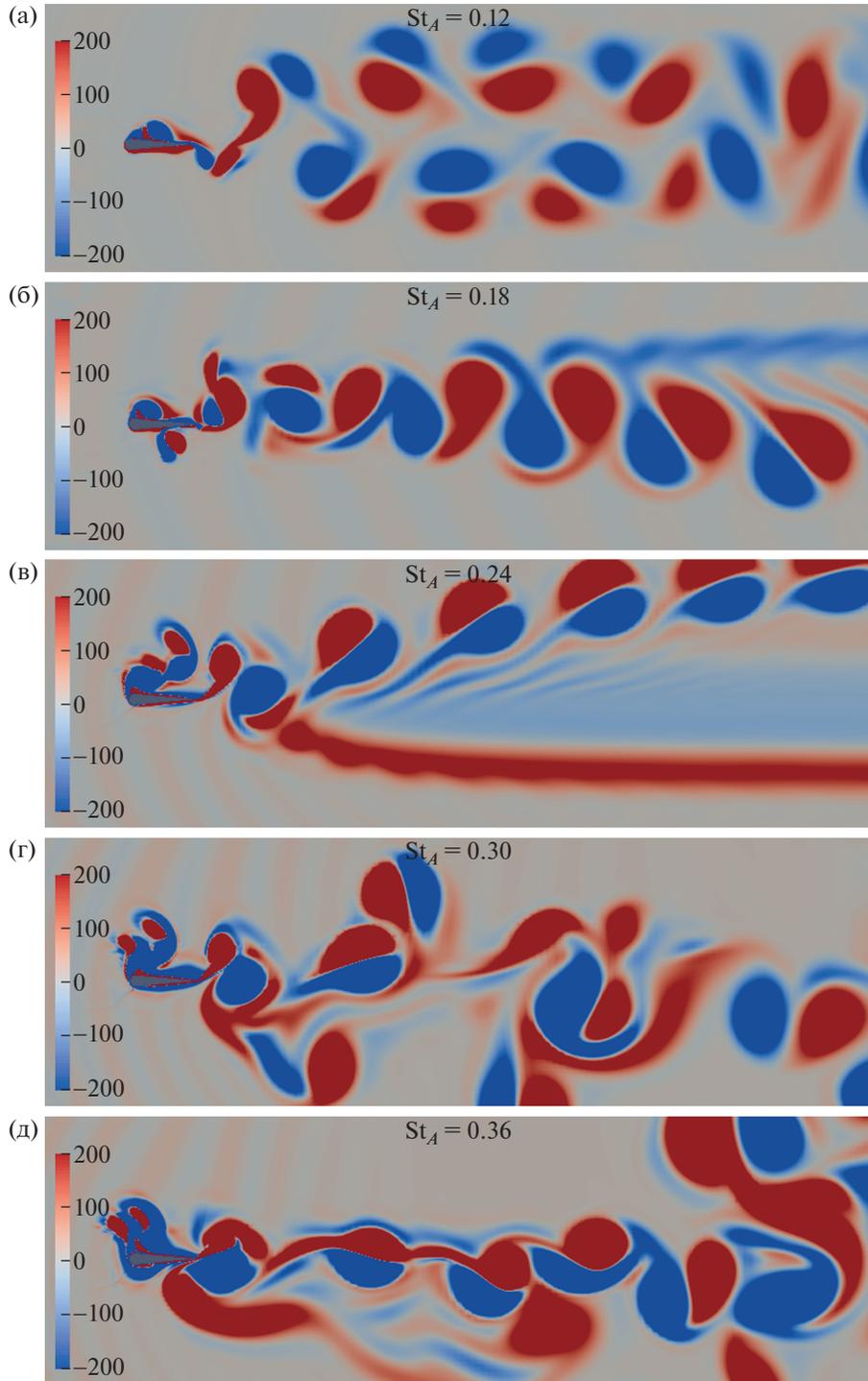
## 2.2. Вихри у передней и задней кромок

В настоящем исследовании профиль начинает машущие колебания со среднего положения (рис. 2), движется вверх до крайнего верхнего положения, далее опускается вниз до крайнего



**Рис. 10.** Структура следа за профилем, совершающим угловые колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

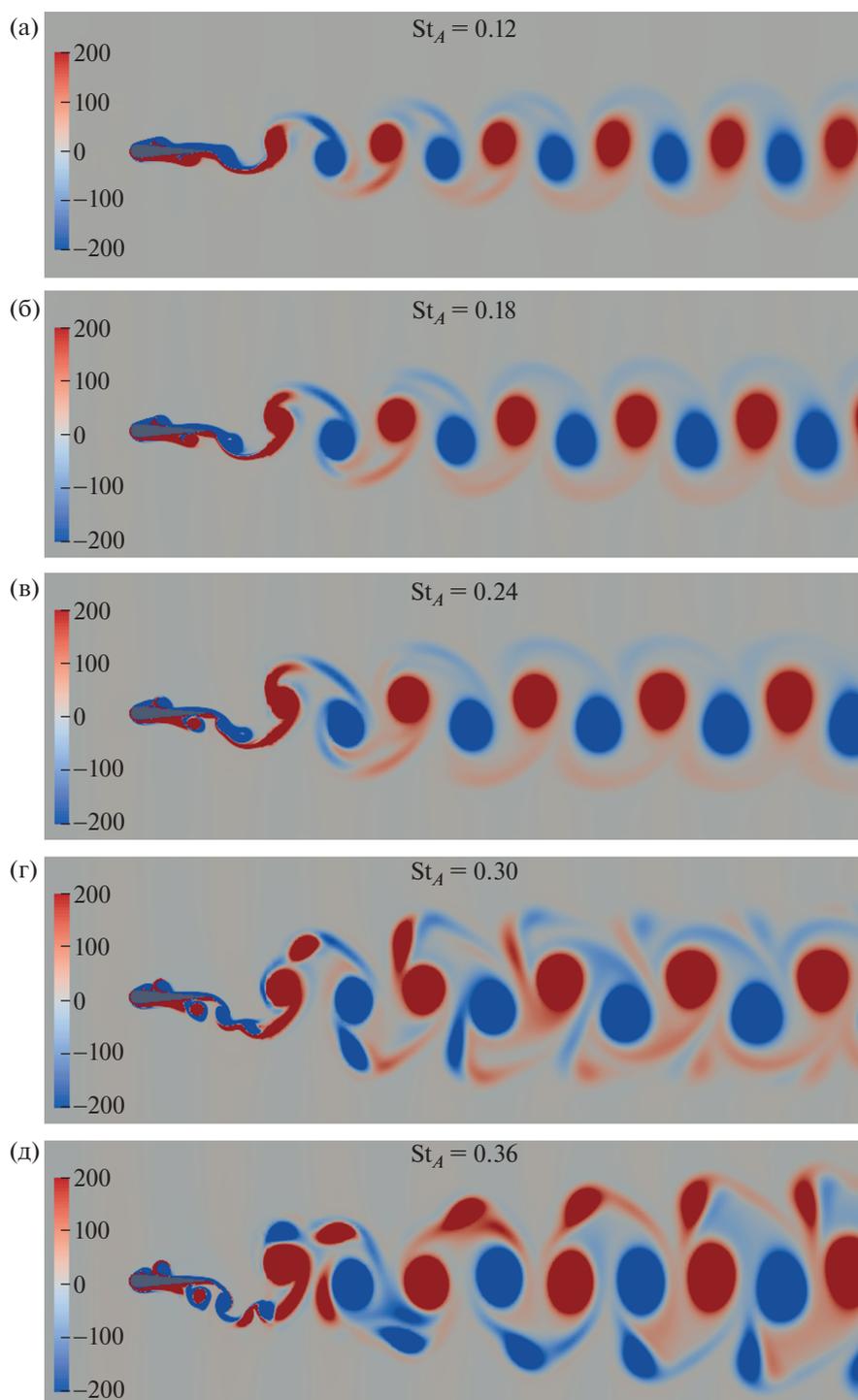
нижнего положения и, наконец, возвращается в среднее положение, завершая один цикл. При машущих колебаниях всех трех типов под профилем развивается положительная завихренность, а над профилем – отрицательная, а в конце хода профиля вверх и вниз срываются вихри. Отрицательные вихри отсоединяются в конце хода вверх, а положительные – в конце хода вниз. Та-



**Рис. 11.** Структура следа за профилем, совершающим вертикальные колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

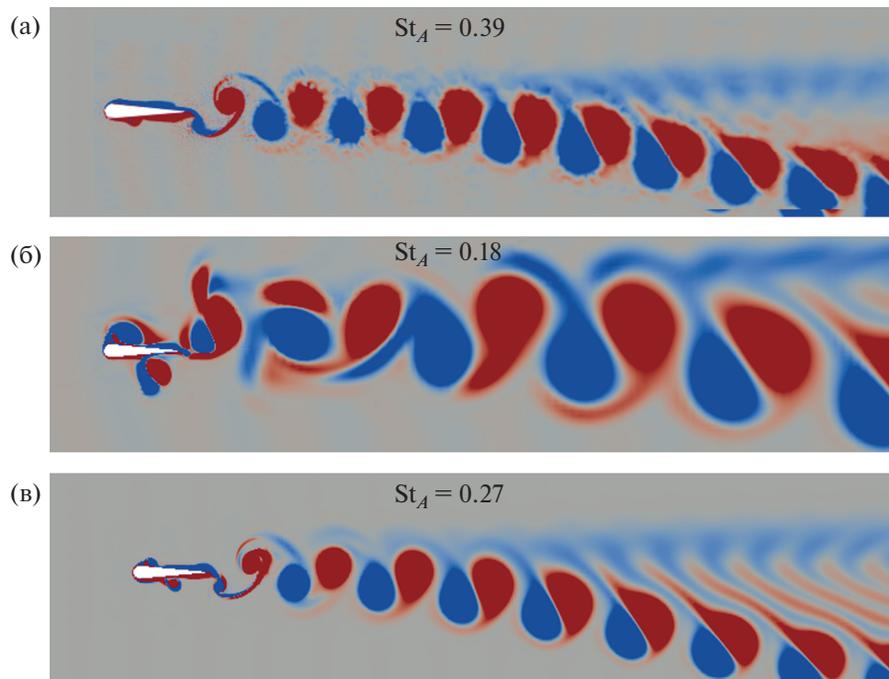
ким образом, в течение одного колебательного цикла возникают два вихря; такой тип следа называется  $2S$ -следом. Обозначение  $S$  соответствует единичному (single) вихрю, согласно [38].

При угловых колебаниях профиля вихрь с передней кромки сливается с вихрями с задней кромки и образует  $2S$ -след во всем исследованном диапазоне  $St_A$ . Однако при вертикальных ко-



**Рис. 12.** Структура следа за профилем, совершающим вертикально-угловые колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

лебаниях вихрь у передней кромки эволюционирует, вследствие чего меняется структура следа, что оказывает влияние на силу, действующую на профиль. Эти изменения могут быть объяснены быстрыми вариациями угла атаки при вертикальных колебаниях. В результате при больших значениях  $St_A$  вихри с передней кромки не сливаются с вихрями у задней кромки, а сносятся в поток.



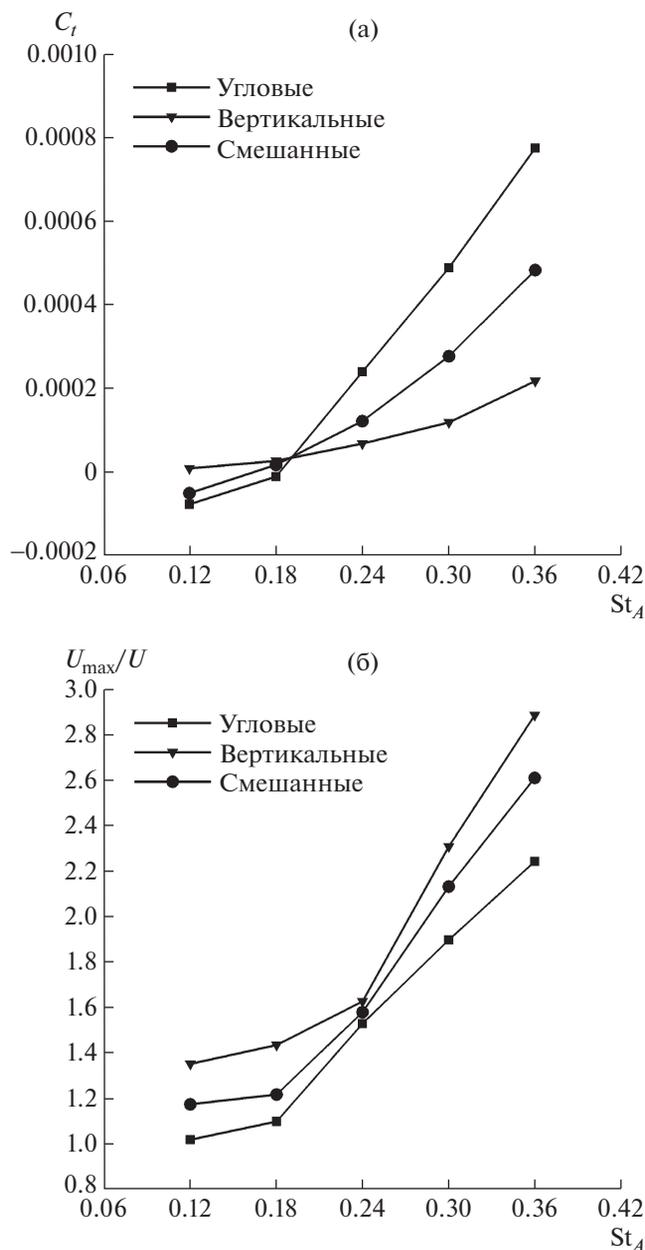
**Рис. 13.** Отклоненный след для машущих движений трех типов: угловые (а), вертикальные (б) и смешанные (в) колебания. Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

Однако вихри у передней кромки относительно невелики и диффундируют в потоке в исследованном диапазоне параметров. Поэтому дальний след преобразуется в обратный след Кармана. В смешанных колебаниях при малых значениях  $St_A$  характеристики вихрей у передней кромки подобны вихрям в случае угловых колебаний. Однако при более высоких значениях  $St_A$  поведение вихрей у передней кромки идентично случаю вертикальных колебаний. Представляется, что вихревая динамика в случае смешанных колебаний определяется угловыми колебаниями при малых  $St_A$  и вертикальными колебаниями при высоких  $St_A$ .

### 2.3. Отклоненный след

В отклоненном следе вихревая конфигурация отклоняется от линии симметрии. При симметричной структуре следа результирующая сила, действующая на профиль, параллельна линии симметрии (в направлении тяги или сопротивления). В отклоненном следе результирующая сила также наклонена к линии симметрии, что физически означает наличие у этой силы составляющих в направлении тяги и подъемной силы. Таким образом, диапазон параметров, в котором существует отклоненный след, важен практически. В настоящей работе параметр машущего движения постепенно увеличивался, чтобы определить то его значение, при котором след за профилем становится отклоненным (для всех типов колебаний). На рис. 13 представлены картины отклоненных следов, полученные для всех типов колебаний. След за профилем, совершающим угловые колебания, отклоняется при  $St_A = 0.39$ , а след за вертикально колеблющимся профилем отклоняется значительно ранее, при  $St_A = 0.18$ . Отклонение следа за профилем, совершающим смешанные колебания, происходит при сравнительно высоком значении  $St_A$  около 0.27, но это значение ниже, чем то значение, при котором отклоняется след за профилем в угловых колебаниях. Причиной этому влияние вертикальных колебаний, присутствующих в смешанных колебаниях профиля. Это обстоятельство также подтверждает наблюдение, согласно которому динамика вихрей в смешанных колебаниях определяется угловыми колебаниями при малых значениях  $St_A$  и вертикальными колебаниями при больших значениях  $St_A$ .

Здесь следует отметить неустойчивости, порождаемые образованием отклоненного следа (нарушением симметрии). Анализ устойчивости показал, что нарушение симметрии дорожки Кармана обусловлено узловатыми возмущениями [39], а такое же нарушение в случае обратной до-



**Рис. 14.** Зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) (а) и отношения  $U_{max}/U_0$  (б) от числа Струаля  $St_A$ , вычисленного по амплитуде.

