
СОДЕРЖАНИЕ

Номер 1, 2021

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

- О выборе параметров системы управления потоками заявок с помощью вероятностного выталкивающего механизма
В. С. Заборовский, О. И. Заяц, А. С. Ильяшенко, В. А. Мулюха 3
- Метод идентификации дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей
А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, А. Е. Шумский 11
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Оптимизация систем автоматического сопровождения воздушных объектов на основе локальных квадратично-биквадратных функционалов.
I. Синтез оптимального управления
В. С. Верба, В. И. Меркулов, Е. А. Руденко 24
- Оптимальное по быстродействию перемещение тележки с маятником
О. Р. Каюмов 30
- О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания
Э. К. Лавровский 42
- Новый алгоритм прогонки для решения непрерывной линейно квадратичной задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями
Ф. А. Алиев, Н. Ш. Гусейнова, И. А. Магеррамов, М. М. Муталлимов 52
-

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Исследование лидарных систем управляемого сканирования дорог для беспилотных автомобилей
В. Я. Ким, В. М. Лисицын, С. М. Мужичек, К. В. Обросов 60
-

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

- Алгоритм передачи многомерных данных с использованием экстремальных однородных гиперграфов
Е. К. Егорова, А. В. Мокряков, А. А. Суворова, В. И. Цурков 73
- Метод стохастического градиента с шагом Барзилай–Борвейна для безусловной нелинейной оптимизации
Л. Ванг, Х. Ву, И. А. Матвеев 79
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Методика построения вычислительных сценариев для моделирования экстремальных состояний в живых системах
А. Ю. Переварюха 91
-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Поиск границ радужной оболочки при помощи сверточных нейронных сетей
Ю. С. Ефимов, В. Ю. Леонов, Г. А. Одиноких, И. А. Соломатин 114
- Построение графов простых путей в транспортных сетях. I. Общие решения и примеры
И. А. Головинский 124
-

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Метод абдуктивного вывода в задачах объяснения наблюдаемого

С. Н. Васильев

160

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Управление рабочими режимами шарнирной ветроустановки

М. З. Досаев, Л. А. Климина, Е. С. Шалимова

169

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ**

УДК 519.872

**О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ПОТОКАМИ ЗАЯВОК С ПОМОЩЬЮ ВЕРОЯТНОСТНОГО
ВЫТАЛКИВАЮЩЕГО МЕХАНИЗМА**

© 2021 г. В. С. Заборовский^{а,*}, О. И. Заяц^{а,**}, А. С. Ильяшенко^а, В. А. Мулюха^а

^а Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: vlad@neva.ru

**e-mail: zayoleg@gmail.com

Поступила в редакцию 24.04.2020 г.

После доработки 01.07.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Телематическое устройство моделируется в виде двухпоточковой марковской одноканальной приоритетной системы массового обслуживания конечной емкости, снабженной вероятностным выталкивающим механизмом. Его вероятность выталкивания $0 \leq \alpha \leq 1$ является параметром управления системы массового обслуживания. Экспериментально и теоретически доказывается, что на плоскости коэффициентов загрузки по высокоприоритетному и низкоприоритетному трафику существуют такие области, внутри которых каждая из вероятностей потери зависит от параметра α линейным образом. Форма этих областей линейности детально изучается для случая абсолютного и относительного приоритета, для каждого из которых построены границы применимости линейного закона потерь. Получено оптимальное значение вероятности выталкивания α по критерию минимума вероятности потери высокоприоритетных требований при условии ограничения на вероятность потери низкоприоритетных заявок. Описанным методом осуществлялось удаленное управление робототехническими устройствами в условиях космического эксперимента “Контур” на борту Международной космической станции.

DOI: 10.31857/S0002338821010133

Введение. Под телематическим устройством далее будет пониматься любое устройство, работающее в сетевой среде, пропускающее через себя потоки сетевых пакетов и осуществляющее ту или иную их обработку (например, коммутацию или фильтрацию). Типичными примерами универсальных устройств такого рода могут служить межсетевые экраны или маршрутизаторы, причем как магистральные, так и периферийные. Между тем во многих прикладных задачах сетевой инженерии возникает необходимость изучения и более специальных образцов устройств телематики. Излагаемые в настоящей статье методы и алгоритмы первоначально предназначались для расчета телематических устройств, задействованных в серии космических экспериментов “Контур”, которые посвящены управлению робототехническими комплексами на борту Международной космической станции (МКС) [1]. Тем не менее, методы эти могут быть полезны и в более широком классе сетевых задач, которые хотя и отличаются по своему физическому содержанию от задач космической робототехники, но имеют сходное математическое описание. Речь идет, например, об обработке информационных потоков, возникающих при управлении движением летательных аппаратов, при автоматическом беспилотном вождении автотранспорта и других аналогичных упомянутым выше задачам.

Применяемые в инженерной практике сетевые технологии чрезвычайно разнообразны [2], причем они заметно опережают в своем развитии и практическом внедрении разработку соответствующих аналитических моделей и их теоретическое обоснование.

Хорошо известно, что основной аналитический метод исследования телематических устройств в настоящее время базируется на их трактовке как специфических систем массового обслуживания (СМО) [3, 4]. Требуемые для адекватного описания реального процесса обработки сетевых пакетов в таких системах модели СМО достаточно сложны и должны удовлетворять ряду общих ограничений.

Важнейшее из них состоит в том, что используемые при описании телематических устройств модели СМО должны быть многопоточными [5]. Дело в том, что суммарный поток на входе реально существующих телематических устройств, как правило, формируется несколькими независимыми источниками информации. Составляющие этого потока могут различаться по многим признакам: по скорости передачи через каналы связи, пропускной способности используемых виртуальных соединений, алгоритмам обработки в узлах коммутации, доступному объему буферной памяти, допустимому уровню потерь, способам защиты информации и целому ряду других свойств, подобных перечисленным выше.

Число таких маргинальных потоков в суммарном входящем информационном потоке телематического устройства, вообще говоря, может быть произвольным и зависит как от конкретного физического содержания решаемой сетевой задачи, так и от точности выбранной математической модели. В настоящей статье мы ограничимся простейшей моделью, включающей два потока. Так, например, в упомянутой выше задаче управления роботами на борту МКС [1] роль высокоприоритетного потока играл поток пакетов команд управления роботом и данных телеметрии, а роль низкоприоритетного потока – поток пакетов, фонового видеопотка, обеспечивающего саму возможность визуального наблюдения за происходящим на борту МКС.

Введение приоритетов между маргинальными потоками здесь является принципиально важным моментом при постановке задачи и моделирует реально применяемые алгоритмы диспетчеризации телематических устройств. Приоритет определенного вида запросов означает их предпочтение при обслуживании. Существует множество разновидностей приоритетов, основными из которых являются абсолютный и относительный [6, 7]. При абсолютном приоритете вновь поступившие высокоприоритетные требования прерывают обслуживание низкоприоритетных и вытесняют их с канала обслуживания. Относительный приоритет всего лишь ставит высокоприоритетные требования первыми в очередь на обслуживание, не прерывая при этом обработку низкоприоритетных запросов.

Приоритет в обслуживании часто дополняют введением выталкивающего механизма. Подробнее всего изучен детерминированный выталкивающий механизм [8]. Он означает, что вновь подошедшее высокоприоритетное требование всегда будет выталкивать низкоприоритетное из буфера, когда тот переполнен. Такой механизм порождает дилемму: если включить, то в буфере начнут преобладать высокоприоритетные требования, а если выключить, то там станут превалировать низкоприоритетные запросы. Между тем для эффективной работы телематического устройства необходим надлежащий баланс тех и других [5].

Для его достижения был предложен вероятностный (или рандомизированный) выталкивающий механизм, при котором выталкивание низкоприоритетных требований из накопителя происходит по случайному закону с некоторой заданной вероятностью $\alpha \in [0, 1]$. Последняя играет роль параметра управления и служит для тонкой настройки телематического устройства.

Впервые такой выталкивающий механизм был предложен в [9, 10]. В указанных работах он был реализован применительно к двухпоточковой марковской одноканальной СМО с относительным приоритетом. Авторы настоящей статьи ранее решили аналогичную задачу для случая абсолютного приоритета, характерного именно для задач управления сложными техническими системами, передающими информацию о своем состоянии через сетевую среду [11, 12]. Здесь следует отметить, что теория приоритетных СМО с вероятностным выталкивающим механизмом в последние годы существенно продвинулась вперед в плане усложнения моделей рассматриваемых систем. Были изучены более сложные разновидности приоритета, например чередующийся [13] и рандомизированный [14], учтен фактор повторных требований [15–18], а также возможность наличия отрицательных требований [19]. Все это позволяет при необходимости строго и корректно описать именно те алгоритмы диспетчеризации телематических устройств, которые требуются по самому смыслу решаемой сетевой задачи.

В задачах телематики особый интерес представляет расчет вероятностей потерь. В работах [9–12] был открыт интересный и практически значимый эффект. При некоторых значениях коэффициентов загрузки СМО по высокоприоритетному и низкоприоритетному трафику зависимость вероятностей потери от параметра выталкивания α оказалась близка к линейной. Это явление получило наименование “линейного закона потерь” и нашло экспериментальное подтверждение. Знание областей линейности позволяет рационально выбрать благоприятные режимы загрузки, в которых управление пакетными коммутациями существенно упрощается и ускоряется, причем в реальном времени.

Настоящая статья посвящена построению границ применимости линейного закона потерь для двухпоточковой марковской одноканальной СМО с абсолютным приоритетом [11, 12], имею-

щей, согласно классификации [8], сокращенное обозначение $\overline{M}_2/M/1/k/f_2^1$. Именно эта модель послужила в качестве исходной и базовой для всего цикла работ, посвященных управлению роботами на МКС. Она же представляет наибольший интерес в тех задачах, где требуется обеспечить максимальные преимущества высокоприоритетному потоку информации.

1. Описание модели системы массового обслуживания. Рассмотрим двухпотокую СМО конечной емкости k следующего вида. Пусть μ обозначает интенсивность обслуживания, λ_i – интенсивность i -го маргинального потока, а $\rho_i = \lambda_i/\mu$ – коэффициент загрузки по этому потоку при $i = 1, 2$. Состояние СМО будем характеризовать фазовым вектором $\overline{N} = \{N_1, N_2\}$, причем N_1 – число требований первого типа, а N_2 – число требований второго типа в системе. Финальные вероятности $P(N_1 = i, N_2 = j)$ будем обозначать через $P_{i,j}$ при $i = \overline{0, k}, j = \overline{0, k - i}$, так что суммарное число требований в системе $N_1 + N_2$ не превосходит ее емкости k . Вероятность потери требования l -го типа запишем как $P_{\text{пот}}^{(l)}$, где $l = \overline{1, 2}$. Приоритетным будем считать первый поток. Задача заключается в том, чтобы на плоскости загрузочных коэффициентов (ρ_1, ρ_2) найти те области, в пределах которых зависимость $P_{\text{пот}}^{(1)}$ и $P_{\text{пот}}^{(2)}$ от параметра α будет близка к линейной. Авторы работ [4, 5] высказали гипотезу, что это возможно только в слабозагруженной сети, когда значения ρ_i невелики. В действительности картина областей линейности оказывается гораздо более сложной.

При построении границ действия линейного закона потерь воспользуемся методом [11, 12]. Результаты применения указанного метода представим в наиболее общем и универсальном виде, изложив их в форме соответствующих теорем.

Т е о р е м а 1. Вероятности $P_{i,j}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 & -\{(\rho_1 + \rho_2)(1 - \delta_{j,k-i}) + [\alpha(1 - \delta_{j,k}) + (1 - \alpha)\delta_{i,0}]\delta_{j,k-i} + (1 - \delta_{i,0})(1 - \delta_{j,0})\} P_{i,j} + \\
 & + \rho_1 P_{i-1,j} + P_{i+1,j} + \rho_2 P_{i,j-1} + \delta_{i,0} P_{i,j+1} + \rho_1 \delta_{j,k-i} [\alpha + (1 - \alpha)\delta_{i,1}] P_{i-1,j+1} = 0, \\
 & i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{0, k - i},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\delta_{i,j}$ – дельта-символ Кронекера, а k – емкость накопителя системы.

Для реальных значений k найти $P_{i,j}$ непосредственно из системы (1.1) затруднительно. С ростом k быстро растет ее порядок, равный $(k + 1)(k + 2)/2$, а также погрешность вычислений. Последняя максимальна для вероятностей $P_{i,j}$ с наибольшим суммарным индексом $i + j = k$, которые как раз и определяют вероятности потери.

2. Метод производящих функций. Удобнее решать задачу методом производящих функций [5, 9–12]. Используя уравнения (1.1), производящая функция вероятностей $P_{i,j}$

$$G_k(u, v) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} P_{i,j} u^i v^j \tag{2.1}$$

может быть преобразована к некоторому специальному дробно-полиномиальному виду, задаваемому следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. Производящая функция (2.1) представима в виде дроби

$$G_k(u, v) = \frac{R_{k+2}(u, v)}{R_2(u, v)}, \tag{2.2}$$

числитель и знаменатель которой таковы:

$$\begin{aligned}
 R_{k+2}(u, v) = & (u - v)[G_k(0, v) - \alpha \rho_1 u^{k+1} P_{k,0} + (1 - \alpha) \rho_1 v^k u P_{0,k}] + u(v - 1)G_k(0, 0) + \\
 & + [\alpha \rho_1(u - v) + \rho_1(1 - u)v + \rho_2(1 - v)v] u \sum_{i=0}^k P_{i,k-i} u^i v^{k-i},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$R_2(u, v) = v[\rho_1 u(1 - u) + \rho_2 u(1 - v) + (u - 1)], \tag{2.4}$$

причем индексы полиномов указывают на их порядок по аргументу u .

Знаменатель (2.4) имеет относительно u два корня, однако они не могут быть полюсами G . Точно такие же корни должны иметь и числитель дроби (2.3), иначе функция (2.2) не являлась

бы полиномом, как того требует ее определение (2.1). Устраняя полюса так, как это описано в [6, 7], получим

$$G_k(u, v) = R_k(u, v), \quad (2.5)$$

причем полином R_k содержит только так называемые “опорные” вероятности $p_i = P_{k-i,i}$, суммарный индекс которых $i + j = k$. Приравнивая коэффициенты при комбинациях степеней вида $u^{k-i}v^i$ в обеих частях равенства (2.5), получим “укороченную” систему уравнений относительно только опорных вероятностей p_i , имеющую порядок всего лишь $k + 1$. Конкретный вид укороченной системы задается следующим утверждением.

Т е о р е м а 3. Вероятности p_i подчиняются системе линейных уравнений вида

$$\sum_{j=0}^i a_{i,j} p_j - \alpha \sum_{j=1}^{i+1} b_{i,j} p_j - (1 - \alpha) \delta_{i,k-i} p_k = (1 - \rho)(1 - \rho^{k+1})^{-1} \rho^i, \quad i = \overline{0, k}. \quad (2.6)$$

При $i = k$ коэффициенты (2.6) постоянны, а именно $a_{k,j} \equiv 1$, $b_{k,j} \equiv 0$, а при всех остальных значениях индексов $0 \leq i \leq k - 1$ они выражаются в виде

$$a_{i,j} = \sum_{s=j}^i \rho_1^{\frac{i-k+j-s-1}{2}} \left(c_{k-i-1}^{s-j+1} - \rho_1^{\frac{1}{2}} c_{k-i-2}^{s-j+1} \right) \beta^{s-j}, \quad j = \overline{0, i},$$

$$b_{i,j} = \rho^{\frac{j-k}{2}} c_{k-i-1}^{i-j+2} \beta^{i-j+1}, \quad j = \overline{1, i+1}, \quad (2.7)$$

где $\beta = -\rho_2 \rho_1^{-1/2}$, $c_i^s = C_i^s(t_0)$, $t_0 = (1 + \rho) \rho_1^{-1/2} / 2$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, причем $C_i^s(x)$ обозначает полином Генбауэра порядка i от аргумента x с индексом s .

Искомые вероятности потери выражаются через опорные вероятности p_i , удовлетворяющие системе (2.8)–(2.9), линейным образом. Эти выражения имеют вид некоторой линейной комбинации опорных вероятностей, коэффициенты которой даются следующей теоремой.

Т е о р е м а 4. Вероятности потери требований обоих типов даются выражениями

$$P_{\text{пот}}^{(1)} = p_0 + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{k-1} p_i, \quad (2.8)$$

$$P_{\text{пот}}^{(2)} = (1 - \rho)(1 - \rho^{k+1})^{-1} \rho^k + \alpha \rho_1 \rho_2^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} p_i + p_k \rho_1 \rho_2^{-1}. \quad (2.9)$$

3. Численные результаты. В процессе исследования рассматриваемой модели СМО были выявлены два практически интересных режима загрузки, при которых ее поведение оказалось качественно различным. Указанные режимы представлены на рис. 1. Эти режимы проявляют себя только при достаточно сильной загрузке системы, которая превышает ее номинальную пропускную способность, т.е. когда суммарная загрузка $\rho_1 + \rho_2 > 1$.

Исходя из выражений (2.8), (2.9) видно, что вероятности потери $Q_{\text{пот}}^{(i)}(\alpha, \rho_1, \rho_2)$ при любом k зависят от трех параметров. Построим их линейную аппроксимацию по первому параметру α в следующем виде:

$$Q_{\text{пот}}^{(i)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) P = P_{\text{пот}}^{(i)}(0, \rho_1, \rho_2) + \alpha [P_{\text{пот}}^{(i)}(1, \rho_1, \rho_2) - P_{\text{пот}}^{(i)}(0, \rho_1, \rho_2)], \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Ее точность будем характеризовать максимумом относительной погрешности по всем допустимым значениям вероятности выталкивания:

$$\Delta_i(\rho_1, \rho_2) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} |1 - Q_{\text{пот}}^{(i)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) / P_{\text{пот}}^{(i)}(0, \rho_1, \rho_2)|, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Тогда проверка линейности закона потерь сведется к построению линий уровня функций Δ_i и выявлению тех областей, где погрешность $\Delta_i < \varepsilon$ (далее примем $\varepsilon = 0.01$).

Линии уровня Δ_1 и Δ_2 для системы с абсолютным приоритетом при $k = 31$ приведены на рис. 2 (области линейности закрашены белым цветом). Для сравнения на рис. 3 построены аналогичные области в случае относительного приоритета [4, 5]. Области линейности не оказываются локализованными вблизи начала координат, как это предполагалось первоначально в

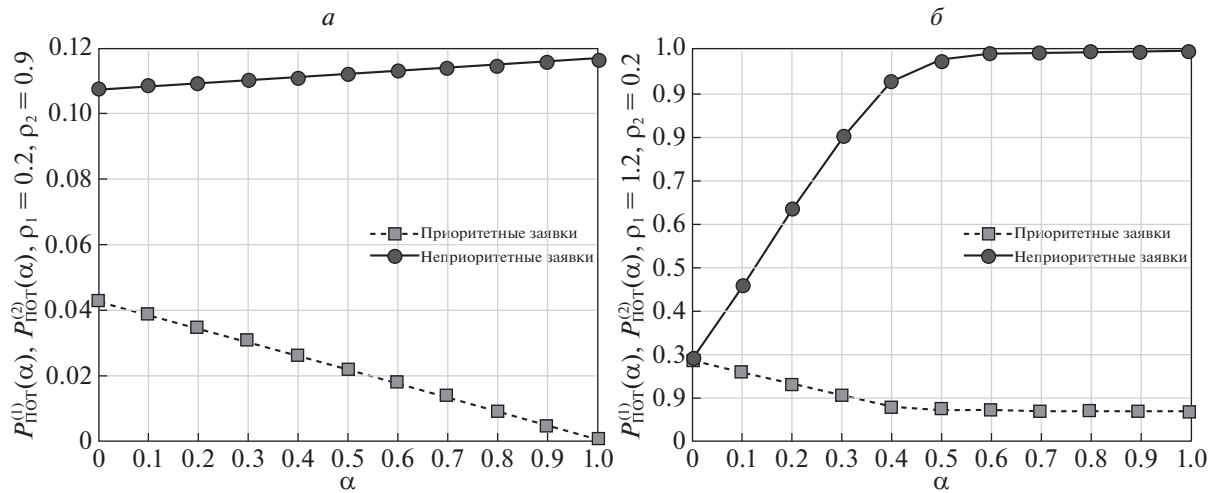


Рис. 1. Вероятность потери заявок для системы с абсолютным приоритетом: а – при загрузке $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$; б – при загрузке $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$

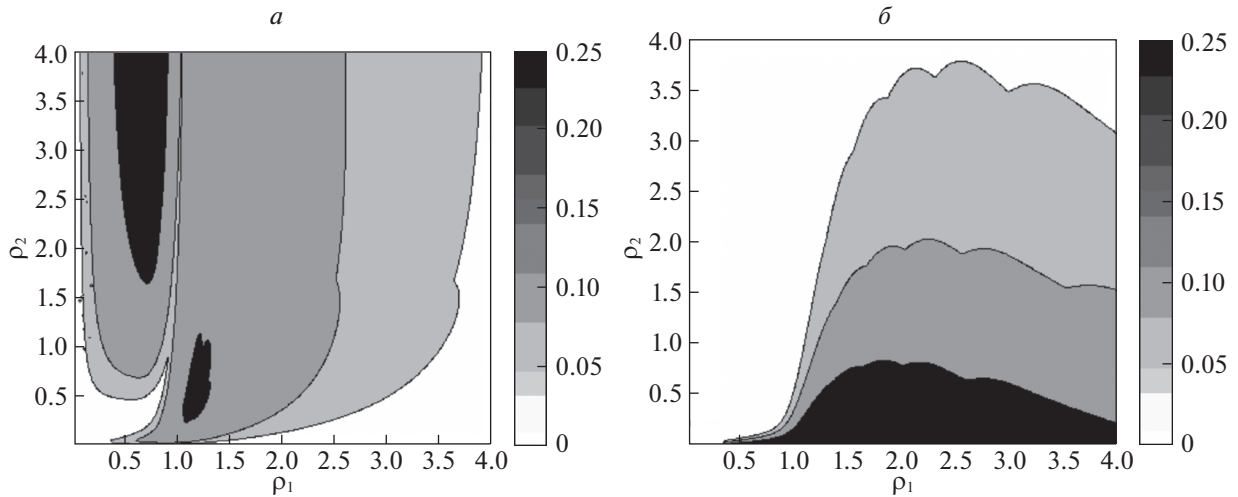


Рис. 2. Линии уровня функции Δ_i для системы с абсолютным приоритетом: а – $i = 1$; б – $i = 2$

работах [5, 9, 10], а вытянуты вдоль координатных осей ρ_1 и ρ_2 . Усиление приоритета с относительного до абсолютного приводит к некоторому их сужению.

Коэффициенты линейной аппроксимации (3.2) можно вычислить аналитически, поскольку как при нулевой, так и при единичной вероятности выталкивания рассматриваемая СМО превращается в классические системы, обладающие известным точным решением. Поэтому в пределах областей линейности анализ потерь пакетов сведется к тривиальным алгебраическим вычислениям. Это кардинально упрощает управление пакетными коммутациями и резко повышает оперативность управления. Описанный метод был применен при решении задач удаленного управления робототехническими комплексами на борту МКС в рамках космического эксперимента “Контур” [1, 5, 11, 12]. В этом эксперименте приоритетный поток был образован пакетами управления и телеметрии, которые передавались с помощью транспортного протокола TCP (transmission control protocol). Фоновый видеопоток составили пакеты по протоколу UDP (user datagram protocol). Был сконструирован специальный прибор, на панель управления которого был выведен регулятор, позволяющий плавно менять вероятность выталкивания. С его помощью оператор стремился достичь надлежащего компромисса между устойчивостью управления роботом, с одной стороны, и качественным, хорошо читаемым видеоизображением, с другой стороны. На основе последнего оператор и принимал свои управленческие решения.

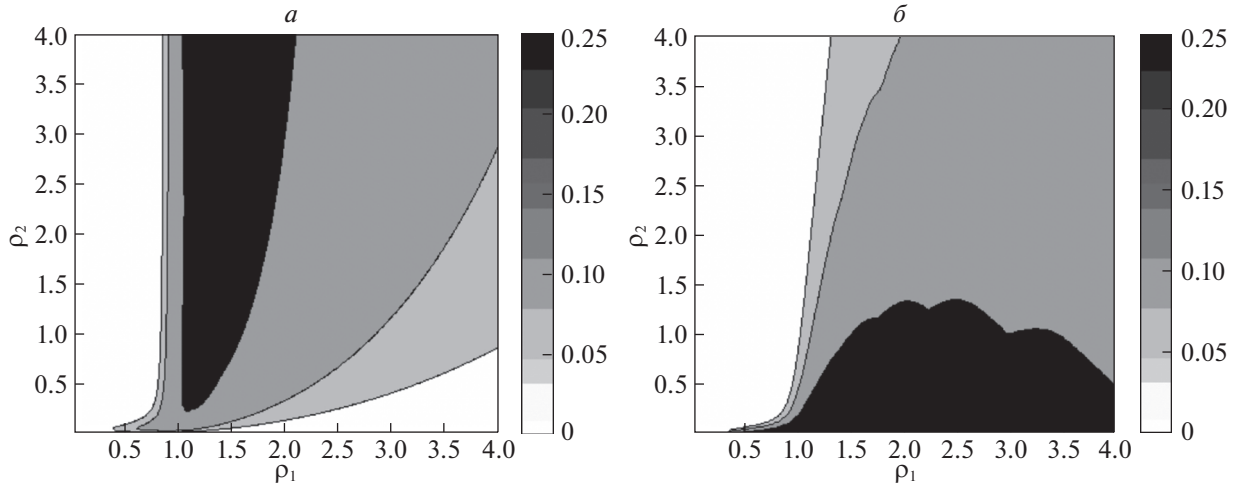


Рис. 3. Линии уровня функции Δ_i для системы с относительным приоритетом: $a - i = 1$; $b - i = 2$

4. Оптимальная настройка вероятностного выталкивающего механизма. Введение вероятностного выталкивающего механизма в контур управления телематическим устройством приводит к появлению еще одного дополнительного параметра задачи – вероятности выталкивания α , которую здесь удобно использовать в качестве параметра управления системой. Процесс принятия оператором решения, касающегося выбора конкретного числового значения α , можно автоматизировать. Для этого предлагается поставить и решить задачу оптимальной настройки вероятностного выталкивающего механизма. Задача эта заключается в подборе оптимального значения вероятности выталкивания α при заданных коэффициентах загрузки ρ_1 и ρ_2 , а также заданной емкости системы k . При этом необходимо ограничить сверху вероятность потерь для низкоприоритетных требований соответствующим критическим значением $P_{кр}$. В результате приходим к следующей оптимизационной задаче на условный экстремум:

$$P_{пот}^{(1)}(\alpha; \rho_1, \rho_2) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad (4.1)$$

$$P_{пот}^{(2)}(\alpha; \rho_1, \rho_2) \leq P_{кр}. \quad (4.2)$$

Выбор конкретного числового значения вероятности $P_{кр}$ определяется физическим содержанием решаемой задачи, а также теми инженерными и техническими ограничениями, которые накладываются на функционирование системы. Например, в упоминавшейся выше задаче об управлении роботами на борту МКС [1] появление ограничения (4.2) проистекало из необходимости иметь устойчивую визуальную картину всего происходящего на борту космической станции.

По смыслу решаемой задачи параметр $P_{кр}$ может принимать произвольные значения из интервала $(0, 1)$. Пусть вначале он удовлетворяет неравенству

$$P_{пот}^{(2)}(0; \rho_1, \rho_2) \leq P_{кр} < P_{пот}^{(2)}(1; \rho_1, \rho_2). \quad (4.3)$$

Очевидно, в задаче (4.1), (4.2) целевая функция, а также функция, задающая ограничение (4.2), являются монотонными относительно аргумента α . Это может быть подтверждено как логически по самому физическому смыслу понятия вероятности выталкивания, так и численно приведенными результатами вычислений (см. рис. 1). Поэтому решение поставленной задачи оптимизации $\alpha = \alpha_{opt}$, когда $P_{кр}$ удовлетворяет (4.3), будет определяться из решения нелинейного уравнения вида

$$P_{пот}^{(2)}(\alpha_{opt}; \rho_1, \rho_2) = P_{кр}. \quad (4.4)$$

Теперь допустим, что заданное по условию критическое значение выходит за пределы интервала (4.3). Если оно превышает его верхнюю границу, т.е.

$$P_{кр} \geq P_{пот}^{(2)}(1; \rho_1, \rho_2), \quad (4.5)$$

то тогда вся кривая потерь низкоприоритетных требований будет лежать ниже уровня $P_{кр}$ и условие (4.2) будет выполняться автоматически при всех α . Следовательно, оптимальное значение $\alpha_{opt} = 1$ и оптимальным будет детерминированный выталкивающий механизм, предложенный Г.П. Башариным [8]. В противном случае, когда $P_{кр}$ лежит ниже левой границы интервала (4.3) и выполняется условие

$$P_{кр} \leq P_{пот}^{(2)}(0; \rho_1, \rho_2), \quad (4.6)$$

кривая потерь низкоприоритетных требований целиком лежит выше критического уровня и задача (4.1), (4.2), строго говоря, не имеет решения. Здесь нужно либо изменить коэффициенты загрузки, либо, если это допустимо, подкорректировать критический уровень $P_{кр}$, увеличив его до левой границы интервала (4.3). При этом $\alpha_{opt} = 0$, а оптимальным становится полное отсутствие выталкивания, которое также разбиралось в [8].

В разд. 3 были построены области действия линейного закона потерь. Если выбирать коэффициенты загрузки (ρ_1, ρ_2) только из этих областей, то решение задачи оптимизации существенно упрощается, так как уравнение (4.4) превращается в линейное алгебраическое уравнение и решается тривиально в явном виде. Допустим, что критический уровень потерь низкоприоритетных требований удовлетворяет неравенству (4.3). Тогда, используя линейную аппроксимацию кривой потерь вида (3.1), получаем следующее оптимальное значение вероятности выталкивания:

$$\alpha_{opt} = \frac{P_{кр} - P_{пот}^{(2)}(0; \rho_1, \rho_2)}{P_{пот}^{(2)}(1; \rho_1, \rho_2) - P_{пот}^{(2)}(0; \rho_1, \rho_2)}. \quad (4.7)$$

Входящие в это выражение вероятности потери при граничных значениях параметра выталкивания $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, разумеется, могут быть подсчитаны методом, изложенным в настоящей статье, однако гораздо проще взять готовые аналитические выражения, имеющиеся в литературе. Для системы с абсолютным приоритетом и детерминированным выталкивающим механизмом ($\alpha = 1$) они приведены в [5], а для такой же системы без выталкивания можно воспользоваться классическими результатами из [20, 21].

Следует отметить, что полученные в настоящей статье формулы оптимальной настройки вероятностного выталкивающего механизма полностью сохраняют свою силу и для других видов приоритета, если только система работает в условиях действия линейного закона потерь. Границы действия линейного закона потерь были ранее построены авторами для целого ряда разновидностей приоритетов, которые выходят за рамки настоящей статьи: для чередующегося приоритета [13], рандомизированного приоритета [14], а также для абсолютного и относительного приоритетов при наличии повторных [15–18] и отрицательных [19] требований.

Заключение. В статье рассмотрен метод расчета характеристик телематического устройства, моделируемого с помощью двухпоточковой системы массового обслуживания конечной емкости. Первый поток считается высокоприоритетным и обладает абсолютным приоритетом по обслуживанию, а также приоритетом по постановке в очередь в форме так называемого вероятностного выталкивающего механизма. Последний означает, что вновь подошедшее высокоприоритетное требование, заставшее накопитель полностью заполненным, имеет право вытеснить оттуда одно из низкоприоритетных требований с заданной вероятностью α . Эта вероятность может служить весьма эффективным параметром управления информационными потоками на входе телематического устройства. Надлежащий выбор α позволяет рационально управлять высокоприоритетным трафиком, не ущемляя при этом низкоприоритетный трафик. Как показывают расчеты, чувствительность сети к выбору вероятности вытеснения оказывается существенно более высокой, чем к выбору типа приоритета по обслуживанию. Важно заметить, что в предлагаемом способе управления телематическое устройство удается плавно настроить на желаемый режим его функционирования. Для случая марковской модели системы в статье предложен эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий сетевым инженерам и проектировщикам без особых усилий оценивать возможные варианты эксплуатации разнообразных устройств телематики. Он основан на построении областей действия линейного закона потерь, в которых вероятность потери обоих типов запросов линейным образом зависит от параметра α . Для рассмотренной системы поставлена и аналитически решена задача управления вероятностью потери высокоприоритетных требований при наличии ограничения на потери низкоприоритетных заявок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zaborovsky V., Muliukha V., Ilyashenko A.* Cyber-physical Approach in a Series Space Experiments “Kontur” // Lecture notes in computer science. 2015. V. 9247. P. 745–758.
2. *Tanenbaum A.S., Wetherall D.J.* Network Computers. Boston: Prentice Hall, 2011.
3. *Сущенко С.П.* Математические модели компьютерных сетей. Томск: Изд-во ТГУ, 2017. 272 с.
4. *Вишневецкий В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
5. *Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С.* Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Ч. 1 // Программная инженерия. 2012. № 2. С. 22–27.
6. *Джейсуол Н.* Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973. 280 с.
7. *Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф.* Приоритетные системы обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 1973. 448 с.
8. *Баширин Г.П.* Некоторые результаты для систем с приоритетом // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.: Наука, 1969. С. 39–53.
9. *Avrachenkov K.E., Shevlyakov G.L., Vilchevsky N.O.* Randomized Push-out Disciplines in Priority Queueing // Mathematical Science. 2004. V. 122. № 4. P. 3336–3342.
10. *Avrachenkov K.E., Vilchevsky N.O., Shevlyakov G.L.* Priority Queueing with Finite Buffer Size and Randomized Push-out Mechanism // Performance Evaluation. 2005. V. 61. № 1. P. 1–16.
11. *Ilyashenko A., Zayats O., Muliukha V., Laboshin L.* Further Investigations of the Priority Queueing System with Preemptive Priority and Randomized Push-out Mechanism // Lecture Notes in Computer Science. 2014. V. 8638. P. 433–443.
12. *Muliukha V., Ilyashenko A., Zayats O., Zaborovsky V.* Preemptive Queueing System with Randomized Push-out Mechanism // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V. 21. № 1/3. P. 147–158.
13. *Ilyashenko A., Zayats O., Muliukha V., Lukashin A.* Alternating Priorities Queing System with Randomized Push-out Mechanism // Lecture Notes in Computer Science. 2015. V. 9247. P. 436–445.
14. *Ilyashenko A., Zayats O., Muliukha V.* Randomized Priorities in Queueing System with Randomized Push-out Mechanism // Lecture Notes in Computer Science. 2016. V. 9870. P. 230–237.
15. *Zayats O., Korenevskaya M., Ilyashenko A., Lukashin A.* Retrial Queueing System in Series of Space Experiments “Kontur” // Procedia Computer Science. 2017. V. 103. P. 562–568.
16. *Ilyashenko A., Zayats O., Korenevskaya M., Muliukha V.* A Retrial Queueing System with Preemptive Priority and Randomized Push-out Mechanism // Lecture Notes in Computer Science. 2017. V. 10531. P. 432–440.
17. *Korenevskaya M., Zayats O., Ilyashenko A., Muliukha V.* The Phenomenon of Secondary Flow Explosion in Retrial Priority Queueing System with Randomized Push-out Mechanism // Lecture Notes in Computer Science. 2018. V. 11118. P. 236–246.
18. *Korenevskaya M., Zayats O., Ilyashenko A., Muliukha V.* Retrial Queueing System with Randomized Push-out Mechanism and Non-preemptive Priority // Procedia Computer Science. 2019. V. 150. P. 716–725.
19. *Shorenko P., Zayats O., Ilyashenko A., Muliukha V.* Preemptive Queueing System with Randomized Push-out Mechanism and Negative Customers // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11660. P. 305–317.
20. *White H., Christie L.S.* Queueing with Preemptive Priorities or with Breakdown // Operation Research. 1958. V. 6. № 1. P. 79–95.
21. *Stephan F.F.* Two Queues Under Preemptive Priority with Poisson Arrival and Service Rates // Operations Research. 1958. V. 6. № 3. P. 399–418.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 519.7

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ¹

© 2021 г. А. Н. Жирабок^{a,b,*}, А. В. Зуев^{b,c}, А. Е. Шумский^a

^a Дальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

^b Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

^c ун-т Иннополис, Иннополис, Республика Татарстан, Россия

*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию 18.07.2019 г.

После доработки 20.07.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассматривается задача функционального диагностирования технических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, в присутствии возмущений. Для решения задачи идентификации дефектов используются скользящие наблюдатели. Предлагаемый подход базируется на идее построения редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, обладающей избирательной чувствительностью по отношению к дефектам и возмущению, на основе которой строится скользящий наблюдатель. Кроме уменьшения размерности средств диагностирования предлагаемый подход позволяет ослабить ограничения, накладываемые на исходную систему, для возможности построения скользящих наблюдателей.

DOI: 10.31857/S0002338821010145

Введение. Настоящая публикация является логическим продолжением статьи [1], посвященной разработке методов построения так называемых скользящих наблюдателей, работающих в скользящем режиме и использующих особенности этого режима [2], и предназначенных для решения задачи идентификации дефектов. Указанные наблюдатели описываются дифференциальным уравнением с разрывной правой частью и обеспечивают возникновение в системе скользящего режима при соблюдении определенных условий. Системы, в которых возникает скользящий режим, в русскоязычной литературе называются системами с переменной структурой, поэтому такие наблюдатели также можно назвать наблюдателями с переменной структурой.

Последние 20 лет скользящие наблюдатели активно применяются для решения задачи идентификации дефектов в различных системах – линейных [3, 4], нелинейных [5–7], сингулярных [8], а также ряде практических приложений [9–12]. Во всех этих публикациях на исходную систему накладывается ряд ограничений, обсуждаемых ниже.

В этой статье метод на основе скользящих наблюдателей используется для решения задач идентификации дефектов в нелинейных системах при действии на них возмущений. Как и в [1], в основе предлагаемого подхода лежит идея применения редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, что дает возможность уменьшить размерность скользящих наблюдателей по сравнению с известными работами [3–8], где строятся наблюдатели полного порядка. За счет этого удается ослабить ограничения, накладываемые на системы, по сравнению с теми, которые накладываются известными методами [3, 4, 7], и расширить класс систем, для которых можно построить скользящие наблюдатели. Последнее объясняется тем, что исходная система может обладать свойствами, которые не совместимы с требованиями, накладываемыми в работах [3, 4, 7]. В то же время модель минимальной размерности такими свойствами не будет обладать.

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект 16-19-00046-П – разработан метод построения скользящих наблюдателей) и Российским фондом фундаментальных исследований, проект 20-38-70161 (выполнен синтез наблюдателей для диагностирования электропривода).

1. Скользящие наблюдатели, основные соотношения. Рассмотрим класс технических систем, описываемых нелинейной моделью

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \quad y(t) = Hx(t). \quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; $F \in R^{n \times n}$, $G \in R^{n \times m}$, $D \in R^{n \times q}$, $L \in R^{n \times p}$ и $H \in R^{l \times n}$ – известные постоянные матрицы; $d(t) \in R^q$ – вектор-функция, описывающая дефекты: при их отсутствии $d(t) = 0$, при появлении дефекта $d(t)$ становится неизвестной функцией времени; $\rho(t) \in R^p$ – неизвестная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения, $\Psi(x, u)$ – нелинейная составляющая:

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \dots \\ \varphi_s(A_s x, u) \end{pmatrix},$$

A_1, \dots, A_s – матрицы-строки; $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции, удовлетворяющие условию Липшица по аргументу x , откуда следует, что функция $\Psi(x, u)$ также удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|\Psi(x, u) - \Psi(x', u)\| \leq N \|x - x'\|, \quad (1.2)$$

$N \geq 0$ – некоторая константа. Предполагается, что известны и ограничены нормы $\|d(t)\|$ и $\|\rho(t)\|$ векторов $d(t)$ и $\rho(t)$.

Для ряда практических значимых функций условие (1.2) не выполняется, однако выполняется обобщенное условие Липшица:

$$\|\Psi(x, u) - \Psi(x', u)\| \leq N \|x - x'\| + M, \quad (1.3)$$

где $M \geq 0$ – некоторая константа. В дальнейшем, говоря об условии (1.3), мы будем рассматривать только упомянутые функции.

Отметим, что появление функции $d(t) \neq 0$ обусловлено изменением параметров системы из-за каких-либо происходящих в ней неблагоприятных процессов. Если, например, изменение входящих в матрицу F параметров вызвало ее вариацию $\Delta F(t)$, то $Dd(t) = \Delta F(t)x(t)$ (см. соотношение (6.3) в примере). Такое представление дефектов нередко используется как в отечественной, так и зарубежной литературе по технической диагностике [13, 14].

Коротко напомним основные результаты из [7], используемые в настоящей работе. Предполагается, что дефект $d(t)$ скалярный, $q = 1$ и $\text{rank}(HL) = \text{rank}(L)$, что позволяет представить систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= F_{11}z_1(t) + F_{12}z_2(t) + G_1u(t) + f_1(x, u) + D_1d(t), & w_1(t) &= H_{11}z_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= F_{21}z_1(t) + F_{22}z_2(t) + G_2u(t) + f_2(x, u) + D_2d(t) + L_2\rho(t), & w_2(t) &= H_{22}z_2(t), \end{aligned}$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ – векторы состояния и выходов соответствующих подсистем, $z_1(t) \in R^{n-q}$, $z_2(t) \in R^q$, $z(t) = (z_1^T(t) \ z_2^T(t))^T = Tx(t)$, $(w_1^T(t) \ w_2^T(t))^T = Sy(t)$ для некоторых невырожденных матриц T и S , $(f_1^T(x, u) \ f_2^T(x, u))^T = TC\Psi(x(t), u(t))$. Дополнительно предполагается, что пары (F_{11}, H_{11}) и (F_{22}, H_{22}) наблюдаемы, а функции $f_1(x, u)$ и $f_2(x, u)$ удовлетворяют условию Липшица по аргументу x :

$$\|f_1(x, u) - f_1(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_1 \|x - \hat{x}\|, \quad \|f_2(x, u) - f_2(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_2 \|x - \hat{x}\|$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Далее для каждой из подсистем строятся скользящие наблюдатели полного порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1(t) &= F_{11}\hat{z}_1(t) + F_{12}\hat{z}_2(t) + G_1u(t) + f_1(T^{-1}\hat{z}, u) + D_1v_1(t) + W_1(w_1(t) - \hat{w}_1(t)), & \hat{w}_1(t) &= H_{11}\hat{z}_1(t), \\ \dot{\hat{z}}_2(t) &= F_{21}\hat{z}_1(t) + F_{22}\hat{z}_2(t) + G_2u(t) + f_2(T^{-1}\hat{z}, u) + D_2v_2(t) + W_2(w_2(t) - \hat{w}_2(t)), & \hat{w}_2(t) &= H_{22}\hat{z}_2(t), \end{aligned}$$

где $\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t), \hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t)$ – векторы состояния и выходов подсистем наблюдателя,

$$v_1(t) = \begin{cases} -g_1 \frac{Q_1 e_{w_1}(t)}{\|Q_1 e_{w_1}(t)\|}, & \text{если } e_{w_1}(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad v_2(t) = \begin{cases} -g_2 \frac{Q_2 e_{w_2}(t)}{\|Q_2 e_{w_2}(t)\|}, & \text{если } e_{w_2}(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$e_{w_1}(t) = \hat{w}_1(t) - w_1(t), e_{w_2}(t) = \hat{w}_2(t) - w_2(t)$ – ошибки наблюдения выходов, матрицы усиления W_1 и W_2 выбираются так, чтобы сделать матрицы $F_{11} - W_1 H_{11}$ и $F_{22} - W_2 H_{22}$ устойчивыми (это возможно из-за наблюдаемости пар (F_{11}, H_{11}) и (F_{22}, H_{22})), Q_1 и Q_2 выбираются так, что для некоторых симметрических положительно-определенных матриц P_1 и P_2 выполняются равенства

$$P_1 D_1 = H_{11}^T Q_1^T, \quad P_2 D_2 = H_{22}^T Q_2^T. \tag{1.4}$$

Константы g_1 и g_2 выбираются из условий $g_1 > \gamma_2, g_2 > \gamma_1 + \gamma_2$.

В [7] доказывается, что при определенных дополнительных предположениях оценка функции $d(t)$ может быть представлена в виде

$$\hat{d}(t) = -g_1 \frac{Q_1 e_{w_1}(t)}{\|Q_1 e_{w_1}(t)\| + \delta},$$

где δ – малый положительный скаляр.

В настоящей работе по аналогии с [7] задача идентификации дефекта решается при наличии возмущений, однако предположение $\text{rank}(HL) = \text{rank}(L)$ не делается и функция $d(t)$ может быть векторной. Кроме того, строится только один скользящий наблюдатель, причем пониженной размерности, позволяющий оценить векторную функцию $d(t)$. Рассмотрим вначале эту задачу для случая скалярной функции $d(t)$.

2. Построение редуцированной модели в случае скалярного дефекта $d(t)$. Решение поставленной задачи опирается на редуцированную модель системы (1.1), которая в общем случае описывается уравнением

$$\dot{x}_*(t) = F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + C_* \Psi(x_*(t), y(t), u(t)) + D_* d(t) + L_* \rho(t), \tag{2.1}$$

$$y_*(t) = H_* x_*(t),$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния меньшей размерности $k < n$, F_*, G_*, J_*, H_*, D_* и L_* – матрицы, подлежащие определению, функция $C_* \Psi(x_*, y, u)$ имеет вид

$$C_* \Psi(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \Phi_{i_1} (A_{*1i_1} x_* + A_{*2i_1} y, u) \\ \dots \\ \Phi_{i_p} (A_{*1i_p} x_* + A_{*2i_p} y, u) \end{pmatrix},$$

$A_{*1i_1}, A_{*2i_1}, \dots, A_{*1i_p}, A_{*2i_p}$ – матрицы, подлежащие определению, i_1, \dots, i_p – номера нелинейностей, входящих в модель (2.1). Как обычно [15], предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений выполняются равенства $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_* y(t)$ для некоторых матриц Φ и R_* . Известно [15, 16], что эти матрицы удовлетворяют условиям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad R_* H = H_* \Phi, \quad G_* = \Phi G, \quad D_* = \Phi D, \quad L_* = \Phi L,$$

$$A_{*i} = (A_{*1i} \ A_{*2i}) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, i_p}, \quad C_* = \Phi C. \tag{2.2}$$

Рассмотрим метод построения модели (2.1) минимальной размерности, не чувствительной к возмущениям, на основе которой может быть построен скользящий наблюдатель. Для анализа возможности построения такой модели введем матрицу L_0 максимального ранга, такую, что $L_0 L = 0$. Известно [15], что условие нечувствительности к возмущениям имеет вид $\Phi L = 0$; тогда из мак-

симальности ранга матрицы L_0 следует $\Phi = TL_0$ для некоторой матрицы T . Заменим матрицу Φ в выражении $R_*H = H_*\Phi$ на TL_0 : $R_*H = H_*TL_0$ и перепишем его в виде

$$(R_* \ -H_*T) \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда между строками матриц H и L_0 существует линейная зависимость, откуда следует, что критерием его нетривиального решения является условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(L_0). \quad (2.3)$$

Аналогично уравнение $\Phi F = F_*\Phi + J_*H$ после указанной подстановки приводится к виду

$$(T \ -FT \ -J_*) \begin{pmatrix} L_0F \\ L_0 \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

а условием его нетривиального решения есть неравенство

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0F \\ L_0 \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0F) + \text{rank} \begin{pmatrix} L_0 \\ H \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Условия (2.3) и (2.4) являются необходимыми, т.е. их выполнение не гарантирует возможности построения модели, не чувствительной к возмущениям, поскольку в уравнения, на основе которых они получены, входит неизвестная матрица T . Если хотя бы одно из условий (2.3), (2.4) не выполняется, модели, не чувствительной к возмущениям, не существует. Ниже предполагается, что эти условия верны, т.е. явные препятствия для построения модели с указанным свойством отсутствуют.

Отметим также, что простые достаточные условия возможности построения модели, не чувствительной к возмущениям, имеют вид $HL = 0$ и $FL = 0$, что следует из уравнений (2.6), приведенных ниже, но эти условия достаточно редко выполняются на практике.

Для упрощения процедуры построения модели матрицы F_* и H_* ищутся в канонической форме следующего вида:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0);$$

предполагается вначале, что выход y_* — скаляр.

Для определения остальных матриц воспользуемся логико-динамическим подходом [16], согласно которому вначале находятся матрицы Φ , R_* и J_* , описывающие линейную часть системы, затем проверяется возможность построения нелинейной составляющей $\Psi(x_*, y, u)$ и при положительном исходе проверки строятся матрицы C_* и A_{*i} , $i = \overline{1, s}$.

Используя (2.5), получим из (2.2) уравнения для строк матриц Φ и J :

$$\Phi_1 = R_*H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = \overline{2, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k}H. \quad (2.6)$$

Известно [1, 15], что строка $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})$ удовлетворяет уравнению

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})(V^{(k)} \ B^{(k)}) = 0, \quad (2.7)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2L & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & \dots & HF^{k-2}L \\ 0 & 0 & HL & \dots & HF^{k-3}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \ B^{(k)}) < l(k + 1). \tag{2.8}$$

Число k не превышает $n - 1$; это связано с тем, что модель должна быть не чувствительной к возмущениям, а при $k = n$ она будет заведомо чувствительна к ним.

Отметим, что модель, не чувствительная к возмущениям, может не существовать; в этом случае методом, предложенным в [1], может быть построена модель с минимальной чувствительностью к возмущениям.

Из последнего условия определяется минимальная размерность k , при которой уравнение (2.7) имеет решение, найдется решение этого уравнения, из (2.6) определяются строки матрицы Φ и проверяется условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{i_1, i_p}. \tag{2.9}$$

Если оно выполняется, принимается $G_* = \Phi G$, $D_* = \Phi D$ и $C_* = \Phi C$; матрицы A_{*i_1} и A_{*i_p} , $i = \overline{i_1, i_p}$, входящие в функцию $\Psi(x_*, y, u)$, определяются из (2.2). При невыполнении условия (2.9) ищется другое решение уравнения (2.7) при прежней или увеличенной размерности k . Предполагается, что $D_* \neq 0$.

В результате модель (2.1) принимает вид

$$\dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi(x_*(t), y(t), u(t)) + D_*d(t), \tag{2.10}$$

$$y_*(t) = H_*x_*(t) = R_*y(t).$$

3. Построение скользящего наблюдателя для скалярного случая. По аналогии с [1, 7] скользящий наблюдатель ищется в виде

$$\dot{\hat{x}}_*(t) = F_*\hat{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi(\hat{x}_*(t), y(t), u(t)) + D_*v(t) - Ke_y(t), \tag{3.1}$$

$$\hat{y}_*(t) = H_*\hat{x}_*(t),$$

матрица K выбирается так, чтобы $F_{**} = F_* - KH_*$ стала устойчивой матрицей, где разрывная функция $v(t)$ ищется в виде

$$v(t) = \begin{cases} -g \frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t) = \hat{y}_*(t) - R_*y(t)$ – ошибка по выходу; правила выбора матрицы Q и положительного скаляра g обсуждаются ниже. Отметим, что поскольку матрицы F_* и H_* ищутся в каноническом виде (2.5), матрица K всегда существует. Выбор элементов матрицы K и скаляра g влияет на скорость сходимости наблюдателя.

Отметим, что использование разрывной функции $v(t)$ приводит к многократным переключениям в наблюдателе (3.1).

Введем ошибку по состоянию $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$; нетрудно видеть, что $e_y(t) = H_*e(t)$. Используя (2.10) и (3.1), запишем уравнение динамики ошибки $e(t)$:

$$\dot{e}(t) = F_*e(t) + D_*(v(t) - d(t)) + \Delta\Psi(t) - Ke_y(t) = F_{**}e(t) + D_*(v(t) - d(t)) + \Delta\Psi(t), \quad (3.3)$$

где символом $\Delta\Psi(t)$ обозначена разность $C_*(\Psi(\hat{x}_*(t), y(t), u(t)) - \Psi(x_*(t), y(t), u(t)))$.

Нетрудно видеть, что если функция $\Psi(x, u)$ удовлетворяет обобщенному условию Липшица (1.3) по аргументу x , то и функция $C_*\Psi(\hat{x}_*, y, u)$ удовлетворяет этому условию по аргументу x_* для некоторых неотрицательных N_* и M_* :

$$\|\Delta\Psi(t)\| = \|C_*(\Psi(\hat{x}_*(t), y(t), u(t)) - \Psi(x_*(t), y(t), u(t)))\| \leq N_*\|e(t)\| + M_*. \quad (3.4)$$

Отметим, что M_* может принимать два значения: ненулевое, обусловленное видом функции $\Psi(x, u)$, которое используется для выявления условий существования и реализации скользящего режима, и нулевое при наступлении этого режима, поскольку известно [4], что в скользящем режиме $e(t) = 0$, т.е. $\hat{x}_*(t) = x_*(t)$, и, согласно (3.4), можно принять $M_* = 0$.

Так как матрица F_{**} устойчива, то для произвольной симметрической положительно-определенной матрицы W существует положительно-определенная матрица P , удовлетворяющая уравнению $F_{**}^T P + P F_{**} = -W$. По аналогии с (1.3) предположим, что для некоторой матрицы Q выполняется равенство

$$PD_* = H_*^T Q^T. \quad (3.5)$$

Теорема 1. Если $\lambda_{\min}(W) > 2N_*\|P\|$ и скаляр g удовлетворяет условию

$$g > \|d(t)\| + M_* \frac{\|P\|}{\|QH_*\|}, \quad (3.6)$$

то скользящее движение системы (3.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = e^T(t)Pe(t)$$

и, используя (3.5), найдем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (F_{**}e(t) + D_*(v(t) - d(t)) + \Delta\Psi(t))^T Pe(t) + \\ &+ e^T(t)(F_{**}e(t) + D_*(v(t) - d(t)) + \Delta\Psi(t)) = \\ &= e^T(t)(F_{**}^T P + P F_{**})e(t) + (D_*(v(t) - d(t)))^T Pe(t) + \\ &+ e^T(t)PD_*(v(t) - d(t)) + 2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из сказанного выше следует, что первое слагаемое в (3.7) принимает вид $-e^T(t)We(t)$ для положительно-определенной матрицы W .

Преобразуем выражение $(D_*(v(t) - d(t)))^T Pe(t) + e^T(t)PD_*(v(t) - d(t))$ с учетом (3.2) и (3.5):

$$\begin{aligned} &(D_*(v(t) - d(t)))^T Pe(t) + e^T(t)PD_*(v(t) - d(t)) = \\ &= 2e^T(t)PD_*(v(t) - d(t)) = 2e^T(t)H_*^T Q^T v(t) - 2e^T(t)H_*^T Q^T d(t) = \\ &= -2ge^T(t)H_*^T Q^T \frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\|} - 2(QH_*e(t))^T d(t) = \\ &= -2g(QH_*e(t))^* \frac{QH_*e(t)}{\|QH_*e(t)\|} - 2(QH_*e(t))^T d(t) = \\ &= -2g\|QH_*e(t)\| - 2(QH_*e(t))^T d(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Добавим к полученному выражению слагаемые $-e^T(t)We(t)$ и $2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t)$ и преобразуем полученный результат:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e^T(t)We(t) - 2g \|QH^*e(t)\| - 2(QH^*e(t))^T d(t) + 2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(W) \|e(t)\|^2 - 2g \|QH^*e(t)\| + 2 \|QH^*e(t)\| \|d(t)\| + 2 \|P\| \|e(t)\| \|\Delta\Psi(t)\| \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(W) \|e(t)\|^2 - 2 \|QH^*\| \|e(t)\| (g - \|d(t)\|) + 2 \|P\| \|e(t)\| (N_* \|e(t)\| + M_*) = \\ &= -(\lambda_{\min}(W) - 2 \|P\| N_*) \|e(t)\|^2 - 2 \|QH^*\| \|e(t)\| \left(g - \|d(t)\| - M_* \frac{\|P\|}{\|QH^*\|} \right) < 0. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве учтены (3.4), условия теоремы и тот факт, что положительная определенность матрицы W эквивалентна условию $\lambda_{\min}(W) > 0$. Таким образом, $\dot{V}(t) < 0$, что доказывает теорему.

Поскольку в скользящем режиме $\dot{e}(t) = 0$ и $e(t) = 0$, из уравнения (3.3) следует $D_*(v(t) - d(t)) + \Delta\Psi(t) = 0$, а так как с учетом замечания после (3.4) можно принять $\|\Delta\Psi(t)\| \leq N_* \|e(t)\|$, то функция $d(t)$ может быть оценена в виде

$$d(t) = -g \frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\| + \delta},$$

где δ – малая положительная константа. Следует отметить, что полученное выражение зависит только от ошибки по выходу $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - R_*y(t)$.

Если условие $\lambda_{\min}(W) > 2N_* \|P\|$ не выполняется, то сходимость наблюдателя может быть обеспечена при более жестких условиях на скаляр g . Для простоты рассмотрим случай, когда $M_* = 0$.

Т е о р е м а 2. Если скаляр g удовлетворяет условию

$$g > \|d(t)\| + \frac{\|P\Delta\Psi(t)\|}{\|PD_*\|}, \quad (3.9)$$

то скользящее движение системы (3.3) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Добавим к выражению (3.8) слагаемое $2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t)$ и преобразуем полученный результат:

$$\begin{aligned} &-2g \|QH^*e(t)\| - 2(QH^*e(t))^T d(t) + 2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t) \leq \\ &\leq -2g \|QH^*e(t)\| + 2 \|QH^*e(t)\| \|d(t)\| + 2 \|P\Delta\Psi(t)\| \|e(t)\| \leq \\ &\leq -2(g \|QH^*\| \|e(t)\| - \|QH^*\| \|e(t)\| \|d(t)\| - \|P\Delta\Psi(t)\| \|e(t)\|) = \\ &= -2 \|QH^*\| \left(g - \|d(t)\| - \frac{\|P\Delta\Psi(t)\|}{\|PD_*\|} \right) \|e(t)\| < 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

в последнем неравенстве учтено условие (3.9) теоремы. Так как слагаемые $-e^T(t)We(t)$ и элемент $-2g \|QH^*e(t)\| - 2(QH^*e(t))^T d(t) + 2(Pe(t))^T \Delta\Psi(t)$ в (3.10) в сумме составляют функцию $\dot{V}(t)$, а матрица W положительно определена, то $\dot{V}(t) < 0$, что доказывает теорему.

Усилим условие (3.9) теоремы, записав его с учетом (3.4) в виде

$$g > \|d(t)\| + N_{**} \|e(t)\| \quad (3.11)$$

для некоторого скаляра $N_{**} > 0$. Так как ошибка $e(t)$ неизвестна, то для вычисления скаляра g предлагается два варианта действий.

1. Задать максимальное значение переменной $\|e(t)\|$ в (3.11) исходя из реального значения ошибки $e(t)$ при $t = 0$, учитывая, что в скользящем режиме $e(t) = 0$. Недостаток варианта состоит в том, что величина скаляра g получается завышенной, что может негативно сказаться на реализации скользящего режима.

2. Вычислять величину $\|e(t)\|$ в процессе реализации скользящего режима на основе измеряемой ошибки $e_y(t)$. Это в предположении, что нелинейный член входит только в уравнение для переменных $x_{*1}(t)$ и $\hat{x}_{*1}(t)$ моделей (2.10) и (3.1) соответственно, можно сделать следующим образом. Поскольку матрицы F_* и H_* реализованы в канонической форме (2.5), то $e_y(t) = H_*e(t) = e_1(t)$. Уравнения для остальных переменных модели (3.1) имеют следующий вид (рассмотрим для простоты $k = 3$):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{*2}(t) &= \Psi_2(u(t), y(t)) + \hat{x}_{*3}(t) - k_2 e_y(t), \\ \dot{\hat{x}}_{*3}(t) &= \Psi_3(u(t), y(t)) - k_3 e_y(t),\end{aligned}$$

где $\Psi_2(u(t), y(t))$ и $\Psi_3(u(t), y(t))$ – произвольные функции, k_2 и k_3 – элементы матрицы K . Тогда уравнения для ошибок $e_2(t)$ и $e_3(t)$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2(t) &= e_3(t) - k_2 e_y(t), \\ \dot{e}_3(t) &= -k_3 e_y(t),\end{aligned}$$

откуда

$$e_3(t) = -k_3 \int_0^t e_y(\tau) d\tau, \quad e_2(t) = -k_3 \int_0^t \int_0^{t'} e_y(\tau) d\tau dt' + k_2 \int_0^t e_y(\tau) d\tau.$$

Полученные компоненты вектора $e(t)$ используются в (3.11), обеспечивая таким образом режим адаптации скользящего наблюдателя к величине ошибки $e(t)$.

Отметим также, что предложенный подход может быть использован также для оценки величины возмущения $\rho(t)$ на основе редуцированной модели (2.1), не чувствительной к дефекту. Для построения такой модели используется подход, описанный в разд. 2, с заменой L в матрице $B^{(k)}$ на D . Оцененное таким образом возмущение $\rho(t)$ предлагается использовать в дополнительном диагностическом наблюдателе, чувствительном как к дефекту, так и к возмущениям. Такой наблюдатель может быть построен известными методами [1, 15].

4. Случай векторного дефекта $d(t)$. В случае, когда $d(t)$ – векторная функция, редуцированная модель (2.1) также должна иметь векторный выход $y_*(t)$, что в общем случае предполагает ее максимально возможную размерность. Для построения такой модели описанную выше процедуру предлагается модифицировать следующим образом. Матрица F_* модели также ищется в канонической форме (2.5), но первое уравнение в (2.6) не используется; из-за этого уравнение (2.7) изменяется:

$$(\Phi_1 - J_{*1} \dots - J_{*k})(V_*^{(k)} B_*^{(k)}) = 0, \quad (4.1)$$

где

$$V_*^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad B_*^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & F^2L & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & \dots & HF^{k-2}L \\ 0 & 0 & HL & \dots & HF^{k-3}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оно имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V_*^{(k)} B_*^{(k)}) < lk + n. \quad (4.2)$$

В отличие от скалярного случая, ищется не минимальное, а максимальное значение k , при котором выполняется условие (4.2); из (4.1) находятся матрицы $\Phi_1, J_{*1}, \dots, J_{*k}$, после чего из соотношений (2.6) определяются строки Φ_2, \dots, Φ_k матрицы Φ и проверяется условие (2.9). Если оно выполняется, принимается $G_* = \Phi G$, $D_* = \Phi D$ и $C_* = \Phi C$; матрицы A_{*1i} и A_{*2i} , $i = 1, s$, входящие

в функцию $\Psi(x_*, y, u)$, определяются из (2.2). При невыполнении условия (2.9) ищется другое решение уравнения (4.1) при прежней или уменьшенной размерности k .

Для определения матриц R_* и H_* уравнение $R_*H_* = H\Phi$ записывается в виде

$$(R_* - H_*) \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} = 0,$$

откуда и находятся искомые матрицы. Критерием его решения является условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(\Phi).$$

Предполагается, что пара (F_*, H_*) наблюдаема, в этом случае существует такая матрица K , что $F_{**} = F_* - KH_*$ – устойчивая матрица [7]. В остальном процедура построения скользящего наблюдателя и оценки функции $d(t)$ совпадает с рассмотренной в разд. 3.

5. Частный случай. Рассмотрим частный случай, когда нелинейная составляющая $C_*\Psi(x_*(t), y(t), u(t))$ в (2.10) не зависит от переменной $x_*(t)$. Нетрудно видеть тогда, что поскольку $\Delta\Psi = 0$, уравнение ошибки (3.3) становится линейным, и решение задачи упрощается. Действительно, будем искать скользящий наблюдатель в виде

$$\dot{\hat{x}}_*(t) = F_*\hat{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi_*(y(t), u(t)) + D_*v(t) - Ke_y(t), \quad (5.1)$$

$$\hat{y}_*(t) = H_*\hat{x}_*(t),$$

где матрица K выбирается так, чтобы $F_{**} = F_* - KH_*$ стала устойчивой матрицей, разрывная функция $v(t)$ ищется в виде (3.2), функция $\Psi_*(y(t), u(t))$ по предположению зависит только от переменных y и u , матриц Q и скаляр g выбираются, как и выше. Отметим, что если $C_* = 0$, то наблюдатель (5.1) не содержит нелинейной составляющей.

Тогда уравнение динамики ошибки $e(t)$ принимает вид

$$\dot{e}(t) = F_*e(t) + D_*(v(t) - d(t)) - Ke_y(t) = F_{**}e(t) + D_*(v(t) - d(t)).$$

По аналогии с теоремой можно показать, что при указанном выборе матрицы Q и скаляра g $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ скользящее движение системы, описывающей динамику ошибки $e(t)$, асимптотически устойчиво. Доказательство этого утверждения аналогично первой части теоремы, где рассматриваются линейные составляющие.

Приведем два достаточных критерия независимости нелинейной составляющей $C_*\Psi(x_*(t), y(t), u(t))$ от переменной $x_*(t)$, следующие из вида этой составляющей и (2.2):

1) каждая строка A_i линейно выражается через строки матрицы H , что эквивалентно равенству

$$\text{rank}(H) = \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{i_1, i_p};$$

2) если некоторая строка A_i не выражается через строки матрицы H , то i -я строка матрицы C_* нулевая.

6. Пример. Для проверки работоспособности предлагаемого в статье метода было проведено моделирование работы синтезированных наблюдателей для идентификации типовых дефектов в электроприводах многозвенных манипуляторов. Полная модель рассмотренного электроприво-

да с учетом люфта и упругости механической передачи, сухого и вязкого трений, а также нелинейных составляющих взаимовлияний между степенями подвижности многосвязника имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{C_r i_r^2}{H_M} x_1(t) - \frac{K_r + h_M}{H_M} x_2(t) + \frac{C_r i_r}{H_M} x_3(t) + \frac{-M_E - M_1 \text{sign } x_2(t) + C_r i_r f(\beta)}{H_M} + \rho(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{C_r i_r}{J_d} x_1(t) - \frac{C_r}{J_d} x_3(t) - \frac{K_d}{J_d} x_4(t) - \frac{K_M}{J_d} x_5(t) + \frac{-M_2 \text{sign } x_4(t) + C_r i_r f(\beta)}{J_d}, \\ \dot{x}_5(t) &= -\frac{K_\omega}{L_d} x_4(t) - \frac{R_d}{L_d} x_5(t) + \frac{K_U}{L_d} u(t) + d(t), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $x_1(t) = \alpha_r(t)$ и $x_2(t) = \dot{\alpha}_r(t)$ – угол поворота вала редуктора и его скорость соответственно, $x_3(t) = \alpha_d(t)$ и $x_4(t) = \dot{\alpha}_d(t)$ – угол поворота оси двигателя и его скорость соответственно, $x_5(t) = I_a(t)$ – ток якоря; C – жесткость механической передачи; i_r – передаточное отношение редуктора, M_1 и M_2 – величины сухого трения движения в редукторе и двигателе соответственно, K_r и K_d – коэффициенты вязкого трения редуктора и двигателя соответственно, J_d – момент инерции ротора двигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный к ротору, K_M – моментный коэффициент электродвигателя, K_ω – коэффициент противо-э.д.с., R_d – активное сопротивление цепи якоря, L_d – индуктивность цепи якоря, K_U – коэффициент усиления усилителя мощности, $u(t)$ – напряжение на входе усилителя мощности; H_M , h_M и M_E – приведенные к валу редуктора переменные составляющие всех моментных воздействий на электропривод; $f(\beta)$ – функция, описывающая люфт в механической передаче:

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta + \sigma, & \beta < -\sigma, \\ 0, & -\sigma \leq \beta \leq \sigma, \\ \beta - \sigma, & \beta > \sigma, \end{cases}$$

$\beta = x_3 - i_r x_1$, σ – величина люфта.

Нетрудно проверить, что функция $\text{sign } x$ не удовлетворяет условию Липшица (2.1), однако удовлетворяет его обобщению в виде

$$|\text{sign } x - \text{sign } x'| \leq 2 \quad (6.2)$$

для всех x, x' , т.е. $N_* = 0$, $M_* = 2$.

Дефект моделируется следующим образом:

$$d(t) = -\tilde{R}_d(t)x_5(t)/L_d, \quad (6.3)$$

что соответствует изменению активного сопротивления цепи якоря электродвигателя на величину $\tilde{R}_d(t)$ (например, при его значительном нагреве). Возмущение $\rho(t) = -\tilde{M}(t)/H_M$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента $\tilde{M}(t)$ на валу редуктора. Отметим, что при отсутствии изменения сопротивления $\tilde{R}_d(t) = 0$ и, следовательно, $d(t) = 0$, в случае, когда $\tilde{R}_d(t) \neq 0$, $d(t)$ становится неизвестной функцией времени.

Полагаем, что измеряемыми являются переменные $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $x_5(t)$, рассматриваемую систему опишем следующими матрицами, согласно модели (1.1):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_r i_r^2}{H_M} & -\frac{K_r + h_M}{H_M} & \frac{C_r i_r}{H_M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{C_r i_r}{J_d} & 0 & -\frac{C_r}{J_d} & -\frac{K_d}{J_d} & \frac{K_M}{J_d} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_\omega}{L_d} & -\frac{R_d}{L_d} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_U}{L_d} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{-M_E - M_1 \text{sign } x_2(t) + C_r i_r f(Ax)}{H_M} \\ \frac{-M_2 \text{sign } x_4(t) + C_r i_r f(Ax)}{J_d} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = (-i_r, 0 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Построим линейную модель, инвариантную к возмущению. Можно показать, что $k = 2$; решение, формально получаемое на основе (2.7), в данном случае необходимо корректировать для выполнения условий скользящего режима, в частности, чтобы матрица W была положительно-определенной; в результате получаем

$$R_* = (0 \ 0 \ 1), \quad J_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R_d}{L_d} \\ \frac{C_r i_r}{J_d} & -\frac{C_r}{J_d} & \frac{K_M}{J_d} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку аргумент функции $f(\beta)$ выражается через вектор $y(t)$, условие (2.9) выполняется автоматически, $C_* = \Phi C = (0 \ 1)^T$, что в итоге приводит к модели следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= -\frac{K_\omega}{L_d} x_{*2}(t) - \frac{R_d}{L_d} y_3(t) + \frac{K_U}{L_d} u(t) + d(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= \frac{C_r i_r}{J_d} y_1(t) - \frac{C_r}{J_d} y_2(t) + \frac{K_M}{J_d} y_3(t) - \frac{K_d}{J_d} x_{*2}(t) + \\ &+ \frac{-M_2 \text{sign } x_{*2}(t) + C_r i_r f(y_2(t) - i_r y_1(t))}{J_d}, \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $x_{*1}(t) = x_5(t)$, $x_{*2}(t) = x_4(t)$. Так как $D_* = \Phi D = (1 \ 0)^T \neq 0$, построенная модель чувствительна к дефекту.

Сравнивая (2.10) и (6.4), получаем матрицы, описывающие линейную часть системы:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & -K_\omega/L_d \\ 0 & -K_d/J_d \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0).$$

Полагаем $K = (0.3 - 0.002)^T$. Из (3.5) следует, что можно принять $P := Q := 1$; в результате скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{*1}(t) &= -\frac{K_\omega}{L_d} \hat{x}_{*2}(t) - \frac{R_d}{L_d} y_3(t) + \frac{K_U}{L_d} u(t) + v(t) - 0.3e_y(t), \\ \dot{\hat{x}}_{*2}(t) &= \frac{C_r i_r}{J_d} y_1(t) - \frac{C_r}{J_d} y_2(t) + \frac{K_M}{J_d} y_3(t) - \frac{K_d}{J_d} \hat{x}_{*2}(t) + \\ &+ \frac{-M_2 \text{sign } \hat{x}_{*2}(t) + C_r i_r f(y_2(t) - i_r y_1(t))}{J_d} + 0.002e_y(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_{*1}(t), \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_3(t)$,

$$v(t) = \begin{cases} -g \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Рис. 1. Функция $d(t)$ (кривая 1) и результат ее идентификации $\hat{d}(t)$ (кривая 2) при $\rho(t) \neq 0$

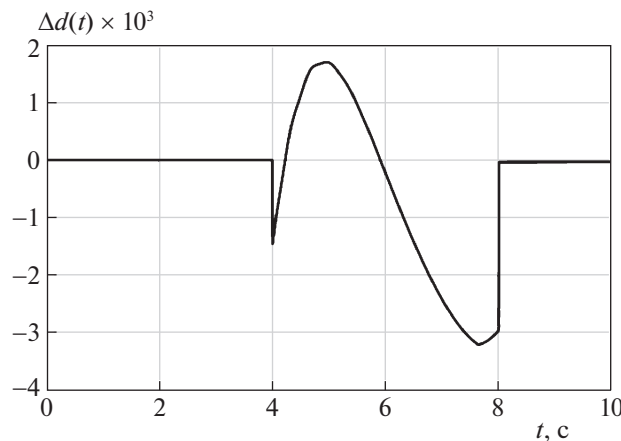


Рис. 2. Ошибка идентификации функции $\Delta d(t)$

Поскольку $P = 1$ и $\|D_*\| = 1$, то условие (3.6) теоремы принимает вид

$$g > \|d(t)\| + M_* \frac{\|P\|}{\|QH_*\|} = \|d(t)\| + 2.$$

Поскольку $N_* = 0$, а матрица W по построению является положительно-определенной, то условие $\lambda_{\min}(W) > 2N_* \|P\|$ выполняется автоматически. Оценка функции $d(t)$ дается выражением

$$d(t) = -g \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta}.$$

Проведем моделирование системы (6.1) с наблюдателем (6.5). При моделировании задавались следующие значения параметров рассматриваемого следящего электропривода: $J_d = 0.0001 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $k_\omega = 0.02 \text{ В} \cdot \text{с}$, $K_U = 100$, $R_d = 0.4 \text{ Ом}$, $L_d = 0.004 \text{ Гн}$, $i_r = 100$, $K_M = 0.02 \text{ Н} \cdot \text{м/А}$, $C_r = 2 \text{ Нм/рад}$, $M_1 = 1 \text{ Нм}$, $M_2 = 0.01 \text{ Нм}$, $K_d = 10^{-5} \text{ Нмс/рад}$, $K_r = 10^{-2} \text{ Нмс/рад}$, $\sigma = 0.01 \text{ рад}$. Для обеспечения заданных показателей качества управления в прямой цепи электропривода использовался типовой ПИД-регулятор (пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор). При этом в качестве входного воздействия на электропривод подавалось следующее желаемое значение угла поворота выходного вала редуктора: $\alpha_r^*(t) = \sin(t)$.

При моделировании возмущение имитировалось функцией $\tilde{M}(t) = 7 \sin(0.8 t)$ Нм на интервале 0–10 с; дефект – функцией $\tilde{R}_d(t) = 0.1(1 - e^{-(t-4)})$ Ом на интервале 4–8 с.

На рис. 1 представлены графики функций $d(t)$ и ее оценки $\hat{d}(t)$ построенным наблюдателем (6.5), на рис. 2 – график ошибки идентификации $\Delta d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ этой функции. Из этих рисунков можно видеть, что построенный нелинейный скользящий наблюдатель позволяет своевременно определить момент времени появления дефекта $d(t)$, а также обеспечить достаточно точную оценку величины этого дефекта. Кроме того, поскольку на интервалах 0–4 и 8–10 с значение $\hat{d}(t)$ равно нулю, ясно, что построенный наблюдатель не чувствителен к возмущению $\rho(t)$.

Таким образом, результаты моделирования на примере идентификации типовых дефектов, возникающих в следящих электроприводах, показали работоспособность предложенного в статье метода робастного поиска и идентификации дефектов на основе скользящих наблюдателей.

Заключение. С использованием метода на основе скользящих наблюдателей в работе решаются задачи обнаружения, поиска и идентификации дефектов в технических системах, описываемых нелинейными моделями с постоянными коэффициентами, в присутствии возмущений. Построение скользящего наблюдателя осуществляется на основе редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, обладающей избирательной чувствительностью по отношению к дефектам и возмущению. Это обеспечивает снижение размерности средств диагностирования и позволяет ослабить ограничения, накладываемые на исходную систему, для возможности построения скользящих наблюдателей.

Результаты моделирования подтвердили работоспособность синтезированных с помощью предложенного в статье метода построения скользящих наблюдателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 73–89.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
3. Edwards C., Spurgeon S. On the Development of Discontinuous Observers // International J. Control. 1994. V. 59. P. 1211–1229.
4. Edwards C., Spurgeon S., Patton R. Sliding Mode Observers for Fault Detection and Isolation // Automatica. 2000. V. 36. P. 541–553.
5. Yan X., Edwards C. Nonlinear Robust Fault Reconstruction and Estimation Using Sliding Mode Observers // Automatica. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
6. Sharma R., Aldeen A. Fault and Disturbance Reconstruction Nonlinear Systems Using a Network of Interconnecting Sliding Mode Observer // IET Control Theory and Applications. 2011. V. 5. № 6. P. 751–763.
7. He J., Zhang C. Fault Reconstruction Based on Sliding Mode Observer for Nonlinear Systems // Mathematical Problems in Engineering. 2012. V. 2012. ID 451843. P. 1–22.
8. Chan J., Tan C., Trinh H. Robust Fault Reconstruction for a Class of Infinitely Unobservable Descriptor Systems // International J. Systems Science. 2017. V. 48. № 8. P. 1646–1655.
9. Filaretov V., Zhirabok A., Protchenko A., Zuev A. Fault Identification in Nonlinear Dynamic Systems // Proc. 5th Intern. Conf. on Systems and Control (ICSC 2016). Marrakech. 2016. P. 273–277.
10. Chandra K., Alwi H., Edwards C. Fault Reconstruction for a Quadrotor Using an LPV Sliding Mode Observer // Proc. 9th IFAC Sympos. Safeprocess. Paris, France, 2015. P. 374–379.
11. Zhang K., Jiang B., Yan X., Mao Z. Sliding Mode Observer Based Incipient Sensor Fault Detection with Application to High-speed Railway Traction Device // ISA Transactions. 2016. V. 63. P. 49–59.
12. Филаретов В.Ф., Зуев А.В., Жирабок А.Н., Проценко А.А., Субудхи В. Метод синтеза систем непрерывной аккомодации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках автономных подводных роботов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 4. С. 282–288.
13. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. М.–СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
14. Gao Z., Cecati C., Ding S. A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques. I. Fault Diagnosis With Model-Based and Signal-Based Approaches // IEEE Trans. on Industrial Electronics. 2015. V. 62. № 6. P. 3757–9767.
15. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю. Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // АиТ. 2017. № 9. С. 34–48.
16. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В. Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // АиТ. 2017. № 7. С. 3–21.

**ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 629.7.058

**ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
СОПРОВОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ
ЛОКАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНО-БИКВАДРАТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ.
I. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

© 2021 г. В. С. Верба^{a,*}, В. И. Меркулов^a, Е. А. Руденко^{b,**}

^a АО “Концерн “Вега”, Москва, Россия

^b МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: ilya-zagrebelnyi@mail.ru

**e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.06.2020 г.

После доработки 18.08.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрены особенности функционирования систем автоматического сопровождения воздушных объектов, оптимизированных по классическим квадратичным функционалам, отмечены их недостатки при сопровождении объектов, движущихся по сложным траекториям. Предложен вариант решения задачи локальной оптимизации систем автоматического сопровождения на основе минимизации квадратично-биквадратных функционалов качества. Приведен пример синтеза следящей системы радиолокационного угломера, проведен ее анализ. Во второй части статьи будут проанализированы результаты моделирования созданной системы.

DOI: 10.31857/S0002338821010121

0. Введение. Усложнение законов взаимного пространственного перемещения летательных аппаратов (ЛА) в процессе их противоборства, обусловленное в том числе и применением сверхманевренных (СМЛА) и гиперзвуковых (ГЗЛА) летательных аппаратов, приводит к необходимости ужесточения требований к устойчивости и точности их автоматического сопровождения.

Следящие измерители, обеспечивающие автоматическое сопровождение воздушных объектов по дальности, угловым координатам и их производным [1], являются основой информационного обеспечения существующих систем наведения [2]. Следует подчеркнуть, что от точности и устойчивости функционирования систем автоматического сопровождения во многом зависит результативность наведения. В связи с этим задача улучшения точности и устойчивости систем автоматического сопровождения, расширения поля условий их функционирования является весьма востребованной.

Анализ следящих измерителей позволяет выделить три особенности их функционирования, определяющие решение этой задачи.

Первая связана с тем, что следящие измерители имеют ограниченную рабочую область, определяемую почти линейным участком дискриминационных характеристик [1]. Типовой вид такой характеристики для ошибки сопровождения Δx обобщенной координаты x отображается на рис. 1 кривой 1, где u – сигнал управления, $[-\Delta x_{\max}, \Delta x_{\max}]$ – рабочая зона.

Вторая особенность состоит в том, что ошибки сопровождения определяются соответствием (несоответствием) номера производной отслеживаемой координаты x порядку астатизма следящей системы [3]. Если в законе изменения x содержатся производные, номер которых превышает порядок астатизма следящей системы, то это приводит к нарастанию текущей ошибки Δx , выходу ее за пределы рабочего участка $\pm \Delta x_{\max}$, замене отрицательной обратной связи на положительную и срыву сопровождения.

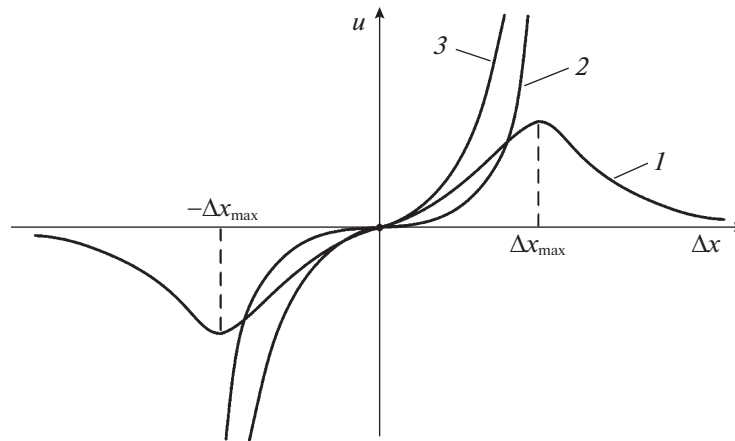


Рис. 1. Дискриминационная характеристика следящего измерителя и законы управления

В свою очередь в законах изменения пространственного положения СМЛА и ГЗЛА могут содержаться производные высоких порядков, особенно при движении по квазисинусоидальным траекториям.

Решить проблему сопровождения таких целей на базе классической теории оптимального управления удастся с помощью линейных законов управления, содержащих старшие производные ошибки [4, 5]:

$$u_x = k_1\Delta x + k_2\Delta\dot{x} + k_3\Delta\ddot{x} + \dots + k_n\Delta x^{(n)}. \quad (0.1)$$

Однако присутствие в реальных задачах случайных погрешностей измерений требует в этом случае формирования оптимальных оценок этих старших производных (особенно по угловым координатам), что является отнюдь нетривиальной задачей и приводит к увеличению инерционности измерителей [5].

Решить задачу повышения устойчивости процедуры сопровождения можно, если применить кубическую зависимость управления от ошибок слежения:

$$u_3 = k_3\Delta x^3, \quad (0.2)$$

показанную на рис. 1 кривой 2. Вместе с тем использование закона (0.2), предотвращая выход ошибок сопровождения за пределы рабочего участка $\pm\Delta x_{\max}$, приводит к снижению чувствительности управляющего напряжения u к малым ошибкам Δx и соответственно к ухудшению точности сопровождения в установившемся режиме.

В связи с этим более рациональным является применение линейно-кубической зависимости

$$u_{13} = k_1\Delta x + k_3\Delta x^3, \quad (0.3)$$

показанной на рис. 1 кривой 3. Однако для того, чтобы получить такую зависимость, необходимо в качестве минимизируемых использовать квадратично-биквадратные функционалы качества [4].

Третья особенность связана с тем, что время окончания сопровождения заранее не известно. При этом к следящему измерителю не предъявляется особых требований к точности сопровождения на различных временных участках работы. В рабочем диапазоне изменения дальности, угловых координат и их производных он должен обеспечивать примерно одинаковую точность в течение всего времени сопровождения. Эта особенность предопределяет целесообразность использования для синтеза процедур локальной оптимизации [6], обеспечивающей минимум выбранных функционалов качества в каждый текущий момент времени.

Цель статьи – на примере следящего угломера продемонстрировать эффективность реализуемого на практике многомерного варианта подобного (0.3) закона оптимального управления. В отличие от подобного примера из [6] здесь не ставится задача учета несоответствия динамических свойств цели и угломера, что приводит к более простому функционалу качества управления.

В первой части статьи кратко излагаются теоретические основы используемого метода [6] и демонстрируется процесс получения оптимального закона управления следящим угломером, тогда как во второй части будут приведены подробные результаты имитационного моделирования созданной системы.