рожки связано с изгибными возмущениями [40]. Сдваивание вихрей приводит к образованию диполя, и результирующий момент, производимый диполем, может действовать как изгибная неустойчивость по отношению к симметричной обратной дорожке Кармана. Таким образом, образование диполя можно рассматривать как фактор, инициирующий отклонение следа. Как уже сказано выше (раздел 2.1), направление отклонения определяется порядком, в котором происходит образование вихревой пары.

#### 2.4. Аэродинамические силы

Сила, действующая на профиль, зависит от структуры следа; она может быть силой сопротивления или тяги. Структура следа, производящего сопротивление, близка к вихревой дорожке Кармана, а структура следа, производящего тягу, близка к обратной вихревой дорожке Кармана. В настоящей работе рассчитаны средние силы, действующие на профиль при различных типах колебаний и проведено их сравнение. Данные для вычисления осредненной силы берутся после отбрасывания данных, соответствующих начальному промежутку времени. На рис. 14а пред-

ставлена зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) от числа Струхаля, вычисленного по амплитуде колебаний ( $St_A$ ), для машущих колебаний различных типов. Отрицательные значения  $C_t$  соответствуют коэффициенту сопротивления. На вертикально колеблющийся профиль сила тяги действует при всех рассмотренных значениях  $St_A$ . Однако переход к хаотической структуре следа (рис. 11г и 11д) ограничивает рост силы тяги с увеличением  $St_A$ . На профиль, совершающий угловые и смешанные колебания, сила сопротивления действует при  $St_A = 0.12$ . Однако структура следа в этих случаях соответствует обратной дорожке Кармана (рис. 10а и 12а), т.е., существование обратной дорожки Кармана недостаточно для того, чтобы считать след производящим тягу. С ростом  $St_A$  сила сопротивления превращается в тягу. Поведение аэродинамической силы, действующей на профиль, совершающий смешанные колебания, следует тенденциям, проявляемым профилем в угловых колебаниях при малых значениях  $St_A$  и вертикально колеблющимся профилем при более высоких значениях  $St_A$ . Переход от сопротивления к тяге для профиля, совершающего угловые колебания, происходит приблизительно при  $St_A = 0.18$ . Однако переход в структуре течения в следе происходит значительно ранее, т.е. переход в структуре следа предшествует переходу от сопротивления к тяге.

Максимальная продольная скорость ( $U_{max}$ ) в следе за машущим профилем является важным параметром, влияющим на максимальное значение силы, действующей на профиль. Рассмотрим влияние параметров махания на  $U_{max}$  при различных видах колебаний, сделав это в безразмерном виде. За масштаб для  $U_{max}$  выбрана скорость набегающего потока ( $U$ ). На рис. 146 представлена зависимость отношения  $U_{max}/U$  от частоты  $St_A$ . Эта зависимость построена для расстояния  $x = 2C$  от задней кромки. Это положение выбрано на основании того наблюдения, что влияние машущих движений профиля ослабевает в дальнем следе [35]. Величина  $U_{max}/U$  максимальна в случае вертикальных колебаний и минимальна для угловых колебаний. При  $St_A = 0.24$  величина  $U_{max}/U$  практически одинакова для колебаний всех типов. Поведение  $U_{max}/U$  при смешанных колебаниях очень близко к случаю угловых колебаний, когда  $St_A$  меньше 0.24, и ближе к поведению  $U_{max}/U$  при вертикальных колебаниях, когда  $St_A$  выше 0.24. Итак, значение  $St_A = 0.24$  можно рассматривать как критическое значение, при котором угловые и вертикальные типы колебаний меняются ролями в определении характера смешанных вертикально-угловых колебаний.

**2.4.1. Взаимозависимость конфигурации следа и возникающих сил.** В табл. 1 дана классификация следов по признаку силы, действующей на профиль, совершающий колебания различных типов. Это могут быть силы сопротивления и тяги. В случае нейтрального следа на профиль не действуют ни тяга, ни сопротивление. Картины завихренности показывают, что для профиля, совершающего угловые колебания, структура следа, соответствующая  $St_A = 0.12$ , подобна структуре нейтрального следа (рис. 10а), а структура, соответствующая  $St_A = 0.18$ , подобна структуре обратной дорожки Кармана (рис. 10б). Нейтральный след не оказывает силового воздействия на профиль. С другой стороны, след в виде обратной дорожки Кармана должен создавать силу тяги. Однако результаты расчетов показывают, что для обоих значений  $St_A$  на профиль действует сила сопротивления. Эта нестыковка между структурой следа и создаваемой силой имеет место и в случае смешанных колебаний при  $St_A = 0.12$ . Это означает, что при малых величинах параметров махания структура следа может и не быть признаком типа силы, действующей на профиль. Существенно, что должно существовать такое критическое значение  $St_A$ , выше которого структура следа и сила, действующая на профиль, взаимозависимы, а ниже этого значения сила, действующая на профиль, не определяется структурой следа. Данные табл. 1 показывают, что это критическое значение может различаться для машущих колебаний различных типов.

## 2.5. Напряжения Рейнольдса

Нестационарные переменные в периодическом течении состоят из средней, периодической и случайной компонент [41]. Математически это можно выразить следующим образом

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' + \tilde{\phi} \quad (2.1)$$

где  $\phi$  – нестационарная переменная,  $\bar{\phi}$  – ее средняя компонента,  $\phi'$  – периодическая компонента и  $\tilde{\phi}$  – случайная компонента. Средняя ( $\bar{\phi}$ ) и периодическая ( $\phi'$ ) компоненты присутствуют как

**Таблица 1.** Классификация течений в следе по признаку силы, действующей на профиль, совершающий машущие движения различных типов при различных значениях  $St_A$ 

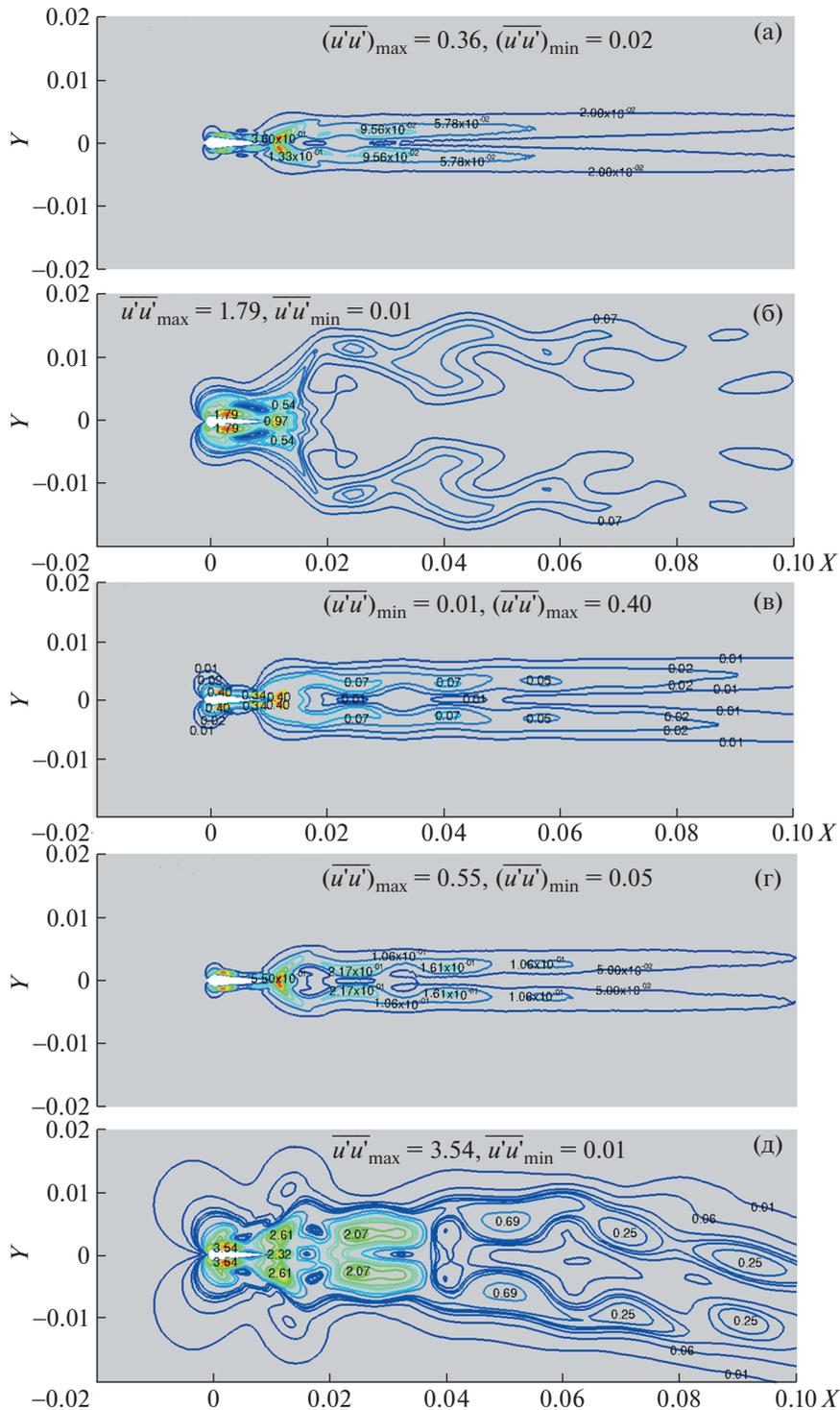
$St_A$	Угловые колебания	Вертикальные колебания	Смешанные колебания
0.12	Сопrotивление	Тяга	Сопrotивление
0.18	Сопrotивление	Тяга	Тяга
0.24	Тяга	Тяга	Тяга
0.30	Тяга	Тяга	Тяга
0.36	Тяга	Тяга	Тяга

в ламинарном, так и в турбулентном течении, а случайная компонента ( $\tilde{\phi}$ ) имеет место только в турбулентном течении. В настоящей работе рассматриваются лишь случай ламинарных течений и нестационарность определяется лишь периодической компонентой ( $\phi'$ ). Нормальные осредненные напряжения в направлениях  $x$  и  $y$  обозначаются  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  соответственно.

На рис. 15 представлены изолинии величины  $\overline{u'u'}$  для различных типов машущего движения при различных  $St_A$ . При  $St_A = 0.12$  картина изолиний  $\overline{u'u'}$  симметрична для всех трех типов машущих колебаний (рис. 16а–16в), что указывает на периодичность течения. За задней кромкой картина изолиний  $\overline{u'u'}$  разделяется на две части относительно линии симметрии. При вертикальных движениях максимальное значение  $\overline{u'u'}$  ( $(\overline{u'u'})_{\max}$ ) достигается у передней кромки (рис. 15б), где поток испытывает максимальные возмущения, а вихрь у передней кромки существенно усиливает напряжения Рейнольдса. Напротив, при угловых движениях максимум достигается вблизи задней кромки (рис. 15а), поскольку у передней кромки поток подвергается меньшим возмущениям и влияние вихря у передней кромки сравнительно невелико. Вертикальные движения порождают существенные нагрузки в поле течения (рис. 15б) по сравнению с другими типами машущих колебаний (рис. 15а и 15в). Распределение  $\overline{u'u'}$  в случае смешанных колебаний определяется взаимодействием между угловыми и вертикальными колебаниями.

Величина  $\overline{u'u'}$  растет с увеличением  $St_A$  (рис. 15г–15е). Малые изменения  $St_A$  приводят к значительным изменениям в поле  $\overline{u'u'}$ . При этом рост величины  $\overline{u'u'}$  с ростом  $St_A$  имеет один и тот же порядок для машущих колебаний всех типов. Пиковые значения  $\overline{u'u'}$  достигаются на пути распространения вихря. Пиковые значения  $\overline{u'u'}$  по обеим сторонам от линии симметрии указывают на вращение жидкости относительно среднего течения [41]. Величина  $\overline{u'u'}$  близка к нулю вдоль линии симметрии, так как вдоль этой линии вихрь не распространяется. Изолинии  $\overline{u'u'}$  для профиля, совершающего вертикальные колебания, отклоняются в дальнем следе (рис. 15д) подобно изолиниям завихренности (рис. 11б). Однако в следе за профилем, совершающим угловые (рис. 15г) и смешанные (рис. 15е) колебания, отклонение не наблюдается. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.36 приводит к динамическому росту величины  $\overline{u'u'}$  в случае вертикальных движений (рис. 15з) по сравнению с машущими движениями других типов (рис. 15ж и 15и). Отклонение следа за вертикально колеблющимся профилем при  $St_A = 0.36$  (рис. 15з) указывает на апериодичность, развивающуюся в потоке.

На рис. 16 представлены изолинии величины  $\overline{v'v'}$  для различных типов машущего движения при различных  $St_A$ . Для всех  $St_A$  величина  $\overline{v'v'}$  выше, чем величина  $\overline{u'u'}$ . Так же как и для  $\overline{u'u'}$ , максимальное значение  $\overline{v'v'}$  ( $(\overline{v'v'})_{\max}$ ) для вертикально колеблющегося профиля достигается вблизи передней кромки (рис. 16б). В то же время для других типов колебаний положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  находится в окрестности задней кромки (рис. 16а и 16в). Пиковые значения  $\overline{v'v'}$  достигаются вдоль линии симметрии, а не по ее сторонам, как это имеет место в случае  $\overline{u'u'}$ . Это означает, что пиковые значения  $v'$ , как положительные, так и отрицательные, в любом сечении находятся на линии симметрии. В случае профиля, совершающего угловые и смешанные колеба-



**Рис. 15.** Изолинии  $\overline{u'u'}$  за профилем, совершающим колебания различных типов: угловые (а, г, ж), вертикальные (б, д, з) и смешанные (в, е, и).

ния, с ростом до  $St_A = 0.18$  положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  отходит от задней кромки (рис. 16г и 16е). Это положение, при котором вихри пересекают линию симметрии с образованием обратной дорожки Кармана. Для вертикально колеблющегося профиля положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  остается вблизи передней кромки (рис. 16д), что указывает на важность вихря с передней кромки в случае этих ко-