При этом задача синтеза решается в детерминированной постановке. Влияние же небольших случайных воздействий на объект и измеритель его состояния компенсируется заменой в полученном законе управления значений переменных состояния на их калмановские оценки. И хотя из-за нелинейности закона управления (0.3) получаемый таким образом стохастический регулятор является лишь субоптимальным, он оказывается вполне работоспособным.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый линейный объект, n -мерный вектор состояния \mathbf{x}_y которого определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y(t)\mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}_y(0) = \mathbf{x}_{y0}, \quad (1.1)$$

должен отслеживать требуемую траекторию $\mathbf{x}_r(t)$, заданную уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{F}_r(t)\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r(t)\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{x}_{r0}. \quad (1.2)$$

Здесь t – текущее время; \mathbf{F}_y и \mathbf{F}_r – матрицы внутренних связей процессов (1.1) и (1.2); \mathbf{B}_y – матрица усиления r -мерного ($r \leq n$) сигнала управления \mathbf{u} ; \mathbf{B}_r и \mathbf{v} – коэффициент передачи и управляющее воздействие системы (1.2), а подстрочные индексы “ y ” и “ r ” соответствуют управляемым и требуемым траекториям.

Цель управления состоит в обеспечении малости ошибки слежения

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{x}_y(t), \quad (1.3)$$

поэтому вектор \mathbf{u} сигналов управления будем искать из условия локальной оптимизации изменяющегося во времени квадратично-биквадратного функционала качества, штрафующего большие значения элементов векторов $\Delta\mathbf{x}$ и управления \mathbf{u} :

$$I_t[\Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_0^t \mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{K}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \Delta\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\Delta\mathbf{x}(t) + (\Delta\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\Delta\mathbf{x}(t))^2, \quad (1.4)$$

в котором $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$ – положительно-определенная матрица штрафов за величину сигнала управления, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ и $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ – неотрицательно-определенные матрицы квадратичных и биквадратных штрафов за величину ошибки слежения $\Delta\mathbf{x}$ соответственно.

2. Решение задачи. Получение локально-оптимального закона управления сводится [6] к минимизации по переменной \mathbf{u} производной по времени функционала (1.4). Используя правила нахождения полной производной сложной функции и определенного интеграла от нее по его переменному верхнему пределу

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial f(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t} + [\nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}(t))]^T \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau = f(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.1)$$

а также формулы дифференцирования квадратичной и биквадратной форм

$$\nabla_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}] = 2\mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad \nabla_{\mathbf{x}}[(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x})^2] = 4(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x})\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

в которых $\nabla_{\mathbf{x}}$ – оператор градиента, приходим к соотношению

$$\dot{I}_t = \mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} + 2[\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{Q} + 2\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})]\Delta\dot{\mathbf{x}}, \quad (2.3)$$

где в соответствии с (1.1) и (1.2)

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}}_y = \mathbf{F}_y\Delta\mathbf{x} - \mathbf{B}_y\mathbf{u} + (\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_y)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Здесь и далее для простоты опущена зависимость векторов и матриц от времени.

Учитывая в (2.3) формулу (2.4) для производной $\Delta\dot{\mathbf{x}}$, получаем минимизируемую по \mathbf{u} квадратичную функцию

$$\dot{I}_t = \mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - 2[\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{Q} + 2\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})]\mathbf{B}_y\mathbf{u} + C, \quad (2.5)$$

где C – не зависящая от \mathbf{u} группа слагаемых:

$$C = 2[\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{Q} + 2\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})]\mathbf{F}_y\Delta\mathbf{x} + (\mathbf{F}_T - \mathbf{F}_y)\mathbf{x}_T + \mathbf{B}_T\mathbf{v}.$$

Управление, минимизирующее выпуклую функцию (2.5), найдем, приравняв нулю ее градиент по \mathbf{u} :

$$\nabla_{\mathbf{u}}\dot{J}_t = 2\mathbf{K}\mathbf{u} - 2\mathbf{B}_y^T[\mathbf{Q}\Delta\mathbf{x} + 2(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})\mathbf{P}\Delta\mathbf{x}] = 0.$$

Решая данное линейное матричное уравнение, получаем искомый локально-оптимальный закон позиционного управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_y^T[\mathbf{Q}\Delta\mathbf{x} + 2(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})\mathbf{P}\Delta\mathbf{x}]. \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что сигнал управления содержит два слагаемых разных степеней относительно ошибки $\Delta\mathbf{x}$. Первое слагаемое $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_y^T\mathbf{Q}\Delta\mathbf{x}$ задает его линейную составляющую, а второе $2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_y^T(\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{x})\mathbf{P}\Delta\mathbf{x}$ – кубическую составляющую. Также видно, что сигнал управления явно зависит от матрицы его усиления \mathbf{B}_y системой управления (1.1) и матрицы \mathbf{K} штрафов на величину сигналов управления, а весовые соотношения между линейной и кубической составляющими определяются элементами матриц \mathbf{Q} и \mathbf{P} штрафов квадратичного по $\Delta\mathbf{x}$ и биквадратного слагаемых целевого функционала (1.4).

Очевидно, что при малых ошибках $\Delta\mathbf{x}$ кубическая составляющая практически не влияет на величину сигнала управления (2.7), обеспечивая высокую линейную чувствительность к ним системы управления (рис. 1, кривая 3). Однако при больших ошибках $\Delta\mathbf{x}$ превалирующей становится кубическая составляющая, которая обеспечивает их энергичную отработку.

3. Пример. Исследование работоспособности предложенного алгоритма проведем на примере синтеза следающего радиолокационного угломера [1]. Пусть он имеет типовой привод антенны:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_y &= \omega_y, & \varphi_y(0) &= \varphi_0, \\ \dot{\omega}_y &= -\frac{1}{T}\omega_y + \frac{b}{T}u_y(t), & \omega_y(0) &= \omega_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

который предназначен для отработки пространственных перемещений цели в горизонтальной плоскости, определяемых кинематическим звеном:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_T &= \omega_T + \frac{j_T(t)}{D(t)}, & \varphi_T(0) &= \varphi_{T0}, \\ \dot{\omega}_T &= -\frac{2\dot{D}(t)}{D(t)}\omega_T - \frac{j_T(t)}{D(t)}, & \omega_T(0) &= \omega_{T0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь φ_T, φ_y – бортовой пеленг сопровождаемого объекта и угол поворота антенны; ω_T, ω_y – угловые скорости линии визирования и поворота антенны; T, b – постоянная времени и коэффициент передачи угломера; j_T – поперечное ускорение сопровождаемого объекта; D, \dot{D} – дальность до цели и скорость ее изменения. Отметим, что, манипулируя в (3.2) законом изменения ускорения объекта j_T , можно реализовать изменение пространственного положения цели практически любой сложности.

Геометрические соотношения между координатами состояния показаны на рис. 2, где $O_{p.y.}$ и $O_{ц}$ – точки расположения радиолокационного угломера и цели, $\mathbf{V}_{ц}$ – вектор скорости цели, $x_{РСН}$ – положение равносигнального направления (РСН) в горизонтальной плоскости, определяющее величину φ_y .

Задача синтеза сигнала управления угломером (3.1) формулируется следующим образом. Необходимо сформировать сигнал управления u_y , оптимальный в смысле минимума квадратично-биквадратного функционала:

$$I_t = \int_0^t k_{\omega}u_y^2(\tau)d\tau + \left[\begin{array}{c} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{array} \right] + \left\{ \left[\begin{array}{c} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{array} \right] \right\}^2, \quad (3.3)$$

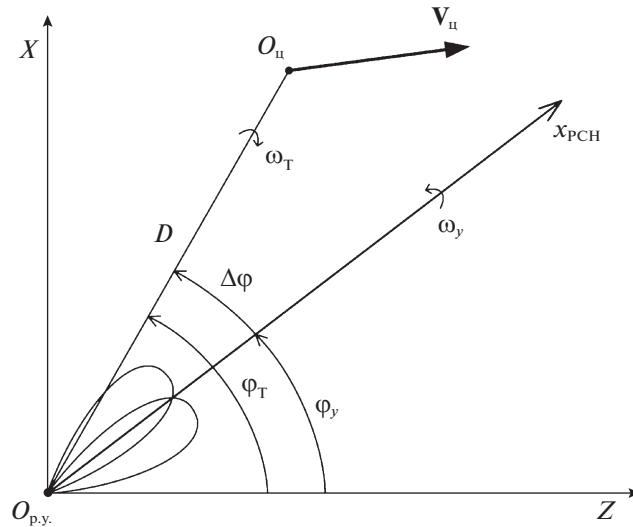


Рис. 2. Геометрия взаимного расположения радиолокационного угломера и цели

где $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ – ошибки слежения за углом и угловой скоростью:

$$\Delta\varphi = \varphi_{\Gamma} - \varphi_{\Psi}, \quad \Delta\omega = \omega_{\Gamma} - \omega_{\Psi}.$$

Для решения этой задачи используем теоретические результаты, приведенные в разд. 1 и 2. Поставив соотношения (3.1), (3.2) в соответствие с (1.1), (1.2), а (3.3) – с (1.4), получаем, что в данном примере

$$\mathbf{x}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma} \\ \omega_{\Gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Psi} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Psi} \\ \omega_{\Psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = u_{\Psi}, \quad \mathbf{K} = k_{\omega}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда на основе (2.6) находим матричную форму записи искомого скалярного закона управления:

$$u_{\Psi} = \frac{1}{k_{\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{T} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \right\}.$$

В результате преобразований получаем

$$u_{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{k_{\omega}T} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} q_{11}\Delta\varphi + q_{12}\Delta\omega \\ q_{12}\Delta\varphi + q_{22}\Delta\omega \end{bmatrix} + 2(p_{11}\Delta\varphi^2 + 2p_{12}\Delta\varphi\Delta\omega + p_{22}\Delta\omega^2) \begin{bmatrix} p_{11}\Delta\varphi + p_{12}\Delta\omega \\ p_{12}\Delta\varphi + p_{22}\Delta\omega \end{bmatrix} \right\},$$

откуда имеем

$$u_{\Psi} = \frac{b}{k_{\omega}T} \{ q_{21}\Delta\varphi + q_{22}\Delta\omega + 2(p_{11}\Delta\varphi^2 + 2p_{12}\Delta\varphi\Delta\omega + p_{22}\Delta\omega^2)(p_{12}\Delta\varphi + p_{22}\Delta\omega) \}.$$

Приводя здесь подобные члены, окончательно находим линейно-кубический закон управления

$$u_{\Psi} = K_1\Delta\varphi + K_2\Delta\omega + K_3\Delta\varphi^3 + K_4\Delta\varphi^2\Delta\omega + K_5\Delta\varphi\Delta\omega^2 + K_6\Delta\omega^3 \quad (3.4)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{b}{k_{\omega}T} q_{12}, & K_2 &= \frac{b}{k_{\omega}T} q_{22}, & K_3 &= \frac{2b}{k_{\omega}T} p_{11}p_{12}, \\ K_4 &= \frac{2b}{k_{\omega}T} (2p_{12}^2 + p_{11}p_{22}), & K_5 &= \frac{6b}{k_{\omega}T} p_{12}p_{22}, & K_6 &= \frac{2b}{k_{\omega}T} p_{22}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заключение. Анализ соотношений (3.4), (3.5) позволяет сделать следующие выводы. Следящий угломер представляет многоконтурную систему с обратными связями по углу и угловой ско-

рости. Сигнал управления зависит не только от значений ошибок $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$, но и от их кубов $\Delta\varphi^3$ и $\Delta\omega^3$, а также от смешанных произведений $\Delta\varphi^2\Delta\omega$ и $\Delta\varphi\Delta\omega^2$. Для получения сигнала управления не требуется знания старших производных угловых скоростей, а достаточно иметь бортовой пеленг, угловую скорость линии визирования, угол поворота антенны и скорость его изменения, что не накладывает ограничений на возможность формирования управления.

Полагая в (1.4) и (3.3) матрицу \mathbf{P} диагональной, можно найти более простой вариант формирования сигнала управления. В свою очередь, манипулируя в функционале качества видом всего биквадратного члена, можно получить большое число различных видов управлений с другой степенью зависимости и связи линейных и нелинейных составляющих сигналов управления.

Более полные выводы о возможностях закона управления (3.4), (3.5) будут сделаны по результатам приведенного в ч. II данной статьи имитационного моделирования синтезированной здесь системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматическое сопровождение целей в РЛС интегрированных авиационных комплексов. Т. 2. Сопровождение одиночных целей / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2018. 486 с.
2. Авиационные системы радиоуправления / Под ред. В.И. Меркулова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008. 423 с.
3. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика. М.: Радиотехника, 2003. 288 с.
4. Информационно-измерительные и управляющие радиоэлектронные системы и комплексы / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2020. 490 с.
5. Меркулов В.И., Соколов Д.А. Многоступенчатый фильтр для системы автосопровождения // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2016. Т. 14. № 2. С. 3–9.
6. Верба В.С., Меркулов В.И., Руденко Е.А. Линейно-кубическое локально-оптимальное управление линейными системами и его применение для наведения летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 129–141.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ
ТЕЛЕЖКИ С МАЯТНИКОМ

© 2021 г. О. Р. Каюмов

филиал ОмГПУ, Тара, Россия

e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2019 г.

После доработки 13.07.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассматривается система с двумя степенями свободы (маятник на тележке) при действии одной ограниченной управляющей силы, приложенной к тележке. Решается задача оптимального по быстродействию горизонтального перемещения на требуемое расстояние из заданного положения равновесия в другое такое же состояние с гашением колебаний. Построены траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности для асимптотически близкой нелинейной системы, когда масса маятника пренебрежимо мала в сравнении с массой тележки. Результаты сравниваются с известными оптимальными решениями для линеаризованной системы.

DOI: 10.31857/S0002338821010078

0. Введение. На рис. 1 приводится плоское движение системы из двух тел — маятника на тележке. Первое тело (тележка массы M) движется поступательно вдоль горизонтальной оси Ox без трения. Действующая на него управляющая сила F может менять направление и ограничена по модулю: $|F(t)| \leq F_0$. Второе тело — точечная масса m на конце жесткого невесомого стержня длины l , образующего с вертикалью угол φ . В точке его подвеса на тележке трение отсутствует.

В однородном поле тяжести уравнения движения имеют вид [1, с. 265]

$$(M + m \sin^2 \varphi) \ddot{x} = F - m \sin \varphi (l \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi),$$

$$(M + m \sin^2 \varphi) l \ddot{\varphi} = F \cos \varphi - ml \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - (M + m) g \sin \varphi.$$

Вводя безразмерные константы $\varepsilon = m/M$, $a = F_0/(Mg)$, переменные $x' = x/l$, $u = F/(Mg)$ и время $t' = t\sqrt{g/l}$, получим (опуская штрихи)

$$(1 + \varepsilon \sin^2 \varphi) \ddot{x} = u - \varepsilon \sin \varphi (\dot{\varphi}^2 + \cos \varphi), \quad |u| \leq a,$$

$$(1 + \varepsilon \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} = u \cos \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - (1 + \varepsilon) \sin \varphi.$$

Полагая массу маятника пренебрежимо малой в сравнении с массой тележки, считаем $\varepsilon \ll 1$ и в пределе при $\varepsilon = 0$ рассмотрим асимптотически близкую систему

$$\ddot{x} = u, \quad \ddot{\varphi} = -\sin \varphi + u \cos \varphi, \quad |u| \leq a. \quad (0.1)$$

Такая модель может служить для приближенного описания процессов управления мостовым краном, который требуется перемещать на заданное расстояние с гашением колебаний груза на тросе. Известную трудность представляет поиск управления, оптимального по быстродействию.

В линейном приближении (в предположении о малости величины φ и с обозначением p для проекции количества движения на ось Ox) система управления

$$\dot{p} = u, \quad \dot{\varphi} = -\varphi + u, \quad |u| \leq a$$

хорошо изучена в работах [1, 2], где описаны содержательные постановки задач и найдены их оптимальные решения на основе принципа максимума Понтрягина [3]. Для нелинейной системы (0.1) была решена [4] лишь задача оптимального по быстродействию гашения колебаний маятника

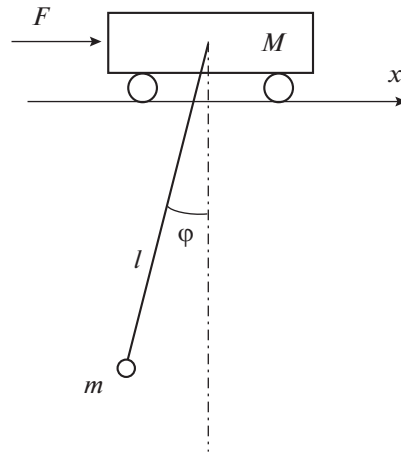


Рис. 1. Модель тележки с маятником

(при произвольном движении $x(t)$ тележки). Далее будем рассматривать наибо́льшее перемещение нелинейной системы (0.1) в четырехмерном пространстве. Кроме технических приложений к управлению мостовыми кранами эта задача представляет теоретический интерес как пример оптимального поведения нелинейной системы с двумя степенями свободы.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения (0.1) запишем в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = -\sin\varphi_1 + u\cos\varphi_1, \quad |u| \leq a. \quad (1.1)$$

Для удобства рассуждений назовем начало отсчета координаты x_1 в середине отрезка (заданной безразмерной длины $2b$), соединяющего начальное и требуемое конечное положения тележки. Аналогичная “удвоенная” запись будет удобна и для искомого общего времени $2T$ движения системы.

Задача оптимального по быстродействию перемещения тележки с маятником формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (1.1) из состояния

$$x_1(0) = -b, \quad x_2(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \quad (1.2)$$

за наименьшее время $2T$ в состояние

$$x_1(2T) = b, \quad x_2(2T) = \varphi_1(2T) = \varphi_2(2T) = 0. \quad (1.3)$$

Будем использовать принцип максимума Понтрягина [3], составляя гамильтониан

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 \varphi_2 + \lambda_4 (-\sin\varphi_1 + u\cos\varphi_1).$$

Тогда оптимальное управление приобретет вид

$$u = a \operatorname{sign}(\lambda_2 + \lambda_4 \cos\varphi_1), \quad (1.4)$$

где сопряженные переменные должны удовлетворять системе

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = \lambda_4(\cos\varphi_1 + u\sin\varphi_1), \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3. \quad (1.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Если существует оптимальное управление в задаче (1.1)–(1.5), то записанные в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ оптимальные решения $x_1(\tilde{t})$, $\varphi_1(\tilde{t})$, $u(\tilde{t})$, $\lambda_2(\tilde{t})$, $\lambda_4(\tilde{t})$ будут нечетными функциями, а $x_2(\tilde{t})$, $\varphi_2(\tilde{t})$, $\lambda_1(\tilde{t})$, $\lambda_3(\tilde{t})$ – четными функциями.

Для доказательства достаточно убедиться, что в новом времени \tilde{t} все соотношения (1.1)–(1.5) инвариантны относительно замены $\tilde{t} \rightarrow -\tilde{t}$, $x_1 \rightarrow -x_1$, $\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1$, $u \rightarrow -u$, $\lambda_2 \rightarrow -\lambda_2$, $\lambda_4 \rightarrow -\lambda_4$ при неизменных x_2 , φ_2 , λ_1 , λ_3 .

Существование оптимального управления в задаче (1.1)–(1.5) следует из глобальной управляемости системы [5].

Из замечания 1 вытекают соотношения

$$x_1(T) = \varphi_1(T) = u(T) = \lambda_2(T) = \lambda_4(T) = 0. \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е 2. Если оптимальное управление (1.4) является кусочно-постоянным с конечным числом переключений, то это число будет нечетным.

Действительно, наряду с моментом переключения T возможны лишь “попарно симметричные” моменты вида t и $(2T - t)$, где $t < T$.

Заметим, что кроме релейных управлений (с конечным числом точек переключения) в задачах с двумя степенями свободы не исключены особые (вырожденные) управления, иногда интерпретируемые как скользящие режимы с бесконечно быстрыми переключениями управления. Для систем с одной степенью свободы особые управления, как правило, не возникают [6]. Это связано с тем, что если управление входит в уравнения движения линейно, то в записи оптимального управления под знаком sign участвует (в качестве множителя) только одна из сопряженных переменных. Если она окажется тождественно равной нулю, то (в силу однородности сопряженной системы) вторая тоже обратится в нуль, что противоречило бы принципу максимума Понтрягина, где сопряженный вектор не может быть нулевым.

Для рассматриваемой системы (1.1) с двумя степенями свободы структура управления (1.4) сложнее, поэтому функции $\lambda_2(t)$, $\lambda_4(t)$, не будучи тождественно равными нулю, вместе могут обращать в нуль выражение под знаком sign , т.е. особые управления в таких системах возможны.

В качестве необходимого отступления обсудим наглядные образы для известных оптимальных решений в малой окрестности нуля.

2. Геометрические свойства в линейном приближении. Известно [1, 2] решение задачи оптимального быстродействия для случая, когда обсуждаемая система (1.1) заменяется упрощенной (линейной) моделью в предположении о малости значений всех координат:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 + u, \quad |u| \leq a. \quad (2.1)$$

Соответствующий гамильтониан

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 \varphi_2 + \lambda_4 (-\varphi_1 + u)$$

максимален при

$$u = a \text{sign}(\lambda_2 + \lambda_4),$$

а сопряженная система имеет линейный вид

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = \lambda_4, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3. \quad (2.2)$$

В работах [1, 2] показано, что в пространстве $(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$ такая система переводится из точки $(-b, 0, 0, 0)$ в точку $(b, 0, 0, 0)$ за наименьшее время посредством релейного управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, имеющего в общем случае три переключения – в моменты времени τ , T и $(2T - \tau)$. При совпадении $\tau = T$ (“тривиальный” случай) движение будет с одним переключением управления, когда время разгона (торможения) тележки в точности равно периоду колебания маятника относительно отклоненной оси в переносном движении.

При трех переключениях, когда $\tau \neq T$, предложенное в [2] решение сопряженной системы (2.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv 1, & \lambda_2 &= T - t, & \lambda_3 &= \theta \cos(T - t), \\ \lambda_4 &= \theta \sin(T - t), & \theta &= (\tau - T) / \sin(T - \tau), \end{aligned} \quad (2.3)$$

так что оптимальное по быстродействию управление будет

$$u = a \text{sign}[T - t + \theta \sin(T - t)].$$

Длительность T оптимальной полутраектории можно явно выразить через момент времени τ первого переключения управления:

$$T = \tau + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos \tau}}\right) + \arcsin\left(\frac{\sin \tau}{\sqrt{5 - 4 \cos \tau}}\right), \quad (2.4)$$

откуда следует монотонная зависимость величины T (а значит, и величины b) от параметра τ .

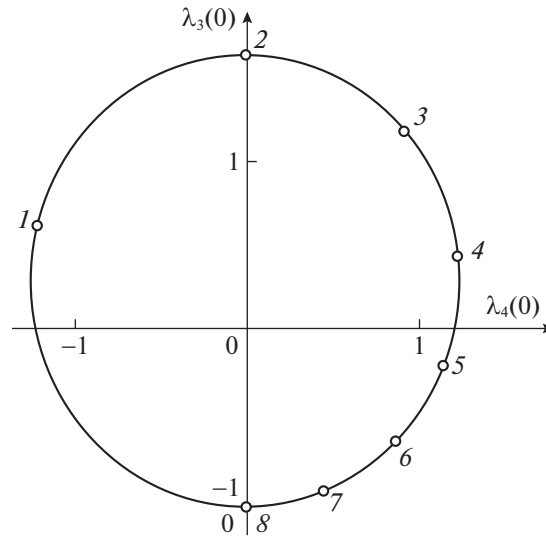


Рис. 2. Начальные условия для сопряженных переменных (2.3) линейной системы (2.1)

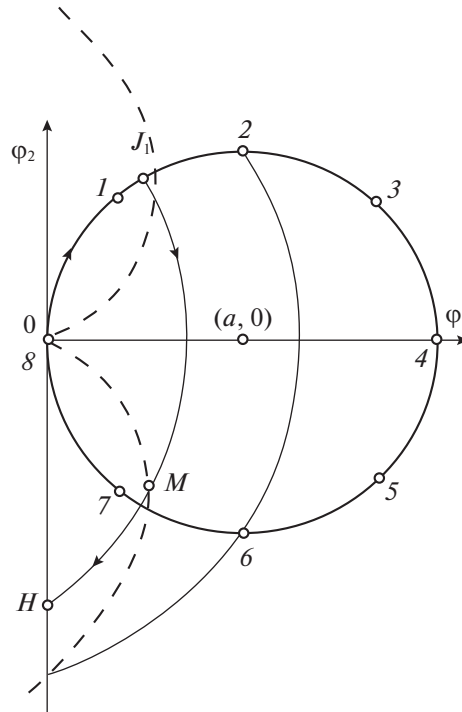


Рис. 3. Оптимальные полутраектории на плоскости (φ_1, φ_2) для линейной системы (2.1)

Задавая каждую оптимальную траекторию своим параметром τ , можно изобразить для них начальные значения сопряженных переменных $\lambda_4(0), \lambda_3(0)$ на одноименной плоскости в виде точек, составляющих вместе овальную линию (рис. 2). Номерам $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ помеченных точек соответствуют значения параметров $\tau_i = i\pi/4$. Точки, соответствующие номерам 0 и 8, на рис. 2 совпадают (далее на рис. 3 – аналогично).

Приведем геометрическую интерпретацию оптимальных движений на фазовой плоскости (φ_1, φ_2) , ограничиваясь (ввиду симметрии) изображением полутраекторий (при $t \in [0, T]$) (рис. 3). Каждая из них выходит из точки O с координатами $(0, 0)$ при $u = a$, продолжаясь по окружности

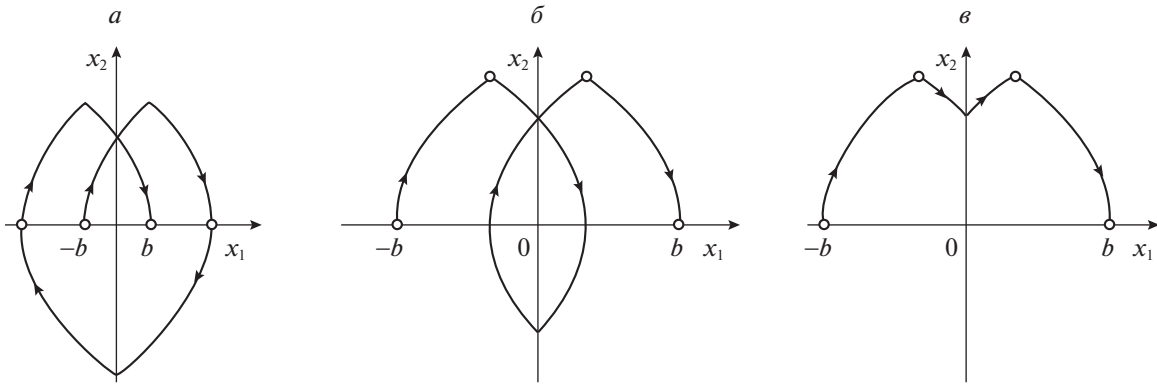


Рис. 4. Типы оптимальных движений тележки в линейном случае (a – $в$)

с центром $(a, 0)$ и радиусом a до переключения управления в момент $t = \tau$, например в точке J_1 (рис. 3). Далее при $u = -a$ вычерчивается дуга J_1H окружности с центром $(-a, 0)$. Каждая полутраектория завершается на оси $\varphi_1 = 0$ и затем дополняется симметрично относительно этой оси с заменой управлений на противоположные.

На дуге J_1H показан участок J_1M той же длительности τ , что и для дуги OJ_1 . Можно показать (подробности опускаем), что геометрическое место таких точек M есть кардиоиды (на рис. 3 она показана пунктиром) с осью симметрии $O\varphi_1$. Ее свойства (т.е. соотношения временных длительностей дуг OJ_1 и J_1H) обуславливают существование трех разных типов оптимальных перемещений тележки (рис. 4, a – $в$) на фазовой плоскости (x_1, x_2) .

Тип 1. При $0 < \tau < \pi/6$ (рис. 4, a) тележка совершает глубокий реверс, откатываясь в область $x_1 < -b$. Если $\tau = \pi/6$, то начальный и конечный пункты будут пройдены дважды.

Тип 2. При $\pi/6 < \tau < \pi/2$ (рис. 4, $б$) тележка совершает локальный реверс в окрестности нуля. Если $\tau \rightarrow \pi/2$, то “петля” фазовой кривой уменьшается, вырождаясь в точку $(0, 0)$.

Тип 3. При $\pi/2 < \tau < 2\pi$ (рис. 4, $в$) тележка движется без реверсов, т.е. все время имеет скорость $x_2 \geq 0$. Если $\tau = 2\pi$, то три момента переключения сливаются в один (на оси Ox_2) – этот случай “тривиальный”.

3. Численное решение нелинейной задачи (1.1)–(1.5). Искомые оптимальные траектории должны удовлетворять условиям принципа максимума Понтрягина, т.е. должны быть решениями уравнений (1.1)–(1.5). Из (1.5) следует, что $\lambda_1 = \text{const}$. Учитывая, что решение системы (1.5) задается с точностью до ненулевого множителя, далее везде примем $\lambda_1 = 1$. Тогда ввиду (1.6) получим соотношение

$$\lambda_2(t) = T - t, \quad (3.1)$$

где T – длительность полутраектории. На фазовой плоскости (φ_1, φ_2) она соединяет начало координат и некоторую точку на оси $\varphi_1 = 0$. Выражение $f(t)$, стоящее для оптимального управления (1.4) под знаком sign , примет вид

$$f(t) = T - t + \lambda_4(t) \cos \varphi_1(t). \quad (3.2)$$

На участках постоянства управления решение системы (1.1), (1.5) сводится к квадратурам [4]. Однако при неизвестном заранее количестве точек переключения управления система трансцендентных уравнений, описывающих куски оптимальных траекторий, становится практически неразрешимой. Учитывая также упомянутую выше возможность особых управлений, следует признать применение численных методов неизбежным.

Как правило, численное интегрирование систем на основе принципа максимума затруднено ввиду отсутствия начальных значений сопряженных переменных. В нашем случае эта трудность может быть ослаблена путем учета замечаний 1, 2 и соотношений (1.6), используя которые будем искать оптимальные полутраектории и изображать их проекции на фазовую плоскость (φ_1, φ_2) .

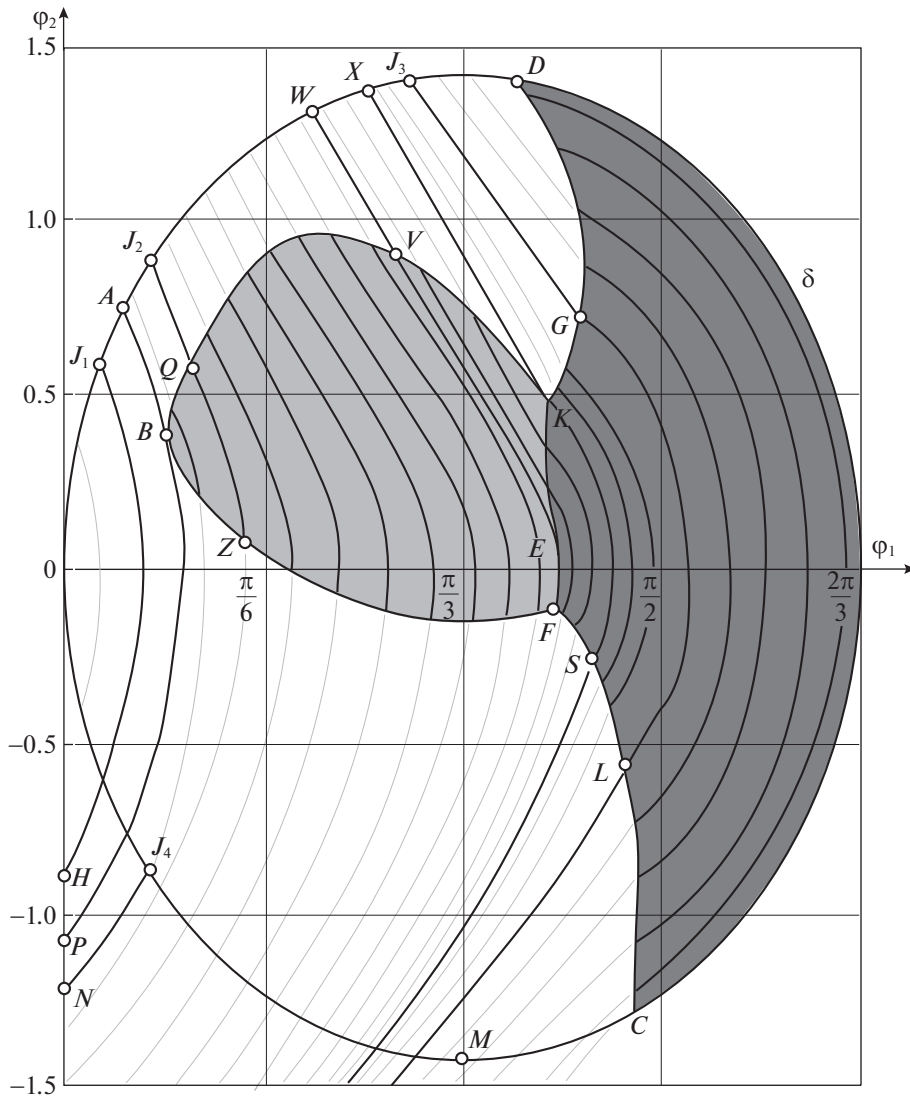


Рис. 5. Оптимальные полутраектории на плоскости (φ_1, φ_2) для нелинейной системы (1.1)

Для них подразумеваем симметричные (относительно оси $\varphi_1 = 0$) продолжения, как это было и в линейном случае (рис. 3).

Простейшая оптимальная полутраектория имеет вид замкнутой линии, далее обозначаемой δ (рис. 5) и имеющей уравнение

$$\frac{\varphi_2^2}{2} - a \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 = -1.$$

В обозначениях $\varphi = \varphi_1 - \beta$, где

$$\beta = \arcsin(a/\sqrt{a^2 + 1}),$$

это уравнение сводится к форме

$$\frac{\varphi_2^2}{2} - \sqrt{a^2 + 1} \cos \varphi = -1,$$

нечувствительной к замене $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2$. Это значит, что точка с координатами $(\beta, 0)$ является центром симметрии кривой δ .

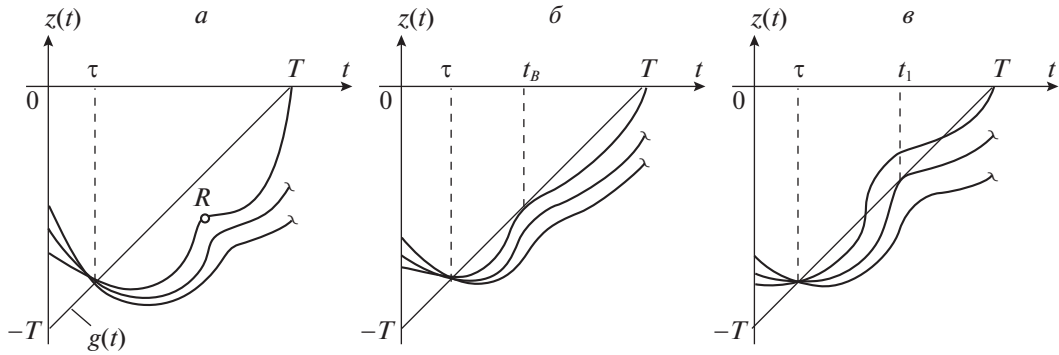


Рис. 6. Случаи взаимного расположения кривой $z(t)$ и прямой $g(t)$ (а–в)

Движение по кривой δ осуществляется при постоянном управлении $u \equiv +a$ из начальной точки O по часовой стрелке. Сделав полный оборот за время T_* , изображающая точка двигается далее из точки O при $u \equiv -a$ по линии, симметричной δ относительно вертикальной оси $\varphi_1 = 0$. В итоге при $t \in [0, T_*]$ тележка осуществляет разгон, а при $t \in [T_*, 2T_*]$ – торможение. Такое “тривиальное” оптимальное движение с одним переключением управления встречалось и у линейной системы.

Далее везде примем конкретное значение $a = \sqrt{3}$. Тогда $T_* \approx 4.76802$, $\beta = \pi/3$.

Как и следовало ожидать, при малых значениях координат нелинейная система качественно близка к линейной и оптимальные по быстродействию перемещения системы (1.1) происходят с тремя переключениями управления. Их можно построить численно, составляя полутраектории из двух частей (на рис. 5 – дуги вида OJ_1 и J_1H), по следующему алгоритму. Задавая значение $t = \tau$ (момент времени первого переключения управления в точке J_1), можно численным интегрированием найти $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, а также время T движения из O в H . Используя соотношение (3.2) и условие переключения управления в виде $f(\tau) = 0$, получим

$$\lambda_4(\tau) = (\tau - T) / \cos\varphi_1(\tau). \quad (3.3)$$

Значение $\lambda_3(\tau)$ найдется численным перебором с целью достижения условия $\lambda_4(T) = 0$. Эта процедура иллюстрируется (рис. 6, а) поведением графиков функций

$$z(t) = \lambda_4(t) \cos\varphi_1(t), \quad g(t) = t - T.$$

Их разность равна выражению $f(t)$ (3.2), которое определяет знак оптимального управления и должно обращаться в ноль при $t = \tau$ и $t = T$. Взаимное расположение кривой $z(t)$ и прямой $g(t)$ при $t > \tau$ зависит от выбора $\lambda_3(\tau)$, так как угол наклона графика $z(t)$ в точке $t = \tau$ определяется выражением

$$\dot{z} = -\lambda_3 \cos\varphi_1 - \lambda_4 \varphi_2 \sin\varphi_1, \quad (3.4)$$

где величины $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, $\lambda_4(\tau)$ уже известны. С уменьшением параметра $\lambda_3(\tau)$ значение $\dot{z}(t)$ непрерывно растет, порождая семейство кривых $z(t)$, $t \in [\tau, T]$, лишь одна из которых (при искомым значении $\lambda_3(\tau)$) удовлетворит условию $z(T) = g(T)$ (рис. 6, а). Найдя численно такое $\lambda_3(\tau)$, можно затем проинтегрировать систему в обратном времени вдоль дуги J_1O и получить величины $\lambda_3(0)$, $\lambda_4(0)$. Они примерно равны начальным условиям для решения линейной системы (2.3) с тем же моментом времени τ переключения (рис. 2). Из точки H выходит вторая полутраектория, симметричная относительно оси $\varphi_1 = 0$, так что оптимальное управление имеет всего три переключения (в моменты времени τ , T , $2T - \tau$).

Такая схема реализуема только для “малых” значений τ , не превосходящих некоторого критического $\tau_A \approx 0.4572$ (на рис. 5 ему соответствует положение точки A на кривой δ). Особенностью траектории, выходящей из точки A при $u = -a$, является то, что в ее характерной точке B происходит (на мгновение) обращение в ноль выражения $f(t)$ (3.2), т.е. графики $z(t)$ и $g(t)$ не только пересекаются при $t = \tau$ и $t = T$, но и касаются в момент времени $t_B \in (\tau, T)$ (рис. 6, б). Этому

касанию предшествовало с ростом значения $\tau \in (0, \tau_A)$ монотонное приближение к прямой $g(t)$ точки R , которая лежит на кривой $z(t)$ (см. рис. 6, *a*) и соответствует локальному экстремуму $f(t)$.

При последующем увеличении значения $\tau > \tau_A$ описанная выше процедура подбора параметра $\lambda_3(\tau)$ становится нерезультативной, так как единственному значению $\lambda_3(\tau)$, обеспечивающему достижение цели $z(T) = g(T)$, соответствует лишь график $z(t)$, пересекающий прямую $g(t)$ при $t \in (\tau, T)$ (рис. 6, *б*). По этой причине не существует выходящей из точки J_2 (рис. 5) оптимальной фазовой кривой, достигающей оси $\varphi_1 = 0$ при постоянном управлении $u = -a$.

Качественное сходство фазовых портретов для нелинейной (рис. 5) и линейной (рис. 3) систем обнаруживается при первом переключении управления не только на дуге OA , но и на завершающем фрагменте кривой δ . Например, оптимальным является движение (при $u = a$) из O вплоть до точки J_4 с дальнейшим продолжением (при $u = -a$) по кривой J_4N . Необходимый для этого подбор параметра $\lambda_3(\tau)$ (по описанной выше схеме) возможен для всех точек дуги OC . Точке C соответствует такое критическое значение $\tau_C \approx 3.2387$, при котором график $z(t)$ касается прямой $g(t)$ в некоторый предшествующий момент времени $t_D \in (0, \tau_C)$. Другими словами, на оптимальной траектории с первым переключением в точке C существует точка D (рис. 5), при прохождении через которую управление, как и в точке B , на мгновение обращается в нуль. Найденное значение $t_D \approx 1.293$. Ввиду свободы интерпретации множества меры нуль можно считать, что в точке B – вырожденный участок с особым управлением, а в точке D – сближение двух моментов времени переключения вплоть до совпадения.

Таким образом, оптимальные движения с тремя переключениями управления возможны лишь для ситуаций, когда первому моменту времени переключения ($t = \tau$) на кривой δ (рис. 5) соответствуют точки дуги OA и дуги CO .

В случае первого переключения в точках, близко предшествующих D , численные эксперименты обнаруживают существование оптимальных движений с семью переключениями управления. Такова, например, траектория с переключениями в точках J_3, G, L , затем – на оси $\varphi_1 = 0$ и далее – симметрично в левой полуплоскости. Эти точки можно найти варьированием двух параметров T и $\lambda_3(\tau)$ при известных $\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$: для каждого значения T находится $\lambda_4(\tau)$ (3.3), затем подбирается $\lambda_3(\tau)$ из условия $\lambda_4(T) = 0$. Искомым окажется то значение T , для которого $\varphi_1(T) = 0$. Таким способом численно строятся траектории с семью переключениями управления для случаев, когда первое переключение происходит на дуге XD , т.е. когда $\tau \in (\tau_X, t_D)$, где $\tau_X \approx 1.015$.

Из найденных точек переключения постепенно составляются линии переключения DK (с “минуса” на “плюс”) и CS (с “плюса” на “минус”). На рис. 5 области движений при $u = -a$ показаны белым цветом, а при $u = a$ – темно-серым.

Численный анализ показывает, что для оптимальных траекторий, выходящих из точек дуги AH на кривой δ (рис. 5), не существует продолжений с конечным числом переключений управления. Зато для каждой из этих траекторий обнаруживается участок с особым управлением $u_0(t)$, которое принимает свои значения внутри интервала $(-a, a)$. Вместе эти “вырожденные” участки составляют “область особых управлений”, закрашенную на рис. 5 светло-серым. Например, после переключения в точке J_2 (рис. 5) движение продолжается (при $u = -a$) до точки Q , затем – по дуге QZ с особым управлением $u = u_0(t)$, а потом – из точки Z (при $u = -a$) до оси $\varphi_1 = 0$, после чего симметрично продолжается в левой полуплоскости. Здесь следует помнить, что искомое быстродействие означает не скорейшее попадание из точки J_2 на ось $\varphi_1 = 0$ (это происходило бы при $u = -a$), а наибольшую дальность перемещения тележки при том времени $2T$, которое затрачено на управление системой.

Упомянем, к сведению, следующий факт. Численные эксперименты обнаруживают весьма эффективные по быстродействию полутраектории в виде продолжений из точек дуги AH на кривой δ , когда до попадания на ось $\varphi_1 = 0$ вводится еще два переключения управления (при $t = t_1$ и $t = t_2$). Алгоритм вычислений состоял в том, что для каждого фиксированного значения T варьированием параметров τ и t_1 (с доопределением t_2 из условия $\varphi_1(T) = 0$) выбиралась наибольшая дальность перемещения тележки. Такие движения с семью переключениями управления не удовлетворяют уравнениям (1.5) принципа максимума, но всего на 1–2% уступают в быстродействии режимам с особым управлением, найденным далее.

Как известно [7], значения особого управления определяются из условия, что на некотором промежутке времени выражение, взятое в формуле для управления под знаком sign, остается тождественно равным нулю. В нашем случае это – выражение $f(t)$ (3.2), которое приравняется к нулю вместе с производными по времени, используя также формулы (1.1), (1.5):

$$T - t + \lambda_4 \cos \varphi_1 \equiv 0, \quad (3.5)$$

$$-1 - \lambda_3 \cos \varphi_1 - \lambda_4 \varphi_2 \sin \varphi_1 \equiv 0, \quad (3.6)$$

$$2\lambda_3 \varphi_2 \sin \varphi_1 - \lambda_4 (\cos 2\varphi_1 + \varphi_2^2 \cos \varphi_1) - (\lambda_4 \sin 2\varphi_1) u \equiv 0. \quad (3.7)$$

Из соотношения (3.7) (с учетом (3.5), (3.6)) получаем формулу для особого управления u_0 :

$$u_0 = \frac{\varphi_2}{(T - t) \cos \varphi_1} - \frac{\cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \varphi_2^2 (1 + \sin^2 \varphi_1)}{\sin 2\varphi_1 \cos \varphi_1}. \quad (3.8)$$

Значения этой функции имеют смысл лишь там, где они не превосходят ограничений на управление $-a \leq u_0 \leq a$.

В формуле (3.7) коэффициент перед u фактически совпадает с выражением, которое должно быть неотрицательным, согласно необходимому условию Келли для оптимальности особых управлений [7]:

$$-u \lambda_4 \sin 2\varphi_1 \geq 0. \quad (3.9)$$

В нашем случае это неравенство выполняется, так как в рассматриваемой области движений (светло-серой на рис. 5) имеем $\lambda_4 < 0$ и $0 < \varphi_1 < \pi/2$.

Построение оптимальных траекторий с особыми управлениями численно выполнялось по следующему алгоритму. Выбиралась конкретная точка (например, J_2) на дуге AX на кривой δ , т.е. принимались значения τ , $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$. Задавалось (последовательным приближением) время движения T , вычислялось $\lambda_4(\tau)$ (3.3) и варьировалось значение параметра $\lambda_3(\tau)$ с целью достижения условия $\dot{z} = 1$ (3.4). Другими словами, выбиралась такая траектория, для которой график функции $z(t)$ касается прямой $g(t)$, как на рис. 6, в. Найденной точке касания t_1 соответствовал момент времени входа системы в режим особого управления (точка Q на рис. 5). Момент $t = t_2$ выхода из этого режима (в точке Z на рис. 5) подбирался из условия $\varphi_1(T) = 0$, а последовательно уточняемым временем T обеспечивалось условие $\lambda_4(T) = 0$. Таким способом были построены траектории, продолжаемые из точек дуги AW – для них особые управления (3.8) не превосходят a . Пункт W (где $\tau_W \approx 0.9085$) оказался критическим: выходящая из него траектория содержит характерную точку E , в которой особое управление (3.8) на мгновение достигает верхнего ограничения $u = a$.

Для движений, продолженных из точек дуги WX , особые управления (3.8) растут от $-a$ до значений, превышающих a , поэтому алгоритм был модифицирован. Момент времени t выхода из режима особого управления и само значение T подбирались так, чтобы дальнейшее движение, удовлетворяющее условиям $\varphi_1(T) = 0$, $\lambda_4(T) = 0$, проходило сначала при $u = a$, затем при $u = -a$.

Каждый раз из вновь найденных точек переключения достраивались линии переключения KE (после которой $u = a$) и SF (после которой $u = -a$). Точка K разделяет сплошную линию переключения DE на две части, так что на участок DK приходят траектории при $u = -a$, а на участок KE – при $u = u_0(t)$ (3.8).

Заметим, что дуга EF является не линией переключения, а частью фазовой кривой, выходящей из W . Если из точки E выпустить непродолжительную траекторию EE_1 при $u = a$, то она касалась бы дуги EF в точке E , но лежала бы “левее” всех траекторий “ $u = a$ ”, не совпадая при этом с EF . Иначе говоря, на фазовом портрете (рис. 5) имеется “пустой” сектор, образованный дугами EF и EE_1 и не содержащий участков траекторий. Заметим, что на этом же портрете встречается и наложение участков оптимальных траекторий, например, в виде J_4N . Другими словами, изображение является лишь проекцией семейства оптимальных траекторий (задачи быстрогодействия с частными краевыми условиями (1.2), (1.3)) на плоскость (φ_1, φ_2) .

4. Обсуждение результатов. Большинство показанных на рис. 5 фазовых кривых описывает режимы колебаний маятника. Исключение составляют участки траекторий, лежащих выше сепаратрисы, и продолжениям которых (при $u = -a$) соответствовали бы “режимы вращений”.

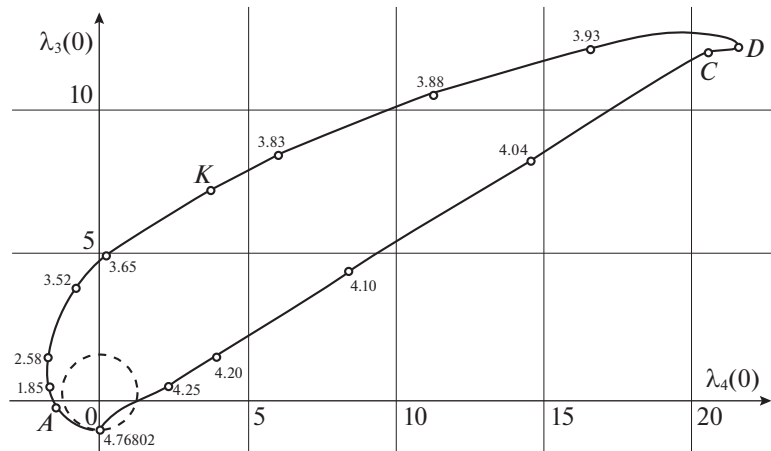


Рис. 7. Начальные условия для сопряженных переменных (1.5) нелинейной системы

Эти участки выходят из точек правой половины дуги XD до линии переключения DG , а также из точек дуги MC до оси $\varphi_1 = 0$.

Все построенные на рис. 5 полутраектории (вместе с их продолжениями, симметричными относительно оси $\varphi_1 = 0$) являются решениями системы (1.1)–(1.5), т.е. удовлетворяют необходимым условиям оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина.

Восстановленные для них (интегрированием в обратном времени) начальные значения $\lambda_4(0)$, $\lambda_3(0)$ показаны на рис. 7 в виде непрерывной замкнутой линии, точки которой параметризованы значениями $T \in [0, T_*]$. Для сравнения в этом же масштабе пунктиром показана “овальная” линия, ранее построенная (рис. 2) для линейной системы (2.1)–(2.2). Замкнутость этих линий (рис. 7) обусловлена следующим свойством.

З а м е ч а н и е 3. Двум оптимальным траекториям в задаче (1.1)–(1.5), для которых моменты времени τ первого переключения управления отличаются на величину kT_* ($k \in \mathbb{N}$), соответствуют одинаковые начальные условия $\lambda_4(0)$, $\lambda_3(0)$.

Это следует, например, из вычисления (3.3), которое не меняется при одновременном изменении τ и T на величину kT_* .

Говоря о фазовой плоскости (x_1, x_2) , можно увидеть следующие разновидности движения тележки в зависимости от момента времени первого переключения управления τ (его нижний индекс указывает точку переключения на рис. 5). Движения с тремя переключениями управления при $\tau \in (0, \tau_A)$ аналогичны типу 1 (рис. 4, а), а при $\tau \in (\tau_C, T_*)$ – типу 3 (рис. 4, в).

Новые типы движения (в сравнении с линейной системой) возникают в диапазоне $\tau \in (\tau_A, \tau_X)$, где каждая полутраектория содержит участок с особым управлением. При значениях τ , чуть больших τ_A , фазовые кривые (x_1, x_2) напоминают по форме тип 1, но внутри второй и третьей дуг парабол вставляются непараболические участки (из-за особых управлений). С увеличением τ (например, при первом переключении в точке J_2 на рис. 5) аналогичные искажения появляются внутри второй и третьей дуг парабол фигуры, ранее отвечавшей типу 2 (рис. 4, б).

На рис. 8 показана половина фазовой кривой (x_1, x_2) для случая $\tau_W = 0.9085$, которому на рис. 5 соответствует полутраектория $OWVEFU$ (с неизображенным завершением в точке U на оси $\varphi_1 = 0$). Пунктирной линии соответствует дуга VEF с особым управлением u_0 , достигшим на мгновение (в точке E) значения a .

С увеличением значения $\tau \in (\tau_W, \tau_X)$ этот рисунок 8 эволюционирует за счет пунктирной линии VEF : точки V и E постепенно сближаются, а дуга EF заменяется удлиняющейся параболой. При $\tau = \tau_X$ точки V и E сливаются, так что от фигуры (рис. 8) остается лишь чередование восходящих и нисходящих парабол. С дополнением зеркальной (относительно оси Ox_2) полутраектории получается фазовая кривая с семью переключениями управления.

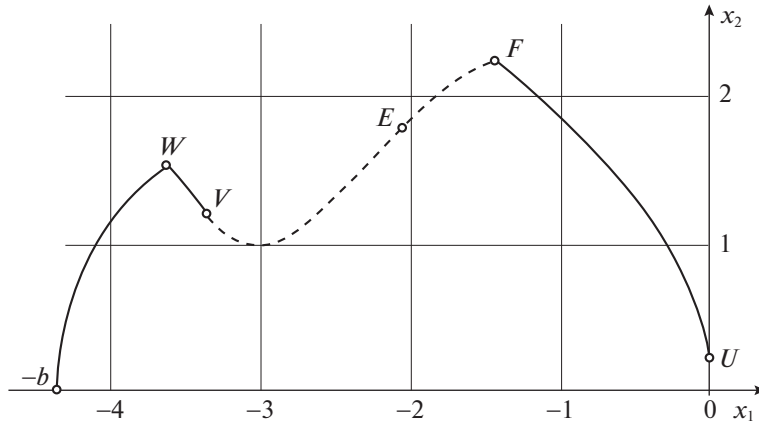


Рис. 8. Оптимальная полутраектория тележки на фазовой плоскости (x_1, x_2)

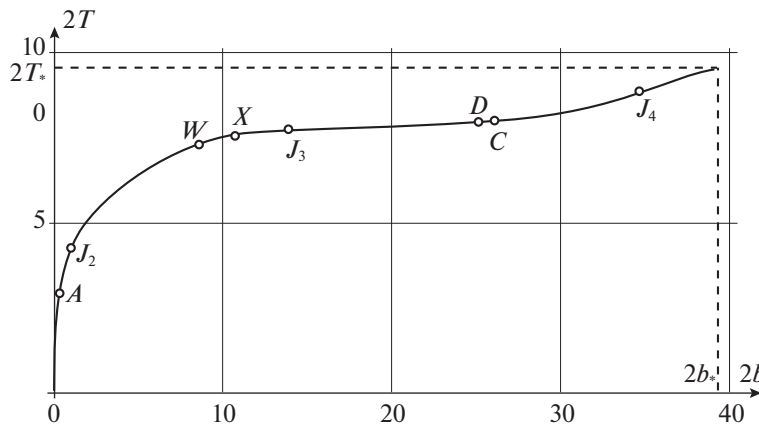


Рис. 9. Зависимость времени быстрогодействия от дальности перемещения тележки

При дальнейшем увеличении $\tau \in (\tau_x, t_D)$ у таких кривых на плоскости (x_1, x_2) восходящие дуги парабол (где $u = a$) удлиняются, а нисходящие (где $u = -a$) укорачиваются.

Наконец, на рис. 9 показана зависимость времени быстрогодействия $2T$ от задаваемого расстояния $2b$, на которое требовалось переместить тележку с гашением колебаний маятника. Таким образом, для каждого заданного расстояния найдено наименьшее время движения. Некоторые точки кривой (рис. 9) снабжены именами тех пунктов первого переключения управления, которые ранее обсуждались на рис. 5. Характерное расстояние $2b_*$ соответствует времени быстрогодействия $2T_*$ (для режима с одним переключением управления, названного выше “тривиальным”). При дальнейшем увеличении аргумента $2b$, согласно замечанию 3, кривая (рис. 9) может строиться с теми же значениями сопряженного вектора, но уже из точки $(2b_*, 2T_*)$ и т.д.

Заключение. В работе получено численное решение задачи оптимального по быстроддействию горизонтального перемещения тележки с маятником на требуемое расстояние из заданного положения равновесия в другое такое же состояние с гашением колебаний. Построены траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности (в виде принципа максимума Понтрягина) для асимптотически близкой нелинейной системы, когда масса маятника пренебрежимо мала в сравнении с массой тележки. Оказалось, что для оптимальных по быстроддействию траекторий встречаются как кусочно-постоянные управления (с одним, тремя и семью моментами переключения), так и особые управления.

Заметим, что в линейной системе (2.1) величина a (ограничения на управление) характеризует степень достоверности модели, поскольку $\max|\varphi_1| = 2a$, но не влияет на геометрические свойства оптимальных решений. Для нелинейной системы (1.1) роль величины a , очевидно, более важна.

При малых значениях a даже в нелинейной системе все оптимальные по быстродействию траектории могут иметь одно или три переключения управления. Более содержательными являются случаи достаточно больших значений a , когда на фазовой плоскости (φ_1, φ_2) кривая δ (рис. 5) пересекается вертикальной осью $\varphi_1 = \pi/2$. Тогда левее этой оси обязательно появляется линия переключения, поскольку в окрестности оси (где $\cos\varphi_1 \approx 0$) оптимальное управление в силу соотношений (1.4) и (3.1) может быть только положительным. Этой линии переключения предшествует область с особыми оптимальными управлениями.

Принятое в статье допущение $\varepsilon = 0$ упростило выкладки и изложение, но не исказило существенных свойств системы при малых значениях ε . Численные эксперименты показывают, что, например, при $\varepsilon = 0.3$ вид оптимальных траекторий на плоскости (φ_1, φ_2) качественно не отличается от рис. 5.

Заметим, наконец, что проблема управления платформами, несущими на себе осцилляторы, маятники или упругие звенья, остается актуальной. Ей посвящены, например, недавние работы [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Мамалыга В.М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. Каюмов О.Р. Оптимальное управление эллиптическим маятником // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 38–44.
5. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.
6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
7. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
8. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
9. Ананьевский И.М. Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.

О БЫСТРОДЕЙСТВИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЕГО ОСНОВАНИЯ

© 2021 г. Э. К. Лавровский

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

e-mail: lavrov.EK@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.12.2019 г.

После доработки 02.06.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

В “кинематической” постановке рассматриваются две задачи оптимального по быстродействию управления положением однозвенного маятника, закрепленного на подвижном основании. Основание может перемещаться вдоль горизонтальной оси. В первой задаче начальным положением маятника является нижнее, устойчивое положение маятника; требуется перевести его в верхнее, неустойчивое положение с успокоением либо в произвольном, либо заданном месте по горизонтальной оси. Во второй задаче начальным является, наоборот, верхнее положение. Требуется переместить маятник по горизонтальной оси, сохранив при этом в конце его изначальное вертикальное положение. Обе задачи рассматриваются на основе нелинейных уравнений. Численному решению задач предшествует анализ условий оптимальности, вытекающих из принципа максимума в случае кинематического управления данными объектами.

DOI: 10.31857/S0002338821010091

Введение. Проблема стабилизации неустойчивого положения равновесия управляемой системы сопряжена с определенными трудностями в особенности, когда число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы системы и ресурсы органов управления ограничены. Маятник — хорошо известный пример такой механической системы, который часто используется исследователями в качестве эталона реальных процессов.

Еще более сложным представляется задача стабилизации аналогичных объектов при наложении дополнительных экстремальных условий, например, на время стабилизации — задачи быстродействия. В последнее время задачи быстродействия для маятниковых систем широко обсуждались, например в линейной постановке [1, 2]. В качестве управления здесь выступает или сила, способствующая перемещению основания, или (в других задачах) момент в сочленениях маятниковой системы. Реже речь идет о нелинейной постановке таких задач [3–5].

Определенным источником сложностей, возникающих при нелинейной постановке (помимо проклятия размерности), является линейность управлений, входящих в правые части динамических уравнений. При этом в случае использования стандартных условий оптимальности принципа максимума [6] всегда есть опасность столкнуться с режимами особого управления, которые, как известно, исследуются при численном способе решения краевой задачи с большим трудом. Ниже приводится приближенный подход, связанный с изначальным предположением о том, что управления имеют весьма широкий диапазон изменения и способны практически мгновенно (например, в задаче о неуправляемом стержне, закрепленном на подвижном основании) обеспечить необходимый уровень скорости перемещения основания. Задача быстродействия рассматривается далее в условиях “кинематического” управления. Показано, что при таком подходе порядок системы уравнений уменьшается на единицу, управление входит в уравнение линейно-квадратичным образом, это фактически решает в дальнейшем проблему отсутствия особых и скользящих режимов при самых общих предположениях о правых частях динамических уравнений для маятниковых (и не только маятниковых) систем. Задача быстродействия решается затем численно, прямым перебором экстремалей принципа максимума. Приводятся результаты решения некоторых задач.

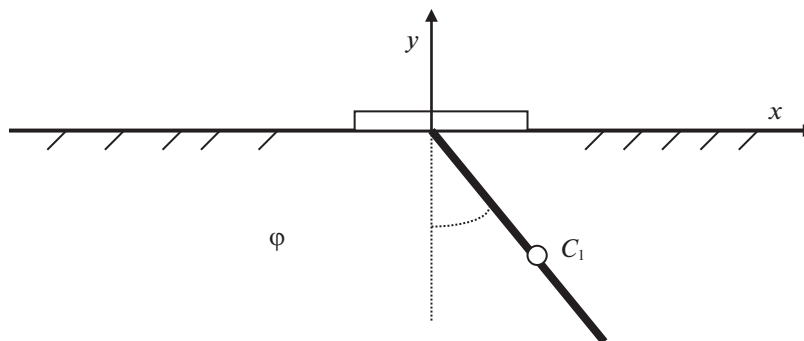


Рис. 1. Маятник на подвижном основании

1. Постановка задачи. Рассматривается весомый однозвенный маятник (рис. 1) массы m_1 , подвешенный на подвижном основании — “тележке” массы m_2 , могущей с помощью управления перемещаться по горизонтальной оси x . Маятник совершает в вертикальной плоскости плоские колебания, определяемые углом φ . Расстояние центра масс маятника C_1 от его точки подвеса равно r . Координаты этого центра масс и его скорость определяются следующими формулами:

$$C_1(x + r \sin \varphi, -r \cos \varphi), \quad V_{C_1}(\dot{x} + r\dot{\varphi} \cos \varphi, r\dot{\varphi} \sin \varphi).$$

Обозначая через J момент инерции маятника относительно его центра масс, нетрудно найти выражения для кинетической и потенциальной энергий такой системы, их первых производных, а затем построить для данной системы уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}[(J + m_1 r^2)\dot{\varphi} + m_1 r \dot{x} \cos \varphi] = -m_1 r \sin \varphi (g + \dot{x}\dot{\varphi}), \quad \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_1 r \dot{\varphi} \cos \varphi] = F. \quad (1.1)$$

Здесь F — сила, вырабатываемая не показанным на рис. 1 приводом, который обеспечивает перемещение тележки по горизонтальной оси x , g — ускорение свободного падения.

Обезразмерим переменные задачи

$$\tau = \frac{t}{r^{1/2} g^{-1/2}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{m_1 r^{3/2} g^{1/2}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{r}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{(m_1 + m_2)r^{1/2} g^{1/2}},$$

где обозначено

$$P = (J + m_1 r^2)\dot{\varphi} + m_1 r \dot{x} \cos \varphi, \quad u = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_1 r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Дифференцирование по безразмерному времени будем обозначать штрихом, опустим значок тильда при описании безразмерных переменных. Кроме того, будем считать, что сила F полностью контролирует поведение (в некоторых пределах) члена, стоящего во втором уравнении (1.1) под знаком дифференциала. Фактически это означает, что импульс u , отвечающий горизонтальному перемещению системы, превращается в нечто аналогичное управлению. В результате деления обеих частей первого уравнения (1.1) на $m_1 g r$ и соотношения для u на $(m_1 + m_2)g^{1/2} r^{1/2}$ получаем

$$\frac{dP}{d\tau} = -\sin \varphi (1 + x' \varphi'), \quad u = x' + b \varphi' \cos \varphi, \quad P = a \varphi' + x' \cos \varphi,$$

где обозначено $a = 1 + J/m_1 r^2$, $b = m_1/(m_1 + m_2)$. С учетом сказанного уравнения задачи можем переписать в следующем виде (u — управление):

$$\frac{dP}{d\tau} = -\sin \varphi (1 + x' \varphi') = -\sin \varphi [1 + (u - b \varphi' \cos \varphi) \varphi'] = -\sin \varphi [1 + (u - b \eta \cos \varphi) \eta] =$$

$$= -\sin \varphi \left[\left(1 - b \frac{P \cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} \cdot \frac{P}{a - b \cos^2 \varphi} \right) + u \left(\frac{P}{a - b \cos^2 \varphi} + \frac{2Pb \cos^2 \varphi}{(a - b \cos^2 \varphi)^2} \right) - u^2 \left(\frac{\cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} + \frac{b \cos^3 \varphi}{(a - b \cos^2 \varphi)^2} \right) \right], \quad (1.2)$$

$$\eta(P, \varphi, u) \equiv \frac{P - u \cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \eta, \quad \frac{dx}{d\tau} = u - b\eta \cos \varphi, \quad |u| \leq u_{\max} < \infty.$$

Поставим вначале задачу перевода маятника из нижнего устойчивого состояния покоя в верхнее неустойчивое. Эта задача может рассматриваться как с условием перевода основания в “начальное” положение, т.е. $x(0) = x(T) = 0$, так и при свободном конечном значении величины $x(T)$. Поскольку правые части в (1.2) не зависят от x , то здесь при свободном значении $x(T)$ возможно (с понижением порядка задачи до второго) рассмотрение случая $u_{\max} = \infty$, когда управлением фактически является сама координата x . Прямой выгоды, правда, такое преобразование исходной задачи, по-видимому, не дает, так как если $u(t)$ есть δ -функция, то переменные P, φ разрывны. В любом случае надо реализовывать нулевое конечное условие по P ; тогда при изменении u скачком до нуля мы автоматически получаем на правом конце и $\varphi'_k = 0$. Другое краевое условие, конечно, есть $\varphi_k = \pm\pi$. Итак, краевые условия на правом конце рассматриваемой ниже задачи быстрогодействия есть $P_k = 0, \varphi_k = \pm\pi$.

Выпишем гамильтониан задачи, члены гамильтониана при u и u^2 , а также построим сопряженные уравнения [6]

$$H = -\psi_1 \sin \varphi [1 + u\eta - b\eta^2 \cos \varphi] + \psi_2 \eta + \psi_3 (u - b\eta \cos \varphi), \quad H(u) = Au + Bu^2, \\ A = \frac{1}{a - b \cos^2 \varphi} \left(-\psi_1 P \sin \varphi \frac{a + b \cos^2 \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} - \psi_2 \cos \varphi + a\psi_3 \right), \quad (1.3) \\ B = \psi_1 \sin \varphi \cos \varphi \frac{a}{(a - b \cos^2 \varphi)^2},$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{1}{a - b \cos^2 \varphi} [\psi_1 \sin \varphi (u - 2b\eta \cos \varphi) - \psi_2 + \psi_3 b \cos \varphi], \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \psi_1 \cos \varphi (1 + \eta u - b\eta^2 \cos \varphi) + \psi_1 \sin \varphi (u\eta'_\varphi - 2b\eta\eta'_\varphi \cos \varphi + b\eta^2 \sin \varphi) - \\ - \psi_2 \eta'_\varphi + \psi_3 b (\eta'_\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi), \quad \frac{d\psi_3}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (1.4)$$

Значения u , дающие максимум функции $H(u)$, определяются формулами

$$B > 0, \quad A > 0 \Rightarrow u = u_{\max}; \quad B > 0, \quad A < 0 \Rightarrow u = -u_{\max}; \quad B > 0, \quad A = 0 \Rightarrow u = \pm u_{\max}; \\ B < 0, \quad A > 0 \Rightarrow u = \min\{u_{\max}, -A/2B\}; \quad B < 0, \quad A \leq 0 \Rightarrow u = \max\{-u_{\max}, -A/2B\}; \quad (1.5) \\ B = 0, \quad A \neq 0 \Rightarrow u = \text{sign } A; \quad B = A = 0 \Rightarrow u = u_{\text{особое}}.$$

Согласно (1.5), режимы особого управления в задаче отвечают случаю $A = B \equiv 0$, а протяженные скользящие режимы, характеризующиеся тем, что на них максимум гамильтониана по управлению достигается при нескольких значениях u , отвечают случаю $A \equiv 0, B > 0$.

2. Особые и скользящие режимы задачи быстрогодействия. Этот вопрос исследуем в общем виде. Рассматриваемая задача быстрогодействия относится к типу задач с линейно-квадратичным управляющим воздействием, для которых система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{y} = f(y) + g(y)u + h(y)u^2, \quad (2.1)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – n -мерный вектор (и вместе с ним вектор-функции f, g, h , неравные тождественно нулю), а $u \in [-u_{\max}, u_{\max}]$, $u_{\max} > 0$ – скалярная величина. Основная трудность численного решения оптимальных задач данного типа, а также большинства других нелинейных задач, как хорошо известно, состоит в наличии особых и скользящих участков ее оптимальной траектории, что сильно усложняет ее численный анализ. Покажем, что задачи подобного типа все-та-

ки относятся к разряду удобных для численного исследования. Для решения задачи быстродействия введем в рассмотрение n -мерный вектор сопряженных переменных ψ :

$$\psi_i = -\sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i} + u \frac{\partial g_j}{\partial y_i} + u^2 \frac{\partial h_j}{\partial y_i} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

и гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{y}_i = \sum_{i=1}^n \psi_i [f_i(y) + u g_i(y) + u^2 h_i(y)] = \max_u H \equiv \text{const} \geq 0. \quad (2.3)$$

1. Исследуем вопрос существования и структуру возможных режимов особого управления в этой задаче. Данным режимам отвечает случай, когда тождественно обращаются в нуль члены при u и u^2 в гамильтониане (2.3):

$$\sum_{i=1}^n \psi_i g_i(y) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i h_i(y) = 0. \quad (2.4)$$

Тогда, дифференцируя по времени первое из соотношений (2.4), находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_i g_i(y) + \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \dot{y}_j \right) &= -\sum_{i=1}^n g_i(y) \left[\sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i} + u \frac{\partial g_j}{\partial y_i} + u^2 \frac{\partial h_j}{\partial y_i} \right) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \psi_i \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j} (f_j + u g_j + u^2 h_j) \right] = \tilde{A}(\psi, y) + u^2 \tilde{B}(\psi, y) = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{A}(\psi, y) = \sum_{i,j=1}^n \left(\psi_i f_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \psi_j g_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right), \quad \tilde{B}(\psi, y) = \left(\sum_{i,j=1}^n \psi_i h_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \sum_{i,j=1}^n \psi_j g_i \frac{\partial h_j}{\partial y_i} \right).$$

Член при u в формуле (2.5) пропадает. Аналогичное дифференцирование второго условия в (2.4) дает

$$\tilde{C}(\psi, y) - u \tilde{B}(\psi, y) = 0, \quad \tilde{C}(\psi, y) = \sum_{i,j=1}^n \left(\psi_i f_j \frac{\partial h_i}{\partial y_j} - \psi_j h_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right). \quad (2.6)$$

Здесь уже пропадает член при квадрате управления. Структурно условия (2.5) и (2.6) можно записать как

$$\tilde{A}(\psi, y) + u^2 \tilde{B}(\psi, y) = 0, \quad \tilde{C}(\psi, y) - u \tilde{B}(\psi, y) = 0. \quad (2.7)$$

Исследуем специальный случай, когда $\tilde{B}(\psi, y) \equiv 0$, и, так сказать, общую ситуацию, когда $\tilde{B}(\psi, y) \neq 0$ и, согласно условию (2.7),

$$u = \tilde{C}(\psi, y) / \tilde{B}(\psi, y), \quad \tilde{A}(\psi, y) \tilde{B}(\psi, y) + \tilde{C}^2(\psi, y) = 0. \quad (2.8)$$

В общем случае имеем в пространстве (ψ, y) четыре соотношения: (2.3), (2.4) и второе условие (2.8). Первое из условий (2.8) определяет управление на особом режиме. Можно показать, что дальнейшее дифференцирование гамильтониана H ничего нового не дает. При дифференцировании второго из соотношений (2.8) возникает тривиальное соотношение, вообще говоря, линейно-квадратичное по u с коэффициентами, зависящими от (ψ, y) . Его можно превратить просто в соотношение от (ψ, y) , подставив особое управление из первого условия в (2.8) и т.д. Этот процесс дифференцирования можно продолжать до бесконечности, получая каждый раз следующее соотношение. Важно отметить, что получаемое в очередной раз соотношение независимо от предыдущих уже хотя бы потому, что в его конструкцию входят старшие частные производные f, g, h по вектору y . Тем самым, за исключением случая относительно простых по структуре функций f, g, h , у которых старшие производные совпадают с младшими, начиная с некоторого шага, процесс дифференцирования приводит к построению бесконечно большого числа независимых соотношений в то время, как пространство (ψ, y) конечно. На практике маловероятно, чтобы вся эта бесконечная система соотношений имела общие точки, причем пара-

доксально, но чем сложнее функции f, g, h , тем такая вероятность меньше. В Приложении 1 для рассматриваемой задачи дополнительно, с помощью непосредственного анализа доказывается отсутствие особых режимов управления.

В специальном случае изначально имеется шесть соотношений в пространстве (ψ, y) , поскольку здесь добавляются условия $\tilde{A}(\psi, y) = \tilde{B}(\psi, y) = \tilde{C}(\psi, y) = 0$. Дифференцируя их, можно получать квадратичные уравнения для управления на особом режиме. После этого ситуация повторяется.

2. Для исследования *скользящих режимов*, отвечающих случаю

$$\sum_{i=1}^n \psi_i g_i(y) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i h_i(y) > 0, \quad (2.9)$$

в принципе, надо вводить вспомогательную систему уравнений:

$$\dot{y} = \sum \lambda_i [f(y) + g(y)u_i + h(y)u_i^2], \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,$$

где λ_i – “доли” управления, а u_i – дополнительные базисные управления [7]. Максимум H по u_i “выделяет” в данном случае только два значения: $u_i = u_{\max}$ и $u_i = -u_{\max}$, т.е. достаточно рассматривать два значения λ_1, λ_2 . Требуется, чтобы все они доставляли максимум новому гамильтониану $H_* = \sum \lambda_i H(u_i)$, где под $H(u_i)$ понимается “старый” гамильтониан H . Причем линейная комбинация управлений u_i (которая исчезает в H_* ввиду равенства $\sum_{i=1}^n \psi_i g_i(y) = 0$) присутствует в динамических уравнениях в виде некоего $u_* = \lambda_1 u_{\max} - \lambda_2 u_{\max} = u_{\max}(\lambda_1 - \lambda_2)$, а квадратичные по u члены образуют в сумме выражение $\lambda_1 u_{\max}^2 + \lambda_2 u_{\max}^2 \equiv u_{\max}^2$. В таком же виде, а именно Bu_{\max}^2 , эти квадратичные члены входят и в H_* . Итак, рассматриваемые соотношения принципа максимума для вспомогательной системы сводятся к уравнениям (2.1)–(2.3), в которых линейные члены образуют некие величины, умноженные на u_* , а квадратичные – на u_{\max}^2 . Их следует использовать совместно с ограничением $|u_*| \leq u_{\max}$.

Исследование скользящих режимов связано с анализом условий (2.9) с формальной подстановкой во все получаемые выкладки:

$$u^2 = u_{\max}^2, \quad u = u_*.$$

Дифференцирование первого из условий (2.9) приводит к

$$\tilde{A}(\psi, y) + u_{\max}^2 \tilde{B}(\psi, y) \equiv 0. \quad (2.10)$$

Повторное дифференцирование соотношения (2.10) позволяет определить u_* как функцию переменных ψ, y . С учетом этого для переменных ψ, y в количестве $2n$ штук возникает, включая сюда и гамильтониан, переопределенная система из $2n + 3$ алгебраических и дифференциальных условий. Кроме того, должны выполняться указанные выше неравенства

$$|u_*| \leq u_{\max}, \quad B = \sum_{i=1}^n \psi_i h_i(y) > 0.$$

В ряде случаев, включая сюда и рассматриваемую в работе задачу, этого оказывается достаточно, чтобы прийти к противоречию. В Приложении 1 показан один из способов построения такого противоречия.

3. Численное исследование задачи. Отсутствие особых и скользящих участков на оптимальной траектории позволяет строить простые, эффективные численные алгоритмы ее решения. На рис. 2, 3 приведены результаты численного исследования (в безразмерных величинах) рассматриваемой задачи быстрого действия. При расчетах были выбраны следующие значения коэффициентов системы:

$$m_1 = 1 \text{ кг}, \quad m_2 = 1 \text{ кг}, \quad r_1 = 0.5 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.226,$$

т.е. основание и стержень имеют равные массы, причем стержень однороден. Рисунок 2 отвечает случаю оптимального торможения маятника в верхней точке, причем тележка занимает

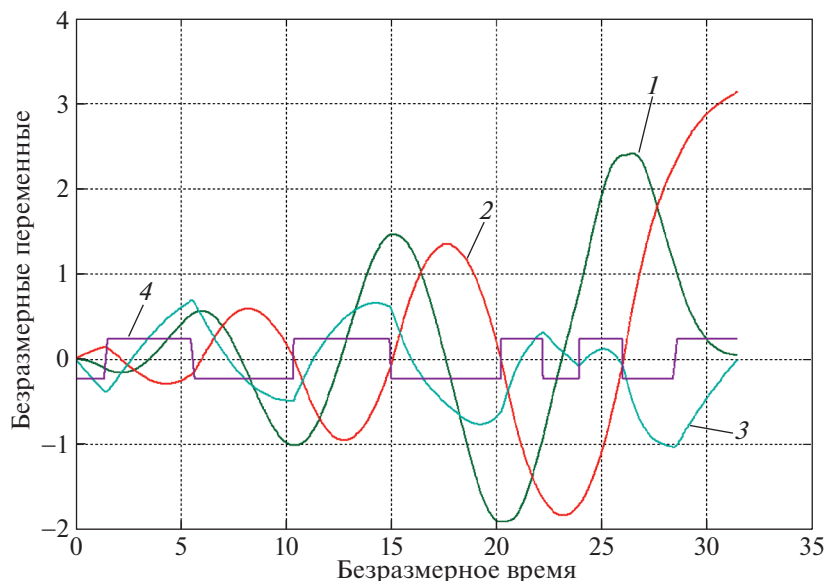


Рис. 2. Оптимальный по быстродействию процесс регулирования (1 — P , 2 — φ , 3 — x , 4 — u)

первоначальное — “нулевое” положение по x ; рисунок 3 — случаю такой же конечной конфигурации системы, но обобщенный импульс P системы и конечное положение основания произвольные. Соответствующие времена реализации этих режимов составляют $\tau = 31.50, 30.58$. Если в конце не задавать только P , то время равно $\tau = 30.59$, график процесса не приводится. Тем самым оптимальные по быстродействию времена во всех постановках отличаются не сильно, равно как и сами режимы управления. На рисунках показаны решения, отвечающие конечному углу $\varphi = \pi$. Им соответствуют, естественно, симметричные решения при конечном $\varphi = -\pi$. Данные оптимальные по быстродействию решения отыскивались при помощи анализа (с неким шагом) всего множества понತ್ರэгинских экстремалей задачи. Решения были получены с помощью перебора начальных значений сопряженной системы

$$\psi_1(0) = \sin \beta \cos \gamma, \quad \psi_2(0) = \sin \beta \sin \gamma, \quad \psi_3(0) = \cos \beta$$

при варьировании углов β, γ .

Управления u на рис. 2, 3 имеют девять режимов переключения с $u = u_{\max}$ на $u = -u_{\max}$ и наоборот. Некоторые из них плавные, остальные переключения делаются скачком. Все это, наряду с малой разностью оптимальных значений времен реализации, говорит об определенной близости режимов управления. С физической точки зрения представленные режимы идентичны — они основаны на постепенном “разбалтывании” маятника, требуемое состояние реализуется после третьего периода таких колебаний. Можно ожидать, что при решении задачи быстродействия в строгой постановке ее решения будут сродни данным.

На рис. 4, 5 представлены решения другой задачи для той же механической системы: первоначально маятник находится в покое, в неустойчивом вертикальном положении. Требуется максимально быстро перевести его в такое же вертикальное положение, но так, чтобы основание при этом переместилось вдоль положительного направления оси x на некоторое расстояние s . Иными словами, начальному состоянию отвечают краевые условия вида $P_0 = 0$, $\varphi_0 = \pm\pi$, а конечному — любой из набора $P_k = 0$, $\varphi_k = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ В линеаризованной постановке при $\varphi_0 = \varphi_k = \pi$ задача рассматривалась в [1, 2]. Обратимся к случаю $b \approx 0$, где $u \approx \dot{x}$, благо в этом случае присутствует отчетливая механическая аналогия. На рис. 4 жирными точками (кривая 1) отмечены безразмерные времена τ , отвечающие безразмерным смещениям s основания. Безразмерная высота (длина) стержня равна двум, т.е. при $s = 2$ имеем смещение основания на одну длину стержня, при $s = 4$ — на две длины и т.д. Если не задаваться никакими условиями по P, φ на правом конце, то, очевидно, наилучшим по времени является управление $u \equiv u_{\max}$. Тем самым имеем оценку снизу на время быстродействия. Эта нижняя оценка времени процесса

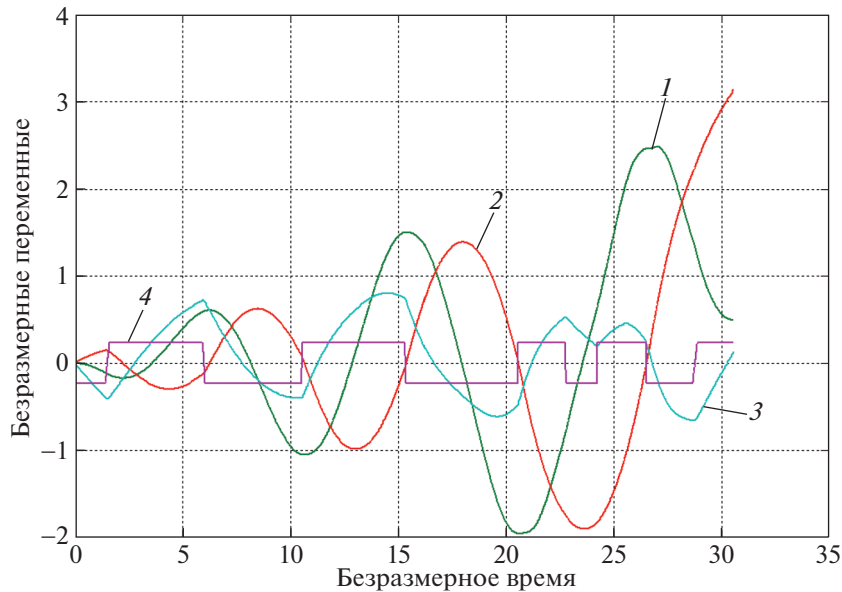


Рис. 3. Оптимальный по быстродействию процесс регулирования (1 – P , 2 – φ , 3 – x , 4 – u)

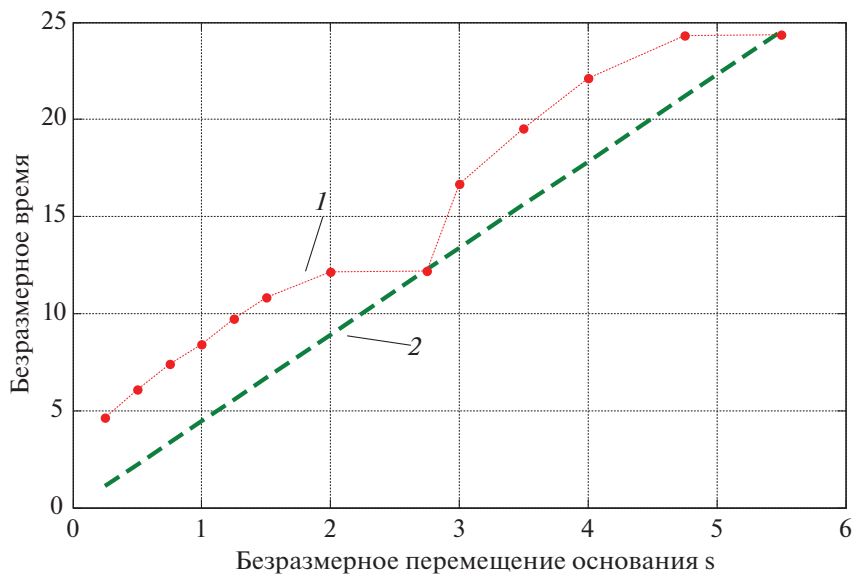


Рис. 4. Зависимость оптимального времени от смещения s основания (1 – реальный процесс, 2 – в идеальном случае)

представлена на рис. 4 прямой 2. Из рассмотрения рис. 4 вытекает, что истинные наибо́льшие времена то приближаются к нижней оценке (и даже совпадают с ней в отдельных точках), то удаляются.