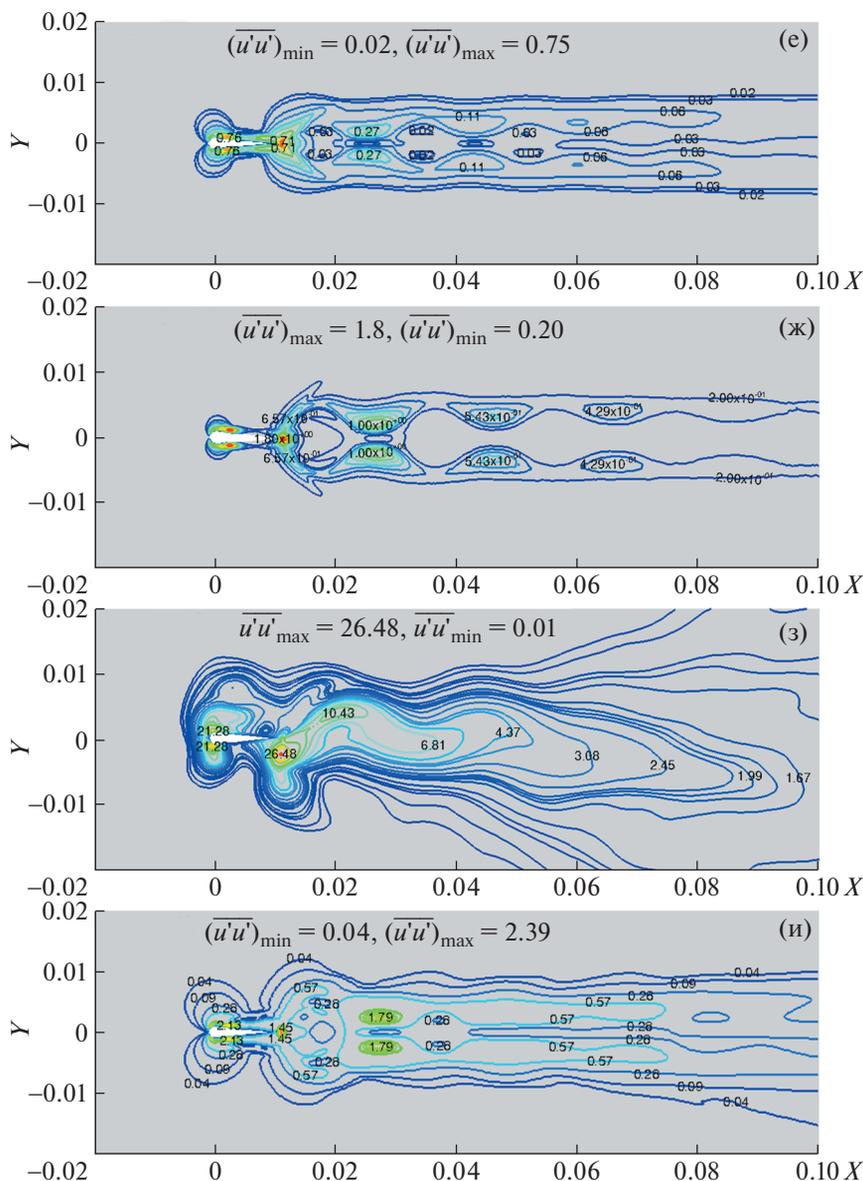
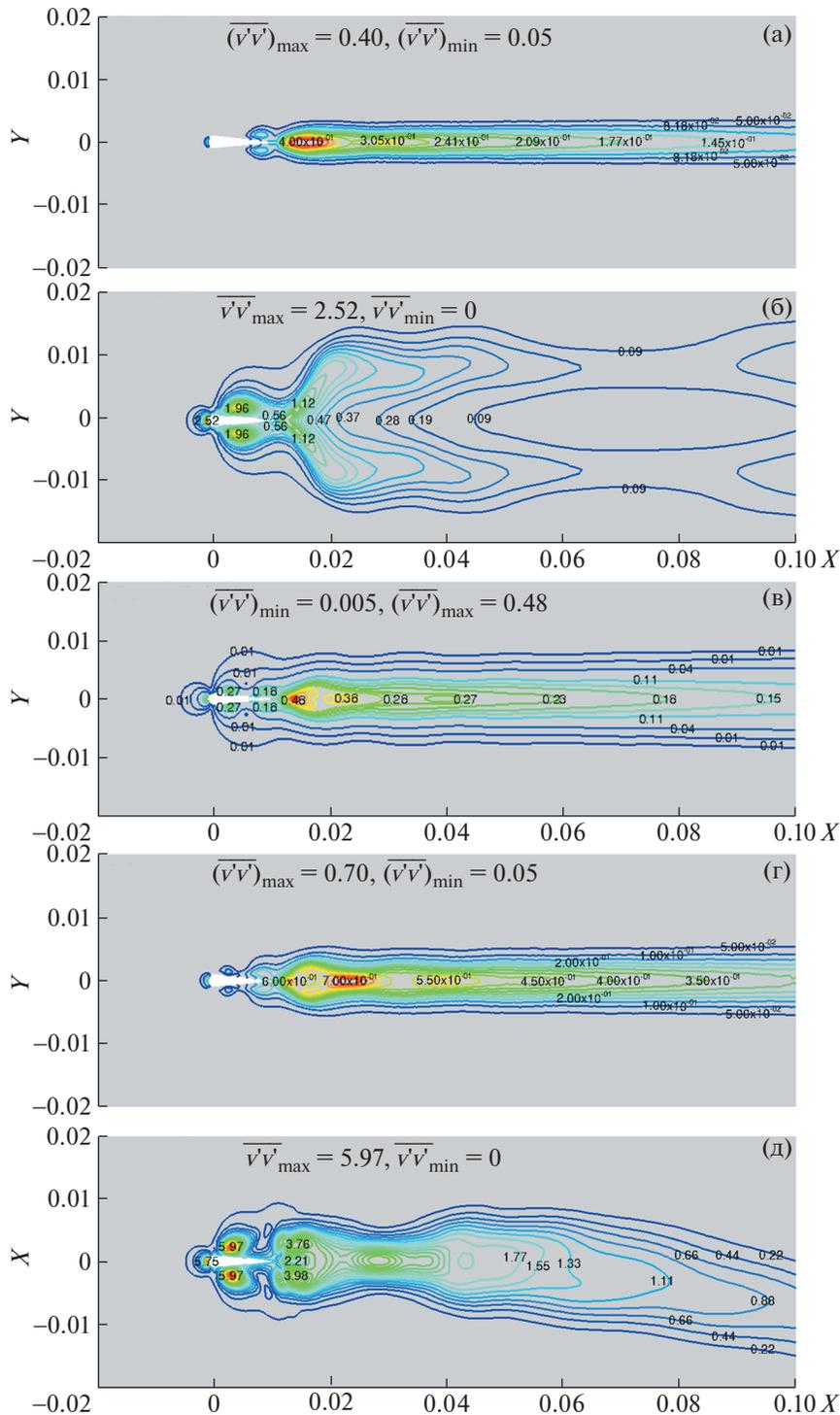


Рис. 15. Окончание

лебаний. Расстояние между задней кромкой профиля и положением  $(\overline{v'v'})_{\max}$  увеличивается с ростом  $St_A$  (рис. 16ж и 16з). С ростом  $St_A$  вихри у задней кромки становятся ярче выраженными и их отрыв от профиля замедляется. Задержка в отрыве вихрей от задней кромки приводит к тому, что они отделяются на больших расстояниях (в направлении  $y$ ) от линии симметрии. Таким образом, вихри пересекают линию симметрии дальше от задней кромки, со смещением максимума  $(\overline{v'v'})_{\max}$ . Данные на рис. 16б подтверждают апериодичность, развивающуюся в потоке с ростом  $St_A$ .

Высокие значения  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  в ближнем следе указывают на значительное перемешивание в жидкости. Однако величины  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  убывают в движущемся потоке вследствие диссипации кинетической энергии. Изолинии напряжений показывают, что максимальные напряжения имеют место для вертикально колеблющегося профиля; за ним следует профиль в смешанном движении. Для профиля, совершающего угловые колебания, возникающие напряжения минимальны. Препятствие, создаваемое для потока машущим профилем, определяет распределение



**Рис. 16.** Изолинии  $\overline{v'v'}$  за профилем, совершающим колебания различных типов: угловые (а, г, ж), вертикальные (б, д, з) и смешанные (в, е, и).

напряжений в поле течения. Энергия, рассеиваемая в потоке машущим профилем, максимальна в случае вертикальных колебаний и минимальна для угловых колебаний. Изолинии напряжений также показывают, что периодические пульсации скорости коррелированы в течение махательного цикла и существенно влияют на течение через компоненты напряжений, развивающиеся в поле течения.

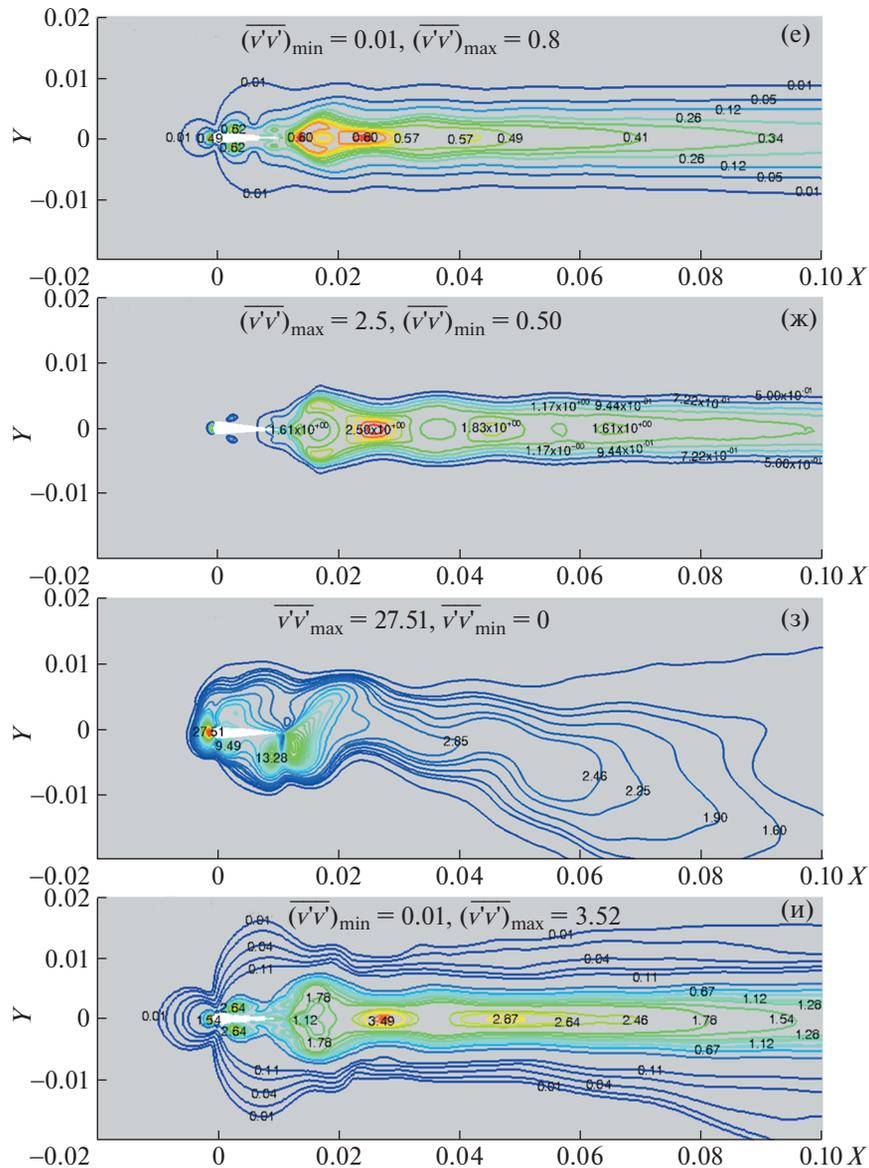


Рис. 16. Окончание

2.6. Собственно ортогональное разложение

Базисные когерентные структуры в следе за машущим профилем исследуются при помощи собственно ортогонального разложения (СОР). Это разложение разбивает поле течения на многочисленные ортогональные моды по признаку обладаемой ими энергии. Анализ этих мод дает возможность понять основные особенности течения. Этот анализ осуществляется методом мгновенных изображений, предложенным в [42]. При этом поле скорости представляется через собственные моды в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^l a_n(t) \phi_n(x)$$

где  $\phi_n(x)$  означает ортогональные собственные моды,  $a_n(t)$  – коэффициенты, зависящие от времени, и  $n$  – номер мгновенного изображения. Величина  $N$  есть полное количество изображений, используемых для выделения СОР-мод. Статистическая стационарность обеспечивается выбором достаточно большого количества изображений.

Матрица скоростей  $R$  строится из мгновенных изображений скорости  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ , полученных в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

$$R = [u_1, u_2, \dots, u_N]$$

Мгновенные изображения скорости представляют собой столбцы матрицы  $U$ . Тогда собственные векторы  $(u_j)$  и собственные значения  $(\lambda_j)$  вычисляются для корреляционной матрицы  $S$  в виде

$$S = R^T R$$

При помощи собственных векторов  $(u_j)$  и собственных значений  $(\lambda_j)$  СОР-моды вычисляются следующим образом

$$\phi_j = U u_j / \sqrt{\lambda_j}$$

Собственные значения соответствуют кинетическим энергиям, содержащимся в каждой моде. Как правило, матрица корреляции  $S$  имеет размерность  $m \times m$  ( $m$  — количество узлов сетки), что требует больших вычислительных мощностей для вычисления собственных векторов. Преимущество метода мгновенных изображений состоит в том, что необходимое количество этих изображений ( $n$ ) значительно меньше, чем число узлов сетки ( $n \ll m$ ). Поэтому работа с матрицей  $n \times n$  при вычислении собственных векторов приносит значительный выигрыш при вычислениях.

**2.6.1. Когерентные структуры.** СОР анализ выполнен в малой области размерами  $9C \times 4C$ , как показано на рис. 2. Размеры этой области выбраны так, чтобы эффективно уловить динамику течения в ближнем следе. При помощи метода мгновенных изображений отобрано 640 изображений через равные промежутки времени в течение 20 последовательных махательных циклов. Сравнительное исследование результатов СОР-анализа выполнено для рассмотренных машущих колебаний при различных значениях  $St_A$ . Для сравнительного исследования выбрана мода, содержащая наибольшее количество энергии (мода 1). На рис. 17 представлены результаты для моды 1 СОР за машущим крылом, совершающим угловые (слева) и вертикальные (справа) колебания. Когерентные структуры расположены в антисимметричном порядке относительно линии симметрии, т.е. структуры с противоположным направлением вращения чередуются по обеим сторонам от линии симметрии.

Когерентные структуры за профилем, совершающим угловые колебания, являются более компактными и концентрированными (рис. 17а), тогда как за вертикально колеблющимся профилем они более разбросаны (рис. 17б). Такое разбросанное расположение связано с более интенсивным переносом энергии от вертикально колеблющегося профиля к потоку жидкости. Когерентные структуры за профилем, совершающим угловые колебания, раздвигаются с увеличением  $St_A$  (рис. 17в, д, ж, и). Однако они не проявляют никакой тенденции к апериодичности. Когерентные структуры за профилем, совершающим вертикальные колебания, отклоняются (рис. 17г) вместе с отклонением следа. Но моды, обладающие более низкими энергиями (не представлены здесь), не испытывают отклонения, т.е. рост  $St_A$  не оказывает на них влияния. Это означает, что отклоненное среднее течение само обладает структурами, чьи характеристики полностью отличны от характеристик среднего течения [43]. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.24 приводит к отклонению в высоко энергетических модах (рис. 17е), так же как низко энергетические моды и все СОР моды ответственны за характер среднего течения. При  $St_A = 0.30$  апериодичность, развивающаяся в потоке, начинает влиять на эволюцию когерентных структур (рис. 17з, к). Структуры в поле течения подвергаются случайным возмущениям и становятся полностью непредсказуемыми. Для краткости когерентные структуры за машущим крылом здесь не представлены. Качественно они подобны структурам в следе и указывают на периодичность в течении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено ламинарное обтекание машущего профиля, совершающего колебания различных типов, двумерным равномерным потоком несжимаемой жидкости. Исследование проведено при фиксированном числе Рейнольдса  $Re_c = 2640$  и числах Струхала  $St_A$  в диапазоне от 0.1 до 0.4. Выполнено сравнение характеристик следа за профилем, совершающим угловые, вертикальные и смешанные колебания. При машущем движении профиля под и над его поверхностью

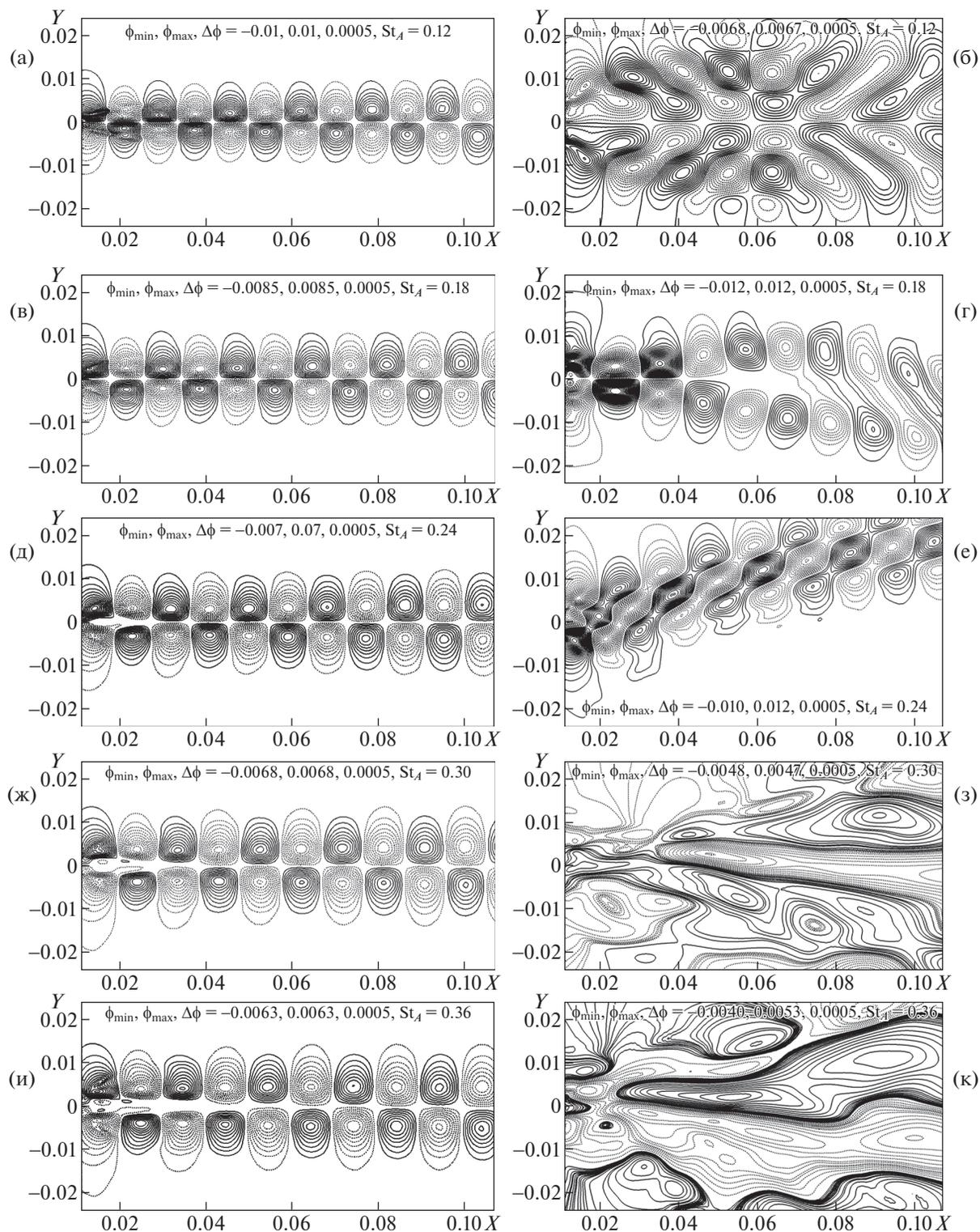


Рис. 17. Когерентные структуры моды 1 в следе за профилем, совершающим угловые (слева) и вертикальные (справа) колебания, определенные посредством собственно ортогонального разложения.