Этому факту можно дать простое физическое объяснение. Изменим скачком скорость основания в начальном положении маятника с нулевой до скорости u_{\max} ($= 0.226$) и будем поддерживать ее некоторое время. Маятник получит некоторую начальную угловую скорость и начнет движение в сторону роста угла φ . Поскольку скорость основания в дальнейшем неизменна, то колебание маятника относительно основания будет носить такой же характер, как если при неподвижном основании просто толкнуть маятник в сторону с некоторой угловой скоростью. При рассматриваемых числовых параметрах системы полное безразмерное время одного свободного колебания маятника с учетом начального толчка равно (примерно) 12.18, причем в

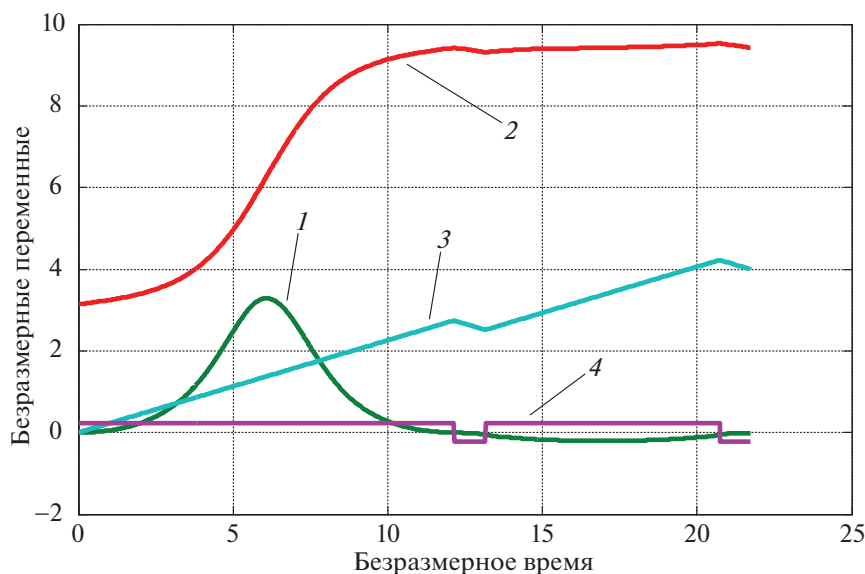


Рис. 5. Оптимальный по быстродействию процесс регулирования (1 – P , 2 – φ , 3 – x , 4 – u)

конце этого цикла величины P , φ равны начальным (плюс 2π по углу φ), а основание за то же время перемещается на расстояние $s = 2.75$. Именно в этой точке (и кратных им) нижняя оценка и истинное время быстродействия совпадают, поскольку мгновенное изменение $u = u_{\max}$ на нулевое его значение позволяет остановить маятник, достигший верхнего положения.

Если же значение s меньше 2.75 или несколько больше него, то необходим переход на определенный режим “торможения”, в силу чего тратится как бы избыточное время. Расчеты показывают, что на интервалах $0 \leq s \leq 2.75$, $2.75 \leq s \leq 5.5$ и т.д. картина управления как бы периодически повторяется. Пусть, например, $2.75 \leq s \leq 5.5$. В начале осуществляется переход на управление $u = u_{\max}$ и маятник делает один полный оборот. После этого, в зависимости от того, насколько велика разница $\Delta s = s - 2.75$, делается переход при “малых” Δs на режим $\{-u_{\max}, u_{\max}, -u_{\max}\}$ (с двумя переключениями и здесь теория [1, 2], примененная к построению управления линеаризованной системой в финальной фазе, дает достаточно хорошее приближение) либо при относительно “больших” Δs – на режим $\{-u_{\max}, u_{\max}\}$ (с одним переключением). При малых Δs процесс набора “недостающих” Δs протекает вблизи значения $\varphi = 3\pi$. Наоборот, при больших Δs ориентиром управления является $\varphi = 5\pi$. При этом в окрестности нижнего положения маятника $\varphi \approx 4\pi$ осуществляется на некоторое время переход на управление $u = -u_{\max}$ (затем снова на $u = u_{\max}$), в результате чего его угловая скорость вниз, а, значит, и общее время второго колебания не сильно изменяются по сравнению со свободным случаем. Из численного анализа можно сделать вывод, что при больших Δs “успокоение” по времени в окрестности $\varphi = 3\pi$ “стоит” дороже.

В качестве иллюстрации случая малых Δs на рис. 5 приведены графики, отвечающие случаю $s = 4$ (основание смещается на два корпуса маятника). Их маркировка полностью соответствует рис. 2, 3. Заметим, что переход на систему свободного выбора конечного $\varphi_k = \pm(2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, \dots$, заметно уменьшает время быстродействия.

Заключение. Показано, что в нелинейных задачах быстродействия для динамической системы с линейно-квадратичной зависимостью от управления особые и скользкие режимы должны, скорее всего, отсутствовать. В рамках “кинематического” способа управления численно решаются две задачи быстродействия для однозвенного маятника, который закреплен на подвижном основании, связанные с переводом маятника в верхнее неустойчивое положение. Такая постановка может быть использована при решении многих других задач быстродействия в системах, описываемых уравнениями Лагранжа (см. Приложение 2, п. 2). Все ее отличие от обычной динамической постановки с линейно входящими силой или моментом заключается в том, что ограничение налагается не на эту силу (или момент), а на соответствующую компоненту обобщенного импульса.

1. Исследуем возможность существования режимов особого управления в задаче быстрогодействия для системы (1.2). Как отмечалось выше, он отвечает случаю $A = B \equiv 0$. Анализируем второе условие из (1.3)

$$B = \psi_1 \sin \varphi \cos \varphi \frac{a}{(a - b \cos^2 \varphi)^2} \equiv 0.$$

Пусть $\psi_1 \equiv 0$. Тогда из условия $d\psi_1/d\tau = 0$ вытекает, что $\psi_3 b \cos \varphi - \psi_2 = 0$, а из условия $A = 0$, что $a\psi_3 - \psi_2 \cos \varphi = 0$. Поскольку определитель линейной алгебраической системы для множителей ψ_2, ψ_3 не равен нулю, получается, что все сопряженные переменные равны нулю. Противоречие.

Пусть $\cos \varphi \equiv 0$. Тогда ввиду постоянства угла φ имеем $P - u \cos \varphi = 0$, т.е. $P = 0$. Теперь, согласно первому из уравнений (1.2), получаем, что $\sin \varphi = 0$. А это невозможно.

Пусть $\sin \varphi \equiv 0$. Опять ввиду постоянства угла φ имеем $P = u \cos \varphi$. В силу первого из уравнений (1.2) имеем $P' = -\sin \varphi(1 + x'\varphi') = 0$, т.е. $P = \text{const}$, $u = \text{const}$. Постоянен и сопряженный множитель ψ_3 . Два других уравнения (1.4) дают

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{\psi_3 b \cos \varphi - \psi_2}{a - b \cos^2 \varphi}, \quad \frac{d\psi_2}{d\tau} = \psi_1 \cos \varphi.$$

Учтем, что $A = 0$, т.е. $a\psi_3 - \psi_2 \cos \varphi = 0$. Поскольку в последнем соотношении все остальные члены постоянны, то должен быть постоянен и сопряженный множитель ψ_2 . А тогда $\psi_2' = \psi_1 = 0$. С этого момента можно, например, повторять рассуждения случая $\psi_1 = 0$. Следовательно, существование режимов особого управления противоречит в данной задаче принципу максимума.

О скользящих режимах. Остановимся на основных этапах доказательства их отсутствия. Поскольку дополнительных алгебраических соотношений ровно три, какова и размерность вектора сопряженных переменных ψ , то этот вектор можно выразить как функцию динамических переменных y . Упрощает дело и то, что во все эти алгебраические соотношения вектор ψ входит линейно. Заметим, что ψ фактически является функцией только от P и φ , поскольку еще одна переменная x явно не входит в правые части динамических уравнений, следствием чего является к тому же интеграл $\psi_3 = \text{const}$. Другой стационарный интеграл от P и φ можно получить, подставляя два других сопряженных множителя ψ (а также в преобразованном виде управление u_*) в любое из оставшихся двух сопряженных уравнений.

Итак, скользящие (протяженные) участки возможны при условии, что на них $P \equiv \text{const}$, $\varphi \equiv \text{const}$. Но тогда $dP/dt = -\sin \varphi = 0$, т.е. $\sin \varphi = 0$, а, значит, $B = 0$, что противоречит изначальному условию $B > 0$.

2. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы q , которая описывается известными уравнениями Лагранжа

$$\frac{dP}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad P \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Здесь T, V – кинетическая и потенциальная энергии. Поскольку $\partial T/\partial \dot{q}$ линейно по скоростям \dot{q} , то условие $P = \partial T/\partial \dot{q}$ можно использовать для того, чтобы выразить линейным образом \dot{q} через импульсы P с коэффициентами, зависящими от q . Напротив, член $\partial T/\partial q$ зависит от \dot{q} квадратично.

Если рассматривается управляемое движение данной системы и в качестве управления принимается одна из компонент обобщенного импульса P , то мы приходим к системе вида (2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев Ю.Ф.* Оптимальное по быстродействию управление перемещением неустойчивого стержня // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 5.
2. *Голуб С.П., Голубев Ю.Ф.* Синтез оптимального по времени управления перемещением перевернутого стержня // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6.
3. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3.
4. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1.
5. *Лавровский Э.К.* О некоторых задачах быстродействия для маятниковых систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
7. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные скользящие режимы // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 6.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.1

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ
ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2021 г. Ф. А. Алиев^{a,b,*}, Н. Ш. Гусейнова^{a,**}, И. А. Магеррамов^{a,***},
М. М. Муталлимов^{a,****}

^a Институт прикладной математики, БГУ, Баку, Азербайджан

^b Институт информационных технологий, НАНА, Баку, Азербайджан

*e-mail: f_aliev@yahoo.com

**e-mail: nargiz_huseynova@yahoo.com

***e-mail: ilkin_072@mail.ru

****e-mail: mmutallimov@bsu.edu.az

Поступила в редакцию 18.07.2019 г.

После доработки 11.07.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Предлагается метод прогонки для решения задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями, суть которого заключается в сведении граничных условий к начальному условию. Используя свойства J -симметричности соответствующей Гамильтоновой матрицы, уравнений Эйлера–Лагранжа, показано, что линейные алгебраические уравнения для определения недостающих начальных данных решаемой системы имеют симметричную матрицу коэффициентов. Предложенный алгоритм позволяет уменьшить размерность задачи нахождения фундаментальной матрицы Гамильтоновой системы. Результаты иллюстрируются на примере линейно квадратичной задачи оптимального управления (стационарный случай) с минимальными управляющими воздействиями.

DOI: 10.31857/S0002338821010029

Введение. Как известно [1–3], для решения линейно квадратичной задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями в непрерывном случае [3–6] существуют разные методы: метод, повышающий размерности исходной системы [7, 8], метод прогонки [9, 10], метод Мошинского [11, 12]. Однако каждый из этих методов сталкивается с трудностями [13, 14] при определенных случаях: например, обобщение метода [9] к многоточечному случаю с неразделенными краевыми условиями, переход через узловые точки сталкивается с серьезными трудностями из-за неединственности переходов и т.п. Поэтому в данном случае предлагается новый метод, не требующий решения матричных уравнений Риккати, линейных матричных уравнений и др. Далее для построения соответствующих фундаментальных матриц приводится алгоритм, требующий решения матричных дифференциальных уравнений гораздо меньшей размерности. Результаты иллюстрируются на примере стационарной линейно квадратичной задачи (ЛКЗ) оптимизации с минимальным управляющим воздействием.

1. Постановка задачи. Пусть движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)x(t) + G(t)u(t), \quad t \in [t_0, \tau], \quad (1.1)$$

с неразделенными краевыми условиями

$$K_1x(t_0) - K_2x(\tau) = q, \quad (1.2)$$

где x – n -мерный фазовый вектор, $u(t)$ – m -мерный вектор управляющих воздействий, $F(t)$, $G(t)$ – известные кусочно-непрерывные функции-матрицы $n \times n$ -, $n \times m$ -размерности, K_1 , K_2 – постоянные матрицы $k \times n$ -размерности, q – постоянный k -мерный вектор, τ – заданное время.

Предполагается, что пара $(F(t), G(t))$ управляема в каждой точке отрезка времени (t_0, τ) [15], а СЛАУ (1.2) имеет хоть одно решение $[x^T(t_0), x^T(\tau)]^T$.

Требуется найти управляющие воздействия $u(t)$ так, чтобы с соответствующим $x(t)$ из (1.1), (1.2) минимизировали квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} (x^T(t)R(t)x(t) + u^T(t)C(t)u(t))dt. \quad (1.3)$$

Здесь $R(t) = R^T(t) \geq 0$, $C(t) = C^T(t) > 0$ – соответственно $n \times n$ -, $m \times m$ -размерные, кусочно-непрерывные функции-матрицы.

2. Метод, повышающий размерности исходной системы. Как известно [16], решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к нахождению решения следующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) - G(t)C^{-1}(t)G^T(t) \\ -R(t) - F^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = H(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

с дополнительными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= -K_1^T v, \\ \lambda(\tau) &= -K_2^T v, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\lambda(t)$ – n -мерный и v – k -мерный соответствующие сопряженные векторы Лагранжа оптимизационной задачи (1.1)–(1.3), а $u(t)$ определяется из соотношений $C(t)u(t) + G(t)\lambda(t) = 0$.

Пусть $\Phi(t, t_0)$ является фундаментальной матрицей системы (2.1), т.е.

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = H(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E, \quad (2.3)$$

где E – $2n \times 2n$ -единичная матрица. Обозначая

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

решение системы (2.1) представим в виде

$$\begin{cases} x(t) = \Phi_{11}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\lambda(t_0) \\ \lambda(t) = \Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}(t, t_0)\lambda(t_0) \end{cases}. \quad (2.5)$$

Пусть из (2.5) существует $\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)$, тогда из второго уравнения находим $\lambda(t_0)$ и, подставив в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= (\Phi_{11}(t, t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\Phi_{21}(t, t_0))x(t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\lambda(t), \\ \lambda(t_0) &= -\Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}^{-1}(t, t_0)\lambda(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $t = \tau$, решив системы линейно алгебраических уравнений (1.2), (2.2), (2.6), находим $x(t_0)$, $\lambda(t_0)$, $x(\tau)$, $\lambda(\tau)$ и v . Далее из (2.5) находим текущие значения $x(t)$, $\lambda(t)$, а управляющие воздействия определяются из соотношений

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)\lambda(t). \quad (2.7)$$

Такой подход является методом, повышающим размерность исходной системы (1.1), который изложен в [9]. Поэтому попытаемся уменьшить размерность в процессе решения задачи (1.1)–(1.3).

3. Новый метод прогонки. Для уменьшения вычислений используем соотношение (2.2) при $t = \tau$ в уравнениях (2.6), т.е. напишем (2.6) при $t = \tau$:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0))x(t_0) + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\lambda(\tau), \\ \lambda(t_0) &= -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)x(t_0) + \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\lambda(\tau). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее, учитывая (2.2) в (3.1), имеем

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0))x(t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T v, \\ &\quad -\Phi_{11}^T v = -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)x(t_0) - \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя из (3.2) $x(\tau)$ в (1.2) и объединяя со вторым уравнением (3.2), для определения $x(t_0)$ и v имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)x(t_0) + (\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T - K_1^T)v = 0, \\ &[-K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0))]x(t_0) + K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T v = q. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь докажем симметричность матрицы коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) & (-\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T + K_1^T) \\ K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)) & K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T \end{bmatrix}^T,$$

системы линейных алгебраических уравнений (3.3), т.е. покажем, что

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) = \Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T, \quad (3.4)$$

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T - K_1^T = [K_1 - K_2\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)]^T, \quad (3.5)$$

$$K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T = K_2(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T\Phi_{12}^T(\tau, t_0)K_2^T. \quad (3.6)$$

Используя J -симметричность системы (2.1), из [2]

$$JHJ^T = -H, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad E - n \times n \quad (3.7)$$

легко доказывается, что при помощи соотношений из $J\Phi(\tau, t_0)J^T\Phi^T(\tau, t_0) = E$ (здесь $E - 2n \times 2n$ -мерная) получаем

$$E = \begin{bmatrix} \Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{11}^T(\tau, t_0) - \Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0) & \Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0) - \Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0) \\ \Phi_{11}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{11}^T(\tau, t_0) & \Phi_{11}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Из условий (3.8) верхнюю внедиагональную подматрицу напишем как

$$\Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0) - \Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0) = 0. \quad (3.9)$$

Умножая с правой стороны (3.9) на $(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1}$, а с левой стороны – на $(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))$, получим соотношение (3.4). Таким образом доказана следующая лемма.

Л е м м а 1. В системе линейных матричных алгебраических уравнений (3.3) блочная матрица $\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) -$ симметричная.

Теперь покажем, что в (3.3) матрица $\Phi_{12}(\tau, t_0) \times \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) -$ симметричная, т.е.

$$\Phi_{12}(\tau, t_0) \times \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) = (\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T \Phi_{12}^T(\tau, t_0). \quad (3.10)$$

Тогда нижняя диагональная блочная матрица в (3.3) тоже будет симметричной. На самом деле

$$\begin{aligned} (K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T)^T &= K_2(\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T K_2^T = \\ &= K_2(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T \Phi_{12}^T(\tau, t_0)K_2^T = K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T. \end{aligned}$$

Теперь докажем равенство (3.10). Из (3.8) следует, что

$$\Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{11}^T(\tau, t_0) - \Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0) = E, \quad (3.11)$$

$$\Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0) - \Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0) = 0, \quad (3.12)$$

$$\Phi_{11}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{11}^T(\tau, t_0) = 0, \quad (3.13)$$

$$\Phi_{11}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0) = E, \quad (3.14)$$

где 0 в формулах (3.12), (3.13) – нулевая матрица. Умножая с левой стороны (3.12) на $\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)$, получим

$$\Phi_{21}^T(\tau, t_0) = \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{22}^T(\tau, t_0).$$

Далее, транспонируя обе части полученного последнего выражения, будем иметь

$$\Phi_{21}(\tau, t_0) = \Phi_{22}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T.$$

Умножим полученное равенство с левой стороны на $\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)$:

$$\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) = \Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T. \quad (3.15)$$

Тогда, умножая (3.11) с левой стороны на $\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)$, запишем

$$\Phi_{11}^T(\tau, t_0) = \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) + \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0).$$

Подставляя полученные выражения $\Phi_{11}^T(\tau, t_0)$ в (3.13), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0) &= \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{11}^T(\tau, t_0) = \\ &= \Phi_{12}(\tau, t_0)[\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) + \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0)] = \\ &= \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)\Phi_{12}^T(\tau, t_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) = [\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)]\Phi_{12}^T(\tau, t_0).$$

Учитывая здесь (3.15), получим

$$\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) = [\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T]\Phi_{12}^T(\tau, t_0) \quad (3.16)$$

и определим из (3.14) $\Phi_{11}(\tau, t_0)$:

$$\Phi_{11}(\tau, t_0) = (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1},$$

значение которого подставим в (3.16), тогда имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) &= [(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} - \\ &- \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T]\Phi_{12}^T(\tau, t_0) = (\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0))^T\Phi_{12}^T(\tau, t_0). \end{aligned}$$

Таким образом доказана следующая лемма.

Л е м м а 2. В системе линейных матричных алгебраических уравнений (3.3) блочная матрица $K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2$ является симметричной.

Теперь докажем, что вне диагональные матрицы уравнения (3.3) также симметричны, т.е.

$$[K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0))] = (-\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T + K_1^T)^T. \quad (3.17)$$

Для выполнения (3.17) достаточно показать, что

$$(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} = \Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0). \quad (3.18)$$

Действительно из (3.11)–(3.14) и (3.18) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) &= \Phi_{11}(\tau, t_0) - (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1}\Phi_{12}^T(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) = \\ &= (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} - (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1}\Phi_{12}^T(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) = \\ &= (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) = \\ &= (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} + \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{21}^T(\tau, t_0)(\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1} = (\Phi_{22}^T(\tau, t_0))^{-1}, \end{aligned}$$

т.е. удовлетворяется условие симметричности (3.18).

Таким образом доказана следующая лемма.

Л е м м а 3. В системе линейных матричных уравнений (3.3) удовлетворяется условие симметричности (3.17).

Результаты лемм 1–3 позволяют сделать вывод, что матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений (3.3) является симметричной. Для этого сначала уравнение запишем в матричном виде, т.е., обозначая

$$D = \begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) & (-\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T + K_1^T) \\ K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0)) & K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix},$$

напишем (3.3) в следующем более компактном виде:

$$D \begin{bmatrix} x(t_0) \\ v \end{bmatrix} = \tilde{W}. \quad (3.20)$$

Имеем следующую теорему.

Т е о р е м а. Матрица (3.19) является симметричной.

Поскольку в выражениях (2.6) и (2.7) для определения $x(t)$ и $u(t)$ содержится $\lambda(t)$, попытаемся получить выражения для $x(t)$ и $u(t)$ без использования $\lambda(t)$. Для этого выражение $\lambda(t)$ из (2.5) подставим в первое выражение (2.6), а для определения $x(t)$ и $u(t)$ учитываем $\lambda(t_0) = -K_1^T v$. Тогда для $x(t)$ получим

$$x(t) = \Phi_{11}(t, t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)K_1^T v, \quad (3.21)$$

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)\Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + C^{-1}(t)G(t)\Phi_{22}(t, t_0)K_1^T v. \quad (3.22)$$

Таким образом имеется следующий алгоритм.

Шаг 1. Формируются матрицы $F(t)$, $G(t)$, K_1 , K_2 , $R(t)$, $C(t)$ из (1.1)–(1.3).

Шаг 2. Формируется матрица $H(t)$ из (2.1).

Шаг 3. Решается дифференциальное матричное уравнение (2.3) и находится $\Phi(t, t_0)$ из (2.4).

Шаг 4. Восстанавливается матрица $D = D^T$ и вектор \tilde{W} , согласно (3.19), и решается матричное алгебраическое уравнение (3.20), находятся $x(t_0)$, v .

Шаг 5. Из формул (3.21), (3.22) вычисляются $x(t)$ и $u(t)$ через $x(t_0)$ и v .

Теперь приведем формулы для $u(t)$ через фазовые координаты $x(t)$. Для этого напишем в (2.5) первое соотношение из (2.2):

$$x(t) = \Phi_{11}(t, t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)K_1^T v, \\ \lambda(t) = \Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) - \Phi_{22}(t, t_0)K_1^T v. \quad (3.23)$$

Тогда при предположении существования $\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)$ находим $x(t_0)$ из первого соотношения (3.23) в виде

$$x(t_0) = \Phi_{11}^{-1}(t, t_0)(x(t) + \Phi_{12}(t, t_0)K_1^T v). \quad (3.24)$$

Подставив (3.24) в последнее соотношение (3.23), получим

$$\lambda(t) = \Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)x(t) + (\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0) - \Phi_{22}(t, t_0))K_1^T v, \quad (3.25)$$

который является выражением $\lambda(t)$ через фазовые состояния $x(t)$. Подставив выражение $\lambda(t)$ из (3.25) в (2.7), получим для управляющих воздействий следующее выражение:

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)[\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)x(t) + (\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0) - \Phi_{22}(t, t_0))K_1^T v], \quad (3.26)$$

которое является обратной связью для решения задачи (1.1)–(1.3).

Подставляя (3.26) в (1.1), для нахождения $x(t)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (F(t) - G(t)C^{-1}(t)G(t)\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0))x(t) + \\ & + G(t)C^{-1}(t)G(t)(\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0) - \Phi_{22}(t, t_0))K_1^T v \end{aligned} \quad (3.27)$$

с начальными условиями $x(t_0)$, найденными из системы линейных алгебраических уравнений (3.20). В этом случае в вышеизложенном алгоритме шаг 5 заменяется.

Шаг 6. По формуле (3.26) определяется $u(t)$, а $x(t)$ находится из решения дифференциальных уравнений (3.27) с начальным условием $x(t_0)$.

4. Построение фундаментальных матриц (2.3). Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к нахождению фундаментальной матрицы системы (2.1), т.е. к решению задачи (2.3). Однако решение задачи (2.3) в общем случае представляется возможным с трудностями (из-за размерности плохой обусловленности матриц H и т.д.). Поэтому для нахождения $\Phi(t, t_0)$ воспользуемся методом Захар-Иткина [20]. Действительно из [17, 18]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi x(t_0) - W\lambda(t), \\ \dot{\lambda}(t_0) = Vx(t_0) + \psi^T \lambda(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где ψ, W, V – матрицы, которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям и начальным условиям:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = (F + WR)\psi, & \psi(t_0) = E, \\ \dot{W} = FW + WF^T + WRW - GQ^{-1}G^T, & W(t_0) = 0, \\ \dot{V} = \psi^T R\psi, & V(t_0) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Приводя некоторые преобразования из (4.1), получим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & W \\ 0 & -\psi^T \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ V & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & W(\psi^T)^{-1} \\ 0 & -(\psi^T)^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ V & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \psi + W(\psi^T)^{-1}V & -W(\psi^T)^{-1} \\ -(\psi^T)^{-1}V & (\psi^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что фундаментальная матрица (2.4), образованная через $\Phi_{11}(t, t_0), \Phi_{12}(t, t_0), \Phi_{21}(t, t_0), \Phi_{22}(t, t_0)$, определяется как

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(t, t_0) &= \psi(t, t_0) + W(t, t_0) \times (\psi^T(t, t_0))^{-1} V(t, t_0), \\ \Phi_{12}(t, t_0) &= -W(t, t_0) \times (\psi^T(t, t_0))^{-1}, \\ \Phi_{21}(t, t_0) &= -(\psi^T(t, t_0))^{-1} V(t, t_0), \\ \Phi_{22}(t, t_0) &= (\psi^T(t, t_0))^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Приведем следующий алгоритм на основе вышесказанных результатов. Иллюстрируем вышеизложенный алгоритм на следующем примере.

Пример. Пусть в (1.1)–(1.3) $F(t) = F, G(t) = G, R(t) = 0, C(t) = C$ – постоянные матрицы с соответствующими размерностями. Для начала восстанавливаем фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$ через матричные дифференциальные уравнения (4.2) и формулы (4.3), (4.4). На самом деле, в данном случае (4.2) упрощается и переходит к более простому виду:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= F\psi, & \psi(t_0) &= E, \\ \dot{W} &= FW + WF^T - GQ^{-1}G^T, & W(t_0) &= 0, \\ \dot{V} &= 0, & V(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где решение (4.5) в аналитическом виде представляется как

$$\begin{aligned}\Psi(t, t_0) &= e^{F(t-t_0)}, \\ W(t, t_0) &= W_1 - e^{F(t-t_0)} W_1 e^{F'(t-t_0)}, \\ V(t, t_0) &= 0.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Здесь W_1 является решением матричного уравнения Ляпунова:

$$-FW_1 - W_1 F^T + GQ^{-1}G^T = 0. \quad (4.7)$$

Отметим, что уравнение Ляпунова имеет решение в следующем виде [13]:

$$W_1 = -\int_0^{\infty} e^{Ft} G_1 Q^{-1} C_1^T e^{F^T t} dt. \quad (4.8)$$

Теперь формируем фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$ через решения уравнений (4.5):

$$\begin{aligned}\Phi_{11}(t, t_0) &= e^{F(t-t_0)}, \\ \Phi_{12}(t, t_0) &= -[W_1 - e^{F(t-t_0)} W_1 e^{F'(t-t_0)}] e^{-F(t-t_0)}, \\ \Phi_{21}(t, t_0) &= 0, \quad \Phi_{22}(t, t_0) = e^{-F(t-t_0)}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (3.26), имеем для управления следующее выражение:

$$u(t) = C^{-1}(t)G(t)e^{-F(t-t_0)} K_1^T v,$$

а фазовая координата $x(t)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) - G(t)C^{-1}(t)G(t)e^{-F(t-t_0)} \Phi_1^T v,$$

где $x(t_0)$ и v являются решением системы линейных алгебраических уравнений (3.20). Здесь матрица D формируется через (4.9) в следующем виде:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -e^{F(\tau-t_0)} K_2^T + K_1^T \\ K_1 - K_2 e^{F(\tau-t_0)} & -K_2 [W_1 - e^{F(\tau-t_0)} W_1 e^{F'(\tau-t_0)}] K_2^T \end{bmatrix}.$$

Заключение. В данной работе в отличие от известных алгоритмов предлагается вычислительный алгоритм для решения задачи (1.1)–(1.3), который гораздо больше уменьшает размерность исходной задачи. Достоинство такого нового алгоритма заключается в том, что он позволит решать задачи построения программных траекторий и управлений гораздо большей размерности [19–25] при эксплуатации нефтяных скважин газлифтным способом и штангонасосными установками и др. Кроме того, приведенный здесь алгоритм можно использовать при редукции фундаментальных матриц задачи типа (2.3). Относительно вычислительной сложности предложенного алгоритма следует отметить, что этот алгоритм в 2 раза (в некоторых случаях в 4 раза [11, 12]) уменьшает размерность задачи нахождения фундаментальной матрицы Гамильтоновой системы. Кроме того, рассматриваемый метод позволяет распараллеливать вычислительный алгоритм для решения систем дифференциальных матричных уравнений (4.2), что дает возможность уменьшить вычислительную сложность данного алгоритма, а также применять его к задачам, в которых движение объекта описывается системой. В уравнения этой системы помимо обычных производных входят и дробные производные [26–28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6. С. 138–146.
2. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимешенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1985.
3. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. I. Киев: Наук. думка, 1963. 1966.
4. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1986. № 2. С. 345–347.

5. *Алиев Ф.А.* Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Изв. АН Аз ССР. Сер. физ. техн. и мат. наук. 1986. № 2. С. 345–347.
6. *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.* Методы решения задач оптимизации с двухточечными краевыми условиями. Препринт / № 151. Баку: Институт физики, АН АзССР, 1985.
7. *Муталлимов М.М., Алиев Ф.А.* Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutschland): LAP LAMBERT, 2012.
8. *Муталлимов М.М., Зульфугарова Р.Т., Гулиев А.П.* Алгоритм прогонки для решения задач оптимального управления с неразделенными краевыми условиями // Вестн. БГУ. Сер. физ. мат. наук. 2009. № 2. С. 153–160.
9. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989.
10. *Муталлимов М.М.* Алгоритм “прогонки” для решения задачи оптимизации с неразделенными трехточечными краевыми условиями // Докл. НАН Азербайджана. 2007. Т. LXIII. № 2. С. 24–29.
11. *Moszynski K.* A Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differential Equations // *Algorytmy*. 1964. V.11. № 3. P. 25–43.
12. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // *ЖВМ и МФ*. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
13. *Aliev F.A.* Comments on ‘Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions’ by M. Mutallimov, R. Zulfugarova and L. Amirova // *Adv. Differ. Equ.* 2016. V. 131.
14. *Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A.* Remarks to the Paper: Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions // *TWMS J. Pure Appl. Math.* 2018. V. 9. № 2. P. 243–246.
15. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
16. *Брайсон А., Хо Ю Шу.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
17. *Захар-Иткин М.Х.* Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // *УМН*. 1973. Т. 28. № 3. С. 83–120.
18. *Ларин В.Б.* Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980.
19. *Mutallimov M.M., Zulfugarova P.T., Amirova L.I.* Sweep Algorithm for Solving Optimal Control Problem with Multi-Point Boundary Conditions // *Adv. Differ. Equ.* 2015. V. 233.
20. *Hamidov R.H., Mutallimov M.M.* Dimension Reduction of one Multivariable Decision Making Problem // *Appl. Comput. Math.* 2019. V. 18. № 1. P. 62–68.
21. *Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Mirsaabov S.M.* Calculation Algorithm Defining the Coefficient of Hydraulic Resistance on Different Areas of Pump-Compressor Pipes in Gas Lift Process by Lines Method // *SOCAR Proceedings*. 2019. № 4. P. 13–17.
22. *Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М., Джамалбеков М.А.* Метод решения одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, описывающих движение в газлифтном процессе // *ПММ*. 2018. Т. 82. В. 4. С. 512–519.
23. *Ashyralyev A., Erdogan A.S., Tekalan S.N.* An Investigation on Finite Difference Method for the First Order Partial Differential Equation with the Nonlocal Boundary Condition // *Appl. Comput. Math.* 2019. V. 18. № 3. P. 247–260.
24. *Aliev F., Larin V., Velieva N., Gasimova K., Faradjova Sh.* Algorithm for Solving the Systems of the Generalized Sylvester-Transpose Matrix Equations Using LMI // *TWMS J. Pure Appl. Math.* 2019. V. 10. № 2. P. 239–245.
25. *Zhang Jingjing, Shen Yue, He Jihuan.* Some Analytical Methods for Singular Boundary Value Problem in a Fractal Space: a Review // *Appl. Comput. Math.* 2019. V. 18. № 3. P. 225–235.
26. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
27. *Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I.* Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients // *Appl. Comput. Math.* 2018. V. 17. № 1. P. 317–322.
28. *Ahmad Golbabai, Omid Nikan, Mahboubeh Molavi-Arabshahi.* Numerical Approximation of Time Fractional Advection-Dispersion Model Arising from Solute Transport in Rivers // *TWMS J. Pure Appl. Math.* 2019. V. 10. № 1. P. 117–131.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИДАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЯЕМОГО СКАНИРОВАНИЯ ДОРОГ ДЛЯ БЕСПИЛОТНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ¹

© 2021 г. В. Я. Ким^а, В. М. Лисицын^{а,*}, С. М. Мужичек^а, К. В. Обросов^а

^а ФНЦ ФГУП “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: lvm@gosniias.ru

Поступила в редакцию 25.08.2020 г.

После доработки 02.09.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Анализируются проблемы применения двулучевых лазерно-локационных систем (часто называемых лидарами) на беспилотных транспортных средствах для обеспечения безопасности движения и пути их решения. Предложен экономически выгодный способ реализации лидарной системы с управляемым (адаптивным) сканированием дорожного покрытия. Разработаны алгоритмы обработки информации и управления углом наклона лазерных лучей для зондирования на заданной дальности поверхности дороги со сложным продольным профилем. Предложен и обоснован метод оценки вероятности измерения скорости сближения с другими транспортными средствами в процессе управляемого сканирования дороги. Выполнено моделирование системы, адекватность которого обусловлена результатами проведенных натурных экспериментов с реальным лидаром. Методами моделирования и статистической обработкой данных получена зависимость вероятности измерения скорости сближения с объектами от величины этой скорости и времени, затрачиваемого на измерения. Такая зависимость свидетельствует об эффективности применения двулучевого управляемого сканирования на беспилотных транспортных средствах.

DOI: 10.31857/S000233882101008X

Введение. Многие автомобильные фирмы пытаются разрабатывать различные системы интеллектуального вождения, которые применяются либо в помощь водителю, либо с целью создания беспилотных транспортных средств (БТС). Основной задачей таких разработок является обеспечение гарантированной безопасности движения по дорогам транспортных средств (ТС) и пешеходов. К настоящему времени созданы достаточно надежные телевизионные (ТВ) и тепловизионные (ТП) системы для автоматического обнаружения и дешифрирования дорожных знаков, дорожной разметки и светофорной сигнализации. Однако для безопасного движения БТС необходима текущая 3D-информация о ситуации на проезжей части дороги. Такая информация может быть получена с помощью радаров, лазерно-локационных (ЛЛ) систем [1, 2] и систем на основе использования стереопар пассивных датчиков изображения [3, 4]. ЛЛ-системы при соответствующей обработке информации позволяют выделять проезжую часть дороги, отличая ее от тротуаров, а также обнаруживать на ней различные объекты, которые представляют угрозу для безопасного движения, в том числе другие ТС и случайно оказавшегося на дороге человека. В известных ЛЛ-системах для решения этих задач предлагается использовать несколько десятков лазерных каналов дальнометрирования, которые формируют при азимутальном сканировании столько же строк, содержащих измерения дальностей до поверхности дороги и до объектов [5]. Применение стольких каналов дальнометрирования существенно увеличивает стоимость БТС, усложняет оптическую систему и ухудшает массогабаритные характеристики ЛЛ-системы. Поэтому их предполагается устанавливать только на небольшом числе экспериментальных и эксклюзивных БТС.

1. Проблемные вопросы управляемого сканирования дороги. Существенное уменьшение числа лазерных каналов может быть достигнуто путем применения так называемого адаптивного сканирования [6–10], которое при соответствующем управлении угловым положением лучей позволяет экономно расходовать лазерные импульсы, необходимые для обновления дальностного

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-29-06077-мк).

поля с требуемым периодом повторения. Это приводит к возможности уменьшения до минимума (до двух) количества используемых лазеров. Два канала дальнометрирования необходимы для надежного выделения проезжей части дороги, т.е. обнаружения краев тротуаров, и оценки уклона дороги в месте ее зондирования. В процессе адаптивного сканирования выделяются области интереса на дороге для ТВ- и ТП-систем, размещенных на БТС.

Наиболее простой (и, следовательно, дешевой) реализацией управляемого сканирования дороги одним лучом является вращение с постоянной угловой скоростью лазерного луча вокруг вертикальной оси. При этом луч заметает коническую поверхность с управляемым углом при вершине конуса. Сечение такого конуса поверхностью дороги формирует при движении БТС последовательность траекторий зондирования поверхности дороги (следов движения лазерного пятна) с измерениями дальностей до дороги в точках, которые соответствуют моментам излучения зондирующих импульсов. Угловые колебания БТС обуславливают необходимость гиросtabilизации оси конического вращения. Управление углом наклона луча должно обеспечить на каждом периоде сканирования зондирование дороги на заданной дальности от БТС, используя результаты измерений дальностей на предыдущих периодах. Для создания такой системы управления необходимо задаться продольным профилем дороги, называемой далее тест-дорогой. Такой профиль должен содержать дуги окружностей с минимальными радиусами [11]. Поэтому тестовой будем считать ситуацию, в которой БТС движется по дороге, проложенной через холм, т.е. с продольным профилем, состоящим из пяти участков: горизонтального до въезда на холм; вогнутого при переходе на подъем; выпуклого в окрестности вершины холма; вогнутого при съезде с холма и снова горизонтального. Продольный профиль тест-дороги является плавным сопряжением трех дуг окружностей с радиусом 4000 м и горизонтальных линий в начале и конце пути БТС.

Из простых геометрических построений следует, что даже при расположении ЛЛ-системы на крыше БТС (на высоте 1.8 м) и требовании зондирования дороги на дальностях 35–50 м одной гиросtabilизации положения оси конического вращения недостаточно для решения задачи мониторинга поверхности тест-дороги и необходимо управление углом наклона луча по результатам обработки измерений дальностей, проведенных на последних (относительно текущего) периодах сканирования дороги.

Проблемы создания системы управления углом наклона лазерного луча обусловлены следующими причинами.

Большие ошибки измерения дальности при настильном зондировании поверхностей. Угол настильности (угол между лучом и отражающей поверхностью) в случае зондирования выпуклых участков тест-дороги (на вершине холма) может быть равен 1.6° при дальности 40 м. Тогда использование известных моделей [12] формирования лазерного эхо-сигнала и измерения дальности путем выделения энергетического центра развертки импульса эхо-сигнала по времени приводят к оценкам диапазона возможных ошибок измерения $\pm(3-5)$ м при угле расходимости лазерного луча 3 угл. мин и диаметра выходной апертуры 3–6 см. Такие ошибки вызовут соответствующие реакции системы управления наклоном луча, в результате которых встреча луча с объектом на двух соседних периодах сканирования (через 0.15 с) будет гарантирована только при скорости сближения с ним более 40 м/с, т.е. когда катастрофа неминуема. Поэтому при таких ошибках измерения дальностей до дороги оценивать скорость сближения по двум замерам дальности до объекта не имеет смысла, т.е. необходимо уменьшить ошибки при настильном зондировании не менее чем в 10 раз.

Сложность обеспечения в динамике дальностей зондирования дороги близких к заданной при движении БТС из-за значительных изменений углов настильности и, следовательно, случайного изменения в широком диапазоне эквивалентного коэффициента усиления сигнала рассогласования по дальности при управлении углом наклона лазерного луча. Небольшие изменения этого угла могут приводить к значительным и неизвестным заранее изменениям дальности, что в сочетании с большими ошибками их измерения часто приводит к потере устойчивости и срыву сопровождения дороги на заданной дальности, а также практической невозможности эффективного комплексования ЛЛ-системы с ТВ- и ТП-системами.

Невозможность корректной оценки чувствительности при измерении скорости сближения с объектом, так как для этого требуется определить минимальную скорость, при которой может быть проведено ее измерение с заданной вероятностью. Для решения такой задачи необходимо знать достаточные статистики интервалов между следами лазерного пятна на дороге, которые являются зависимыми случайными величинами с неизвестными вероятностными характеристиками.

От успехов решения этих проблем зависит эффективность применения ЛЛ-систем на БТС и возможность комплексирования с ТВ- и ТП-системами.

2. Постановка задачи. Решение перечисленных выше проблем связано с проведением следующих исследований систем управляемого двулучевого сканирования.

1. Для уменьшения ошибок измерения дальностей можно использовать в приемнике принцип срабатывания по переднему фронту эхо-импульса. Для этого варианта необходимо выполнить экспериментальные исследования ошибок измерения дальностей лазерным локатором по переднему фронту эхо-импульса при настильном зондировании дорожного покрытия и провести регистрацию ошибок для обеспечения адекватности моделирования системы управляемого сканирования дороги.

2. Для системы управляемого сканирования необходимо разработать методы и алгоритмы обработки ЛЛ-информации “угол-угол-дальность” в контуре управления наклоном двух лазерных лучей: верхнего и нижнего с постоянным угловым отклонением одного от другого. Управление должно производиться по информации, содержащей измерения дальностей, которые получены при сканировании дороги за счет вращения лучей вокруг вертикальной оси с периодом не более 0.15 с. При этом предполагается, что на каждом периоде сканирования происходит выделение минимум двух азимутальных секторов, в которых лазерные лучи (лазерные пятна) попадают на дорогу, а не на другие ТС, едущие по ней. Методы и алгоритмы должны при настильном зондировании дороги минимизировать модуль разности дальностей до дороги на любых двух соседних периодах сканирования при ограничении на отклонения измеряемых дальностей от заданного значения.

3. Для определения при моделировании минимальной скорости сближения с объектом, при которой возможно ее измерение, необходимо разработать метод оценки гарантированной вероятности измерения скорости движения объекта относительно БТС в процессе сканирования дороги и одновременно обнаружении “на проходе” ТС, участвующих в движении. Метод должен позволять получать зависимости вероятности измерения скорости сближения с объектом и времени, затрачиваемого на ее измерение, от этой скорости.

4. Должно быть проведено моделирование системы управления наклоном диаграмм направленности (ДН) излучения и приема при лазерном зондировании тест-дороги перед БТС для решения следующих задач:

– определение влияния положений и размеров хотя бы двух азимутальных секторов, в которых возможно зондирование дороги между едущими ТС, на статистические характеристики дальностей зондирования дороги на соседних периодах сканирования;

– отработка параметров системы управления наклоном лазерных лучей для обеспечения устойчивости сопровождения дороги в ограниченном диапазоне дальностей ее зондирования;

– формирование статистических рядов дальностей зондирования на последовательности периодов управляемого сканирования при движении БТС по тест-дороге и их обработка для получения статистик, необходимых при оценке гарантированной вероятности измерения скорости сближения с объектом на дороге;

– построение по результатам моделирования зависимости гарантированной вероятности измерения скорости сближения и затрачиваемого на измерение времени от величины этой скорости с целью оценки эффективности применения предлагаемой системы управления сканированием.

3. Результаты экспериментальных исследований ошибок измерения дальностей по переднему фронту эхо-импульса. В импульсных лазерных дальномерах измерение дальностей до отражающей (рассеивающей) поверхности осуществляется путем запуска и остановки счетчика тактовых импульсов. Такой счетчик измеряет интервал времени между моментом излучения зондирующего импульса и моментом приема отраженного от поверхности эхо-сигнала. Большие ошибки измерения при настильном зондировании поверхности возникают из-за того, что отраженный импульс эхо-сигнала имеет значительно большую длительность, чем излученный. Это связано с тем, что лазерный луч имеет не бесконечно малый диаметр (апертуру) и рассеяние энергии продолжается до тех пор, пока отражающая поверхность находится в пределах апертуры луча. Проблема больших ошибок измерения дальностей при настильном зондировании отражающей поверхности может быть решена, если останавливать счетчик тактовых импульсов по переднему фронту импульса эхо-сигнала. Такой способ применяется при измерении небольших дальностей и был реализован в лазерном локаторе для проведения экспериментов. Локатор излучал на длине волны 1.54 мкм импульсы длительностью 5 нс с частотой следования 30 кГц. Выходная апертура

излучателя и геометрическая расходимость луча были равны 0.06 м и 1.5 угл. мин соответственно. Тактовый генератор дальномерного канала обеспечивал дискретное измерение времени между излученным и принятым импульсами, которое соответствует измерению дальности с дискретом $q = 0.47$ м. Локатор формировал последовательность измеренных дальностей в результате азимутального сканирования горизонтальной поверхности дороги при угле наклона лазерного луча $\alpha = 1.6^\circ$ (угол между лучом и поверхностью дороги, т.е. угол настильности зондирования дороги). Такой угол равен минимальному углу настильности при движении БТС по тест-дороге для указанных выше условий. В результате эксперимента формировалась последовательность отклонений δS_i при $i = 1, 1120$ измеренных дальностей от математического ожидания (МО). Такая последовательность соответствует максимально возможной дисперсии ошибок измерения дальностей при движении БТС по тест-дороге и будет использована при моделировании системы управляемого сканирования. Экспериментальная оценка дисперсии отклонений дальностей от МО при угле настильности 1.6° составляет

$$\sigma_\Sigma^2 = 0.62 \text{ м}^2.$$

Эти отклонения являются суммой двух независимых составляющих:

- ошибки, возникающей из-за дискретности измерения дальностей (соответствующей частоте тактовых импульсов в дальномере);
- случайного значения дальности, на которой уровень нарастающего переднего фронта эхо-импульса становится больше порога срабатывания в детекторе приемника излучения.

Первая составляющая не зависит от угла настильности зондирования, а вторая зависит. Дисперсия второй составляющей является разностью экспериментально полученной суммарной дисперсии и σ_Σ^2 и дисперсии ошибки дискретности, которую можно рассчитать по формуле $q^2/12$, где q – дискрет измерений дальности. При настройке локатора на заданную дальность зондирования порог срабатывания устанавливается в соответствии с критерием Неймана–Пирсона, т.е. максимизируется вероятность правильного обнаружения эхо-сигнала при заданной вероятности ложных тревог. В результате, при дальностях, значительно меньших максимально возможных, порог срабатывания много меньше, чем максимум эхо-сигнала. Поэтому разброс измерений дальности определяется началом нарастающего переднего фронта эхо-импульса. Дисперсия второй составляющей равна

$$\sigma_S^2 = \sigma_\Sigma^2 - \frac{q^2}{12} = 0.6 \text{ м}^2,$$

т.е. практически совпадает с σ_Σ^2 . Следовательно, при угле настильности $\alpha = 1.6^\circ$ основной является вторая составляющая ошибок измерения, даже в случае срабатывания приемного устройства по переднему фронту эхо-импульса.

4. Алгоритмы обработки информации и управляемого сканирования проезжей части дороги. Минимальное число каналов дальнометрирования, одновременно формирующих на дороге следы движения лазерных пятен (строк) при движении БТС и сканировании дороги, должно быть не меньше двух: нижнего (*Low*) и верхнего (*Up*). Только тогда возможно надежное обнаружение границ между дорогой и тротуаром и оценка угла настильности зондирования дороги. Для решения этих задач угловое расстояние между верхним и нижним лучом должно находиться в диапазоне $\Delta\alpha = 0.1115 - 0.3026^\circ$ при анализе сцен на дальностях 35–50 м. Малость угла $\Delta\alpha$ позволяет использовать общий дефлектор и один объектив при формировании нижнего и верхнего лучей, а также соответствующих ДН приема эхо-сигнала. При управлении углом наклона нижний луч – ведущий, а верхний – ведомый с постоянным углом $\Delta\alpha$, т.е. рассматривается простейшая оптико-механическая система сканирования. В процессе изменения продольного уклона дороги при движении БТС необходимо так управлять углом наклона зондирования, чтобы результаты измерений дальностей до дороги по нижнему лучу не выходили за заданные пределы. Следовательно, сигналом рассогласования на i -м периоде сканирования при таком управлении должно быть отклонение от заданной величины S оценки дальности $S_{L,i}$, полученной в результате обработки измерений. Значение оценки $S_{L,i}$ должно соответствовать дальности от ЛЛ-системы до дороги по направлению нижнего луча в плоскости симметрии БТС, т.е. непосредственно перед ним. Прямое измерение этой дальности не всегда возможно из-за ошибок и заслоняющих ТС, едущих перед БТС. Поэтому необходимо оценку $S_{L,i}$ получать с использованием аппроксимации измерений дальностей в направлениях, при которых возможен оптический контакт с дорогой между

едущими впереди ТС. Такой аппроксимацией в случае зондирования по образующим конуса может быть дуга эллипса. Продольный профиль дороги заранее неизвестен, поэтому для определения параметров аппроксимирующего эллипса необходима обработка дальностей хотя бы в двух интервалах азимутальных углов $\psi_1 \pm \delta\psi/2$ и $\psi_2 \pm \delta\psi/2$, в которых возможны оптические контакты с дорогой. Если обработка измерений в каждом из этих интервалов сформировала оценки дальностей $S_{1,i}$, $S_{2,i}$ как соответствующие углам ψ_1 и ψ_2 , то в результате аппроксимации эллипсом траектории зондирования можно найти его полуоси, и, следовательно, оценку величины $S_{L,i}$ для нижнего канала дальнометрирования по формуле

$$S_{L,i} \approx \sqrt{\frac{\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2}{\frac{\sin^2 \psi_1}{S_{2,i}^2} - \frac{\sin^2 \psi_2}{S_{1,i}^2}}}. \quad (4.1)$$

Аналогично может быть получено значение оценки $S_{U,i}$ в верхнем канале дальнометрирования. Определение минимально возможных азимутальных интервалов $\delta\psi$ и оценка влияния их положения на статистики разностей оценок дальностей в соседних периодах сканирования является одной из задач моделирования.

Знание на текущем периоде сканирования дороги оценок $S_{L,i}$, $S_{U,i}$ и измеренного угла наклона нижнего луча $\alpha_{L,i}$ (угол между горизонтальной прямой и лучом в плоскости симметрии БТС) позволяет найти сигнал рассогласования $\widehat{\delta\alpha}_i$ в контуре управления углом наклона нижнего луча. Величина $\widehat{\delta\alpha}_i$ является результатом фильтрации поправок, рассчитываемых при изменениях угла наклона лучей на нескольких периодах, чтобы на следующем периоде сканирования оценка $S_{L,i+1}$ максимально приблизилась к заданной дальности зондирования S . Из геометрических построений следует, что требуемое значение угла наклона нижнего луча можно рассчитать по формуле

$$\hat{\alpha}_i = \arcsin \frac{S_{L,i} S_{U,i} \sin \Delta\alpha}{S\sqrt{S_{U,i}^2 + S_{L,i}^2 - 2S_{L,i}S_{U,i} \cos \Delta\alpha}} - \arcsin \frac{S_{L,i} \sin \alpha_{L,i} - S_{U,i} \sin(\alpha_{L,i} - \Delta\alpha)}{\sqrt{S_{U,i}^2 + S_{L,i}^2 - 2S_{L,i}S_{U,i} \cos \Delta\alpha}}. \quad (4.2)$$

Поэтому на i -м периоде сканирования следует определять поправку как разность между требуемым и измеренным углами наклона нижнего луча:

$$\delta\alpha_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_{L,i}. \quad (4.3)$$

Если по каким-либо причинам на данном периоде отсутствуют оценки $S_{L,i}$ или $S_{U,i}$, то поправка присваивается нулевое значение.

Ошибки оценок $S_{L,i}$, $S_{U,i}$ могут приводить к недопустимо большим значениям поправок $\delta\alpha_i$, при которых велика вероятность срыва сопровождения дороги на заданной дальности S и мала вероятность события, заключающегося в том, что две строки пройдут через объект, появившийся на дальности меньше S в диапазоне углов сканирования по азимуту. Поэтому для формирования сигнала рассогласования в контуре управления углом наклона необходима особая фильтрация последовательности поправок, которая должна исключить многочисленные выбросы, сформировать выборку значений поправок, не приводящих к резким изменениям дальности зондирования дороги, и экстраполировать последовательность выбранных значений поправок на момент времени, когда будет формироваться очередная траектория сканирования. Методами моделирования были исследованы различные алгоритмы фильтрации. Отбор проводился по критерию минимума дисперсии разности дальностей зондирования тест-дороги на соседних периодах сканирования при ограничении сверху на динамические ошибки управления дальностью зондирования, возникающие из-за фильтрации. В результате был выбран следующий алгоритм нелинейной фильтрации с логическими операциями.

Фильтрация последовательности поправок $\{\delta\alpha_i\}_{i=1, \overline{N}}$ осуществляется путем обработки (после i -го периода сканирования) значений поправок, рассчитанных по формулам (4.1) и (4.2) на последних девяти периодах, т.е. обрабатываются значения из стек-памяти $\delta\alpha_i, \delta\alpha_{i-1}, \dots, \delta\alpha_{i-8}$, которые соответствуют моментам времени их формирования $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,9}$. За ноль временной шкалы на i -м периоде принимается будущий момент времени, до которого необходимо прогнозировать сигнал рассогласования $\widehat{\delta\alpha}_i$ по углу в контуре управления наклоном нижнего луча, следовательно

но, все значения $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,9}$ меньше нуля. При фильтрации последовательность из девяти поправок, записанных в стек-память, обрабатывается “скользящим окном”, содержащим пять значений поправок, из которых выбирается одно с наименьшим модулем. Выбранные значения поправок и соответствующие им времена являются выборкой для линейной аппроксимации методом наименьших квадратов, с помощью которой производится экстраполяция на будущий (нулевой) момент времени. Экстраполированное значение служит сигналом рассогласования по углу в контуре управления наклоном нижнего луча. Описанный алгоритм фильтрации может быть представлен в виде следующих математических выражений:

$$\widehat{\delta\alpha}_i = \frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 \widetilde{\delta\alpha}_{i,m} - \frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 t_{i,m} \frac{\frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 t_{i,m} \widetilde{\delta\alpha}_{i,m} - \left(\frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 t_{i,m} \right) \left(\frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 \widetilde{\delta\alpha}_{i,m} \right)}{\sum_{m=1}^5 t_{i,m}^2 - \left(\frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 t_{i,m} \right)^2}. \quad (4.4)$$

В (4.4) величины $\widetilde{\delta\alpha}_{i,m}$ при $m = \overline{1,5}$ являются результатами нелинейной обработки “скользящим окном” девяти последних поправок $\delta\alpha_i, \delta\alpha_{i-1}, \dots, \delta\alpha_{i-8}$ в соответствии с выражением

$$\widetilde{\delta\alpha}_{i,m} = \text{sign}(\delta\alpha_{j_0}) (\min_j \{ |\delta\alpha_j| : j \in [i - m - 3, \dots, i - m + 1] \}), \quad (4.5)$$

где минимум достигается при $j = j_0$ и

$$\text{sign}(\delta\alpha_{j_0}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta\alpha_{j_0} \geq 0, \\ -1, & \text{если } \delta\alpha_{j_0} < 0. \end{cases}$$

При равных интервалах между временами $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,9}$ выражение (4.4) упрощается и принимает вид

$$\widehat{\delta\alpha}_i = 1.2\widetilde{\delta\alpha}_{i,1} + 0.9\widetilde{\delta\alpha}_{i,2} + 0.6\widetilde{\delta\alpha}_{i,3} + 0.3\widetilde{\delta\alpha}_{i,4} - 0.4 \sum_{m=1}^5 \widetilde{\delta\alpha}_{i,m}, \quad (4.6)$$

где значение $\widetilde{\delta\alpha}_{i,5}$ рассчитано по формуле (4.5) на последнем (текущем) периоде сканирования, $\widetilde{\delta\alpha}_{i,4}$ – на предпоследнем и т.д., $\widetilde{\delta\alpha}_{i,1}$ – на четвертом периоде до текущего i -го. Полученная оценка поправки $\widehat{\delta\alpha}_i$ после умножения на коэффициент K подается на обработку, т.е. приводит на следующем $(i + 1)$ -м периоде сканирования к установке нового значения угла наклона $\alpha_{L, i+1}$.

В результате формирования и обработки поправок по формулам (4.1)–(4.6) при движении БТС по дороге со сложным продольным профилем появляется такая последовательность сигналов рассогласования $\{\widehat{\delta\alpha}_i\}$, при которой достигается компромисс между динамическими (из-за запаздываний) и случайными (из-за погрешностей измерений) ошибками сопровождения дороги на заданной дальности, если в системе управления углом наклона луча установлен коэффициент усиления $K = 0.4$. При этом самые резкие изменения продольных уклонов дороги не приводят к существенным нарушениям заданной дальности S и наблюдается приблизительное равенство интервалов между траекториями зондирования дороги на соседних периодах сканирования.

5. Метод оценки гарантированной вероятности измерения скорости сближения. Время зондирования дороги δt значительно меньше периода сканирования T (например, при $T = 0.15$ с составляет величину $\delta t < 0.025$ с). Поэтому можно считать, что за это время сформированный системой управления угол между ДН и гиросtabilизированной вертикальной осью ЛЛ-системы не изменится. Следовательно, при i -м периоде сканирования траектория движения лазерного пятна по полотну дороги перед БТС полностью определяется углом наклона луча $\alpha_{L, i}$ в момент его попадания в плоскость симметрии БТС и пространственным положением сканируемого участка дороги в системе координат, связанной с ЛЛ-системой. Рассмотрим процесс формирования оценок дальностей до дороги $\{S_{L,i}\}_{i=\overline{1,N}}$ при попадании оси ДН нижнего луча в плоскость симметрии БТС как случайный процесс с дискретным временем $\{t_i\}_{i=\overline{1,N}}$, причем разность $t_{i+1} - t_i = T$ является периодом сканирования лазерным лучом дорожного покрытия перед БТС. Скорость сближения с объектом может быть измерена в случае обнаружения объекта на двух периодах сканирования, т.е. при формировании двух траекторий движения лазерного пятна, сформированного

нижним лучом. Выбор нижнего луча связан с требованием точного измерения дальности, которая достигается при зондировании объекта двумя лучами, что гарантировано при попадании на объект нижнего луча. Обнаружение на i -м периоде сканирования (событие A_i) происходит, если во время развертки траектории движения лазерного пятна дальность до объекта $S_{c,i}$ станет меньше оценки дальности до дороги $S_{L,i}$, т.е. лазерное пятно начнет попадать на объект. Далее выделяется диапазон азимутальных углов, в котором измеренные дальности заметно меньше $S_{L,i}$, т.е. являются результатами зондирования объекта, а не дороги, и по этим измерениям оцениваются и запоминаются дальность до объекта $\tilde{S}_{c,i}$ и его угловые координаты. Если на $(i+k)$ -м периоде тоже происходит обнаружение того же объекта (событие A_{i+k}) с оценкой дальности $\tilde{S}_{c,i+k}$, то возможно определить скорость сближения по формуле

$$\Delta V = (\tilde{S}_{c,i} - \tilde{S}_{c,i+k})/kT.$$

Точность такой оценки соответствует средним квадратическим ошибкам (СКО) оценок скорости сближения 0.52, 0.26, 0.17, 0.13 м/с при затрачиваемых на измерения интервалах времени kT , равных 0.15, 0.3, 0.45, 0.6 с соответственно, при измерениях дальностей с СКО 0.5 м и попадании на объект 80 лазерных импульсов, что характерно для ТС шириной 2 м, едущего на расстоянии 35 м. Однако присутствие значительных случайных составляющих в оценках дальностей $S_{L,i}$, $S_{L,i+k}$ приводит к случайности события A_{i+k} , т.е. обнаружения объекта на $(i+k)$ -м периоде, из-за того, что дальность до дороги может уменьшиться так, что выполнится неравенство $S_{c,i+k} > S_{L,i+k}$ и измерение скорости сближения на $(i+k)$ -м периоде станет невозможным. Очевидно, что при большой скорости сближения ΔV и обнаружении объекта на i -м периоде (событие A_i) вероятность обнаружения на $(i+1)$ -м периоде практически равна единице. Однако в случае малых скоростей ΔV это не так. Наиболее сложная ситуация возникает при движении ТС в потоке с интервалом близким к заданной дальности S , когда чередование возможности и невозможности измерения скорости сближения может происходить достаточно часто. Поэтому характеристикой возможности измерения скорости сближения является вероятность Q_k события, заключающегося в том, что на интервале времени kT после появившегося обнаружения произойдет второе обнаружение того же впереди едущего объекта. Причем первому обнаружению, случившемуся на i -м периоде сканирования, должен предшествовать $(i-1)$ -й период, на котором объект обнаружен не был. Степень угрозы столкновения определяется зависимостью вероятности Q_k от величины скорости сближения ΔV и времени kT , затрачиваемого на измерение. Такую вероятностно-временную характеристику ЛЛ-системы необходимо построить для различных скоростей сближения, т.е. для разных степеней угрозы столкновения. Выражение для величины Q_k имеет вид

$$Q_k = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_k), \quad (5.1)$$

где p_1 – вероятность обнаружения объекта на $(i+1)$ -м периоде, p_2 – на $(i+2)$ -м независимо от обнаружения на $(i+1)$ -м, ..., p_k – вероятность обнаружения на $(i+k)$ -м независимо от обнаружения на $(i+1)$, $(i+2)$, ..., $(i+k-1)$ -м периодах (все вероятности при условии необнаружения объекта на $(i-1)$ -м и обнаружении на i -м периоде).

Из вышеизложенного следует, что необходимо оценить условную вероятность $p_k = P\{A_{i+k} | A_i \cap \bar{A}_{i-1}\}$, где A_{i+k} и A_i – события, заключающиеся в обнаружениях объекта на $(i+k)$ -м и i -м периодах сканирования соответственно, т.е. при $S_{c,i+k} \leq S_{L,i+1}$ и $S_{c,i} \leq S_{L,i}$, а \bar{A}_{i-1} – логическое отрицание обнаружения на $(i-1)$ -м периоде. Оценке такой вероятности снизу соответствует случай, когда на i -м периоде дальности до объекта и до дороги приблизительно равны друг другу, т.е. $S_{c,i} \approx S_{L,i}$, так как при уменьшении дальности до объекта вероятность его обнаружения на $(i+k)$ -м периоде сканирования может только увеличиваться. Поэтому для оценки снизу вероятности измерения скорости можно использовать условную вероятность

$$P\{(S_{c,i+k} < S_{L,i+k}) | (S_{c,i} = S_{L,i}) \cap (S_{c,i-1} > S_{L,i-1})\}. \quad (5.2)$$

Введем следующие обозначения для разностей дальностей до дороги на различных интервалах kT : $X_i = S_{L,i} - S_{L,i-1}$; $X_{i+1} = S_{L,i+1} - S_{L,i}$; $X_{i+2} = S_{L,i+2} - S_{L,i}$; ...; $X_{i+k} = S_{L,i+k} - S_{L,i}$. Тогда, используя выражения для дальностей до впереди едущего ТС или другого объекта при скорости сближения ΔV

$$S_{c,i} = S_{c,i-1} - T\Delta V; \quad S_{c,i+1} = S_{c,i} - T\Delta V; \quad S_{c,i+2} = S_{c,i} - 2T\Delta V; \quad \dots; \quad S_{c,i+k} = S_{c,i} - kT\Delta V,$$

условную вероятность (5.2) представим в виде

$$p_k = P\{(X_{i+k} > -kT\Delta V) | (S_{c,i} = S_{L,i}) \cap (X_i > -T\Delta V)\} \quad \text{при } k \geq 1. \quad (5.3)$$

Далее для уменьшения громоздкости выражений условие $S_{c,i} = S_{L,i}$ будем опускать, всюду предполагая его присутствие.

Разности дальностей X_i и X_{i+k} в общем случае являются зависимыми случайными величинами, т.е. искомая вероятность события $X_{i+k} > -kT\Delta V$ зависит от того, какое значение приобрела случайная величина X_i . Поскольку в (5.3) условием служит выполнение неравенства $X_i > -T\Delta V$ и искомая вероятность p_k – функция значений случайной величины X_i , удовлетворяющих этому неравенству, то выражение (5.3) можно представить в следующем виде:

$$p_k = \int_{-T\Delta V}^{\infty} P\{(X_{i+k} > -kT\Delta V) | (X_i = x)\} f_{X_i}(x) dx, \quad (5.4)$$

где x и $f_{X_i}(x)$ – возможные значения и функция плотности вероятности случайной величины X_i .

Первый сомножитель подынтегрального выражения в (5.4) можно выразить через условную функцию плотности вероятности случайной величины X_{i+k} , соответствующую значению $X_i = x$:

$$P\{(X_{i+k} > -kT\Delta V) | (X_i = x)\} = \int_{-kT\Delta V}^{\infty} f_{X_{i+k}}(y|x) dy, \quad (5.5)$$

где y , $f_{X_{i+k}}(y|x)$ – возможные значения и условная функция плотности вероятности случайной величины X_{i+k} при условии $X_i = x$.

Подставив условную вероятность (5.5) в выражение (5.4), получим искомую вероятность в виде

$$p_k = \int_{-T\Delta V}^{\infty} \left(\int_{-kT\Delta V}^{\infty} f_{X_{i+k}}(y|x) dy \right) f_{X_i}(x) dx. \quad (5.6)$$

Из-за множества причин, порождающих случайность величин X_{i+k} и X_i , их законы распределения вероятности можно считать нормальными. Поэтому выражение (5.6) полностью определяется МО $M[X_{i+k} | X_i = x]$, $M[X_i]$ и дисперсиями $D[X_{i+k} | X_i = x]$, $D[X_i]$ соответствующих случайных величин. Условные МО и дисперсия $m_{i+k,i}(x) = M[X_{i+k} | X_i = x]$, $\sigma_{i+k,i}^2(x) = D[X_{i+k} | X_i = x]$ в случае нулевого безусловного МО случайной величины X_{i+k} и безусловной дисперсии, равной σ^2 , имеют вид

$$\begin{aligned} m_{i+k,i}(x) &= \beta_{i+k,i} x, \\ \sigma_{i+k,i}^2 &= \sigma^2 (1 - \beta_{i+k,i}^2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\beta_{i+k,i}$ – коэффициент регрессии случайной величины X_{i+k} на X_i . Таким образом, условное МО зависит от двух факторов: значения x и номеров периодов сканирования, а условная дисперсия – только от второго фактора. Коэффициент регрессии $\beta_{i+k,i}$ при одинаковых безусловных дисперсиях равен коэффициенту корреляции между этими случайными величинами.

Если случайной последовательности $\{X_i\}_{i=1, \overline{N}}$ соответствует ковариационная функция $\text{cov}(X_{i+j}, X_i) = M[(X_{i+j} - m_{i+j,i})X_i]$; $j = \overline{-N, N}$, то ее значения определяют коэффициенты регрессии случайной величины X_{i+j} на X_i по формуле

$$\beta_{i+j,i} = \frac{\text{cov}(X_{i+j}, X_i)}{\sigma^2}. \quad (5.8)$$

При нормальных законах распределения случайных величин X_{i+k} , X_i выражение для искомой вероятности (5.6) с учетом (5.7) и (5.8) примет вид

$$p_k = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_{i+k,i}} \int_{-T\Delta V}^{\infty} \left[\int_{-kT\Delta V}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - m_{i+k,i}(x))^2}{2\sigma_{i+k,i}^2}\right) dy \right] \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (5.9)$$

Параметры σ ; $\sigma_{i+k,i}$; $m_{i+k,i}(x)$ определяются ковариационной функцией $\text{cov}(X_{i+j}, X_i)$, значения которой при $j = 0$ равно дисперсии σ^2 , а при $j = k$ позволяет найти другие два параметра, используя формулы (5.7), (5.8). Разность дальностей X_{i+k} можно представить в виде

$$X_{i+k} = \sum_{j=1}^k \Delta X_{i+j}, \quad (5.10)$$

где величина $\Delta X_{i+j} = S_{L,i+j} - S_{L,i+j-1}$, т.е. равна изменению дальности до дороги за время одного периода.

Далее величину ΔX_{i+j} будем называть приращением дальности на $(i+j)$ -м периоде. Из определения ковариации и выражения (5.10) следует, что

$$\text{cov}(X_{i+k}, X_{i+1}) = \sum_{j=1}^k \text{cov}(\Delta X_{i+j}, \Delta X_{i+1}). \quad (5.11)$$

Пользуясь этим, можно получить следующую формулу для условной дисперсии случайной величины X_{i+k} :

$$\sigma_{i+k,i}^2 = k\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \text{cov}^2(\Delta X_{i+1}, \Delta X_i) + 2(k-1) \text{cov}(\Delta X_{i+1}, \Delta X_i). \quad (5.12)$$

Условное МО случайной величины X_{i+k} можно выразить через коэффициент регрессии

$$m_{i+k,i}(x) = \sum_{j=1}^k m_{i+j,i}(x) = x \sum_{j=1}^k \beta_{i+j,i}.$$

Учитывая (5.8), (5.10) и (5.11), получим

$$m_{i+k,i}(x) = x\sigma^{-2} \sum_{j=1}^k \text{cov}(\Delta X_{i+j}, \Delta X_i), \quad (5.13)$$

т.е. МО случайной величины X_{i+k} при условии, что случайная величина X_i приняла значение x .

Для использования выражений (5.12), (5.13) при определении значений p_k по формуле (5.9) и вероятности Q_k по формуле (5.1) необходимо методами моделирования найти зависимость ковариации приращений дальностей на i -м и $(i+j)$ -м периодах сканирования $\text{cov}(\Delta X_{i+j}, \Delta X_i)$ от разностей номеров периодов j , т.е. временного интервала jT между приращениями дальностей, которые сформировались к моментам времени iT и $(i+j)T$ относительно $(i-1)T$ и $(i+j-1)T$ соответственно. Все эти моменты времени фиксируются при попадании лазерного луча в плоскость симметрии БТС, а приращения рассчитываются по оценкам дальностей, которые получены по формуле (4.1) с использованием осреднений измерений дальностей до дороги в интервалах азимутальных углов $\psi_1 \pm \delta\psi/2$ и $\psi_2 \pm \delta\psi/2$, соответствующим просветам между едущими ТС.

6. Моделирование работы ЛЛ-системы при движении носителя по тест-дороге. Функциональная блок-схема моделирования системы управления углом наклона лучей для зондирования дороги на заданной дальности S представлена на рис. 1. Изображенные на рис. 1 блоки имеют следующие функции.

1. Оценка требуемого угла наклона нижнего луча $\hat{\alpha}_i$ на i -м периоде сканирования дороги.
2. Фильтрация поправок $\delta\alpha_i$, рассчитываемых для изменения угла наклона лучей на последних девяти периодах с целью определения рассогласования по углу $\widehat{\delta\alpha}_i$.
3. Усиление (ослабление) сигнала рассогласования по углу с коэффициентом K .
4. Интегрирование (суммирование) для формирования угла наклона нижнего луча $\alpha_{L,i}$ при попадании оси ДН в плоскость симметрии БТС.
5. Определение дальностей до дороги по осям ДН нижнего $S_{L,a}(t)$ и верхнего $S_{U,a}(t)$ лучей, а также углов настильности зондирования дороги нижним и верхним лучами $\alpha_L(t)$ и $\alpha_U(t)$, в дискретные моменты времени t при формировании строки на дороге на i -м периоде сканирования. Такая задача решается на языке MAX Script в среде трехмерного моделирования Autodesk 3D S MAX с использованием ее "глобальной" системы координат, в которой строится поверхность тест-дороги с продольным профилем $y_r = y_r(x_r)$; рассчитываются текущие углы ориентации

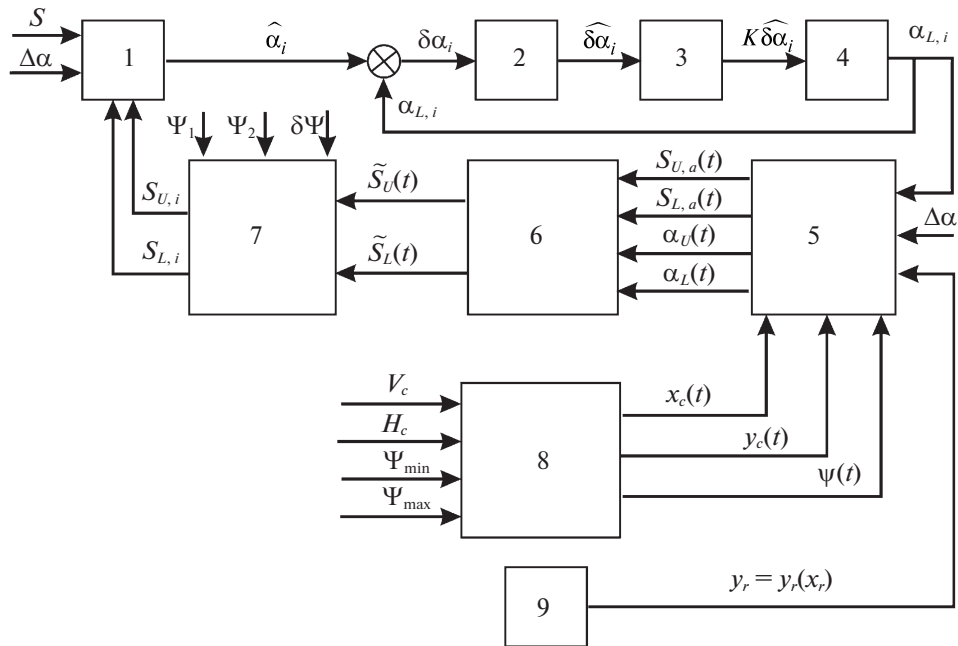


Рис. 1. Функциональная блок-схема моделирования

лазерных лучей при сканировании дороги на i -м периоде; решается задача встречи лучей с поверхностью дороги, в результате чего определяются две последовательности координат точек зондирования дороги (для верхнего и для нижнего лучей); по этим координатам и значениям $x_c(t)$ и $y_c(t)$ определяются последовательности текущих значений дальностей $S_{L,a}(t)$, $S_{U,a}(t)$ и оцениваются углы настильности, которые необходимы для формирования результатов измерения дальностей.

6. Формирование результатов измерений дальностей до дороги $\tilde{S}_L(t)$ и $\tilde{S}_U(t)$ с реальными ошибками в дискретные моменты времени t на i -м периоде сканирования с использованием экспериментальных регистраций ошибок дальнометрирования.

7. Расчет дальностей до дороги $S_{L,i}$, $S_{U,i}$ в продольной плоскости симметрии БТС на i -м периоде сканирования по результатам обработки измерений $\tilde{S}_L(t)$ и $\tilde{S}_U(t)$ в назначенных азимутальных секторах $\psi_1 \pm \delta\psi/2$ и $\psi_2 \pm \delta\psi/2$.

8. Определение в среде Autodesk 3D S MAX для дискретных моментов времени t координат ЛЛ-системы $x_c(t)$, $y_c(t)$ и азимутального отклонения сканирующего луча $\psi(t)$ от продольной плоскости симметрии БТС в пределах сектора сканирования (ψ_{\min} , ψ_{\max}) по данным о скорости БТС V_c и высоте расположения ЛЛ-системы H_c .

9. Задание продольного профиля дороги, т.е. зависимости ее высоты от горизонтальной координаты x_r в "глобальной" системе координат.

В результате моделирования процессов движения БТС по всей тест-дороге и управляемого сканирования дороги двулучевой ЛЛ-системой были получены следующие результаты.

1. Определена зависимость максимальных модулей приращений дальностей перед БТС от величины азимутальных секторов $\delta\psi$, в которых проводятся осреднения измерений дальностей, при случайных (с равномерным законом распределения) ориентациях этих секторов ψ_1 и ψ_2 (предположительно соответствующих просветам между едущими ТС). Зависимость имеет экспоненциальный характер с асимптотой 0.5 м, к которой приближается максимальный модуль приращений дальностей при увеличении величины $\delta\psi$. Значению $\delta\psi = 4^\circ$ соответствуют максимальные приращения дальностей 0.6 м, т.е. близкие к минимально возможному 0.5 м. Такой результат был получен при коэффициенте усиления $K = 0.4$ в контуре управления наклоном ДН нижнего луча. Поэтому в дальнейшем моделировании использовались значения $\delta\psi = 4^\circ$, $K = 0.4$.

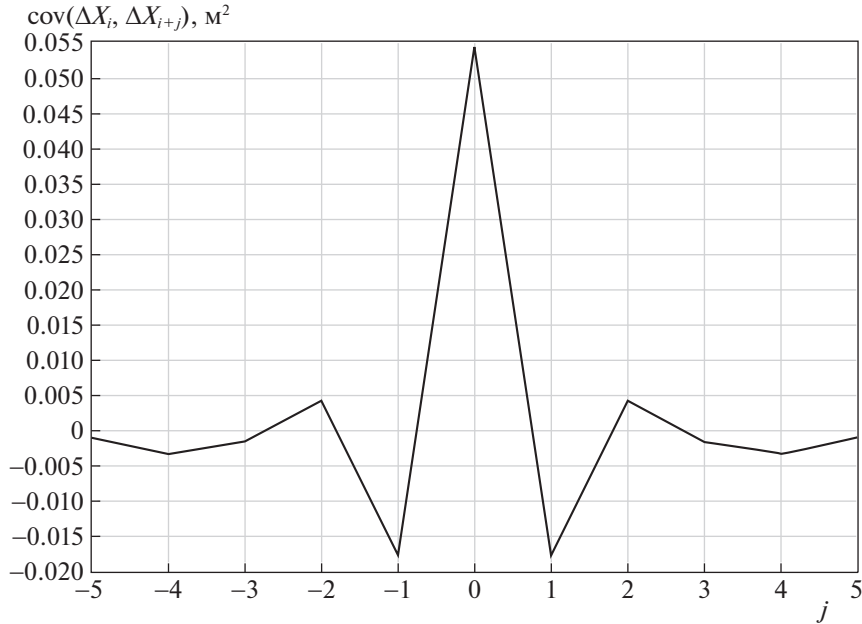


Рис. 2. Ковариационная функция приращения дальностей

II. При неслучайном выборе ориентации секторов Ψ_1 , Ψ_2 и варьировании модуля разности $\Delta\Psi = |\Psi_2 - \Psi_1|$ в диапазоне от 5 до 23° оценки СКО приращений дальностей от МО этих приращений не выходят из диапазона 0.2–0.25 м при движении БТС со скоростью менее 80 км/ч по различным участкам тест-дороги, в том числе при быстрых переходах с подъема на спуск. Следовательно, разработанные алгоритмы обработки информации и управления можно считать робастными по основному показателю стабильности интервалов между соседними траекториями движения лазерного пятна по дороге. Такая стабильность позволяет за кратчайшее время после обнаружения впереди едущего ТС определять скорость сближения с ним независимо от продольного профиля дороги. При этом отклонения от заданной дальности зондирования дороги нижним лучом имеют плавный характер изменений и не выходят за пределы ± 1.5 м.

III. При моделировании процессов управляемого сканирования исследовались вероятностно-временные характеристики возможности измерения скорости сближения с впереди едущим ТС в соответствии с методикой, изложенной в разд. 5. В связи с этим была проведена статистическая обработка приращений дальностей $\{\Delta X_i\}_{i=1, N}$ зондирования дороги в процессе движения БТС и получена зависимость ковариации $\text{cov}(X_{i+j}, X_i)$ от числа периодов j , соответствующего времени jT , прошедшего между двумя парами соседних периодов сканирования, на которых фиксировались разности дальностей (по линиям зондирования) ΔX_i и ΔX_{i+j} . Такая ковариационная функция приращений дальностей, представленная на рис. 2, свидетельствует о корреляционной связи случайных приращений дальности для лазерного пятна на различных парах соседних периодов. Из графика на рис. 2 следует, что учитывать необходимо только статистическую зависимость соседних случайных приращений, т.е. при $|j| = 1$. На интервалах времени больше T случайные приращения дальностей статистически независимы, так как при $|j| \geq 2$ ковариация $\text{cov}(\Delta X_{i+j}, \Delta X_{i+1}) \approx 0$. Значение ковариационной функции при $j = 0$, соответствующее дисперсии случайных приращений ΔX_i дальностей на соседних периодах сканирования, равно $\sigma^2 = 0.054 \text{ м}^2$. Ковариация таких приращений на интервале времени между ними, равном T (т.е. при $j = 1$), имеет значение $\text{cov}(\Delta X_i, \Delta X_{i+1}) = -0.018 \text{ м}^2$. Следовательно, коэффициент регрессии случайной величины X_{i+1} на X_i равен

$$\beta_{i+1,i} = \frac{\text{cov}(X_{i+1}, X_i)}{\sigma^2} = -0.333.$$

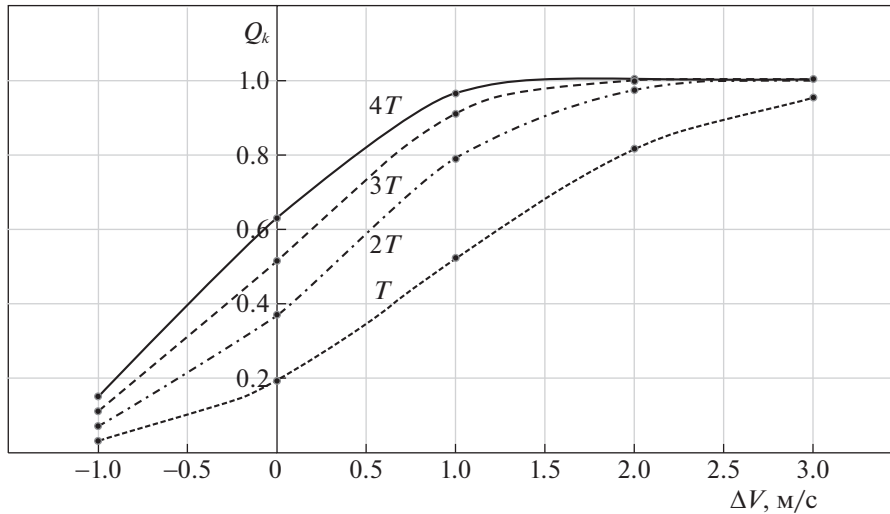


Рис. 3. Гарантированные вероятности измерения скорости сближения за время $T, 2T, 3T, 4T$ после обнаружения объекта

Тогда по формуле (5.12) условная дисперсия случайной величины X_{i+k} соответствует выражению $\sigma_{i+k,i}^2 = 0.018k + 0.03 \text{ м}^2$, а по формуле (5.13) условное МО

$$m_{i+k,i}(x) = x\sigma^{-2} \text{cov}(\Delta X_{i+1}, \Delta X_i) = -0.333x.$$

IV. Используя полученные результаты статистического моделирования, можно по формуле (5.9) найти условную вероятность p_k обнаружения впереди едущего объекта на $(i+k)$ -м периоде сканирования после первого обнаружения на i -м независимо от обнаружений или необнаружений на $(i+1), (i+2), \dots, (i+k-1)$ -м периодах. Под “первым” понимается обнаружение на i -м после необнаружения на $(i-1)$ -м периоде. Получив зависимость p_k от значений k , можно по формуле (5.1) определить гарантированную вероятность Q_k проведения измерения скорости сближений за время kT после обнаружения объекта. Графики зависимостей вероятности Q_k от скорости сближения ΔV для временных интервалов $T, 2T, 3T, 4T$ представлены на рис. 3. Соответствующие точные значения вероятностей измерений скорости приведены в таблице. Точности оценок скорости сближения для тех же временных интервалов приведены в разд. 5. Из таблицы и графиков следует, что, например, относительно небольшая скорость сближения $\Delta V = 1 \text{ м/с}$ будет измерена с вероятностями не хуже 0.91 и 0.96 за время $3T = 0.45 \text{ с}$ и $4T = 0.6 \text{ с}$ соответственно, а измерение скорости $\Delta V = 2 \text{ м/с}$ произойдет с вероятностью 0.995 за время 0.45 с после обнаружения объекта. Самые опасные скорости сближения (больше 3 м/с), требующие экстренного торможения, измеряются с вероятностями, близкими к единице, за время 0.15 с. Это свидетельствует о достаточно высокой эффективности системы управляемого сканирования при выбранном периоде обновления информации $T = 0.15 \text{ с}$.

Таблица 1

$\Delta V, \text{ м/с}$	T	$2T$	$3T$	$4T$
-1	0.032082	0.071146	0.111914	0.152618
0	0.193734	0.370132	0.514055	0.627581
1	0.521379	0.787383	0.908055	0.96078
2	0.813509	0.969963	0.995381	0.999305
3	0.951453	0.99815	0.999934	0.999998

Заключение. Управляемое ЛЛ-сканирование дорожного покрытия перед БТС позволяет свести к минимуму число используемых лазеров и каналов дальнометрирования. Предложенный технический облик системы с адаптивным управлением ориентацией двух лазерных лучей не сложен в реализации и обеспечивает своевременное обнаружение объектов на проезжей части дороги с измерением опасных скоростей сближения за время 0.15–0.45 с с вероятностью, близкой к единице. При движении в потоке управляемое сканирование с вероятностью 0.995 позволяет за время меньше 0.5 с принимать решения о притормаживании и формировании других сигналов для адаптивного автоматического управления скоростью. Такими вероятностно-временными характеристиками ЛЛ-система обладает при движении БТС по дорогам с быстро изменяющимися уклонами в пределах значительно больше допустимых. При этом сопровождение дорожного покрытия на заданной дальности обеспечивается в условиях загораживания 80% поля обзора другими ТС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себряков Г.Г., Обросов К.В., Ким В.Я., Лисицын В.М. Сравнительный анализ тепловидения и лазерной локации при обеспечении безопасности маловысотного полета вертолетов в ограниченно-сложных погодных условиях // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 12. С. 12–22.
2. Мужичек С.М., Обросов К.В., Лисицын В.М. Автономная навигация беспилотных транспортных средств на основе лазерно-локационного сканирования и семантического описания 3D-сцены // 31-я Всероссийск. научно-практическая конф. “Передача, обработка, отображение информации”. Сборник научных трудов. Краснодар: Экспертно-аналитический центр Минобрнауки России, 2020. С. 217–221.
3. Lisitsyn V.M., Obrosov K.V. Concept of Building an Electro-Optical System of Semi-Automatic Car Driving on Highways // International Archives of ISPRS. 1998. V. XXXII. Pt B5. P. 757–762.
4. Lisitsyn V.M., Tikhonova S.V. 3D-object Detection Method Based on the Stereo Image Transformation to the Common Observation Point // International Archives of ISPRS. 2000. V. XXXIII. Pt B-3/1. P. 534–539.
5. T.B. Lee. How 10 Leading Companies are Trying to Make Powerful, Low-cost Lidar // <https://arstechnica.com/cars/2019/02/the-ars-technica-guide-to-the-lidar-industry/>
6. Мужичек С.М., Обросов К.В., Ким В.Я. и др. Пат. 2706912 Российская Федерация, МПК G01C 23/00 C2. Способ адаптивного сканирования подстилающей поверхности лучом лазерного локатора в режиме информационного обеспечения маловысотного полета / Патентообладатель ФГУП ГосНИИАС. Оpubл. 21.11.2019 Бюл. № 33.
7. Ким В.Я., Лисицын В.М., Мужичек С.М., Обросов К.В. Активно-пассивная система безопасного пилотирования на предельно малых высотах // Изв. РАН. ГиСУ. 2018. № 2. С. 69–84.
8. Себряков Г.Г., Обросов К.В., Ким В.Я., Лисицын В.М. Лазерно-локационная система автоматического управления полетом на предельно малых высотах // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 3 (177). С. 11–19.
9. Мужичек С.М., Обросов К.В., Ким В.Я. и др. Дальность действия лазерного локатора в режиме информационного обеспечения маловысотного полета // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 2. С. 3–10.
10. Себряков Г.Г., Обросов К.В., Ким В.Я., Лисицын В.М. Лазерно-локационное позиционирование летательного аппарата относительно взлетно-посадочной полосы при посадке // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 10 (184). С. 44–51.
11. Строительные нормы и правила. 2.05.02-85. Автомобильные дороги. М.: Госстрой России, ФГУП ЦПП. 2004.
12. Обросов К.В., Лисицын В.М. Точность лазерно-локационного дальнометрирования при настильном зондировании поверхности объектов // Передача, прием, обработка и отображение информации о быстропотекающих процессах: сб. докл. XXVIII Всероссийск. науч.-техн. конф. школы-семинара (Сочи, октябрь 2017 г.). М.: ООО “Издательский дом Академии им. Н.Е. Жуковского”, 2017. С. 411–415.

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 519.175.3, 519.179.1, 519.72

**АЛГОРИТМ ПЕРЕДАЧИ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ¹**

© 2021 г. Е. К. Егорова^{a,b}, А. В. Мокряков^{a,b,*}, А. А. Суворова^a, В. И. Цурков^c

^a МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^b РГУ им. А.Н. Косыгина, Москва, Россия

^c ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: MokryakovAlVik@gmail.com

Поступила в редакцию 09.06.2020 г.

После доработки 14.06.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

В последнее время беспилотные летательные аппараты все чаще применяются для разведки в боевых условиях. Связь с беспилотными летательными аппаратами должна проводиться в конфиденциальном режиме для защиты от перехвата управления, при этом быть быстрой и стойкой к атакам извне. Предлагается новый алгоритм передачи конфиденциальных данных, основанный на свойствах экстремальных однородных гиперграфов.

DOI: 10.31857/S0002338821010054

Введение. В работе рассматриваются вопросы передачи конфиденциальных данных с помощью одного из обобщений минимакса при транспортных ограничениях [1]. Сам минимакс имеет ряд обобщений [2, 3]. Здесь мы воспользуемся одним из них — гиперграфом [4]. Частным случаем гиперграфа является граф. Возможность использования графов для передачи конфиденциальных данных предполагал Клод Шеннон [5]. В современных исследованиях некоторые методы передачи защищенных данных применяют графы в качестве вспомогательных структур, например для работы с ключами или при анализе данных перед обработкой [6]. Также существуют методы, где граф является основным актором преобразования данных. В [7] основой для изменения данных выступает изоморфизм графов. Авторы [8] описывают два симметричных алгоритма для создания многомерных преобразований на базе трех семейств двудольных графов с множествами разбиений, изоморфных \mathbb{K}^n , где \mathbb{K} — конечное коммутативное кольцо.

Но в целом, работ, применяющих графы непосредственно, не очень много, так как трудно использовать граф в виде ключевого элемента. Это связано с тем, что небольшой граф можно получить простым перебором, а большой занимает существенный объем данных при передаче. Однако эти проблемы можно минимизировать, если применить экстремальные однородные гиперграфы. Это дает два преимущества.

1. Экстремальный однородный гиперграф можно однозначно задать посредством вектора степеней его вершин. Вектор занимает существенно меньший объем памяти, чем список гиперребер или матрица смежности.

2. С помощью гиперграфа можно увеличить стойкость метода, так как количество экстремальных гиперграфов с ростом числа вершин растет быстрее экспоненциального.

Далее опишем метод конфиденциальной передачи данных посредством экстремальных однородных гиперграфов.

1. Экстремальные однородные гиперграфы. Сначала необходимо дать некоторые определения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (уникальный идентификатор проекта RFMEFI60719X0312).

Определение 1. Гиперграф $H = H(V, E) = H(V_n, E)$ – совокупность множества из m вершин V_n и множества непустых подмножеств множества вершин E [9], e_i – элементы множества E , где $i = \overline{1, |E|}$ называются гиперребрами [4].

Определение 2. Гиперграф $H^k = H^k(V_n, E)$ называют k -однородным гиперграфом (uniform hypergraph (UH)), если $|e_i| = k, \forall e_i \in E$.

Ненаправленные графы без петель – частный случай k -однородных гиперграфов при $k = 2$. Если рассмотреть 3-однородные гиперграфы, то они известны под названием 2-комплексов [10]. Этот термин пришел из топологии [11].

В отличие от произвольных гиперграфов k -однородные гиперграфы можно представить в виде k -индексной матрицы смежности $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$, где индексы $i_j = \overline{1, n}$ при $j = \overline{1, k}$.

Среди всех k -однородных гиперграфов нас интересует определенное подмножество – экстремальные однородные гиперграфы. Пусть \mathbb{Z}_+ – множество неотрицательных целых чисел и n – количество координат вектора \mathbf{A} . Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}_+^n = \{\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{Z}_+ \forall i\}$ – множество неотрицательных n -координатных векторов и $\overline{\mathbb{Z}_+^n} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n : a_i \geq a_{i+1}, \forall i, i = \overline{1, n-1}\}$ – множество неотрицательных n -координатных векторов с упорядоченными по невозрастанию координатами.

Определение 3. Реализацией вектора $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n$ в k -однородный гиперграф $H = H(\mathbf{A}) = H(V, E)$ называется такой гиперграф, что вектор степеней его вершин есть вектор \mathbf{A} .

Пусть вектор \mathbf{A} из $\overline{\mathbb{Z}_+^n}$ есть реализуемый в k -однородный гиперграф вектор и $\Gamma^k = \{H(\mathbf{A})\}$ – множество всех реализаций (с множеством вершин V_n).

Определение 4. Вектор \mathbf{A} из $\overline{\mathbb{Z}_+^n}$, где $n \geq 2$, называется k -совершенным, если $|\Gamma^k| = 1$. При этом единственная реализация $H(\mathbf{A})$ обозначается k -совершенным однородным гиперграфом.

Для определения экстремальности вектора (и гиперграфа) удобно перейти к вектору, координаты которого упорядочены по невозрастанию.

Определение 5. Вектор \mathbf{A} из $\overline{\mathbb{Z}_+^n}$, где $n \geq 2$, называется k -экстремальным, если \mathbf{A} – k -совершенный вектор. Единственная реализация $H(\mathbf{A})$ будет экстремальным k -однородным гиперграфом.

Основное преимущество использования экстремальных гиперграфов состоит в том, что между множеством k -экстремальных векторов и множеством экстремальных k -однородных гиперграфов установлено взаимно-однозначное соответствие. Кроме того, существуют быстрые редукционные алгоритмы восстановления k -экстремальных векторов в k -однородный гиперграф при $k = 2$ [12] и $k = 3$ [13].

Для создания экстремальных гиперграфов понадобится еще одно понятие – база [14] экстремального k -однородного гиперграфа.

Пусть $n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$. Для множества индексов $I_n = \{i \in \mathbb{Z} : i = \overline{1, n}\}$ (номеров) введем обозначение k -индексных упорядоченных подмножеств множества I_n : $I_n^k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_j = \overline{1, n}, i_j < i_{j+1} \forall j\}$. Определим на I_n^k частичный порядок: положим $(i_j : j = \overline{1, k}) \geq (m_j : j = \overline{1, k})$, если $i_j \geq m_j \forall j$, и $(i_j : j = \overline{1, k}) > (m_j : j = \overline{1, k})$ при $(i_j : j = \overline{1, k}) \geq (m_j : j = \overline{1, k})$ и $(i_j : j = \overline{1, k}) \neq (m_j : j = \overline{1, k})$.

Построим конструкцию, позволяющую алгебраическим способом описать экстремальный k -комплекс. Для $H^k = H^k(V_n, E)$ и $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$ зададим $I_n^k(H^k) = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k : x_{i_1 \dots i_k} = 1\} = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k : \{v_{i_j} : j = \overline{1, k}\} \in E\}$.

Определение 6. Пусть $H^k(V_n, E)$ – непустой экстремальный k -однородный гиперграф ($E \neq \emptyset$), а $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$ – его матрица смежности. Подмножество индексов $\overline{I}_n^k(H^k) = \{(i_1, \dots, i_k)\}$ из \hat{I}_n^k называется базой для комплекса H^k , если выполняются следующие условия:

– для разных элементов (i_1, \dots, i_k) и (m_1, \dots, m_k) из $\overline{I}_n^k(H^k)$ отношение порядка в $\hat{I}_n^k(H^k)$ не определено;

– для $\forall(i_1, \dots, i_k) \in \hat{I}_n^k(H^k) \setminus \bar{I}_n^k(H^k)$ существует такой $(m_1, \dots, m_k) \in \bar{I}_n^k(H^k)$, что существует отношение частичного порядка: $(i_1, \dots, i_k) < (m_1, \dots, m_k)$.

Пример 1. Возьмем 4-экстремальный вектор $\mathbf{A} = (4, 4, 4, 1, 1, 1, 1)$. Построим его единственную реализацию $H^4 = H^4(V_7, E) = H^4(\mathbf{A})$, где множество гиперребер $E = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}\}$. Следовательно, $\bar{I}_7^4(H^4) = \{(1, 2, 3, 7)\}$.

Определение 7. Подмножество индексов (m_1, \dots, m_k) из $\hat{I}_n^k(H^k)$ (т. е. $x_{m_1 \dots m_k} = 1$) называется *максимальным*, если $x_{i_1 \dots i_k} = 0$, $\forall(i_1, \dots, i_k) > (m_1, \dots, m_k)$.

Теорема 1. База состоит из всех максимальных подмножеств индексов.

Теорема 2. Любой экстремальный k -однородный гиперграф $H^k = H^k(V_n, E)$ имеет единственную базу.

Теорема 3. Пусть $\tilde{I}_n^k = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k\}$ и между элементами \tilde{I}_n^k отсутствует отношение частичного порядка. Тогда \tilde{I}_n^k – база некоторого экстремального k -однородного гиперграфа.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4: k -однородный гиперграф H^k является экстремальным тогда и только тогда, когда H^k имеет базу.

Доказательство последних теорем не вызывает затруднений. Приведенные здесь алгоритмы будут расширением и уточнением работы [15], доложенной на конференции “Авиация и космонавтика-2019”.

2. Конфиденциальная передача данных с помощью экстремальных однородных гиперграфов. Для передачи данных нам потребуется ввести несколько переменных:

– $EUH_n^k = EUH_n^k(\mathbf{A}) = EUH_n^k(V_n, E)$ – экстремальный k -однородный гиперграф с множеством вершин V_n , и множеством гиперребер E ;

– n – количество вершин гиперграфа EUH ;

– N – общее количество данных для передачи (в байтах);

– k – размерность гиперграфа EUH ;

– b – размер малого блока (в байтах);

– B – размер большого блока (в байтах).

Опишем непосредственно алгоритм действий.

Алгоритм 1. Преобразование данных перед их передачей. На вход подается N байт данных.

Шаг 1. Выбираем размер малого блока b , размерность гиперграфа k и количество вершин в нем n . Подсчитываем размер большого блока: $B = bn$.

Шаг 2. Разбиваем на $p = \lceil N/B \rceil$ больших блоков входной поток данных. Дописываем в последний блок с номером $t = pB - N$ следующие значения по одному в каждый малый блок: $t, t + 1, t + 2, t + 3, \dots, 2t - 1$ (если заполнить одинаковыми значениями, то последний блок может быть менее устойчив к линейному перебору).

Шаг 3. Выбирается k -экстремальный вектор \mathbf{A} требуемой размерности и соответствующий ему экстремальный k -однородный гиперграф $EUH_n^k(\mathbf{A})$ (алгоритм 2 далее).

Шаг 4. Формируем ключевой элемент в виде целочисленного массива из следующих переменных: b, t, p, k, n , вектор \mathbf{A} . Преобразуем ключевой элемент по одному из известных алгоритмов, например ГОСТ или AES.

Шаг 5. Передаем преобразованный ключ контрагенту.

Шаг 6. Устанавливаем $i = 1$.

Шаг 7. Выбираем большой блок B_i и изменяем его (алгоритм 3 далее).

Шаг 8. Передаем преобразованный большой блок контрагенту.

Шаг 9. Если рассматриваемый большой блок не последний ($i < p$), то переходим к следующему большому блоку ($i = i + 1$) и к шагу 7, иначе завершаем алгоритм.

Здесь задействованы вспомогательные алгоритмы выбора экстремального вектора и изменения большого блока данных.

Для построения гиперграфа и соответствующего ему вектора воспользуемся тем, что множество баз однозначно соответствует множеству экстремальных k -однородных гиперграфов (см. теорему 4).

Алгоритм 2. Выбор вектора и $EUH_n^k(\mathbf{A})$. На вход подается n и k .

Шаг 1. Формируем множество I_n^k , соответствующее множеству всех возможных одноэлементных баз, в этом множестве есть C_n^k элементов.

Шаг 2. Устанавливаем результирующий n -координатный вектор $\mathbf{A} = 0$.

Шаг 3. Выбираем случайным образом от n до n^2 количество итераций выбора вектора: n_c .

Шаг 4. Выбираем случайным образом базу из множества I_n^k и уменьшаем n_c на единицу.

Шаг 5. Получаем вектор \mathbf{A}_{n_c} из выбранной базы.

Шаг 6. Выполняем операцию объединения векторов \mathbf{A} и \mathbf{A}_{n_c} по правилу, описанному в работе [16].

Шаг 7. Если $n_c > 0$, то переходим к шагу 4.

Шаг 8. Результирующий вектор устанавливаем как вектор \mathbf{A} .

Шаг 9. По редукционному алгоритму восстанавливаем искомым гиперграф [10, 12, 18, 17].

Отдельно опишем алгоритм для непосредственного изменения большого блока.

Алгоритм 3. Преобразование большого блока. На вход передается b , n , k и выбранный $EUH_n^k(\mathbf{A})$.

Шаг 1. Разбиваем большой блок на n малых блоков (обозначим их s) с нумерацией от 1 до n . Устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между вершинами выбранного гиперграфа и малыми блоками.

Шаг 2. Устанавливаем $j = 1$.

Шаг 3. Выделяем в гиперграфе подмножество вершин, имеющих общее гиперребро с j -той вершиной гиперграфа, и чей номер больше j : $M_j = \{v_{ij}\}$, где v_{ij} – вершина v_i инцидентная вершине j и $t > j$.

Шаг 4. Находим $Y = \bigoplus_i s_i$, где i такой, что $v_{ij} \in M_j$.

Шаг 5. Изменяем j блок: $s_j = s_j \oplus Y$.

Шаг 6. Изменяем другие блоки: $s_i = s_i \oplus Y$, где i такой, что $v_{ij} \in M_j$.

Шаг 7. Если $j < n - k$, то увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 3.

Полученный блок в результате работы алгоритма 3 легко восстановить в первоначальный вариант, если знать структуру использованного гиперграфа.

3. Получение исходных данных. Для этого нужно по вектору построить однородный гиперграф, а затем выполнить процесс преобразования блока данных с помощью функции, обратной к функции из алгоритма 3.

Алгоритм 4. Обратное преобразование блока данных. Входными данными являются ключевой элемент, восстановленный по методу, использованному в шаге 4 алгоритма 1, и данные, измененные по алгоритму 1. Ключевой элемент состоит из переменных b , t , p , k , n и вектора \mathbf{A} . Данные могут поступать по одному большому блоку или потоком, что несущественно для алгоритма. Поэтому в рамках алгоритма предполагаем, что каждый раз разбирается очередной большой блок данных.

Шаг 1. Восстанавливаем k -однородный гиперграф по одному из известных редукционных алгоритмов [10, 12, 18, 17].

Шаг 2. Устанавливаем $j = n - k$.

Шаг 3. Выделяем в гиперграфе подмножество вершин, инцидентных j -той вершине гиперграфа, объединяем множество вершин, связанных с первой вершиной $M_j = \{v_{ij}\}$, где v_{ij} – вершина v_i , инцидентная вершине j и $t > j$.

Шаг 4. Изменяем блоки: $s_i = s_j \oplus s_i$, где i такой, что $v_{ij} \in M_j$.

Шаг 5. Находим $Y = \bigoplus_i s_i$, где i такой, что $v_{ij} \in M_j$.

Таблица 1. Зависимость $|EUH_n^3|$ от количества вершин

n	$N = EUH_n^3 $	$(\ln N)/n$
3	1	0.000
4	4	0.347
5	15	0.542
6	65	0.696
7	351	0.837
8	2430	0.974
9	21759	1.110
10	252585	1.244
11	3803647	1.377
12	74327144	1.510
13	1885102079	1.643
14	62062015499	1.775
15	2652584509439	1.907
16	147198472495019	2.039

Шаг 6. Изменяем j блок: $s_j = s_j \oplus Y$.

Шаг 7. Если $j > 1$, то уменьшаем j на 1 и переходим к шагу 3.

Если $t \neq 0$, то необходимо последние t байтов убрать из последнего большого блока.

4. Устойчивость алгоритма к атакам. Защита от атак на этот метод преобразования данных базируется на двух вещах. Во-первых, защита ключевого элемента проводится с помощью известного стойкого алгоритма, т.е. гиперграф злоумышленнику. Во-вторых, защита обуславливается мощностью множества экстремальных k -однородных гиперграфов. Рассмотрим экстремальные 2-однородные гиперграфы: $|EUH_n^2| = 2^{n-1}$. Легко видеть, что стойкость алгоритма, сравнимая с AES128, достигается только на 129 вершинах ($|EUH_2^{129}| = 2^{128}$). Это приводит к тому, что ключ становится больше, как и время работы редуцированного алгоритма, что не позволяет в реальных приложениях базироваться на преобразовании с помощью EUH_n^2 .

Обратимся к случаю $k = 3$. Рост количества таких гиперграфов на n вершинах быстрее экспоненциального. Этого легко видеть на основе следующего ряда (таблица), полученного экспериментальным способом. В третьем столбце мы видим функцию, демонстрирующую рост $|EUH_n^3|$ выше экспоненциального. При этом если данную функцию экстраполировать, то можем получить $|EUH_{28}^3| \approx 10^{44}$, что существенно больше $2^{128} \approx 3,4 \times 10^{38}$. Таким образом каждый вектор на 28 вершинах содержит больше информации, чем 128-битное число.

Можно задаться вопросом о длине записи вектора \mathbf{A} , состоящего из 28 степеней вершин. Максимальная степень вершины при $k = 3, n = 28$ равна $C_{n-1}^{k-1} = C_{27}^2 = 351$. Так как $2^8 < 351 < 2^9$, то для записи одной степени вершины достаточно 9 бит, для всех 28 вершин необходимо $28 \cdot 9 = 252$ бита. Более точная оценка: $28 \log_2 351 = 237$ бит.

В работе [17] рассматривается общая формула мощности, которая полностью не определена, но имеет следующий общий вид:

$$|EUH_n^3| = \sum_{i=1}^{\lceil n(n-2)/8 \rceil} \sum_q a_q C_{n+l_q}^{3i}, \tag{4.1}$$

где q, l_q, a_q – целочисленные коэффициенты, нелинейно зависящие от n . Это позволяет при сравнительно небольшом количестве вершин получить надежный, устойчивый к линейному перебору ключ, т.е. подобрать его за разумное время не представляется возможным. Также отметим, что при использовании гиперграфов большего порядка стойкость возрастает аналогично

формуле (1), только верхняя граница первой суммы будет больше (предположительно сравнимо с n^k), также в числе сочетаний 3 заменяется на k .

Заключение. Сформулируем главный вопрос, возникающий при работе с данным алгоритмом: чем данный метод лучше, чем известные методы, например AES или ГОСТ?

Главное преимущество рассматриваемого алгоритма состоит в том, что он выполняется быстрее. Например, для преобразования большого блока потребуется выполнить не более чем $(n-1)(n-k)$ операций побитового XOR. Таким образом, при условии использования параметров $b=1$, $k=3$ и $n=32$ потребуется не более 900 операций. В AES128, к примеру, требуется выполнить более 1600 операций для блока длиной 32 байта. Кроме того, редуцированный алгоритм восстановления k -однородного гиперграфа является полиномиальным и имеет сложность $O(n^{k-1})$, что также не сильно усложняет процесс получения изначальных данных, так как выполняется единственный раз при начале процесса преобразования или восстановления данных. Стоит отметить, что для рассмотренного алгоритма существует большое пространство для модификаций и улучшений и их изучение — дело дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mironov A.A.* Minimax under Transportation Constraints Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 309 p.
2. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 1995. V. 33. № 3. P. 107–116.
3. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 2 // J. Computer and Systems Sciences International. 1994. V. 32. № 6. P. 1–11.
4. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
5. *Moore E.F., Shannon C.E.* Reliable circuits using less reliable relays // J. Franklin Institute. 1956. V. 262. № 4. P. 281–297.
6. *Фомичев В.М., Авезова Я.Э., Коренева А.М., Кяжин С.Н.* Примитивность и локальная примитивность орграфов и неотрицательных матриц // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25. № 3 (137). С. 95–125.
7. *Ustimenko V., Romańczuk-Polubiec U., Wróblewska A., Polak M.K., Zhupa E.* On the Constructions of New Symmetric Ciphers Based on Nonbijective Multivariate Maps of Prescribed Degree // Security and Communication Networks. 2019. 2137561. <https://doi.org/10.1155/2019/2137561>
8. *Пролубников А.В., Файзуллин Р.Т.* Шифрование видеоизображений с помощью шифра двойной перестановки // Изв. Челябинск. научн. центра УрО РАН. 2004. № 1. С. 17–21.
9. *Ванг Л., Егорова Е.К., Мокряков А.В.* Развитие теории гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. 1. С. 111–116.
10. *Mironov A.A., Мокряков А.В., Sokolov A.A.* About Realization of Integer Non-Negative Numbers Tuple into 2-Dimensional Complexes // Applied and Computational Mathematics. 2007. V. 6. № 1. P. 58–68.
11. *Александров П.С.* Комбинаторная топология. М.: Гостехтеориздат, 1947. 660 с.
12. *Миронов А.А.* Геометрия точек пространства R^n , реализуемых в граф // УМН. Т. XXXII. № 6 (198). 1977. С. 232–233.
13. *Мокряков А.В., Цурков В.И.* Восстановление 2-комплексов по целочисленному неотрицательному вектору // АИТ. 2011. № 12. С. 130–143.
14. *Мокряков А.В.* Представление гиперграфов в качестве алгебраической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 53–59.
15. *Егорова Е.К., Мокряков А.В., Суворова А.А.* Концепция шифрования данных с помощью экстремальных однородных гиперграфов // Тез. докл. 18-й Междунар. конф. “Авиация и космонавтика-2019”. М.: МАИ (НИУ), 2019. С. 98–99.
16. *Егорова Е.К., Есенков А.С., Мокряков А.В.* Операции над k -однородными гиперграфами и их векторы степеней вершин // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 75–80.
17. *Мокряков А.В., Селин П.С., Цурков В.И.* Минимакс и восстановление по вектору в графах. М.: Физматлит, 2017. 309 с.
18. *Костяной Д.С., Мокряков А.В., Цурков В.И.* Алгоритмы восстановления гиперграфов по заданному вектору степеней вершин // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 43–48.

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОГО ГРАДИЕНТА С ШАГОМ БАРЗИЛАЙ–БОРВЕЙНА ДЛЯ БЕЗУСЛОВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ¹

© 2021 г. Л. Ванг^{a,*}, Х. Ву^a, И. А. Матвеев^{b,**}

^a Нанкинский ун-т авиации и космонавтики, Нанкин, КНР

^b Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

*e-mail: wlpmath@nuaa.edu.cn

**e-mail: matveev@ccas.ru

Поступила в редакцию 09.06.2020 г.

После доработки 17.06.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Применение алгоритмов стохастического градиента для нелинейной оптимизации вызывает значительный интерес, особенно для случая большой размерности. При этом для скорости сходимости решающее значение имеет выбор величины шага. Предлагаются два новых алгоритма стохастического градиента, использующие улучшенную формулу величины шага Барзилай–Борвейна. Анализ сходимости показывает, что эти алгоритмы дают линейную сходимость по вероятности для сильно выпуклой целевой функции. Вычислительные эксперименты подтверждают, что два предложенных алгоритма имеют лучшие характеристики, чем двухточечные градиентные алгоритмы, и известные методы стохастического градиента.

DOI: 10.31857/S0002338821010108

Введение. Анализ и обработка больших данных применяются сейчас во многих областях: в биостатистике, распознавании образов, финансовом анализе и т.д. Наиболее часто используемые методы нелинейной обработки данных – минимизация ошибок обучения или подбора, т.е. минимизации эмпирического риска [1]. Потребность в создании новых методов обработки диктуется быстрым ростом объема данных. Традиционные алгоритмы оптимизации требуют большого количества вычислений относительно объема данных и это становится неприемлемым. Использование случайных подвыборок данных, а не полной информации в вычислениях – эффективный подход к уменьшению размерности. Здесь возникает задача получения хорошего приближения полных данных.

Метод стохастического градиента в безусловной минимизации восходит к методу стохастической аппроксимации, предложенному Роббинсом и Монро [2]. Более современное название – стохастический градиентный спуск (СГС, stochastic gradient descent, SGD). Формула итераций:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \eta_k \bar{g}_k,$$

где \bar{x}_k – текущая точка итерации, \bar{g}_k – стохастический градиент, являющийся несмещенной оценкой полного градиента $\nabla f(\bar{x}_k)$, η_k – величина шага. Метод СГС прост в реализации. При итерациях не требуется точного расчета полного градиента или использования всей информации о выборке. Вместо этого полный градиент оценивается по случайной подвыборке. СГС повышает скорость сходимости относительно объема вычислений по сравнению с традиционными алгоритмами оптимизации, особенно при решении больших задач безусловной минимизации. По этой причине СГС привлекал многих исследователей [3–6]. Однако в исходной постановке метод СГС плохо приспособлен к решению больших задач. Его недостатками являются случайный характер, порождающий дисперсию и увеличение гарантированного времени сходимости, и большее число требуемых шагов (хотя каждый из них простой). В [7] предложен метод стохастического среднего градиента (ССГ, stochastic average gradient, SAG), чтобы уменьшить разброс

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Нанкинского ун-та авиации и космонавтики (проект NG2019004), Государственного фонда естественных наук Китая (проект 11971231), РФФИ (проект 19-01-00625).

сходимости. В [8] представлен подход стохастического двойного координатного подъема (СДКП, stochastic dual coordinate ascent, SDCA). На самом деле, оба метода должны хранить градиенты всей выборки. Далее, в [9] предложен метод уменьшения дисперсии стохастического градиента (УДСГ, stochastic variance reduced gradient, SVRG), ускоряющий сходимость стохастического метода первого порядка путем выбора градиента с минимальной оценкой дисперсии. Доказано, что он имеет ту же скорость сходимости, что и СДКП и ССГ, но ему не нужно хранить полный набор градиентов, что очень полезно для больших задач.

В методах градиентного спуска необходимо задавать величину шага. Наиболее распространены три способа: постепенно уменьшать шаг, дополнительно к градиенту использовать производные второго порядка, задавать фиксированный шаг вручную (эвристически извне). Все эти способы не являются оптимальными. В 1988 г. Barzilai и Borwein [10] предложили определение величины шага итерации по предыстории из двух точек (ББ). Метод ББ не использует вторые производные (не вычисляет обратный гессиан), но достигает впечатляющих результатов. Метод ББ применен к СГС и УДСГ, доказана линейная сходимость УДСГ-ББ для сильно выпуклой целевой функции [11]. Из-за эффективности метода ББ он весьма популярен и на его основе предложены различные варианты расчетов [12–14]. В [13] метод ББ рассмотрен с точки зрения интерполяции, предложены два модифицированных двухточечных алгоритма. Также экспериментально показано, эти два алгоритма быстрее сходятся в традиционных задачах оптимизации, чем исходный ББ.

Этот подход к решению задач стохастического программирования взят за основу в настоящей статье. Ожидается, что введение модификации [13] в метод УДСГ позволит далее улучшить сходимость за счет небольших дополнительных объема памяти и вычислений.

Остальная часть этой статьи организована следующим образом. В разд. 2 кратко рассмотрены два улучшенных метода ББ определения шага, предложенных в [13]. Два новых стохастических алгоритма приведены в разд. 3. В разд. 4 представлен анализ сходимости двух новых алгоритмов. Численные эксперименты описаны в разд. 5, выводы – в разд. 6.

1. Алгоритмы УДСГ и ББ. Машинное обучение можно рассматривать как построение нелинейной системы, минимизирующей ошибку на некоторой обучающей выборке (минимизация эмпирического риска). Формулируя как задачу безусловной оптимизации, можно записать $f(\bar{x}) \rightarrow \min$, где

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(\bar{x}). \quad (1.1)$$

Здесь n – число объектов обучающей выборки, $\phi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – функция потерь для i -го объекта. Современные задачи характеризуются большим числом объектов n , равно как большой размерностью признакового пространства d . Модель (1.1) широко используется для решения задач классификации, регрессии и кластеризации в области машинного обучения [15].

Для решения задачи (1.1) в [9] предложен метод стохастического уменьшения дисперсии градиента (УДСГ), показанный в алгоритме 1.

А л г о р и т м 1. Алгоритм УДСГ.

Вход: частота обновления m , начальная точка x_0 , величина шага η .

Шаг 1. Для $k = 0, 1, \dots$

Шаг 2: $\bar{x} = \bar{x}_k$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(\bar{x})$, согласно (1.1).

Шаг 4: $\tilde{x}_0 = \bar{x}$.

Шаг 5. Для $t = 0, \dots, m - 1$.

Шаг 6. Случайно выбрать $i_t \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 7: $\tilde{x}_{t+1} = \tilde{x}_t - \eta(\nabla \phi_{i_t}(\tilde{x}_t) - \nabla \phi_{i_t}(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}))$.

Шаг 8. Конец цикла по t .

Шаг 9. Вариант I: $\bar{x}_{k+1} = \tilde{x}_m$.

Шаг 10. Вариант II: $\bar{x}_{k+1} = \tilde{x}_t$ для случайного $t \in \{0, \dots, m - 1\}$.

Шаг 11. Конец цикла по k .

Однако в [9] не дан конкретный метод выбора величины шага η . В варианте I скорость сходимости УДСГ очень чувствительна к выбору η , неверный выбор может привести к неэффективности или даже отсутствию сходимости. Могут применяться различные способы вычисления размера шага – наискорейший спуск, Барзилай–Борвейн [10] и т.д. Формула итерации

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - H_k \nabla f(\bar{x}_k), \tag{1.2}$$

где $H_k = \eta_k I$. Обозначим $\bar{s}_{k-1} = \bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}$ и $\bar{y}_{k-1} = \nabla f(\bar{x}_k) - \nabla f(\bar{x}_{k-1})$. В квазиньютоновских методах итерация задается как $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - B_k^{-1} \nabla f(\bar{x}_k)$, где матрица B_k^{-1} удовлетворяет условию

$$B_k \bar{s}_{k-1} = \bar{y}_{k-1}.$$

Шаг ББ вычисляется как

$$\eta_k = \frac{\|\bar{s}_{k-1}\|_2^2}{\bar{s}_{k-1}^T \bar{y}_{k-1}}. \tag{1.3}$$

В [11] шаг ББ используется в методах СГС и УДСГ, полученные методы назовем СГС-ББ и УДСГ-ББ.

В [13] шаг ББ рассмотрен с точки зрения интерполяции и предложены два улучшенных метода расчета его величины. Обозначим $t_k = \eta_k^{-1}$. В окрестности точки \bar{x}_k построим две модели целевой функции $f(\bar{x}_k + \theta \bar{s}_{k-1})$. Квадратичная модель

$$q_k(\theta) = f_k + \theta \nabla^T f(\bar{x}_k) \bar{s}_{k-1} + \frac{1}{2} t_k \theta^2 \|\bar{s}_{k-1}\|_2^2, \tag{1.4}$$

очевидно, удовлетворяет условиям нулевого $q_k(0) = f_k$ и первого $\nabla q_k(0) = \nabla^T f(\bar{x}_k) \bar{s}_{k-1}$ порядков. Пусть (1.4) удовлетворяет условию интерполяции $q_k(-1) = f_{k-1}$, тогда величина шага получается как

$$\eta_k = \frac{\|\bar{s}_{k-1}\|_2^2}{2(f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_k) \bar{s}_{k-1})}. \tag{1.5}$$

Коническая модель

$$q_k(\theta) = f_k + \theta \nabla^T f(\bar{x}_k) \bar{s}_{k-1} + \frac{1}{2} t_k \theta^2 \|\bar{s}_{k-1}\|_2^2 + \xi_k \theta^3 \tag{1.6}$$

также удовлетворяет условиям нулевого и первого порядков. Пусть (1.6) удовлетворяет $q_k(-1) = f_{k-1}$ и $\nabla q_k(-1) = \nabla^T f(\bar{x}_{k-1}) \bar{s}_{k-1}$ одновременно, тогда величина шага

$$\eta_k = \frac{\|\bar{s}_{k-1}\|_2^2}{6(f_{k-1} - f_k) + 4 \nabla^T f(\bar{x}_k) \bar{s}_{k-1} + 2 \nabla^T f(\bar{x}_{k-1}) \bar{s}_{k-1}}. \tag{1.7}$$

Величины шагов, рассчитанные по уравнениям (1.5) и (1.7), не только используют градиент текущей и предыдущей точек итерации, но также задействуют значения самой функции. В [13] алгоритмы, индуцируемые вычислением шага, согласно (1.5) и (1.7), даны как алгоритмы 3.1 и 3.2 соответственно. Численные результаты [13] показывают, что эти два алгоритма более эффективны, чем алгоритм градиента с шагом ББ (1.3). Однако алгоритмы [13] используют значения функций и информацию о градиенте всех данных, которые требуют большого объема вычислений.

Возникает вопрос о возможности объединения двух подходов, стохастического градиента и шага ББ, и свойствах полученного метода.

2. Модифицированный алгоритм УДСГ. Внедрим формулы (1.5) и (1.7) расчета величины шага по предыстории в алгоритм УДСГ. Итерация этого метода (алгоритм 1)

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t - \eta (\nabla f_{i_t}(\bar{x}_t) - \nabla f_{i_t}(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})). \tag{2.1}$$

Здесь используется стохастический градиент ∇f_{i_t} вместо полного градиента ∇f , что уменьшает сложность вычислений. Однако при этом размер шага η фиксирован. В [9] подчеркивается, что

УДСГ проводит внешний цикл m раз (используя одну несмещенную оценку полного градиента) повторяя шаги (2.1). По аналогии с (1.5) и (1.7) предлагаются две версии шага:

$$\eta_k^{(1)} = \frac{\|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2}{m[2(f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}))]}, \quad (2.2)$$

$$\eta_k^{(2)} = \frac{\|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2}{m[6(f_{k-1} - f_k) + 4\nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) + 2\nabla^T f(\bar{x}_{k-1})(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})]}. \quad (2.3)$$

Таким образом получаются два новых алгоритма стохастического градиента: алгоритмы 2 и 3.

А л г о р и т м 2. Стохастический градиентный метод с шагом ББ (2.2).

Вход: частота обновления m , начальная точка x_0 , начальная величина шага η_0 .

Шаг 1. Для $k = 0, 1, \dots$

Шаг 2. Вычислить $f(\bar{x}_k)$ и $\nabla f(\bar{x}_k)$, согласно (1.1).

Шаг 3. Если $k > 0$, то исполнять до шага 5.

Шаг 4. Вычислить η_k , согласно (2.2).

Шаг 5. Конец если.

Шаг 6: $\tilde{x}_0 = x_k$.

Шаг 7. Для $t = 0, \dots, m - 1$.

Шаг 8. Случайно выбрать $i_t \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 9. Вычислить \tilde{x}_{t+1} , согласно (2.1).

Шаг 10. Конец цикла по t .

Шаг 11: $x_{k+1} = \tilde{x}_m$.

Шаг 12. Конец цикла по k .

А л г о р и т м 3. Стохастический градиентный метод с шагом ББ (2.3).

Вход: частота обновления m , начальная точка x_0 , начальная величина шага η_0 , константы

$$\varepsilon \in (0, 1), \delta \in \left[\frac{\varepsilon}{m}, \frac{1}{m\varepsilon} \right].$$

Шаг 1. Для $k = 0, 1, \dots$

Шаг 2. Вычислить $f(\bar{x}_k)$ и $\nabla f(\bar{x}_k)$, согласно (1.1).

Шаг 3. Если $k > 0$, то исполнять до шага 8.

Шаг 4. Вычислить η_k , согласно (2.3).

Шаг 5. Если $\eta_k < \frac{\varepsilon}{m}$ или $\eta_k > \frac{1}{m\varepsilon}$, то исполнять до шага 7.

Шаг 6: $\eta_k = \delta$.

Шаг 7. Конец если.

Шаг 8. Конец если.

Шаг 9: $\tilde{x}_0 = x_k$.

Шаг 10. Для $t = 0, \dots, m - 1$.

Шаг 11. Случайно выбрать $i_t \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 12. Вычислить \tilde{x}_{t+1} , согласно (2.1).

Шаг 13. Конец цикла по t .

Шаг 14: $x_{k+1} = \tilde{x}_m$.

Шаг 15. Конец цикла по k .

Чтобы гарантировать сходимость двух новых алгоритмов, составим необходимое ограничение на величины шагов (2.2) и (2.3). В [11] применяется ограничение

$$\eta_k \in \left[\min \left\{ \varepsilon, \frac{1}{\delta} \right\}; \min \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\delta} \right\} \right], \quad (2.4)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ и $\delta > 0$ – константы. В [13] используется

$$\eta_k \in [0.001\tilde{\alpha}_k, 1000\tilde{\alpha}_k], \quad (2.5)$$

где $\tilde{\alpha}_k > 0$ – также константа. Ограничения на величину шага (2.2) и (2.3) записываются соответственно как

$$\frac{1}{2mL} \leq \eta_k^{(1)} \leq \frac{1}{m\mu}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\varepsilon}{m} \leq \eta_k^{(2)} \leq \frac{1}{m\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Эти границы получены и применяются для анализа сходимости в следующем разделе. Алгоритмы 2 и 3 итеративно обновляют размеры шагов при вычислении градиента с уменьшенной случайной дисперсией, что является более гибким, чем УДСГ [9] с фиксированным шагом. Стохастическая итерация и улучшенные величины шагов в алгоритмах 2 и 3 не только экономят много вычислений на каждом шаге, но и сходятся быстрее.

3. Анализ сходимости. В этом разделе докажем, что алгоритмы 2 и 3 линейно сходятся для сильно выпуклых функций. Анализ сходимости основан на следующих предположениях и леммах, которые также используются в [9, 11, 13, 16].

Д о п у щ е н и е 1. Целевая функция $f(\bar{x})$ сильно выпукла, т.е. существует такая постоянная $\mu > 0$, что для любого $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ выполняется

$$f(\bar{y}) \geq f(\bar{x}) + \nabla^T f(\bar{x})(\bar{y} - \bar{x}) + \frac{\mu}{2} \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^2. \quad (3.1)$$

Д о п у щ е н и е 2. Градиент $\nabla\phi_i(\bar{x})$ каждой компоненты целевой функции непрерывен по Липшицу, т.е. существует такая постоянная $L > 0$, что для любого $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, верно

$$\|\nabla\phi_i(\bar{x}) - \nabla\phi_i(\bar{y})\|_2 \leq L\|\bar{x} - \bar{y}\|_2.$$

Следовательно, $\nabla f(\bar{x})$ также липшиц-непрерывна, т.е.

$$\|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{y})\|_2 \leq L\|\bar{x} - \bar{y}\|_2.$$

Л е м м а 1 [11]. Целевая функция $f(\bar{x})$ удовлетворяет допущениям 1 и 2. Пусть $\bar{x}^* = \arg \min_{\bar{x}} f(\bar{x})$ и

$$\alpha_k = (1 - 2\eta_k\mu(1 - \eta_k L))^m + \frac{4\eta_k L^2}{\mu(1 - \eta_k L)}, \quad (3.2)$$

где η_k – величина шага итерации. Если выбран метод УДСГ (алгоритм 1), то

$$\mathbb{E}\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}^*\|_2^2 < \alpha_k \|\bar{x}_k - \bar{x}^*\|_2^2,$$

где $\mathbb{E}(\cdot)$ обозначает матожидание.

Л е м м а 2 [16]. Если f выпукла и ее градиент ∇f непрерывен по Липшицу, то для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$0 \leq f(\bar{y}) - f(\bar{x}) - \nabla^T f(\bar{x})(\bar{y} - \bar{x}) \leq \frac{L}{2} \|\bar{x} - \bar{y}\|_2^2.$$

Доказательства лемм 1 и 2 можно найти в [11, 16] соответственно. Теперь представим теоремы 1 и 2 о линейной сходимости алгоритмов 2 и 3 по вероятности.

Обозначим $\bar{x}^* = \arg \min_{\bar{x}} f(\bar{x})$ и $\tau = (1 - \exp(-\mu/2L))/2$.

Т е о р е м а 1. Пусть целевая функция $f(\bar{x})$ удовлетворяет допущениям 1 и 2. Пусть $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность итераций, сгенерированная алгоритмом 2. Если частота обновления m в алгоритме 2 удовлетворяет

$$m > \max \left\{ \frac{1}{\ln(1 - 2\tau) + \mu/L}, \frac{4L^2}{\tau\mu^2} + \frac{L}{\mu} \right\},$$

точки итерации, генерируемые алгоритмом 2, линейно сходятся по вероятности, т.е.

$$\mathbb{E}\|\bar{x}_k - \bar{x}^*\|_2^2 < (1 - \tau)^k \|\bar{x}_0 - \bar{x}^*\|_2^2. \quad (3.3)$$

Доказательство. Поскольку $f(\bar{x})$ удовлетворяет 1 и 2, то

$$2(f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})) \geq \mu \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & 2(f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})) \leq \\ & \leq 2[-\nabla^T f(\bar{x}_{k-1})(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) - \frac{\mu}{2} \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2 + \nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})] \leq \\ & \leq 2[(\nabla f(\bar{x}_k) - \nabla f(\bar{x}_{k-1}))^T (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})] \leq 2L \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда неравенства (3.4) и (3.5) ограничивают размер шага η_k (см. уравнение (2.2)) в алгоритме 2 следующим образом:

$$\frac{1}{2mL} \leq \eta_k \leq \frac{1}{m\mu}.$$

На основании определения α_k в (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \alpha_k & \leq \left(1 - 2\frac{\mu}{2mL} \left(1 - \frac{L}{m\mu}\right)\right)^m + \frac{4L^2}{m\mu^2(1 - L/(m\mu))} \leq \exp\left\{-\frac{\mu}{mL} \left(1 - \frac{L}{m\mu}\right) m\right\} + \frac{4L^2}{m\mu^2 - \mu L} \leq \\ & \leq \exp\left\{-\frac{\mu}{L} + \frac{1}{m}\right\} + \frac{4L^2}{m\mu^2 - \mu L} \leq \exp\{\ln(1 - 2\tau)\} + \frac{4L^2}{4L^2/\tau + \mu L - \mu L} = 1 - 2\tau + \tau = 1 - \tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Согласно лемме 15 и уравнению (3.6), можно получить формулу (3.3), которая завершает доказательство теоремы 1.

Очевидно, что $\tau \in (0, 0.5)$, поэтому сходимость точек итерации, генерируемых алгоритма 2, непосредственно следует из теоремы 1.

Теорема 2. Предположим, что целевая функция $f(\bar{x})$ удовлетворяет допущениям 1 и 2. Обозначим $\bar{x}^* = \arg \min_{\bar{x}} f(\bar{x})$ и $\tau = (1 - \exp(-\mu/2L))/2$. Если частота обновления m в алгоритме 3 удовлетворяет

$$m > \max \left\{ \frac{\mu}{\varepsilon(\ln(1 - 2\tau) + \mu/L)}, \frac{4L^2}{\tau\varepsilon\mu} + \frac{L}{\varepsilon} \right\},$$

то последовательность точек, сгенерированная алгоритмом 3, линейно сходится по вероятности, т.е.

$$\mathbb{E}\|\bar{x}_k - \bar{x}^*\|_2^2 < (1 - \tau)^k \|\bar{x}_0 - \bar{x}^*\|_2^2. \quad (3.7)$$

Доказательство. Поскольку $f(\bar{x})$ сильно выпуклая, уравнение (3.1) влечет

$$f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_{k-1})(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) \leq -\frac{\mu}{2} \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2.$$

Согласно лемме 2, получаем

$$4(f_{k-1} - f_k + \nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})) \leq 2L \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & 6(f_{k-1} - f_k) + 4\nabla^T f(\bar{x}_k)(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) + 2\nabla^T f(\bar{x}_{k-1})(\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) \leq \\ & \leq (2L - \mu) \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2 \leq 2L \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|_2^2. \end{aligned}$$

На основании (2.7), откуда $\eta_k \leq 1/(m\varepsilon)$, получаем

$$\frac{1}{2mL} \leq \eta_k \leq \frac{1}{m\varepsilon}.$$

Таблица 1. Описание наборов данных

Название набора	Количество объектов	Количество признаков	λ
a8a	22696	123	10^{-2}
w8a	49749	300	10^{-4}
ijcnn1	49990	22	10^{-4}

Таблица 2. Время исполнения на наборе a8a

Величина η_0	Алгоритм 3.1	Алгоритм 3.2	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1	69.31	69.62	47.51	41.51
0.1	62.92	62.53	44.13	38.59
0.01	60.46	59.30	43.98	39.18
0.001	60.64	59.84	41.39	37.75

Таблица 3. Время исполнения на наборе w8a

Величина η_0	Алгоритм 3.1	Алгоритм 3.2	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1	497.72	421.86	155.07	163.69
0.1	552.30	465.34	164.44	175.29
0.01	548.24	484.14	163.42	165.63
0.001	426.76	420.67	188.51	176.57

Согласно определению α_k в лемме 1, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (1 - 2\eta_k\mu(1 - \eta_kL))^m + \frac{4\eta_kL^2}{\mu(1 - \eta_kL)} \leq \left(1 - 2\frac{\mu}{2mL}\left(1 - \frac{L}{m\epsilon}\right)\right)^m + \frac{4L^2}{m\epsilon\mu(1 - L/(\mu\epsilon))} \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{\mu}{mL}\left(1 - \frac{L}{m\epsilon}\right)m\right\} + \frac{4L^2}{m\epsilon\mu - \mu L} \leq \exp\left\{-\frac{\mu}{L} + \frac{\mu}{m\epsilon}\right\} + \frac{4L^2}{m\epsilon\mu - \mu L} \leq \\ &\leq \exp\{\ln(1 - 2\tau)\} + \frac{4L^2}{4L^2/\tau + \mu L - \mu L} = 1 - 2\tau + \tau = 1 - \tau. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3.7) легко выводится из леммы 1. Поскольку $\tau \in (0, 0.5)$ это гарантирует сходимость $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$ по уравнению (1.2).

4. Численные эксперименты. В этом разделе представлены экспериментальные результаты алгоритмов 2 и 3 для больших данных, подтверждающие вычислительную эффективность двух модифицированных алгоритмов. Для того, чтобы продемонстрировать преимущество адаптивных величин шагов (2.2) и (2.3) над фиксированным шагом, сравнены алгоритмы 2 и 3 с алгоритмами нестохастической оптимизации, такими, как двухточечные алгоритмы 3.1 и 3.2 в [13]. Чтобы продемонстрировать численный эффект модифицированного метода в алгоритмах 2 и 3, они сравниваются также с другими алгоритмами стохастической оптимизации, а именно методами УДСГ [9] и УДСГ-ББ [11]. Модифицированные алгоритмы реализованы для решения стандартной тестовой задачи машинного обучения – логистической регрессии с регуляризацией l_2 -нормы, т.е.

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln[1 + \exp(-b_i \bar{a}_i^T \bar{x})] + \frac{\lambda}{2} \|\bar{x}\|^2 \rightarrow \min, \tag{4.1}$$

где $a_i \in \mathbb{R}^d$ и $b_i = \pm 1$ обозначают вектор признаков и метку класса i -го объекта соответственно, а $\lambda > 0$ – весовой параметр.

Алгоритмы 2 и 3 применяются к трем стандартным наборам тестовых данных. Эти наборы получены с веб-страницы LIBSVM [17]. Таблица 1 содержит информацию об этих наборах данных.

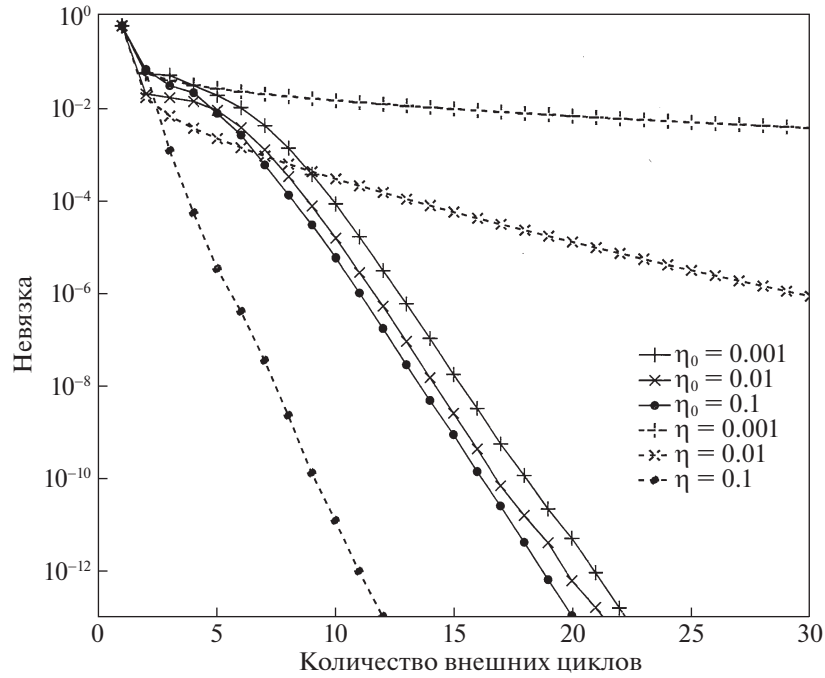


Рис. 1. Сравнение алгоритма 2 с УДСГ на наборе w8a

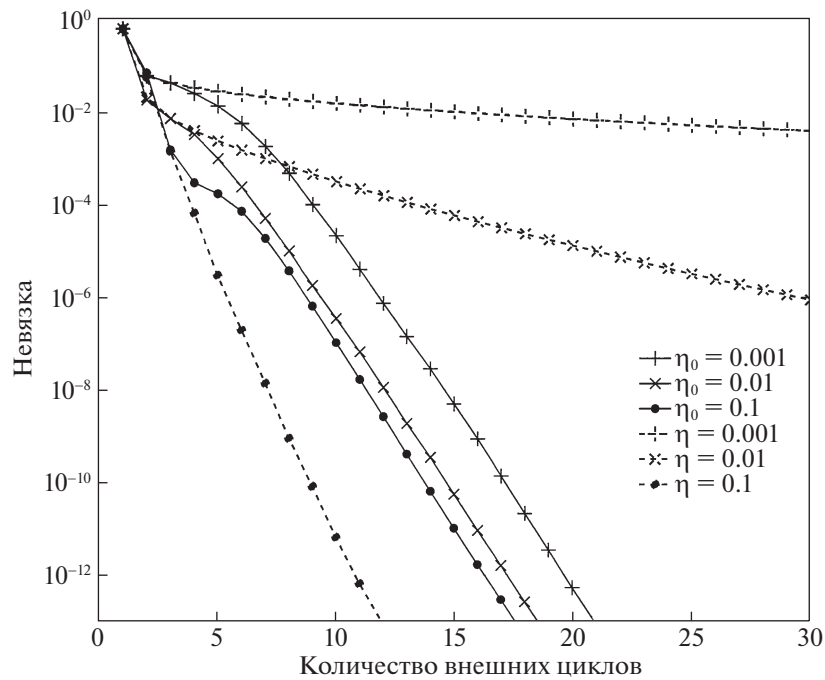


Рис. 2. Сравнение алгоритма 3 с УДСГ на наборе w8a

4.1. Численные результаты на стандартной задаче. Здесь приведено сравнение алгоритмов 10 и 10 с двухточечными (алгоритмы 3.1 и 3.2 в [13]) на наборах данных ада, w8a. Как предлагается в [9], установлено значение $m = 2n$. Четыре различных начальных размера шага $\eta_0 = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ выбраны для всех четырех участвующих с сравнении алгоритмов. Условие завершения: $\|\nabla f(x_k)\| < 10^{-6}$. В табл. 2 и 3 приведено процессорное время (в секундах). Видно, что

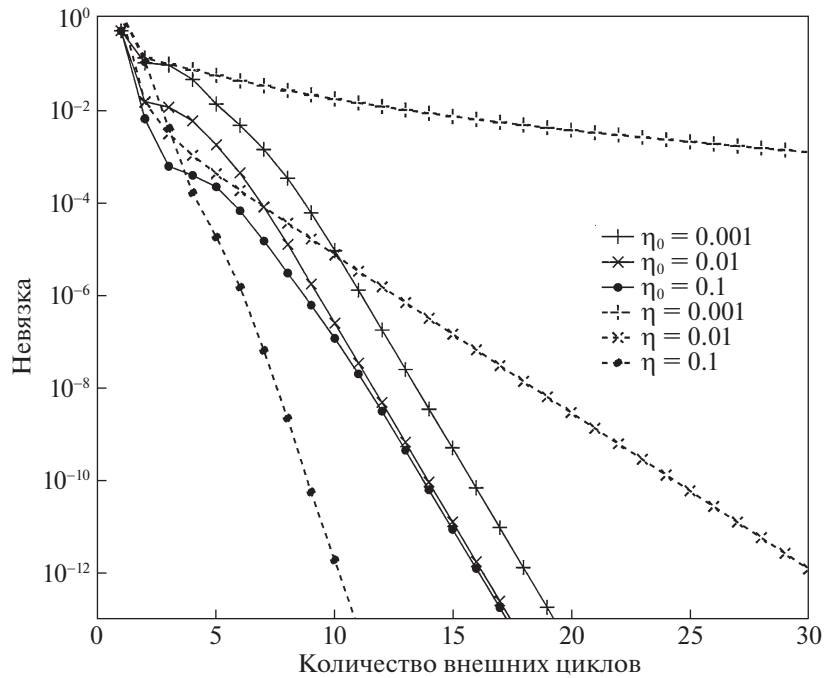


Рис. 3. Сравнение алгоритма 2 с УДСГ на наборе ijsnn1

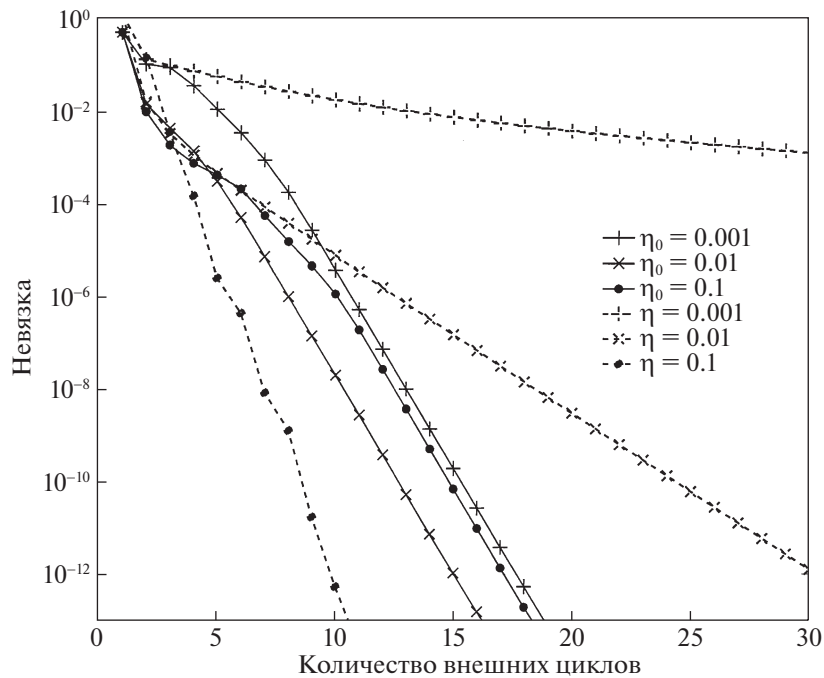


Рис. 4. Сравнение алгоритма 3 с УДСГ на наборе ijsnn1

алгоритмы 2 и 3 не чувствительны к начальному размеру шага η_0 . Алгоритмы 2 и 3 потребляют меньше процессорного времени, чем нестохастические аналоги [13] для всех трех наборов данных. Заметно, что для более высокой размерности и количества объектов разница во времени исполнения больше, что отчасти подтверждает тезис о возрастании преимущества стохастического подхода по мере роста количества обрабатываемых данных.

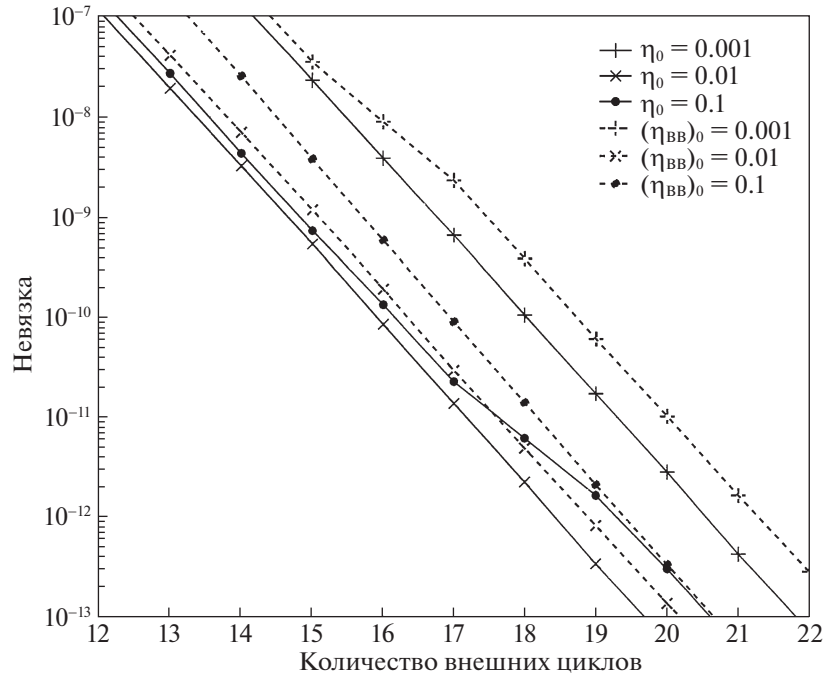


Рис. 5. Сравнение алгоритма 2 с УДСГ-ББ на наборе w8a

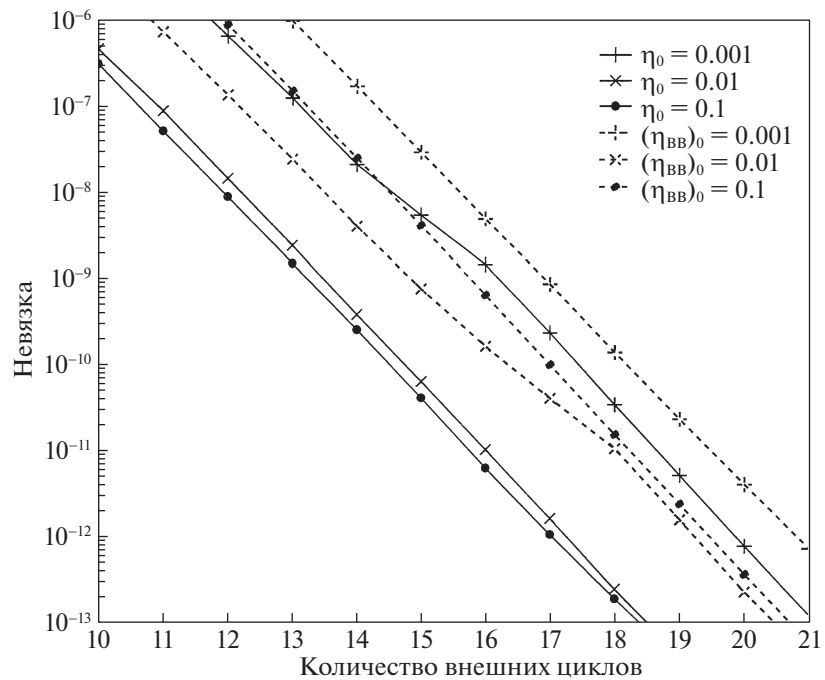


Рис. 6. Сравнение алгоритма 3 с УДСГ-ББ на наборе w8a

4.2. Результаты сравнения с УДСГ. Теперь обратимся к экспериментальной оценке поведения алгоритмов 10, 10 и УДСГ на наборах данных w8a и ijsnn1. Результаты приведены для трех разных начальных размеров шага η_0 (0.1, 0.01, 0.001) для алгоритмов 2 и 3 и таких же фиксированных величин шага для УДСГ. Критерий останова: $f(\bar{x}_k) - f(\bar{x}^*) < 10^{-14}$, где \bar{x}^* – оптимальное

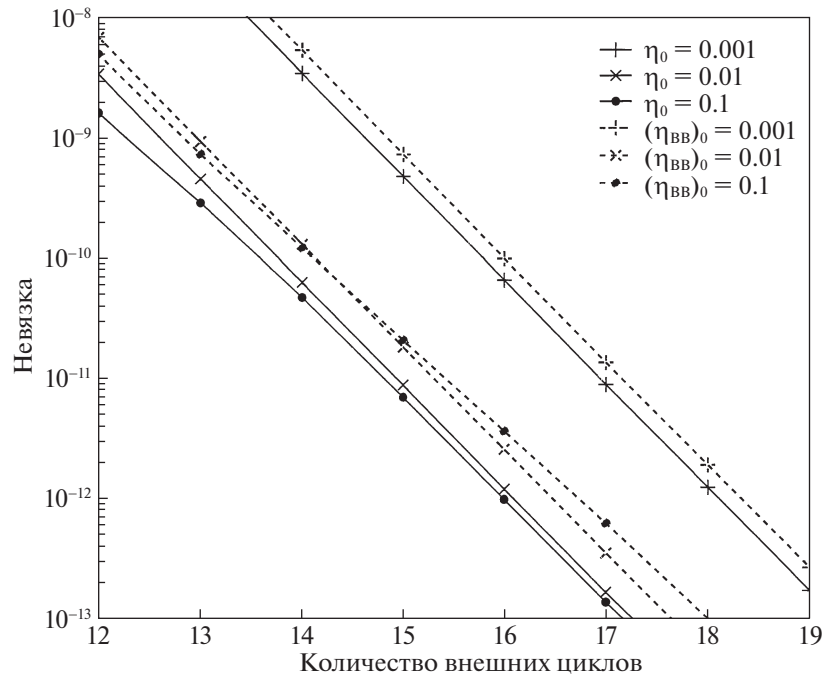


Рис. 7. Сравнение алгоритма 2 с УДСГ-ББ на наборе *ijcnn1*

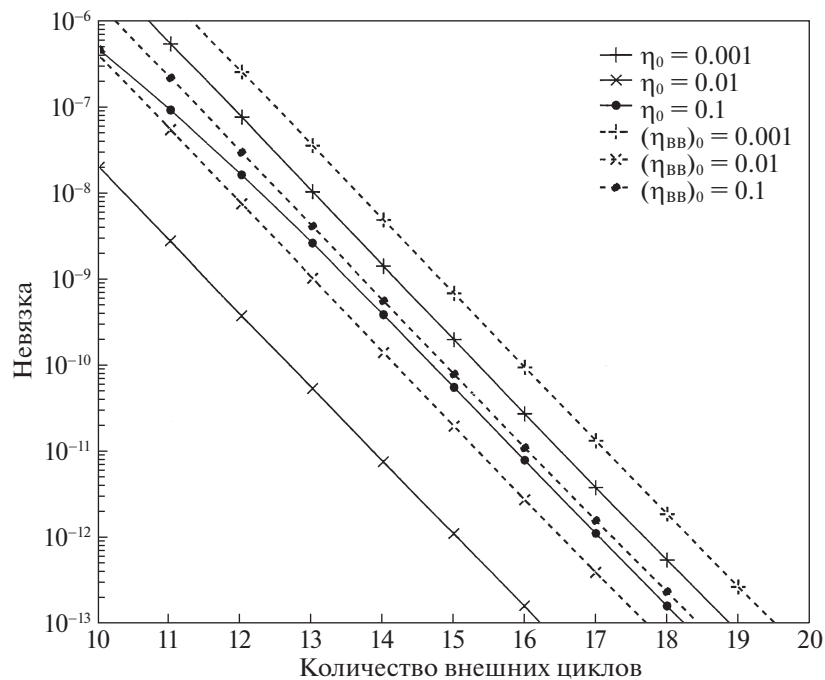


Рис. 8. Сравнение алгоритма 3 с УДСГ-ББ на наборе *ijcnn1*

решение, полученное УДСГ с величиной шага, давшей наилучший результат, что является обычной практикой в подобных тестах. В алгоритме 3 установлено $\epsilon = 10^{-6}$.

Поведение алгоритмов 2, 3 и УДСГ для наборов данных *w8a* и *ijcnn1* изображено на рис. 1–4. По оси абсцисс отложен номер итерации k , соответствующий внешнему циклу в алгоритмах, а

по оси ординат – невязка $f(\bar{x}_k) - f(\bar{x}^*)$. Кривые, обозначенные η_0 , – результаты алгоритма 2 (на рис. 1, 3) или алгоритма 3 (на рис. 2, 4), а кривые, обозначенные η , – результаты УДСГ.

Из рис. 1–4 видно, что различные начальные величины шагов мало влияют на поведение алгоритмов 2 и 3, в то время как алгоритм УДСГ очень чувствителен к выбору шага. Ошибочный выбор шага даже делает УДСГ не сходящимся. Хотя алгоритмы 2 и 3 требуют несколько больше итераций, чем УДСГ с лучшими размерами шагов, они намного превосходят УДСГ с двумя другими вариантами размеров шагов. В смысле зависимости сходимости от выбора начального шага алгоритмы 2 и 3 работают устойчивее, чем УДСГ.

4.3. Результаты сравнения с УДСГ-ББ. Здесь показаны результаты работы алгоритмов 2, 3 и УДСГ-ББ на наборах данных `w8a` и `ijcnn1`. Начальные размеры шага η_0 заданы те же, что и ранее. Численные экспериментальные результаты приведены на рис. 5–8. Чтобы более четко наблюдать детали поведения, на графиках отброшены первые несколько итераций. Рисунки 5, 6 показывают сравнение между алгоритмами 2, 3 и УДСГ-ББ для набора данных `w8a`, а рисунки 7, 8 – результаты сравнения на `ijcnn1`. Пунктирные линии построены методом УДСГ-ББ. Сплошные линии на рис. 5, 7 задаются алгоритмом 2 с разными начальными размерами шагов η_0 , а на рис. 6, 8 – алгоритмом 3. Все графики 5–8 подтверждают, что алгоритмы 2 и 3 находят оптимум быстрее, чем УДСГ-ББ при одинаковых начальных условиях.

Заключение. Предложены два новых алгоритма стохастического градиента, объединяющих улучшенный расчет шага ББ с методом стохастического градиента. Для сильно выпуклой целевой функции доказана линейная сходимости по вероятности. Экспериментальные результаты для стандартных наборов данных показывают преимущество двух представленных алгоритмов над градиентным спуском с фиксированным размером шага и типичными алгоритмами стохастического градиента УДСГ и УДСГ-ББ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chaudhuri K., Monteleoni C., Sarwate D. Differentially Private Empirical Risk Minimization // J. Machine Learning Research. 2011. № 12. P. 1069–1109.
2. Robbins H., Monro S. A Stochastic Approximation Method // The Annals of Mathematical Statistics. 1951. V. 22. № 3. P. 400–407.
3. Нестеров Ю.Е. Метод решения задачи выпуклого программирования со скоростью сходимости $O(1/k^2)$ // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 543–547.
4. Gaivoronskii A.A. Nonstationary Stochastic Programming Problems // Cybernetics. 1978. V. 14. № 4. P. 575–579.
5. Polyak B.T. New Method of Stochastic Approximation Type // Automation Remote Control. 1990. V. 51. № 7. P. 937–946.
6. Xiao L., Zhang T. A Proximal Stochastic Gradient Method with Progressive Variance Reduction // Siam J. Optimization. 2014. V. 24. P. 2057–2075.
7. Roux R.L., Schmidt M., Bach F. A Stochastic Gradient Method with an Exponential Convergence Rate for Finite Training Sets // Advances in Neural Information Processing Systems. 2012. V. 4. P. 2663–2671.
8. Shalevshwartz S., Zhang T. Stochastic Dual Coordinate Ascent Methods for Regularized Loss Minimization // J. Machine Learning Research. 2013. V. 14. № 1. P. 567–599.
9. Johnson R., Zhang T. Accelerating Stochastic Gradient Descent Using Predictive Variance Reduction // Proc. 26th Intern. Conf. Neural Information Processing Systems. Lake Tahoe, NV, USA, 2013. P. 315–323.
10. Barzilai J., Borwein J.M. Two-point Step Size Gradient Methods // IMA J. Numerical Analysis. 1988. V. 8. № 1. P. 141–148.
11. Tan C., Ma S., Dai Y.H., Qian Y. Barzilai-Borwein Step Size for Stochastic Gradient Descent // Advances in Neural Information Processing Systems 29 / Eds D.D. Lee, M. Sugiyama, U.V. Luxburg, I. Guyon, R. Garnett. NY, USA: Curran Associates, 2016. P. 685–693.
12. Raydan M. On the Barzilai and Borwein Choice of Steplength for the Gradient Method // IMA J. Numerical Analysis. 1993. V. 13. № 3. P. 321–326.
13. Dai Y., Yuan J., Yuan Y.X. Modified Two-point Stepsize Gradient Methods for Unconstrained Optimization // Computational Optimization and Applications. 2002. V. 22. № 1. P. 103–109.
14. Yuan Y.X. Step-sizes for the Gradient Method // American Mathematical Society. 2008. V. 42. P. 785–796.
15. Jin X.B., Zhang X.Y., Huang K., Geng G. G. Stochastic Conjugate Gradient Algorithm with Variance Reduction // IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems. 2018. V. 30. № 5. P. 1360–1369.
16. Nesterov Y. Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course. Kluwer Acad. Publ., 2004.
17. <https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvmtools/datasets/> Режим доступа: 6 июня 2020 г.

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЦЕНАРИЕВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ЖИВЫХ СИСТЕМАХ¹

© 2021 г. А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский ин-т информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: temp_elf@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2019 г.

После доработки 21.01.2020 г.

Принята к публикации 25.05.2020 г.

Рассмотрена методика организации гибридных вычислительных структур для моделирования резких изменений в управляемых природных процессах и анализа фаз экстремальных экологических явлений. Используются системы дифференциальных уравнений с динамически переопределяемой правой частью в особые моменты – события. Условия истинности для переходов получаются из расчета других уравнений для дополнительных характеристик состояния популяции. Пороговые состояния в моделировании процесса становятся следствием включения триггерных функций. Их значения в правой части специально отличаются от нейтрального только в узких диапазонах пространства меняющихся характеристик гибридной системы и зависят от начальных условий. Ограниченные пределы функций и их область значений исходят из сущности пороговых эффектов для моделируемой биосистемы, которые наблюдаются при особых условиях. Метод позволяет реализовывать актуальные качественные изменения в сценариях управления как бифуркации появления/редукции состояний равновесия или граничный кризис сложного аттрактора, состоящего из рассеянных в ограниченной области интервалов. Исследованы вычислительные сценарии для разных популяционных процессов. Коллапс рыбных запасов описан в модели на примерах трески в Северной Атлантике и осетровых рыб Каспийского моря. Стремительная вспышка численности моделировалась по данным наблюдений о пульсации размеров популяции вредителей реликтовых вечнозеленых лесов. Пороговый сценарий вспышки насекомых в сценарии завершается спонтанно из-за локального исчерпания ресурсов леса с резким переходом к ординарным для среды флуктуациям вредителя. Методика организации структуры для модели популяций обобщена для прогнозирования широкого класса экстремальных процессов, связанных с быстрыми переменами в управляемых биологических системах и распространением нежелательных биологических инвазий.

DOI: 10.31857/S0002338820060104

Введение. Статья посвящена разработке методики моделирования для описания случаев нестационарного развития экологических процессов и прогнозирования их резких качественных изменений. Методика основывается на различных реальных примерах.

Современные экосистемы функционируют без балансового равновесия их составляющих, соответственно усложняется задача рационального использования биоресурсов. Наблюдаются резкие переходные процессы, и эти явления не укладываются в регулярные флуктуации численности видов. Изменения выравненности показателя видового разнообразия экосистем под антропогенным давлением происходят стремительными скачками. Астатичность новых условий среды не мешает адаптации видов-вселенцев [1]. Для анализа ситуаций резких изменений не применимы традиционные модели математической биологии. Стремительные сдвиги популяционных трендов для разных видов обладают сходством [2], что даст математикам возможность классифицировать эти трансформации с точки зрения теории динамических систем. В статье мы сосредоточим внимание на формировании специфических вычислительных модельных сценариев, куда включим факторы стадий жизненного цикла и изменений популяционных характери-

¹Выполнено в рамках Бюджетной темы СПИИРАН № АААА-А16-116051250009-8 и РФФИ (грант № 17-07-00125).

стик при адаптации. Рассмотрим аспект релевантности принятия решений экспертами при управлении эксплуатацией биоресурсов и долгосрочном регулировании промысла при попытках достичь оптимального изъятия.

Цель статьи заключается в разработке способа организации гибридной вычислительной структуры, который позволит в компьютерных экспериментах описывать переходы к нестационарной динамике различных форм и учесть нелинейные эффекты в значимых экологических процессах. Разработку математического аппарата проведем поэтапно и отметим вариативность выбора функций. В результате серии модификаций и выработки практического обоснования по реальным данным идеи методики моделирования станут применимы к широкому кругу проблем экодинамики. Интересен подход, который даст специалистам алгоритм для расширения моделей в целях описания других особых ситуаций и экстремальных явлений помимо рассмотренных нами случаев — вспышки с единичным пиком и коллапса популяции.

Эпизодические экстремальные явления влекут существенные последствия для эволюции экосистем. Агрессивный хищник без биотического сопротивления одной вспышкой уничтожает свой новый ареал, как ядовитая морская звезда *Acanthaster planci* опустошает на долгие годы коралловые рифы [3]. По логистическому закону рост численности должен замедлиться у равновесия, но в реальности полная гибель экосистемы иногда случается, как в хрестоматийном примере вымирания оленей на острове Беринга. Пороговые эффекты в регуляции эффективности воспроизводства — важная причина подобных экстремальных явлений как в стремительном распространении одних видов, так и в быстром исчезновении других. Существуют интересные примеры, когда нежелательные вторжения видов были успешно остановлены средствами биологического подавления, выпуском эффективных естественных врагов.

Традиционные методы моделирования популяционных инвазий сталкиваются с рядом проблем, когда нужно достичь адекватного описания экстремальных состояний в биосистемах. Особи неидентичны по репродуктивным характеристикам. В малой группе дисперсия проявляется сильнее. Проблема разнородности особей в моделях отчасти решалась в [4]. Вторая сложность в том, что отдельные особи насекомых и рыб претерпевают изменения в жизненном цикле. Популяция в целом адаптируется и к биотической среде, и к изъятию промыслом самых крупных особей. Проблема моделирования сложного жизненного цикла фундаментальна и связана с коэволюцией популяций [5]. Противодействие хищников и паразитов в новой среде рассматривается теоретически как стимулирующий фактор для адаптации и дальнейшего видообразования [6]. Прогнозировать моменты переходов в неоптимальные условия взаимодействия биологических видов с помощью моделей мы сможем, если будем проводить сравнения модельных сценариев, в том числе с разной стратегией управления биоресурсами.

Мы обсудим преимущества подхода к расчетам основных характеристик популяций, где будем использовать вспомогательные и эволюционные факторы для прогнозирования выживаемости поколения и его итоговой репродуктивной эффективности. Методика отличается способом организации предикативных изменений на базе традиционных дифференциальных уравнений с гибридным кадрированным временем. Новизна заключается в идее конструирования переопределяемой вычислительной структуры отдельно из базового варьирующего форму уравнения и нескольких вспомогательных. Примером реализации новых идей станет формирование структуры из дифференциальных уравнений динамики поколений в трех формах для всех стадий развития. Переходы контролируются скоростью индивидуального роста организмов поколения. Дополняется структура модели особыми функциями, такими, что в разных практических задачах их “триггерное” действие включается на разных стадиях онтогенеза. Практический результат состоит в моделировании предложенными нами методами двух актуальных сценариев биологической кибернетики — коллапса запасов крупных рыб и неожиданной вспышки численности опасных насекомых, уничтожающих гектары ценного вечнозеленого леса.

В результате покажем, что ситуация коллапса обусловлена трудно преодолимой проблемой выработки релевантной стратегии управления при эксплуатации биоресурсов. Экспертам решение по квотированию объема добычи необходимо принимать сейчас, а получить достоверную оценку о реакции биосистемы на новое воздействие возможно только несколько лет спустя. Обоснуем причины того, что выбираемые для одной задачи управления две модели популяций часто оказываются противоречивы и несовместимы друг с другом по важным свойствам качественных изменений поведения их траекторий.

1. Методология построения гибридных структур в экодинамике. Системно или спорадически, но происходит смена превалирующих в регуляции выживания поколения факторов. Сложный жизненный цикл — это приспособление видов, потому формирование гибридной (непрерывно-

событийной) структуры вычислений следует эволюционно заданным экологическим механизмам. Актуальная задача первого этапа нашей работы – достичь целенаправленного математического описания пороговых эффектов, тех внутренних критических состояний, которые определяют качественную переменную характера развития биологического процесса. Пороговые явления мы можем наблюдать только в узких диапазонах характеристик состояния самого экосистемного процесса.

К важным пороговым эффектам относим резкое увеличение эффективности воспроизводства, наблюдаемое у видов при эволюционной адаптации к среде размножения и ослаблении подавляющего биотического фактора. Альтернативный пороговый эффект – падение выживаемости на ранних стадиях онтогенеза в малой группе. “Пороговость” явления состоит в том, что при сокращении популяции в 3 раза численность новых поколений упадет в 5 раз, что становится причиной проблем восстановления популяций. По мере того, как группы становятся больше, их количество становится меньше, как показано в [7]. Частота встреч между хищником и добычей уменьшается с агрегацией добычи. Обеспеченность пищей и защищенность у ранних стадий развития в группе повышается. Наблюдается положительный эффект агрегированной группы, когда для эффективного выращивания потомства нужно поддерживать большую численность коллектива. Нельзя искусственными методами снова воссоздать сразу большие стаи. Эффект группы может стать симметрично отрицательным из-за факторов конкуренции.

Методику анализа нелинейных процессов лучше строить на основе математического описания выживаемости поколений популяций в раннем онтогенезе. На прогнозировании выживаемости личинок и молоди строится теория оптимального нерестового запаса [8]. Согласно концепции “критического периода” сэра Р. Мэя [9] у видов рыб с большой плодовитостью колебания выживаемости на личиночной стадии играют ощутимую роль в появлении флуктуаций общей численности. Средняя выживаемость от икры до малька севрюги по данным Т. Усовой составляет 1% при оптимальном режиме паводка [10], значит, доля дожития 1.5% становится существенным успехом вида в воспроизводстве.

В вычислительной структуре нам нужно рассчитать формирование половозрелого поколения, задав сильно различающиеся темпы убыли стадий развития. Актуально для новых моделей явно выделять по ходу расчетов переходы между непрерывными уравнениями для всех стадий онтогенеза, сделав систему гибридной и событийной [11].

Применительно к меняющимся условиям и факторам в эколого-физиологическом развитии видов вычислительные модели обосновано формировать в виде структур с переключениями. Под термином “гибридная система” понимается большое разнообразие всех структур с переключениями, разными разрывами и регулярными импульсами [12]. К гибридным относятся логико-динамические системы, в которых дискретная часть описывается логическими переменными [13]. О наших вычислениях мы предпочитаем говорить как о предикативно-переопределяемых изменениях состояния системы.

Разрабатываемый нами комплекс уравнений и правил как логических функций будем далее рассматривать как группу сценариев в итерационной форме. Дискретная составляющая модели обладает более удобными возможностями по смене поведения при бифуркациях. Можно получить равновесие, циклическую динамику или хаотическое движение разных типов. Форма границы областей притяжения разных аттракторов влияет на поведение траектории [14]. При анализе моделей мы должны понимать, что именно будем считать обоснованным поведением гибридной модели, а какие нелинейные эффекты нам необходимо исключить из итогового обсуждения результатов.

Используем форму времени как с дискретной, так и с непрерывной составляющими для построения модели популяции с выраженными стадиями развития в жизненном цикле. Этот известный в моделировании подход со сложным временем нам нужно адаптировать для биологических проблем. Дискретные эффекты в моделируемом процессе проявляются в течение онтогенеза уже существующего поколения, потом происходит событие – появление нового поколения. Соответственно разные события присутствуют как внутри интервала онтогенеза поколения, так и происходят межинтервальные переключения. Структура отрезков времени важна, так как некоторые интервалы – это биологические характеристики популяций, другие – адапционные промежутки, зависящие от условий развития поколений. Потому мы используем и разбиение времени на кадры жизни поколений, и расчеты событий внутри интервала онтогенеза вида.

Дискретные элементы событий нужно пронумеровать, согласно их положению, в последовательности кадров в непрерывном течении видимого наблюдателю общего модельного времени. Для построения модели популяций с выраженными стадиями развития жизненного цикла раз-

работаем форму времени более сложным способом, чем просто чередующиеся интервалы у гибридных систем. Используем разбиение – кадрирование иерархии непрерывных отрезков времени, внутри больших кадров оставим место для пронумерованных событий t^i . Гибридно-событийное время, которое используется при расчетах нашей программной средой, формализуем в виде мультимножества – объединения кортежей из упорядоченных элементов:

$$\bigcup_n \{Gap_Left_n, \{t_0, \dots, t^i, t^{i+1}, \dots, t^I, T\}_n, Gap_Right_n\}, \quad (1.1)$$

где i – порядковый номер внутрикадрового события $0 < i \leq I < \infty$, n – номер кадра времени в вычислительном эксперименте, I – количество событий, которое возможно внутри кадра, T – точка завершения расчетов в кадре в единицах модельного времени, биологическое событие T интерпретируется как достижение половозрелым поколением сезона размножения, Gap_Left – техническая щель у левой границы кадра, Gap_Right – аналогичная щель у правой границы непрерывного кадра, соседствующая с левой щелью следующего кадра. Для гибридных автоматов с обычными событийными переходами между состояниями число событий не обязательно должно быть жестко фиксировано или ограничиваться, но в нашей программной реализации действует именно кадрированное время с внутренними событиями. Потому число I должно быть ограничено, так как невозможно деление интервала онтогенеза на бесконечное число составляющих. Между t^I и завершающим кадр моментом T не может быть событий. В этом отличие нашего метода с иерархией событий от теории классических гибридных моделей, как, например, известной задачи расчета траектории после отскоков мячика от упругой поверхности.

Момент, отмеченный в (1.1) как t_0 , – специальное событие инициализации модели, присутствующее всегда по умолчанию независимо от существования других событий, это замечание относится и к моменту T , как априори присутствующему в программной реализации кадрированного времени. Форма времени с непрерывной и дискретной компонентой оставляет щели-границы (от слова “gap” – щель) $Gap_Left\{N(0) = f(\lambda, q); w(0) = w_0\}$; $Gap_Right\{t = 0\}$ справа и слева от непрерывного кадра. К кадру примыкают аналогично пронумерованные щели между соседними кадрами времени, правая щель кадра n станет смежной для левой щели кадра $n + 1$. Щели, не входящие в кадр, понадобились нам, так как края каждого отрезка времени входят в сам кадр. Нужны технические моменты для обнуления переменных-счетчиков и для выполнения перестроений в выделенных точках переходов к расчету развития уже следующего смежного поколения с $t = 0$. В экспериментах с внешним управлением щели необходимы для учета изытия или выпуска партии особей – при расчете величины $N(0)$.