развиваются положительная и отрицательная завихренности соответственно. Механизм образования вихрей одинаков для всех трех типов рассмотренных колебаний и зависит от начального направления движения профиля. Для различных параметров махания наблюдались обратный

след Кармана, отклоненный след и хаотический след. След за вертикально колеблющимся профилем отклоняется от симметричного положения значительно ранее, чем при машущих движениях двух других типов. Отклонение следа связано с эволюцией вихрей у передней кромки профиля. Фактором, влияющим на начало отклонения следа, может быть образование диполя. В целом имеет место ситуация, когда образование обратного следа Кармана способствует развитию тяги, действующей на профиль. Однако измерения сил показывают, что образование обратного следа Кармана предшествует созданию тяги на профиле.

Динамика вихрей в случае смешанных колебаний профиля определяется угловыми колебаниями при малых значениях  $St_A$  и вертикальными колебаниями при больших значениях  $St_A$ . Измерения скорости в следе показывают, что переход от одного определяющего влияния к другому происходит приблизительно при  $St_A = 0.24$ . Измерения сил показывают, что должно существовать критическое значение  $St_A$ , ниже которого структура следа и сила, действующая на профиль, независимы друг от друга. В исследованном диапазоне параметров периодическая компонента пульсаций скорости развивает неизотропное поле напряжений вокруг машущего профиля. В следе за машущим профилем величина  $\overline{v'v'}$  преобладает над  $\overline{u'u'}$ . Анализ компонент напряжений показывает, что увеличение  $St_A$  оказывает большее влияние на вертикально колеблющийся профиль, чем для двух других типов машущих движений. Также он показывает, что энергия, переносимая от машущего профиля в поток, максимальна в случае вертикально колеблющегося профиля, далее следует случай смешанных колебаний и, наконец, угловых. Периодические компоненты пульсаций скорости скоррелированы во все моменты времени и вносят существенный вклад в картину течения. Качественная структура мод, полученных при собственно ортогональном разложении решений, показывает, что при периодических колебаниях профилей в потоке развивается апериодичность.

Работа выполнена при поддержке Совета по научным и промышленным исследованиям Правительства Индии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oshima H., Ramaprian B. Velocity measurements over a pitching airfoil // AIAA J. 1997. V. 35. № 1. P. 119–126.
2. Sarkar S., Venkatraman K. Numerical simulation of thrust generating flow past a pitching airfoil // Computers Fluids. 2006. V. 35. № 1. P. 16–42.
3. Deng J., Sun L., Shao X. Dynamical features of the wake behind a pitching foil // Phys. Rev. E 2015. V. 92. № 6. P. 063013.
4. Ashraf I., Agrawal A., Khan M.H., Srivastava A., Sharma A., et al. Thrust generation and wake structure for flow across a pitching airfoil at low Reynolds number // Sadhana. 2015. V. 40. № 8. P. 2367–2379.
5. Lai J., Platzer M. Jet characteristics of a plunging airfoil // AIAA J. 1997. V. 37. № 12. P. 1529–1537.
6. Lewin G.C., Haj-Hariri H. Modeling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 492. P. 339–362.
7. Ashraf M., Young J., Lai J. Oscillation frequency and amplitude effects on plunging airfoil propulsion and flow periodicity // AIAA J. 2012. V. 50. № 11. P. 2308–2324.
8. Martín-Alcántara A., Fernandez-Feria R., Sanmiguel-Rojas E. Vortex flow structures and interactions for the optimum thrust efficiency of a heaving airfoil at different mean angles of attack // Phys. Fluids. 2015. V. 27. № 7. P. 073602.
9. Guglielmini L., Blondeaux P. Propulsive efficiency of oscillating foils // Europ. J. Mech. -B/Fluids. 2004. V. 23. № 2. P. 255–278.
10. Moriche M., Flores O., Garcia-Villalba M. On the aerodynamic forces on heaving and pitching airfoils at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 2017. V. 828. P. 395–423.
11. Floryan D., Van Buren T., Rowley C. W., Smits A. J. Scaling the propulsive performance of heaving and pitching foils // J. Fluid Mech. 2017. V. 822. P. 386–397.
12. Zheng H., Xie F., Zheng Y., Ji T., Zhu Z. Propulsion performance of a two-dimensional flapping airfoil with wake map and dynamic mode decomposition analysis // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. № 6. P. 063109.
13. Triantafyllou M., Triantafyllou G., Gopalkrishnan R. Wake mechanics for thrust generation in oscillating foils // Phys. Fluids A: Fluid Dyn. 1991. V. 3. № 12. P. 2835–2837.
14. Jones K., Dohring C., Platzer M. Experimental and computational investigation of the Knoller–Betz effect // AIAA J. 1998. V. 36. № 7. P. 1240–1246.
15. Vandenbergh N., Zhang J., Childress S. Symmetry breaking leads to forward flapping flight // J. Fluid Mech. 2004. V. 506. P. 147–155.
16. Schnipper T., Andersen A., Bohr T. Vortex wakes of a flapping foil // J. Fluid Mech. 2009. V. 633. P. 411–423.

17. Jones K., Platzer M. Numerical computation of flapping-wing propulsion and power extraction / 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 1997. P. 826.
18. Godoy-Diana R., Aider J.L., Wesfreid J.E. Transitions in the wake of a flapping foil // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. № 1. P. 016308.
19. Badrinath S., Bose C., Sarkar S. Identifying the route to chaos in the flow past a flapping airfoil // Europ. J. Mech. -B/Fluids. 2017. V. 66. P. 38–59.
20. Bose C., Sarkar S. Investigating chaotic wake dynamics past a flapping airfoil and the role of vortex interactions behind the chaotic transition // Phys. Fluids. 2018. V. 30. № 4. P. 047101.
21. Godoy-Diana R., Marais C., Aider J.L., Wesfreid J.E. A model for the symmetry breaking of the reverse Bénard–von Kármán vortex street produced by a flapping foil // J. Fluid Mech. 2009. V. 622. P. 23–32.
22. Cleaver D.J., Wang Z., Gursul I. Bifurcating flows of plunging airfoils at high Strouhal numbers // J. Fluid Mech. 2012. V. 708. P. 349–376.
23. Medjroubi W., Stoevesandt B., Peinke J. Wake classification of heaving airfoils using the spectral/hp element method // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236. № 15. P. 3774–3782.
24. Andersen A., Bohr T., Schnipper T., Walther J.H. Wake structure and thrust generation of a flapping foil in two-dimensional flow // J. Fluid Mech. 2017. V. 812.
25. Mackowski A., Williamson C. Direct measurement of thrust and efficiency of an airfoil undergoing pure pitching // J. Fluid Mech. 2015. V. 765. P. 524–543.
26. Anderson J., Streitlien K., Barrett D., Triantafyllou M. Oscillating foils of high propulsive efficiency // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41–72.
27. Huq A.A., Sankar R.A., Lakshmanan C., Rukesh C., Kulkarni D., Subramanya M., Rajani B. Numerical prediction of aerofoil aerodynamics at low Reynolds number for MAV application // NAL PD CF 910.
28. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Vol. 3. Springer, 2002.
29. OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox User Guide (2017).
30. Zheng Z.C., Wei Z. Study of mechanisms and factors that influence the formation of vortical wake of a heaving airfoil // Phys. Fluids. 2012. V. 24. № 10. P. 103601.
31. Wei Z., Zheng Z.C. Mechanisms of deflection angle change in the near and far vortex wakes behind a heaving airfoil / 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2013, p. 840.
32. Koochesfahani M.M. Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil // AIAA J. 1989. V. 27. № 9. P. 1200–1205.
33. Van Buren T., Floryan D., Smits A.J. Scaling and performance of simultaneously heaving and pitching foils // AIAA J. 2019. V. 57. № 9. P. 3666–3677.
34. Bose C., Gupta S., Sarkar S., Dynamic interlinking between near- and far-field wakes behind a pitching–heaving airfoil // J. Fluid Mech. 2021. V. 911. A31.
35. Vineeth V.K., Patel D.K., Roy S., Goli S., Roy A. Investigations into transient wakes behind a custom airfoil undergoing pitching motion // Europ. J. Mech. -B/Fluids. 2019. V. 85. P. 193–213.
36. Ohmi K., Coutanceau M., Loc T.P., Dulieu A. Vortex formation around an oscillating and translating airfoil at large incidences // J. Fluid Mech. 1990. V. 211. P. 37–60.
37. Heathcote S., Gursul I. Jet switching phenomenon for a periodically plunging airfoil // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 2. P. 027104.
38. Williamson C.H., Roshko A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder // J. Fluids Struct. 1988. V. 2. № 4. P. 355–381.
39. Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S. Mechanism underlying Kármán vortex street breakdown preceding secondary vortex street formation // Phys. Fluids. 2016. V. 28. № 5. P. 054101.
40. Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S., Malakhova T. Stability of a reverse Kármán vortex street // Phys. Fluids. 2021. V. 33. № 2. P. 024102.
41. Saha A.K., Muralidhar K., Biswas G. Vortex structures and kinetic energy budget in two dimensional flow past a square cylinder // Computers Fluids. 2000. V. 29. № 6. P. 669–694.
42. Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i. coherent structures // Quart. Appl. Math. 1987. V. 45. № 3. P. 561–571.
43. Vineeth V.K., Patel D.K. Propulsion performance and wake transitions of a customized heaving airfoil // Intern. J. Modern Phys. C. 2021. V. 32. № 9. P. 1–28.

УДК 533.9

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОЛУКРУГЛОГО СПИРАЛЬНОГО ВЫСТУПА НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА

© 2022 г. F. Koca<sup>a,\*</sup> and A. Ozturk<sup>a,\*\*</sup><sup>a</sup> Sivas Cumhuriyet University, Sivas, Turkey

\*E-mail: ferhatkoca@cumhuriyet.edu.tr

\*\*E-mail: aozturk@cumhuriyet.edu.tr

Поступила в редакцию 01.07.2021 г.

После доработки 29.09.2021 г.

Принята к публикации 05.10.2021 г.

Экспериментально методом измерения скорости по изображениям частиц (PIV-метод) исследуется влияние полукруглых спиральных выступов на поверхности кругового цилиндра на структуру течения. На основе измерений скорости по изображениям частиц в канале длиной основной части цилиндра определена в 440 мм. Структуры выступов в виде одного витка спирали ( $p = 440$  мм), двух витков ( $p = 220$  мм) и четырех витков ( $p = 110$  мм) формируются за счет изменения числа шагов  $p$  полукругов на поверхности цилиндра. Структура потока исследована в шести разных плоскостях в соответствии с положением спирали. Исследования проводились при числе Рейнольдса, равном 10000, которое определено по средним значениям скорости жидкости в канале, измеренной по изображениям частиц, и диаметру основной части цилиндра  $D$ . Найдены осредненные во времени линии тока  $\langle \psi \rangle$ , средняя кинетическая энергия турбулентности  $k$  ( $\langle TKE \rangle$ ), среднеквадратичное значение (RMS) продольной скорости  $U_{rms}$ , среднеквадратичное значение поперечной скорости  $V_{rms}$  и сдвиговые напряжения Рейнольдса  $\langle u'v' \rangle$ . Число Струхала вычислялось на основе частот дорожки Кармана. Можно сделать вывод, что спиральные выступы на цилиндре уменьшают колебания, вызванные вихрем.

**Ключевые слова:** метод измерения скорости по изображениям частиц (PIV-метод), полукруглый цилиндр, управление потоком, спиральное крыло

**DOI:** 10.31857/S0568528122030082

В инженерных приложениях часто встречаются специальные зоны потока на объектах типа высотных зданий, мостов, градирен, дымовых труб и труб теплообменников. Из-за формы этих объектов существует сравнительно большая зона за ними, в которой поток движется по замкнутому контуру. Эта зона называется областью следа и в таких областях давление падает. Более того, явление схода вихрей, созданных отрывом потока от тела, создает нестационарную периодическую силу, которая вызывает большие колебания тела и может приводить к структурным деформациям. По этой причине знание поля течения вокруг таких структур является очень важным для многих приложений, таких как строительство гражданских, промышленных и инженерных сооружений, машиностроение и технические проблемы, связанные с преобразованием энергии и расчетом конструкций. Понимание структуры течения также важно для ограничения амплитуды колебаний и предотвращения резонанса. Событие в виде резонанса, произошедшее на мосту через ущелье реки Такома в 1940 г., когда частота схода вихрей оказалась выше собственной частоты колебаний мостовых сооружений, что привело к разрушению моста, описывается почти во всех книгах по физике вибраций. Важно знать и контролировать структуру потока, чтобы подобные события не происходили. Исследования управления течениями базируются на открытии Прандтлем пограничного слоя в самом начале двадцатого века. Для управления потоком около затупленного тела можно использовать два метода. Одним из них является метод, называемый пассивным управлением, в котором геометрия поверхности изменяется за счет наложения криволинейных выступов или полостей на поверхность. Другим методом является активное управление, при котором внешняя энергия подводится к зоне течения с применением таких методов, как вдув, отсос, расчетные струи и плазменные актуаторы при определенных условиях, электрический разряд и т.д. При обтекании таких тел поведение потока меняется



Рис. 1. Общий вид гидроканала.

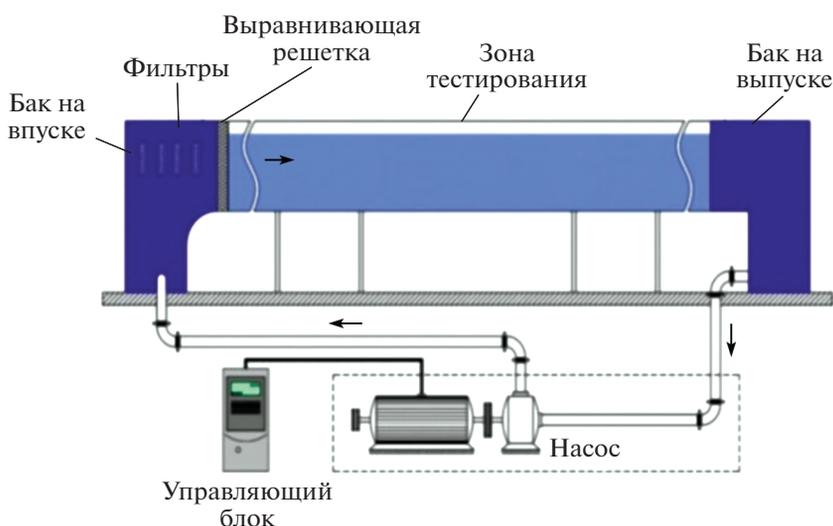


Рис. 2. Схематический вид экспериментальной установки.