В работах по гибридным моделям мало уделяют внимания интервалам времени при управлении изменением непрерывного процесса, но формализация существенно помогает настройке и отладке работы переходов. С (1.1) составим иерархию событий: t^1, t^2, \dots, t^I , которые указываются расчетами. Внешнее управление процессом в сценариях отнесем к межкадровым переходам. Таким методом осуществим простую фиксацию момента для перехода к расчету динамики следующего поколения в популяционной возрастной структуре и определим начальное состояние для количества особей поколения.

Первая идея нашего метода состоит в том, что модель популяционного процесса формируется на основе динамически переопределяемой системы. Факторы убыли численности существенно колеблются между тремя стадиями онтогенеза. В задачах о рыбах или насекомых ключевой биологический аспект стадийность их жизни позволяет нам рассматривать последствия изменений в их жизненном цикле как фактор нелинейной динамики. Разные стадии жизни видов с глубоким преобразованием строения организма имеют различную и экологию, и физиологию, они становятся хищниками или жертвами.

Биологическое обоснование метода строится на теории формирования пополнения промысловых популяций “stock–recruitment relationship” из знаменитой работы [15] в современном ее истолковании в [16]. Представления о роли функциональной связи в эффективности воспроизводства использовались для прогнозирования уровня эксплуатации многих запасов ценных видов рыб, но не всегда управление ресурсами было успешно на основе статистического анализа данных [17]. Традиционно используют принятые обозначения для показателей запаса S “stock”, пополнения R “recruitment”. Пусть в начальный момент существует достаточно значительный родительский запас популяции S_0 со средней плодовитостью λ . Задача прогнозирования состоит в том, чтобы установить по данным наблюдений функциональную связь для величины ожидаемого пополнения R к моменту T – достижения половозрелого состояния поколением. Далее не-

обходимо исследовать влияние этой функциональной связи на положение равновесия или флуктуаций численности, в том числе для сложных случаев – явлений коллапса и вспышки. Задача регулирования промысла требует применения теории бифуркаций.

Важность стадийного онтогенеза отмечалась многими авторами в анализе восполнения запасов [18]. Вторая идея нашей методики – устанавливать события по набору соотношений между величинами модели, не обязательно связанными с модельным временем. За данными событиями следуют изменения процедуры расчета уравнений. Для построения модели мы предлагаем предикативно переопределяемую вычислительную структуру с тремя последовательными режимами изменения состояния поколения: от $N(0) = \lambda S$ до $R = N(T)$. Модель убыли численности от исходного значения $N(0)$ записывается дифференциальным уравнением с набором последовательно действующих форм для его изменяемой правой части. Дополнительно в составе базовой модели укажем множество предикатов для смены режима расчетов, перехода к иной форме правой части уравнения. Сами логические функции определим отдельно.

Пусть ограничение на количество стадий $I = 3$ и внутрикадровых событий $i \in \{1, 2, 3\}$ действует для соответствия отрезков внутри кадра с количеством стадий онтогенеза. Представим основную “скелетную” модель с тремя неспецифичными обобщенными стадиями развития онтогенеза, вычисляемую на склеенном из плавающих субинтервалов фиксированном интервале времени – в череде пронумерованных кадров:

$$t \in [0, T] \subset \bigcup_{n=1}^{n_{\infty}} \{[t_0, t^1, t^2, t^3, T]_n\}.$$

Для ясности изложения следующая базовая модель включает два внутрикадровых события и определяется тремя формами правой части одного дифференциального уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha_1 w(t)N(t) + \beta)N(t), & A_1(t), Z_1(t), \\ -\alpha_2 N(t)/w(\tau) - \beta N(t), & A_2(t), Z_2(t, w(t)), \\ -\alpha_3 w(t)N(t - \eta) - \beta, & A_3(w(t)), Z_3(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

с включением запаздывания $\eta < \tau$, связанного с исчерпанием ресурсов предыдущими стадиями, $w(\tau)$ – важный показатель достигнутого размера к моменту окончания первой стадии развития особей. В (1.2) основная величина $N(t)$ – текущая численность поколения: $N(t) < N(0), \forall t > 0$. Убывающие коэффициенты $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ и β – различно трактуемые показатели ювенильной смертности в зависимости от численности. Величина субинтервала времени τ – длительность самой первой эмбриональной стадии развития без внешнего питания до активной личинки.

В нашем методе перестроения в (1.2) совершаются между режимами изменения состояния (меняются темпы убыли). Способ отличается от организации прямых переходов между самими состояниями, как программировалось в дискретно-событийных моделях. Формой для алгоритмической реализации модели в вычислительной среде служит гибридный автомат [19]. Такой автомат с переходами представим в среде *AnyLogic* как граф с ориентированными дугами – направлениями трансформации правой части от начального положения посредством очередности активации вершин графа. Имеющая минимум одну входную дугу активная вершина гибридного автомата соответствует текущему режиму изменения состояния, заданного нами одной из трех форм уравнений в (1.2). В вычислительной среде мы можем выполнять изменения и при входе в вершину автомата, и при выходе. Контролируют старт и завершение активности каждой формы правой части предикаты, логические функции дуг, которые принимают значения истина / ложь в зависимости от выполнения соотношений между включенными в предикаты переменными. Для каждой формы организованы соотношения для ее запуска A_1, A_2, A_3 и для остановки расчетов Z_1, Z_2, Z_3 . Пары предикатов A_i, Z_i вместе мы назовем правилами активации переходов между режимами изменения состояния:

$$A_1(t = 0), \quad \bar{Z}_1(t < \tau); \quad A_2(t = \tau), \quad \bar{Z}_2(w(t) < w_k); \quad A_3(w(t) = w_k), \quad \bar{Z}_3(\tau < t < T). \quad (1.3)$$

Предикаты в (1.3) используют пороговый уровень w_k для выхода поколения из-под давления ювенильных “квадратичных” факторов смертности. Наличие порога w_k исходит из динамики показателя размерного развития $w(t) = f(N(t))$. В (1.3) предикаты для завершения мы записали с логическим отрицанием, так как переход к следующей форме (или остановка автомата и реинициализация внутренних переменных) станет возможным при нарушении соотношений, так как расчет формы правой части происходит по принципу “до тех пор, пока выполняются условия”.

Для каждой формы правой части (1.2) в переходах проводится перерасчет промежуточных начальных условий: $N_1(0)|_{t=t^1} = N|_{t=\tau}$.

Выполняется сопряжение с предшествующими конечными значениями на каждом субинтервале. Последнее событие фиксирует состояние в момент окончания расчетов. В простом случае остановка происходит на правом краю заданного интервала $[0, T]$. Строгая последовательность переключений внутри $[0, T]$, как показано в случае модели переходов между стадиями онтогенеза, для автоматов – не обязательное условие [20]. Можно реализовать произвольный порядок выбора правых частей из множества возможных.

Для реализации гибридных систем при аппроксимации решений краевых задач используются модификации схемы Годунова [21]. Методология развивается, и для таких систем обобщена даже теория функций Ляпунова [22]. При реализации вычислительных систем с переключениями следует учесть средства для избегания режима с вырождением непрерывного времени – известного “эффекта Зенона” [23]. Численный алгоритм может блуждать в окрестности условий разрыва, а длины непрерывных отрезков будут стремиться к нулю при бесконечном количестве таких тактов, потому гибридные системы используют способы доопределения состояний [24] и сшивания траекторий.

Истинность для стартовых и завершающих предикатов проверяется по отсчетам кадров времени (назовем такие переходы таймированными “time-forced”) либо определяется внутренними зависимостями – реляционными “relation-forced” переходами. Более интересно, когда переход происходит после сравнения соотношений значений у внутренних модельных переменных, чем от времени. Далее опишем величины, связанные с расчетами вспомогательных уравнений и способы моделирования для темпов роста $w(t)$.

2. Связь вспомогательных уравнений и предикатов. Третья идея методики – расчет сокращения численности необходимо дополнить вычислением других биологических показателей, чтобы получить возможность применять наборы предикатов из (1.3). Вспомогательные показатели модели должны быть легко измеримыми.

Важнейшим из всех возможных является темп среднего весового прироста поколений, что показано для разных биологических объектов [25]. В работе [26] проводилось исследование зависимости смертности личинок рыб от их среднего веса. Влияние на выживаемость фактора, связанного с конкуренцией за ресурсы между особями поколения, установлено экспериментально для скорости развития гусениц вредителей и божьих коровок в [27]. Базовую гибридную структуру (1.2) будем решать численно во взаимосвязи со вспомогательным показателем размерных характеристик поколения. Дополнительное уравнение системы для темпов индивидуального развития $w(t)$ запишем так:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\rho}{\sqrt[3]{(N(t) + \delta)^2}}, \quad (2.1)$$

где δ – поправочный показатель, $w(0) = w_0$, $\rho \gg \delta$ фиксировано отражает доступность пищевых ресурсов, что можно применять в большинстве случаев, когда скорость восполнения кормовых объектов велика, как для случая крупных морских рыб. Обосновано, что существует достижимый пороговый уровень веса организма \bar{w} . При достижении такого состояния особи поколения перестают испытывать давление факторов смертности, которые квадратично зависят от численности и которые называют “компенсационными”. Особи становятся способны передвигаться, избегать встреч с хищниками или уже недоступны для атак паразитов, поражающих личиночные стадии.

Вариант (2.1) полагает статичность условий. Параметр доступных пищевых ресурсов в числителе можно задать динамически $\rho(t)$ – третьим уравнением. Если полагается, что кормовая база стремится к стационарному равновесию $\rho(t) \rightarrow \Upsilon$, то можно использовать простые уравнения кибернетической саморегуляции. Подойдет модель Ферхюльста с самой популярной “квадратичной формой” саморегуляции численности в такой форме:

$$\frac{d\rho}{dt} = \vartheta\rho(t)\left(1 - \frac{\rho(t)}{\Upsilon}\right) - \zeta N(t), \quad (2.2)$$

где ϑ – репродуктивный параметр, сравнимый с коэффициентом потребления корма ζ , а параметр Υ – балансовая величина равновесия, означающая емкость насыщения экологической ниши. Условия экологической задачи управления биоресурсами могут быть связаны с климатиче-

скими или сезонными изменениями, где важна колебательная динамика кормовых ресурсов. Для моделирования вместо (2.2) можно использовать уравнение с одним запаздыванием $\dot{\rho} = \vartheta f(N(t - \xi))$. Например, прямо ввести запаздывание ξ в уравнение (2.2) и применить свойства модели “Hutchinson equation” с коэффициентом изъятия корма ζ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \vartheta \rho(t) \left(1 - \frac{\rho(t - \xi)}{\Upsilon} \right) - \zeta N(t). \quad (2.3)$$

Поведение (2.3) зависит от значения произведения модельных параметров $\vartheta\xi$, что показано в [28]. При увеличении $\vartheta\xi$ наблюдаем обычную бифуркацию Андронова–Хопфа с возникновением вместо затухающих колебаний орбитально устойчивой циклической траектории, которую обозначают $\rho_*(t; \vartheta\xi)$. Звездочкой внизу принято обозначать циклическую траекторию, а наверху – стационарную точку итераций. С возрастанием значения $\vartheta\xi$ траектория цикла $\rho_*(t; \vartheta\xi)$ приобретет негармоническую (релаксационную) форму с увеличением амплитуды колебаний при чрезвычайно низких $\min \rho_*(t; \vartheta\xi) \rightarrow 0 + \varepsilon$.

Можно использовать вместо квадратичной более сложную функцию саморегуляции:

$$\frac{d\rho}{dt} = \vartheta \rho(t - \xi) e^{-b\rho(t - \xi)} - \zeta N(t) - \chi \rho(t). \quad (2.4)$$

В уравнение (2.4) введен показатель независимой смертности $\chi, \chi < \zeta$, который будет отражать целенаправленное изъятие доступного для популяции ресурса. Запаздывание ξ тут не несет сущностной интерпретации, но нужно для феноменологического описания невынужденных колебаний обилия ресурсов. Однако самые очевидные варианты уравнений с запаздыванием при численном моделировании демонстрируют существенный недостаток. При необходимости увеличить период между максимумами колебаний с ростом $\vartheta\xi$ происходит быстрое увеличение амплитуды цикла $\rho_*(t)$. Минимумы становятся чрезвычайно малыми: $\lim_{\xi \vartheta \rightarrow \infty} \min \rho_*(t) = 0$. Низкие значения ресурсов ρ недопустимы для расчетов (2.2). Такая модель не соотносится с экологической реальностью – тогда погибало бы все поколение сразу, потому в некоторых небольших реках Канады нет “четных” (или нечетных) популяций горбуши, у которой жизненный цикл строго 2 года.

Предложим новое, специальное уравнение для колебательного варианта модели динамики развития ресурсов для показателя индивидуального среднего роста особей поколения, где важным фактором будет текущая разность величин $\Upsilon - N^2(t - \xi)$:

$$\frac{d\rho}{dt} = \vartheta \rho(t) \left(\frac{\Upsilon - N^2(t - \xi)}{\Upsilon + \mu N^3(t - \xi)} \right) - \zeta N(t). \quad (2.5)$$

В (2.5) после бифуркации рождения цикла получим релаксационные колебания – Λ -образные пики значительной амплитуды негармонической формы с масштабирующим коэффициентом $\mu < 1$, начинающиеся от ненулевого порогового значения около потерявшего устойчивость равновесия. Ситуация соответствует осеннему минимуму корма, что обычно для планктона. Вариант (2.5) без недостатка глубоких минимумов флуктуаций будет актуален для ряда задач с сезонной изменчивостью ρ , когда генерируется несколько поколений в разных условиях. Впрочем, метод позволит задать вариации обеспечения ресурсами простым средством. Можно табличной функцией при смене кадров менять значение величины кормовой базы ρ для разных поколений.

В результате численного решения задачи Коши (1.2) с (2.1) для всех значимых $N(0)$ (натуральных чисел) получим функциональную зависимость $N(0) \rightarrow N(T) \equiv \varphi(N(0))$ от начальной (яиц или икры) группы особей. Потом снова сможем вычислить для следующей итерации величину $N(0) = \lambda S$, где S – традиционно численность половозрелого запаса. Биологическое обоснование вычисления $R = N(T) = \varphi(N(0))$ в виде оператора эволюции для анализа итераций $R_{n+1} = \varphi(R_n)$ строится на принципах теории формирования пополнения промысловых запасов и роли нелинейного характера зависимостей $R = f(S)$ при экспертном управлении промыслом биоресурсов, описанной в работе [29].

Поведение итераций подчиняется фундаментальным теоремам, но нам для описания актуальных примеров из динамики насекомых и рыб будет недостаточно известных свойств возникновения циклов четных и нечетных периодов. В гладкие зависимости необходимо добавить возможности для описания скачкообразных изменений траектории. Обязательно избегать скачкооб-

разных изменений во внутренних параметрах гибридной системы для сохранения теоретической обоснованности всей методики. Совершенно нереалистичны изменения ключевых характеристик: λ , w_0 , τ . В сложных биологических системах меняются не скачками вдруг отдельные параметры популяции, а подстраиваются функции регуляции, они определяют направленность эволюционного тренда [30].

3. Вариативность метода моделирования. Описывать темпы роста поколений можно различным образом: классическим уравнением баланса анаболизма и катаболизма Л. фон Бергаланфи или другой предикативной структурой из набора форм правой части уравнения с таймированными переходами между ними. Задача таких уравнений описывать факторы опосредованной регуляции численности поколения, тогда как в базовой модели – непосредственные факторы убыли. В гибридную систему можно включить специфические формы регуляции выживаемости помимо типичной квадратичной формы. Метод, который позволяет расширять базовую модель, сделал идею актуальной для экстремальной динамики многих видов с большой плодовитостью λ , например, для вспышек насекомых с неполным циклом превращений. Численность многих вредных насекомых фитофагов регулируют паразиты. Наездники и осы атакуют обычно одну из стадий развития, чаще всего яйца [31]. Реакция паразитов обусловлена наличием массовых доступных жертв, которых им легче обнаружить именно в скоплениях, чем в однородном распределении. В моделировании темпов убыли эффект массовой атаки можно учесть, включив в уравнение $N(0)$, но только на первой стадии:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha_1 w(t)N(0) + \beta)N(t), \quad 0 < t < \tau. \quad (3.1)$$

Данным методом учтем особенности регуляции выживаемости яиц для насекомых вредителей. Уровень выживаемости мелких насекомых обусловлен скученностью неподвижных жертв при атаке их врагов, что используется при целенаправленном выпуске паразитов для искусственного биологического подавления многих бабочек.

Моделирование с гибридным временем обладает реалистичностью при описании эволюции стадий жизни и вариативностью числа вспомогательных уравнений. Покажем, как точно учесть критический фактор, который важен только для одной из стадий.

4. Метод включения триггерных функций. Из практики наблюдений известно, что при малой численности многократно возрастает роль неблагоприятных факторов среды в воспроизводстве популяции. Непропорциональное сокращение восполнения запасов рыб невозможно заранее предвидеть корреляционными методами. Внезапно снизилась эффективность естественного нереста севрюги *Acipenser stellatus*, что видно по показателю численности молоди, мигрировавшей из реки в Каспийское море. Снижение произошло резко, когда численность нерестового запаса севрюги стала меньше пороговой (420 тыс. особей) из-за систематического перелома. На рис. 1 представлены обработанные нами методом “скользящей средней” данные о воспроизводстве севрюги на нерестилищах Нижней Волги из [32].

На графике приведены ценные и редкие данные, которые позволяют непосредственно оценить форму зависимости в эффективности пополнения до 2007 г., имеющую тут два явных максимума. Для других случаев у нас нет способов решить обратную задачу — однозначно восстановить функциональную зависимость по данным наблюдений. Если популяция стабильно пребывает в состоянии равновесия, то на графике увидим только сгущения точек у равновесия, но севрюге *Acipenser stellatus* Каспийского моря сейчас угрожает полное вымирание, так как промысел в Волге не был остановлен своевременно и незаконный вылов продолжается в море.

Необходимость учета пороговых изменений параметров важна в объяснении проблемы низкой эффективности искусственного воспроизводства осетровых рыб Каспия. Гидрологический режим реки Волги нарушен в 1960-е годы. С конца 1970-х годов применялось искусственное воспроизводство с целью увеличить уловы осетровых до 30 тыс. т, но уловы с 1979 г. продолжали только неуклонно снижаться вплоть до запрета промысла. Столь низкий процент возврата сошедших для нереста рыб из Каспийского моря обратно в Волгу от объема исходного выпуска молоди рыб не могли объяснить ихтиологи [33]. Завышение ожидания промыслового возврата от искусственного воспроизводства стало одной из причин деградации ценных популяций. При прогнозировании объема запаса и доли уловов ихтиологи исходят из ожидаемого показателя “промвозврата”, который считают по корреляционным зависимостям [34].

Проблема прогнозирования судьбы осетровых рыб Каспия привела к другой идее нашего подхода — внедрение в базовую предикативно переопределяемую динамическую систему с гибридным временем триггерных функций. По своей сути — это динамические коэффициенты для

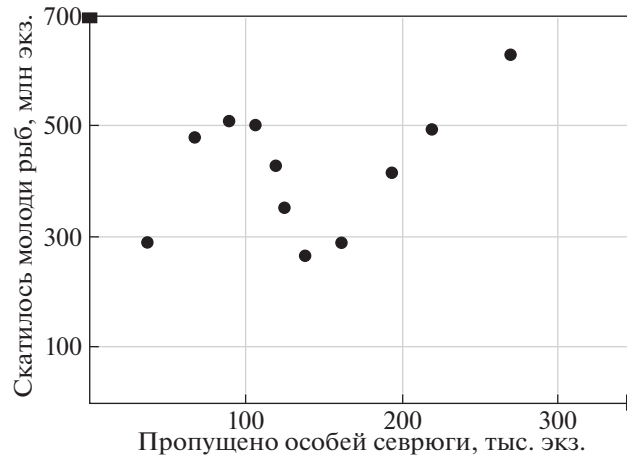


Рис. 1. График эффективности воспроизводства севрюги в Волге с двумя максимумами

итераций: $\varphi^n(x_0; \Psi_t), \Psi_t \neq \text{const}$, но только с ограниченной областью воздействия на допустимом множестве значений аргумента. Функции будут сохранять свое значение на всем объединенном интервале кадра модельного времени поколения, но меняться на следующих пронумерованных элементах множества $\{[t_0, \dots, t^i, t^{i+1}, \dots, T]\}_n$ от кадра к кадру. Триггеры необходимо отдельно из условий каждой экологической задачи подбирать в модель на нужную стадию развития. Для стадии нужен только один триггер.

В нашем уравнении убыли численности поколения есть два коэффициента смертности: зависящий от внутривидового взаимодействия квадратично αN^2 и независимый линейный βN . Для третьей стадии квадратичный фактор убыли в (1.2) мы не используем. Сомножитель αw учитывает быстрое истощение необходимых для развития ресурсов по мере повышения биомассы рыб. Оказалось, что имеет смысл учитывать потери воспроизводства для мигрирующих рыб при низкой плотности зашедших на нерест в реку половозрелых особей севрюги в момент t_0 . Эффект потерь репродуктивной активности рыб реализован в модели дополнительным динамическим коэффициентом $\Psi[S]$, функционально зависящим от состояния запаса S . Он включен при сомножителе βN , где учитывается независимая от плотности смертность поколения:

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha w(t)N^2(t) - \Psi[S]\beta N(t). \tag{4.1}$$

В (4.1) запись $\Psi[S]$ дана в квадратных скобках, потому как величина родительского запаса неизменна при расчете убыли пополнения: $S = \text{const}, t \in [0, T]$. Действие эффекта демографической ямы у севрюги (рис. 1) ограничено в модели диапазоном для принимаемых функцией Ψ следующих значений: $\forall S \in \mathbf{Z}^+, \Psi(S) \in [2, 1)$. По условию задачи можно ограничить значения родительской популяции S подмножеством из натуральных чисел $S < S_{\text{max}}$. Положим, что $\Psi(S) = 1 + \exp(-\sigma S^2)$ зависит от величины родительской популяции S . Из текущей величины S считаем начальные условия $N(0)$.

Область допустимых значений функций-триггеров для первой стадии справа должна, согласно нашей идее, иметь единичный предел. Триггер Ψ должен становиться нейтральным, если в нем нет больше необходимости:

$$\Psi(S) = 1 + \exp(-\sigma S^2), \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \Psi(S) = 1, \quad \Psi(0) = 2, \tag{4.2}$$

где параметр $\sigma < 1$ непосредственно отражает степень выраженности порогового эффекта. Биологическая причина проявления описываемого методом эффекта наступает из-за снижения вероятности образования нерестовых пар на большом протяжении нерестилищ. Далее покажем примеры применения метода гибридных структур и триггерных функций для моделирования двух критических ситуаций для управления биоресурсами. Данный эффект ведет к наличию критической численности, которая необходима для стабильного существования популяции. Ги-

потеза о существовании такой минимальной численности подтверждается все чаще. В 2020 г. сообщено в новостных агентствах, что крупнейшая пресноводная рыба – лопатонос вида *Psephurus gladius* официально признан вымершим.

5. Практика применения гибридной структуры и разновидности аттракторов. Численное решение объединенной модели позволяет вычислять итоговое $N(T) = R$ для допустимых исходных величин запаса. Мы используем эту зависимость ϕ как оператор эволюции для функциональных итераций: $R_{n+1} = \phi(R_n) - q_n R_n$, $n = 1, 2, 3 \dots n_\infty$, где $q \in [0, 1)$ – доля промыслового изъятия. При регулируемом промысле вылов q рассчитывается на каждый сезон n . Величина n_∞ тут указана как число итераций, при котором мы будем считать асимптотическим состояние траектории в вычислительных экспериментах, для большинства расчетов достаточно $n_\infty = 10^4$, для установления признаков хаотичности поведения итераций по факту экспоненциального разбегания близких траекторий – известного физического критерия возникновения хаоса [35] нами используется $n_\infty = 10^6$.

В гибридной модели расчет убыли последовательных поколений с промысловым изъятием задается с выражением для начальных условий первой стадии развития: $N_{n+1}|_{t=0} = (1 - q_n) \lambda N_n|_{t=T_n}$. Изменения управляющего воздействия стратегии промысла q_n не составит труда варьировать в специальных щелях по ходу вычислительного эксперимента.

С помощью модели можно реализовывать актуальные нелинейные эффекты. Хаотизацию траектории через каскад бифуркаций удвоения периода можно получить в итерациях известных зависимостей для расчета пополнения запасов рыб, как в $x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}$, $a > e^2$ и в $x_{n+1} = ax_n/1 + (x_n/B)^b$, $b > 2$, где a – репродуктивный потенциал, b – отражает давление факторов среды. Мы не считаем данное свойство с фрактальным аттрактором и континуумом неустойчивых траекторий актуальным для наших задач. По сравнению с применявшимися ранее для расчетов нелинейными итерационными моделями из обзора [36] получим оригинальные свойства динамики траекторий модели, интересные для проблемы прогнозирования события коллапса рыбных запасов.

Будем использовать (1.2), (2.1) с дополнением (4.1), (4.2) и так найдем разделение фазового пространства для траектории минимум одной неустойчивой точкой. Такая стационарная точка $x_r^* = \phi(x_r^*)$, окрестность которой покидают траектории при любых малых возмущениях, называется репеллером в противоположность устойчивому притягивающему множеству – аттрактору Λ . Можно сказать, что репеллер динамической системы – инвариантное множество, превращающееся в аттрактор при обращении времени [37]. В простом случае репеллер исполняет роль границы, когда близкие начальные точки $x_{01} \in (x_r^* + \epsilon)$, $x_{02} \in (x_r^* - \epsilon)$ просто монотонно притягиваются к разным аттракторам или $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x_{01}) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x_{02}) = +\infty$. Неустойчивые стационарные точки итераций будем различать: изолированные репеллеры без точек-прообразов или открытые репеллерные точки, имеющие точки-прообразы (справа от себя или слева) и прообразы этих прообразов. Важное условие для зависимости – положение экстремумов $R_{\min} > R_{\max}$.

Нам важно, что если точка $\exists x_{r2}$ – прямой прообраз, который под действием оператора эволюции ϕ отображается в репеллерную точку $\phi(x_{r2}) = x_r^*$, то она тоже будет принадлежать инвариантному множеству итераций. Прямых прообразов у репеллера может быть более одного, и с каждым будет связано инвариантное множество не притягивающихся к аттракторам точек-прообразов $\phi^{-n}(x_r^*)$. Из-за свойств комбинаций прообразов у таких точек-репеллеров усложняется граница области притяжения аттракторов. Возможен сценарий, когда аттрактор пересечется со своей границей.

Бифуркацией называют просто качественное перестроение фазового портрета динамической системы, и они позволяют видеть изменения в поведении траектории. У непрерывных и дискретных систем бифуркации разные, хотя и две из трех выглядят сходными. Будем использовать бифуркации при построении сценарных моделей и для описания ситуаций с управлением. В качестве критерия устойчивости у стационарных точек итераций используем значение производной: $\phi'(x^*) \in (-1, 1)$ [38]. Широко известно понятие “странного аттрактора”, обладающего свойством локальной неустойчивости. Странный аттрактор, строго говоря, не обязан быть хаотическим [39], но в статье мы осознано не будем развивать эту популярную в прошлом веке тематику. О применении “фракталоподобных” объектов в моделях экодинамики писали ранее в [40]. Присутствие хаотических аттракторов в биологических моделях было сильно переоценено, так как подобное поведение приводит к противоречиям при сравнении с реальными наблюдениями за водо-

емами при изменении их трофического статуса, известными в биологической литературе как “парадокс обогащения” (“paradox of enrichment”) [41]. Мы не считаем возникновение глобального странного аттрактора достоинством для модели конкретной популяции севрюги или трески.

Интересная нам модельная зависимость из (1.2)–(2.1) с триггерной компонентой (4.1), (4.2) будет обладать более чем одним максимумом, а итерации получают две области притяжения альтернативных аттракторов. У неунимодальной функции не выполняются условия теоремы Синжера [42], которые необходимы для реализации сценария перехода к глобальному хаотическому аттрактору через каскад бифуркаций удвоения периода цикла – по теории Фейгенбаума образования цикла бесконечного периода p при конечном увеличении параметра [43]. При нарушении критериев Синжера в некоторый момент при изменении параметров там возникнет два альтернативных цикла периода $p = 2$.

В работе Блох и Любич [44], обобщившей результаты Гукейнхеймера [45], показано, что для функциональных итераций возможно четыре топологических типа аттракторов: простое равновесие x^* (цикл конечного периода), аттрактор гомеоморфный канторовскому множеству (это нигде не плотное множество, не имеющее внутренних точек) и интервальный аттрактор как объединение бесконечного множества несвязных отрезков, которые могут создать все точки $\phi^{-n}(x_r^*)$. Четвертый тип – соленоидальный аттрактор.

Модель может обладать возможностью образования хаотического движения из-за множества точек, которые не входят в область притяжения аттракторов, так как являются прообразами неустойчивых стационарных точек-репеллеров. При изменении положения экстремумов нашей зависимости $\phi(\lambda S)$ эти граничные $\partial\Omega$ для области притяжения Ω точки сформируют континуальное множество никуда не притягивающихся точек. Возникает иной тип переходного хаотического движения, чем в теории Фейгенбаума при накоплении каскада бифуркаций удвоения. Для итераций $x_n = f(x_n) \pm \iota$ возможно появление трех типов метаморфозов аттракторов. Бифуркации стационарных точек итераций бывают прямые и обратные. Прямая бифуркация – удвоение периода цикла $p_m = 2^{i+1}$, обратная бифуркация – “ополовинивание периода” $p_m = 2^{i-1}$. Для обратной бифуркации необязательно уменьшать управляющий параметр, существуют итерации, где при увеличении параметра сперва происходит каскад увеличения периода цикла $p_m = 2^{i+1}$, а потом каскад изменений периода с его уменьшением $p_m = 2^{i-1}$ по степеням двойки.

Аттракторы, как компактные подмножества фазового пространства, могут моментально терять свойство инвариантности $f(\Lambda) \in \Lambda$, если получают непустое пересечение $\Lambda \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ с границей $\partial\Omega$ замкнутой области Ω , $\forall x_0 \in \Omega \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x_0) = \Lambda$, что будет зависеть уже от свойств их области притяжения Ω . Граница $\partial\Omega$ не входит в это множество точек области притяжения Ω , может быть точкой, набором локально несвязных между собой точек, как в нашем примере, или образовывать фрактальную структуру, как известное замкнутое множество Жюлиа, которое само нельзя нарисовать.

Так, частные прикладные задачи вновь пересекаются с фундаментальными проблемами динамических систем. Например, если будем рассматривать итерации функции $f^{(3)}(x; a) \equiv f(f(f(x; a)))$, $f(x; a) = axe^{-bx}$, $0 < b < 1$ при значении бифуркационного параметра $a = a_3, a_3 = 22, 255$, таких, что $f^n(x_1^*; a_3) = f^{n+3}(x_1^*; a_3)$, то области притяжения трех устойчивых стационарных точек x_1^*, x_2^*, x_3^* у итераций $x_{n+1} = f^{(3)}(x_n; a)$ будут перемешанными “Intermingled basins of attraction” по терминологии в [46]. В том случае для каждой точки $\forall x_{01} \in \Omega_1, \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(3)n}(x_{01}) = x_1^*$ существует сколь угодно малая $\varepsilon > 0$ окрестность и выполнено условие для начальных точек: $\exists x_{02}, x_{03} \in x_0 \pm \varepsilon, x_{02} \in \Omega_2, x_{03} \in \Omega_3$.

6. Нелинейная динамика реального коллапса биоресурсов. Мы разрабатываем модель сценария истощения биоресурсов, который происходит не длительно, как было с запасами осетровых рыб Каспия, но случается внезапно для специалистов ихтиологов – в форме коллапса. Резкий коллапс принципиально отличается от постепенного монотонного истощения запасов рыб. Дегградация промысловых запасов трески в Северной Атлантике в 1992 г. – самый масштабный коллапс по экономическим последствиям [47]. В Канаде после 1992 г. 25 тыс. сотрудников потеряли рабочие места от прекращения векового промысла.

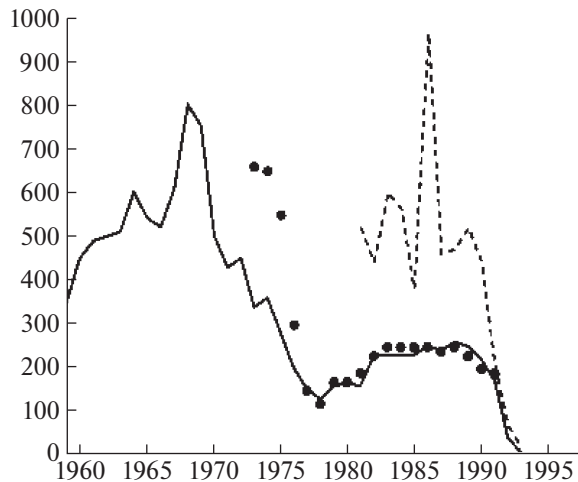


Рис. 2. Динамика коллапса запасов трески 1992 г. у атлантических берегов Канады согласно [48]

Википедия посвятила коллапсу трески подробную статью, где приведен график динамики уловов перед крахом промысла, но на графике из Википедии представлены не совсем полные данные. Рисунок 2 для анализа гораздо информативнее. На рисунке сплошной линией показана динамика реальных уловов, а точками — размеры квоты, предназначенной для вылова в тыс. тонн. Пунктиром обозначена рассчитанная предполагаемая величина запасов трески, которая, как выяснилось после коллапса, не соответствовала истинному положению. Очевидно, оценка величины запаса S была чрезмерно оптимистичной, а ожидаемая кривая запас-пополнение $f(S)$ для трески выше реальной и не были оценены близкие к пороговым значениям запаса экстремумы кривой.

Резких падений уловов у популяции трески Севера Атлантики (согласно графикам на рис. 2) без восстановления рыбных запасов было два, потому в вычислительном сценарии трансформаций фазового портрета динамической системы должно быть аналогично два.

Рыболовы после первого падения уловов в 1970-х годах не могли пять лет освоить выделенную им квоту. Оценки оптимального изъятия рассчитываются по стандартным когортным моделям и статистическим методам прогнозирования. Потом уловы пришли к равновесию с оценками квот. Долго в 1980-е годы квота трески осваивалась и почти не менялась 10 лет. Вдруг индустрия ловли внезапно обрушилась. Авторы статьи [48], откуда мы привели график, в 1996 г. с пессимизмом прогнозировали восстановление промысла трески у Ньюфаундленда через девять лет, этого не произошло и в 2018 г. Мораторий на вылов рыбы изначально вводили на два года. Никто из авторитетных экспертов-биологов не смог предсказать столь длительную деградацию ценных биоресурсов. Ведь обычно рыбные запасы убывают постепенно и монотонно год за годом. Коллапсы ранее происходили с сельдью и анчоусом — короткоцикловыми рыбами, и они восстанавливали самостоятельно запасы. Восстановиться не смог после коллапса атлантический палтус *Hippoglossus hippoglossus*, когда-то бывший ценным и обильным промысловым видом.

Треска *Gadus morhua* — хищник с длинным жизненным циклом, и промысел использовал только несколько поколений. Помимо сокращения численности произошли изменения в генетической структуре популяции. Особи трески стали медленнее набирать вес, но убыстрилось их половое созревание, сократился жизненный цикл. Подобные сдвиги характеристик онтогенеза могут описываться расширенным набором параметров вспомогательных уравнений нашей гибридной вычислительной структуры. О скрытых причинах локальной катастрофы специалисты продолжают дискутировать и 29 лет спустя.

7. Анализ вычислительного сценария коллапса биоресурсов. Для математической реализации подобного сценария коллапса из двух этапов мы предлагаем сценарий с двумя трансформациями в динамике итераций. Зависимость должна обладать четырьмя нетривиальными стационарными $\varphi(R_i^*) = R_i^*$ состояниями: $R_1^* < R_2^* < R_3^* < R_4^*$. Первым изменением выполним обратную касательную бифуркацию (итерационный аналог бифуркации “седло-узла”) с редукцией притягивающего состояния равновесия до неустойчивой точки с ее исчезновением. В данном случае редукцию

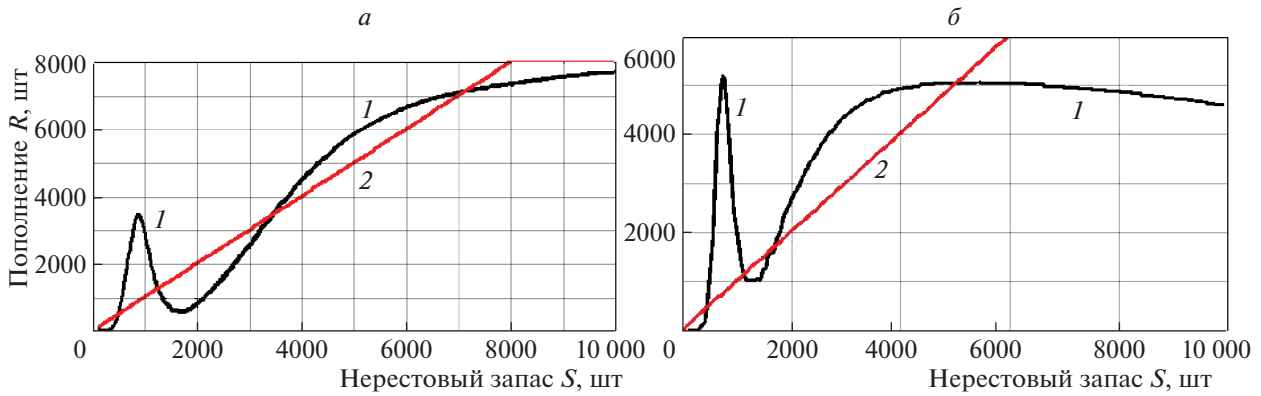


Рис. 3. Трансформация экстремумов и равновесий у функциональной зависимости $\varphi(S)$ относительно биссектрисы координатного угла: 1 – модельная зависимость, 2 – биссектриса $\varphi(S) = S$

локального аттрактора R_4^* запишем таким образом, что $\forall R_0 > R_3^* \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(R_0) = R_4^*$ и $|\varphi'(R_4^*)| < 1$. Редукцией мы называем изменения, когда две точки R_4^*, R_3^* сливаются в одну R_w^* неустойчивую $\varphi(R_4^*) = \varphi(R_3^*) = R_w^*$, и далее эта точка R_w^* исчезает: $\varphi(R_w^*) < R_w^*$. Кривая лежит ниже биссектрисы координатного угла: $\varphi(R > R_{\min}) < R$. Второй целенаправленной трансформацией фазового портрета реализуем граничный кризис интервального аттрактора Λ . Все точки Λ заключаются после редукции R_4^* в интервале между отображениями R_{\min} и R_{\max} экстремумов зависимости φ так, что $\Lambda \subset [\varphi(R_{\min}), \varphi(R_{\max})]$.

Интервальный аттрактор Λ возникает после редукции устойчивой точки R_4^* вместе с неустойчивой R_3^* в области, которая включает стационарную точку R_2^* с прообразами, так как это репеллер открытый и справа и слева. Для такого перестроения фазового портрета необходимо как минимум три неустойчивые стационарные точки при сохранении устойчивости нулевого равновесия. Поведение итераций при изменении параметра будет зависеть от того, имеет ли репеллер R_1^* прообразы справа. Гибридная система дает возможность масштабировать зависимость по оси R и целенаправленно изменять положения экстремумов $\varphi(\lambda S)$ при изменении параметра триггерной функции σ , как показано на рис. 3. Мы увидим в зависимости от параметров σ, β репеллеры (на графике точки пересечения с биссектрисой координатного угла), изолированные или имеющие точки-прообразы. На рис. 3, а и б показаны формы зависимости $\varphi(\lambda S)$ в инструментальной среде AnyLogic относительно приведенной на графиках биссектрисы координатного угла. Отметим, что λ – это параметр, который может изменять положение экстремумов φ . Такое различие форм у кривых “запас-пополнение” на рис. 3 мы можем получать, изменяя σ и воздействие слагаемого $\Psi[S]\beta$ в правой части уравнения (4.1).

У графиков зависимости на рис. 3 меняется относительное положение репеллеров и экстремумов. На рис. 3, б репеллер R_1^* изолирован, на рис. 3, а репеллер R_1^* открытый. Это свойство важно для моделирования экстремальных сценариев, так как точка R_1^* в модели всегда неустойчива: $|\varphi'(R_1^*)| > 1$. Функция-триггер Ψ не меняет относительное положение четвертого устойчивого равновесия большой численности R_4^* , но действует на положение экстремума $\min \varphi(\lambda S)$ относительно неустойчивого равновесия – репеллера R_1^* . Положение первого репеллера R_1^* важнее для качественной динамики, чем остальных.

Положим, что изначально в окрестности максимума наша модельная кривая “запас-пополнение” немного превосходит третье равновесие $\varphi(\max \varphi(N(0)) \pm \epsilon) > R_3^*$, т.е. R_3^* получает две прямых точки-прообраза. Если исходное состояние популяции R_0 соответствует диапазону $R_0 \in (R_1^*, R_3^*) \cap \{\varphi^{-n}(R_2^*)\}$, то через ряд аperiодических флуктуаций траекторией достигается состояние, которому соответствует уровень высокой стабильной численности R_4^* . В сценарии важно множество $\{\varphi^{-n}(R_2^*)\}$ –

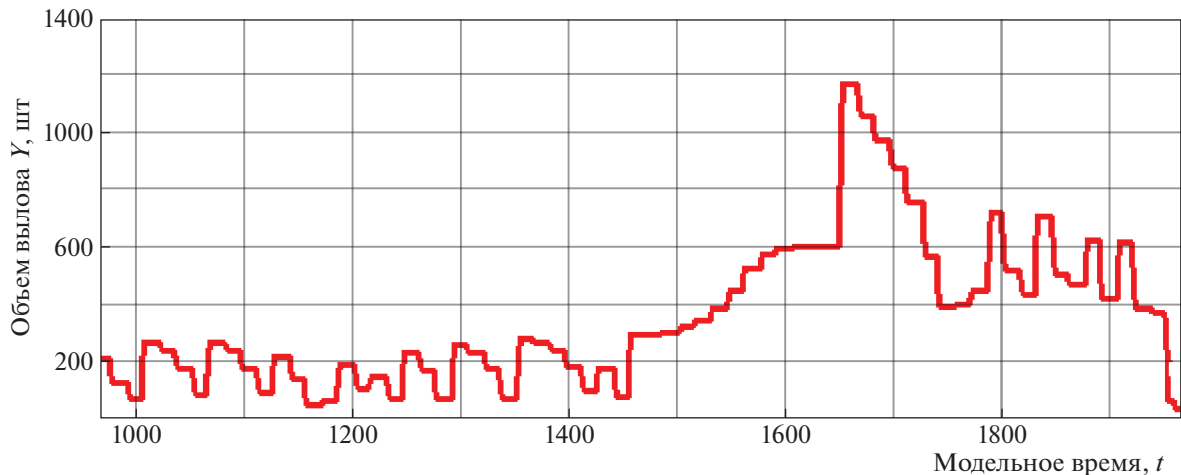


Рис. 4. Вычислительный сценарий динамики уловов в развитии ситуации коллапса запасов трески Севера Атлантики

совокупность всегда существующих точек-прообразов у репеллера R_2^* . Все они ни при каких R_0 не притягиваются к аттракторам, но вносят локальные разрывы в его область притяжения.

Зададим в вычислительном эксперименте параметры сценария, где промысловая популяция рыб после нестабильного режима восстановилась до устойчивого равновесия и экологического оптимума. Следовательно, уловы $Y_n = R_n q_n$ нарастают. После оценки позитивного тренда экспертами принимается обоснованное решение увеличить годовую квоту \bar{q}_n . Уловы в следующем сезоне демонстрируют исторический максимум, но затем довольно очевидно снижаются. В итерациях запас успешно проходит локальный минимум, не попадая сразу в окрестность критического состояния R_1^* . Промысловые прогнозы гарантированно учли в расчетах высокую эффективность воспроизводства в предыдущие годы. Уловы после спада заметно начинают возвращать былые показатели и нет видимых причин радикально пересматривать долю изъятия \bar{q}_n . Такое восстановление обманчиво. В реальности продолжительность роста Y_n связана со случайными факторами.

Величина запаса после интенсификации промысла срывается в аperiodический малочисленный режим с непостоянной амплитудой колебаний. В случае запоздалого установления прежней рациональной доли изъятия после колебаний следует то резкое второе падение величины уловов, которое собственно называют “коллапсом”.

На рис. 4 представлен вычислительный сценарий безвозвратного кризиса популяции с промежуточными колебаниями при экспертном управлении интенсивностью промысла. Полагается, что промысел способен полностью освоить выделенную для изъятия квоту вне зависимости от экономических затрат и потери рентабельности рыболовства.

Продолжительность фаз процесса на рис. 4 зависит от изначально повышения \bar{q}_n . Для любой популяции ее состояние начнет смещаться влево по кривой $\phi(\lambda S)$. Сначала сокращение пойдет монотонно, но в случае наличия пороговых эффектов – резко. Пороговые эффекты проявятся не сразу после увеличения квоты. Обратные связи в экосистемах действуют с запаздыванием [49]. Для адекватной оценки реакции популяции на изменение уровня промыслового воздействия необходим больший временной диапазон, чем может позволить себе регулирующая промысел организация для принятия решений. Сценарий показывает, что эксперты при определении промыслового воздействия заведомо не могут обладать релевантной информацией для принятия управленческих решений. Преодолением проблемы может служить использование исторических аналогий, метода составления таблицы описанных характерных ситуаций при различных воздействиях на эксплуатируемые запасы трески *Gadus morhua* и ответного изменения популяционных характеристик.

Сценарий подтвердил гипотезу, что коллапс запасов крупных долгоживущих рыб – процесс закономерный и растянутый на этапы, которые мы опишем следующим образом.

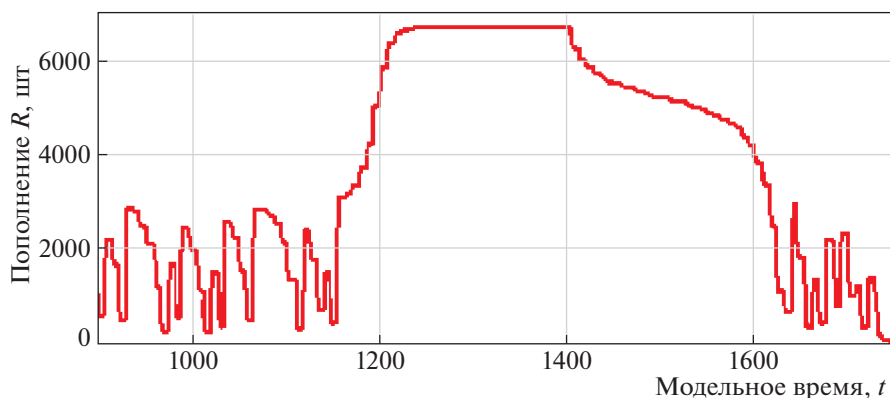


Рис. 5. Сценарий модели популяционной динамики при трехфазном коллапсе запасов осетровых рыб Каспийского моря

Этап I. Стабильная популяция после увеличения изъятия попадает в аperiодический режим. Наблюдаем режим изменений при меньшей средней за пять лет численности, но с иллюзией активного восстановления. Напомним, что в аperiодическом режиме поведение траектории внешне напоминает стохастические колебания из-за сильной зависимости движения траектории $\varphi^n(R_0)$ от близости к R_2^* при попадании в окрестность репеллера.

Этап II. Если не введен своевременный мораторий, этап II деградации произойдет решительным образом в среднем через девять модельных сезонов с переходом через порог критического равновесия $R_1^* > \min \varphi(\lambda S)$. В показанном сценарии доля 0.61 выдерживается, но при $q = 0.63$ развивается процесс, финал которого именуют коллапсом. Динамике траектории сопутствует особый тип известного свойства чувствительности от выбора начальных точек для хаотических систем. В вычислительных экспериментах время пребывания в режиме флуктуаций будет всегда несколько отличаться.

8. Обсуждение вычислительного сценария коллапса. Гибридная структура позволила в вычислительном эксперименте воспроизвести сценарий коллапса запасов при регулируемом промысле. Коллапс трески у побережья Канады был спровоцирован представлениями о слишком благополучном состоянии биоресурсов [50]. Имело место завышение оценки темпов восполнения запасов трески, которые рассчитывали когортными моделями [51]. Перед критическим порогом эффективность воспроизводства популяции, согласно многим моделям, достаточно высока, что вносит завышенные ожидания в прогнозы. Мораторий на вылов трески ввели с ожиданием вступления в репродуктивный возраст виртуальных “резервных” поколений. Теоретически должны размножаться поколения, не охваченные промыслом, но эти виртуальные резервы не дали эффекта восстановления. Подобным образом с двумя фазами проходят сценарии коллапса разных по жизненному циклу объектов промысла: трески, камчатского краба, палтуса, тунца *Thunnus maccoyii* и у локальной популяции пеленгаса Азовского моря [52].

Методы оценки запасов и осетровых рыб Каспия, и трески Канады существенно завышали их реальную численность, хотя это были разные методы. Официальный вылов трески остановлен слишком поздно. У осетровых Каспия фаза псевдостабильности запаса растянулась на 15 лет, с 1977–1992 гг. [53]. Фаза резкого сокращения вылова у двух популяций осетровых рыб Волги аналогична финалу коллапса трески атлантического побережья Канады, из благополучного состояния перешла сразу в этап деградации.

Отличается динамика деградации популяции белуги *Huso huso* Каспия как длительное и постепенное истощение запасов. В вычислительном эксперименте затянутого коллапса на рис. 5 показана не динамика уловов, как в предыдущем эксперименте, а именно динамика популяционной численности по поколениям. Уровень изъятия в сценарии незначительно превосходит критический. На графике изменения численности поколений рис. 5 гораздо нагляднее проявляется отчетливый аperiодический режим флуктуаций со значительной амплитудой величины ежегодного пополнения.

Для осетровых рыб мы можем говорить о моделировании случая продолжительной деградации из трех фаз по сценарию рис. 5. Показатель плодовитости λ у осетра и севрюги в 1.4 раза

больше, чем задавался для плодовитости трески, что определит такое длительное скользкое сокращение численности вплоть до резкого падения в финале. Сглаживает кривую падения уловов осетровых рыб Каспия искусственный выпуск молоди [54] и предсказуемый эффект убыстрения полового созревания этих рыб [55]. Популяция трески неожиданно медленно для ихтиологов восстанавливает свою численность после коллапса, тогда как осетровым рыбам Каспийского моря угрожает полное исчезновение.

Установленный по экспоненциальному разбеганию $R_0, R_0 + \varepsilon$ аperiodический режим вызван несвязным характером области притяжения аттрактора R_4^* . Область не включает множество не притягивающихся к аттрактору прообразов двух неустойчивых точек: $\Delta = \{\varphi^{-n}(R_2^*)\} \cup \{\varphi^{-n}(R_3^*)\}$. В случае отрицательного воздействия извне на выживаемость рыб изменится конфигурация стационарных точек $\varphi(R)$, масштабируемая по оси ординат. Для $\varphi(R)$ возможна локальная обратная касательная бифуркация: при слиянии R_3^*, R_4^* с исчезновением устойчивой стационарной точки R_4^* , при сохранении оставшихся R_1^*, R_2^* . Трансформации вызывают пребывание популяции рыб при меньшей численности запаса S в режиме флуктуаций значительной амплитуды у пополнения. В фазовом пространстве режиму соответствует интервальный аттрактор третьего топологического типа в теореме Дж. Гукэйхэймера [45]. Продолжительность колебаний зависит от положения φ в минимуме. Если наблюдаем $\varphi(R_{\min}) < R_1^*$, то реализуются граничный кризис “boundary crisis” интервального аттрактора. Точка R_1^* – неустойчивое критическое равновесие, если $R_0 < R_1^* - \varepsilon$, то реализуется необратимая деградация $R_0 \notin \Delta, \psi^n(R_0) \rightarrow 0$. Существует еще внутренний “interior crisis” кризис аттрактора, в нашей модели это явление не возникает.

В сценарии при граничном кризисе аттрактор Λ соприкасается с границей своей области притяжения и теряет свойство инвариантности $\varphi(\Lambda) \in \Lambda$. При $\exists R_0 \in \Lambda, \varphi(R_0) < R_1^*$ существует не притягивающее множество $M \in \Omega_1$, состоящее из точек $M, M \cap \Delta = \emptyset$, но с хаотическими свойствами. В окрестности множества репеллерных точек Δ некоторое ограниченное число шагов $n_\Delta < \kappa$ пребывает траектория итераций $\varphi^n(R_0)$, но хаотизация завершается состоянием $\varphi^\kappa(R_0) = 0$, $\kappa < \infty$. Длительность “деградирующего” переходного режима к до нулевого значения численности популяции отличается непостоянным значением в вычислительных сценариях из-за чувствительной зависимости от изменения исходного состояния траектории при малых возмущениях: $R_0 \pm \varepsilon$.

9. Модификация функции-триггера для модели вспышки вредителя. Концепция методики позволит нам моделировать альтернативную экстремальную ситуацию в жизни популяций. Вспышки численности вредителей – глобальная проблема. Вспышки у насекомых различаются по фазам опасных локальных явлений: от момента запуска, перехода к так называемой эруптивной динамике, выходу на пик и до стадии завершения. Вспышки насекомых – это ярко выраженный переходный режим. Вспышка любых насекомых должна завершаться естественно по внутренним биосистемным причинам.

Один из наиболее распространенных сценариев перехода к фазе стремительного роста “вспышке численности” – пороговый. Хрестоматийная ситуация преодоления порога мелкими и малоподвижными насекомыми семейства Psyllidae описана на примере анализа вспышек вредителя эвкалиптовых деревьев в Австралии в работе [56]. На рис. 6 римскими номерами показаны типичные фазы прохождения вспышки: от предпорогового состояния I до полного завершения VII. Данный порог представим математически как неустойчивое равновесие у итераций сложной функциональной зависимости. Проблема в том, что порог должен быть преодолеваем спонтанно. Вспышка на рис. 6 начинается без внешнего воздействия. Вспышка – нечастое экстремальное явление. Непротягивающиеся множества точек-прообразов у неустойчивых стационарных точек делают всю область фрактальным репеллером. Полученный в гибридной модели хаотический репеллер Δ из-за локально-несвязной границы областей притяжения двух альтернативных аттракторов замечательно преодолевает проблему вычислительного моделирования переходов.

Дополнительно метод с транзитивным хаосом в ограниченном интервале дискретной составляющей времени, числе модельных сезонов n , будет имитировать климатическую волатильность среды размножения насекомых, чувствительных к количеству осадков.

В предложенной ранее нами модели с функцией Ψ есть решение, когда спонтанное преодоление равновесия R_3^* запускает вспышку вредителя с выходом к устойчивому равновесию большой

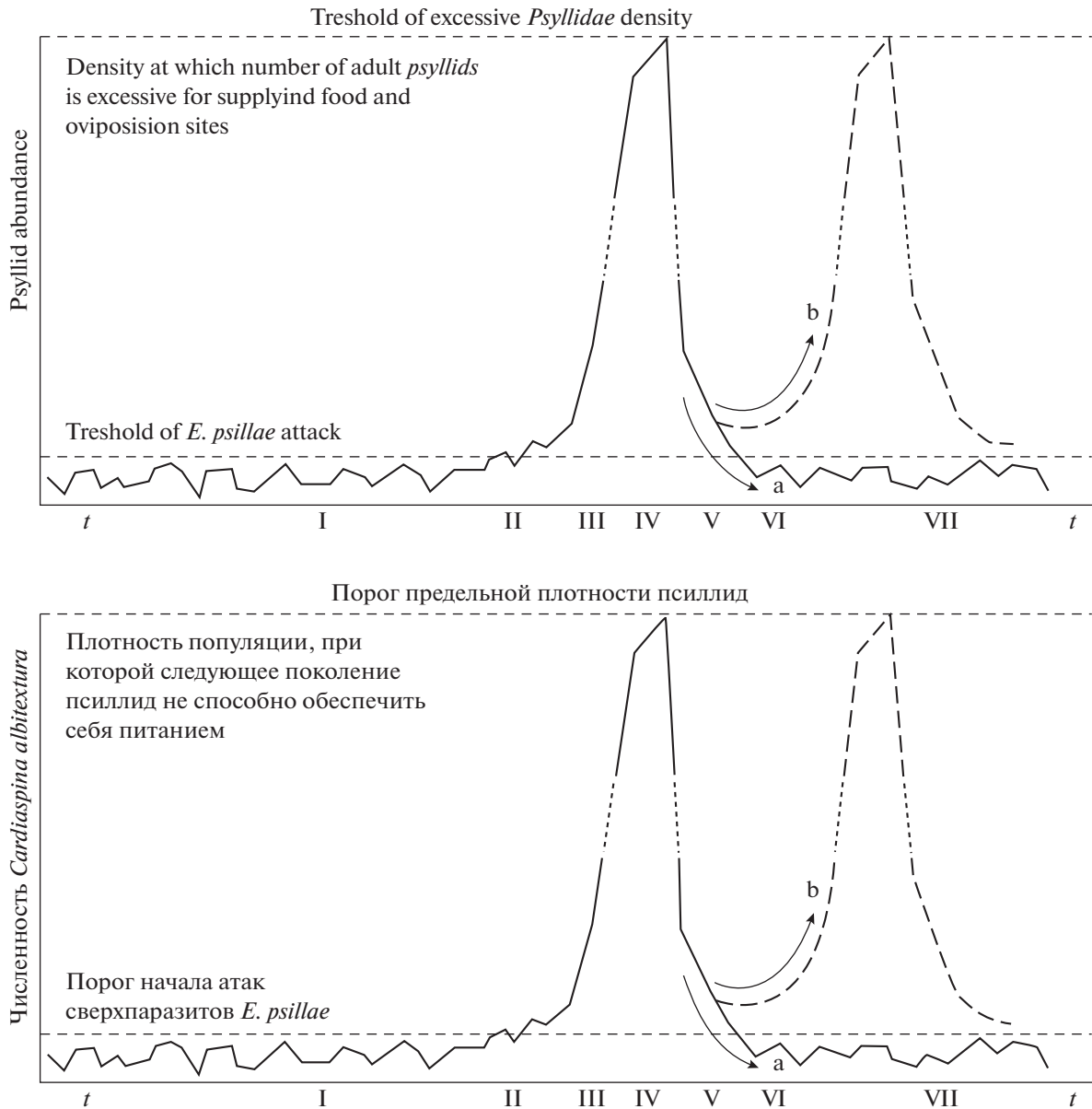


Рис. 6. Сценарий порогового перехода к вспышке вредителей леса в Австралии, согласно работе [56]

численности популяции R_4^* . Однако так мы решаем только первую часть проблемы моделирования вспышки – переход к эруптивной фазе под номером III. Такие явления скоро завершаются по двум причинам: экосистема не выдержит подобное состояние долго, лес потеряет листву. Сами личинки “нимфы” псиллид всю листву съесть не в состоянии, но из-за повреждений листьев происходит быстрое распространение фитопатогенных инфекций. Популяция будет быстро уничтожать необходимые ей ресурсы. Скорость распространения псиллид в лесу ограничена, и насекомые сами подвержены инфекциям при большой их скученности на поврежденных растениях.

Нам необходимо описать спонтанное завершение вспышки лесных насекомых. Для описания резкого сокращения выживаемости у питающихся личинок псиллид мы иным образом еще раз модифицируем модель (1.2) нашим универсальным методом:

$$\Xi(N(\tau)) = 1 + \frac{\exp(c_1 N(\tau))}{l + c_2 \exp(c_1 N(\tau))}, \quad \lim_{N(\tau) \rightarrow \infty} \Xi(N(\tau)) = 1 + \frac{1}{c_2}, \quad (9.1)$$

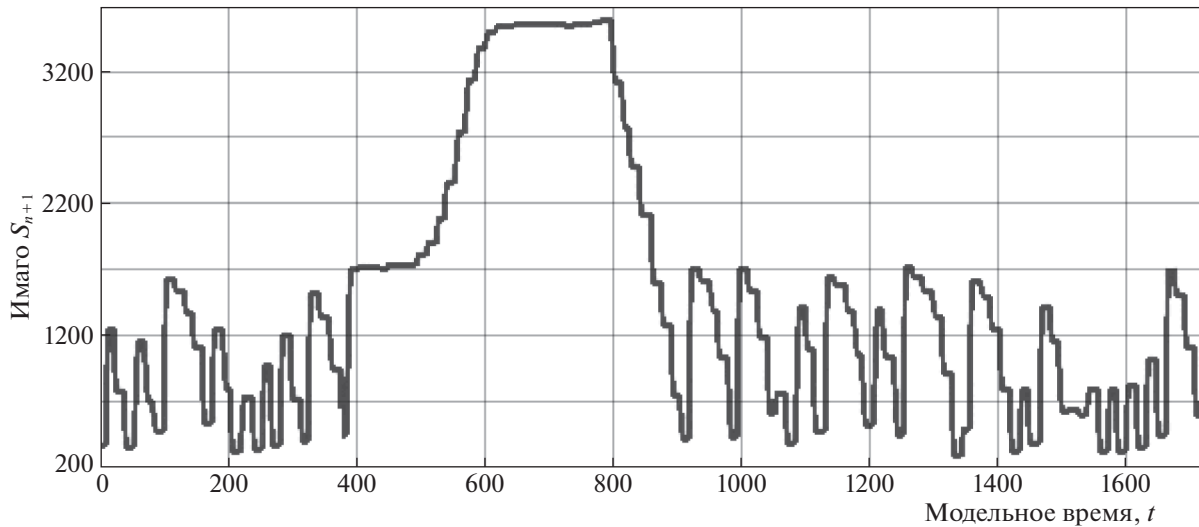


Рис. 7. Моделирование прохождения фаз единичной вспышки численности насекомых

где параметр $c_2 > 1$ характеризует стремительность истощения ресурсов, c_1 — масштабирующий коэффициент приближения функции $\Xi(N(\tau))$ к оси абсцисс. Параметр l варьирует уровень численности, при котором эффект начнет заметно проявлять себя. Мы проведем имплементацию триггерной функции Ξ для стадии развития номер II. Менять значения функция Ξ в расчетах будет тоже при смене кадра. Для насекомых вредителей вторая стадия больше всех требует обилия пищевых ресурсов, потому на максимуме вспышки выживаемость данной стадии из-за (9.1) в расчетах отчетливо сократится:

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha_2 N(t) \Xi(N(\tau)) / w(\tau) - \beta N(t), \quad \tau < t < T. \quad (9.2)$$

В вычислительном эксперименте модели (1.2), (2.1) с двумя триггерными модификациями (4.1), (4.2) и (9.1), (9.2) мы опишем спонтанный непрогнозируемый переход траектории от хаотической динамики к устойчивому равновесию R_4^* через порог $\varphi^u(R) > R_3^*$, $u < \infty$, что составит фазу пика вспышки после промежуточной стабилизации у точки R_3^* . Динамика вспышки с длительным пиком показана в модельном сценарии рис. 7.

Окрестность открытого репеллера R_3^* служит индикатором начала фазы стремительного увеличения численности. Траектория около R_3^* в сценарии на рис. 7 находится долго. В эксперименте показано внутренне время вычислительной среды. Число u достаточно для прогнозирования опасных состояний. Порог для запуска вспышки у псиллид создает чрезвычайно интересная система биорегуляторов: хозяин-паразит-сверхпаразит. Осы паразиты второго порядка из многочисленного в Австралии семейства паразитических перепончатокрылых Ichneumonidae не дают быстро размножиться первичным паразитам, которые должны подавлять вредителей эвкалиптового леса. Равновесие при большой численности может только казаться устойчивым. В новом модельном сценарии с П-образным пиком любое верхнее равновесие будет исчезать из-за действия Ξ , но не сразу, так как репродуктивная активность популяций изменчива, но остается достаточно консервативной характеристикой в масштабе смежных поколений.

В асимптотике нашего сценария траектория вернется к аperiodическому движению в интервальном аттракторе — множестве несвязных интервалов, которую составит разность множеств точек Φ на отрезке между ограничивающими точками-репеллерами:

$$\Phi = [R_1^*, R_3^*] \setminus \{\varphi^{-n}(R_2^*)\} \cup \{\varphi^{-n}(R_3^*)\} \cup \{\varphi^{-n}(R_1^*)\}. \quad (9.3)$$

В полученном сценарии рис. 7 вспышка — это редкое и единичное событие. В реальности старт и завершение вспышек у разных видов весьма разнообразны, нельзя выделить обобщенный единый вариант. В бореальных лесах, где важен фактор зимующего поколения, разрушительные вспышки еловой листовёртки или непарного шелкопряда происходят по другому сценарию.

рию [57]. Часто вспышки переходят в форму с серией отдельных пиков активности, которые оценивают по площадям пораженного леса. Между соседними пиками вспышек может пройти полтора десятилетия. В фазе VII в работе [56] показан пример вариативности вспышки – скорый повторный пик насекомых.

Заключение. Оригинальная методика вычислительного моделирования была продемонстрирована на примере двух практически важных процессов в водных и лесных живых системах. Мы получили вычислительную структуру, которую правильно называть динамической системой с переопределяемым оператором эволюции Φ . Моделируемые нами ситуации относятся к экстремальной и переходной динамике экосистем. Показано, что нелинейные экологические эффекты и фазы вспышки могут быть математически определены рядом бифуркаций фазового портрета у функциональных итераций. Для многих видов насекомых и рыб мы способны численно рассчитывать именно колебания ювенильной выживаемости, но оценивать их состояние актуально по половозрелому пополнению и исследовать эффективность формирования новых поколений популяций.

В составе нашей методики есть следующие шесть принципов построения структуры и способов анализа поведения популяционных моделей в пространстве параметров.

1. Многокомпонентное время, которое позволяет выделять события в непрерывных интервалах – кадрах времени. С формой (1.1) удобно вводить компоненту событийности при управлении изменением непрерывного процесса, управлять уровнем эксплуатации.

2. Использовать в расчетах вспомогательные показатели при формировании предикатов для переопределения или остановки действия тех основных уравнений, которые описывают именно численность. Параметры этих уравнений не изменяем.

3. Внедрение функций триггерного действия. Такие функции Ξ и Ψ точно опишут пороговые изменения в непрерывных процессах в узких значениях численности.

4. Внешние факторы изменчивой среды при необходимости учитывать опосредованно во вспомогательных уравнениях.

5. Анализ дискретной составляющей траектории для описания моделируемых экологических явлений проводим с использованием всех обоснованных метаморфозов поведения функциональных итераций. Инструменты предоставят нам фундаментальные теоремы нелинейной динамики [58]. Необходимо учитывать в этом пункте нашей методики, что не все нелинейные эффекты динамических систем получают существенную биологическую интерпретацию [59]. Некоторые эффекты излишни в моделях биосистем.

6. Исследование нескольких вариантов моделей с управлением мы проводим как сценарное. Включаем в эксперименты логику принятия решений экспертами при внешнем воздействии на биоресурсы, например при выработке новой политики регуляции квот при ведении промысла или установления ограничительных мер во время эпидемий.

В практической части моделирования перспективен сравнительный анализ сценариев и поиск общности у динамики изменений для кардинально различных популяций таких, как треска у берегов Канады, осетровые рыбы Каспия или псиллиды в лесах Австралии. В отличие от коллапса трески, принять необходимые административные решения для предотвращения деградации осетровых Каспия времени было достаточно.

Получена модель вспышки численности, которая завершается самопроизвольно. В данном методе нам не нужно включать изменение параметров из внешних факторов, вызывающее остановку репродуктивной активности. Функции триггерного действия с ограниченными пределами позволят целенаправленно проводить бифуркации, например исчезновение избыточной точки равновесия. Перестроения правой части происходят предикативно. Предикат гибридного автомата может стать истинным при выполнении одного или нескольких или хотя бы одного из нескольких условий. Предикаты применены к анализу ситуаций коллапса биоресурсов – быстрой и неожиданной деградации запасов рыб, которая не сменяется восстановлением вопреки прогнозам и расчетам специалистов. Регулируемый по принципам оптимальности промысел, как показал наш сценарий, не предотвращает развитие коллапса запасов. Регуляция изъятия с введением квот принципиально не будет безопасной. Превышение на $\Delta q = 4.5\%$ от плановой квоты q кажется экспертам не критичной, однако в прогнозах возврата эти 4.5% запаса ими учтены как размножающиеся особи. От погибших рыб ожидается в прогнозах пополнение, потому ошибка в оценках будет быстро нарастать. Подобная нарастающая ошибка в оценках запаса отмечалась в [60] для краба *Paralithodes camtschaticus* у берегов Аляски. Более рациональным видится жесткое ограничение технических возможностей промысла. Перспективен лимит размеров орудий лова,

запасов горючего на борту или времени работы судов в море. Средства удаленного мониторинга позволяют контролировать суда.

Мы использовали непрерывно-событийное представление времени, где за рассчитанным i -м событием следует перестроение правой части, потому говорим о предикативно-переопределяемых вычислительных гибридных структурах. Подбор регуляторов для базовых уравнений может быть адаптирован к широкому классу моделей с управлением [61], использующих решения дифференциальных уравнений последовательно на наборе временных интервалов или простые функции переходов в [62].

Модель легко модифицировать при расширении числа вспомогательных уравнений уже известными моделями, так уравнение (2.5) изначально предлагалось автором для описания длительных циклов у вредителя леса бабочки-листовертки *Choristoneura freemani* в [63], которая в резонансных колебаниях вызывает масштабные поражения леса. Потом самостоятельная модель цикличности включена в состав гибридной структуры.

При модификации гибридных моделей можно включать другие поправки из числа внешних факторов во вспомогательные уравнения регуляции воспроизводства биоресурсов. Перспективно в модельных сценариях анализировать несколько достаточно распространенных и опасных экологических ситуаций антропогенного изменения среды [64]. Например, в предикативных структурах удобно учитывать влияние явления эвтрофирования водоемов на выживаемость молодых рыб, важного в ситуации ограничения доступа кислорода к кладкам икры [65]. Интересно оценивать скорость восстановления биологической продуктивности рек и озер соответственно темпам специальной биоремедиации водоемов после их загрязнения углеводородами [66]. Наиболее актуальная из возможных биологических областей применения предикативно-переопределяемых систем в настоящее время – моделирование активности разнотипных клеток иммунной системы, вырабатывающих ответ на неизвестную инфекцию. Опасные осложнения COVID-19 при пандемии нового вируса вызваны именно избыточной каскадной реакцией клеток иммунитета – цитокиновым штормом [67]. Гиперцитокинемия провоцирует стремительный респираторный дистресс-синдром ARDS [68], когда легкие быстро теряют функциональность. Эпидемия COVID-19 в разных странах идет по различным сценариям. Обновляемая статистика заражений подтверждает, что базовые SIRS-модели эпидемий [69] с их колебательными режимами не обладают адекватностью для реальных ситуаций.

В одной статье нам удалось объединить методологические проблемы моделирования двух принципиально разных биологических ситуаций. Массовое размножение и резкое падение эффективности воспроизводства выражены как последствия от действия пороговых механизмов регуляции. Анализ двух хрестоматийных сценариев вспышки и коллапса подтвердил гипотезу, что очень разные экстремальные ситуации у видов из далеких друг от друга таксономических групп имеют общность с точки зрения нелинейной динамики и выражаются сходной последовательностью бифуркаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константинов А.С., Зданович В.В., Шолохов А.М. Астатичность температурных условий как фактор оптимизации роста, энергетики и физиологического состояния молоди рыб // Вест. МГУ. Сер. 16. Биология. 1991. № 2. С. 38–44.
2. Heger T., Haider S. Species from Different Taxonomic Groups Show Similar Invasion Traits // Immediate Science Ecology. 2015. № 3. P. 1–13.
3. Hoey J., Campbell M., Hewitt C. *Acanthaster planci* invasions: Applying Biosecurity Practices to Manage a Native Boom and Bust Coral Pest in Australia // Management of Biological Invasions. 2016. V. 7. Iss. 3. P. 213–220.
4. Новожиллов А.С. Анализ обобщенной популяционной модели хищник–жертва с нормально распределенным параметром по особям популяции хищников // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 3. С. 56–60.
5. Букин Ю.С. Процессы коэволюции в системе “хищник–жертва”. Эколого-генетическая модель // Вавиловский журнал генетики и селекции. 2014. Т. 18. № 2. С. 320–328.
6. Emerson B.C., Kolm N. Species Diversity Can Drive Speciation // Nature. 2005. V. 434. P. 1015–1017.
7. Ioannou C.C., Bartumeus F. Unified Effects of Aggregation Reveal Larger Prey Groups Take Longer to Find // Proc. Royal Society B: Biological Sciences. 2011. V. 278. P. 2985–2990.
8. Hempel G. On the Importance of Larval Survival for the Population of Marine Food Fish // California cooperative oceanic fisheries investigations. 1965. V. 10. P. 13–23.

9. *May R.C.* Larval Mortality in Marine Fishes and the Critical Period Concept // The Early Life History of Fish. Berlin, Heidelberg: Springer, 1974.
10. *Усова Т.В.* Выживаемость молоди севрюги от естественного нереста в период ее покатной миграции в Волге // Экология. 2009. № 5. С. 396–398.
11. *Гурман В.И.* Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 4. С. 70–75.
12. *Гончарова Е.В., Старицын М.В.* Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными гибридными системами // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 3. С. 41–51.
13. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности непрерывно-дискретных систем с мгновенными многократными переключениями дискретной части // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 2. С. 17–48.
14. *Perevaryukha A.Y.* Uncertainty of Asymptotic Dynamics in Bioresource Management Simulation // J. Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 3. P. 491–498.
15. *Ricker W.E.* Stock and Recruitment // J. Fish. Res. Board Can. 1954. V. 11. P. 193–211.
16. *Maunder M.N.* Evaluating the Stock–Recruitment Relationship and Management Reference Points: Application to Summer Flounder (*Paralichthys dentatus*) in the U.S. Mid-Atlantic // Fisheries Research. 2012. V. 126. P. 20–26.
17. *Subbey S., Devine J.A.* Modelling and Forecasting Stock–Recruitment: Current and Future Perspectives // ICES J. of Marine Science. 2014. V. 71. Iss. 8. P. 2307–2322.
18. *Peterman R.M.* Contribution of Early Life Stages to Interannual Variability in Recruitment Of Northern Anchovy (*Engraulis morh*) // Can. J. Fish. Aquat. Sci. 1988. V. 45. P. 8–16.
19. *Skobelev V.V., Skobelev V.G.* Some Problems of Analysis of Hybrid Automata // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. V. 54. Iss. 4. P. 517–526.
20. *Perevaryukha A.Y.* Modeling Abrupt Changes in Population Dynamics With Two Threshold States // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. V. 52. № 4. P. 623–630.
21. *Strub S., Bayen M.A.* Mixed Initial-Boundary Value Problems for Scalar Conservation Laws: Application to the Modeling of Transportation Networks // Hybrid Systems: Computation and Control. 2006. V. 7. P. 552–567.
22. *Branicky M.S.* Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched And Hybrid Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. V. 43. P. 475–482.
23. *Heymann M., Lin F., Meyer G.* Analysis of Zeno Behaviors in a Class of Hybrid Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. V. 50. Iss. 3. P. 376–384.
24. *Тоцилин П.А.* Анализ гибридной системы второго порядка с линейной структурой // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2008. № 1. С. 26–33.
25. *Venkatachalam S.* Survival and Growth of Fish (*Lates calcarifer*) Under Integrated Mangrove–Aquaculture and Open–Aquaculture Systems // Aquaculture Reports. 2018. V. 9. P. 18–24.
26. *McGurk M.D.* Natural Mortality of Marine Pelagic Fish Eggs and Larvae: Role of Spatial Patchiness // Marine Ecology. 1986. V. 34. P. 227–242.
27. *Reznik S.Ya.* The Influence of Density-Dependent Factors on Larval Development in Native and Invasive Populations of *Harmonia Axyridis* (Pall.) (Coleoptera, Coccinellidae) // Entomological Review. 2017. V. 97. Iss. 7. P. 847–852.
28. *Kolesov A.Yu.* Relaxation Oscillations in Mathematical Models of Ecology // Proc. Steklov Institute of Mathematics. 1995. V. 199. Iss. 1. P. 2–126.
29. *Козок Л.М., Проненко С.М., Шляхов В.А.* Модели типа “запас–пополнение” и регулирование промысла // Тр. Южного научно-исследовательского ин-та рыбного хозяйства и океанографии. 1996. Т. 42. С. 205–209.
30. *Reznick D., Bryant M., Basheyr F.* *r*- and *K*-Selection Revisited: the Role of Population Regulation in Life-History Evolution // Ecology. 2002. V. 83. P. 1509–1520.
31. *Frolov A.N.* The Beet Webworm *Loxostege sticticalis* (Lepidoptera, Crambidae) in the Focus of Agricultural Entomology Objectives: The Periodicity of Pest Outbreaks // Entomological Review. 2015. № 2. P. 147–156.
32. *Veshchev P.V., Guteneva G.I.* Efficiency of Natural Reproduction of Sturgeons in the Lower Volga Under Current Conditions // Russian J. Ecology. 2012. V. 43. № 2. P. 142–147.
33. *Гутенева Г.И., Фомин С.С.* Влияние волжского стока на естественное воспроизводство осетровых рыб // Рыб. хоз-во. 2015. № 3. С. 103–105.
34. *Сечин Ю.Т.* Эффективность прогнозирования вылова рыбы на пресноводных водоемах // Тр. ВНИРО. 2014. Т. 151. С. 151–157.
35. *Плохотников К.Э.* Об одной дискретной математической модели идеальной жидкости // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 9. С. 43–63.

36. *Barrowman N.J., Myers R.A.* Still More Spawner-Recruitment Curves: The Hockey Stick And Its Generalizations // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 2000. V. 57. P. 665–676.
37. *Milnor J.* On the Concept of Attractor // *Commun. Math. Phys.* 1985. V. 99. P. 177–195.
38. *Братусь А.С., Новожилов А.С.* Математические модели экологии и динамические системы с дискретным временем. М.: МГУ, 2003.
39. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2013. 488 с.
40. *Perevaryukha A.Y.* Hybrid Model of Bioresources' Dynamics: Equilibrium, Cycle, and Transitional Chaos // *Automatic Control and Computer Sciences.* 2011. V. 45. № 4. P. 223–232.
41. *Singer D.* Stable Orbits and Bifurcations of the Maps on the Interval // *SIAM J. Applied Math.* 1978. V. 35. P. 260–268.
42. *Тютюнов Ю.В., Тумова Л.И.* От Лотки–Вольтерра к Ардити–Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // *Журн. общ. биологии.* 2018. Т. 79. № 6. С. 428–448.
43. *Feigenbaum M.J.* The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems // *Communications in Mathematical Physics.* 1980. V. 77. № 1. P. 65–86.
44. *Blokh A.M., Lyubich M.Yu.* Measure and Dimension of Solenoidal Attractors of One Dimensional Dynamical Systems // *Communications in Mathematical Physics.* 1990. V. 127. Iss 3. P. 573–583.
45. *Guckenheimer J.* Sensitive Dependence on Initial Conditions for one Dimensional Maps // *Communications in Mathematical Physics.* 1979. V. 70. P. 133–160.
46. *Sommerera J.C., Ott E.* Intermingled Basins Of Attraction: Uncomputability in a Simple Physical System // *Physics Letters.* 1996. V. 214. Iss. 5. P. 243–251.
47. *Schrank W.E., Roy N.* The Newfoundland Fishery and Economy Twenty Years After the Northern Cod Moratorium // *Marine Resource Economics.* 2013. V. 28. P. 397–413.
48. *Roughgarden J., Smith F.* Why Fisheries Collapse and What to Do About It // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1996. V. 93. P. 5078–5083.
49. *Ильичев В.Г.* Структура обратных связей с запаздыванием и устойчивость экологических систем // *Журн. общ. биологии.* 2009. Т. 70. № 4. С. 341–348.
50. *Rose G.A.* Northern Cod Comeback // *Canadian J. Fisheries and Aquatic Sciences.* 2015. V. 72. № 12. P. 1789–1798.
51. *Булгакова Т.И.* Сценарное моделирование, направленное на тестирование правила регулирования промысла Северо-Восточной арктической трески // *Рыб. хоз-во.* 2009. № 4. С. 77–80.
52. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е.* Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // *Мат. моделирование.* 2012. Т. 24. № 9. С. 3–21.
53. *Khodorevskaya R.P., Kalmykov V.A.* Formation of Populations of Acipenseridae Sturgeons in the Volga-Caspian Basin // *J. Ichthyology.* 2014. V. 54. Iss. 8. P. 576–583.
54. *Власенко С.А., Гутенева Г.И.* Оценка эффективности естественного воспроизводства осетровых на Нижней Волге // *Вопр. рыболовства.* 2012. Т. 13. № 4. С. 736–753.
55. *Perevaryukha A.Y.* Mathematical Model for Growth Rates of Competing Organisms for Biological Species with Metamorphoses in Ontogenesis // *J. Automation and Information Sciences.* 2017. V. 49. № 11. P. 39–52.
56. *Clark L.R.* The Population Dynamics of *Cardiaspina albitextura* (Psyllidae) // *Aust. J. Zoology.* 1964. V. 12. P. 362–380.
57. *Perevaryukha A.Y.* Continuous Model for the Devastating Oscillation Dynamics of Local Forest Pest Populations in Canada // *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. V. 55. № 1. P. 141–152.
58. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН.* 1984. Т. 39. С. 3–37.
59. *Дубровская В.А.* О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций // *Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы.* 2016. № 48. С. 74–83.
60. *Баканев С.В.* Проблемы оценки запаса и регулирования промысла камчатского краба в Баренцевом море // *Вопр. рыболовства.* 2009. № 1. С. 51–63.
61. *Переварюха А.Ю.* Об определении фрактальных объектов в динамике моделей управления биоресурсами // *Тр. СПИИРАН.* 2013. № 1. С. 211–221.
62. *Letichevsky A.A., Letychevskiy O.O., Skobelev V.G., Volkov V.A.* Cyber-Physical Systems // *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. V. 53. № 6. P. 821–834.

63. *Perevaryukha A.Y.* Comparative Analysis of the Results of Modeling of Extreme Population Processes for Fish and Insects // *J. Automation and Information Sciences*. 2019. V. 51. № 2. P. 11–21.
64. *Никитина А.В., Семенов И.С.* Моделирование процессов эвтрофикации мелководного водоема // *Изв. ЮФУ. Технические науки*. 2013. № 4. С. 37–44.
65. *Михайлов В.В.* Моделирование динамики биогенной нагрузки при оценке эффективности восполнения биоресурсов // *Информационно-управляющие системы*. 2017. № 4. С. 103–110.
66. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Филина А.А., Никитина А.В.* Суперкомпьютерное моделирование процессов биоремедиации нефтяного разлива в мелководном водоеме // *Вест. компьютерных и информационных технологий*. 2019. № 6. С. 47–56.
67. *Wu D., Yang X.O.* TH17 Responses in Cytokine Storm of COVID-19: an Emerging Target of JAK2 Inhibitor Fedratinib // *J. Microbiology, Immunology and Infection*. 2020. V. 53. Iss. 2. P. 21–29.
<https://doi.org/10.1016/j.jmii.2020.03.005>
68. *Shereenab M.A., Khan S.* COVID-19 infection: Origin, Transmission, and Characteristics of Human Coronaviruses // *J. Advanced Research*. 2020. V. 24. P. 91–98.
69. *Шабунин А.В.* SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2019. Т. 27. № 2. С. 5–20.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 004.932.2, 004.852

ПОИСК ГРАНИЦ РАДУЖНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОМОЩИ
СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ¹

© 2021 г. Ю. С. Ефимов^{a,*}, В. Ю. Леонов^b, Г. А. Одиноких^{c,***}, И. А. Соломатин^{a,**}

^a МФТИ, Долгопрудный, МО, Москва, Россия

^b ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^c Samsung R&D Institute Russia, Москва, Россия

*e-mail: yuri.efimov@phystech.edu

**e-mail: ivan.solomatin@phystech.edu

***e-mail: g.odinokikh@samsung.com

Поступила в редакцию 09.06.2020 г.

После доработки 17.06.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Идентификация по радужной оболочке глаза — известная и широко используемая технология. Однако ее применение в мобильных устройствах ограничено ввиду алгоритмической сложности существующих методов, а также их малой универсальности относительно разнообразия условий регистрации. Предлагается метод выделения области радужки путем аппроксимации ее границ двумя окружностями, при этом относительная ошибка определения параметров окружностей должна составлять не более 5%. Применены сверточные нейронные сети, оптимизированные по количеству параметров. Данный способ позволяет превзойти описанные в литературе классические (нейросетевые) методы решения этой задачи сегментации. Работа метода проверена на базах изображений радужки из открытых источников.

DOI: 10.31857/S0002338821010042

Введение. Технологии биометрического распознавания личности активно внедряются в повседневную жизнь людей. Среди способов биометрической идентификации стоит выделить методы, основанные на использовании рисунка радужной оболочки глаза, который практически не изменяется с течением жизни человека и обладает богатой индивидуальной для каждой личности текстурой [1]. Применение этого биометрического признака позволяет достигать высочайшей точности идентификации. Классическая система распознавания по радужке состоит из трех основных этапов: локализация области радужной оболочки, извлечение и сравнение признаков [2]. Этап локализации состоит, как правило, из нескольких шагов: нахождение области глаза, поиск внешней и внутренней границ радужной оболочки и выделение перекрытий области внутри найденных границ ресницами и веками [3].

Одним из способов решения задачи поиска границ является их приближение параметрическими кривыми, такими, как окружности или эллипсы. Решением в данном случае будет оптимальный по некоторому критерию набор параметров. В работе [2] предлагается модель концентрических окружностей для аппроксимации границ радужной оболочки. Для определения оптимального набора их параметров минимизируется значение интегродифференциального оператора. В [4] описан метод сегментации, основанный на преобразовании Хафа. Поиск окружностей в трехмерном пространстве параметров является вычислительно затратным, поэтому предложены различные модификации первоначальной идеи, оптимизированные непосредственно для решения задачи сегментации [5]. Как правило, при решении задачи выделения области радужки в первую очередь определяется граница зрачка, затем внешняя граница радужной оболочки. Это связано с тем, что зрачок на изображении виден как характерная темная область округлой формы. Обнаружение зрачка позволяет сузить диапазон допустимых параметров внешней границы [6]. Также предлагается совместный поиск двух границ [3].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 19-31-90171; 19-31-90167).

Помимо аппроксимации границ радужной оболочки окружностями, существуют методы, моделирующие контуры области радужки более сложными кривыми [7, 8], например, активными контурами [9] или оптимизацией формы кривой в полярных координатах [10]. Решение задачи локализации области радужки на изображении глаза усложняется в случае ослабления ограничений на допустимые условия регистрации. Большие изменения освещенности или размера глаза в поле зрения камеры могут вызвать значительные изменения в видимой структуре глаза в целом, что приводит к ошибкам в работе классических алгоритмов локализации.

Распознавание изображений методами машинного обучения быстро развивается в последние годы вследствие увеличения объема доступных данных и роста производительности вычислительных систем. Впечатляющие достижения методов глубокого обучения в области обработки изображений побуждают испробовать их при решении задачи сегментации радужной оболочки. В некоторых работах, основанных на применении глубокого обучения, предлагается решать задачи локализации, выделения и сравнения признаков при помощи единственной нейронной сети [11]. Подобные методы позволяют добиться высокой точности, однако вычислительная сложность затрудняет их применение в системах малой производительности, таких, как мобильные устройства. В [12] рассматривается иной подход к решению задачи сегментации при помощи глубокого обучения, основанный на предсказании центра зрачка при помощи небольшой сверточной нейронной сети. Несмотря на предпринятые усилия, эта сеть осталась слишком большой для современных мобильных устройств.

В данной работе предлагается метод аппроксимации границ радужки окружностями с допустимой ошибкой не более 5% от диаметра ее области. В основе метода лежит применение сверточной нейронной сети с небольшим количеством параметров, обучаемой при помощи функции потерь, которая применяется для задач классификации.

1. Аппроксимация границ. Решение задачи детектирования радужной оболочки осуществляется как последовательность шагов: сперва применяются две сверточные нейронные сети для определения параметров ограничивающих окружностей, затем при помощи эвристического подхода оценивается качество полученных предсказаний.

1.1. Постановка задачи. Поиск границ радужной оболочки осуществляется, когда известно расположение периокулярной области на изображении. Входными данными для предлагаемого метода является изображение, на котором заведомо содержится глаз. Без ограничения общности будем предполагать, что входное изображение I есть квадратный растр размером $W \times W$ пикселей, внешняя и внутренняя границы радужной оболочки на котором задаются двумя окружностями: (X_i, Y_i, D_i) и (X_p, Y_p, D_p) , где X, Y – координаты центра окружности диаметром D в левосторонней системе координат с центром в верхнем левом углу изображения. Индексы i и p соответствуют границам “склера–радужка” и “радужка–зрачок”. Значения координат центров и диаметров обеих окружностей при этом удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \min\{X, W - X, Y, W - Y\} < \frac{D}{2}, \\ D \leq W \leq 4D. \end{cases} \quad (1.1)$$

Результатом работы описанного метода являются параметры аппроксимирующих границы радужной оболочки окружностей:

- 1) x_i, y_i, d_i – внешняя граница, “радужка–склера”;
- 2) x_p, y_p, d_p – внутренняя граница, “радужка–зрачок”.

Предлагается считать, что параметры окружностей были определены корректно, если абсолютная ошибка детектирования не превышает $\alpha = 5\%$ истинного диаметра радужки на изображении:

$$\begin{aligned} |x_i - X_i| < \alpha D_i, & \quad |x_p - X_p| < \alpha D_i, \\ |y_i - Y_i| < \alpha D_i, & \quad |y_p - Y_p| < \alpha D_i, \\ |d_i - D_i| < \alpha D_i, & \quad |d_p - D_p| < \alpha D_i. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для оценки точности работы метода применяется набор или выборка из N изображений, для каждого из которых возможно определить, удовлетворяют ли предсказанные на нем значения $x_i^k, y_i^k, d_i^k, x_p^k, y_p^k, d_p^k$ неравенствам (1.2). Для обозначения истинных и предсказанных параметров окружностей для k -го по порядку изображения из выборки используются верхние индексы. Со-

вокупность упомянутых параметров применяется для расчета значений следующих мер качества.

1. Средняя абсолютная ошибка оценки диаметра:

$$MAE(D, d) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |D^k - d^k|. \quad (1.3)$$

2. Распределение относительных расстояний между предсказанным и истинным центром окружности:

$$H(\alpha) = \frac{1}{N} \left| \left\{ k : \frac{\rho^k}{D^k} < \alpha, k \in \overline{1, N} \right\} \right|, \quad (1.4)$$

где $\rho^k = \sqrt{(x^k - X^k)^2 + (y^k - Y^k)^2}$, $|\{\cdot\}|$ – мощность множества.

3. Распределение относительных ошибок детектирования параметров окружности:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{N} \left| \left\{ k : \frac{l^k}{D^k} < \alpha, k \in \overline{1, N} \right\} \right|, \quad (1.5)$$

где $l^k = |x^k - X^k| + |y^k - Y^k| + |d^k - D^k|$.

1.2. **Переход к задаче классификации.** В соответствии с постановкой задачи параметры границ радужки могут быть рассчитаны с относительной ошибкой до 5%. Поэтому отсутствует необходимость обрабатывать входные изображения в полном разрешении, и решение задачи может быть получено без потерь точности при помощи масштабированного к меньшему разрешению изображения при условии корректности условий (1.1). Размер такого изображения может быть выбран как минимальный, позволяющий притом допустить относительную ошибку не более 5%. В предположении, что диаметр радужки принимает свое наименьшее возможное значение и с учетом неравенств (1.1), после масштабирования изображения глаза к размеру $W \times W$ диаметр будет равен $D = W/4$. Тогда максимальная допустимая ошибка аппроксимации будет составлять

$$\Delta_{\max} = \alpha D_i = 0.05 \frac{W}{4} = \frac{W}{80}. \quad (1.6)$$

Таким образом, чтобы максимально возможная ошибка составляла не менее одного пикселя, требуется выполнение неравенства $W \geq 80$. Поэтому значение W выбрано равным 80 пикселям, что соответствует наименьшему допустимому значению. Поскольку неравенство (1.1) всегда выполняется, параметры (x, y, d) могут оцениваться как целочисленные. Это означает, что каждый параметр может принимать конечное множество целочисленных значений от 0 до $W - 1$. Каждое из возможных изображений глаз может быть отнесено к одному из $W = 80$ классов: $\{C_k^X\}_{k=0}^{W-1}$, где C_k^X – класс изображений, для которых верно $X \in [k; k + 1)$. Аналогично, можно отнести изображения к одному из классов $\{C_k^Y\}_{k=0}^{W-1}$ значений Y и классов $\{C_k^D\}_{k=0}^{W-1}$ значений D .

Таким образом, задача определения параметров x, y и d может быть сведена к решению трех задач классификации:

- 1) на классы $\{C_k^X\}_{k=0}^{W-1}$;
- 2) на классы $\{C_k^Y\}_{k=0}^{W-1}$;
- 3) на классы $\{C_k^D\}_{k=0}^{W-1}$.

Если для входного изображения I верны следующие утверждения: $I \in C_i^X, I \in C_j^Y, I \in C_k^D$, тогда $x = i, y = j, d = k$ будут корректными параметрами аппроксимации радужки в смысле условий (1.2).

1.3. **Решение задачи классификации.** Для решения задачи классификации в данной работе предлагается использовать сверточную нейронную сеть с небольшим количеством параметров в соответствие с идеями, предложенными в [13]. Особое строение сверточных слоев, описанное в этой статье, упрощает применение подобных нейронных сетей в мобильных

Таблица 1. Строение блока *MobileConvBlock*(M, s)

Слой	Размер ядра	Шаг	Размер входного тензора
Depth-wise свертка	3×3	s	$N \times K \times K$
Batch normalization	—	—	$N \times \frac{K-3}{s} + 1 \times \frac{K-3}{s} + 1$
Активация ReLu	—	—	$N \times \frac{K-3}{s} + 1 \times \frac{K-3}{s} + 1$
Свертка	1×1	1	$N \times \frac{K-3}{s} + 1 \times \frac{K-3}{s} + 1$
Batch normalization	—	—	$M \times \frac{K-3}{s} + 1 \times \frac{K-3}{s} + 1$
Активация ReLu	—	—	$M \times \frac{K-3}{s} + 1 \times \frac{K-3}{s} + 1$

Таблица 2. Строение нейронной сети для аппроксимации границ радужки

Слой	Размер входного тензора
Свертка 3×3	$1 \times 80 \times 80$
МСВ(16, 2)	$16 \times 78 \times 78$
МСВ(32, 1)	$16 \times 38 \times 38$
МСВ(32, 2)	$32 \times 36 \times 36$
МСВ(64, 1)	$32 \times 18 \times 18$
МСВ(64, 2)	$64 \times 16 \times 16$
МСВ(64, 1)	$64 \times 7 \times 3$
МСВ(64, 1)	$64 \times 5 \times 5$
Global Average Pooling	$64 \times 3 \times 3$
Полносвязный слой для x	$64 \times 1 \times 1$
Полносвязный слой для y	$64 \times 1 \times 1$
Полносвязный слой для d	$64 \times 1 \times 1$
SoftMax для x	80
SoftMax для y	80
SoftMax для d	80

устройствах. Основным компонентом, из которых состоит предлагаемая сверточная сеть, является блок операций, описанный в табл. 1. В дальнейшем предлагается называть такую последовательность операций *MobileConvBlock* или МСВ, где M и s — параметры МСВ, которые определяют соответственно количество каналов тензора после применения блока и шаг применения фильтра в первой операции свертки “depth-wise”.

Строение приведенной в данной работе сверточной нейронной сети дано в табл. 2. Гиперпараметры ее архитектуры были выбраны в серии экспериментов как те, которые позволили достичь наилучшей точности решения задачи детектирования на валидационной выборке.

Описанное в табл. 2 строение нейронной сети применяется как для детектирования внешней границы радужной оболочки, так и для внутренней. Будем в дальнейшем называть первую модель *IrisModel*, а вторую — *PupilModel*.

1.4. Применение метода к детектированию. В данной работе предлагается определять параметры границ радужной оболочки в два этапа.

Этап 1. Определяются параметры внешней границы радужной оболочки, что позволяет сократить область поиска окружности зрачка на втором этапе. Входными данными для нейронной сети первого этапа является изображение глаза, результатом — параметры окружности

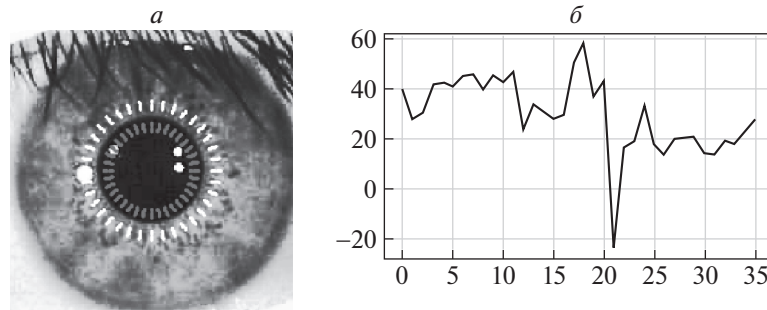


Рис. 1. Оценка качества детектирования зрачка: *a* – области извлечения признаков; *б* – признаковое описание контрастности границы

“радужка–склера” (x_i, y_i, d_i) , полученные как решения трех задач классификации в соответствии с разд. 1.3.

Этап 2. Осуществляется поиск параметров внутренней окружности (x_p, y_p, d_p) . Исходя из особенностей строения человеческого глаза и статистических исследований [3], можно ввести ограничения, связывающие между собой упомянутые выше параметры:

$$D_p \in \left[\frac{1}{7} D_i; \frac{3}{4} D_i \right]. \quad (1.7)$$

Исходя из (1.7), имеет смысл осуществлять поиск зрачка внутри области изображения, заданного как квадратная область, содержащаяся между точками p_1 и p_2 :

$$p_{1,2} = \left(x_i \mp \frac{3}{8} d_i, y_i \mp \frac{3}{8} d_i \right).$$

Полученная область изображения масштабируется к размеру $W \times W$ с учетом (1.6) и подается в сверточную нейронную сеть, которая осуществляет поиск (x_p, y_p, d_p) как решение трех задач классификации в соответствии с разд. 1.3.

1.5. Оценка качества детектирования. Предлагаемый метод детектирования границ радужки, как и ряд других, по построению не позволяет оценить точность получаемой аппроксимации. На практике наличие подобной оценки позволило бы снизить долю ложных срабатываний метода и, следовательно, не допустить некорректно обработанные входные данные на последующие этапы работы системы распознавания.

Здесь предлагается простой эвристический подход к оценке качества аппроксимации границ. Пограничные зоны радужной оболочки характеризует присутствие контраста для областей “радужка–зрачок” и “радужка–склера”, степень выраженности которых может отличаться из-за особенностей строения глаза или изменчивости условий регистрации изображения.

Анализ контрастности пограничных областей позволит получить оценку качества аппроксимации. Граница “радужка–склера” редко видима полностью вследствие перекрытия веками и ресницами, в отличие от области “радужка–зрачок”. При наличии данных о расположении век и ресниц было бы возможно произвести анализ контрастности внешней границы, однако это выходит за рамки предлагаемого в работе метода. Поэтому оценивается только аппроксимация внутренней границы, как изображено на рис. 1.

Построим признаковое описание для контрастности внутренней границы радужки $\theta_p = (x_p, y_p, d_p)$. Выделим на аппроксимирующей окружности 36 точек с шагом в $\phi = 10^\circ$:

$$V = \left\{ \left(x_p + \frac{d_p}{2} \cos(k\phi), y_p + \frac{d_p}{2} \sin(k\phi), k = \overline{0, 35} \right) \right\}.$$

Для каждого пикселя $(x, y) \in V$ с помощью билинейной интерполяции можно оценить средние значения яркости изображения снаружи и внутри данной окружности для соседних с (x, y) пикселей. Оценкой контрастности в окрестности (x, y) будет разность этих средних значений. Совокупность этих оценок позволяет построить признаковое описание $f = F(V; I, \theta_p)$ для аппроксимирующей окружности. Работа данного алгоритма проиллюстрирована на рис. 1.

Таблица 3. Используемые базы изображений радужки

Название	Код	Количество изображений, тыс.	Разрешение
CASIA2-Iris-Lamp	CAS	5	640 × 480
ICE Database	ICE	3	640 × 480
CASIA-Iris-M1-S2	CM2	5	1968 × 1024
CASIA-Iris-M1-S3	CM3	1	1920 × 1920
ES dataset	ES	25	640 × 480
MMU GASPFA	MMU	2	320 × 286
Raspberry DB	RAS	1	640 × 480

Пусть $q \in [0; 1]$ – величина, принимающая значение 0 для идеальной аппроксимации окружностями и 1 – для ошибки сегментации. Построим алгоритм, вычисляющий:

$$q = a_p(f; \theta_p) = a_p(I; \theta_p). \quad (1.8)$$

Рассмотрим задачу построения такого алгоритма как задачу бинарной классификации и воспользуемся методом логистической регрессии. Обучающую выборку можно сформировать, используя истинные параметры аппроксимации границы “радужка–зрачок” для объектов нулевого класса. Признаковое описание для объектов положительного класса можно получить, используя заведомо некорректные значения координаты центра и диаметра зрачка. Для повышения робастности подобной оценки качества также предлагается применять эквализацию гистограммы входного изображения I перед построением признакового описания f .

2. Результаты. Для обучения и тестирования моделей глубокого обучения, осуществляющих поиск параметров границ радужки, применялись данные открытых баз изображений. Используемые базы можно разделить на две группы. Первую составляют базы, содержащие изображения высокого разрешения CASIA 2 [14], ES, ICE [15] и MMU [16], а также UBIRIS v.1 [17], имеющие примеры изображений низкого качества. Вторую группу составляли изображения низкого разрешения, характерные для растров, которые получаются с небольших камер, встраиваемых в мобильные устройства: CASIA Mobile [18] и собранная вручную база изображений Raspberry DB. База изображений CASIA Mobile составлена из трех частей: M1, M2 и M3. В данной работе, однако, были использованы только последние две части, поскольку первая содержит изображения недопустимо низкого в соответствии с (1.6) разрешения. База изображений Raspberry DB была получена вручную при помощи одноименного микрокомпьютера, оборудованного совместимой инфракрасной камерой с активной инфракрасной подсветкой. Более подробная информация об упомянутых базах изображений приведена в табл. 3, а примеры изображений из каждой использованной базы – на рис. 2.

Целью поставленного вычислительного эксперимента была проверка качества работы предлагаемого метода на изображениях разного качества и из разных доменов. Параметры истинных аппроксимирующих границы радужки окружностей (X_i, Y_i, D_i) и (X_p, Y_p, D_p) для баз были получены с помощью разметки человека-эксперта.

2.1. Подготовка данных. Все эксперименты с обучением нейронных сетей проводились на обучающей выборке, составленной из изображений баз CASIA2, CASIA Mobile S2 и ES. В качестве валидационной выборки были применены базы изображений MMU, CASIA Mobile S3, а также половина изображений из базы ICE. В качестве отложенной тестовой выборки использовалась другая половина изображений базы ICE и база изображений низкого качества UBIRIS v.1.

Во время обучения для повышения обобщаемости модели применялись аугментации случайной яркостной коррекции, наложения случайного пуассоновского шума, случайного аффинного поворота, случайного отображения по горизонтали и извлечения случайной области внутри изображения. Масштабирование изображений к целевому разрешению (1.6) производилось после описанных преобразований. Обучение моделей осуществлялось методом стохастического градиентного спуска с адаптивным моментом. Первоначальное значение темпа обучения составляло 0.001 и уменьшалось экспоненциально в 0.9 раза каждые 10 эпох.

2.2. Процедура обучения и подбор гиперпараметров. Архитектура предлагаемых нейронных сетей такова, что их выходной слой может содержать произвольное

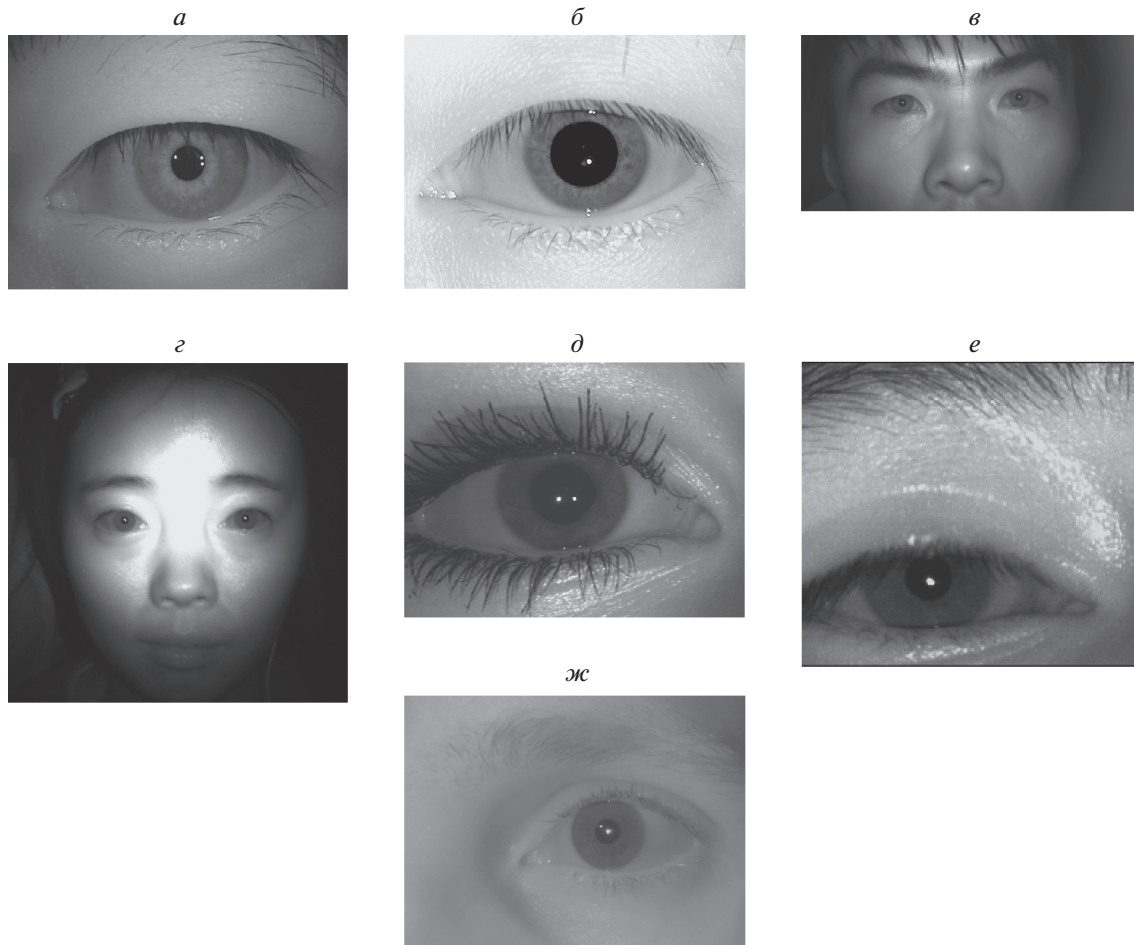


Рис. 2. Примеры изображений используемых для обучения и тестирования: CAS (а); ICE (б); CM2 (в); CM3 (г); ES (д); MMU (е); RAS (ж)

количество нейронов, а значит, осуществлять предсказание произвольного количества классов для координат центра и диаметра. В случае, если количество предсказываемых классов будет превосходить размеры изображения, можно утверждать, что модель будет обучена находить параметры границ радужки с субпиксельной точностью. Однако в данной работе подобный эксперимент не был произведен, поскольку постановка задачи допускает некоторую степень неточности решения задачи детектирования при условии, что применяемая сверточная нейронная сеть будет сравнительно небольшой. Для поиска оптимального размера выходных слоев провели числительный эксперимент. Осуществлялось сравнение моделей, предсказывающей количество классов, соразмерное разрешению входного изображения “original” и уменьшенное вдвое “reduced”. Постановка этого эксперимента имела смысл ввиду большого количества возможных искажений видимого качества изображений и неизбежных ошибок экспертной разметки. Каждая модель была обучена на протяжении 50 эпох, после чего проводилось сравнение по мере качества (1.4) со значением $\alpha = 0.05$. Большей точности на валидационной выборке достигли модели с размерами выходных слоев “original”. В дальнейших экспериментах были использованы соответствующие их версии. Отличия по качеству решения задачи для IrisModel составили 85.3% против – 60.9%, для PupilModel – 99.7% против – 99.1%. Заметим, что разные версии моделей PupilModel практически не отличаются по точности решения задачи аппроксимации границы зрачка, что можно объяснить тем, что поиск производится уже внутри выделенной области радужки, тогда как IrisModel вынуждена искать положение центра глаза на изображении периокулярной области, которая, как правило, более вариабельна.

После выбора размеров выходных слоев обе модели обучались на протяжении 128 эпох на независимых выборках. Полученные значения мер качества (1.3)–(1.5) приведены в табл. 4.

Таблица 4. Качество моделей на валидационной и тестовой выборках

Модель	Выборка	$H(0.05)$	$H(0.1)$	$H(0.2)$	MAE
		%			
IrisModel	Валидация	88.03	99.76	99.9	0.54
	Тест	90.1	99.5	99.9	0.43
PupilModel	Валидация	99.76	99.4	99.9	0.7
	Тест	95.48	99.6	99.9	0.9

Таблица 5. Результаты применения комбинации моделей

База изображений	$Q_p(0.05)$	$Q_i(0.05)$	$Q_p^a(0.05)$	$Q_i^a(0.05)$	FRR
	%				
Raspberr DB	95.5	98.34	97.4	98.34	0.2
CASIA Mobile S3	97.9	98.5	98.1	98.6	0.9
UBIRIS v.1	85.8	95.3	98.7	98.1	9.1
ICE	97.6	95.8	98.6	95.8	0.7
MMU	88.3	98.5	90.2	98.8	0.2

2.3. Применение моделей в комбинации. Детектирование границ радужной оболочки на изображении глаза осуществляется в два этапа, как описано в разд. 1.4. Качество работы комбинации двух моделей оценивается при помощи меры качества (1.5). В данном эксперименте применялись следующие базы изображений: CASIA Mobile S3, Raspberr DB, UBIRIS v.1, MMU и ICE как составляющие валидационной и тестовой выборок.

Определение точности комбинации моделей IrisDet и PupilDet было проведено как совместно с применением алгоритма оценки качества аппроксимации границы $a_p(I; \theta_p)$ (1.8), так и без него (табл. 5). Для изображений, где найденная окружность “зрачок–радужка” была помечена $a_p(I; \theta_p)$ как ошибочная, изображение не учитывалось при расчете меры качества (1.8). Скорректированные таким образом значения данной меры качества приведены в столбцах Q_p^a и Q_i^a . Доля объектов с неверными метками ошибочной аппроксимации внутренней границы радужки рассмотрена в столбце FRR.

Для оценки точности метода на мобильной базе изображений CASIA Mobile S3 требовалось бы применение постороннего алгоритма выделения области глаза на входном изображении, поскольку это изображение содержит обширную область лица участника. В данной работе предложен иной способ оценки точности, использующий искусственное создание выборки изображений лица с применением экспертной разметки. Для каждого изображения лица из данной базы извлекается пять случайных прямоугольных областей глаза следующим образом:

- 1) размер области глаза выбирается случайно из равномерного распределения $U(2D_i, 4D_i)$;
- 2) координаты центра области (x, y) выбираются случайно из равномерного распределения $U(-D_i, D_i)$.

Таким образом удается оценить точность детектирования радужки в условиях ошибочной работы детектора области глаза.

Приведенные результаты вычислительного эксперимента демонстрируют снижение качества работы предлагаемого метода на базах изображений низкого качества, таких, как UBIRIS. Данная база содержит изображения с низкой контрастностью на границе “зрачок–радужка”, что также подтверждает высокий уровень ложных срабатываний предложенного алгоритма $a_p(I; \theta_p)$ в столбце FRR, что, несомненно, усложняет задачу аппроксимации границ радужки. Обучающая выборка предлагаемого метода имеет сравнительно малое количество примеров изображений глаз, видимое качество которых подобно изображениям UBIRIS. Наконец, база изображений UBIRIS отличается не только низким контрастом границы “зрачок–радужка”, но и распределением размеров зрачка относительно радужки: большая часть изображений содержит в себе

Таблица 6. Результаты применения комбинации моделей с последующим уточнением

База изображений	$Q_p(0.05)$	$Q_t(0.05)$	$Q_p^a(0.05)$	$Q_t^a(0.05)$	FRR
	%				
Rasbberri DB	96.1	98.3	97.9	98.9	0.1
CASIA Mobile S3	98.3	98.7	98.7	99.0	0.3
UBIRIS v.1	84.5	97.5	92.7	98.9	5.9
ICE	97.6	95.8	98.6	95.8	0
MMU	89.2	98.8	92.3	99.2	0.1

зрачки малого размера, сопоставимого по величине с бликом от осветителя. Низкая точность работы детектора зрачка на базе MMU вызвана низким разрешением исходных изображений и аналогично UBIRIS – большим количеством изображений с малым видимым размером зрачка.

2.4. Применение моделей с последующим уточнением. Помимо описанного в предыдущем разделе способа применения комбинации моделей, было проанализировано использование последующего уточнения получаемой аппроксимации границ с помощью метода [2] со значительно суженной областью поиска. По построению предлагаемый метод имеет ошибку детектирования не выше 5% от истинного диаметра радужки. Таким образом, область поиска параметров границы $\hat{\theta} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{d})$ при уточнении методом [2] можно определить следующим образом в зависимости от первичной аппроксимации $\theta = (x, y, d)$:

$$\hat{x} \in [x - 0.05D_i; x + 0.05D_i],$$

$$\hat{y} \in [y - 0.05D_i; y + 0.05D_i],$$

$$\hat{d} \in [d - 0.05D_i; d + 0.05D_i].$$

Вычислительная стоимость поиска внутри такой области пространства параметров будет сравнительно невысокой. Результаты применения предлагаемого метода с уточнениями даны в табл. 6.

Уточнение границ радужной оболочки при помощи классического метода [2] позволяет повысить качество работы комбинации методов и снизить долю ложных срабатываний алгоритма $a_p(I; \theta_p)$ на базе UBIRIS, вызванных низкой контрастностью на границе “зрачок–радужка” и ошибками детектирования зрачка. Однако прирост точности детектирования для границы зрачка нельзя назвать существенным. Аналогично для базы изображений MMU применение метода [2] для уточнения границы зрачка не привело к значительным улучшениям, поскольку данный метод работает неустойчиво на изображениях с небольшими по величине зрачками.

2.5. Сравнение с существующими методами. Предлагаемый метод детектирования границ радужной оболочки на изображении глаза также сравнивался с иными методами, описанными в [2–4, 19, 20]. Сравнение производилось с применением базы изображений MMU при помощи следующих мер качества:

- 1) относительная ошибка детектирования центров:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{(y^k - Y^k)^2 + (x^k - X^k)^2};$$

- 2) относительная ошибка детектирования радиусов:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |r^k - R^k|.$$

Помимо точности детектирования в сравнение было включено медианное время выполнения (t_{c+r}) на одном ядре процессора Snapdragon 845. Результаты приведены в табл. 7.

Таблица 7. Результаты сравнения с существующими методами

Мера качества	Метод детектирования						
	Уильдс	Дугман	Мазек	Ма	Ганькин	CNN	CNN и уточнение
ε_c	3.15	2.61	4.98	3.92	0.97	1.4	1.3
ε_r	6.12	4.39	5.15	5.39	1.13	1.9	1.7
t_{c+r} (ms)	379.61	523.14	97.52	363.64	106.60	8	10

Заключение. Предложен метод детектирования параметров, аппроксимирующих границы радужки окружностей для мобильных биометрических систем. Метод состоит из двух сверточных нейронных сетей небольшого размера. Предлагаемый подход достигает показателей точности детектирования, сравнимых с описанными в современной литературе, однако обладает существенно меньшим временем выполнения на современных мобильных процессорах. Метод может быть применен для получения грубой оценки границ, которая может быть использована в дальнейшем для ее улучшения иными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вельховер Е.С., Шульпина Н.Б., Алиева З.А., Ромашов Ф.Н. Иридодиагностика. М.: Медицина, 1988. 240 с.
2. Daugman J. How Iris Recognition Works // Proc. Intern. Conf. on Image Processing. Rochester, N.Y., USA, 2002. P. 33–36.
3. Ганькин К.А., Гнеушев А.Н., Матвеев И.А. Сегментация изображения радужки глаза, основанная на приближенных методах с последующими уточнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 2. С. 80–94.
4. Wildes R.P. Iris Recognition: An Emerging Biometric Technology // Proceedings of IEEE. 1997. V. 85. № 9. P. 1348–1363.
5. Матвеев И.А. Поиск центра радужки на изображении методом Хафа с двумерным пространством параметров // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 6. С. 44–51.
6. Szczepański A., Miształ K., Saeed K. Pupil and Iris Detection Algorithm for Near-infrared Capture Devices // IFIP Intern. Conf. on Computer Information Systems and Industrial Management. Springer, 2015. P. 141–150.
7. Santini T., Fuhl W., Kasneci E. Pure: Robust Pupil Detection for Real-time Pervasive Eye Tracking // Computer Vision and Image Understanding. 2018. V. 170. P. 40–50.
8. Alkazzaz A.A.J., Wang K., Aladool G.J. M. Precise Pupil Boundary Detection Using Angular Integral Projection and Active Contour Model // Proc. Fourth Intern. Conf. on Engineering & MIS. Istanbul, Turkey, 2018. P. 62.
9. Смирнов Д.А., Матвеев И.А. Определение границ век на изображении глаза методом активных контуров // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. 2006. Т. 25. № 2. С. 200–207.
10. Matveev I., Simonenko I. Detecting Precise Iris Boundaries by Circular Shortest Path Method // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. V. 24. № 2. P. 304–309.
11. Gangwar A., Joshi A., Joshi P., Raghavendra R. Deepirisnet2: Learning Deep-iris-codes from Scratch for Segmentation-robust Visible Wavelength and Near Infrared Iris Recognition // arXiv preprint arXiv:1902.05390. 2019. Available at: <https://arxiv.org/abs/1902.05390>.
12. Fuhl W., Santini T., Kasneci G., Kasneci E. Pupilnet: Convolutional Neural Networks for Robust Pupil Detection // arXiv preprint arXiv:1601.04902. 2016. Available at: <https://arxiv.org/abs/1601.04902>.
13. Howard A., Zhu M., Chen B., Kalenichenko D., Wang W., Weyand T., Andreetto M., Adam H. Mobilenets: Efficient Convolutional Neural Networks for Mobile Vision Applications // arXiv preprint arXiv:1704.04861. 2017. Available at: <https://arxiv.org/abs/1704.04861>.
14. Chinese Academy of Sciences Institute of Automation. CASIA-IrisV2: CASIA-Iris-Lamp Image Database. Available at: <http://www.cbsr.ia.ac.cn/IrisDatabase.htm>.
15. ICE Database. Available at: <http://www.nist.gov/itl/iad/ig/ice.cfm>.
16. Ho C.C., Ng H., Tan W.H., Ng K.W., Tong H.L., Yap T.T.V., Chong P.F., Eswaran C., Abdullah J. MMU GASPPFA: A COTS Multimodal Biometric database // Pattern Recognition Letters. 2013. V. 34. № 15. P. 2043–2050.
17. Proença H., Alexandre L.A. Ubiris: A Noisy Iris Image Database // Intern. Conf. on Image Analysis and Processing. Springer, 2005. P. 970–977.
18. Chinese Academy of Sciences Institute of Automation. Casia-mobile Database. Available at: <http://www.cbsr.ia.ac.cn/IrisDatabase.htm>.
19. Masek L., Kovesi P. MATLAB Source Code for a Biometric Identification System Based on Iris Patterns // Master Thesis. The School of Computer Science and Software Engineering. The University of Western Australia, 2003.
20. Ma L., Tan T., Wang Y., Zhang D. Local Intensity Variation Analysis for Iris Recognition // Pattern Recognition. 2004. V. 37. № 6. P. 1287–1298.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 681.516.7

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ ПРОСТЫХ ПУТЕЙ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ. I. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

© 2021 г. И. А. Головинский

Северо-Кавказский федеральный ун-т, Ставрополь, Россия

e-mail: igolovinskij@gmail.com

Поступила в редакцию 14.08.2019 г.

После доработки 28.05.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматривается вычисление множества всех простых путей, соединяющих две вершины неориентированного графа. Также исследуются более общие задачи соединения всеми простыми путями вершин, принадлежащих непересекающимся множествам вершин в графе. Устанавливается связь этих задач с нахождением компонент вершинной двусвязности и мостов графа и на этой основе даются их полные решения. Предлагаются упрощающие приемы вычисления множеств путей, основанные на добавлении к анализируемому графу вспомогательных ребер и вершин. Приводятся примеры использования разработанного аппарата в задачах оперативного управления транспортными сетями.

DOI: 10.31857/S0002338821010066

Введение. Когда речь идет о нахождении путей в графах, часто имеют в виду кратчайшие пути, в том числе с учетом их веса. Методы вычисления кратчайших путей принадлежат к числу популярных разделов компьютерной математики. Вместе с тем для управления транспортными сетями актуальны задачи отыскания не только кратчайших, но вообще всех возможных простых путей, и не только между двумя вершинами графа, но также между непересекающимися множествами вершин. Это особенно важно для электрических сетей, поскольку в передаче электроэнергии от одного узла электросети к другому участвуют все электрические цепи, соединяющие эти два узла. Применения разработанного аппарата, рассмотренные в статье, относятся в основном к сфере оперативно-диспетчерского управления электрическими сетями.

Используя накопленный опыт и интуицию, диспетчер в определенных сложных ситуациях может находить решения быстрее и точнее, чем при помощи существующих формальных методов. Но для этого он должен располагать максимально полной информацией о процессах, протекающих в энергосистеме в реальном времени, и эту информацию следует предоставлять ему в форме, наиболее удобной для восприятия [1, 2]. В частности, диспетчеру нужно обеспечить возможность видеть на мониторе или видеостене все электрические цепи, соединяющие группы узлов, которые он укажет. Множество таких цепей – простых путей в графе – нужно представлять в компактной форме, удобной также для автоматических приложений. Этой цели служит предложенное в статье понятие *графа путей*.

1. Постановка задачи. Пусть G – неориентированный граф. Будем решать следующие четыре задачи.

Задача I. Найти совокупность всех простых путей, соединяющих две вершины графа G .

Задача II. Найти совокупность всех простых путей, соединяющих вершину α графа G со всеми вершинами заданного подмножества S множества вершин этого графа, где $\alpha \notin S$.

Задача III. Найти совокупность всех простых путей, соединяющих попарно вершины заданного подмножества множества вершин графа G .

Задача I является частным случаем как задачи II, так и задачи III. В свою очередь две последние задачи представляют частные случаи следующей.

Задача IV. Найти совокупность всех простых путей, соединяющих попарно вершины разных множеств, принадлежащих заданному семейству непересекающихся подмножеств множества вершин графа G .

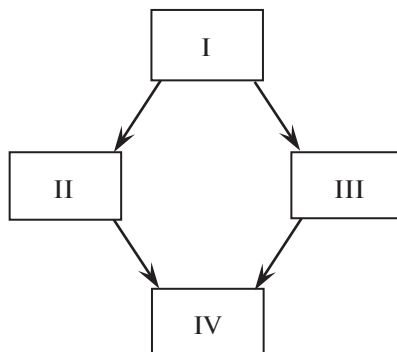


Рис. 1. Соотношения по уровню общности между задачами соединения вершин графа простыми путями

Все четыре задачи актуальны для приложений. Будем называть их *задачами соединения вершин графа простыми путями*. Соотношение между ними в смысле уровня общности показано на рис. 1. Стрелки указывают направления обобщения.

Вычисления множеств простых путей, о которых говорится в задачах I–IV, производятся как для отображения этих путей на мониторах оперативно-диспетчерского персонала и на видеостенах в центрах диспетчерского управления, так и для использования в программных приложениях. Предмет настоящей статьи составляют методы построения общих решений этих задач и их приложения к управлению транспортными сетями. Методы общих решений основаны на формулируемых в статье теоремах, доказательства которых даны в Приложении.

Автор не нашел в литературе общепринятых алгоритмов решения задач I–IV. В электронной энциклопедии [3] упоминается задача I, которая названа там “классической”, но никаких ссылок на публикации по ней не дано. На русскоязычных и зарубежных интернет-форумах программистов неоднократно встречается задача I и некоторые случаи задачи IV [4–6]. На форумах и в блогах имеется много советов и рецептов по их решению, среди которых можно встретить и правильные, но без математических обоснований и без ссылок на публикации [7]. Для профессионального математика, владеющего теорией графов, распознавание верных и работоспособных предложений среди этой массы и проверка их корректности может не составить большой проблемы. Однако это, как правило, не под силу обычному программисту, не освоившему теорию графов достаточно глубоко. Обсуждения на форумах свидетельствуют о необходимости систематического изложения теории решений задач I–IV.

В статье рассматриваются только неориентированные графы, не содержащие петель и параллельных ребер. Слово “неориентированный” часто будем опускать. Для однозначности понимания терминов напомним определения некоторых понятий теории графов.

Путем в неориентированном графе называется подграф, образованный объединением ребер, принадлежащих последовательности, в которой каждая пара соседних ребер имеет ровно одну общую вершину. Если α и β – концевые вершины¹ этого пути как подграфа, то говорят, что путь соединяет α и β . Путь определяет последовательность вершин, проходимых при движении по нему от α до β . Путь называется простым, если вершины в этой последовательности не повторяются. Это означает, в частности, что концевые вершины простого пути различны. Если $\alpha = \beta$, то путь от α до β называется циклом графа. Цикл называется простым, если при его однократном обходе промежуточные вершины не повторяются.

Неориентированный связный граф, имеющий более двух вершин, называется вершинно двусвязным, если после удаления какой-либо его вершины (вместе с инцидентными этой вершине ребрами) оставшийся граф будет связным. Неориентированный связный граф называется реберно двусвязным, если после удаления какого-либо ребра оставшийся граф будет связным. Вершинно двусвязный граф является реберно двусвязным. Реберно двусвязные графы специально в статье не выделяются, поэтому вершинно двусвязные графы далее именуются, как правило, просто двусвязными. Это соответствует распространенной практике.

Максимальный двусвязный подграф неориентированного графа называется его компонентой двусвязности. Если ребро графа не принадлежит никакой компоненте двусвязности графа,

¹ Вершина неориентированного графа называется концевой, если ей инцидентно ровно одно ребро графа.

оно называется мостом. Блоком графа называется его подграф, являющийся либо компонентой двусвязности, либо мостом (вырожденный блок). Два блока графа могут иметь не более одной общей вершины. Общая вершина двух блоков графа называется шарниром или точкой сочленения (блоков) графа.

В статье показано, что решения задач I–IV сводятся к вычислению блоков графа G – компонент его вершинной двусвязности и мостов. Это вычисление будем называть также анализом двусвязности графа G . Известный алгоритм анализа двусвязности графов разработали Р.Э. Тарьян и Дж.Э. Хопкрофт [8–10]. Этот алгоритм излагается практически во всех руководствах, где рассматривается анализ двусвязности графов [11–18].

2. Операции над графами. Для сокращения и упрощения записи решений задач в статье применяется символика алгебры графов. Используются, прежде всего, обычные операции объединения, пересечения и разности (вычитания) графов. Они обозначаются символами “+”, “&” и “–” соответственно. Применение данных символов вызвано тем, что простейший метод программирования операций над графами в объектно-ориентированных языках (таких, как C++) основан на возможности переопределять смысл этих и некоторых других символов операций [19, 20]. Преобразование алгоритма в компьютерную программу облегчается, когда операции над графами выражены в нем такими символами.

Кроме того, используются четыре специальные операции над неориентированными графами:

$A \div B$ – оголение графа A посредством графа B (удаление ребер графа B из графа A);

$A * B$ – приращение графа A в графе B ;

$A \wedge B$ – простое (односвязное) замыкание графа A в графе B ;

$A \parallel B$ – двусвязное замыкание графа A в графе B .

Используемые здесь символы бинарных операций “ \div ”, “ $*$ ”, “ \wedge ” и “ \parallel ” тоже допускают переопределение смысла в языке C++. Для графов эти операции определяются следующим образом.

Операция $A \div B$ оголения² графа A посредством графа B состоит в удалении из графа A : 1) всех ребер графа $A \& B$ и 2) каждой такой вершины графа $A \& B$, которая становится изолированной в остающемся от A графе после удаления из A всех ребер графа $A \& B$. Удаляются в том числе все изолированные вершины графа A , принадлежащие графу B .

При обычном вычитании графов $A - B$ из графа A удаляются все вершины графа B , а также все ребра графа A , инцидентные этим вершинам. При оголении $A \div B$ графа A посредством графа B из A удаляются все ребра графа B , а также каждая такая вершина графа $A \& B$, у которой удалены все инцидентные ей ребра графа A .

Приращение $A * B$ графа A в графе B определяется как объединение графа A со всеми такими ребрами графа B , у которых хотя бы один конец принадлежит A . При этом каждое ребро рассматривается как граф, состоящий из одного этого ребра и двух вершин – концов данного ребра.

Простое (односвязное) замыкание $A \wedge B$ графа A в графе B (или посредством B) есть по определению объединение графа A со всеми компонентами связности графа B , имеющими непустое пересечение с A . Если α – вершина графа G , то $\alpha \wedge G$ есть компонента связности графа G , содержащая вершину α . Операция простого замыкания графов используется во многих алгоритмах анализа топологии электрических схем [21–23]. Из определения операции $A \wedge B$ вытекает ее выражение через операцию приращения:

$$A \wedge B = (((A * B) * B) * B) * B \dots$$

В правой части этого равенства приращение повторяется до стабилизации результата.

Двусвязное замыкание $A \parallel B$ графа A в графе B (или посредством B) определяется как объединение графа A со всеми компонентами вершинной двусвязности графа $A + B$, содержащими ребра графа A . Это эквивалентно объединению графа A со всеми простыми циклами графа $A + B$, имеющими общее ребро с A . Граф $A \parallel B$ равен объединению всех блоков графа $A + B$, содержащих ребра A , и всех изолированных вершин графа A . Если x – ребро графа G , то $x \parallel G$ есть блок графа G , содержащий ребро x .

Пустой граф обозначаем символом \emptyset .

² Операция оголения в некотором смысле двойственна обычной разности графов. Обычная разность $X = A - B$ есть наибольший подграф графа A , удовлетворяющий равенству $X \& B = \emptyset$. Операция оголения $Y = A \div B$ дает наименьший подграф Y графа A , удовлетворяющий равенству $Y + B = A + B$.

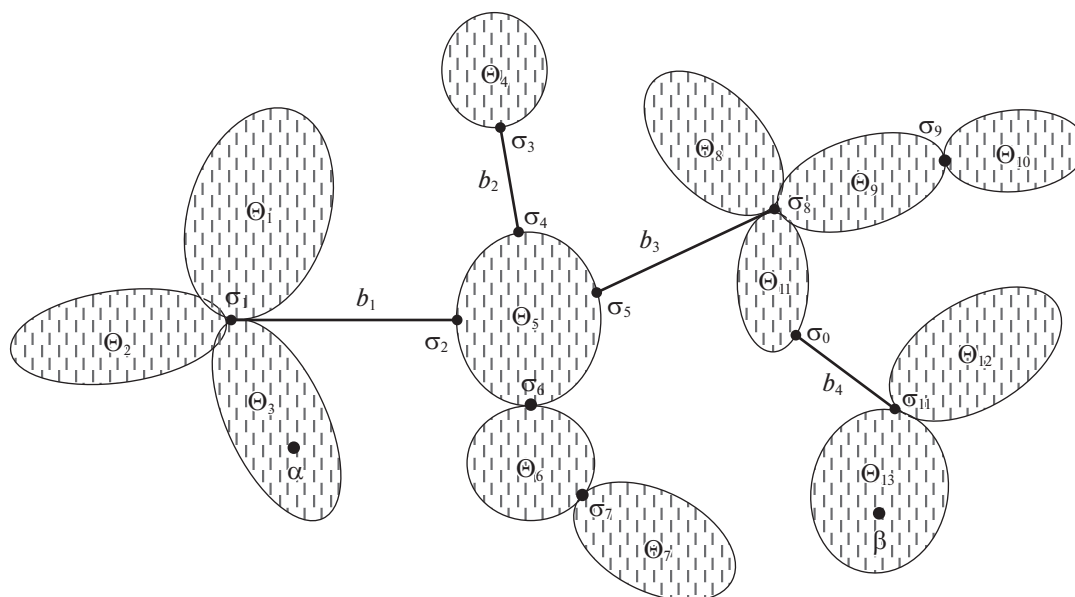


Рис. 2. Пример блоковой декомпозиции графа

3. Выражение графа простых путей, соединяющих две вершины графа, через структуру двусвязности графа. Пусть $\{\Theta_i\}$ – множество блоков графа G , $\{\sigma_j\}$ – множество его шарниров. Построим граф $BC(G)$, множеством вершин которого является $\{\Theta_i\} + \{\sigma_j\}$, т.е. каждая вершина графа $BC(G)$ будет представлять либо блок графа G , либо шарнир. Ребро графа $BC(G)$ по определению есть пара (Θ, σ) , когда шарнир σ принадлежит блоку Θ . Граф $BC(G)$ является деревом [24, с. 141]. Это дерево называется деревом блоков и шарниров графа G [13, 25]. Тройку $\{\{\Theta_i\}, \{\sigma_j\}, BC(G)\}$ будем называть *структурой двусвязности* графа G или его *блоковой структурой*.

На рис. 2 показан пример декомпозиции связного графа G на блоки: компоненты вершинной двусвязности $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{13}$ и мосты b_1, b_2, b_3, b_4 (сам граф G не показан). Блоки соединены между собой шарнирами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{11}$. Дерево блоков и шарниров $BC(G)$ графа G показано на рис. 3.

Число простых путей, которые нужно найти в задачах соединения простыми путями вершин графа, растет, вообще говоря, очень быстро относительно роста числа вершин или ребер графа. Например, нетрудно подсчитать, что в полном n -вершинном графе K_n число простых путей только длины $n-1$ (максимально возможной в этом графе) между двумя вершинами равно $(n-2)!$. Необходимо какой-то более операбельный способ представления множества искомых путей, чем просто их перечисление. Разумный способ такого представления состоит в объединении всех этих путей, как графов. Получаемый граф будем называть *графом путей* для соответствующей из задач I–IV. Как показано ниже, из него несложно извлечь любой простой путь, участвующий в объединении.

Понятие графа путей дает практически работоспособное решение вопроса об адекватном представлении множеств простых путей, определяемых в задачах I–IV. Во всех приложениях, где требуется получить множество простых путей как решение одной из задач типа I–IV, достаточно построить именно граф этих простых путей.

В случае задачи I графом путей будет объединение всех простых путей в графе G , соединяющих вершины α и β этого графа. Этот граф путей обозначим $P(G, \alpha, \beta)$. Будем называть его *графом простых путей от α до β* , а также *графом простых путей, соединяющих α и β* . Также будем называть этот граф *общим решением задачи I для вершин α и β* . Всякий простой путь, соединяющий эти две вершины в графе G , будем называть *частным решением задачи I*. Если вершины α и β принадлежат разным компонентам связности графа G , то считаем граф $P(G, \alpha, \beta)$ пустым.

Следующая теорема устанавливает, что граф $P(G, \alpha, \beta)$ строится посредством декомпозиции графа G на блоки.

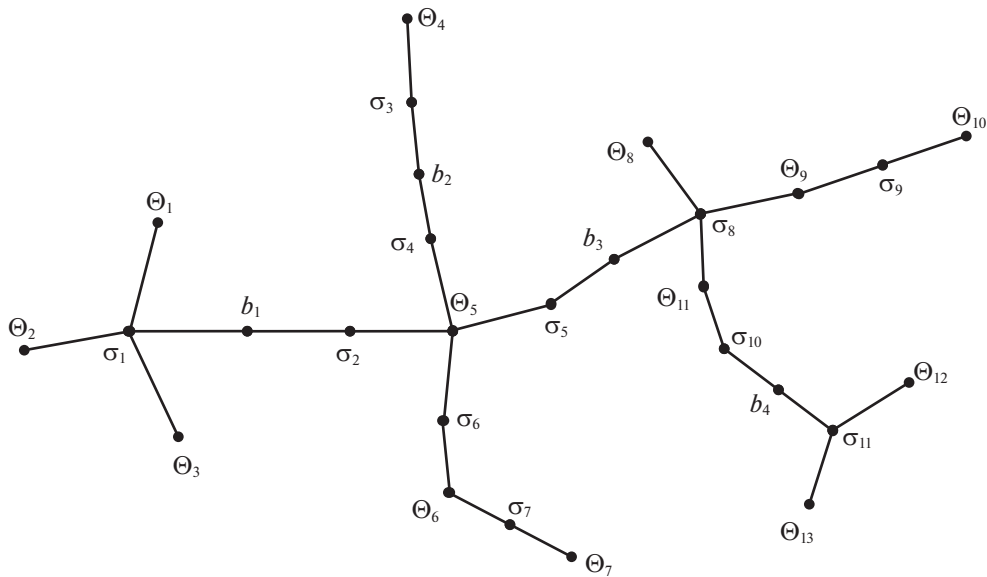


Рис. 3. Дерево блоков и шарниров графа, блоковая декомпозиция которого приведена на рис. 2

Т е о р е м а 1. Пусть L – простой путь в связном графе G , соединяющий вершины α и β ; $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ – множество всех тех блоков графа G , каждый из которых содержит хотя бы одно из ребер пути L . Тогда:

- 1) семейство блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ не зависит от выбора пути L из множества всех простых путей, соединяющих вершины α и β : оно однозначно определено парой α и β ;
- 2) семейство блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ можно линейно упорядочить в такую цепочку, в которой первый и последний блоки содержат вершины α и β соответственно, а пересечение каждых двух соседних блоков в цепочке состоит из их общего шарнира;
- 3) граф простых путей, соединяющих α и β , есть объединение блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$:

$$P(G, \alpha, \beta) = \Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n. \tag{3.1}$$

Итак, для любой пары вершин α и β неориентированного графа G граф $P(G, \alpha, \beta)$ простых путей, соединяющих эти две вершины, есть последовательная цепочка блоков графа G , соединенных шарнирами. Эта цепочка блоков определяется только тем, каким блокам графа G принадлежат вершины α и β .

Из теоремы 1 следует также, что если вершина α является шарниром графа G , то графу путей $P(G, \alpha, \beta)$ принадлежит только один из блоков, которым принадлежит этот шарнир. То же относится к вершине β .

С л е д с т в и е 1 т е о р е м ы 1. Если вершины α и β графа G принадлежат одному блоку Θ этого графа, то граф простых путей $P(G, \alpha, \beta)$ совпадает с блоком Θ :

$$P(G, \alpha, \beta) = \Theta. \tag{3.2}$$

Ребро неориентированного графа принадлежит ровно одному блоку. Блок графа G , содержащий ребро $x = (\alpha, \beta)$, будем обозначать $\Theta(G, x)$ или $\Theta(G, (\alpha, \beta))$. Из следствия 1 теоремы 1 вытекает соотношение, связывающее этот блок с графом простых путей $P(G, \alpha, \beta)$.

С л е д с т в и е 2 т е о р е м ы 1. Пусть α и β – концы одного ребра графа G . Тогда блок $\Theta(G, (\alpha, \beta))$ графа G , содержащий ребро (α, β) , совпадает с графом простых путей $P(G, \alpha, \beta)$:

$$\Theta(G, (\alpha, \beta)) = P(G, \alpha, \beta). \tag{3.3}$$

Ребро графа не может принадлежать двум разным блокам. Поэтому блок графа однозначно определяется заданием какого-либо его ребра. Равенство (3.3) выражает блок графа, содержащий заданное ребро, через граф простых путей, соединяющих концы этого ребра. А равенство (3.1), наоборот, выражает граф простых путей, соединяющих две вершины графа, через совокуп-

ность блоков графа. Сочетание этих двух формул дает полное выражение соответствия между блоками графа и подграфами простых путей, соединяющих пары вершин в этом графе.

Следствие 3 теоремы 1. Пусть L – простой путь, соединяющий вершины α и β графа G . Тогда

$$P(G, \alpha, \beta) = L \parallel G. \quad (3.4)$$

Эта формула непосредственно следует из теоремы 1 и определения операции двусвязного замыкания. Она дает простое выражение общего решения $P(G, \alpha, \beta)$ задачи I через произвольно взятое частное решение L этой задачи.

Пусть $x = (\alpha, \beta)$. Тогда ребро x есть простой путь, соединяющий вершины α и β графа G . Из формулы (3.4) получаем

$$P(G, \alpha, \beta) = x \parallel G. \quad (3.5)$$

4. Выражение графа простых путей, соединяющих множества вершин графа, через структуру двусвязности графа. Пусть Q – подмножество множества вершин связного графа H ; T – дерево, являющееся подграфом графа H . Будем говорить, что дерево T соединяет множество вершин Q , если $Q \subseteq T$ и каждая концевая вершина дерева T принадлежит множеству Q . Дерево T – один из минимальных подграфов графа H в множестве связных подграфов последнего, содержащих все вершины множества Q . Если дерево T , соединяющее множество вершин Q , есть простой путь, то будем говорить, что простой путь T соединяет множество вершин Q .

Пусть S – подмножество множества вершин связного графа G ; $BC(G)$ – дерево блоков и шарниров графа G . Как будет показано далее, для решения задач II–IV нужно выделить в этом дереве такое минимальное поддереве, которое будет представлять все блоки графа G , содержащие вершины множества S . Для этого введем понятие вершины дерева $BC(G)$, релевантной множеству S .

Вершину τ дерева $BC(G)$ будем называть релевантной подмножеству S множества вершин графа G , если выполнено одно из двух условий:

- τ представляет шарнир графа G , принадлежащий множеству S ;
- τ представляет такой блок графа G , который содержит хотя бы одну вершину множества S , не являющуюся шарниром графа G .

Пусть Q – множество вершин дерева $BC(G)$, релевантных множеству S . Обозначим через $Z(G, S)$ поддереве дерева $BC(G)$, соединяющее множество Q . Дерево $Z(G, S)$ может содержать также вершины графа $BC(G)$, не релевантные множеству S . Эти вершины не будут концевыми в дереве $Z(G, S)$. Это могут быть, во-первых, вершины, представляющие шарниры графа G , не принадлежащие множеству S . Во-вторых, это могут быть вершины, представляющие такие блоки графа G , которые не содержат вершин множества S , отличных от шарниров.

Следующая теорема дает выражение решения задачи IV через структуру двусвязности графа.

Т е о р е м а 2. Пусть:

- $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ – семейство попарно непересекающихся подмножеств множества вершин связного графа G ; $S = S_1 + S_2 + \dots + S_K$;
- $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ – объединение, как графов, всех простых путей, которые соединяют всевозможные пары вершин, принадлежащих различным множествам семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$;
- $BC(G)$ – дерево блоков и шарниров графа G ;
- $Z(G, S)$ – поддереве дерева $BC(G)$, соединяющее множество вершин дерева $BC(G)$, релевантных множеству S .

Тогда:

1) граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ является объединением тех блоков графа G , которые представлены в дереве $BC(G)$ вершинами, принадлежащими поддереву $Z(G, S)$;

2) дерево блоков и шарниров графа $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ получается из дерева $Z(G, S)$ удалением концевых вершин, представляющих шарниры графа G .

Граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ будем называть *общим решением задачи IV для семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$* , а также *графом путей, соединяющих попарно вершины семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ непересекающихся подмножеств множества вершин графа G* .

Из теоремы 2 следует, что дерево $Z(G, S)$ не зависит от разбиения множества $S = S_1 + S_2 + \dots + S_K$ на подмножества S_1, S_2, \dots, S_K . Следовательно, от этого разбиения не зависит и дерево блоков и шарниров графа путей $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1 теоремы 2. Пусть $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ – семейство попарно непересекающихся подмножеств множества вершин связного графа G ; $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ – общее решение задачи IV для семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$.

Тогда граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ не зависит от разбиения множества S на непересекающиеся подмножества S_1, S_2, \dots, S_K .

Таким образом, граф путей $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ не зависит от распределения вершин множества $S_1 + S_2 + \dots + S_K$ между отдельными множествами S_1, S_2, \dots, S_K . Граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ зависит только от объединения $S = S_1 + S_2 + \dots + S_K$.

Разбивая множество S на семейство одноэлементных подмножеств, получаем, что задача IV сводится к ее частному случаю – задаче III. Для задачи III теорема 2 получает следующую формулировку.

Следствие 2 теоремы 2. Пусть:

- S – подмножество множества вершин связного графа G ;
- $W(G, S)$ – объединение как графов всех простых путей в графе G , соединяющих попарно все вершины множества S ;
- $BC(G)$ – дерево блоков и шарниров графа G ;
- $Z(G, S)$ – поддереву дерева $BC(G)$, соединяющее множество вершин дерева $BC(G)$, релевантных множеству S .

Тогда:

1) граф $W(G, S)$ является объединением тех блоков графа G , которые представлены в дереве $BC(G)$ вершинами, принадлежащими поддереву $Z(G, S)$;

2) дерево блоков и шарниров графа $W(G, S)$ получается из дерева $Z(G, S)$ удалением концевых вершин, представляющих шарниры графа G .

Граф $W(G, S)$ будем называть *графом простых путей, соединяющих вершины множества S в графе G* , а также *общим решением задачи III для множества S и задачи IV для любого разбиения множества S* . Это понятие обобщает понятие общего решения задачи I, каковым является граф путей $P(G, \alpha, \beta)$.

Поскольку $W(G, S) = W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$, граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ содержит также все простые пути между всеми вершинами каждого из множеств $S_k, k = 1, 2, \dots, K$.

Теорему 2 проиллюстрируем примером графа G , блоковая декомпозиция которого приведена на рис. 2, а дерево блоков и шарниров – на рис. 3. Предположим, что в множестве вершин этого графа выделены два непересекающихся подмножества $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$. Пусть дано, что эти вершины распределены по компонентам вершинной двусвязности графа G следующим образом (рис. 4):

$$\alpha_1 \in \Theta_1; \quad \alpha_2 \in \Theta_8; \quad \beta_1 \in \Theta_3; \quad \beta_2 \in \Theta_6; \quad \beta_3 \in \Theta_{12}; \quad \beta_4 \in \Theta_{13}.$$

В соответствии с теоремой 2 строим дерево блоков и шарниров $BC(G)$ графа G и находим в нем поддереву $Z(G, S)$, соединяющее все вершины, релевантные множеству $S = S_1 + S_2$. На рис. 5 ребра поддерева $Z(G, S)$ показаны сплошными линиями, остальные ребра дерева $BC(G)$ – штриховыми линиями.

Согласно теореме 2 и следствию 1 из нее, граф путей $W(G, S)$ есть объединение всех блоков, представленных вершинами поддерева $Z(G, S)$. Находим, что этими блоками будут компоненты вершинной двусвязности $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5, \Theta_6, \Theta_8, \Theta_{11}, \Theta_{12}, \Theta_{13}$ и мосты b_1, b_3, b_4 . Первые выделены на рис. 4 “сеточной” штриховкой. Прочие компоненты вершинной двусвязности графа G заполнены вертикальной штриховкой. Мосты графа G , принадлежащие графу путей $W(G, S)$, показаны на рис. 4 сплошными линиями, единственный мост b_2 , не вошедший в этот граф путей, – штриховой линией.

5. Общие и частные решения задач соединения вершин графа простыми путями. Пусть $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ – семейство попарно непересекающихся подмножеств множества вершин связного графа G ; $S = S_1 + S_2 + \dots + S_K$. Граф $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$, являющийся общим решением задачи IV для семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$, совпадает с общим решением $W(G, S)$ задачи III для множества S .

Обобщая понятие частного решения задачи I, будем называть *частным решением задачи III для множества S* в связном графе G любое дерево в этом графе, соединяющее все вершины

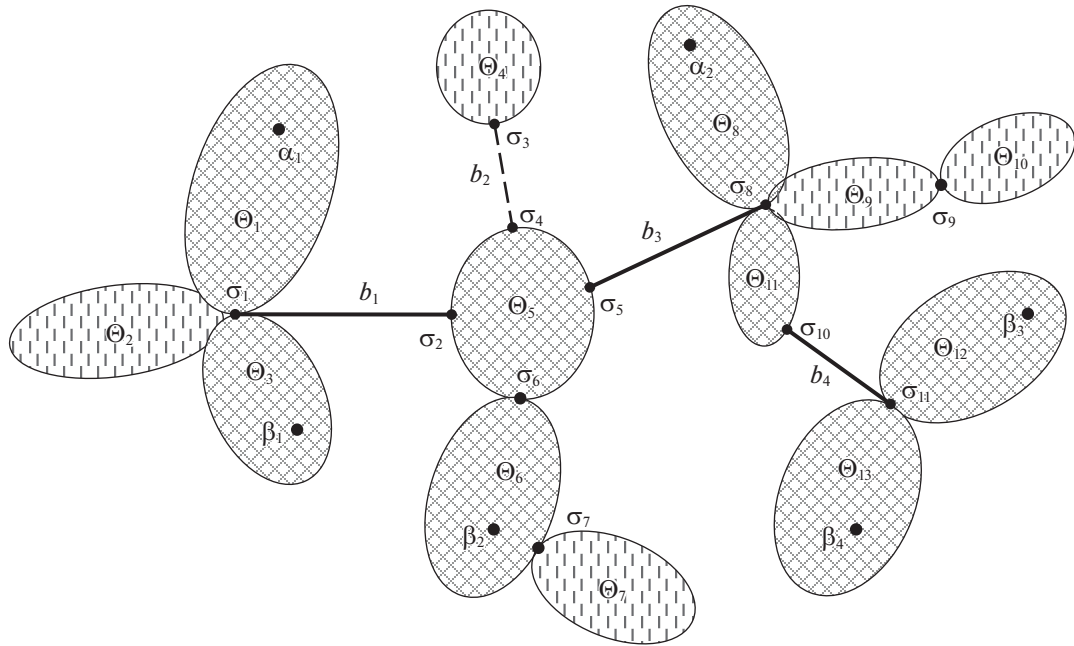


Рис. 4. Блоковая декомпозиция графа простых путей $W(G, S_1, S_2)$ (где $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$) как часть блоков декомпозиции графа G , приведенной на рис. 2

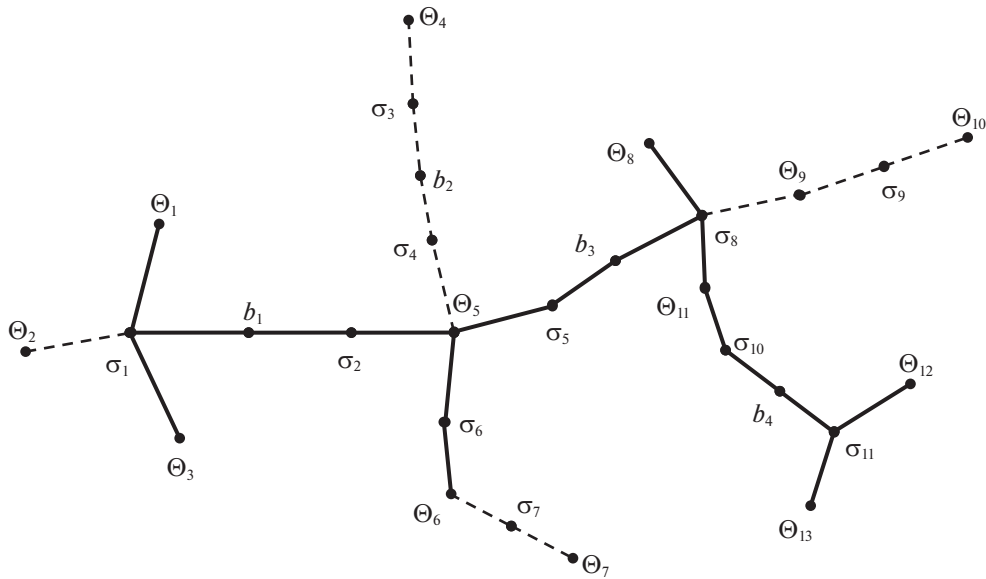


Рис. 5. Дерево блоков и шарниров графа путей $W(G, S_1, S_2)$ как поддерево дерева блоков и шарниров графа G (рис. 3)

множества S . Частным решением задачи IV для семейства множеств $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ в связном графе G назовем любое дерево в графе G , соединяющее все вершины множества $S = S_1 + S_2 + \dots + S_K$.

Найти какое-нибудь частное решение задач III и IV для связного графа G нетрудно, даже не имея общего решения. Построим в графе G какое-нибудь остовное дерево T . Оно будет содержать все вершины графа G . Концевые вершины дерева T могут не принадлежать множеству S . Найдем в дереве T минимальное поддерево $T(S)$, содержащее все вершины множества S . Дерево $T(S)$ соединит множество вершин S графа G . Чтобы получить $T(S)$ из T , нужно концевые вершины, не принадлежащие множеству S , удалить одну за другой из дерева T и получаемых из него деревьев. Дерево $T(S)$ будет частным решением задачи III для множества S в связном графе G , а также задачи IV для любого разбиения множества S .

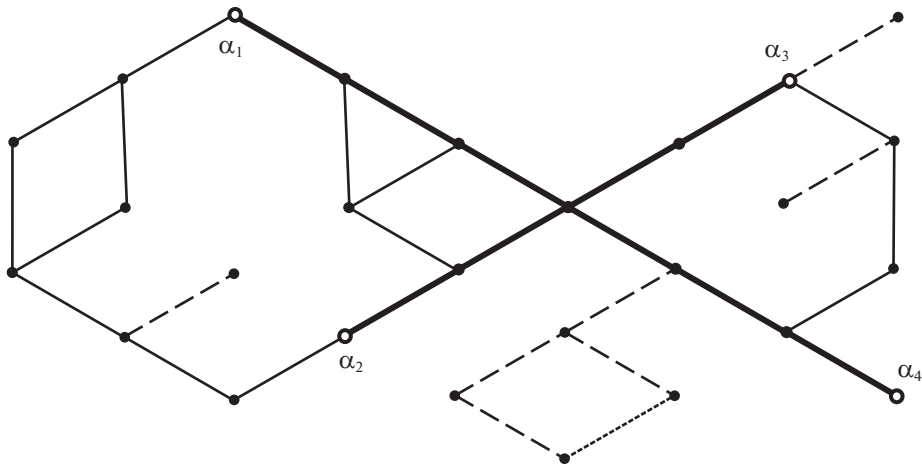


Рис. 6. Интерпретация метода построения общего решения задач III и IV как пополнения частного решения всевозможными “обходными” путями

Имея какое-нибудь частное решение задачи III или IV, нетрудно найти общее решение той и другой задачи. Следующая теорема устанавливает формулу, которая позволяет получить общее решение задачи III или IV, исходя из любого частного решения.

Теорема 3. Пусть S – подмножество множества вершин связного графа G ; $T(S)$ – дерево, соединяющее множество вершин S в графе G ; $W(G, S)$ – объединение как графов всех простых путей в графе G , соединяющих попарно все вершины множества S . Тогда

$$W(G, S) = T(S) \parallel G. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) дает простое выражение общего решения $W(G, S)$ задачи III через произвольно взятое частное решение $T(S)$ этой задачи. То же относится к задаче IV. Данная формула говорит о том, что для построения общего решения $W(G, S)$ нужно найти все блоки графа G , выбрать из них те, которые содержат ребра дерева $T(S)$, и объединить эти блоки как графы. Тем самым отпадает построение дерева блоков и шарниров $BC(G)$ графа G , необходимое при построении общего решения на базе теорем 1 или 2.

Формула (5.1) обобщает формулу (3.4), которая аналогичным образом выражает общее решение задачи I через какое-либо ее частное решение. В обоих случаях общее решение получается благодаря применению операции двусвязного замыкания “ \parallel ”. Вычисление двусвязного замыкания $T(S) \parallel G$ можно осуществить последовательным присоединением циклов из предварительно найденной фундаментальной системы циклов графа G . Эти циклы нужно объединять через общие ребра сначала с графом $T(S)$, затем с итерационно получаемыми объединениями.

Построение общего решения $W(G, S)$ задач III и IV на основе теоремы 3 допускает также следующую наглядную интерпретацию. Можно считать, что к дереву $T(S)$ добавляются все “обходные” (“шунтирующие”) простые пути, возможные в графе G . “Обходным” путем для связного графа H считаем простой путь, концевые вершины которого принадлежат графу H , а промежуточные вершины этому графу не принадлежат. Такой путь называется также “ручкой” графа H [26, с. 193]. Строим последовательность графов $H_0 = T(S)$, H_1 , H_2 , ..., каждый член которой, кроме начального, получается из предыдущего члена добавлением обходного пути. Продолжаем этот процесс до такого графа H_k , который не будет иметь обходных путей. Граф H_k будет общим решением $W(G, S)$ задачи III, а также IV.

Это построение представляет обобщение известного утверждения о том, что вершинно двусвязный граф можно построить, начав с любого его ребра и добавляя последовательно “ручки” к получаемым графам [26, с. 193]. Последнее можно истолковать как частный случай вышеописанной конструкции – как построение общего решения задачи соединения простыми путями двух смежных вершин α и β на основе частного решения, каковым является ребро (α, β) .

Пример построения общего решения задачи IV на основе частного решения приведен на рис. 6. Все сплошные и штриховые линии изображают ребра исходного графа G . Задано подмножество $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ множества вершин графа G . Утолщенными сплошными линиями показано дерево $T(S)$, соединяющее вершины множества S . Оно является частным решением задачи IV. Общее решение $W(G, S)$ получается итерационным добавлением к этому дереву всевозможных обходных простых путей. Они изображены сплошными тонкими линиями, штриховые линии – ребра графа G , не вошедшие в граф путей $W(G, S)$.

А как решить обратную задачу – построение частного решения на основе общего решения? Предположим, что имеется граф $W(G, S)$ – общее решение задачи соединения вершин связного графа простыми путями. Извлечь из этого графа какое-нибудь частное решение нетрудно. Достаточно построить какое-нибудь дерево, соединяющее множество вершин S в графе $W(G, S)$. Метод такого построения описан выше для подмножества S множества вершин произвольного связного графа.

Теоремы 1–3 дают решения задач построения множеств простых путей для связных графов. Если граф содержит больше одной компоненты связности, то эти задачи решаются для каждой компоненты независимо от других компонент. Если компонента связности содержит ровно одну вершину α из множества вершин S , то в графе G не существует путей, соединяющих вершину α с другими вершинами множества S . В этом случае считаем по определению, что граф путей $W(G, S)$ не содержит вершину α . Так что в общем случае в графе путей $W(G, S)$ не будет изолированных вершин.

Пусть граф G есть объединение компонент связности C_1, C_2, \dots, C_M . Пусть для каждого $j = 1, 2, \dots, M$ дерево T_j является частным решением задачи П для множества вершин $S \cap C_j$ в связном графе C_j . Если множество $S \cap C_j$ содержит не более одной вершины, то T_j есть пустой граф. Частным решением задачи П для множества S назовем граф $T_1 + T_2 + \dots + T_M$. Из формулы (5.1) получаем, что общее решение этой задачи выражается формулой

$$W(G, S) = (T_1 + T_2 + \dots + T_M) \parallel G. \quad (5.2)$$

6. Упрощения схемы общего решения. Теоремы 1 и 2 говорят о том, что для решения задач соединения вершин связного графа простыми путями необходим анализ двусвязности этого графа. Если общее решение строить непосредственно на базе этих теорем, то после анализа двусвязности нужно построить дерево блоков и шарниров исходного графа и выделить в нем поддереву, которое представляет общее решение. Если же для построения общего решения воспользоваться теоремой 3, то дерево блоков и шарниров не потребуется, но нужно будет найти сначала какое-нибудь частное решение задачи, и только после этого строить общее решение.

Последний способ допускает следующее развитие: не искать частное решение для соединения множества вершин S в графе G , а добавить в этот граф некоторые ребра и вершины таким образом, чтобы в полученном графе G' все вершины множества S оказались соединены деревом T' простого вида – например, звездой или простым путем. Связность исходного графа G при этом не потребуется. Тогда, имея это частное решение T' задачи соединения вершин множества S в графе G' , строим общее решение W этой задачи на основе теоремы 3. Затем удаляем из W вершины и ребра, которые были добавлены к графу G . Как будет показано ниже, в результате этого удаления из W получится граф, который явится искомым общим решением задачи соединения множества вершин S в графе G .

Этот способ позволяет обойтись без построения и анализа дерева блоков и шарниров. Он сводит решение к анализу только двусвязности связного графа G' .

Дерево T' можно строить разными способами, руководствуясь соображениями удобства последующих операций. Простейшие варианты – в виде простого пути или в виде графа-звезды. Графом-звездой (или просто звездой) называется неориентированное дерево, все ребра которого инцидентны одной вершине, называемой центром (центральной вершиной) звезды. Ребра звезды называются также ее лучами.

Дерево T' может содержать ребра как принадлежащие графу G , так и не принадлежащие ему. Если некоторые вершины множества S смежны в графе G , то соединяющие их ребра можно включать в состав дерева T' , но можно и не включать.

Построение общего решения будет сведено к алгоритму вычисления блоков графа $G' = G + T'$, а также простейшим операциям добавления к графу G некоторого множества ребер и последующего их удаления.

Сначала применим этот метод к задаче I. Пусть требуется найти граф путей $P(G, \alpha, \beta)$, где α и β – несмежные вершины неориентированного графа G . Связность последнего не предполагается. Дерево T' можно образовать из единственного ребра $x = (\alpha, \beta)$, соединяющего вершины α и β . Вычислим блок $\Theta(G + x, x)$ графа $G + x$. Из полученного блока удалим ребро x . Оставшийся граф будет графом путей $P(G, \alpha, \beta)$.

Точную формулировку решения дает следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть α и β – несмежные вершины графа G . Добавим к графу G ребро $x = (\alpha, \beta)$. Тогда

$$P(G, \alpha, \beta) = Q(G + x, x) \div x, \quad (6.1)$$

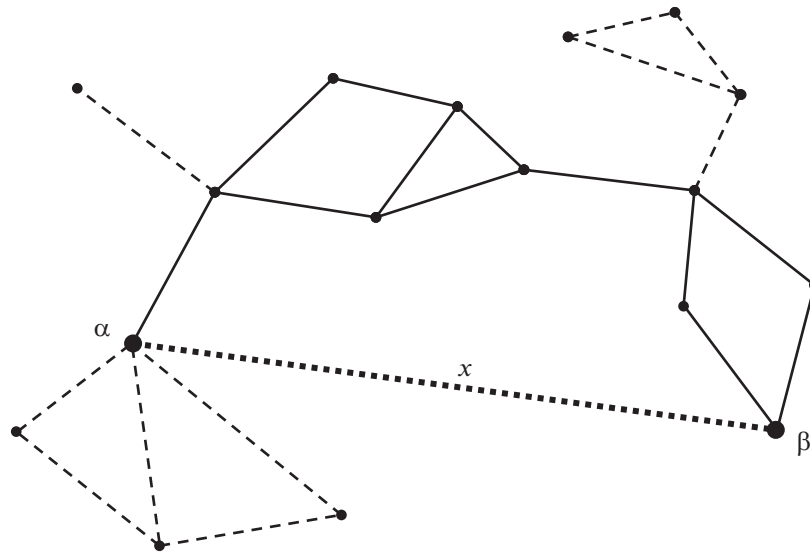


Рис. 7. Построение множества всех простых путей, соединяющих вершины α и β , с помощью временного дополнительного ребра $x = (\alpha, \beta)$

$$P(G, \alpha, \beta) = (x \parallel (G + x)) \div x. \quad (6.2)$$

Эту теорему поясняет пример на рис. 7. Ребра графа G изображены сплошными и штриховыми линиями. Временно добавленное ребро $x = (\alpha, \beta)$ показано точечной линией. Граф $\Theta(G + x, x)$ есть объединение ребер, изображенных сплошными линиями, и временного ребра x . Штриховыми линиями показаны ребра графа G , не принадлежащие путям от α до β в графе G . Граф путей $P(G, \alpha, \beta) = \Theta(G + x, x) \div x$ изображен сплошными линиями³.

В теореме 4 граф G не предполагается связным, а вершины α и β могут принадлежать разным компонентам связности этого графа. В этом случае в графе G не существует пути, соединяющего вершины α и β , и граф $P(G, \alpha, \beta)$ должен быть пустым. Убедимся, что формулы (6.1) и (6.2) в этом случае действительно дают пустой граф.

Дополнительное ребро $x = (\alpha, \beta)$ является мостом в графе $G + x$. Этот мост есть блок $\Theta(G + x, x)$ графа $G + x$:

$$\Theta(G + x, x) = x.$$

По формуле (6.1) получаем

$$\Theta(G + x, x) \div x = x \div x.$$

Согласно определению операции оголения, выражение $x \div x$ означает, что из ребра x как графа нужно сначала удалить само ребро x без его концов (как ребро второго операнда), а затем посмотреть, не станут ли некоторые вершины первого операнда после этого изолированными. Но концы ребра x действительно станут изолированными вершинами. Операция оголения требует, чтобы вершины первого операнда, ставшие изолированными после удаления ребер, тоже были бы удалены. В итоге операция $\Theta(G + x, x) \div x$ даст для $P(G, \alpha, \beta)$ пустой граф. Значит, формула (6.1) дает пустой граф. То же верно и для формулы (6.2), поскольку $\Theta(G + x, x) = x \parallel (G + x)$.

Из теоремы 4 следует, что для нахождения графа простых путей $P(G, \alpha, \beta)$ достаточно знать всего один блок графа $G + x$ – тот блок, который содержит ребро $x = (\alpha, \beta)$. Отпадает необходимость построения дерева блоков и шарниров связного графа, а также выявления его минимального поддерева, представляющего те блоки, которые имеют непустое пересечение с множеством S .

Если обе вершины α и β инцидентны некоторому ребру u графа G , то добавлять временное ребро не нужно. Ребро u будет частным решением задачи, а общее решение даст формула

$$P(G, \alpha, \beta) = u \parallel G.$$

³ Решение, выраженное формулой (6.1), без доказательства сформулировано в [7].

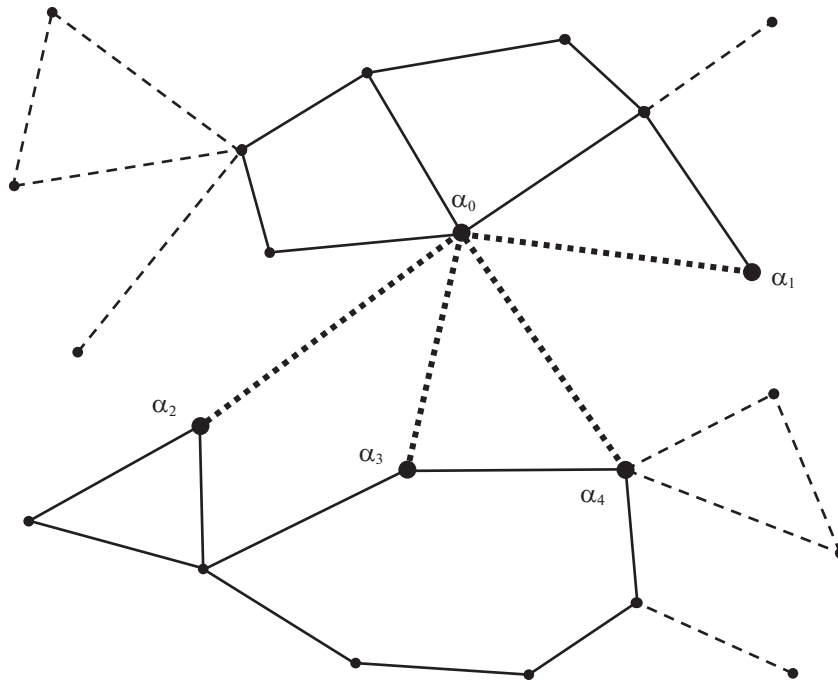


Рис. 8. Вычисление графа путей с помощью вспомогательной звезды

Рассмотрим теперь общую задачу соединения простыми путями подмножества вершин графа, не предполагаемого связным. Следующая теорема является обобщением теоремы 4.

Т е о р е м а 5. Пусть подмножество S множества вершин графа G есть множество вершин дерева T ; ребра x_1, x_2, \dots, x_m дерева T не принадлежат графу G и соединяют пары несмежных вершин графа G ; остальные ребра дерева T являются ребрами графа G . Тогда граф путей $W(G, S)$ выражается формулой

$$W(G, S) = (T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)) \div (x_1 + x_2 + \dots + x_m). \quad (6.3)$$

Возможны различные способы добавления ребер $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ к графу G . Они приводят к разным способам вычисления общего решения задачи соединения вершин.

С п о с о б 1. Пусть $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, $N > 0$. Предположим, что вершина α_0 не смежна ни с одной из остальных вершин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ множества S . Соединим α_0 ребром с каждой из вершин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Полученный граф-звезду принимаем в качестве дерева T , о котором говорится в теореме 5. Этот способ естествен для решения задачи II.

С л е д с т в и е 1 т е о р е м ы 5. Пусть:

- $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин графа G , $N > 0$;
- вершина α_0 не смежна ни с одной из вершин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ в графе G ;
- граф-звезда $X = (\alpha_0, \alpha_1) + (\alpha_0, \alpha_2) + \dots + (\alpha_0, \alpha_N)$ есть объединение ребер $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_0, \alpha_2), \dots, (\alpha_0, \alpha_N)$, не принадлежащих графу G .

Тогда граф путей $W(G, S)$ выражается формулой

$$W(G, S) = (X \parallel (G + X)) \div X. \quad (6.4)$$

Этот способ иллюстрирует рисунок 8. Исходный граф G состоит из двух компонент связности. Его ребра изображены сплошными и штриховыми линиями. Множество S состоит из пяти вершин: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 . Временно добавленная звезда $X = (\alpha_0, \alpha_1) + (\alpha_0, \alpha_2) + (\alpha_0, \alpha_3) + (\alpha_0, \alpha_4)$ показана точечными линиями. Граф $X \parallel (G + X)$ есть объединение звезды X и ребер, представленных сплошными линиями. Граф путей $W(G, S) = (X \parallel (G + X)) \div X$ изображен сплошными линиями, остальные ребра графа G – штриховыми линиями.