при увеличении числа Рейнольдса. Основные задачи гидродинамики объектов, таких как круговые и прямоугольные цилиндры, были всесторонне исследованы как численно, так и экспериментально при разных числах Рейнольдса [2–10]. В [11] было исследовано влияние наличия образований со спиральной геометрией на цилиндре на колебания, вызванные вихреобразованием. Были исследованы спиральные структуры с разными шагами ( $p = 5, 10, 15d$ ) и высотами ( $h = 0.1, 0.2, 0.25d$ ), помещенные в канал с водой, когда число Рейнольдса менялось в диапазоне от 1000 до 10000. Было показано, что спиральные структуры с  $h = 0.2d$  и  $h = 0.25d$  почти полностью подавляют колебания, вызванные вихреобразованием. В [12], используя метод измерения скорости по изображениям частиц, были изучены характеристики течения при числе Рейнольдса, равном 6250 при пассивном управлении потоком посредством пластины, помещенной на цилиндр. Было найдено, что при увеличении длины пластины ее влияние на подавление схода вихрей возрастает. В [13] было проведено экспериментальное исследование с целью изучения колебаний, вызванных вихреобразованием, закрепленных круговых цилиндров с тремя спиральными канавками. Было подчеркнуто, что спиральные канавки весьма эффективны при подавлении колебаний поперечного потока, вызванных вихреобразованием, так что максимальное значение амплитуды колебаний уменьшалось на 64%. В [14], где также было проведено экспериментальное исследование, было изучено влияние одной прямой и трех спиральных проволочек, намотанных на поверхность кругового цилиндра, на критическое течение в однородном поперечном потоке. Эксперименты были выполнены при  $Re = 10000$  (рассчитанному по диаметру цилиндра) с использованием цилиндра с внешним диаметром  $D = 50.8$  мм. В этом исследовании утвержда-

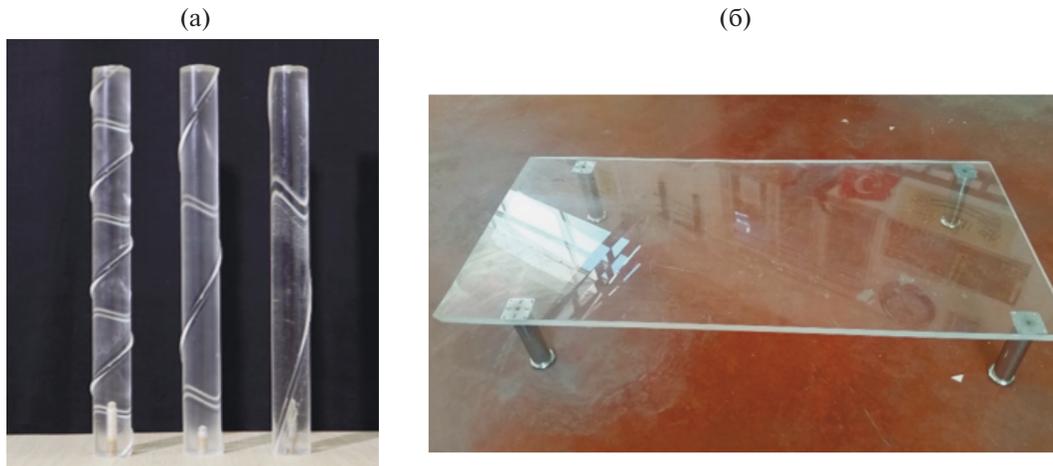


Рис. 3. Предметы опытов: а) модели; б) платформа.

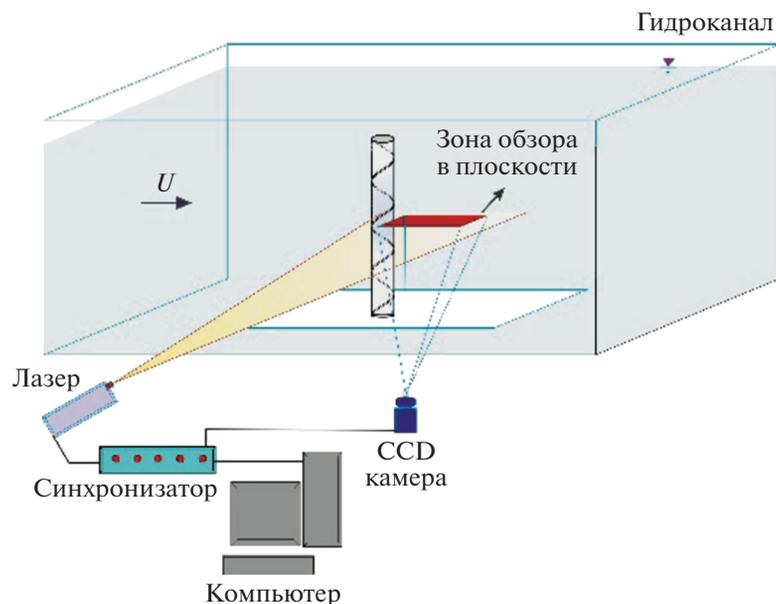


Рис. 4. Схематическое изображение оборудования опытов и цифровых PIV устройств.

лось, что спирали оказывают существенное влияние на колебания, вызванные вихреобразованием. В [15] было проведено экспериментальное исследование стесненного течения около кругового цилиндра с пластинчатой перегородкой. Цилиндр из оргстекла диаметром 30 мм был установлен в канале с 30% загромождением поперечного сечения. Длина пластинчатой перегородки  $L/D$  (здесь  $L$  – длина пластинки и  $D$  – диаметр цилиндра) лежала между 0 и 1.5, а числа Рейнольдса изменялись между 2400 и 3000. Было отмечено, что в случае короткой пластины картина течения существенно видоизменяется по сравнению с плоским цилиндром, частота закрутки вихря снижается, а вторичные вихри возникают в случае длинных перегородок.

Цель настоящего исследования состоит в изучении влияния спиральных структур, расположенных на помещенном в канал цилиндре с помощью измерения скорости по изображениям частиц (PIV-метода). Данные, полученные PIV-методом, были обработаны для различных локаций вдоль цилиндра, и это было проделано как для заданной конфигурации спиралей и при заданном значении числа Рейнольдса, распределения потока и турбулентности считались заданными;

**Таблица 1.** Свойства частиц HGS-10 [16]

	HGS (Полые стеклянные сферы)
Средний размер частиц (мк)	10
Форма частиц/материал	Сферические/Боросиликатное стекло
Плотность (г/см <sup>3</sup> )	1.1
Точка плавления (°C)	740
Показатель преломления	1.52

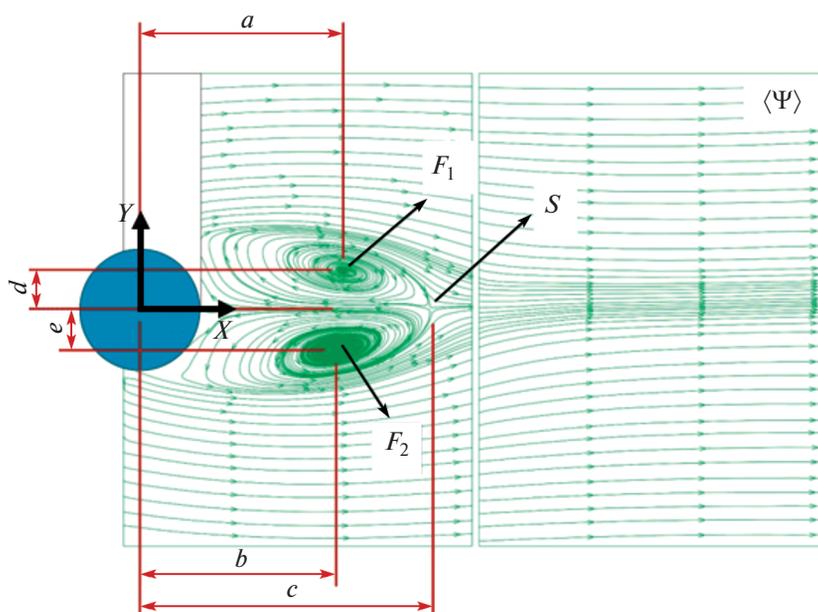
были изучены процессы схода вихрей, которые эффективны для управления колебаниями, и рассчитаны важные параметры течения.

### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

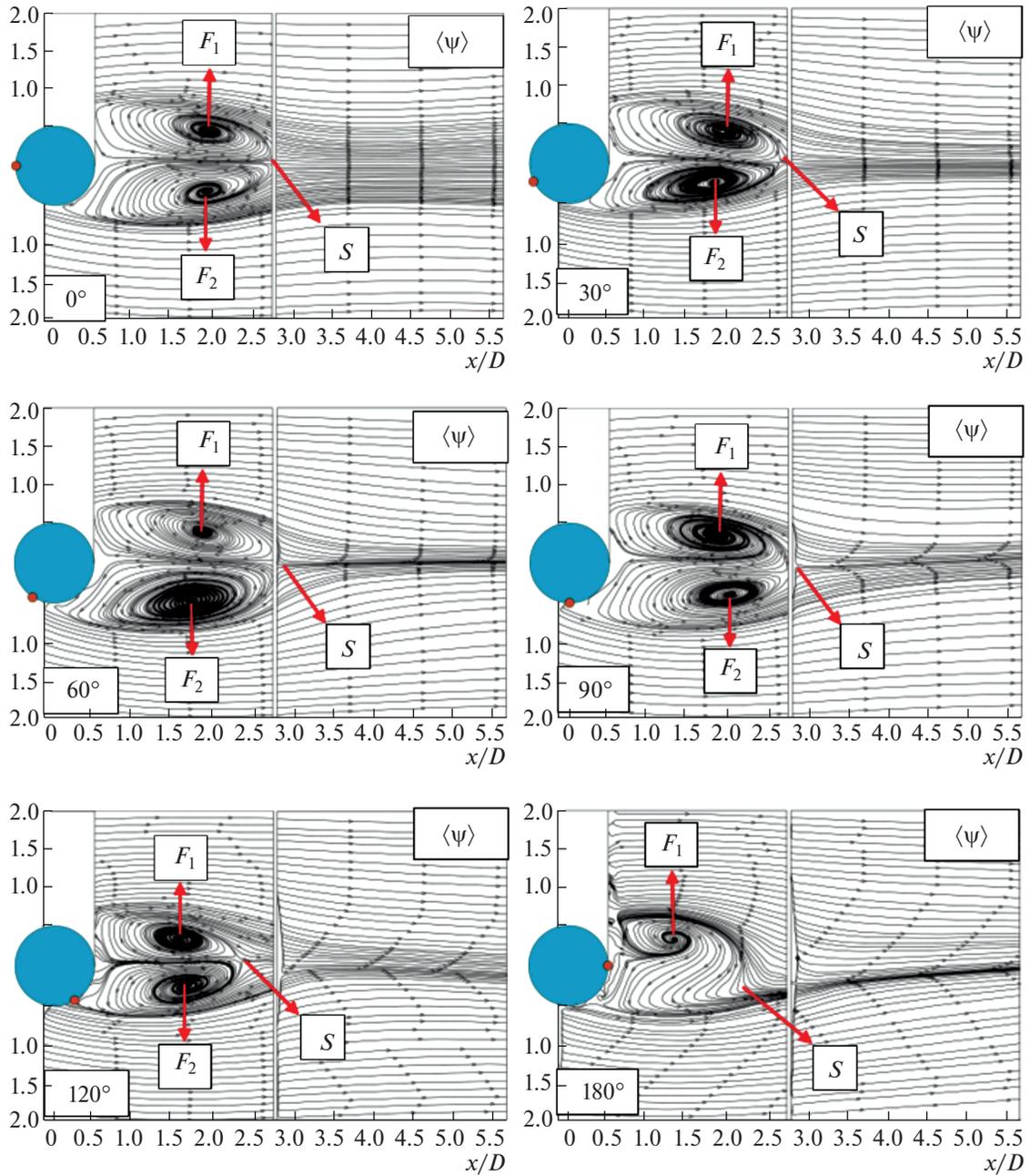
В настоящем исследовании экспериментально исследована структура течения около трех конечных цилиндров со спиральными выступами с разным числом витков, прикрепленным к поверхности цилиндров, в гидроканале с открытой поверхностью воды, действующим по замкнутому циклу, с помощью измерения скорости по изображениям частиц (PIV-методом). На рис. 1 приведена фотография общего вида гидроканала в Университете Османи Коркит Ата, Инженерный факультет, Отдел Инженерных разработок энергетических систем, Лаборатории гидродинамики, в котором проводились эксперименты.

Основные компоненты гидроканала изображены на рис. 2. Таким образом, система состоит из панели управления, которая контролирует электромоторы, подсоединенные к гидроканалу, входной и выходной накопительных емкостей и тестовой камеры.

Эксперименты были выполнены при  $Re = 10000$ , рассчитаном по скорости набегающего потока и конечного диаметра цилиндров. Влияние поверхности цилиндра на зону потока обсуждалось после обработки данных измерений с помощью компьютерного программного обеспечения.



**Рис. 5.** Линии тока и важные точки.



**Рис. 6.** Линии тока в случае одновитковой спирали для угловых положений  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно точки торможения на цилиндре.

## 2. МОДЕЛИ

Модели цилиндров, использованных в экспериментах, изображены на рис. 3. Всего использовалось 4 экспериментальные модели, три модели имели одно-, двух- и четырехвитковые спиральные выступы (накладки), а четвертая представляла собой прямой цилиндр. Структуры выступов в виде одного витка ( $p = 440$  мм), двух витков ( $p = 220$  мм) и четырех витков ( $p = 110$  мм) были сформированы за счет изменения числа шагов  $p$  полуциркулов на поверхности цилиндра. Модели были изготовлены из оргстекла. Тестовые цилиндры были изготовлены посредством обработки плексигласовых трубок диаметром 50 мм с помощью высокоточного фрезерного станка с числовым программным управлением (ЧПУ). Отношение длины цилиндра к его диаметру  $L/D$  и отношение  $D/d$  диаметров цилиндра и полуцилиндрической спиральной “навивки” (спиральной “обмотки”) на поверхности цилиндра были обработаны так, чтобы они равнялись 10. Длина

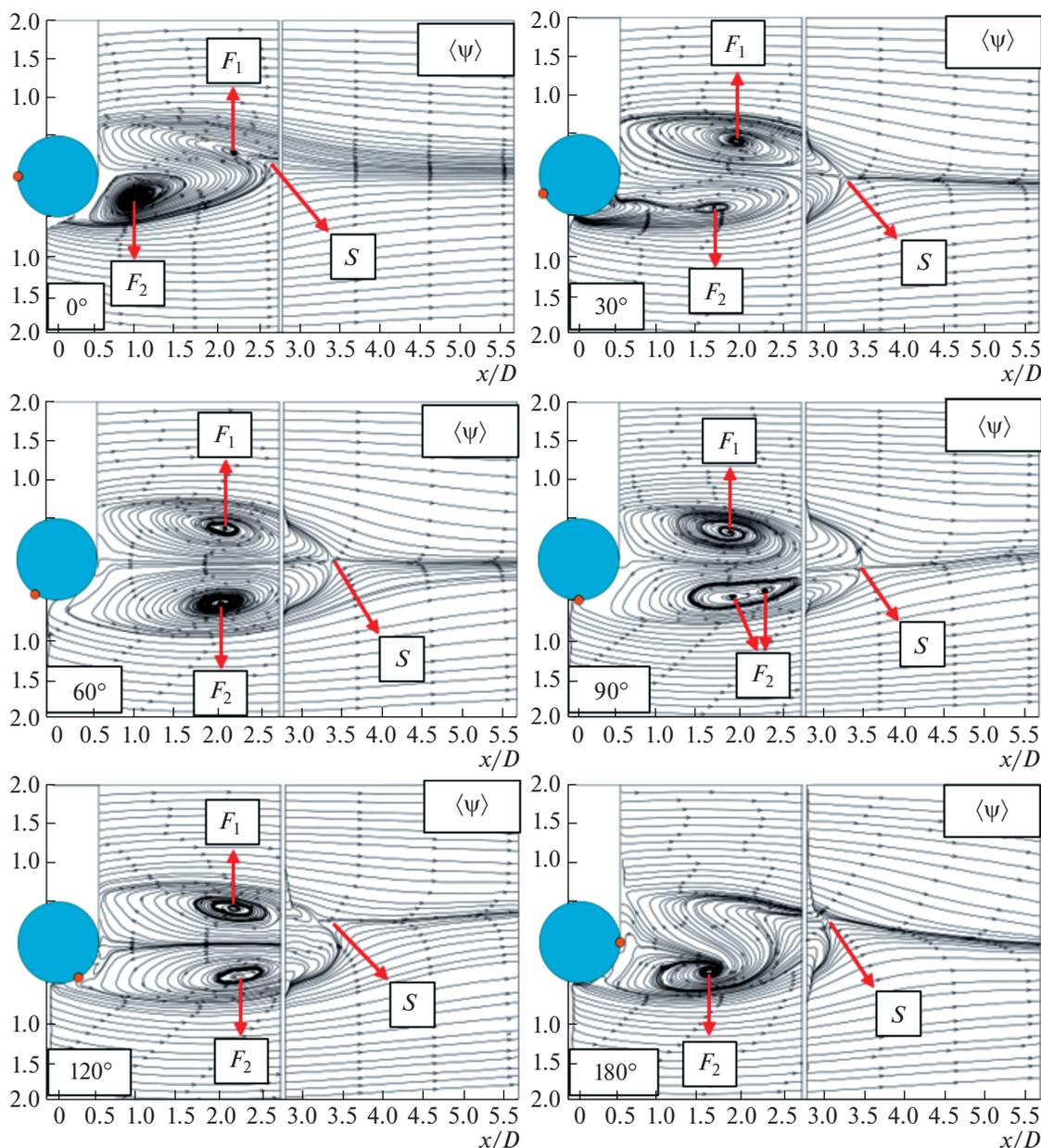
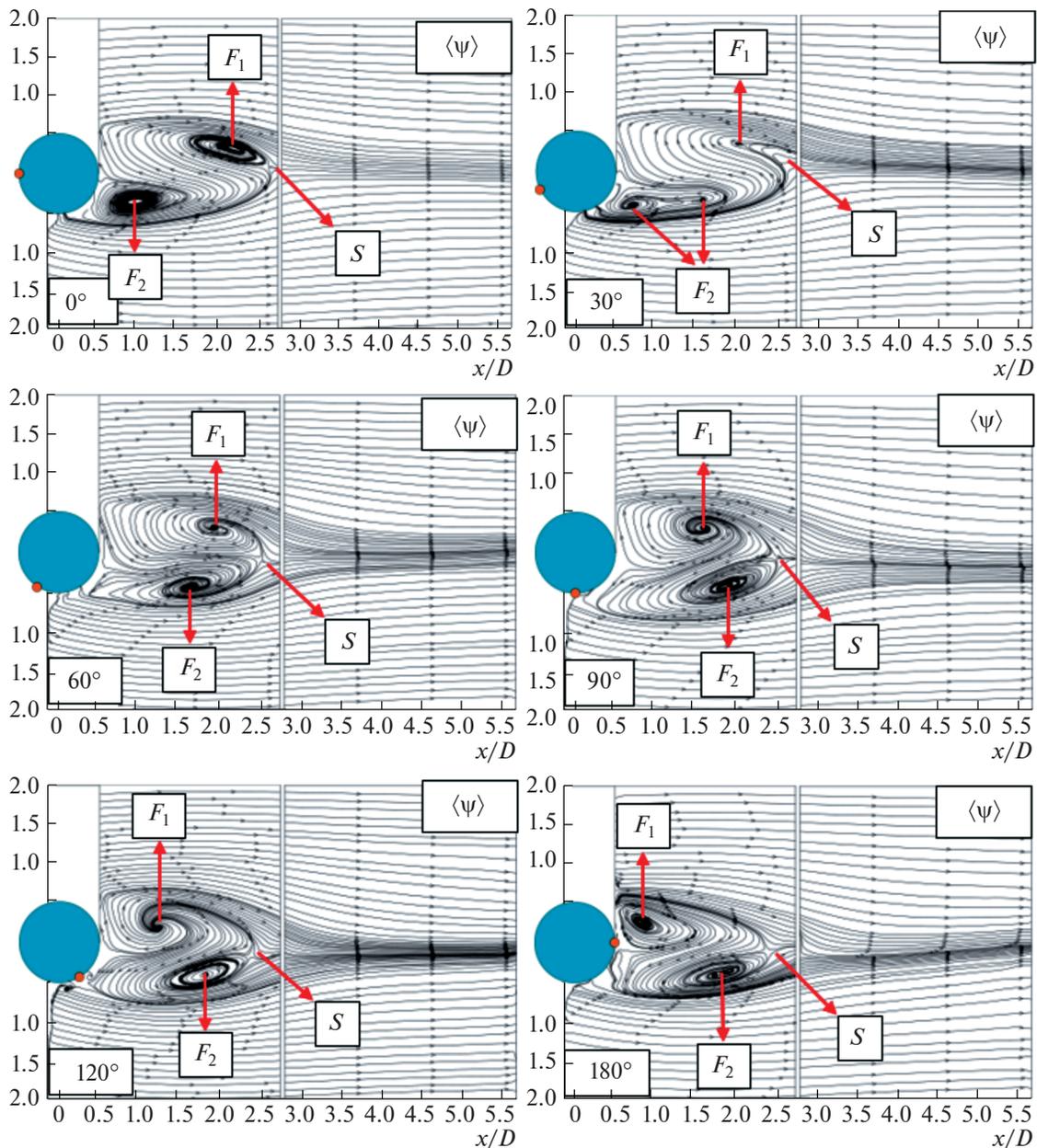


Рис. 7. Линии тока в случае двухвитковой спирали для угловых положений  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно точки торможения на цилиндре.

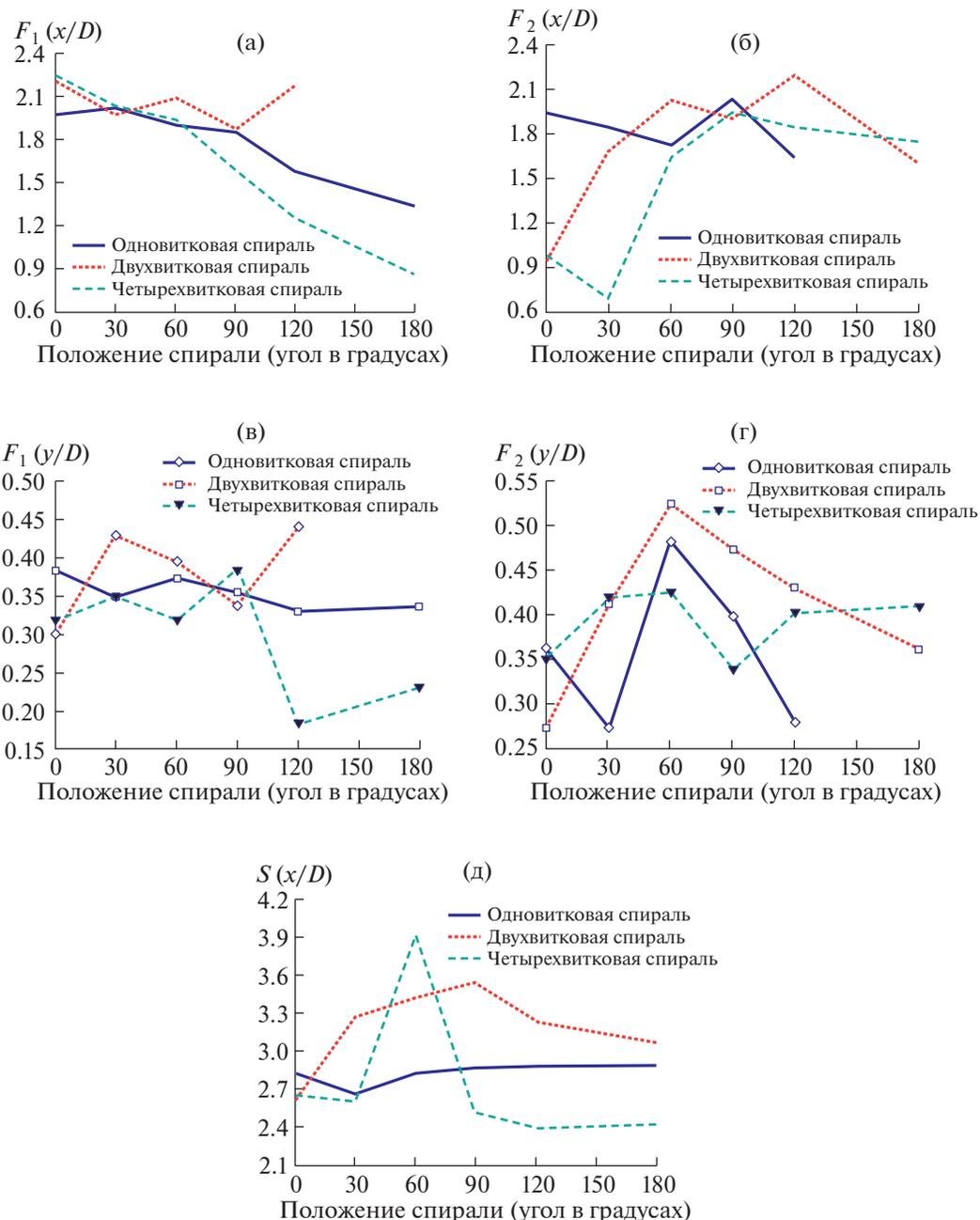
основного цилиндра была ограничена 440 мм, чтобы избежать ухудшения структуры материала при обработке. Эксперименты выполнялись на платформе, помещенной в гидроканал. Платформа изображена на рис. 3. Длина платформы 1500 мм, а ее ширина 700 мм, высота расположения платформы, отсчитываемая от дна канала, равна 220 мм и расстояние между платформой и поверхностью воды составляет 600 мм. Эксперименты были проведены с установкой тестовых цилиндров на эту платформу. Число Рейнольдса, вычисленное по диаметру основного цилиндра и скорости набегающего потока в канале, равнялось 10000. Для исследования влияния угловой позиции спиральной “навивки” (“обмотки”) эксперименты были выполнены при угловом положении спирального выступа  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно точки торможения потока на цилиндре. Во время экспериментов были сделаны 1000 моментальных фотографий при каждом угловом положении. Векторы скорости были рассчитаны обработкой полученных изображений. Характеристики течения были определены при использовании этих данных.



**Рис. 8.** Линии тока в случае четырехвитковой спирали для угловых положений  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно точки торможения на цилиндре.

Цилиндры не поворачивались для получения данных при разных угловых положениях спирали. Вместо этого плоскость измерений смещалась вдоль оси цилиндра. Для всех моделей получение данных при нулевом спиральном угле было сделано от точки  $z/D = 5$ , которая представляет собой середину цилиндра. Для каждого  $30^\circ$  приращения, 36.67 мм для одновитковой спирали, 18.33 мм для двухвитковой спирали и 9.16 мм для четырех витков, положения лазера смещались вдоль оси  $Z$  без вращения цилиндра.

На рис. 4 приведена схема системы измерений скорости по изображениям частиц. Во время получения изображений поле течения освещалось двухимпульсным Nd:Yag лазером на алюмоиттриевом гранате, легированном неодимом, в плоскости, перпендикулярной потоку. Во всех измерениях временной интервал между двумя лазерными импульсами задавался равным 83 мс. В поток воды были добавлены частицы диаметром 10 мк, так что на каждое изображение приходилось минимум 50 частиц. Движение этих частиц регистрировали видекамеры на основе



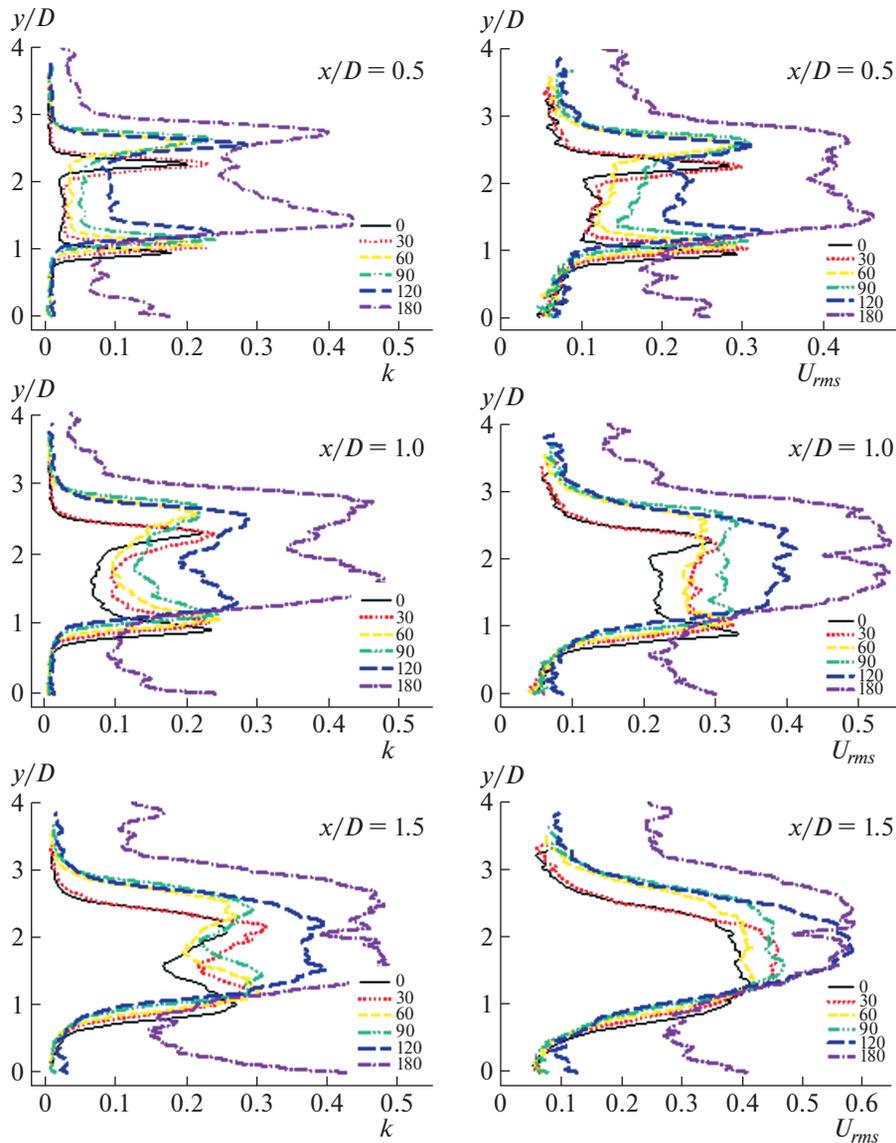
**Рис. 9.** Положение угла спирали в зависимости от безразмерного расстояния до критической точки: а)  $F_1(x/D)$  в зависимости от положения спирали; б)  $F_2(x/D)$  в зависимости от положения спирали; в)  $F_1(y/D)$  в зависимости от от положения спирали; г)  $F_2(y/D)$  в зависимости от положения спирали; д)  $S(x/D)$  в зависимости от положения спирали.

устройства с зарядовой связью (CCD камера). Записанные изображения обрабатывались с помощью пакета программ Dantec Flow Manager.