С п о с о б 2. Предположим, что каждая вершина в последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ не смежна в графе G (он не предполагается связным) с предыдущей и со следующей вершинами. Соединим

последовательно эти вершины ребрами так, чтобы получился простой путь от α_0 до α_N . Этот простой путь принимаем в качестве дерева T в теореме 5.

Следствие 2 теоремы 5. Пусть:

- $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин графа G , $N > 0$;
- в последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ соседние вершины не смежны в графе G ;
- простой путь $Y = (\alpha_0, \alpha_1) + (\alpha_1, \alpha_2) + \dots + (\alpha_{N-1}, \alpha_N)$ есть объединение ребер (α_0, α_1) , (α_1, α_2) , ..., (α_{N-1}, α_N) , не принадлежащих графу G .

Тогда граф путей $W(G, S)$ выражается формулой

$$W(G, S) = (Y \parallel (G + Y)) \div Y. \quad (6.5)$$

Расширим далее способы дополнения временными ребрами графа G , не предполагаемого связным. Будем добавлять к графу G ребра, которые будут соединять вершины, принадлежащие множеству $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$, где $N > 1$, с новой временно добавленной вершиной σ . Эту граф-звезду, добавленную к графу G , обозначим $X(\sigma, S)$:

$$X(\sigma, S) = (\sigma, \alpha_1) + (\sigma, \alpha_2) + \dots + (\sigma, \alpha_N).$$

Используем ее в качестве частного решения задачи соединения простыми путями вершин множества S в расширенном графе $G + X(\sigma, S)$. В нем общим решением задачи будет граф $W(G + X(\sigma, S), S)$. Он всегда связан, тогда как граф $W(G, S)$ не будет связным, если каждая из двух или большего числа компонент связности графа G будет содержать больше одной вершины множества S .

Теорема 6. Пусть:

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин графа G , $N > 1$;
- вершина σ не принадлежит графу G ;
- $X(\sigma, S) = (\sigma, \alpha_1) + (\sigma, \alpha_2) + \dots + (\sigma, \alpha_N)$;
- $W(G, S)$ – граф простых путей, соединяющих вершины множества S в графе G ;
- $W(G + X(\sigma, S), S)$ – граф простых путей, соединяющих вершины множества S в графе $G + X(\sigma, S)$.

Тогда имеют место соотношения:

$$W(G + X(\sigma, S), S) = W(G, S) + X(\sigma, S); \quad (6.6)$$

$$W(G, S) = W(G + X(\sigma, S), S) \div X(\sigma, S); \quad (6.7)$$

$$W(G, S) = (X(\sigma, S) \parallel (G + X(\sigma, S))) \div X(\sigma, S). \quad (6.8)$$

Формулы (6.7) и (6.8) выражают общие решения⁴ задач III и IV.

7. Соответствия между вершинной двусвязностью и простой связностью графов при вычислении простых путей. Для полноты теоретического анализа рассматриваемых задач следует остановиться на соотношениях между структурой простой связности анализируемых графов и структурой двусвязности, возникающей в решениях.

Если анализируемый граф состоит из более чем одной компоненты связности, то построение множеств простых путей, соединяющих заданное подмножество вершин графа, производится для каждой компоненты связности по отдельности независимо от остальных компонент. Вместе с тем теоремы 4 – 6 дают способы решения, не зависящие от того, связан ли анализируемый граф или нет.

Построение, рассматриваемое в теореме 6, означает, что для каждой компоненты связности графа G , содержащей хотя бы одну вершину множества S , строится граф-звезда с центром σ , соединяющая все те вершины множества S , которые принадлежат этой компоненте. Все такие звезды, добавляемые к компонентам связности графа G , имеют общий центр – вершину σ . Ниже будет показано, что если C – компонента связности графа G и множество $S \cap C$ содержит больше

⁴ В [7] без доказательства предложено решение задачи IV для случая, когда всевозможными простыми путями нужно соединить вершины двух непересекающихся подмножеств S_1 и S_2 множества вершин связного графа G . Предлагается временно добавить к графу G две вспомогательные вершины σ и τ , соединив их ребром (σ, τ) ; вершину σ соединить ребрами со всеми вершинами множества S_1 , вершину τ – со всеми вершинами множества S_2 . Затем в полученном графе найти блок, содержащий ребро (σ, τ) , и удалить из этого блока все временно добавленные ребра и вершины. Это решение корректно, но с помощью теоремы 6 можно обойтись добавлением только одной временной вершины σ . Теорема 5 позволяет обойтись добавлением лишь временных ребер.

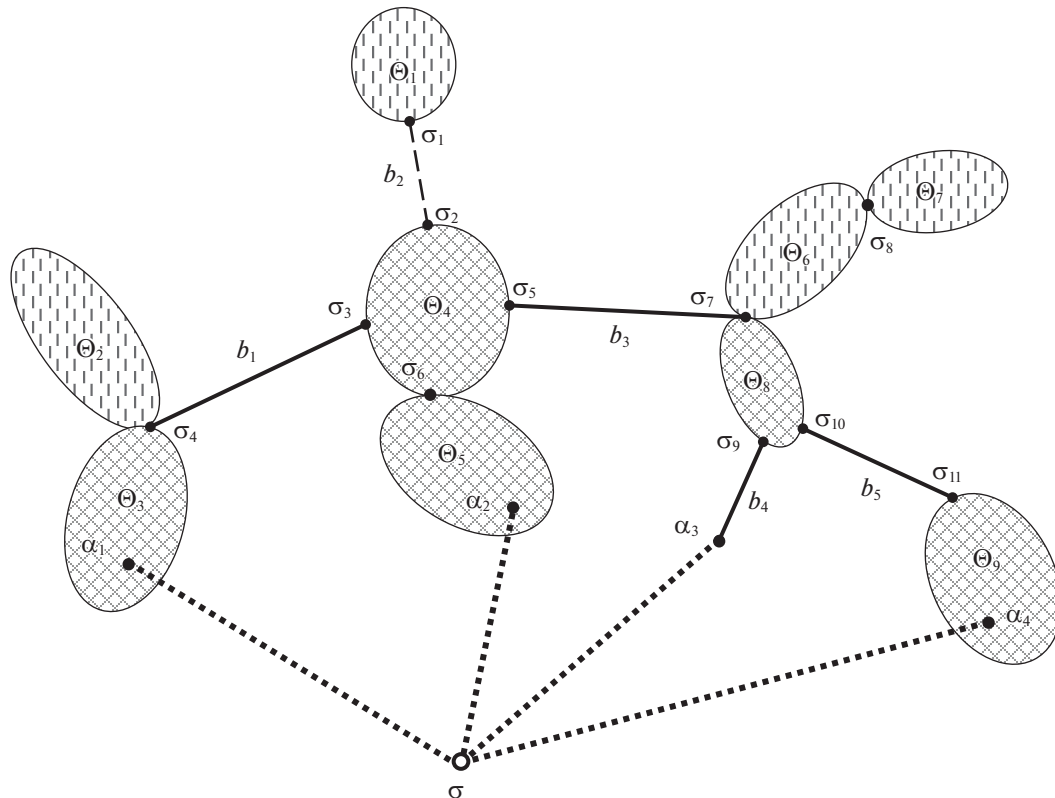


Рис. 9. Блоки связного графа G , содержащиеся в двусвязном графе $W(G + X(\sigma, S), S)$

одной вершины, то в результате добавления звезды $X(\sigma, S \& C)$ к графу путей $W(C, S \& C)$ получается двусвязный граф (рис. 9).

Граф путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ есть объединение некоторых блоков графа $G + X(\sigma, S)$. Каждый блок графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ определяется некоторой компонентой связности графа G и вершинами из множества S , содержащимися в этой компоненте. Эта связь описывается следующей теоремой.

Теорема 7. Пусть:

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин связного графа G , $N > 1$;
- вершина σ не принадлежит графу G ;
- $X(\sigma, S) = (\sigma, \alpha_1) + (\sigma, \alpha_2) + \dots + (\sigma, \alpha_N)$;
- $W(G + X(\sigma, S), S)$ – граф простых путей, соединяющих вершины множества S в графе $G + X(\sigma, S)$.

Тогда граф $W(G + X(\sigma, S), S)$ вершинно двусвязен.

Эту теорему иллюстрирует рисунок 9. На нем показана блоковая декомпозиция некоторого связного графа G . Его блоками являются компоненты вершинной двусвязности $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_9$ и мосты b_1, b_2, \dots, b_5 . Они соединяются шарнирами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{11}$. Множество S состоит из четырех вершин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Компоненты вершинной двусвязности графа G , принадлежащие графу путей $W(G, S)$, заполнены сеточной штриховкой. Мосты графа G , принадлежащие графу путей $W(G, S)$, изображены сплошными линиями. Дополнительные временные ребра $(\sigma, \alpha_1), (\sigma, \alpha_2), (\sigma, \alpha_3), (\sigma, \alpha_4)$, образующие звезду $X(\sigma, S)$, показаны точечными линиями. Вершинная двусвязность графа $W(G, S) + X(\sigma, S) = W(G + X(\sigma, S), S)$ из рис. 9 очевидна.

Если известно, что все вершины множества S принадлежат одной компоненте связности графа G , то вместо формулы (6.8) можно использовать несколько более простую формулу. Если

граф G связан, то, согласно теореме 7, граф путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ состоит из единственного блока. Тогда вместо формулы (6.8) его можно определить по любому из ребер звезды $X(\sigma, S)$:

$$X(\sigma, S) \parallel (G + X(\sigma, S)) = x_j \parallel (G + X(\sigma, S)),$$

где $x_j = (\sigma, \alpha_j)$, j – любой номер из $1 \dots N$.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 7. Пусть:

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин связного графа G , $N > 1$;
- вершина σ не принадлежит графу G ;
- $x_j = (\sigma, \alpha_j)$ при $j = 1 \dots N$;
- граф-звезда $X(\sigma, S) = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ есть объединение ребер x_1, x_2, \dots, x_N .

Тогда граф $W(G, S)$ простых путей, соединяющих вершины множества S в графе G , выражается формулой

$$W(G, S) = (x_j \parallel (G + X(\sigma, S))) - \sigma,$$

где j – любой номер из $1 \dots N$.

Эта формула позволяет упростить схему вычисления графа путей $W(G, S)$: достаточно произвести анализ двусвязности графа $G + X(\sigma, S)$, выбрать его блок, содержащий ребро x_j , и вычестить из этого блока вершину σ .

Пусть вершины множества S принадлежат более чем одной компоненте связности графа G . Тогда построение звезды $X(\sigma, S)$ будет означать, что для каждой компоненты связности C графа G , содержащей хотя бы одну вершину множества S , строится граф-звезда $X(\sigma, S \& C)$ с центром σ , соединяющая вершины множества $S \& C$. Если в компоненте C имеются две или более вершин множества S , то, в силу теоремы 7, граф $W(C + X(\sigma, S \& C), S \& C)$ будет вершинно двусвязным.

Все звезды вида $X(\sigma, S \& C)$, добавляемые к тем компонентам связности графа G , которые содержат хотя бы одну вершину множества S , будут иметь общий центр – вершину σ . Если вершины множества S содержатся более чем в одной компоненте связности графа G , то σ будет шарниром связного графа $W(G + X(\sigma, S), S)$. В противном случае вершина σ шарниром графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ не будет.

Если компоненте связности C графа G принадлежит ровно одна вершина α множества S , а общее число вершин этого множества больше 1, то в графе путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ вершина α будет связана с вершинами компоненты C единственным ребром (σ, α) . Это ребро будет мостом графа $W(G + X(\sigma, S), S)$.

Из сказанного вытекает следующее обобщение теоремы 7 на случай несвязных графов.

Т е о р е м а 8. Пусть:

- $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ – подмножество множества вершин графа G ;
- вершина σ не принадлежит графу G ;
- $X(\sigma, S) = (\sigma, \alpha_1) + (\sigma, \alpha_2) + \dots + (\sigma, \alpha_N)$;
- $W(G, S)$ – граф простых путей, соединяющих вершины множества S в графе G ;
- $W(G + X(\sigma, S), S)$ – граф простых путей, соединяющих вершины множества S в графе $G + X(\sigma, S)$.

Тогда:

- 1) множество блоков графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ взаимно-однозначно соответствует множеству компонент связности графа G , содержащих вершины из множества S ;
- 2) вершина σ является шарниром графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ тогда и только тогда, когда вершины множества S принадлежат более чем одной компоненте связности графа G ;
- 3) если C – компонента связности графа G и число вершин множества $S \& C$ больше 1, то блок графа $W(G + X(\sigma, S), S)$, содержащий это множество, вершинно двусвязен;
- 4) если C – компонента связности графа G и число вершин множества $S \& C$ равно 1, то блок графа $W(G + X(\sigma, S), S)$, которому принадлежит это множество, есть мост.

Теоремы 7 и 8 расширяют содержание нижеследующего утверждения, вытекающего из теоремы 6. Указанное в нем условие, что каждой компоненте связности графа G должны принадлежать не менее двух вершин множества S , является достаточно естественным. Ибо компоненты

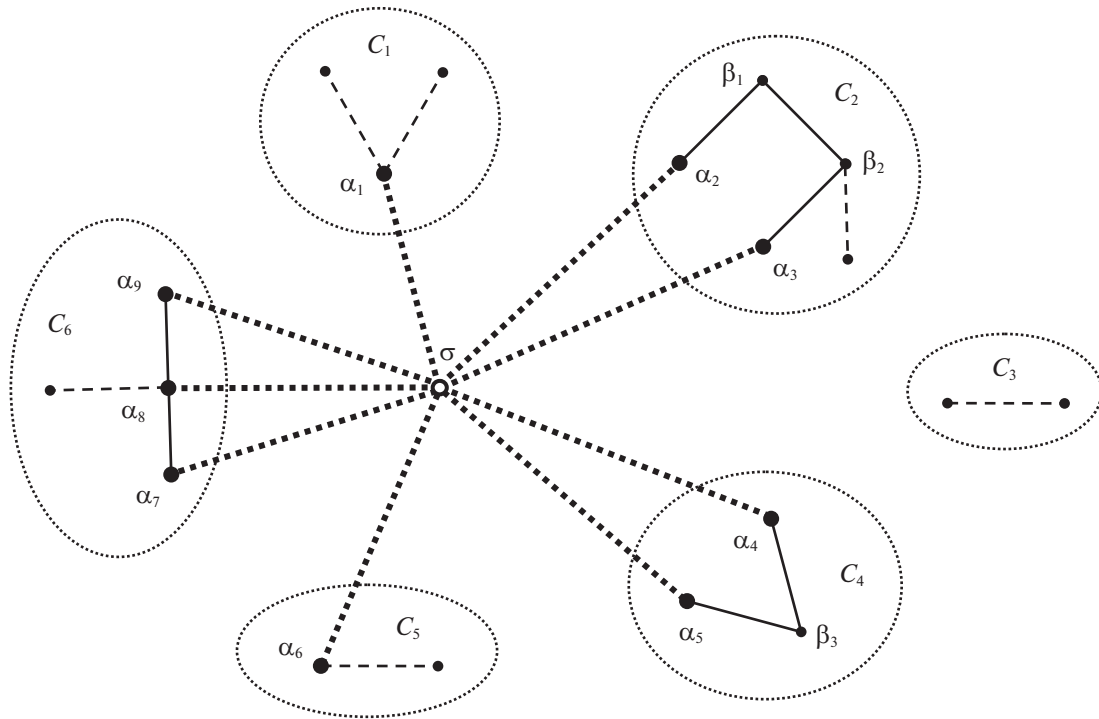


Рис. 10. Структуры простой связности и вершинной двусвязности графов, используемых при построении общего решения задачи соединения множества вершин графа простыми путями

связности графа G , в которые вершины множества S не входят либо входят по одной, на искомый граф путей не влияют и перед его вычислением могут быть отброшены.

Следствие теоремы 6. Если при выполнении условий теоремы 6 каждая компонента связности графа G содержит не менее двух вершин множества S , то

$$W(G, S) = W(G + X(\sigma, S), S) - \sigma. \quad (7.1)$$

Эта формула сводит построение общего решения $W(G, S)$ задачи IV к вычислению тех блоков графа $W(G + X(\sigma, S), S)$, которые содержат вершины из множества S , и последующему удалению из этих блоков временно добавленной вершины σ .

Формула (7.1) похожа на формулу (6.7). Графы, выражаемые правыми частями этих равенств, различаются тогда и только тогда, когда хотя бы одна компонента связности графа G содержит ровно одну вершину из множества S . В граф, выражаемый правой частью формулы (6.7), эта вершина не входит, а в граф правой части формулы (7.1) – входит как изолированная вершина.

Условие отличия от единицы числа вершин множества S в каждой компоненте связности графа G можно снять, если учесть изолированные вершины графа $W(G + X(\sigma, S), S) - \sigma$. Для этого формулу (7.1) можно “исправить” следующим образом:

$$W(G, S) + S = W(G + X(\sigma, S), S) - \sigma.$$

Обе части этого равенства выражают граф, множество изолированных вершин которого есть $S - W(G, S)$.

Теорему 8 иллюстрирует рис. 10. На нем изображен граф G , состоящий из шести компонент связности C_1, C_2, \dots, C_6 . Они обведены точечными овалами. Задано множество $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9\}$ из девяти вершин графа G . Они содержатся во всех компонентах связности этого графа, кроме C_3 . Компоненте C_1 принадлежит только одна вершина α_1 из множества S . Ее невозможно соединить путями с другими вершинами множества S . То же относится к вершине α_6 в компоненте C_5 . Из рис. 10 видно, что граф путей $W(G, S)$ является объединением трех непересекающихся простых путей: $\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_3$, $\alpha_4\beta_3\alpha_5$ и $\alpha_7\alpha_8\alpha_9$.

Звезда $X(\sigma, S) = (\sigma, \alpha_1) + (\sigma, \alpha_2) + \dots + (\sigma, \alpha_9)$ имеет девять лучей. Они показаны линиями из крупных точек. Центр σ этой звезды является единственным шарниром связного графа путей

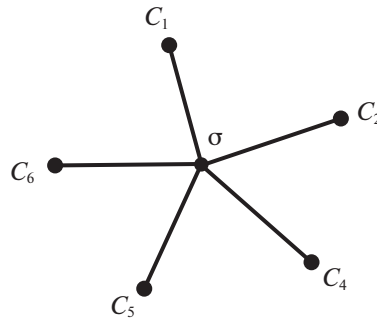


Рис. 11. Дерево (граф-звезда) блоков и шарниров графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ из примера на рис. 10

$W(G + X(\sigma, S), S)$. Ребра графа G , принадлежащие графу путей $W(G + X(\sigma, S), S)$, изображены сплошными линиями, остальные ребра графа G – штриховыми линиями.

Граф путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ состоит из пяти блоков. Они соответствуют тем пяти компонентам связности графа G , которым принадлежат вершины множества S . Компоненты C_1 и C_5 содержат по одной вершине множества S . Соответствующие блоки графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ являются его мостами (σ, α_1) и (σ, α_6) . Каждой из компонент простой связности C_2, C_4 и C_6 графа G принадлежит больше одной вершины множества S . Этим компонентам соответствуют компоненты двусвязности графа $W(G + X(\sigma, S), S)$: компоненте C_2 – простой цикл $\sigma\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_3$, компоненте C_4 – простой цикл $\sigma\alpha_4\beta_3\alpha_5$. Компоненту двусвязности графа $W(G + X(\sigma, S), S)$, которая соответствует компоненте простой связности C_6 графа G , можно описать как объединение двух простых циклов $\sigma\alpha_7\alpha_8$ и $\sigma\alpha_8\alpha_9$, имеющих общее ребро (σ, α_8) .

Вычитание из графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ вершины σ (вместе с инцидентными ей ребрами) дает граф, имеющий изолированные вершины α_1 и α_6 . Они не должны входить в искомым граф путей $W(G, S)$. Формулу (7.1) нельзя применить к данной конфигурации, так как нарушено условие ее применимости: компоненты связности C_1 и C_5 графа G содержат по одной вершине из множества S . В этой ситуации справедливы формулы (6.7) и (6.8): они удаляют из графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ не только все ребра звезды $X(\sigma, S)$ и ее центр σ , но также и все вершины множества S , изолированные в графе $W(G + X(\sigma, S), S)$ – σ .

Для любого графа G дерево блоков и шарниров графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ является графом-звездой. Обозначим его Z . Множество блоков графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством концевых вершин звезды Z . Тем самым последнее взаимно-однозначно соответствует множеству тех компонент связности графа G , которые содержат хотя бы по одной вершине множества S . Центральная вершина звезды Z представляет шарнир σ графа $W(G + X(\sigma, S), S)$, если таких компонент имеется не меньше двух.

На рис. 11 показана граф-звезда, являющаяся деревом блоков и шарниров графа путей $W(G + X(\sigma, S), S)$ из примера на рис. 10. Концевые вершины этой звезды, представляющие блоки графа путей, обозначены символами тех компонент простой связности графа G , которые содержат вершины множества S .

Если для решения задачи соединения вершин графа G простыми путями не использовать описанные приемы добавления вспомогательных ребер и вершин, то оценка сложности алгоритма сводится к оценке сложности анализа двусвязности графа G . Алгоритм Хопкрофта–Тарьяна, выполняющий анализ двусвязности, имеет сложность по числу операций $O(n + m)$, где n – число вершин анализируемого графа, m – число его ребер.

Добавление звезды $X(\sigma, S)$ к графу G не ухудшает оценку сложности анализа двусвязности по сравнению с анализом просто графа G . При добавлении звезды $X(\sigma, S)$ к графу G количество вершин графа увеличивается на единицу, а количество ребер может увеличиться не больше, чем на n , где n – число вершин графа G . Отсюда для анализа двусвязности графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ любым из упомянутых методов получается оценка сложности по числу операций

$$O((n + 1) + (m + n)) = O(2n + m + 1),$$

т.е. снова $O(n + m)$, как и для исходного графа G .

8. Применение вычислений множеств простых путей в задачах управления транспортными сетями. Методы вычисления множеств простых путей между узлами сети составляют необходимую часть программно-математического аппарата систем оперативного управления транспортными сетями. В первую очередь это относится к электрическим сетям. Далее предполагается, что транспортная сеть представлена неориентированным графом. Вершины графа называются узлами сети, ребра – ветвями. Некоторые узлы рассматриваются как источники или потребители ресурсов, передаваемых в транспортной сети по ее ветвям. Остальные узлы служат для соединения ветвей.

Для анализа и оценки состояния сети диспетчер и используемое им программное обеспечение должны иметь возможность контролировать множества простых путей, соединяющих те или иные подмножества узлов сети, в том числе соединяющие узлы-источники с узлами-потребителями.

Рассмотрим некоторые задачи управления транспортными сетями, требующие вычисления множеств простых путей между узлами сети. Они затрагивают такие вопросы моделирования и управления, как поддержание штатных режимов функционирования сети, мониторинг оперативного состояния оборудования, контроль планово-ремонтных и противоаварийных операций, восстановление функционирования сети после аварии, безопасность выполняемых операций для персонала, безаварийность операций, тренировки персонала на компьютерных тренажерах.

Пример 1. Контроль надежной связности транспортной сети. К ответственным транспортным сетям обычно предъявляется требование *непрерывности функционирования*. Оно означает функциональную надежность сети в режиме реального времени. В целом проблематика надежности транспортных сетей, особенно электрических, обширна и сложна. В настоящем примере и некоторых следующих затрагивается только один из ее аспектов – надежность по связности. Для полноценного анализа надежности транспортных сетей необходимо учитывать также потоковый аспект – насколько устойчиво сеть обеспечивает передачу требуемых объемов ресурсов от источников к потребителям. Потоковая надежность определяется топологией сети и пропускной способностью ее ветвей. Кроме того, многое в оперативной надежности сетей, особенно электрических, зависит от автоматики и ручного управления [27].

Одним из основных критериев надежности сложных систем является “критерий $N-k$ ”. Система считается надежной по этому критерию, если отказ какого-либо набора из k ее элементов не вызывает нарушения функциональности системы. Применительно к связности транспортной сети “критерий $N-1$ ” означает, что удаление из связного графа сети одной вершины или одного ребра не должно вызывать разделения сети на не связанные между собой части. Первое означает вершинную двусвязность графа сети, второе – его реберную двусвязность.

Вершинно двусвязный граф является также реберно двусвязным, ибо удаление одного ребра из связного графа влечет удаление не более одной вершины. Транспортная сеть, граф которой вершинно двусвязен, называется также *неразделимой* или *закольцованной*. Неразделимость сети означает, что эта сеть остается связной после удаления какой-либо одной вершины. Закольцованность означает, что любые две вершины принадлежат некоторому простому циклу. В такой сети: для любого узла α существует обходящий его путь между любой парой узлов, отличных от α ; для любой ветви сети существует обходной путь, соединяющий ее концы.

Проверка неразделимости (закольцованности) транспортной сети или выделенной ее части – это проверка вершинной двусвязности соответствующего графа. Если диспетчеру транспортной сети нужно проверить наличие этого свойства у выделенного им фрагмента G сети, то ему достаточно выбрать в этом фрагменте любое ребро x и запустить процедуру вычисления блока графа G , содержащего ребро x . В графе G существует единственный блок, содержащий ребро x . Если этот блок является компонентой вершинной двусвязности графа G , то существует путь между концами ребра x в обход самого этого ребра. В противном случае ребро x является мостом и обходных путей у него нет. Каждая вершина блока и каждое его ребро принадлежат некоторому простому пути, соединяющему две произвольно выбранные вершины этого блока.

Пример 2. Выявление узких мест в топологии транспортной сети. При плановых и аварийных переключениях в электрической сети изменяется граф ее текущей конфигурации. Для оперативного контроля надежности режима электросети диспетчеру необходимо знать ее “узкие места”. Последние определяются не только топологией, но также распределением потоков мощности по сети и состоянием (готовностью и настройкой) автоматических устройств. Поиск “узких мест” в сети начинается с анализа ее топологии. В плане связности “узкими местами” будут прежде всего шарниры и мосты графа текущей конфигурации сети. Для их распознавания дис-

петчер должен запустить процедуру вычисления блоков этого графа. В результате на схеме сети он сможет увидеть, какие узлы являются шарнирами и какие ветви – мостами при текущем положении коммутационных аппаратов (КА).

Пример 3. Визуализация связей и их резервирования. В число обычных информационных требований диспетчера транспортной (в частности, электрической) сети входят запросы на отображение множества всех связей того или иного типа между двумя задаваемыми узлами сети. Например, показать на схеме сети все замкнутые цепи определенного класса напряжения, соединяющие заданный источник электроэнергии с заданным потребителем. Задача решается вычислением множества всех простых путей между этими узлами. При выводе из работы (состоявшемся или предполагаемом) какой-либо ветви сети диспетчеру необходимо знать, останутся ли связанными между собой узлы, которые были связаны до вывода этой ветви из работы. Остающиеся в работе связи – это резерв по связности относительно отключаемой ветви. Диспетчеру важно знать, существует ли этот резерв.

Пусть G – граф транспортной сети, x – выводимая из работы ветвь сети, α и β – концы этой ветви. Согласно формуле (3.3), граф простых путей, соединявших α и β до вывода из работы ветви x , есть тот блок $\Theta(G, x)$ графа G , который содержит ребро (ветвь) x . После вывода из работы ветви x граф простых путей, соединяющих α и β , будет выражаться формулой $\Theta(G, x) \div x$.

Связь между вершинами α и β в графе G будет нарушена после удаления ребра x тогда и только тогда, когда эти вершины окажутся принадлежащими двум разным компонентам простой связности графа G . Компонента связности графа G , содержащая вершину α , выражается формулой $\alpha \wedge G$; компонента, содержащая вершину β – формулой $\beta \wedge G$. Эти компоненты различны тогда и только тогда, когда их пересечение пусто:

$$(\alpha \wedge G) \& (\beta \wedge G) = \emptyset.$$

Пример 4. Вычисление препятствий при движении из одной вершины транспортной сети в другую. Пусть имеется транспортная сеть “с препятствиями”. Препятствием считаем вершину графа сети, проход через которую невозможен. В электрической сети такими препятствиями могут быть отключенные коммутационные аппараты. Предположим, что в графовой модели электрической сети каждое устройство представлено графом-звездой. Центральная вершина звезды соответствует самому устройству, а периферийные вершины – узлам соединения данного устройства со смежными устройствами. Такая графовая модель называется звездной моделью электросети. В ней, в частности, каждый выключатель и разъединитель изображается двухлучевой звездой. Из звезд отключенных выключателей и разъединителей удалим центральные вершины и смежные с ними ребра. “Препятствиями” для передачи электроэнергии по сети будут центральные вершины двухлучевых звезд, моделирующих отключенные выключатели и разъединители.

Пусть H – множество всех вершин-препятствий в сети G и пусть требуется найти все препятствия на простых путях от вершины α до вершины β . Сначала рассмотрим более простую задачу – узнать, существует ли хотя бы один путь от α до β , свободный от препятствий. При этом анализ двусвязности сети не требуется, достаточно анализа простой связности. Искомый путь существует тогда и только тогда, когда вершина β принадлежит графу $\alpha \wedge (G - H)$. Граф $\alpha \wedge (G - H)$ содержит все те и только те вершины сети, которые достижимы из вершины α в обход препятствий, образующих множество H .

В изначальной задаче о вычислении препятствий естественно предполагать, что вершины α и β не смежны в графе G . Тогда граф простых путей, соединяющих вершины α и β в обход всех препятствий, образующих множество H , можно построить на основе теоремы 4. Для этого соединим вершины α и β временным ребром $x = (\alpha, \beta)$. Используя формулу (6.1), получаем, что объединение всех простых путей (как графов), соединяющих вершины α и β и не проходящих через вершины множества H , выражается равенством

$$P(G - H, \alpha, \beta) = \Theta(G - H + x, x) \div x.$$

Для вычисления этого графа нужно выполнить анализ двусвязности графа $G - H + x$, выбрать блок, содержащий ребро x , и удалить это ребро. Граф, полученный из выбранного блока удалением ребра x , будет искомым графом путей $P(G - H, \alpha, \beta)$.

Без учета препятствий объединение всех путей, соединяющих вершины α и β , выражается формулой $\Theta(G + x, x) \div x$. Множество всех препятствующих вершин на этих путях дает формула

$$P(G, \alpha, \beta) \& H = \Theta(G + x, x) \& H. \quad (8.1)$$

Вычисление связей между узлами, обходящих заданное множество препятствий, имеет ту же цель, как и предыдущий пример, – визуализацию этих связей для наглядного отображения на мониторе диспетчера. Кроме того, получив по формуле (8.1) множество препятствующих вершин, диспетчер может принять меры по устранению тех или иных из этих препятствий, чтобы восстановить связность между узлами α и β .

Пример 5. Контроль допустимости переключения разъединителя под нагрузкой. В оперативном управлении электросетями к задаче вычисления множества препятствий приводит, в частности, анализ допустимости переключения разъединителей под нагрузкой. Разъединители относятся к числу основных силовых коммутационных аппаратов в сетях высокого напряжения; переключение разъединителя – часто выполняемая операция. Анализ допустимости этой операции производится до ее предполагаемого выполнения. Он может осуществляться либо человеком мысленно, либо автоматическим устройством контроля – по заданному алгоритму. Автоматический контроль производится также при тренировках персонала на компьютерных тренажерах. Методы, описанные в статье, позволяют лаконично выразить алгоритм контроля посредством операций над графами.

Согласно правилам переключений в электрических сетях высокого напряжения, переключение разъединителя под нагрузкой допускается только при наличии замкнутой цепи, шунтирующей данный разъединитель. Это цепь с незначительным сопротивлением, соединяющая полюсы разъединителя в обход его контакта. Шунтирующая цепь не содержит устройств, имеющих большое сопротивление, – линий электропередачи, трансформаторов и др. Она состоит в основном из секций шин и включенных КА – выключателей и других разъединителей. Переключение разъединителя под нагрузкой разрешается при наличии у него хотя бы одной такой шунтирующей цепи. Она предотвращает возникновение электрической дуги в разъединителе во время его переключения. Такая дуга опасна для персонала и оборудования.

Цепь, шунтирующая переключаемый разъединитель, должна быть надежной: она не должна допускать замыкания (человеком или автоматикой), пока меняется положение контакта разъединителя. Для этого должны быть отключены электромагнитные приводы всех входящих в эту цепь КА – на время переключения контролируемого разъединителя. Если в шунтирующей цепи привод коммутационного аппарата включен, то это означает ненадежность включенного положения коммутационного аппарата. Такой коммутационный аппарат будем считать “препятствием” в шунтирующей цепи.

Предположим, что электрическая схема представлена звездной моделью – графом G (см. пример 4). В ней каждый разъединитель описывается двухлучевой звездой. Из звезд отключенных выключателей и разъединителей удалены центральные вершины и смежные с ними ребра. Пусть δ – центральная вершина графа-звезды контролируемого разъединителя, α и β – концевые вершины этой звезды: они соответствуют полюсам разъединителя. Найдем все простые пути в графе G , соединяющие вершины α и β , не проходя через вершину δ . Это будут цепи, шунтирующие контролируемый разъединитель. Найдем в этих цепях все коммутационные аппараты с включенными приводами. Центральные вершины их звезд будут препятствиями в найденных путях. Тогда можно будет установить, существует ли среди найденных шунтирующих цепей надежная цепь. Ею будет простой путь в графе G , соединяющий вершины α и β и не содержащий вершину δ и вершины-препятствия.

Граф-звезда, представляющая контролируемый разъединитель, выражается формулой δ^*G . Множество, состоящее из пары вершин α и β (граф без ребер), определяется формулой $(\delta^*G) - \delta$.

Обозначим через E множество центральных вершин звезд, представляющих все те устройства электрической сети, которые имеют значительное сопротивление. В основном это линии электропередачи и силовые трансформаторы. Через C обозначим множество центральных вершин звезд всех отключенных КА. Тогда граф $G-E-C$ будет объединением всех цепей (в пределах контролируемого участка сети), обладающих достаточно малым сопротивлением. Его вершины представляют в основном секции шин и включенные выключатели и разъединители.

Граф $\alpha^{\wedge}(G-E-C)$ есть объединение всех путей в графе сети, представляющих цепи с достаточно малым сопротивлением, которые содержат узел α . Связь между полюсами α и β разъединителя δ по обходной цепи с достаточно малым сопротивлением имеется тогда и только тогда, когда полюс β принадлежит графу $\alpha^{\wedge}(G-E-C-\delta)$.

Обозначим через U множество всех КА, нештатное отключение которых не заблокировано посредством отключения питания их приводов. На привод каждого КА из множества U подан оперативный ток, так что U есть множество “препятствий”. Надежная связь между полюсами α и β разъединителя по обходной цепи с достаточно малым сопротивлением будет существовать тогда и только тогда, когда полюс β принадлежит графу $\alpha^{\wedge}(G-E-C-U-\delta)$.

Найдем теперь множество всех “надежных” обходных цепей. Граф δ^*G есть двухлучевая звезда с центральной вершиной δ . Этот граф является простым путем в графе $G-E-C-U$, соединяющим узлы α и β . По теореме 3, объединение всех простых путей, соединяющих узлы α и β в графе $G-E-C-U$, выражается формулой $(\delta^*G) \parallel (G-E-C-U)$. Каждый из этих путей представляет “надежную” цепь с достаточно малым сопротивлением между полюсами α и β рассматриваемого разъединителя. Из этих цепей разъединитель шунтируется теми, которые не проходят через его центральную вершину δ . Объединение последних есть

$$P(G-E-C-U, \alpha, \beta) - \delta = ((\delta^*G) \parallel (G-E-C-U)) - \delta,$$

где $P(g, \sigma, \tau)$ обозначает граф простых путей, соединяющих вершины σ и τ графе g .

Пустота данного графа будет означать, что надежных шунтирующих цепей у анализируемого разъединителя нет. Тогда возникает вопрос: имеет ли вообще этот разъединитель шунтирующие цепи, пусть даже с включенным питанием приводов части КА? Если имеет, то следует найти множество таких КА, отключение приводов которых могло бы создать “надежную” шунтирующую цепь. Граф шунтирующих цепей с незначительным сопротивлением, шунтирующих (обходящих) разъединитель δ , есть

$$P(G-E-C, \alpha, \beta) - \delta = ((\delta^*G) \parallel (G-E-C)) - \delta. \quad (8.2)$$

А множество шунтирующих КА с включенными приводами есть

$$(P(G-E-C, \alpha, \beta) - \delta) \& U = (((\delta^*G) \parallel (G-E-C)) - \delta) \& U.$$

Если граф (8.2) не пуст, то отключение приводов этих КА создаст надежные обходные цепи для рассматриваемого разъединителя.

Пример 6. Вычисление всех связей потребителя с источниками. Эта задача возникает, когда нужно оценить надежность снабжения определенного потребителя в транспортной сети. В электрических сетях это означает надежность электропитания. Снабжение тем надежнее, чем больше оно имеет независимых источников. Задача актуальна как в оперативном (онлайновом) управлении электрическими сетями, так и в оффлайновом режиме управления – на стадии проектирования электросети и предварительного исследования ее режимов.

Пусть α – узел в графе G , представляющий потребителя, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ – узлы-источники. Их множество обозначим через B . Найдем все простые пути в графе G , соединяющие вершину α с вершинами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$. По классификации задач, показанной на рис. 1, это задача типа II. Построим ее решение на основе следствия 1 теоремы 5. Предполагаем, что вершина α не смежна ни с одной из вершин $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$. Выполнение этого условия легко обеспечить. Допустим, что вершины α и β_1 смежны. Тогда добавим в середину ребра (α, β_1) новую искусственную вершину. Вершины α и β_1 станут несмежными.

Рассматриваемая задача как задача типа II решается добавлением временных ребер $(\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2), \dots, (\alpha, \beta_K)$. Их объединение как графов образует звезду. Обозначим ее X . Решение дает формула (6.4). Из нее получаем выражение графа простых путей, соединяющих вершину α с вершинами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$:

$$W(G, \alpha + B) = (X \parallel (G + X)) \div X.$$

Пример 7. Вычисление всех связей источника с потребителями. Эта задача аналогична предыдущей. Она возникает при оценке надежности снабжения потребителей из заданного источника. Математическое решение получается по формулам решения предыдущей задачи переменной ролей источников и потребителей.

Пример 8. Распознавание оперативных состояний устройств в электросети. Центры управления электрическими сетями осуществляют в реальном времени мониторинг оперативного состояния оборудования. К числу основных характеристик последнего относится признак наличия/отсутствия тока нагрузки на устройствах. При наличии тока нагрузки устройство считается находящимся “под нагрузкой”. Когда тока нагрузки на устройстве нет, то различают два его состояния – “на холостом ходу” и “без напряжения”. Состояние холостого хода означает, что устройство находится под напряжением, но не “под нагрузкой”.

Прямой метод определения наличия/отсутствия тока нагрузки на устройстве состоит в непосредственном измерении тока соответствующими приборами. Однако в существующих электросетях датчики тока установлены не на всех устройствах, а измерения от имеющихся датчиков не всегда передаются в центр управления. В центре управления для восполнения недостающей

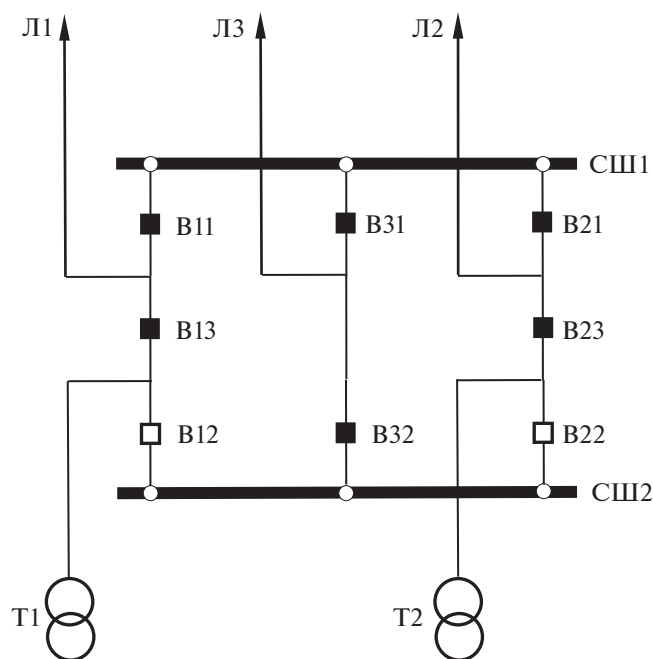


Рис. 12. Схема распределительного устройства на подстанции

информации о токах нагрузки может применяться топологический метод их распознавания. Он основан на правиле: ток нагрузки на устройстве присутствует тогда и только тогда, когда через это устройство проходит замкнутая цепь от какого-нибудь источника до какого-то потребителя. Топологический критерий состояния устройств “под нагрузкой” используется также при имитационном моделировании электросетей.

Предположим, что в графовой звездной модели электрической сети выделена некоторая часть – подграф g . Считаем, что эта часть соединена с окружающей сетью посредством совокупности узлов, состоящей из двух непересекающихся множеств S и C – узлов-источников и узлов-потребителей. Через узлы множества S электроэнергия поступает в схему g , через узлы множества C – уходит к потребителям. Найдем граф всех простых путей $W(g, S + C)$, соединяющих в графе g узлы множества S с узлами множества C . Граф путей $W(g, S + C)$ дает ответ на вопрос, какие устройства, принадлежащие части g электросети, находятся под нагрузкой. Это те и только те устройства, центральные вершины звезд которых принадлежат графу $W(g, S + C)$.

На рис. 12 приведена схема распределительного устройства на подстанции. По линиям электропередачи (ЛЭП) Л1, Л2 и Л3 электроэнергия поступает на данное распределительное устройство. Через понижающие трансформаторы Т1 и Т2 электроэнергия уходит с распределительного устройства. Как принято у диспетчеров, на этой схеме вместо изображения всех реальных коммутационных аппаратов показаны “обобщенные выключатели”. Каждый “обобщенный выключатель” представляет неразветвленную цепочку из нескольких выключателей и разъединителей, соединенных последовательно. Он считается “включенным”, когда включены все реальные КА в представляемой им цепочке; в противном случае он считается отключенным. Состояниями “обобщенных выключателей” определяются замкнутые цепи, соединяющие ЛЭП с трансформаторами. На рис. 12 “обобщенные выключатели” изображены квадратами: включенные – закрашенными, отключенные – незакрашенными.

На рис. 13 приведен граф звездной модели конфигурации данного распределительного устройства при тех состояниях “обобщенных выключателей”, которые даны на рис. 12. Узлы-источники (ЛЭП) изображены треугольниками, узлы-потребители (трансформаторы) – ромбами. Каждое устройство моделируется звездой: системы шин СШ1 и СШ2 – трехлучевыми звездами, включенные “обобщенные выключатели” – двухлучевыми звездами. Отключенные “обобщенные выключатели” В12 и В22 непосредственно не показаны: из их звезд удалены центральные вершины и все ребра. ЛЭП и трансформаторы отображаются однолучевыми звездами, поскольку в пределах рассматриваемой схемы каждое из этих устройств соединено со смежными устройствами только через один узел.

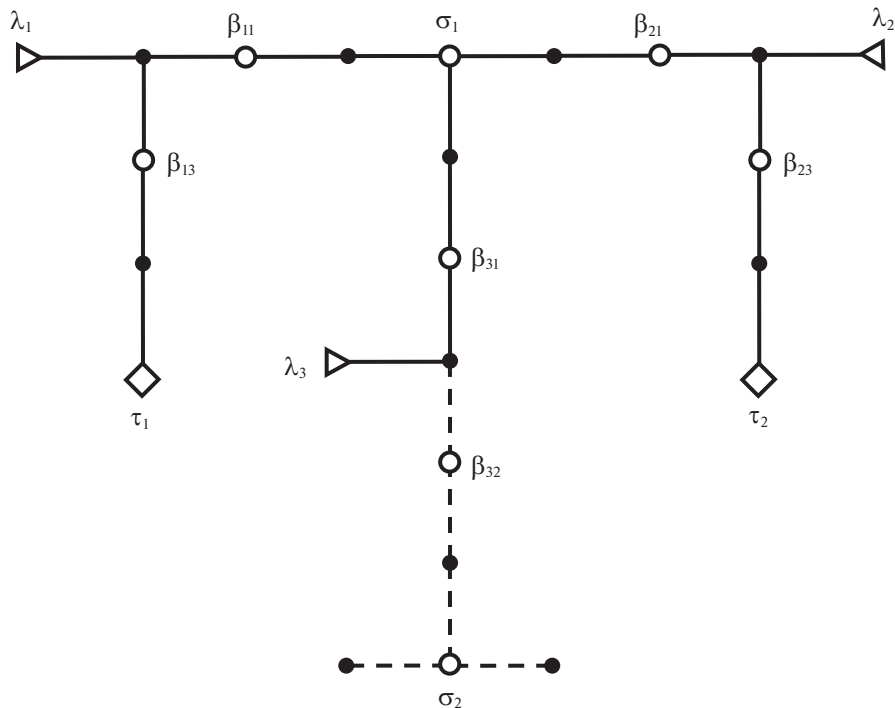


Рис. 13. Граф распреустройства, представленного на рис. 12, и подграф простых путей, соединяющих в этой конфигурации распреустройства источники с потребителями

В графе на рис. 13 входам ЛЭП Л1, Л2 и Л3 соответствует множество узлов-источников $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$; трансформаторам Т1 и Т2 – множество узлов-потребителей $C = \{\tau_1, \tau_2\}$; шинам СШ1 и СШ2 – узлы σ_1 и σ_2 . Выключатели В11, В31, В21, В13, В23, В32 представлены соответственно узлами $\beta_{11}, \beta_{31}, \beta_{21}, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{32}$. Простые пути, соединяющие узлы-источники с узлами-потребителями, показаны сплошными линиями. Их объединение образует граф путей $W(g, S + C)$. Остальные связи в графе распреустройства изображены прерывистыми линиями.

Из рис. 13 сразу видно, какие устройства внутри схемы находятся под нагрузкой и какие – на холостом ходу. Внутренними (не концевыми) узлами устройств в графе $W(g, S + C)$ будут узлы $\sigma_1, \beta_{11}, \beta_{31}, \beta_{21}, \beta_{13}, \beta_{23}$. Они отображают систему шин СШ1 и “обобщенные выключатели” В11, В31, В21, В13 и В23. Узлы σ_2 и β_{32} соединены с узлами-источниками λ_1, λ_2 и λ_3 в связном графе g , но не принадлежат графу путей $W(g, S + C)$. Поэтому представленные ими устройства – система шин СШ2 и “обобщенный выключатель” В32 – находятся под напряжением, но не под нагрузкой, что означает состояние холостого хода.

Пример 9. Восстановление надежной связности сети после аварии. Требования по надежности связей между различными парами узлов транспортной сети могут различаться. К ответственным связям могут предъявляться “критерий $N-3$ ” или “критерий $N-2$ ”. Для менее ответственных может по соображениям экономии считаться достаточным соответствие “критерию $N-1$ ”. Выполнение “критерия $N-1$ ” по связности узлов α и β означает наличие между этими узлами двух путей, не имеющих других общих узлов, кроме α и β . Такие пути будем называть внутренне не пересекающимися. Они функционально не зависят друг от друга: повреждение элементов одного из них, выражаемое математически в удалении из него ребер или промежуточных вершин, не влияет на функциональность другого пути. Поскольку речь идет только о связности, пропускная способность ветвей не учитывается. Аналогичным образом в случае выполнения “критерия $N-2$ ” по связности узлов α и β эти узлы соединены тремя внутренне не пересекающимися простыми путями.

Пара внутренне не пересекающихся простых путей, соединяющих узлы α и β , образует простой цикл в графе сети. Поскольку простой цикл есть вершинно двусвязный граф, то узлы α и β принадлежат одной компоненте вершинной двусвязности графа сети. И обратно, любые две вершины вершинно двусвязного графа соединены в этом графе двумя внутренне

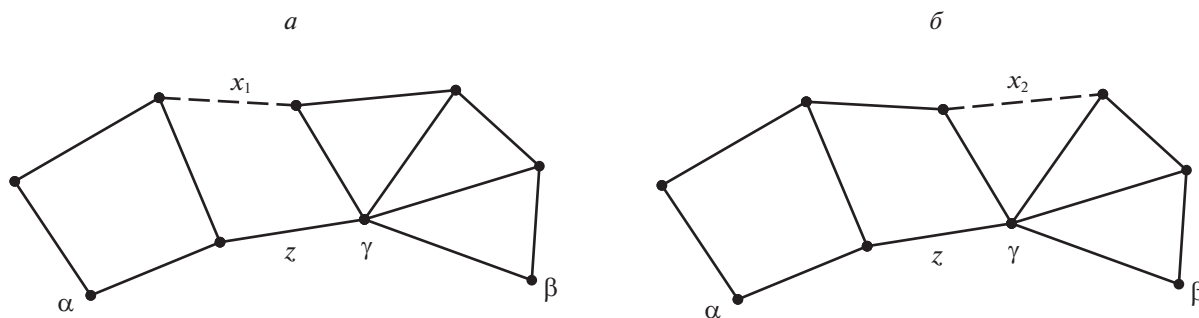


Рис. 14. “Узкие места” в послеаварийной конфигурации транспортной сети: мост z (а); шарнир γ (б). Штриховыми линиями показаны разорванные связи

непересекающимися простыми путями. Поэтому поддержание надежной связности на уровне “ $N-1$ ” для тех пар узлов сети, для которых установлена необходимость в этом (по техническим условиям управления сетью), равносильно обеспечению постоянства распределения вершин графа сети по компонентам его вершинной двусвязности.

Соединение двух узлов сети двумя внутренне непересекающимися путями будем называть двусвязным соединением этих узлов. Два узла сети соединены двусвязно тогда и только тогда, когда они принадлежат одной компоненте вершинной двусвязности графа сети.

Предположим, что при аварии в некоторой неразделимой части транспортной сети связность сети не нарушена, а нарушена только ее неразделимость, так что снизилась надежность этой части сети по связности. Нарушение неразделимости означает появление в сети “узких мест” — шарниров или мостов в ее графе. Для их устранения и восстановления неразделимости сети необходимо на период ремонта вышедшего из строя оборудования оперативно ввести в работу оборудование из ненагруженного (холостого) резерва, если такое оборудование имеется. Что касается электрических сетей, то обычно оборудование, находящееся в ненагруженном резерве, при необходимости может быть включено в работу оперативно — в пределах короткого времени. Оборудование, находящееся в плановом ремонте, также может быть введено в работу в течение определенного времени. В случае нарушения неразделимости участка сети при аварии может рассматриваться вопрос о восстановлении его неразделимости за счет резервного или ремонтируемого оборудования, допускающего оперативное включение.

Обозначим через G граф соединений всего установленного оборудования электрической сети (работающего, ремонтируемого и резервного), через g — граф активной (находящейся в работе) конфигурации электрической сети до аварии. Пусть узлы α и β сети принадлежат некоторой компоненте вершинной двусвязности графа g . Предположим, что из-за аварии (например, на линии электропередачи) оказалась разорвана связь, представленная ребром x на некотором простом пути, соединяющем вершины α и β . Требуется выяснить: 1) сохранилась ли двусвязность соединения узлов α и β ; 2) если нет, то можно ли восстановить двусвязное соединение этих узлов за счет резервного и ремонтируемого оборудования, допускающего оперативное включение.

Ответ на первый вопрос утвердителен тогда и только тогда, когда оба узла α и β принадлежат одной компоненте вершинной двусвязности графа $g \dot{-} x$. На второй вопрос ответ утвердителен тогда и только тогда, когда узлы α и β принадлежат одной компоненте вершинной двусвязности графа $G \dot{-} x$.

Если граф $g \dot{-} x$ не будет вершинно двусвязным, то в нем должны быть “узкие места” — мосты и шарниры. На рис. 14 изображены два варианта появления “узкого места” после разрыва связи x в транспортной сети, которая была неразделимой до аварии. Разорванная связь x изображена штриховой линией. На рис. 14, а показан случай, когда в результате разрыва связи x_1 появляется мост z . После аварии любой путь от α до β должен проходить через этот мост. На рис. 14, б при разрыве связи x_2 появляется шарнир γ , и каждый путь от α до β будет проходить через этот шарнир.

Рассмотрим теперь, как узнать: 1) сохранилась ли двусвязность соединения для всех тех пар узлов сети, которые имели двусвязное соединение до аварии; 2) для каких пар узлов можно восстановить двусвязное соединение, если оно нарушено.

Ответ на первый вопрос утвердителен тогда и только тогда, когда у графа $g \dot{\div} x$ распределение вершин между компонентами вершинной двусвязности такое же, как и у графа g . Для проверки нужно вычислить все компоненты вершинной двусвязности графов g и $g \dot{\div} x$. Ответ на второй вопрос: восстановление нарушенного двусвязного соединения возможно для тех и только тех пар узлов, которые принадлежат одной компоненте вершинной двусвязности графа $G \dot{\div} x$.

Пример 10. Топологический анализ шунтирующих сетей. Электрическая сеть, контролируемая одним центром диспетчерского управления, обычно содержит ЛЭП различных классов напряжения. Основной вклад в передачу электроэнергии по сети вносят ЛЭП самого высокого (для данной сети) класса напряжения. Эти линии имеют наибольшую пропускную способность. На уровне энергообъединений и региональных энергосистем их совокупность называют *магистральной сетью*. Остальная часть электросети — это *регионально-распределительная сеть*. Ветви этих сетей представляют ЛЭП, узлы — электростанции, подстанции и обобщенных потребителей. Узлы сопряжения регионально-распределительной сети с магистральной сетью называются *центрами питания* регионально-распределительной сети. Они принадлежат одновременно и магистральной сети, и регионально-распределительной. Других общих элементов магистральная и регионально-распределительная сети не имеют.

Если два центра питания соединены посредством и магистральных ЛЭП, и регионально-распределительных, то последние называются *шунтирующими* по отношению к магистральной сети. Всякая шунтирующая ЛЭП представлена в графе регионально-распределительной сети ребром на некотором простом пути между двумя центрами питания. Совокупность шунтирующих ЛЭП вместе с соединяемыми ими подстанциями регионально-распределительной сети будем называть *шунтирующей сетью* относительно данной пары центров питания. Некоторая часть электроэнергии передается между узлами магистральной сети по шунтирующим сетям. Хотя вклад шунтирующей сети в транспортные функции всей сети относительно невелик, он может составлять существенную часть резерва ее пропускной способности и этим ощутимо влиять на надежность режима сети в целом, на его устойчивость при возмущениях.

Из определения шунтирующей ЛЭП следует, что функцию шунтирования по отношению к магистральной сети выполняют не все ЛЭП и подстанции в регионально-распределительной сети. Возникает следующая задача: для заданной магистральной сети выделить шунтирующую ее сеть в пределах регионально-распределительной сети, контролируемой заданным центром диспетчерского управления.

Обозначим через M граф текущей конфигурации (активной, работающей части) магистральной сети в нормальном режиме. Предполагаем его связным. Через R обозначим граф текущей конфигурации регионально-распределительной сети, контролируемой центром диспетчерского управления. В состав графов M и R входят центры питания регионально-распределительной сети (далее — центры питания). Их множество есть $M \& R$.

Пусть α — один из центров питания. Множество всех центров питания, соединенных с α по шунтирующей сети, дается формулой $(\alpha \wedge R) \& M$. Граф шунтирующей сети равен объединению всех простых путей в графе R , соединяющих ее центры питания. Относительно текущей конфигурации магистральной сети этот граф выражается формулой $(M \parallel (M + R)) \& R$. Связная часть графа шунтирующей сети, содержащая центр питания α , выражается формулой $(M \parallel (M + R)) \& (\alpha \wedge R)$.

Влияние регионально-распределительных сетей важно учитывать и на нормальные режимы, и особенно на аварийные. Если в аварийной ситуации нарушена связность основной части сети, роль шунтирующей сети может оказаться решающей для устойчивости режима. В этом случае для эффективного оперативного управления сетью диспетчеру необходимо располагать следующей информацией:

- а) связывает ли текущая конфигурация шунтирующей сети те узлы магистральной сети, связь между которыми по магистральным линиям нарушена;
- б) при наличии ситуации типа а) достаточна ли пропускная способность текущей конфигурации шунтирующей сети для выравнивания небаланса генерируемой и потребляемой мощности между разделившимися областями магистральной сети;
- в) если пропускная способность текущей конфигурации шунтирующей сети недостаточна (в частности, нулевая), то существуют ли в шунтирующей сети такие ненагруженные или ремонтируемые ЛЭП, которые можно оперативно ввести в работу и тем обеспечить временную (на период восстановления магистральной сети) связь между разделившимися областями магистральной сети;

г) возможно ли обеспечить приемлемые (на период восстановления магистральной сети) параметры функционирования электросети как целого путем оперативного ввода в работу дополнительных шунтирующих ЛЭП.

Аналогичные задачи возникают при оперативном управлении не только электрическими сетями, но и транспортными сетями других типов. Предположим, например, что в результате природного катаклизма разрушен мост на двухпутной электрифицированной железнодорожной магистрали, но имеются обходные (относительно этого моста) однопутные неэлектрифицированные железнодорожные линии. Оперативно-диспетчерским службам важно знать прежде всего структуру этих “шунтирующих” линий, а затем их пропускную способность и техническое состояние, чтобы оценить возможности временной компенсации нарушенной транспортной связи.

Для ответа на эти вопросы необходимо выделить соответствующие части транспортной сети и вычислить их пропускную способность. Вторая из этих задач лежит за рамками темы статьи. Остановимся на первой.

Обозначим через M' граф активной конфигурации магистральной электрической сети после аварии. Пусть α и β — два ее узла. Предположим, что в результате аварии узлы α и β оказались не связанными через магистральную сеть. Если при этом они остаются соединенными посредством шунтирующей сети, то часть соединяющего их пути может проходить по магистральным линиям. Тогда находим, что посредством шунтирующей сети узлы α и β будут связаны тогда и только тогда, когда узел β принадлежит графу $\alpha^{\wedge}(M' + R)$, т.е. при выполнении равенства

$$(\alpha^{\wedge}(M' + R)) \& \beta = \beta. \quad (8.3)$$

Это условие можно записать также равенством, симметричным относительно α и β :

$$\alpha^{\wedge}(M' + R) = \beta^{\wedge}(M' + R). \quad (8.4)$$

Критерии, выражаемые равенствами (8.3) и (8.4), дают ответ на вопрос а).

Для ответа на вопрос б) нужно вычислить ту часть шунтирующей сети, которая участвует в передаче электроэнергии между узлами α и β магистральной сети, когда связи между ними по магистральным ЛЭП оказались разорваны. Факт разрыва связей по магистральным ЛЭП выражается соотношением $(\alpha^{\wedge}M') \& \beta = \emptyset$. Сохранение связей между α и β посредством шунтирующей сети описывают соотношения (8.3) и (8.4).

Путь, соединяющий узлы α и β после аварии, должен проходить по некоторым ребрам графа R и может частично проходить по графу M' . Найдем граф простых путей, соединяющих узлы α и β , во всей послеаварийной сети. Воспользуемся методом, основанным на теореме 4. Соединим узлы α и β временным ребром x . Объединение всех простых путей, соединяющих вершины α и β в графе $M' + R + x$, выражается формулой $x \parallel (M' + R + x)$. Удаляя ребро x , получаем объединение всех путей, соединяющих α и β после аварии:

$$(x \parallel (M' + R + x)) \div x. \quad (8.5)$$

Регионально-распределительной сети принадлежит часть этого графа, выражаемая как

$$((x \parallel (M' + R + x)) \div x) \& R. \quad (8.6)$$

Формулы (8.5) и (8.6) представляют те сети, которые нужно исследовать на пропускную способность для ответа на вопрос б).

Для ответа на вопрос в) нужно к графу R добавить ребра, представляющие все ЛЭП регионально-распределительных сетей, которые могут быть оперативно введены в работу из состояния ненагруженного резерва или ремонта. Это же нужно выполнить для решения задачи г). Вычисление пропускной способности сетей не рассматриваем, а построение графа путей между α и β производится изложенными методами. Иногда (например, в распределительных сетях) для решения по восстановлению электроснабжения по временной схеме достаточно анализа топологии, без исследования режима.

Пример 11. Применение графов простых путей в исследованиях уязвимости сетей по связности. В последние годы растет число исследований по алгоритмам, предназначенным для атак на сети с целью ослабления их связности, а также для противодействия таким атакам [28, 29]. Алгоритм эффективной атаки должен находить в графе такие “слабые места” — подграфы определенного вида (вершины, ребра, звезды, клики и т.п.), удаление которых минимизирует некоторую меру связности получаемого графа. Предполагается, что для каждого типа удаляемых подграфов

задана стоимость операции удаления подграфа. Задано также ограничение на суммарную стоимость всех операций удаления подграфов в алгоритме. В качестве мер связности графа используются, например, наибольшая величина компоненты связности или число пар соединенных вершин. Величина компоненты связности определяется как число вершин в ней. Две вершины считаются соединенными, если они принадлежат одной компоненте связности.

Данный подход, относящийся к области комбинаторной оптимизации, позволяет исследовать уязвимость таких структур, как сети передачи данных, распространения инфекций, взаимодействия белков и др. Для транспортных сетей он, как правило, недостаточен [30]. Поскольку транспортная сеть служит для передачи ресурса от источников к потребителям, то для нарушения ее функциональности нужно добиваться снижения не общих комбинаторных показателей ее связности, а пропускной способности сети между узлами-источниками и узлами-потребителями. Задача может ставиться, например, как разрыв всех связей между теми и другими. Тогда не следует накладывать ограничение константой на суммарную стоимость операций удаления элементов сети, а нужно требовать только минимизации этой суммы. Для решения такой задачи не нужно анализировать всю сеть – его надо искать в пределах графа простых путей, соединяющих узлы-источники с узлами-потребителями.

Если же суммарные затраты на повреждение сети ограничены константой, то гарантировать полный разрыв связей между источниками и потребителями в общем случае невозможно. Тогда следует добиваться минимизации пропускной способности сети между множествами узлов-источников и узлов-потребителей. Для этого необходимо моделировать потоки в сети, причем достаточно исследовать их не по всей сети, а в пределах графа простых путей, соединяющих источники с потребителями.

Поясним использование графа простых путей между источниками и потребителями в задаче разрыва всех связей между теми и другими на примере схемы, изображенной на рис. 12. Она описана в примере 8; граф ее звездной модели дан на рис. 13. Схема содержит три источника – ЛЭП Л1, Л2 и Л3 и два потребителя – трансформаторы Т1 и Т2. Как и в примере 8, через g будем обозначать граф рассматриваемой электрической схемы, через S и C – множества узлов-источников и узлов-потребителей, через $W(g, S + C)$ – граф простых путей, соединяющих множества S и C в графе g . Ребра графа путей $W(g, S + C)$ показаны на рис. 13 сплошными линиями, остальные ребра графа g – штриховыми линиями. На рис. 13 видно, что для отделения узлов-потребителей τ_1 и τ_2 от узлов-источников $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нет смысла удалять вершины графа g , не принадлежащие графу путей $W(g, S + C)$.

Если не рассматривать физическое разрушение элементов электросети, а только “цивилизованный” способ вывода их из работы, то он состоит в отключении выключателей. При отключении коммутационного аппарата происходит удаление центральной вершины звезды, представляющей данный КА, из графа звездной модели электросети. Будем считать, что операции отключения выключателей имеют одинаковую стоимость. Тогда для минимизации стоимости отделения потребителей от источников нужно минимизировать число отключений выключателей. Иначе говоря – число удаляемых из графа g вершин, представляющих выключатели.

Из схемы на рис. 12 ясно, что для отделения трансформатора Т1 от источника Л1 необходимо отключить выключатель В13. В результате трансформатор Т1 будет отделен и от остальных источников. В графе путей $W(g, S + C)$ этой операции соответствует удаление вершины β_{13} . При этом граф исходной схемы g преобразуется в граф $g - \beta_{13}$, граф путей – в граф $W(g - \beta_{13}, S + C)$. На рис. 15, а ребра последнего показаны сплошными линиями; остальные ребра графа $g - \beta_{13}$ – штриховыми.

Аналогичным образом для отделения трансформатора Т2 от источника Л2 необходимо отключить выключатель В23. В результате трансформатор Т2 будет отделен также от остальных источников. В графе путей $W(g, S + C)$ этой операции соответствует удаление вершины β_{23} . В результате граф g преобразуется в граф $g - \beta_{23}$, граф путей – в граф $W(g - \beta_{23}, S + C)$. На рис. 15, б ребра последнего показаны сплошными линиями; остальные ребра графа $g - \beta_{23}$ – штриховыми.

Из сказанного следует, что для отделения обоих трансформаторов Т1 и Т2 от источников Л1, Л2 и Л3 необходимо и достаточно отключить два выключателя: В13 и В23. В графе g этому будет соответствовать удаление вершин β_{13} и β_{23} . В результате из этого графа получится граф $g - \beta_{13} - \beta_{23}$, показанный на рис. 16. В нем граф путей, соединяющих источники с потребителями, пуст.

Задачи максимального ослабления связности графов посредством отыскания и удаления их слабых мест (в смысле указанных мер связности, при ограничениях на затраты по удалению) являются в общем случае NP -полными [29]. В то же время алгоритмы вычисления графов путей,

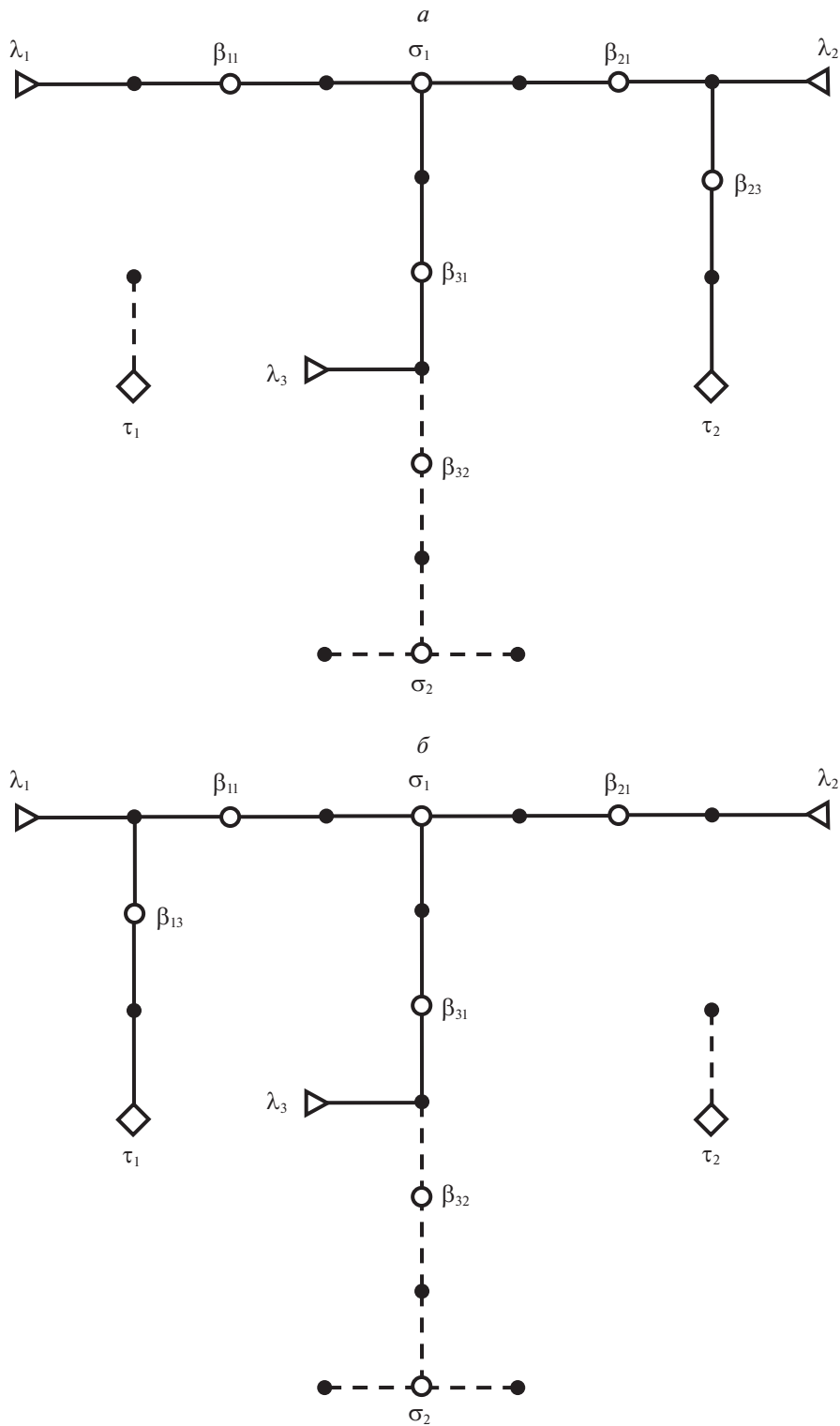


Рис. 15. Граф конфигурации распреустройства, изображенного на рис. 12, после удаления узла β_{13} и подграф простых путей, соединяющих в полученной конфигурации источники с потребителями (а); аналогичный граф – после удаления узла β_{23} (б)

описанные в настоящей статье, имеют вычислительную сложность $O(n + m)$, где n – число вершин исходного графа, m – число его ребер. Так что предварительное вычисление графа путей не увеличивает порядок сложности задачи ослабления связности графа, но число вершин и ребер в

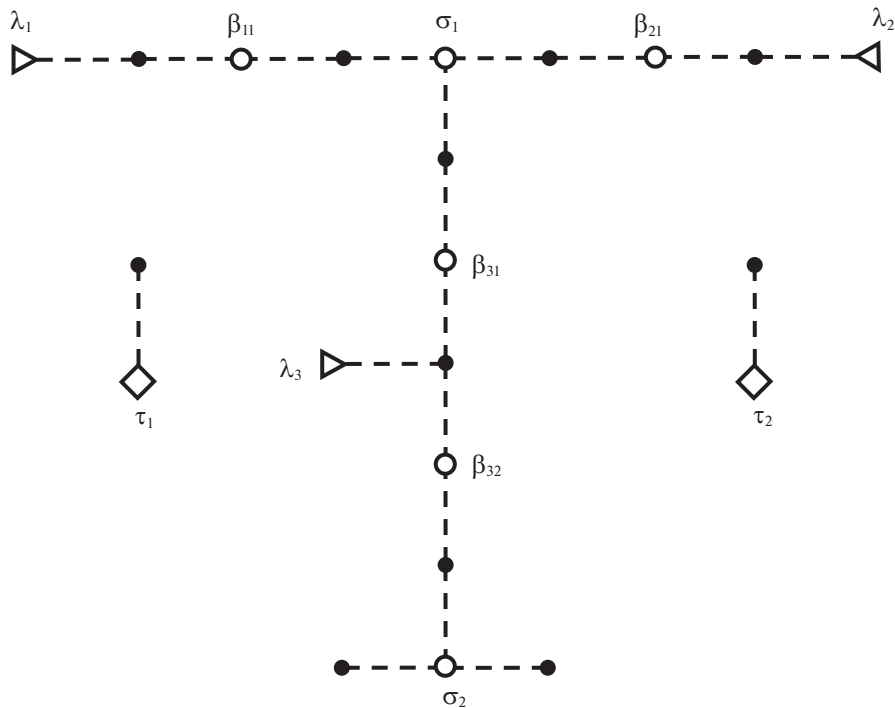


Рис. 16. Граф конфигурации распрестройства, изображенного на рис. 12, после удаления узлов β_{13} и β_{23} , при пустом подграфе простых путей, соединяющих в полученной конфигурации источники с потребителями

графе путей может оказаться значительно меньшим, чем в исходном графе. В этом заключается смысл применения аппарата, описанного в настоящей статье, к задачам анализа уязвимости сетей в аспекте связности.

Заключение. В оперативном управлении электрическими сетями одной из типовых задач моделирования и анализа сети является задача отыскания всех простых путей, соединяющих два ее узла. Значимость этой задачи определяется тем, что передачу электроэнергии от одного узла сети к другому обеспечивают все замкнутые электрические цепи, соединяющие эти два узла. Возникают также задачи нахождения всех простых путей, соединяющих группы узлов. Они актуальны и для транспортных сетей других типов.

В статье даны полные решения четырех основных задач для неориентированных графов. Они сформулированы в разд. 1. Задача I является частным случаем задач II и III. Две последние представляют частные случаи задачи IV.

Число простых путей в графе, соединяющих заданные вершины, обычно очень велико. Поэтому нет смысла представлять искомое множество путей именно как множество. В статье предложен другой подход – представлять совокупность всех искомым путей в виде неориентированного графа, являющегося их объединением. Этот граф назван “графом путей”. Он служит практически работоспособным представлением множества простых путей, определяемого в той или иной из задач I–IV. Во всех приложениях, где требуется получить такое множество путей, достаточно построить соответствующий граф путей.

Этот граф можно интерпретировать как “общее решение” задачи соединения множества вершин простыми путями. Под “частным решением” понимается любое минимальное дерево, соединяющее эти вершины. Оно содержит ровно один простой путь между любыми двумя вершинами, подлежащими соединению. Это частное решение легко извлекается из общего решения – из графа путей.

Для всех четырех задач I–IV в статье показано, что граф путей, представляющий общее решение, является объединением некоторого семейства блоков исходного графа. Отсюда вытекает неожиданный результат: граф путей оказывается не зависящим от того, на какие подмножества разбито множество вершин при попарном соединении вершин разных подмножеств этого разбиения. Данный факт означает, в частности, эквивалентность задач II и IV задаче III.

Если исходить из этих результатов, то для построения графа путей необходимо вычислить все блоки и шарниры исходного графа. Затем нужно построить дерево его блоков и шарниров и выделить в нем поддерево, представляющее блоки графа путей. Объединение этих блоков будет искомым графом путей.

Возможно, одна из причин отсутствия в литературе систематического изложения решений задач I–IV заключалась в недостатке понятий и обозначений, позволяющих сделать такое изложение лаконичным и обозримым. В статье введены и применены понятия и обозначения, служащие этой цели: понятие графа простых путей и обозначения ряда операций над графами. Например, с помощью бинарной операции “двусвязного замыкания” графов, обозначенной символом “ \parallel ”, общее решение какой-либо из задач I–IV выражается через любое ее частное решение T краткой формулой $T \parallel G$, где G – исходный граф. В задаче I частное решение T есть простой путь, в задачах II, III и IV – дерево. Формула $T \parallel G$ представляет объединение тех и только тех блоков графа G , в которых содержатся ребра дерева T . Она подсказывает следующую интерпретацию общего решения: его можно получить добавлением к частному решению T всех “обходных” простых путей в графе G . “Обходным” считается путь, концевые вершины которого принадлежат дереву T , а ребра и промежуточные вершины не принадлежат.

Предложены также упрощения указанной схемы вычисления общего решения. Они избавляют от необходимости строить дерево блоков и шарниров исходного графа и выделять из этого дерева поддерево, представляющее граф путей. Один из таких вариантов упрощения состоит в добавлении к исходному графу G графа-звезды X , соединяющей все те вершины графа G , для которых ищется соединение всевозможными простыми путями. Звезда X будет частным решением подобной задачи, но не в графе G , а в расширенном графе $G + X$. Общим решением в расширенном графе $G + X$ будет граф $X \parallel (G + X)$. Удаление из последнего графа всех ребер звезды X вместе с ее центральной вершиной σ дает общее решение задачи соединения заданных вершин в исходном графе G . Это общее решение при некоторых естественных ограничениях в постановке задачи выражается простой формулой

$$(X \parallel (G + X)) - \sigma.$$

При тех же ограничениях имеет место взаимно-однозначное соответствие между множеством компонент связности графа G и множеством компонент двусвязности графа $X \parallel (G + X)$. Оно дополнительно характеризует структуру общего решения.

Все способы построения общих решений задач I–IV требуют анализа двусвязности графов – вычисления их блоков и шарниров. Его можно произвести посредством известного алгоритма Хопкрофта–Тарьяна. По числу операций данный алгоритм имеет порядок сложности $O(n + m)$, где n – число вершин графа, m – число его ребер. Операции, которые при построении графа путей нужно выполнить помимо анализа двусвязности, оценку $O(n + m)$ не ухудшают. Она остается в силе для представленных в статье методов решения задач I–IV.

В статье рассмотрены примеры применения предложенных методов вычисления множеств простых путей в задачах управления конфигурацией транспортных сетей, в особенности электрических. Они связаны с такими прикладными технологиями, как автоматический контроль операций (планово-ремонтных и противоаварийных), поддержание штатных режимов функционирования сети, мониторинг оперативного состояния оборудования, анализ надежности, противодействие атакам на электросети, восстановление электроснабжения после аварии, безопасность выполняемых операций для персонала, безаварийность операций, тренировки персонала на компьютерных тренажерах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Построим дерево блоков и шарниров $BC(G)$ графа G . Вершины этого дерева, представляющие блоки $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ графа G , обозначим этими же символами – $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$. Вершины дерева $BC(G)$, представляющие шарниры графа G , обозначим теми же символами, которыми обозначены представляемые шарниры в графе G . В примере блоковой декомпозиции графа, показанной на рис. 2, вершина α принадлежит блоку Θ_3 , вершина β – блоку Θ_{13} .

Перенумеруем блоки так, чтобы стало: $\alpha \in \Theta_0$ и $\beta \in \Theta_n$. В дереве $BC(G)$ имеется единственный простой путь, соединяющий вершины Θ_0 и Θ_n . Обозначим этот путь через R . Путь R проходит через вершины $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-1}$ дерева $BC(G)$. Без уменьшения общности можно считать, что эти вершины расположены на пути R от Θ_0 до Θ_n в порядке их нумерации. Эти вершины чередуются

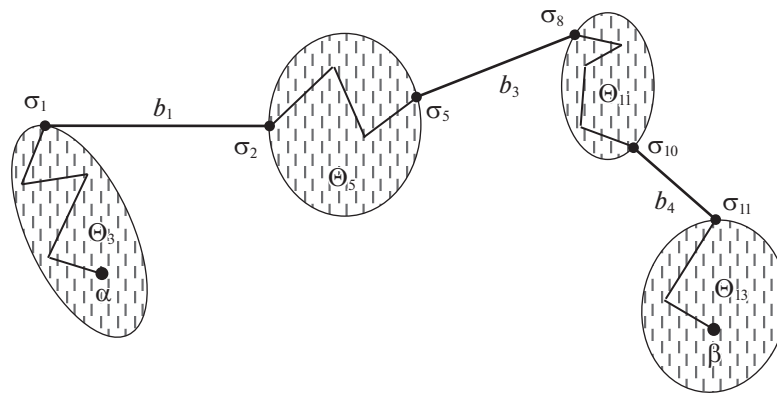


Рис. 17. Прохождение простого пути, соединяющего вершины α и β , через блоки и шарниры графа, блоковая декомпозиция которого приведена на рис. 2

на пути R с n вершинами, представляющими шарниры графа G . Шарниры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ тоже переобозначим так, чтобы при движении по простому пути R от Θ_0 до Θ_n они шли бы в последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Кроме того, положим $\sigma_0 = \alpha$ и $\sigma_{n+1} = \beta$.

Путь L проходит в графе G через все блоки $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ и через все шарниры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Но последовательности вершин $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ и вершин $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ в дереве $BC(G)$ однозначно определены принадлежностью вершин α и β блокам Θ_0 и Θ_n соответственно. Поэтому любой простой путь в графе G , соединяющий вершины α и β , будет проходить через последовательность блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ и последовательность шарниров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. И проходить через них он будет в той же последовательности. Этим доказаны утверждения 1 и 2 теоремы.

Докажем утверждение 3, т.е. формулу (3.1). Пусть L — любой простой путь в графе G , соединяющий вершины α и β . Из доказанного утверждения 1 теоремы следует

$$L \subseteq (\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n).$$

Поскольку это включение верно для каждого простого пути, соединяющего вершины α и β , то соответствующее включение будет иметь место и для объединения всех таких путей, а последнее есть граф $P(G, \alpha, \beta)$:

$$P(G, \alpha, \beta) \subseteq (\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n). \quad (\text{П.1})$$

Докажем обратное включение:

$$P(G, \alpha, \beta) \supseteq (\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n). \quad (\text{П.2})$$

Пусть x — какое-нибудь ребро блока Θ_k при каком-нибудь $k \in [0..n]$. В блоке Θ_k существует простой путь L_k , соединяющий вершины σ_k и σ_{k+1} и содержащий ребро x [25, с. 43]. Это верно и в случае, когда блок Θ_k является мостом. Отсюда следует, что ребро x принадлежит некоторому простому пути в графе G , соединяющему вершины α и β . Чтобы найти такой путь, достаточно каждую пару вершин σ_j и σ_{j+1} для $j = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ соединить простым путем L_j в пределах блока Θ_j , после чего объединить все полученные простые пути L_j для $j = 0, 1, 2, \dots, n$ (рис. 17).

Таким образом, любое ребро x , принадлежащее какому-либо из блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$, принадлежит также некоторому простому пути в графе G , соединяющему вершины α и β . Этим доказано включение (П.2). Вместе с обратным включением (П.1) оно дает равенство (3.1).

Доказательство теоремы 2. Пусть S_j и S_k — два множества из семейства множеств $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$: $j, k \in [1..K]$. Выберем какие-нибудь две вершины $\sigma_{j,p} \in S_j$ и $\sigma_{k,q} \in S_k$. Согласно теореме 1, граф простых путей $P(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$ является цепочкой блоков графа G , соединенных попарно через общие шарниры. Крайние блоки в этой цепочке, содержащие вершины $\sigma_{j,p}$ и $\sigma_{k,q}$, обозначим соответственно $\Theta_{j,p}$ и $\Theta_{k,q}$. Каждый из этих блоков содержит хотя бы одно ребро некоторого простого пути, соединяющего $\sigma_{j,p}$ и $\sigma_{k,q}$ в графе G .

Если вершина $\sigma_{j,p}$ является шарниром графа G , то этот шарнир представлен в дереве $BC(G)$ вершиной, релевантной двухэлементному множеству $\{\sigma_{j,p}, \sigma_{k,q}\}$. Если вершина $\sigma_{j,p}$ не является шарниром графа G , то вершиной, релевантной множеству $\{\sigma_{j,p}, \sigma_{k,q}\}$, в дереве $BC(G)$ представлен блок $\Theta_{j,p}$. То же самое относится к вершине $\sigma_{k,q}$ и блоку $\Theta_{k,q}$. Если обе вершины $\sigma_{j,p}$ и $\sigma_{k,q}$ принадлежат одному блоку графа G , не являясь его шарнирами, то дерево $BC(G)$ содержит единственную вершину, релевантную двухэлементному множеству $\{\sigma_{j,p}, \sigma_{k,q}\}$. В противном случае дерево $BC(G)$ содержит ровно две вершины, релевантные множеству $\{\sigma_{j,p}, \sigma_{k,q}\}$.

Если дерево $BC(G)$ содержит две вершины, релевантные множеству $\{\sigma_{j,p}, \sigma_{k,q}\}$, то найдем в этом дереве простой путь, соединяющий эти релевантные вершины. Обозначим его $L(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$. Если одна или обе концевые вершины этого простого пути представляют шарниры графа G , то удалим эти вершины (вместе с инцидентными им ребрами) из данного пути. Оставшийся простой путь обозначим $L'(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$. Он будет деревом блоков и шарниров графа $P(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$. Если же вершины $\sigma_{j,p}$ и $\sigma_{k,q}$ принадлежат одному блоку графа G , не будучи его шарнирами, то граф $P(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$ совпадает с этим блоком.

Описанное построение цепочки блоков и шарниров графа G выполним для каждой пары множеств S_j и S_k из семейства $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$, выбирая в этих множествах всевозможные пары вершин $\sigma_{j,p} \in S_j$ и $\sigma_{k,q} \in S_k$. Объединение всех простых путей вида $L(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$ будет подграфом дерева $BC(G)$. Этот подграф есть поддереву дерева $BC(G)$, соединяющее множество вершин последнего, релевантных множеству S . В самом деле, для любой пары этих релевантных вершин построенный подграф содержит соединяющий их простой путь в дереве $BC(G)$. В то же время любая концевая вершина этого подграфа релевантна множеству S . Таким образом, построенное поддерево дерева $BC(G)$ соединяет множество вершин последнего, релевантных множеству S . Следовательно, это поддерево есть $Z(G, S)$.

Объединим все графы $P(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$ для всевозможных $\sigma_{j,p} \in S_j$, $\sigma_{k,q} \in S_k$ и $S_j, S_k \in \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$. Это объединение будет графом $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$. Из предыдущего рассуждения следует, что деревом блоков и шарниров графа $W(G, S_1, S_2, \dots, S_K)$ будет объединение всех простых путей $L'(G, \sigma_{j,p}, \sigma_{k,q})$ для всевозможных $\sigma_{j,p} \in S_j$, $\sigma_{k,q} \in S_k$ и $S_j, S_k \in \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$. Это дерево получается из дерева $Z(G, S)$ удалением всех концевых вершин последнего, представляющих шарниры графа G . Этим доказательство теоремы завершено.

Доказательство теоремы 3. Согласно определению операции двусвязного замыкания, граф $T(S) \parallel G$ есть объединение всех блоков графа G , содержащих ребра графа $T(S)$. Это значит, что граф $T(S) \parallel G$ не содержит ничего, кроме некоторых блоков графа G . Граф $W(G, S)$ тоже состоит только из блоков графа G , и они являются блоками графа $W(G, S)$. Так что нужно доказать совпадение множеств блоков графа G , входящих в графы $W(G, S)$ и $T(S) \parallel G$.