В настоящем экспериментальном исследовании к воде, используемой как рабочая жидкость, были добавлены полые стеклянные сферы диаметром 10 мк (HGS-10). В табл. 1 приведены свойства использованных частиц HGS-10.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕДЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Структура усредненного по времени обтекания прямого цилиндра без накладок симметрична относительно оси  $X$  [17, 18]. Картины усредненных по времени линий тока  $\psi$  указывают на то,

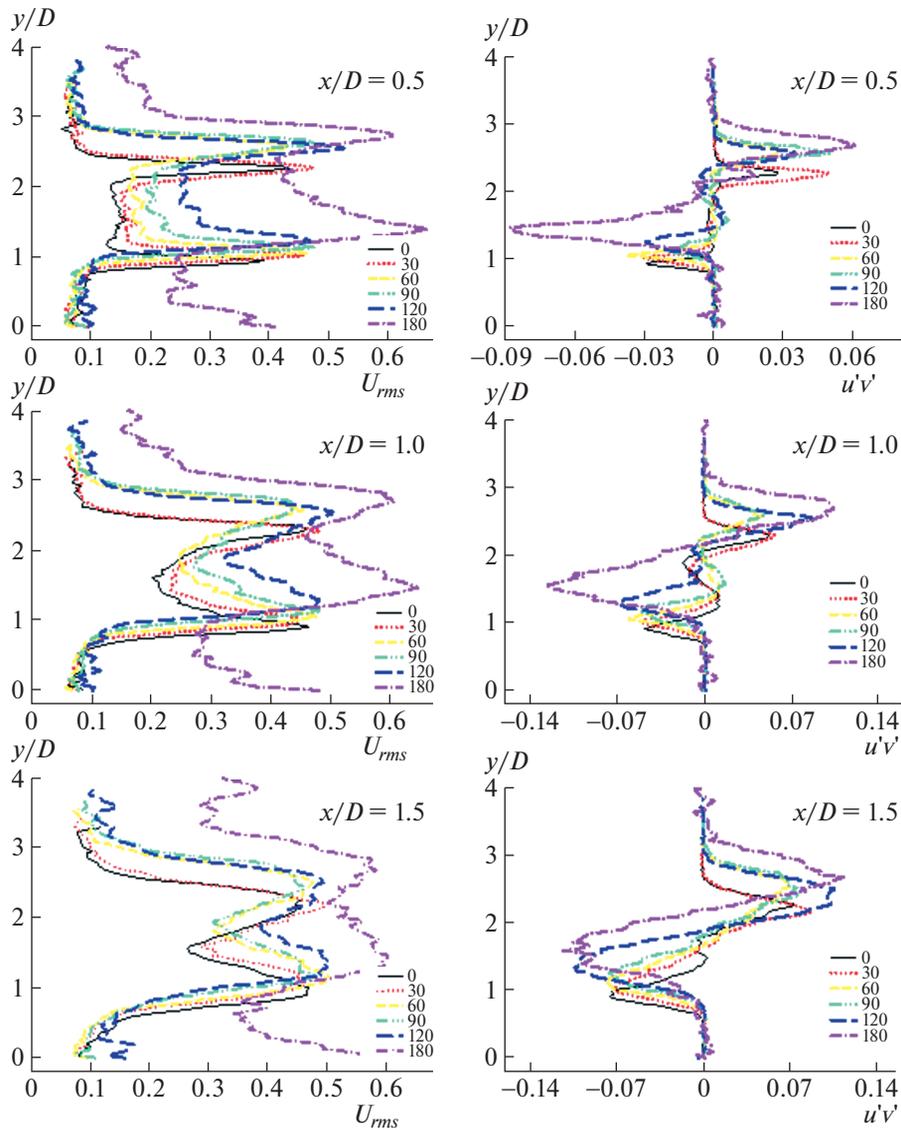


**Рис. 10.** Распределения кинетической энергии турбулентности  $k$  и среднеквадратичной продольной скорости  $U_{rms}$  в различных положениях жидкости в области следа одновитковой спирали.

что в области следа за круговым цилиндром формируются два фокуса ( $F_1$  и  $F_2$ ) с противоположными направлениями вращения. Эта зона циркуляции ограничена набегающим свободным течением, которое покидает седловую точку  $S$  вниз по потоку от рассматриваемого поля течения. Полученные наблюдения находятся в согласии с данными исследований [19–21].

Рисунок 5 изображает линии тока в области следа и некоторые важные точки в этой области. Координаты положений  $a, b, c, d, e$  вышеупомянутых важных точек ( $F_1, F_2$  и  $S$ ) этих линий тока, полученных в результате обработки 1000 изображений, были определены по измерениям скорости изображений частиц относительно осей  $X$  и  $Y$ . Для осей  $X$  и  $Y$  начало координат  $X = 0, Y = 0$  было определено в средней точке цилиндра. Линия тока, усредненная по времени, вначале представлена для прямого цилиндра без спирального выступа (рис. 5) и рис. 6–8 даны для цилиндров, сделанных со спиральными выступами с различным числом витков спиралей. Критические точки ( $F_1, F_2$  и  $S$ ) были получены в безразмерных координатах  $x/D$  и  $y/D$  (зависят от диаметра  $D$  основного цилиндра) для угловых положений  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно оси набегающего невозмущенного потока.

На рис. 9 построены графики значений безразмерных координат критических точек, построенные на основе линий тока при варьировании угла подъема винтовой линии (спирали). По-

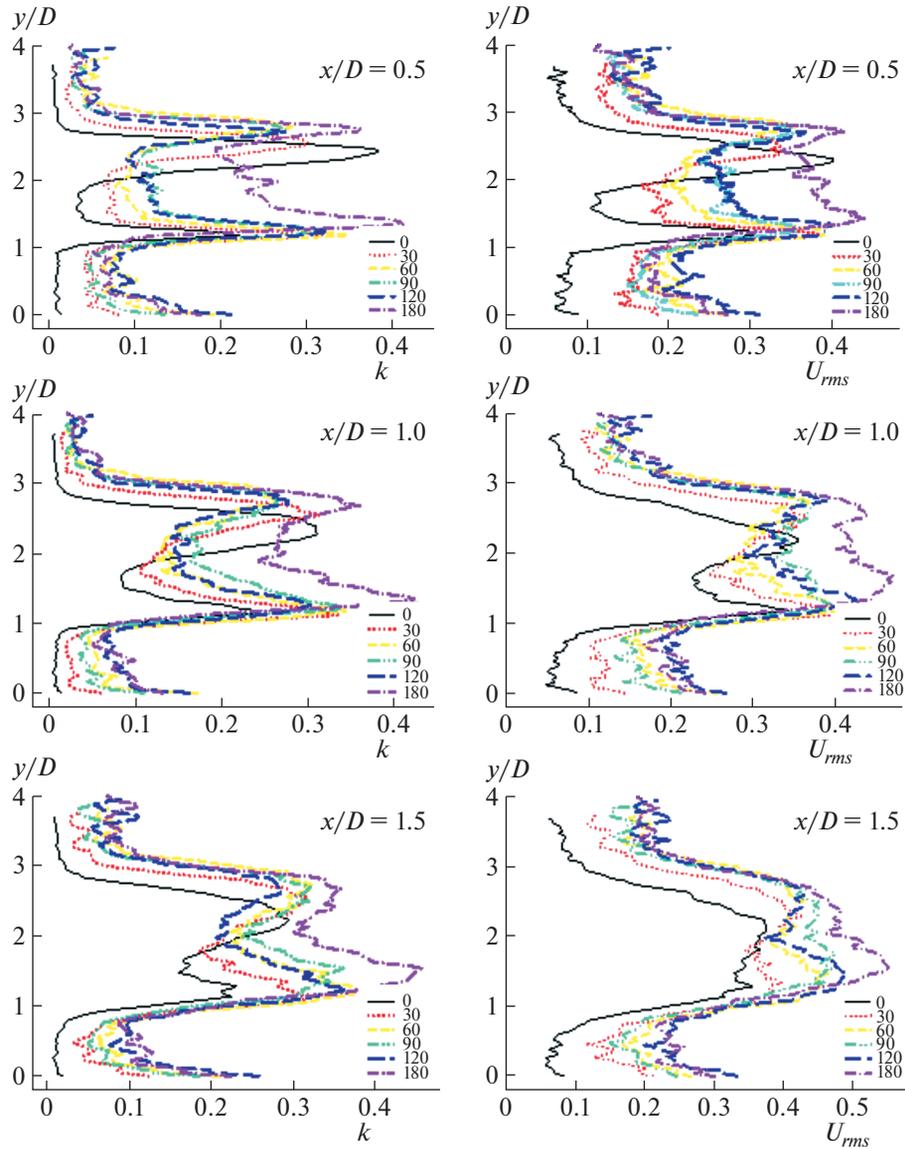


**Рис. 11.** Распределения среднеквадратичной поперечной скорости  $V_{rms}$  и корреляции напряжений Рейнольдса в различных положениях жидкости в области следа одновитковой спирали.

сколько именно значение угла возмущает структуру течения в наибольшей степени, из построенных графиков можно отчетливо видеть, что угол подъема винтовой линии, равный  $90^\circ$ , является критическим углом. Цилиндр с двумя оборотами винтовой линии демонстрирует более выраженное горизонтальное перемещение при варьировании угла подъема винтовой линии по сравнению с другими цилиндрами. При этом наблюдаются наибольшие значения. По этой причине область следа расширена на более широкую зону.

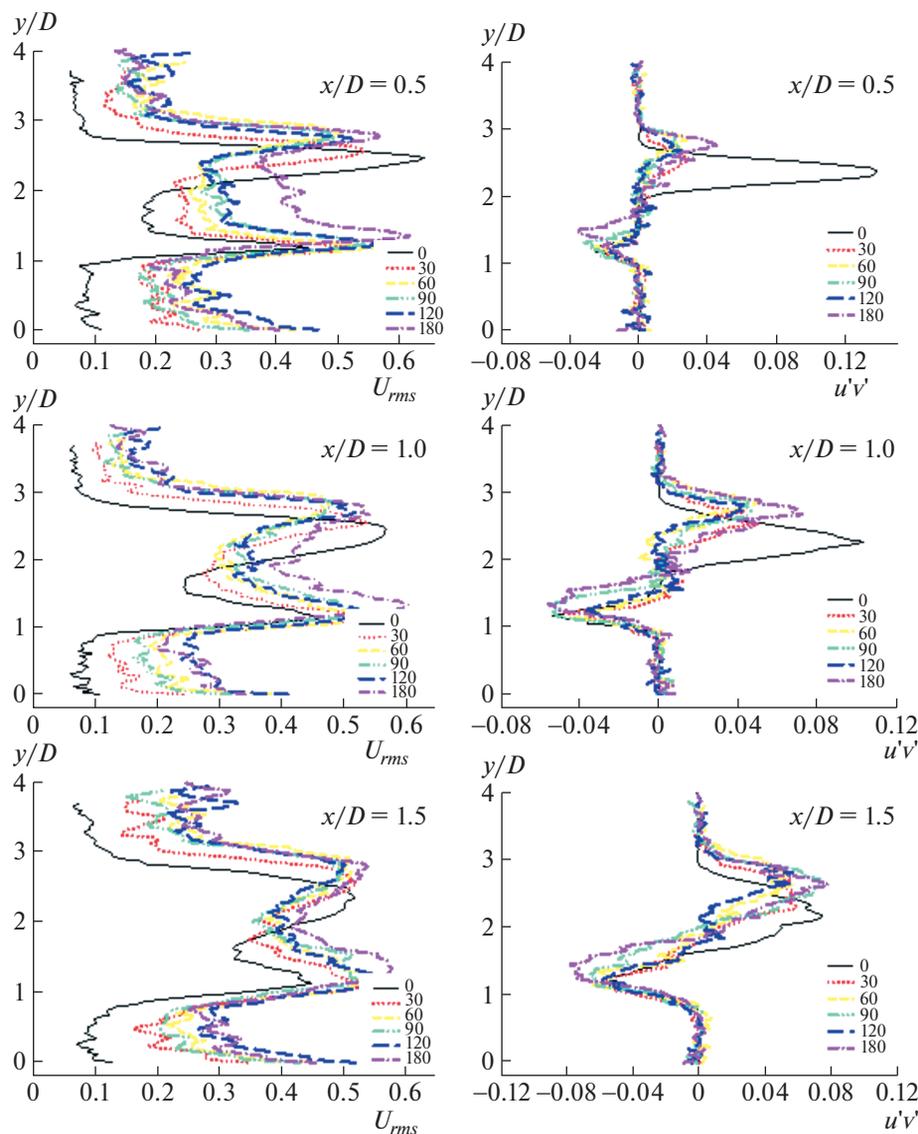
В этом разделе рассматриваются состояния течения при различных положениях, эти состояния включают кинетическую энергию турбулентности, среднеквадратические значения продольной и поперечной компонент скорости  $U_{rms}$  и  $V_{rms}$  и зависимости для сдвиговых напряжений Рейнольдса  $u'v'$  для всех  $\theta$  ( $0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$ ). В согласии с характером использованной системы PIV-измерений скорости по изображениям частиц в настоящем исследовании рассмотрено только двумерное поле течения, так что полное трехмерное определение кинетической энергии турбулентности  $k$  было упрощено в соответствии с выражением (3.1)

$$k = \frac{1}{2}[\overline{u'u'} + \overline{v'v'}]. \tag{3.1}$$



**Рис. 12.** Распределения кинетической энергии турбулентности  $k$  и среднеквадратичной продольной скорости  $U_{rms}$  в различных положениях жидкости в области следа двухвитковой спирали.

Полученные значения кинетической энергии турбулентности  $k$  были обезразмерены с помощью 0.41 значения скорости набегающего потока, которое использовалось при вычислении  $Re = 10000$ . Графики были также построены для зависимостей от безразмерного расстояния  $x/D$ . Положение  $x/D = 0.5$  было выбрано случайно, чтобы исследовать развитие статистических характеристик турбулентности непосредственно за цилиндром. Безразмерное положение  $x/D = 1$  выбрано для вертикальных фокальных точек и безразмерное положение  $x/D = 1.5$  определяется приблизительно для положения седловой точки. Значения  $U_{rms}$  и  $k$  вначале возрастают при увеличении расстояния по обе стороны цилиндра  $x/D = 0.5$  и затем, после достижения локальных максимумов в сдвиговом слое, убывают. Однако при  $x/D = 0.5$  появляются размеры, на которых локальные максимумы значительно уменьшаются. Более того, графики кинетической энергии турбулентности  $k$  имеют относительно слабый вторичный локальный максимум в окрестности граничной линии циркуляции соответствующей линии тока. Расстояние между локальными максимумами кинетической энергии турбулентности  $k$  по обе стороны убывает по мере того, как линия тока становится длиннее при росте расстояния вниз по течению. По обе стороны точки



**Рис. 13.** Распределения среднеквадратичной поперечной скорости  $U_{rms}$  и корреляции напряжений Рейнольдса в различных положениях жидкости в области следа двухвитковой спирали.

максимумов на графиках  $U_{rms}$ ,  $V_{rms}$  и кинетической энергии турбулентности  $k$  сближаются друг с другом при увеличении расстояния вдоль по потоку. При исследовании графиков зависимостей для напряжений Рейнольдса можно видеть, что безразмерное расстояние  $x/D$  возрастает, это демонстрирует синусоидальное распределение. Эти два локальных максимума имеют место непосредственно выше и ниже циркуляционной линии тока вблизи перехода поверхности цилиндра от вертикального положения к более наклонному. Все полученные результаты изображены на рис. 10–15.

Спектральная функция скорости была исследована в точках поля течения, показанных на рис. 16 для того, чтобы определить частоту схода вихрей Кармана  $f$  и нерегулярностей в сдвиговом слое. Прежде всего были заданы две точки на каждой стороне цилиндра, обозначенные  $A$  и  $B$ , с целью определения доминирующих частот. Точка  $A$  была задана на безразмерном расстоянии от оси  $x$ , равном 3, и безразмерном расстоянии от оси  $y$ , равном 0.5, в единицах диаметра цилиндра и координаты точки  $B$  были заданы в виде  $x/D = 3$  и  $y/D = 0.5$ , симметрично точке  $A$  относительно центральной линии цилиндра.

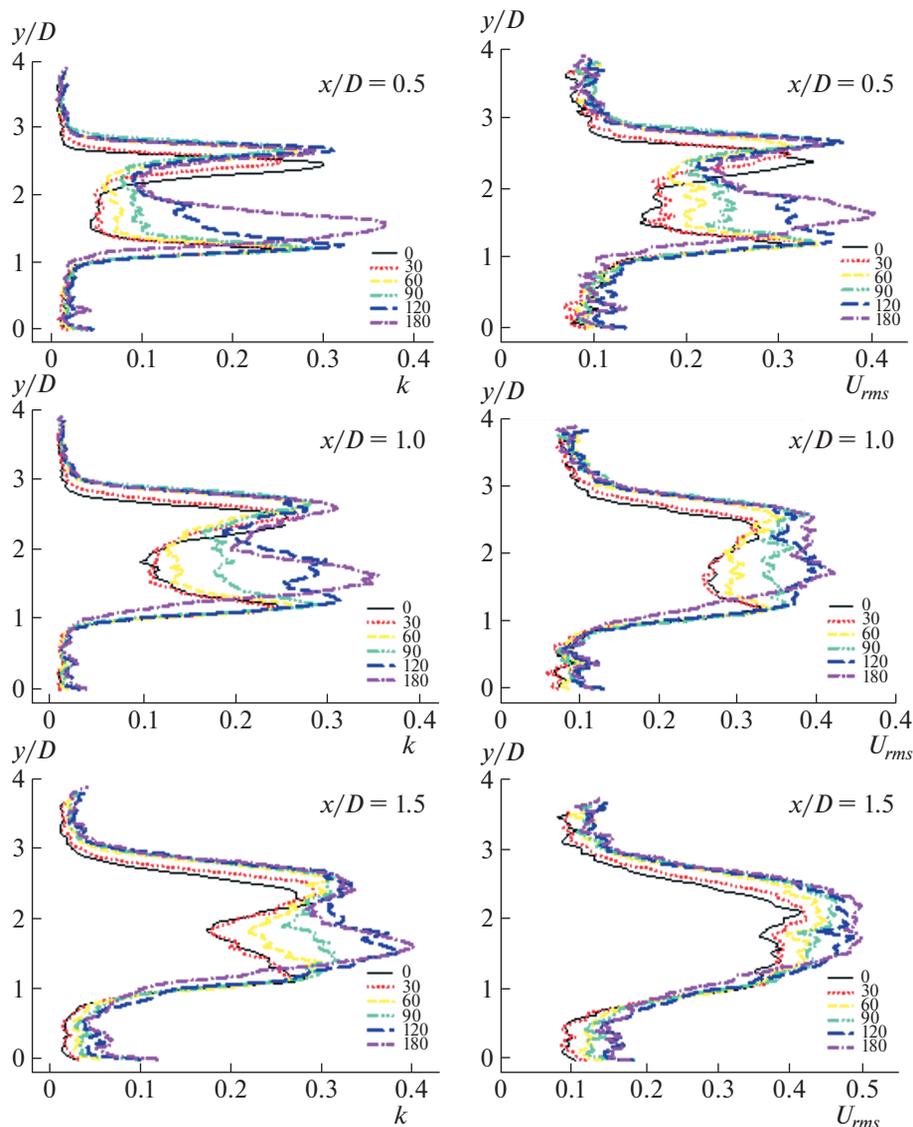
В табл. 2 приведены частота, период и число Струхала, полученные в точках  $A$  и  $B$  для простого цилиндра и трех модельных цилиндров со спиральными структурами. Данные, приведенные

Таблица 2. Частота, период и число Струхала

	$F_A$	$F_B$	$T_A$	$T_B$	$T_A/c$	$T_B/c$	$St_A = fD/U$	$St_B = fD/U$
Прямой цилиндр	1.096	1.096	0.912	0.912	10.99	10.99	0.212	0.212
1c0	1.023	1.032	0.977	0.968	11.78	11.67	0.197	0.199
1c30	1.041	1.031	0.960	0.969	11.57	11.69	0.201	0.199
1c60	1.062	1.069	0.941	0.935	11.34	11.27	0.205	0.206
1c90	0.947	0.974	1.055	1.026	12.72	12.37	0.183	0.188
1c120	0.954	1.064	1.048	0.939	12.63	11.32	0.184	0.205
1c180	1.184	1.141	0.844	0.876	10.18	10.56	0.229	0.220
2c0	0.925	0.991	1.081	1.009	13.03	12.16	0.179	0.191
2c30	0.983	0.990	1.017	1.010	12.26	12.17	0.190	0.191
2c60	0.958	0.913	1.043	1.095	12.58	13.20	0.185	0.176
2c90	0.989	1.015	1.011	0.985	12.18	11.87	0.191	0.196
2c120	0.878	1.021	1.138	0.979	13.72	11.80	0.169	0.197
2c180	0.928	2.834	1.077	0.352	12.98	4.251	0.179	0.195
4c0	1.020	1.013	0.980	0.987	11.81	11.89	0.197	0.196
4c30	0.997	1.077	1.003	0.928	12.08	11.19	0.192	0.208
4c60	0.924	0.923	1.082	1.083	13.04	13.05	0.178	0.178
4c90	0.939	0.941	1.064	1.062	12.83	12.80	0.181	0.182
4c120	0.990	0.992	1.010	1.008	12.17	12.14	0.191	0.191
4c180	0.991	1	1.009	1	12.16	12.05	0.191	0.193

\*с: время, затраченное на получение 1000 PIV изображений, 83 секунды

в табл. 2, были получены на интервале 1 с для модели с одновитковой спиралью, 2 с для модели с двухвитковой спиралью и 4 с для модели с четырехвитковой спиралью, наклон плоскости в градусах указан рядом. Значения периода ( $1/f_A$  и  $1/f_B$ ) и числа Струхала ( $fD/U$ ) для точек  $A$  и  $B$  были получены путем математических преобразований. Из анализа таблицы следует, что данные для простого цилиндра с доминирующей частотой  $f = 1.096$ , соответствующей числу Струхала  $St = 0.21$ , согласуются с результатами [22]. Из анализа табл. 2 следует, что минимальная частота, равная 0.878 для точки  $A$ , получена для структуры с двухвитковой спиралью, когда положение спирали составляет  $120^\circ$  (2c120). На рис. 17 показано изменение числа Струхала  $St$  в зависимости от угла положения спирали.

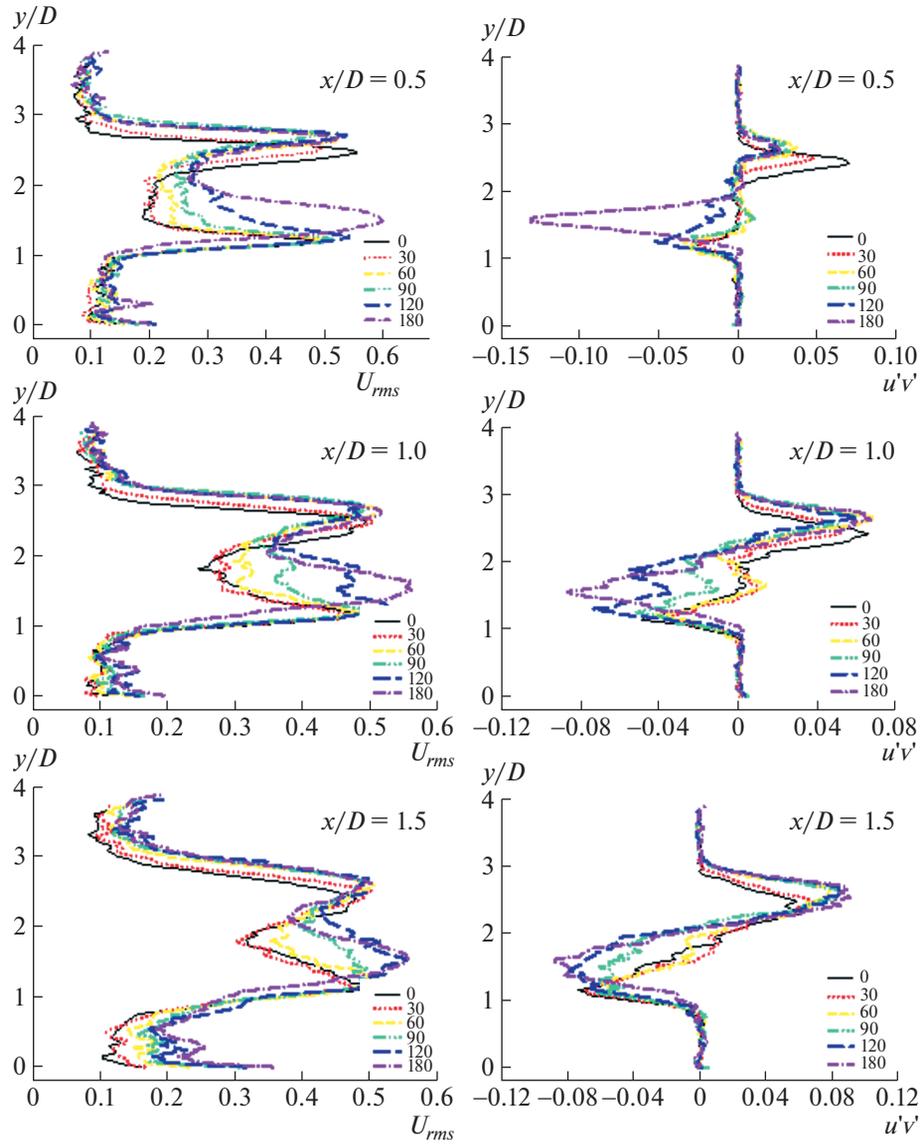


**Рис. 14.** Распределения кинетической энергии турбулентности  $k$  и среднеквадратичной продольной скорости  $U_{rms}$  в различных положениях жидкости в области следа четырехвитковой спирали.

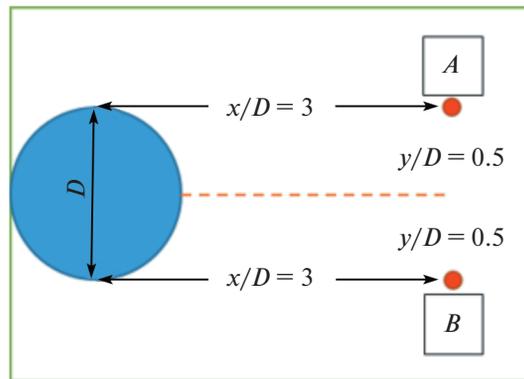
### ВЫВОДЫ

В настоящем исследовании структура обтекания кругового цилиндра изучена с применением методики измерения скорости по изображениям частиц (PIV-метод), когда угловое положение спирали на цилиндре отсчитывается от точки торможения на цилиндре. Из всех использованных четырех экспериментальных моделей три модели состоят из одно-, двух- и четырехвитковых спиралей и четвертая модель представляет собой прямой цилиндр без спиральных выступов. Число Рейнольдса, вычисленное по диаметру цилиндра, составляло 10000. Для исследования влияния углового положения спирали были проведены эксперименты при угловых положениях спиральных выступов  $\theta = 0, 30, 60, 90, 120$  и  $180^\circ$  относительно точки торможения на цилиндре.

Результаты экспериментов на прямом цилиндре (без спиральных выступов) согласуются с имеющейся литературой. В экспериментах наблюдалось, что структура течения оказывает глубокое воздействие на статистические характеристики турбулентности и частоту схода вихрей. Критические точки течения  $F_1, F_2$  и  $S$  на прямом цилиндре всегда расположены дальше от цилиндра вниз по потоку, чем от цилиндров со спиральными выступами. В области следа наблюдается



**Рис. 15.** Распределения среднеквадратичной поперечной скорости  $V_{rms}$  и корреляции напряжений Рейнольдса в различных положениях жидкости в области следа двухвитковой спирали.



**Рис. 16.** Точки спектрального анализа быстрого преобразования Фурье.

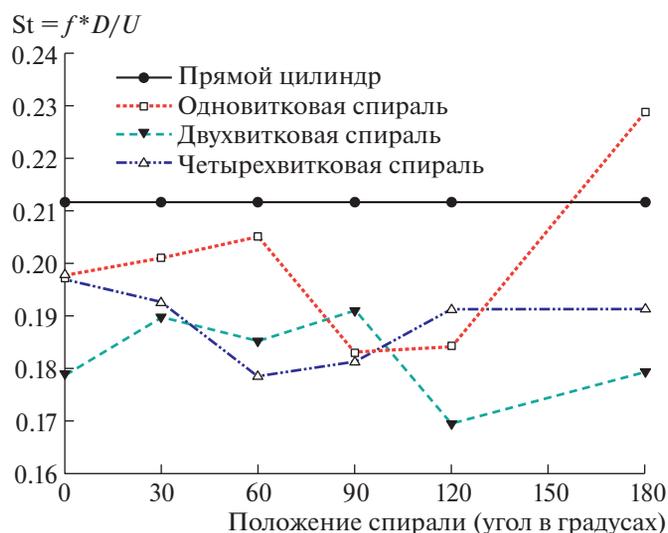


Рис. 17. Число Струхала в зависимости от положения угла спирали.

асимметрия структуры потока, что влияет на распределение турбулентных статистических линий. Число Струхала  $St$  изменяется в зависимости от  $\theta$  и принимает минимальное значение при  $\theta = 90^\circ$ . Таким образом, есть основания полагать, что единственный полукруглый цилиндр, образованный наматыванием на круговую структуру, может быть использован для уменьшения взаимодействия между потоком и рассматриваемой структурой и управления течением. Можно сделать вывод, что спиральные структуры на цилиндре оказывают существенное влияние на область вниз по потоку и уменьшают магнитуду пульсаций скорости, снижая таким образом частоту схода вихрей и соответствующее число Струхала. Можно также сделать вывод, что меньшие значения числа Струхала увеличивают способность поглощения вибраций в результате более низкой собственной частоты.

Настоящее исследование было поддержано комиссией по научно-исследовательским проектам Университета Sivas Cumhuriyet (CUBAP) в рамках проекта M-728.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Intern. Math. Kongr. Heidelberg. 1904. P. 484–491.
2. Chutkey K., Suriyanarayanan P., Venkatakrishnan L. Near wake field of circular cylinder with a forward splitter plate // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 2018. V. 173. № 2. P. 28–38.
3. Liang S., Wang J., Xu B., Wu W., Lin K. Vortex-induced vibration and structure instability for a circular cylinder with flexible splitter plates // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 2018. V. 174. № 3. P. 200–209.
4. Oruc V., Akilli H., Sahin B. PIV measurements on the passive control of flow past a circular cylinder // Exp. Therm. Fluid Sci. 2016. V. 70. P. 283–291.
5. Durhasan T., Aksoy M.M., Pinar E., Ozkan G.M., Akilli H., Sahin B. Vortex street suppression of a circular cylinder using perforated semi-circular fairing in shallow water // Exp. Therm. Fluid Sci. 2016. V. 79. P. 101–110.
6. Ren H., Xu Y., Zhang M., Fu S., Meng Y., Huang C. Distribution of drag coefficients along a flexible pipe with helical strakes in uniform flow // Ocean Eng. 2019. V. 184. P. 216–226.
7. Zhang H., Shi W. Numerical simulation of flow over a circular cylinder with a splitter plate near a moving wall // Ocean Eng. 2016. V. 122. P. 162–171.
8. Xing Y., Liu P., Guo H., Li L. Effect of helical cables on cylinder noise control // Appl. Acoust. 2017. V. 122. P. 152–155.
9. Firat E., Ozkan G.M., Akilli H. PIV measurements in the near wakes of hollow cylinders with holes // Exp. Fluids. 2017. V. 58. № 5. P. 1–19.
10. Li L., Liu P., Xing Y., Guo H. Experimental investigation on the noise reduction method of helical cables for a circular cylinder and tandem cylinders // Appl. Acoust. 2019. V. 152. P. 79–87.
11. Korkischko I., Meneghini J.R. Experimental investigation of flow-induced vibration on isolated and tandem circular cylinders fitted with strakes // J. Fluids Struct. 2010. V. 26. № 4. P. 611–625.

12. *Gozmen B., Akilli H., Sahin B.* Passive control of circular cylinder wake in shallow flow // *Measurement*. 2013. V. 46. № 3. P. 1125–1136.
13. *Huang S.* VIV suppression of a two-degree-of-freedom circular cylinder and drag reduction of a fixed circular cylinder by the use of helical grooves // *J. Fluids Struct.* 2011. V. 27. № 7. P. 1124–1133.
14. *Ekmekci A.* Circular cylinders fitted with small-scale straight and helical wires: A comparative study on the wire-induced critical effects // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2014. V. 53. P. 179–189.
15. *Liu K., Deng J., Mei M.* Experimental study on the confined flow over a circular cylinder with a splitter plate // *Flow Meas. Instrum.* 2016. V. 51. P. 95–104.
16. *Particle Image Velocimetry (PIV) Measurement Systems.* [Online]. Available: <https://www.dantecdynamics.com/particle-image-velocimetry>. [Accessed: 26-Jun-2020].
17. *Akilli H., Sahin B., Tumen N.F.* Suppression of vortex shedding of circular cylinder in shallow water by a splitter plate // *Flow Meas. Instrum.* 2005. V. 16. № 4. P. 211–219.
18. *Dong S., Karniadakis G.E., Ekmekci A., Rockwell D.* A combined direct numerical simulation–particle image velocimetry study of the turbulent near wake // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 569. P. 185–207.
19. *Canpolat C., Sahin B.* Influence of single rectangular groove on the flow past a circular cylinder // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2017. V. 64. P. 79–88.
20. *Yagmur S., Dogan S., Aksoy M.H., Goktepe I., Ozgoren M.* Comparison of flow characteristics around an equilateral triangular cylinder via PIV and Large Eddy Simulation methods // *Flow Meas. Instrum.* 2017. V. 55. P. 23–36.
21. *Ozgoren M., Okbaz A., Dogan S., Sahin B., Akilli H.* Investigation of flow characteristics around a sphere placed in a boundary layer over a flat plate // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2013. V. 44. № 8. P. 62–74.
22. *Blevins R.D.* *Flow-Induced Vibration*. Second Ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

*Перевод на русский язык Е.А.Пушкаря*