Пусть Θ – блок графа $T(S) \parallel G$ и пусть x – ребро графа $T(S)$, принадлежащее блоку Θ . Поскольку ребро x принадлежит графу $W(G, S)$, который состоит из части блоков графа G , то Θ является блоком графа $W(G, S)$. Отсюда следует включение

$$W(G, S) \supseteq (T(S) \parallel G). \quad (\text{П.3})$$

Докажем обратное включение. Пусть Θ – какой-нибудь блок графа $W(G, S)$. Покажем сначала, что пересечение $\Theta \cap T(S)$ содержит хотя бы одно ребро. В силу теоремы 2, каждое ребро блока Θ принадлежит некоторому простому пути в графе G , соединяющему какие-то две вершины из множества S . Пусть x – ребро блока Θ , а вершины α и β из множества S соединены простым путем в графе G , проходящим по ребру x . Согласно теореме 1, граф всех простых путей, соединяющих вершины α и β в графе G , есть объединение некоторой цепочки блоков $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ графа G . Одним из блоков в этой цепочке должен быть блок Θ .

Так как дерево $T(S)$ соединяет все вершины множества S , то оно содержит простой путь L , соединяющий вершины α и β . В силу теоремы 1, путь L принадлежит объединению блоков, образующих цепочку блоков $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$. Следовательно, он имеет общее ребро с блоком Θ . Таким образом, пересечение $\Theta \cap T(S)$ содержит хотя бы одно ребро. Обозначим его через y .

Поскольку пересечение $\Theta \cap T(S)$ содержит ребро y , то блок Θ графа $W(G, S)$, которому принадлежит это ребро, будет блоком и графа $T(S) \parallel G$. Этим доказано включение

$$W(G, S) \subseteq (T(S) \parallel G). \quad (\text{П.4})$$

Соединяя соотношения (П.3) и (П.4), получаем равенство (5.1).

Доказательство теоремы 4. Формула (3.3) дает:

$$P(G + x, \alpha, \beta) = \Theta(G + x, x).$$

С другой стороны,

$$P(G + x, \alpha, \beta) = P(G, \alpha, \beta) + x.$$

Поэтому

$$P(G, \alpha, \beta) + x = \Theta(G + x, x),$$

откуда

$$P(G, \alpha, \beta) = \Theta(G + x, x) \div x.$$

Из определения операции двусвязного замыкания следует, что блок $\Theta(G + x, x)$ графа $G + x$ выражается формулой

$$\Theta(G + x, x) = x \parallel (G + x).$$

Отсюда

$$P(G, \alpha, \beta) = (x \parallel (G + x)) \div x.$$

Доказательство теоремы 5. Граф $W(G, S)$ есть объединение всех простых путей, соединяющих пары вершин из множества S в графе G . Пусть L – какой-либо из этих путей. Дерево T есть частное решение задачи соединения простыми путями вершин множества S в графе $G + x_1 + x_2 + \dots + x_m$. Согласно теореме 3, граф $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ является общим решением данной задачи, так что путь L – подграф графа $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$. Поскольку путь L не содержит ребер x_1, x_2, \dots, x_m , то он будет подграфом и графа

$$(T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)) \div (x_1 + x_2 + \dots + x_m).$$

Это утверждение справедливо для любого простого пути, соединяющего пару вершин из S в графе G . Поэтому имеет место включение

$$W(G, S) \subseteq ((T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)) \div (x_1 + x_2 + \dots + x_m)). \quad (\text{П.5})$$

Докажем обратное включение. Покажем, что: 1) всякая вершина графа в правой части равенства (6.3) является вершиной графа в левой части этого равенства; 2) всякое ребро графа в правой части равенства (6.3) принадлежит также графу в левой части равенства.

Граф $W(G, S)$ есть объединение некоторого множества блоков графа G . Поэтому он не содержит изолированных вершин. Граф $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ является объединением некоторого множества блоков графа $G + x_1 + x_2 + \dots + x_m$. Поэтому граф $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ не содержит изолированных вершин. Если при выполнении операции оголения графа $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ посредством графа $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ в результирующем графе появляются изолированные вершины, то они тоже удаляются. Это следует из определения операции оголения. Поэтому граф в правой части равенства (6.3) не содержит изолированных вершин.

Поскольку графы в обеих частях равенства (6.3) не содержат изолированных вершин, остается доказать, что всякое ребро графа, выражаемого правой частью данного равенства, принадлежит графу, выражаемому его левой частью.

Возьмем какое-нибудь ребро у графа, стоящего в правой части равенства (6.3). Оно не может совпадать ни с одним из ребер x_1, x_2, \dots, x_m .

Поскольку ребро u принадлежит графу $T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)$, оно принадлежит некоторому простому пути L' , соединяющему в графе $G + x_1 + x_2 + \dots + x_m$ две вершины из множества S . Если путь L' не содержит ребер x_1, x_2, \dots, x_m , то он принадлежит графу G . Тогда этот путь принадлежит графу $W(G, S)$, и этому графу принадлежит ребро u .

Пусть путь L' содержит хотя бы одно из ребер x_1, x_2, \dots, x_m . Удалим из пути L' все ребра, принадлежащие множеству $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Тогда простой путь L' распадется на несколько простых путей L'_1, L'_2, \dots, L'_k . Каждый из этих получившихся простых путей будет соединять в графе G пару вершин из множества S , так как удаленные ребра x_1, x_2, \dots, x_m соединяли только вершины из S , а концевые вершины пути L' тоже принадлежали множеству S . Таким образом, путь L' распался на некоторое множество простых путей, каждый из которых соединяет в графе G пару вершин из S . Поэтому все простые пути L'_1, L'_2, \dots, L'_k принадлежат графу путей $W(G, S)$.

Поскольку ребро u не является ни одним из ребер x_1, x_2, \dots, x_m , то оно принадлежит одному из простых путей L'_1, L'_2, \dots, L'_k . Следовательно, ребро u принадлежит графу $W(G, S)$. Этим доказано включение

$W(G, S) \supseteq ((T \parallel (G + x_1 + x_2 + \dots + x_m)) \div (x_1 + x_2 + \dots + x_m))$, обратное включению (П.5). Тем самым доказано равенство (6.3).

Доказательство теоремы 6. Докажем равенство (6.6). Дерево $X(\sigma, S)$ есть частное решение задачи соединения множества вершин S простыми путями в графе $G + X(\sigma, S)$. Поэтому

$$X(\sigma, S) \subseteq W(G + X(\sigma, S), S).$$

Очевидно также, что

$$W(G, S) \subseteq W(G + X(\sigma, S), S).$$

Отсюда получаем

$$W(G, S) + X(\sigma, S) \subseteq W(G + X(\sigma, S), S). \quad (\text{П.6})$$

Докажем обратное включение. Пусть α' и α'' – две вершины множества S , $p(\alpha', \alpha'')$ – простой путь в графе $G + X(\sigma, S)$, соединяющий вершины α' и α'' . Этот путь либо проходит через вершину σ , либо нет. Во втором случае

$$p(\alpha', \alpha'') \subseteq W(G, S).$$

В первом случае путь $p(\alpha', \alpha'')$ содержит два ребра звезды $X(\sigma, S)$. Пусть это будут ребра (β_1, σ) и (σ, β_2) . Тогда $p(\alpha', \alpha'')$ будет равен объединению, записанному в правой части равенства

$$p(\alpha', \alpha'') = p(\alpha, \beta_1) + (\beta_1, \sigma) + (\sigma, \beta_2) + p(\beta_2, \alpha''),$$

где $p(\alpha', \beta_1)$ – простой путь от α' до β_1 и $p(\beta_2, \alpha'')$ – простой путь от β_2 до α'' . Но

$$p(\alpha', \beta_1) \subseteq W(G, S) \quad \text{и} \quad p(\beta_2, \alpha'') \subseteq W(G, S),$$

так что

$$p(\alpha', \alpha'') = p(\alpha', \beta_1) + (\beta_1, \sigma) + (\sigma, \beta_2) + p(\beta_2, \alpha'') \subseteq W(G, S) + X(\sigma, S).$$

Значит, любой простой путь в графе $G + X(\sigma, S)$, соединяющий в графе G любые две вершины α' и α'' множества S , принадлежит объединению $W(G, S) + X(\sigma, S)$. Отсюда получаем

$$W(G + X(\sigma, S), S) \subseteq W(G, S) + X(\sigma, S).$$

Сопоставляя это соотношение с (П.6), получаем формулу (6.6).

Докажем формулы (6.7) и (6.8). Дерево $X(\sigma, S)$ есть частное решение задачи соединения множества вершин S простыми путями в графе $G + X(\sigma, S)$. Согласно теореме 3, общим решением этой задачи будет граф

$$W(G + X(\sigma, S), S) = (X(\sigma, S) \parallel (G + X(\sigma, S))).$$

Чтобы из этого графа получить граф простых путей $W(G, S)$, нужно убрать из него временно добавленные ребра $(\sigma, \alpha_1), (\sigma, \alpha_2), \dots, (\sigma, \alpha_N)$ и вершину σ . В результирующем графе могут появиться изолированные вершины. Ими окажутся те вершины множества S , каждая из которых принадлежит компоненте связности графа G , не содержащей других вершин множества S . Эти изолированные вершины тоже надо убрать. Все перечисленные удаления будут произведены при выполнении операции оголения графа $W(G + X(\sigma, S), S)$ посредством графа $X(\sigma, S)$:

$$W(G, S) = W(G + X(\sigma, S), S) \div X(\sigma, S) = (X(\sigma, S) \parallel (G + X(\sigma, S))) \div X(\sigma, S).$$

Равенства (6.7) и (6.8) доказаны.

Доказательство теоремы 7. Пусть дерево $T(S)$ есть частное решение задачи соединения множества вершин S в связном графе G . Обозначим через $p(\alpha_1, \alpha_2)$ простой путь, соединяющий вершины α_1 и α_2 множества S в дереве $T(S)$. Объединение

$$(\sigma, \alpha_1) + p(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_2, \sigma)$$

есть простой цикл в графе $W(G + X(\sigma, S), S)$. Обозначим его через $C(\alpha_1, \alpha_2)$.

Аналогично построим простые циклы $C(\alpha_1, \alpha_3), C(\alpha_1, \alpha_4), \dots, C(\alpha_1, \alpha_N)$ в графе $W(G + X(\sigma, S), S)$. Известно, что объединение двух вершинно двусвязных графов, имеющих общее ребро, есть вершинно двусвязный граф [24, с. 137]. Любые два из построенных простых циклов имеют общее

ребро (σ, α_1) . Поэтому объединение их всех есть вершинно двусвязный граф. Обозначим его как $\Pi(\sigma, S)$, и тогда

$$\Pi(\sigma, S) = C(\alpha_1, \alpha_2) + C(\alpha_1, \alpha_3) + \dots + C(\alpha_1, \alpha_N).$$

А поскольку

$$T(S) = p(\alpha_1, \alpha_2) + p(\alpha_1, \alpha_3) + \dots + p(\alpha_1, \alpha_N),$$

то

$$\Pi(\sigma, S) = T(S) + X(\sigma, S).$$

Граф $W(G, S)$ есть общее решение задачи соединения множества S в графе G , дерево $T(S)$ – частное решение этой задачи. В силу равенства (5.1), каждый блок графа $W(G, S)$ содержит хотя бы одно ребро дерева $T(S)$, т.е. хотя бы одно ребро графа $\Pi(\sigma, S)$. Поэтому объединение любого блока графа $W(G, S)$ с графом $\Pi(\sigma, S)$ есть вершинно двусвязный граф. Следовательно, объединение всех блоков графа $W(G, S)$ с графом $\Pi(\sigma, S)$ тоже есть вершинно двусвязный граф. Это объединение выражается формулой $W(G, S) + \Pi(\sigma, S)$. Но

$$W(G, S) + \Pi(\sigma, S) = W(G, S) + X(\sigma, S).$$

А согласно равенству (6.6),

$$W(G, S) + X(\sigma, S) = W(G + X(\sigma, S), S).$$

Отсюда следует, что $W(G + X(\sigma, S), S)$ есть вершинно двусвязный граф.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматизация диспетчерского управления в электроэнергетике / Под ред. Ю.Н. Руденко и В.А. Семенова. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 648 с.
2. Создание автоматизированных систем оперативно-технологического и ситуационного управления с изменяемым набором SCADA/EMS/DMS/OMS приложений на базе платформы “СК-11” российского производства. Пятигорск: Монитор Электрик, 2017. 67 с. [электронный ресурс] // Россети Северо-Запад: [Сайт]. URL: <http://www.mrsksevzap.ru/cs/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheader-name1=Content-Disposition&blobheadername2=MDT-Type&blobheadervalue1=inline%3B+filename%3D05-MonitorElectric.pdf&blobheadervalue2=abinary%3B+charset%3DUTF-8&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1384344883724&ssbinary=true> (дата обращения: 20.05.2020).
3. *Black P.E.* All Simple Paths [электронный ресурс] // Dictionary of Algorithms and Data Structures, ed. 2, 2008. URL: <https://www.nist.gov/dads/HTML/allSimplePaths.html> (дата обращения: 20.05.2020).
4. *Rotenberg A.* Find All Vertices on All Simple Paths between Two Vertices in an Undirected Graph [электронный ресурс] // Stack Overflow: [Сайт]. Asked May 30, 2012. URL: <https://stackoverflow.com/questions/10825249/find-all-vertices-on-all-simple-paths-between-two-vertices-in-an-undirected-gr?rq=1> (дата обращения: 20.05.2020).
5. *Archangel.* Алгоритм поиска простых путей в графе [электронный ресурс] // R0 Crew: [Сайт]. Sep 2013. URL: <https://forum.reverse4you.org/t/topic/679> (дата обращения: 20.05.2020).
6. *Dey A.* Finding All Paths Between Two Nodes in a Graph [электронный ресурс] // Efficientcodeblog: [Сайт]. Feb 2018. URL: <https://efficientcodeblog.wordpress.com/2018/02/15/finding-all-paths-between-two-nodes-in-a-graph/> (дата обращения: 20.05.2020).
7. *Vennos.* Answer to: Find All Vertices on All Simple Paths Between Two Vertices in an Undirected Graph [электронный ресурс] // Stack Overflow: [Сайт]. Answered May 31, 2012. URL: <https://stackoverflow.com/questions/10825249/find-all-vertices-on-all-simple-paths-between-two-vertices-in-an-undirected-gr?rq=1> (дата обращения: 20.05.2020).
8. *Hopcroft J., Tarjan R.* Efficient Algorithms for Graph Manipulation. Tech. Rep. 207, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, Calif., 1971. URL: <http://i.stanford.edu/pub/cstr/reports/cs/tr/71/207/CS-TR-71-207.pdf> (дата обращения: 20.05.2020).
9. *Tarjan R.E.* Depth First Search and Linear Graph Algorithms // *SIAM J. Computing*. 1972. V. 1 (2). P. 146–160.
10. *Hopcroft J.E., Tarjan R.E.* Efficient Algorithms for Graph Manipulation // *Comm. ACM*. 1973. V. 16(6). P. 372–378.
11. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
12. *Липский В.* Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. 213 с.
13. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 288 с.

14. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Ч. 5. Алгоритмы на графах. СПб.: ООО “ДиаСофтЮП”, 2002. 496 с.
15. *Ахо А.В., Хопкрофт Дж.Э., Ульман Дж.Д.* Структуры данных и алгоритмы. М., СПб., Киев: Вильямс, 2003. 384 с.
16. *Окулов С.М.* Программирование в алгоритмах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 341 с.
17. *Макконнелл Дж.* Основы современных алгоритмов. Изд. 2-е. М.: Техносфера, 2004. 368 с.
18. *Алексеев В.Е., Таланов В.А.* Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 320 с.
19. *Головинский И.А.* Объектно-ориентированный подход к разработке программ анализа коммутационных схем электрических сетей // Изв. РАН. Энергетика. 2001. № 2. С. 46–56.
20. *Тумаков А.В., Головинский И.А., Лондер М.И., Дьяченко М.Ю.* Универсальный топологический процессор для систем интеллектуального управления электрическими сетями (УНИТОП): Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011613357. Зарегистрировано 29.04.2011.
21. *Головинский И.А.* Разработка методов и алгоритмов автоматизации планирования и контроля оперативных переключений в электрических сетях энергосистем: Дис. ... докт. техн. наук. М.: ОАО “НТЦ ФСК ЕЭС”, 2013.
22. *Golovinskii I.A.* Topological Object-Association Model for Simulating Electrical Networks // Intern. J. Applied Engineering Research. 2016. V. 11 (12). P. 7857–7867.
23. *Головинский И.А., Дьяченко М.Ю., Лондер М.И., Тумаков А.В.* Топологические блокировки оперативных переключений // Электрические станции. 2018. № 7. С. 29–37.
24. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
25. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
26. *Омельченко А.В.* Теория графов. М.: МЦНМО, 2018. 416 с.
27. *Головинский И.А., Лондер М.И.* Принципы автоматизации контроля оперативной надежности электрической сети // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 2. С. 76–90.
28. *Lalou M., Tahraoui M.A., Kheddouci H.* The Critical Node Detection Problem in Networks: A Survey // Comp. Sci. Rev. 2018. V. 28. P. 92–117.
<https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2018.02.002>
29. *Walteros J.L., Veremyev A., Pardalos P.M., Pasiliao E.L.* Detecting Critical Node Structures on Graphs: A Mathematical Programming Approach // Networks. 2019. V. 73. P. 48–88. URL:
<https://doi.org/10.1002/net.21834>.
30. *Cuffe P.* A Comparison of Malicious Interdiction Strategies Against Electrical Networks // IEEE J. Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. 2017. V. 7 (2). P. 205–217.

МЕТОД АБДУКТИВНОГО ВЫВОДА В ЗАДАЧАХ ОБЪЯСНЕНИЯ НАБЛЮДАЕМОГО

© 2021 г. С. Н. Васильев

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

e-mail: vassilyev_sn@mail.ru

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.

После доработки 12.07.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

В проблематику искусственного интеллекта, управления и принятия решений при неполной или недостоверной информации входит широкий класс задач абдуктивного объяснения наблюдаемого, включая задачи в терминах “причина-эффект”. Работа посвящена обоснованию метода логического формирования гипотез, объясняющих наблюдаемое. Предлагаются средства представления знаний и вывода гипотез. Вводится язык, обладающий свойством подстановочности. Свойства языка и вводимых в нем исчислений обеспечивают гипотезирование путем сочетания дедукции с абдукцией. В отличие от известных логических методов абдукции, предложенные средства позволяют выводить гипотезы (миноранты), необходимые и достаточные для формального объяснения наблюдаемого. На основе минорант в сочетании с базовой теорией предметной области формируются достоверные причины наблюдаемого или релевантные обстоятельства, выводящие на эти причины. При этом в ситуациях наличия также эмпирических данных эти причины и обстоятельства могут формироваться и в правдоподобных версиях. Рассматриваются примеры из техники и медицины.

DOI: 10.31857/S000233882101011X

Введение. В область искусственного интеллекта (ИИ), управления и принятия решений при неполной или недостоверной информации входят задачи так называемого объяснения на основе моделей и методов абдуктивных рассуждений (Explanation by abductive reasoning), в том числе в терминах “причина-эффект”. Здесь под “эффектом” или далее также под “наблюдаемым” могут пониматься аномалии, симптомы и вообще некоторые выделенные (особые) состояния системы как объекта анализа и управления.

Понятие абдукции введено логиком и философом Ч.С. Пирсом (C.S. Peirce, 1839–1914 гг.) в форме логических рассуждений, сравнимых, но отличных от дедукции и индукции. Сегодня абдукция чаще всего определяется следующим образом: на основе заданной теории T предметной области и утверждения G о наблюдаемом эффекте, подлежащем объяснению, найти такую не противоречащую теории T гипотезу-объяснение Δ , что из T и Δ выводимо G (модификации см., например, в [1–3]).

В работах по абдуктивному гипотезированию на теорию T предметной области часто накладываются ограничения, при которых дедукция максимально упрощается, например содержание теории должно иметь форму “if-and-only-if”, т.е. форму семейства эквивалентностей

$$\bigwedge_{i=1}^m (c_i \leftrightarrow E_{i1} \vee \dots \vee E_{in}),$$

где в пропозициональном случае c_i – переменные-причины, а E_{ij} , $j = \overline{1, n}$, – элементарные конъюнкции, составленные из переменных-эффектов и их отрицаний, возможно, при дополнительных требованиях к множеству задействованных переменных, частично упорядоченному импликацией [1, 2].

В данной работе не предполагается какой-либо предварительной трансформации теории T , а в качестве языка представления знаний в разд. 1 вводится S -язык L_S как подмножество пропозиционального языка, но без ослабления его выразительной силы. Допуская использование отрицания переменных, язык L_S шире пропозиционального варианта языка позитивно-образован-

ных формул [4, 5], но обладает тем же свойством подстановочности (см. разд. 1). Свойства языка L_S и вводимых в нем исчислений C_α, C_β обеспечивают гибкое сочетание дедукции с абдуктивным достоверным или правдоподобным выводом.

Вывод в C_β наблюдаемого эффекта G выполняется вместе с синтезом формулы P , называемой гипотезой-минорантой и объясняющей эффект G лишь формально. С точностью до эквивалентности гипотеза P логически минимальна (любая гипотеза-причина Δ , объясняющая G в смысле выше приведенного определения, должна быть не слабее $P: \Delta \rightarrow P$). Гипотеза-миноранта выступает контрольным условием и опорным средством формирования достоверных гипотез Δ , а при наличии сверхтеории T эмпирических знаний миноранта является также и средством вывода правдоподобных гипотез Δ . Эмпирические знания – это знания об априорном множестве потенциально возможных причин-кандидатов и/или о правдоподобных причинно-следственных связях. Из гипотезы P переходом к достаточным условиям, например путем упрощения P или использования эмпирических знаний, получаются либо причины Δ -эффекта G (достоверные или правдоподобные), либо поначалу лишь релевантные обстоятельства (факты, события, “улики”), из которых в рамках теории T средствами исчислений C_α и C_β оказываются выводимыми и сами причины.

Заметим, что в проблематике интеллектуализации автономных (беспилотных) агентов с реактивными правилами “условие-действие” понятие “эффект” может иметь также смысл целевого состояния агента [6]. Эта актуальная тема абдуктивной информационной поддержки планирования действий агентов выходит за рамки данной статьи. Актуальной задачей остается также проблематика ранжирования альтернативных объяснений наблюдаемого для сужения множества гипотез до наиболее достоверных с использованием вероятностных, логических и других оценок.

В разд. 1 определяется язык представления знаний, а в разд. 2 – правила преобразования его формул. В разд. 3 вводятся исчисления C_α, C_β и обосновываются их свойства. В разд. 4 применение этих исчислений иллюстрируется примерами из техники и медицины.

1. Представление знаний. В пропозициональном языке L стандартной (классической) семантики выделим подмножество L_S . Ввиду свойства подстановочности формул языка L_S , которое будет рассмотрено ниже, назовем его S -языком (от английского *Substitution*). Далее конъюнктами называем элементарные конъюнкции литералов (пропозициональных переменных и/или их отрицаний) и пропозициональные константы *false*, *true*. Если в элементарную конъюнкцию (ЭК) входит пара контрарных литералов (переменная и ее отрицание), то по умолчанию такие ЭК заменяются на константу *false*. Логические связки $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ в S -языке понимаются стандартно.

О п р е д е л е н и е 1 (формулы языка L_S и их типы):

1) ЭК A или константа *false*, – S -формулы; им приписывается *тип* \wedge ; это простейшие S -формулы;

2) если F_i – S -формулы типа $\wedge (i = \overline{1, m})$, а G – ЭК или *true*, то $G \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^m F_i \right)$ – S -формулы *типа* \rightarrow ;

3) если F_i – S -формулы типа $\rightarrow (i = \overline{1, m})$, а G – ЭК или *true*, то $G \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^m F_i \right)$ – S -формулы *типа* \wedge ;

4) других формул в языке L_S нет.

Если $m \neq 1$ и некоторое F_i совпадает с *false*, то возможно упрощение S -формулы очевидным (логически эквивалентным) преобразованием; такие упрощения далее будут подразумеваться.

Каноническим представлением S -формулы F называем ее запись в виде формулы с конъюнктом *true* в корневой вершине ее структуры:

$$F = true \rightarrow \bigvee_{i=1}^m \Omega_i, \quad \Omega_i = A_i \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} (B_{ij} \rightarrow \Phi_{ij}) \right), \quad (1.1)$$

где $m \geq 1, n_i \geq 0$ (если $n_i = 0$, то $\Omega_i = A_i$).

Подформулы некоторой S -формулы F , образуемые в соответствии с индуктивным определением S -формул, называются **главными подформулами** (ГП). Так, в (1.1) при $n_i \neq 0$ подформулы A_i

и B_{ij} не являются главными, а при $n_i = 0$ подформула A_i – главная. Выражение $F_1 \subseteq F$ означает, что F_1 – ГП S -формулы F .

Если $H \subseteq F \in L_S$, $H = D \rightarrow \bigvee_{i=1}^n H_i$, то подформула $|H|$ из H вида $|H| = \bigvee_{i=1}^n H_i$ не является главной. Через $|H|_{\perp^*}$ обозначается $\bigvee_{i=1, i \neq i^*}^n H_i$ (если H – типа \wedge , то смысл $|H|$ и $|H|_{\perp^*}$ аналогичен с заменой \vee на \wedge). Эти обозначения будут использованы в разд. 3 для упрощения записи формул.

Каждой вершине древовидной структуры S -формулы приписываем тип, соответствующий типу ГП, корнем которой эта вершина является. По определению 1 типы \wedge и \rightarrow вершин вдоль ветви структуры S -формулы F чередуются.

Формулы языка L , не принадлежащие подмножеству L_S , понимаем стандартно. Например, если $F_1, F_2 \in L_S$, то выражение $F_1 \rightarrow F_2$, вообще говоря не принадлежащее L_S , понимается как в L .

В отличие от формул языка L для S -формулы F, F_1, F_2 справедливо свойство *подстановочности*: если $F_1 \subseteq F$ и $F_2 \rightarrow F_1$, то $F(F_2/F_1) \rightarrow F$, где $F(F_2/F_1)$ – результат подстановки в F вместо F_1 не менее сильной формулы F_2 .

Язык L_S полон относительно выразительной силы языка L . Семантика S -формулы очевидна.

2. Преобразования S -формулы. Рассмотрим S -формулу F в каноническом представлении (1.1). Конъюнкт A_i называется *базой*, а конъюнкты B_{ij} (когда $n_i \neq 0$) – *вопросами к базе A_i* . Если $B_{ij} \subseteq A_i$, то вопрос B_{ij} к базе A_i называем *уместным*. Тавтологично ложную S -формулу ($true \rightarrow false$) далее для краткости обозначаем \perp .

Пусть в (1.1) $F \neq \perp$, $n_i \neq 0$ и Φ_{ij} имеют вид

$$\Phi_{ij} = \bigvee_{k=1}^{l_{ij}} (C_{ijk} \wedge \Psi_{ijk}), \quad \text{где } l_{ij} \geq 1, \quad \text{или } \Phi_{ij} = false. \quad (2.1)$$

Предположим, что

$$\exists i^* \in \overline{1, m}, \quad n_{i^*} \neq 0, \quad j^* \in \overline{1, n_{i^*}}, \quad B_{i^* j^*} \subseteq A_{i^*}, \quad (2.2)$$

т.е. вопрос $B_{i^* j^*}$ к базе A_{i^*} уместен.

О п р е д е л е н и е 2 (α -преобразование). Пусть S -формула F имеет вид (1.1), (2.1), (2.2). Тогда, если $\Phi_{i^* j^*} \neq false$, то α -преобразованием называется такое отображение $\alpha : L_S \rightarrow L_S$, что

$$\alpha(F) = true \rightarrow \left(\bigvee_{i=1, i \neq i^*}^m \Omega_i \right) \vee \Omega_{i^*}^*, \quad \Omega_{i^*}^* = \bigvee_{k=1}^{l_{i^* j^*}} \Omega_{i^* j^* k}^*, \quad (2.3)$$

$$\Omega_{i^* j^* k}^* = \left[\{A_{i^*} \cup C_{i^* j^* k}\} \wedge \Psi_{i^* j^* k} \wedge \left(\bigvee_{j=1, j \neq j^*}^{n_{i^*}} (B_{i^* j} \rightarrow \Phi_{i^* j}) \right) \right].$$

Если же $\Phi_{i^* j^*} = false$, то при $m > 1$

$$\alpha(F) = true \rightarrow \left(\bigvee_{i=1, i \neq i^*}^m \Omega_i \right),$$

а при $m = 1$ $\alpha(F) = \perp$.

В (2.3) и далее, когда это не вызывает коллизий, конъюнкты рассматриваются как множества входящих в эти конъюнкты элементов. Если $\Phi_{i^* j^*} \neq false$, то в случае появления в конъюнкте $\{A_{i^*} \cup C_{i^* j^* k}\}$ из (2.3) контрарных литералов применяем следующие очевидные упрощения формулы $\alpha(F)$: при $l_{i^* j^*} > 1$ удаляется $\Omega_{i^* j^* k}^*$; при $l_{i^* j^*} = 1$ и $m = 1$ $\alpha(F)$ заменяется на \perp ; при $l_{i^* j^*} = 1$ и $m > 1$ удаляется $\Omega_{i^* j^* 1}^*$. Удаляются и дубли ГП при совпадении $\Omega_{i^*}^*$ с Ω_i , $i \neq i^*$.

Пусть $\alpha(F) \neq \perp$ и выполняется условие типа (2.2). Применяя α -преобразование к $\alpha(F)$, получим S -формулу $\alpha^2(F)$ и т.д. до тех пор, пока очередной результат еще отличен от \perp и выпол-

няется (2.2). Пусть на некотором шаге η_1 ($\eta_1 \geq 0$) $\alpha^{\eta_1}(F) \neq \perp$, но α -преобразование уже не применимо ввиду невыполнения (2.2), т.е. $\forall i \in \overline{1, m^1}$, где m^1 – количество баз в $\alpha^{\eta_1}(F)$, база A_i будет:

1) либо висячей ($n_i = 0$) и ввиду упомянутых упрощений отличной от *false*, либо

2) невисячей ($n_i \geq 1$) и такой, что $\forall j \in \overline{1, n_i}$ вопросы B_{ij} к базе A_i неуместны (под выражениями A_i, B_{ij} понимаются новые конъюнкты в формуле $\alpha^{\eta_1}(F)$).

О п р е д е л е н и е 3 (β -преобразование). Пусть I_1, I_2 – множества индексов $i \in \overline{1, m^1}$, для которых базы A_i удовлетворяют условиям 1) и 2) соответственно, и

$$\alpha^{\eta_1}(F) = true \rightarrow \bigvee_{i=1}^{m^1} \Omega_i^1,$$

где

$$\forall i \in I_1 \quad \Omega_i^1 = A_i \quad \text{и} \quad \forall i \in I_2 \quad \Omega_i^1 = A_i \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} (B_{ij} \rightarrow \Phi_{ij}^1) \right). \quad (2.4)$$

Назовем β -преобразованием такое отображение $\beta : L_S \rightarrow L_S$, что

$$\begin{aligned} \beta(\alpha^{\eta_1}(F)) = true &\rightarrow \bigvee_{i=1}^{m^1} \Omega_i^*, \quad \forall i \in \overline{1, m^1} = I_1 \cup I_2 \quad \Omega_i^* = A_i \wedge P_i^1, \\ \forall i \in I_1 \quad P_i^1 &= (A_i \rightarrow false), \quad \forall i \in I_2 \quad P_i^1 = \left(A_i \rightarrow \bigvee_{j=1}^{n_i} B_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Формирование условия

$$P^1 = P(\alpha^{\eta_1}(F)) = \bigwedge_{i=1}^{m^1} P_i^1$$

называем далее (α, β) -гипотезированием.

3. S-исчисления и их свойства. На основе α - и β -преобразований формул языка L_S , рассматриваемых в каноническом представлении, введем два исчисления.

Пусть $F^1 = \beta(\alpha^{\eta_1}(F))$. Применим к F^1 α -преобразование максимально возможное число раз r_2 ($r_2 \geq 1$). Если $\alpha^{r_2}(F^1) \neq \perp$, то применим β -преобразование, получив $F^2 = \beta(\alpha^{r_2}(F^1))$ и т.д. Пусть $F^n = \beta(\alpha^{r_n}(F^{n-1}))$ и впервые $\alpha^{r_{n+1}}(F^n) = \perp$. В результате n -кратного (α, β) -гипотезирования получим условие

$$P = \bigwedge_{k=1}^n P^k, \quad P^k = P(\alpha^{r_k}(F^{k-1})),$$

именуемое *гипотезой-минорантой* (ГМ).

О п р е д е л е н и е 4 (S -исчисления $\mathbb{C}_\alpha, \mathbb{C}_\beta$). S -исчисления $\mathbb{C}_\alpha = (\perp, \{\alpha\})$ и $\mathbb{C}_\beta = (\perp, \{\alpha, \beta\})$ – это исчисления в языке L_S с аксиомой \perp и указанными преобразованиями в качестве правил вывода. Здесь выводы формулы F – конечные последовательности формул, начинающиеся с формулы F , заканчивающиеся формулой \perp и с промежуточными формулами, получаемыми в \mathbb{C}_α с помощью только α -преобразований, а в \mathbb{C}_β – с помощью α - и β -преобразований как в построенной ранее для формулы F последовательности: $F^0, F^1, F^2, \dots, F^{n+1}$, где $F^0 = F$. Вывод S -формулы F суть ее опровержение.

Т е о р е м а 1. *Формула F языка L_S противоречива тогда и только тогда, когда F выводима в исчислении \mathbb{C}_α .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть формула F – выводима в \mathbb{C}_α . Поскольку в процессе вывода формула F конечным числом применений преобразования α приводится к виду \perp , то для доказатель-

ства противоречивости F достаточно доказать, что α – логически эквивалентное преобразование. Пусть F имеет канонический вид (1.1), (2.1), (2.2) или в сокращенном виде

$$F = (\text{true} \rightarrow |F|) = (\text{true} \rightarrow |F|_{-i^*} \vee \Omega_{i^*}), \quad \Omega_{i^*} = (A_{i^*} \wedge (B_{i^*j} \rightarrow \Phi_{i^*j}) \wedge |\Omega_{i^*}|_{-j^*}),$$

$$\Phi_{i^*j^*} = \bigvee_{k=1}^{l_{i^*j^*}} (C_{i^*j^*k} \wedge \Psi_{i^*j^*k}).$$

Отсюда в силу условия (2.2) и подстановочности \mathcal{S} -формулы эквивалентными преобразованиями сначала удаляем $B_{i^*j^*}$. После этого, воспользовавшись дистрибутивностью \wedge относительно \vee , получим

$$F \Leftrightarrow \left(\text{true} \rightarrow |F|_{-i^*} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{l_{i^*j^*}} \{A_{i^*} \cup C_{i^*j^*k}\} \wedge \Psi_{i^*j^*k} \wedge |\Omega_{i^*}|_{-j^*} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{true} \rightarrow |F|_{-i^*} \vee \Omega_{i^*}^*) = \alpha(F).$$

Для доказательства полноты исчисления (т.е. того, что любая противоречивая формула выводима) покажем от противного, что если формула F не выводима, то она выполнима, иначе говоря, для F найдется модель I , т.е. интерпретация I , в которой F истинна. Пусть F имеет вид (1.1) и не выводима в исчислении \mathbb{C}_α .

Рассмотрим каждую базу A_i , $i \in \overline{1, m}$. Предположим, что A_i – висячая вершина структуры формулы F (т.е. $\Omega_i = A_i$, $|\Omega_i| = \emptyset$). Тогда $A_i \neq \text{false}$ ввиду упрощений, упомянутых в конце разд. 1 (в связи с определением 1), и того, что $F \neq \perp$. Поэтому интерпретация I вида $I = A_i$ является моделью для Ω_i , а следовательно и для F .

Пусть вершина A_i – невисячая. Если у нее нет уместных вопросов B_{ij} , $j \in \overline{1, n_i}$, то формируем интерпретацию

$$I = A_i \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} \neg B_{ij} \right),$$

где $\neg B_{ij}$ – отрицание конъюнкта B_{ij} . Очевидно, что F истинна в ней, так как конъюнкты B_{ij} , с которых начинаются все члены конъюнкции

$$|\Omega_i| = \bigwedge_{j=1}^{n_i} (B_{ij} \rightarrow \Phi_{ij}),$$

– посылки.

Пусть теперь у невисячей базы A_i множество уместных вопросов B_{ij} не пусто. Сформируем из них очередь $B_i = (B_{ij_1}, \dots, B_{ij_q})$, $\{j_1, \dots, j_q\} \subseteq \overline{1, n_i}$. Если после просмотра всех баз модель не получена, то очередь каждой базы непустая. Применим α -преобразование к первым вопросам B_{ij_1} всех очередей B_i параллельно. При этом базы A_i приобретут вид $\{A_i \cup C_{ij_1k}\}$, $k \in \overline{1, l_{ij_1}}$, а ГП типа $(B_{ij_1} \rightarrow \Phi_{ij_1})$ в них укоротятся до Ψ_{ij_1k} ; при $l_{ij_1} > 1$ базы размножаются в количестве l_{ij_1} .

Повторим выполненный просмотр баз с намерением обнаружить модель I для F . Если, действуя как и раньше, найдем, то доказательство выполнимости F будет завершено, иначе снова для каждой базы из уместных вопросов формируем очередь для применения к ним α -преобразования. В случае неисчерпанности у базы прежней очереди и появления у ней новых уместных вопросов старую очередь с конца наращиваем этими вопросами. Ко всем первым элементам очередей снова применяется α -преобразование и т.д.

В силу невыводимости F и конечности формулы процесс завершится получением такой формулы $\alpha^n(F)$, у которой появится либо висячая база (т.е. без каких-либо вопросов), либо невисячая без уместных вопросов. В обоих случаях конъюнкт базы или его расширение, аналогичное выше использованному, будет искомым моделью I для F . Теорема 1 доказана.

Пусть $\{T, G, \Delta\} \subset L_S$, T – теория предметной области (контент некоторой базы знаний), G – наблюдаемый эффект. *Объяснением* наблюдаемого признается гипотеза Δ , удовлетворяющая требованиям:

- а) из $T \wedge \Delta$ в исчислении \mathbb{C}_β выводимо G ,
- б) $T \wedge \Delta$ – непротиворечиво.

Теорема 2. Пусть $F^0 = (T \wedge \neg G)^{L_S}$ – образ отрицания формулы $(T \rightarrow G)$ в языке L_S . Пусть также $P \in L_S$ и P построено (α, β) -гипотезированием в процессе вывода формулы F^0 в исчислении \mathbb{C}_β . Тогда $P \leftrightarrow (T \rightarrow G)$ и для любой гипотезы Δ , объясняющей G , справедливо $\Delta \rightarrow P$.

Доказательство. Докажем от противного, что $P \rightarrow (T \rightarrow G)$. Пусть истинно P , а $(T \rightarrow G)$ ложно, т.е. имеет место $P \wedge F^0$. Условие P имеет вид

$$P = \bigwedge_{k=1}^n P^k, \quad P^k = P(F_\alpha^{k-1}) = \bigwedge_{i=1}^{m^k} P_i^k,$$

где $F_\alpha^{k-1} = \alpha^{r_k}(F^{k-1})$, $F^k = \beta(F_\alpha^{k-1})$.

Пусть F_α^{k-1} имеет вид

$$F_\alpha^{k-1} = \left(true \rightarrow \bigvee_{i=1}^{m^k} \Omega_i \right). \quad (3.1)$$

При β -преобразовании формулы F_α^{k-1} все P_i^k встраиваются в Ω_i конъюнктивно (см. (2.4), (2.5)), усиливая Ω_i до Ω_i^* , т.е. $F^k = F_\alpha^{k-1}(\Omega_i^*/\Omega_i, \forall i \in \overline{1, m^k})$, $\Omega_i^* = P_i^k \wedge \Omega_i$.

Так как $F_\alpha^{k-1} \leftrightarrow F^{k-1}$,

$$P^k \wedge F^{k-1} \leftrightarrow P^k \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{m^k} \Omega_i \right) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m^k} (P^k \wedge \Omega_i) \leftrightarrow F^k \quad (\forall k \in \overline{1, n}),$$

а $P = \bigwedge_{k=1}^n P^k$, то $P \wedge F^0 \rightarrow F^n$. Поскольку $F^n \leftrightarrow F_\alpha^n = \perp$, то полученное противоречие доказывает, что $P \rightarrow (T \rightarrow G)$: в теории T условие P – объяснение наблюдаемого G .

Рассмотрим теперь необходимость условия P , т.е. что $(T \rightarrow G) \rightarrow P$. Снова действуя от противного, предположим, что справедливо $(T \rightarrow G) \wedge \neg P$, т.е. $\neg F^0 \wedge \neg P$. Проверим, что это приводит к противоречию. Вначале докажем, что

$$\forall k \in \overline{1, n} \quad (\neg F_\alpha^{k-1} \wedge \neg P^k \rightarrow false). \quad (3.2)$$

Пусть F_α^{k-1} имеет вид (3.1). Так как

$$\neg F_\alpha^{k-1} \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m^k} \neg \Omega_i, \quad \neg P^k \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m^k} \neg P_i^k,$$

то для доказательства (3.2) достаточно вывести противоречие из предположений о том, что справедливо $\forall i \in \overline{1, m^k} \neg \Omega_i$ и $\exists i^* \in \overline{1, m^k} \neg P_{i^*}^k$. Возможны только два случая, разбором которых обосновывается (3.2):

1) $\Omega_{i^*} = A_{i^*}$, $P_{i^*}^k = (A_{i^*} \rightarrow false)$, при этом $\neg \Omega_{i^*} \wedge \neg P_{i^*}^k \leftrightarrow \neg A_{i^*} \wedge A_{i^*} \leftrightarrow false$;

2) $\Omega_{i^*} = A_{i^*} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n_{i^*}} (B_{i^*j} \rightarrow \Phi_{i^*j}) \right)$, $P_{i^*}^k = \left(A_{i^*} \rightarrow \bigvee_{j=1}^{n_{i^*}} B_{i^*j} \right)$, при этом

$$\neg \Omega_{i^*} \wedge \neg P_{i^*}^k \leftrightarrow \left[\neg A_{i^*} \vee \left(\bigvee_{j=1}^{n_{i^*}} (B_{i^*j} \wedge \neg \Phi_{i^*j}) \right) \right] \wedge \left[A_{i^*} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n_{i^*}} (\neg B_{i^*j}) \right) \right] \leftrightarrow false.$$

Так как $F^k = \beta(F_\alpha^{k-1})$, $F_\alpha^{k-1} \leftrightarrow F^{k-1}$ и $\beta(F_\alpha^{k-1}) \rightarrow F_\alpha^{k-1}$, то $\forall k \in \overline{1, n}$ ($F^k \rightarrow F^{k-1}$). Отсюда и из (3.2) следует, что $\neg F^0 \rightarrow P^1 \wedge \neg F^1, \neg F^1 \rightarrow P^2 \wedge \neg F^2, \dots, \neg F^{n-1} \rightarrow P^n \wedge \neg F^n$. Поэтому $\neg F^0 \rightarrow \bigwedge_{k=1}^n P^k$, т.е. $(T \rightarrow G) \rightarrow P$, что и требовалось доказать.

Поскольку всякая гипотеза, объясняющая наблюдаемое G , должна удовлетворять по определению условию $T \wedge \Delta \rightarrow G$, то отсюда и из доказанного свойства необходимости гипотезы-миноранты P вытекает, что $\Delta \rightarrow P$. Теорема 2 доказана.

4. Примеры применения исчислений. Рассмотрим примеры гипотез-минорант P и достаточных условий их выполнимости, полученных путем удаления из минорант элементов, несовместимых с теорией T (примеры 1 и 2), или путем привлечения эмпирических знаний (пример 2). Эмпирические знания могут расширять знания базовой теории об априорном множестве потенциально возможных причин-кандидатов и, кроме того, могут дополнять базовую теорию достоверных причинно-следственных связей также лишь правдоподобными причинами Δ -эффекта G (достоверные или правдоподобные), либо релевантные обстоятельства (пример 1), из которых в рамках теории T средствами исчислений \mathbb{C}_α или \mathbb{C}_β оказываются выводимыми и сами причины. Не предполагается какой-либо предварительной трансформации теории T до формы “if-and-only-if” (см. Введение) с ацикличностью множества “причинных переменных”, частично упорядоченного импликацией [1, 2].

Пример 1. Рассмотрим простой пример из области диагностики автомобиля (знания приведенного ниже типа сформулированы в [7] для иллюстрации концепции экспертных систем в ИИ).

Пусть некоторые пропозициональные переменные языка L_S имеют следующий смысл: Φ – “Фары горят”; B – “в Баче топливо есть”; K – “топливо поступает в Карбюратор”; D – “топливо поступает в Двигатель”; V – “двигатель Вращается”; I – “автомобиль Исправен”; A – “проблема – в Аккумуляторе”; Z – “проблема – в свечах Зажигания”; C – “проблема – в Стартере”. Допустим, что автомобиль неисправен и выявлены факты Φ, B, K . Предположим, что, помимо этих фактов, базовая теория T включает знания, которые в естественном языке имеют вид: *Если топливо поступает в двигатель и двигатель вращается, то проблема – в свечах зажигания. Если в баче топливо есть и топливо поступает в карбюратор, то топливо поступает в двигатель. Если двигатель не вращается, то при горящих фарах проблема – в стартере, при негорящих – в аккумуляторе. Если автомобиль исправен, то проблем в свечах зажигания, стартере и аккумуляторе нет.*

Базовая теория T в языке L_S представима формулой:

$$T = \{\Phi, B, B\} \wedge [(\{D, B\} \rightarrow Z) \wedge (\{B, K\} \rightarrow D) \wedge \\ \wedge [\neg B \rightarrow (\text{true} \wedge ((\Phi \rightarrow C) \wedge (\neg \Phi \rightarrow A)))] \wedge \\ \wedge (I \rightarrow \{\neg Z, \neg C, \neg A\})] .$$

Наблюдаемое G состоит в неисправности автомобиля: $G = \neg I$, а вывод объяснения в S -исчислении \mathbb{C}_β начинается с формулы $F^0 = (T \wedge \neg G)^{L_S}$. Ее база $\{\Phi, B, B, I\}$ при получении F^1 (однократным применением α -преобразования к F^0) дополнится элементами множества $\{\neg Z, \neg C, \neg A\}$.

Применением β -преобразования получится гипотеза-миноранта

$$P = P^1 = P(\alpha^1(F^0)) = P(F^1) = (\{\Phi, B, B, I, \neg Z, \neg C, \neg A\} \rightarrow (D \vee K \vee \neg B)).$$

После представления ее в форме элементарной дизъюнкции и удаления из нее членов $\neg \Phi, \neg B, \neg B, \neg I$, контрарных элементам базы из F^1 , а также тривиального члена $Z \vee C \vee A$ получается объяснение $D \vee K$ в классе релевантных обстоятельств. Действительно, далее в рамках исчисления \mathbb{C}_α промежуточным элементом вывода формулы $(T \wedge \neg G \wedge (D \vee K))^{L_S}$, включившей полученное релевантное обстоятельство, оказывается факт Z как причина неисправности.

Пример 2. Рассмотрим другой иллюстративный пример, а именно из области медицины [1], не приводя для краткости детальной семантики переменных (статья [1] посвящена представлению знаний в диагностике с достоверными и эмпирическими знаниями).

Пусть e, h – симптомы заболевания. Известны болезни t, d, a . Допустим, что $\{t \rightarrow e, a \rightarrow h\}$ – множество достоверных причинно-следственных связей базовой теории T в терминах симптомов e ,

h и болезней t , a : “болезнь t – причина симптома e ”; “болезнь a – причина симптома h “. Пусть $\{d \rightarrow h, a \rightarrow e\}$ – правдоподобные (недостовверные) причинно-следственные связи (ППСС) как эмпирические данные “прошлого опыта”; например, ППСС $d \rightarrow h$ (соответственно $a \rightarrow e$) – это высказывание: “болезнь d (соответственно a) иногда может являться причиной симптома h (соответственно e)”.

Пример интересен, в частности, и тем, что словарь базовой теории T не охватывает словаря ППСС (нет болезни d). Тем не менее, из гипотезы-миноранты, выводимой средствами (α, β) -гипотезирования, получаются все логически возможные в рассматриваемом контексте диагнозы.

Если наблюдается симптом $G = e$, то $F^0 = (T \wedge \neg G)^{L_s} = (true \rightarrow \neg e \wedge [(t \rightarrow e) \wedge (a \rightarrow h)])$.

В исчислении \mathbb{C}_β при выводе F^0 формируется гипотеза-миноранта $P = \bigwedge_{k=1}^2 P(\alpha^k(F^{k-1})) = (\neg e \rightarrow (t \vee a)) \wedge (\{\neg e, a, h\} \rightarrow t)$.

При этом $r_1 = 0, r_2 = 3, r_3 = 2$ и $\alpha^3(F^2) = \perp$. Все элементарные дизъюнкции конъюнктивной нормальной формы (КНФ) $(e \vee t \vee a) \wedge (e \vee t \vee \neg a \vee \neg h)$ гипотезы-миноранты P следуют из t , т.е. болезнь t – объяснение симптома e .

Этот диагноз не использует ППСС. С учетом же их и того, что оба члена КНФ следуют из a и $a \rightarrow e$ соответственно, выводится еще одно (лишь правдоподобное) объяснение: “причина – в болезни a , если верна ППСС $a \rightarrow e$ ”.

Пусть теперь наблюдаются одновременно не один, а два симптома: $G = e \wedge h$. Выявление причин использует вывод формулы

$$F^0 = (T \wedge \neg G)^{L_s} = (true \rightarrow true \wedge [(t \rightarrow e) \wedge (a \rightarrow h) \wedge (e \rightarrow \neg h)]).$$

При этом формируется гипотеза-миноранта

$$P = \bigwedge_{k=1}^3 P^k = P_1^2 \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^3 P_i^2 \right) \wedge P_1^3 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow ((t \vee a \vee e) \wedge (\neg t \vee a \vee \neg e \vee h) \wedge (t \vee \neg a \vee e \vee \neg h) \wedge (t \vee a \vee \neg e \vee h)) \quad (4.1)$$

и на ее основе – три следующих объяснения:

- 1) “комплекс из двух причин $\{t, a\}$ ” (достоверно);
- 2) “если верна ППСС $a \rightarrow e$, то причина – в a ” (правдоподобно);
- 3) “комплекс из двух причин d, t и ППСС $d \rightarrow h$ ” (правдоподобно).

Третье объяснение получается из (4.1) после расширения сигнатуры формулы (4.1) дополнительной причинной переменной d путем замены каждой элементарной дизъюнкции на две другие, получающиеся добавлением в одну переменной d , а во вторую – литералы $\neg d$. Каждая из элементарных дизъюнкций расширенной КНФ будет следовать из причин d, t и ППСС $d \rightarrow h$, что и оказывается третьим объяснением наблюдаемого комплекса симптомов $G = e \wedge h$. Заметим, что расширение словаря для применимости ППСС $d \rightarrow h$ с формированием этого объяснения было необходимо для выполнения лишь второго члена гипотезы-миноранты из (4.1).

Заключение. Работа посвящена проблематике абдуктивного объяснения наблюдаемых эффектов (аномалий, симптомов). Изложен и обоснован метод логического формирования объяснений. Предложены средства представления знаний и вывода объясняющих гипотез. Введен язык, обладающий свойством подстановочности. Свойства языка и вводимых в нем исчислений обеспечивают абдукцию путем сочетания дедукции с гипотезированием. В отличие от известных логических средств абдукции, предложенным методом выводятся гипотезы-миноранты, являющиеся логически необходимыми и достаточными условиями для формального объяснения наблюдаемого. Эту миноранту любая объясняющая гипотеза должна иметь своим логическим следствием.

Гипотеза-миноранта выступает контрольным условием и опорным средством формирования достоверных гипотез, а в случае наличия сверхбазовой теории также эмпирических знаний, то и средством формирования также правдоподобных гипотез. Эмпирические знания могут расширять знания базовой теории об априорном множестве потенциально возможных причин-кандидатов и, кроме того, могут дополнять базовую теорию достоверных причинно-следственных связей также ППСС. Из гипотезы-миноранты переходом к достаточным условиям путем ее

упрощения и использования эмпирических знаний получаются либо причины наблюдаемого эффекта (достоверные или правдоподобные), либо поначалу лишь релевантные обстоятельства (факты, события, “улики”), из которых в рамках базовой теории средствами разработанных исчислений оказываются выводимыми и сами причины. Не предполагается какой-либо предварительной трансформации базовой теории, нередко используемой в литературе для упрощения вывода гипотез. Предложенный метод абдуктивного вывода обоснован и проиллюстрирован примерами.

Актуальной задачей остается проблематика ранжирования альтернативных объяснений наблюдаемого для сужения множества гипотез до наиболее достоверных с использованием вероятностных, логических и других оценок. Актуальной задачей на будущее, особенно в проблематике интеллектуализации автономных (беспилотных) агентов, является также задача абдуктивной информационной поддержки планирования действий агентов с развитием полученных здесь результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poole D.* Representing Diagnosis Knowledge // *J. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. 1994. V. 11. P. 33–50.
2. *Kowalski R.* Logic Programming // *Computational Logic*. Edition: In the History of Logic series. Eds. D. Gabbay and J. Woods. Amsterdam: Elsevier. 2014. P. 523–569.
3. *Финн В.К.* Об эвристиках ДСМ-исследований // *Научно-техническая информация*. Сер. 2. 2019. № 10. С. 1–34.
4. *Васильев С.Н.* Формализация знаний и управление на основе позитивно-образованных языков // *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2008. № 1. С. 3–19.
5. *Васильев С.Н., Жерлов А.К.* Об исчислениях типово-кванторных формул // *Докл. АН*. 1995. Т. 343. № 5. С. 583–585.
6. *Kowalski R., Sadri F.* Reactive Computing as Model Generation // *New Generation Computing*. 2015. V. 33. P. 33–67.
7. *Люгер Дж.Ф.* Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. М.: Вильямс, 2003. 864 с.

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ**

УДК 531.36

УПРАВЛЕНИЕ РАБОЧИМИ РЕЖИМАМИ ШАРНИРНОЙ ВЕТРОУСТАНОВКИ¹

© 2021 г. М. З. Досаев^a, Л. А. Климина^{a,*}, Е. С. Шалимова^a

^a НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: klimina@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.

После доработки 14.05.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматривается малогабаритное устройство преобразования энергии потока среды, конструкция которого основана на использовании кривошипно-шатунного механизма. На шатуне механизма закреплена лопасть, взаимодействующая с потоком, вал кривошипа соединен с ротором электрогенератора. В системе присутствует управляющее воздействие, позволяющее регулировать, какая часть энергии, отобранной у потока, преобразуется в электроэнергию. Подразумевается, что такое управление осуществляется путем изменения суммарного внешнего сопротивления в локальной цепи электрогенератора установки. Описывается зависимость средней механической мощности на установившихся рабочих режимах от коэффициента усиления управляющего воздействия. Исследуется, как влияют на эту зависимость скорость потока, коэффициент сухого трения в ползуне механизма и другие параметры модели. Для построения соответствующих бифуркационных диаграмм используется численно-аналитический итерационный метод формирования периодических движений с заданными свойствами, развивающий подход Андронова–Понтрягина.

DOI: 10.31857/S0002338821010030

Введение. Моделирование устройств преобразования потока (ветроэнергетических и гидроэнергетических установок) как управляемых динамических систем представляет собой перспективное направление. В качестве средств реализации управления могут выступать различные элементы системы. Широкий спектр работ описывает управление посредством изменения установочного угла лопастей [1–3]. Вероятно, это направление появилось первым в области регулирования работы ветроустановок. Известны исследования по управлению частотой вращения турбины и ротора генератора установки при помощи дифференциальной планетарной передачи [4–6]. Помимо этого возможно управление внешней электрической нагрузкой в цепи генератора в зависимости от изменения скорости ветра. Подобный подход особенно актуален для малогабаритных установок [7]. Последние характеризуются не только небольшими размерами, но и подключением генератора к локальной внешней цепи, нагрузку в которой можно (и весьма целесообразно) регулировать с целью увеличения мощности [8].

Построение замкнутой математической модели малогабаритной горизонтально-осевой ветроустановки на базе относительно простой модели аэродинамического воздействия [9] позволило получить ряд новых результатов по описанию эффекта гистерезиса [7] и построить стратегии регулирования мощности [5, 10].

В работе [11] модель ветроэнергетической системы, предложенная в [9], была модифицирована для описания динамики ветроустановки оригинальной конструкции на базе кривошипно-шатунного механизма. Полученные результаты позволили разработать и спроектировать новый тип устройства преобразования энергии потока [12]. Более того, была построена динамическая модель ветромобилия, использующего для перемещения такую ветроустановку [13]. Макет ветромобилия был собран и протестирован в НИИ механики МГУ.

Для ветроэнергетического устройства указанного нового типа актуально исследование возможностей управления внешней электрической нагрузкой с целью максимизации мощности,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-20029).

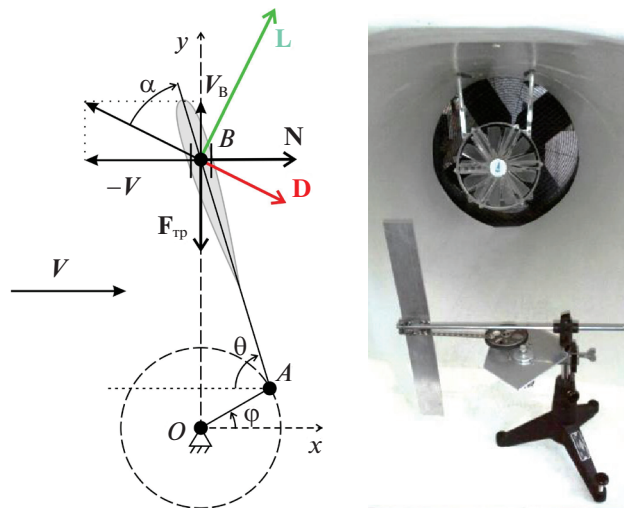


Рис. 1. Схема кривошипно-шатунной ветроэнергетической установки (вид сверху) и фотография прототипа в малой аэродинамической трубе НИИ механики МГУ

отбираемой у потока на рабочем режиме. Подобная задача для других ветроэнергетических систем обсуждалась в [10, 14, 15]. В настоящей работе она рассматривается для кривошипно-шатунной установки. При этом динамическая модель системы усложнена по сравнению с [11] тем, что учитывается сухое трение в ползуне механизма.

При решении задачи максимизации мощности путем изменения значения внешнего сопротивления в цепи генератора установки проводится исследование влияния таких параметров модели, как плотность среды, скорость потока, величина коэффициента сухого трения.

Для формирования рабочих режимов с заданными свойствами (определенным значением мощности, отбираемой у потока) используется итерационный численно-аналитический метод [14], который представляет собой модификацию метода Андронова–Понтрягина [16, 17], примененного для решения подобной задачи в [11]. Модифицированный подход к исследованию установившихся движений позволил (по сравнению с [11]) рассмотреть значительно более широкую область значений параметров модели. Отметим, что указанный метод предназначен для поиска и формирования режимов авторотации с заданными свойствами. Для решения аналогичных задач применительно к режимам автоколебаний разработаны модификации метода, представленные в [18, 19].

1. Постановка задачи. Рассматривается модель устройства преобразования энергии потока, в основу конструкции которого положен кривошипно-шатунный механизм (рис. 1). Другие ветроустановки, в которых используются шарнирные механизмы, рассмотрены, например, в работах [20, 21]. Кривошип OA длины r может вращаться вокруг вертикальной оси O . Шатун AB имеет длину l ($l > r$). В точке B находится ползун, который может двигаться вдоль горизонтальной направляющей, обозначенной на рис. 1 как ось Ox .

На шатуне установлена прямоугольная лопасть, соединенная с ним жестко. Предполагается, что хорда лопасти направлена по шатуну. Лопасть имеет характерную площадь S и взаимодействует с потоком среды плотности ρ , имеющим на бесконечности скорость V , направленную вдоль оси Ox , которая ортогональна оси Oy . Твердое тело “стержень AB + лопасть” характеризуется центральным моментом инерции J_2 и массой m . Центр масс этого тела совпадает с точкой A , и предполагается, что компонента нормальной реакции, компенсирующая вес тела, приложена в точке A .

На валу кривошипа установлен ротор генератора установки, J_1 – момент инерции твердого тела “кривошип OA + ротор генератора” относительно оси O . Центр масс этого тела расположен на оси O .

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ между осью Ox и кривошипом OA . Пусть θ – угол между шатуном AB и осью Ox , тогда $\cos \theta =$

$= (r/l)\cos\varphi$ (рис. 1). Отметим, что минимальное значение $\sin\theta$ во время движения системы составляет $\sqrt{1-r^2/l^2} > 0$.

Кинетическая энергия описанной системы имеет вид

$$K(\varphi, \dot{\varphi}) = 0.5J_1k(\varphi)\dot{\varphi}^2,$$

$$k(\varphi) = 1 + \frac{mr^2}{J_1} + \frac{r^2J_2\sin^2\varphi}{l^2J_1\sin^2\theta},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{r}{l}\cos\varphi\right).$$

Воздействие потока среды на лопасть будем моделировать как сумму силы \mathbf{D} лобового сопротивления и боковой (подъемной) силы \mathbf{L} . Будем считать, что точка приложения аэродинамических сил совпадает с точкой B . Значения аэродинамических сил определим на основе квазистатического подхода [8, 9], их проекции на оси Ox и Oy имеют вид

$$D_x = 0.5\rho SV^2\sqrt{1+u^2}C_D(\alpha), \quad D_y = -0.5\rho SV^2u\sqrt{1+u^2}C_D(\alpha),$$

$$L_x = 0.5\rho SV^2u\sqrt{1+u^2}C_L(\alpha), \quad L_y = 0.5\rho SV^2\sqrt{1+u^2}C_L(\alpha).$$

Здесь α – мгновенный угол атаки, т.е. угол между воздушной скоростью точки B и отрезком AB . Воздушная скорость точки B – вектор, имеющий в осях Oxy вид $\{-V, uV\}$. Функции $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$ – безразмерные коэффициенты боковой силы и силы сопротивления лопасти. Промежуточные безразмерные переменные u и α определяются по формулам $u = V^{-1}r\dot{\varphi}\sin(\theta + \varphi)\sin^{-1}\theta$, $\alpha = -\arctan(u) + \theta$.

При численных расчетах использовались зависимости коэффициентов $C_D(\alpha)$, $C_L(\alpha)$ силы сопротивления и боковой силы от мгновенного угла атаки α , соответствующие стационарным аэродинамическим характеристикам плоской пластины удлинения 8 (т.е. прямоугольной пластины, у которой отношение длин сторон равно 8, более длинная сторона перпендикулярна AB).

На ползун со стороны направляющей действует сухое трение $F_{тр}$ с коэффициентом f . Будем рассматривать такие движения системы, при которых скорость точки B может быть нулевой только в отдельные моменты времени, но не на каком-либо отрезке времени (далее будет показано, что в рамках построенной модели рабочие режимы системы удовлетворяют этому свойству). Соответственно используем модель трения скольжения, трение покоя не рассматриваем.

Электромеханический момент, описывающий воздействие статора генератора на ротор, будем считать линейным по угловой скорости $\dot{\varphi}$ ротора генератора [8]:

$$M_e = \frac{C^2}{R + \sigma} \dot{\varphi},$$

здесь C – коэффициент электромеханического взаимодействия, σ – внутреннее сопротивление генератора (константы, определяемые характеристиками генератора); R – внешнее сопротивление в цепи генератора (будем рассматривать его как управляющее воздействие, подобно работе [15]).

В безразмерных переменных и параметрах уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= z, \\ dp/d\tau &= 0.5k'(\varphi)k^{-2}(\varphi)p^2 + \varepsilon(Q(\varphi, z) - cz), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$Q(\varphi, z) = (-\mu d_1^{-1} \operatorname{sgn}(\cos\varphi)|N(\varphi, z)| + \hat{L}_y + \hat{D}_y) \left(\cos\varphi + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta} \right),$$

$$\hat{D}_x = \sqrt{1+u^2}C_D(\alpha), \quad \hat{D}_y = -u\sqrt{1+u^2}C_D(\alpha),$$

$$\hat{L}_x = u\sqrt{1+u^2}C_L(\alpha), \quad \hat{L}_y = \sqrt{1+u^2}C_L(\alpha),$$

$$c = \frac{C^2}{(R + \sigma)V\rho S r^2}, \quad d_1 = \frac{r\rho S}{2m}, \quad d_2 = \frac{mr^2}{J_1}, \quad \varepsilon = d_1 d_2.$$

Здесь z – безразмерная угловая скорость; $p = k(\varphi)z$ – безразмерный импульс; $\tau = Vt/r$ – безразмерное время; $Q(\varphi, z)$ – безразмерная обобщенная сила; $\mu = m^{-1}V^{-2}rf$ – безразмерный коэффициент сухого трения, действующего на ползун.

Зависимость $N(\varphi, z)$ – безразмерная функция, характеризующая проекцию нормальной реакции в ползуне на ось Ox . Параметр c – безразмерный коэффициент полезной нагрузки. Далее будем считать параметр c коэффициентом усиления управляющего воздействия (технически управление осуществляется путем изменения величины R внешнего сопротивления).

Выражение для величины реакции $N(\varphi, z)$ может быть получено выписыванием второго закона Ньютона для всей системы, для кривошипа, а также закона изменения кинетического момента всей системы относительно точки O :

$$\begin{aligned} N(\varphi, z) &= N_1(\varphi, z)/N_2(\varphi, z), \\ N_1(\varphi, z) &= -d_1 k(\varphi)(\hat{D}_x + \hat{L}_x) - d_1(\hat{D}_y + \hat{L}_y) \frac{r \cos \varphi}{l \sin \theta} \left(1 + d_2 - \frac{J_2 r \sin \varphi}{J_1 l \sin \theta} \right) - 2d_1 \frac{J_2 r^2}{J_1 l^2} cz + \\ &+ (1 + d_2) \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) \frac{J_2 \cos \varphi}{ml^2 \sin^4 \theta} z^2, \\ N_2(\varphi, z) &= k(\varphi) - \mu \operatorname{sgn}(N(\varphi, z) \cos \varphi) \frac{r \cos \varphi}{l \sin \theta} \left(1 + d_2 - \frac{J_2 r \sin \varphi}{J_1 l \sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Выражение $N(\varphi, z)$ используется для замыкания системы (1.1). Приведенная формула для $N(\varphi, z)$ является в определенном смысле рекурсивной: требуется информация о знаке величины $(N(\varphi, z) \cos \varphi)$, чтобы вычислить $N_2(\varphi, z)$. При численной реализации определяем два различных значения $N(\varphi, z)$, соответствующих тому или иному знаку $(N(\varphi, z) \cos \varphi)$, затем проверяем знаки полученных величин $N(\varphi, z)$, чтобы установить, какой из двух рассмотренных знаков произведения $(N(\varphi, z) \cos \varphi)$ корректен. При относительно небольших значениях безразмерного коэффициента трения μ знаменатель $N_2(\varphi, z)$ функции $N(\varphi, z)$ не обращается в нуль ни при каких φ и z . При этом знак слагаемого, содержащего множитель μ , не влияет на знак величины $N(\varphi, z)$ и соответственно указанная выше простая проверка достаточна для однозначного определения знака выражения $(N(\varphi, z) \cos \varphi)$.

Правая часть (1.1) – функция 2π -периодическая по φ . Орбитально устойчивая 2π -периодическая по φ траектория системы (1.1) соответствует рабочему режиму устройства. Пусть функция $\tilde{z}(\varphi)$ описывает зависимость переменной z от угла φ на 2π -периодической траектории.

Для практических приложений представляют интерес значения средней безразмерной угловой скорости и механической мощности на рабочих режимах. Они зависят от коэффициента c полезной нагрузки.

Среднее (по углу за период) значение коэффициента c_p механической мощности на рабочем режиме определим следующим образом:

$$c_p = \frac{P}{P_0} = \frac{S}{S_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{z}(\varphi) Q(\varphi, \tilde{z}(\varphi)) d\varphi,$$

где P – механическая мощность турбины, $P_0 = 0.5\rho S_0 V^3$ – мощность потока, проходящего через осевое сечение ветроприемного механизма, S_0 – площадь осевого сечения.

Оценим диапазон значений средней угловой скорости и среднего коэффициента мощности на рабочих режимах в зависимости от параметров модели, а также опишем области притяжения рабочих режимов.

2. Рабочие режимы системы. Будем рассматривать траектории, расположенные в области $z > 0$, поскольку из [11] следует, что соответствующие режимы намного предпочтительнее с точки зрения отбора мощности у потока, чем режимы, при которых кривошип вращается “по часовой” ($z < 0$). С целью построения 2π -периодических по φ траекторий системы (1.1) в зависимости от параметров модели воспользуемся методом [14].

В соответствии с этим подходом рассмотрим порождающую гамильтонову систему: при $\varepsilon = 0$ система (1.1) имеет гамильтониан $H_0(\varphi, p) = 0.5k(\varphi)p^2$. При достаточно малых значениях ε асимптотические оценки характеристик рабочих режимов моделируемой установки получены в [11] в предположении отсутствия трения ($f = 0$) путем применения метода Андронова–Понтрягина к системе (1.1) как к системе, близкой к гамильтоновой. В настоящей работе используем траектории порождающей консервативной системы с гамильтонианом H_0 в качестве нулевой итерации $\tilde{z}_0(\varphi)$ для построения 2π -периодических траекторий, последующие приближения $\tilde{z}_n(\varphi)$ определим по формулам, предложенным в статье [14]. Будем считать, что итерационный процесс сошелся, если максимум (по φ) модуля разности $\tilde{z}_n(\varphi)$ и $\tilde{z}_{n-1}(\varphi)$ меньше некоторого заданного числа. Если при этом $\tilde{z}_n(\varphi) > 0$ при всех φ , то используем функцию $\tilde{z}_n(\varphi)$ как итоговое приближение для 2π -периодической траектории $\tilde{z}(\varphi)$.

Рассмотрим случай, соответствующий малогабаритной ветроустановке с конкретными значениями геометрических и инерционных параметров: $J_1 = 0.00375 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_2 = 0.0375 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $r = 0.1 \text{ м}$, $l = 0.5 \text{ м}$, $S = 0.003 \text{ м}^2$, $m = 1.225 \text{ кг}$, $S_0 = 0.015 \text{ м}^2$. Пусть величина скорости ветра $V = 7 \text{ м/с}$; плотность воздуха $\rho = 1.125 \text{ кг/м}^3$. При этих значениях параметров получаем $\varepsilon = 0.5J_1^{-1}\rho Sr^3 = 0.0005$.

Помимо этого рассмотрим значения параметров модели, соответствующие работе устройства в потоке воды: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $V = 0.5 \text{ м/с}$ (остальные параметры те же, что и в первом случае). При этом значение безразмерного параметра $\varepsilon = 0.4$. Отметим, что конструкция установки позволяет при использовании системы в воде полностью изолировать ползун от воздействия жидкости, поместив его в защитный кожух, что является характерным (одним из основных) преимуществом установок шарнирного типа, в которых рабочий элемент совершает колебания, а не ротации. Таким образом, при рассмотрении системы как гидроэнергетической по-прежнему можно считать, что в ползуне действует именно сухое трение.

Во всех приведенных случаях знаменатель $N_2(\varphi, z)$ выражения (1.2) для реакции $N(\varphi, z)$ не обращается в нуль ни при каких значениях безразмерного коэффициента μ сухого трения.

На рис. 2, 3 представлены бифуркационные диаграммы средней безразмерной угловой скорости $\langle z \rangle$ кривошипа и среднего коэффициента c_p механической мощности устройства на режимах авторотации, отвечающих 2π -периодическим решениям системы (1.1), для случая $\varepsilon = 0.0005$ (рис. 2), а также для случая $\varepsilon = 0.4$ (рис. 3). Они построены при различных значениях коэффициента сухого трения f ($f = 0, 0.1, 0.25, 0.5$). На этих диаграммах сплошные линии отвечают притягивающим периодическим решениям, пунктирные – отталкивающим. Достаточное условие орбитальной устойчивости/неустойчивости периодической траектории: отрицательное/положительное значение угла наклона касательной к бифуркационной кривой в точке бифуркационной диаграммы, соответствующей данной траектории. Это условие – следствие того, что параметр c в системе (1.1) отвечает за поворот векторного поля [17].

Проиллюстрировано изменение средней (по углу) безразмерной угловой скорости и среднего (по углу) коэффициента c_p механической мощности в зависимости от коэффициента c полезной нагрузки. Для всех построенных 2π -периодических траекторий выполнено $\tilde{z}(\varphi) > 0$ при всех φ , тем самым скорость точки B (ползуна) не остается нулевой ни на каком интервале времени.

Можно видеть, что при $\varepsilon = 0.0005$ в случае $f = 0$ есть два интервала значений параметра c , для которых существует по два притягивающих 2π -периодических режима. При $f = 0.1$ и 0.25 такой интервал один. В связи с наличием этих интервалов наблюдается гистерезис характеристик рабочих режимов в зависимости от направления изменения параметра c . При $f = 0.5$ для всех значений коэффициента c существует только один 2π -периодический режим, который является притягивающим.

При $\varepsilon = 0.4$ в случаях $f = 0$ и 0.1 есть два диапазона значений параметра c , в которых есть по два притягивающих 2π -периодических режима, а в случае $f = 0.25$ такой диапазон один.

Сопоставляя диаграммы, отвечающие рабочим режимам установки в воздухе (рис. 2) и в воде (рис. 3), можно отметить, что для этих двух случаев падение угловой скорости и мощности, вызванное влиянием сухого трения, не сильно отличается по количественным показателям. В предельном случае нулевого коэффициента трения f бифуркационные диаграммы коэффициента мощности в воздухе и в воде отличаются друг от друга незначительно.

3. Управление коэффициентом полезной нагрузки. Рассмотрим возможность регулирования механической мощности путем изменения внешнего сопротивления в цепи генератора. Для конкретной установки все размерные параметры модели фиксированы, кроме величины V скорости

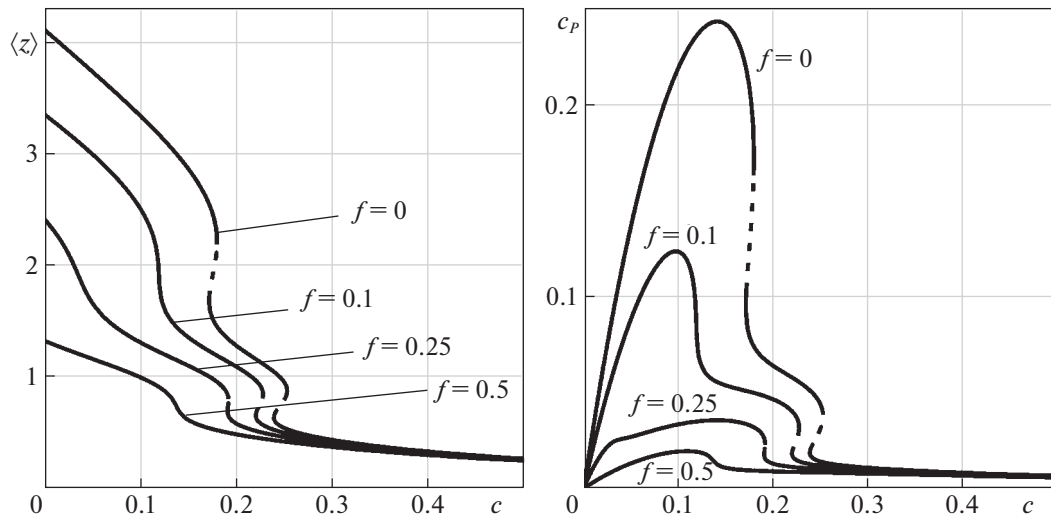


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для периодических режимов при $\epsilon = 0.0005$ (устройство функционирует в потоке воздуха)

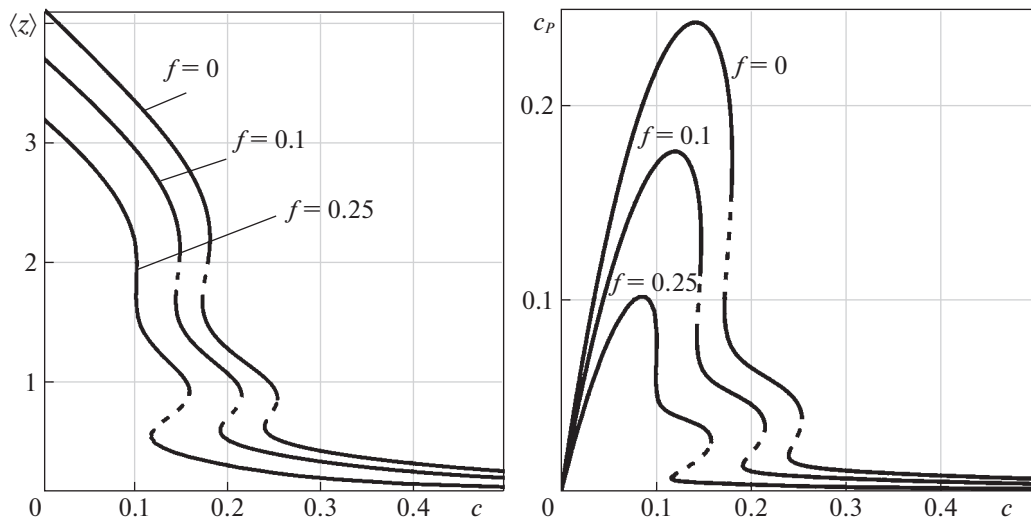


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для периодических режимов при $\epsilon = 0.4$ (устройство работает в потоке воды)

потока, и значения R внешнего сопротивления, которые описывают текущие условия эксплуатации. При изменении скорости V можно регулировать величину R внешнего сопротивления таким образом, чтобы значение коэффициента c полезной нагрузки соответствовало максимуму коэффициента c_p мощности: $c = c_{opt}$. Значение безразмерного коэффициента μ трения зависит от величины V скорости потока. Соответственно при изменении V меняется значение коэффициента c , доставляющее максимум коэффициента c_p мощности (на рис. 2, 3 это отвечает переходу от одной диаграммы к другой). В связи с этим для построения зависимости величины R от скорости V потока требуется информация о функции $c_{opt}(\mu)$, а не об одном значении c_{opt} (в отличие от модели, где не учитывалось трение). В остальном выбор значения R_{opt} , которое требуется для поддержания максимальной механической мощности, аналогичен предложенному в работе [15] для другой ветроустановки:

$$R_{opt} = \frac{2C^2}{\rho S r^2 c_{opt}(\mu) V} - \sigma.$$

Функция $c_{opt}(\mu)$ строится по абсциссам максимумов диаграмм $c_p(c)$, соответствующих различным значениям μ .

Поскольку значение R всегда положительно, существует предельное значение скорости V потока, при превышении которого нельзя реализовать максимум функции $c_p(c)$ (аналогичное свойство было отмечено для другого типа ветроустановки в работе [15]).

4. Обсуждение результатов. Получены бифуркационные диаграммы для характерных значений средней безразмерной угловой скорости и среднего коэффициента механической мощности на рабочих режимах устройства, которые соответствуют 2π -периодическим траекториям системы (1.1). Продемонстрировано, что в некоторых диапазонах значений параметров существуют два притягивающих периодических режима, области притяжения которых разделяет отталкивающий периодический режим. При таких значениях параметров имеет место гистерезис безразмерной угловой скорости и коэффициента мощности в зависимости от направления изменения коэффициента c , отвечающего за внешние условия функционирования устройства: скорость потока и нагрузку со стороны потребителей в цепи генератора.

Кроме того, из построенных диаграмм следует наличие в модели притягивающих периодических режимов, характеризующихся относительно высокими значениями безразмерной угловой скорости: $\langle z \rangle > 1$. На таких режимах скорость точки B крыла на определенных фазах движения превышает по величине скорость ветра. Режимы данного типа характерны для ветроустановок с высокими значениями выходной мощности: турбины пропеллерного типа и типа Дарье [22–25].

Продемонстрированы некоторые тенденции зависимости характеристик рабочих режимов от коэффициента сухого трения в ползуне, которое в модели описывается параметром f . В безразмерных параметрах и переменных построены серии бифуркационных диаграмм (рис. 2, 3), соответствующих различным значениям безразмерного коэффициента трения.

Заключение. В работе рассмотрено устройство преобразования энергии потока. В конструкции используется кривошипно-шатунный механизм, на шатуне которого закреплена лопасть. К преимуществам такой системы относятся достаточно высокие значения мощности, отбираемой у потока, а также возможность изоляции всех вращательных элементов от воздействия потока. Последнее свойство позволяет, в частности, использовать устройство не только как ветроэнергетическую установку, но и как гидроэнергетическую.

При моделировании внешних воздействий использованы подходы [7–9]. Математическая модель представлена в форме динамической системы второго порядка. Рабочему режиму установки соответствует периодическая орбитально устойчивая траектория системы. Для отыскания периодических решений и проверки их устойчивости применен метод [14]. Проведен параметрический анализ рабочих режимов. В частности, исследовано влияние трения в ползуне механизма при функционировании в различных средах (воздух, вода). Получены оценки коэффициента мощности на рабочих режимах. Продемонстрировано наличие эффекта гистерезиса мощности в зависимости от направления изменения коэффициента полезной нагрузки.

Предложена стратегия управления внешним сопротивлением, обеспечивающая максимизацию механической мощности на рабочем режиме установки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Senjyu T., Sakamoto R., Urasaki N., Funabashi T., Fujita H., Sekine H.* Output Power Leveling of Wind Turbine Generator for All Operating Regions by Pitch Angle Control // IEEE Trans. Energy Convers. 2006. V. 21. № 2. P. 467–475.
2. *Van T.L., Nguyen T.H., Lee D.C.* Advanced Pitch Angle Control Based on Fuzzy Logic for Variable-Speed Wind Turbine Systems // IEEE Trans. Energy Convers. 2015. V. 30. № 2. P. 578–587.
3. *Jiao X., Meng W., Yang Q., Fu L., Chen Q.* Adaptive Continuous Neural Pitch Angle Control for Variable Speed Wind Turbines // Asian J. Control. 2019. V. 21. № 4. P. 1966–1979.
4. *Balbayev G., Ceccarelli M.* Design and Characterization of a New Planetary Gear Box // New Advances in Mechanisms, Transmissions and Applications. Dordrecht: Springer, 2014. P. 91–98.
5. *Dosaev M., Holub A., Klimina L.* Preferable Operation Modes of a Wind Turbine with a Differential Planetary Gearbox // New Trends in Mechanism and Machine Science. 2015. V. 24. P. 545–552.
6. *Su R., Rui X., Wu X., Yin Q.* The Design and Analysis of Wind Turbine Based on Differential Speed Regulation // Proc. Inst. Mech. Eng. C: J. Mech. Eng. Sci. 2016. V. 230. № 2. P. 221–229.
7. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Математическая модель поведения малых ветровых электростанций // Мат. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 85–95.

8. Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Вен-Лон Лю, Чин-Хуэй Линь. Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 59–66.
9. Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О динамике малой ветроэлектростанции // ДАН. 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53.
10. Shalimova E., Klimina L., Lin K.H. On Behavior of a Double Rotor HAWT with a Differential Planet Gear // Tech. Mech. 2017. V. 37. № 2–5. P. 394–399.
11. Klimina L. Dynamics of a Slider-Crank Wave-Type Wind Turbine // Proc. 14th IFToMM World Congr. Taipei, 2015. P. 582–588.
<https://doi.org/10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS13.007>.
12. Голуб А.П., Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Меснянkin С.Ю., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Симоненко М.М. Устройство для преобразования возобновляемой энергии // Официальный бюллетень федеральной службы по интеллектуальной собственности (Роспатент), сер. Изобретения. Полезные модели. 2018. Т. 2. 2641176.
13. Klimina L., Dosaev M., Selyutskiy Yu. Asymptotic Analysis of the Mathematical Model of a Wind-Powered Vehicle // Appl. Math. Model. 2017. V. 46. P. 691–697.
14. Климина Л.А. Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. РАН. ТИСУ. 2020. № 2. С. 5–16.
15. Ишханян М.В., Климина Л.А. Ветроурубина класса “Савониус Магнус” с коническими лопастями: динамика и управление // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 160–168.
16. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. № 9. С. 234–238.
17. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
18. Климина Л.А. Метод поиска периодических траекторий центрально-симметричных динамических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 159–168.
19. Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д. Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 3–15.
20. Andronov P.R., Dosaev M.Z., Dynnikova G.Y., Selyutskii Y.D., Strekalov S.D. Modeling of Oscillating Wind Turbine // J. Machinery Manufacture and Reliability. 2009. V. 38. № 4. P. 383–387.
21. Dosaev M., Klimina L., Selyutskiy Y. Wind Turbine Based on Antiparallel Link Mechanism // New Trends in Mechanism and Machine Science. 2017. V. 43. P. 543–550.
22. Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Селюцкий Ю.Д. Об оптимизации формы лопасти ветротурбины // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 104–112.
23. Hsiao Y.C., Shyu L.S. Nonlinear Behaviors of a Small Wind Turbine Induced by Aerodynamics and Electromagnetic Field // J. Internet Tech. 2020. V. 21. № 1. P. 33–39.
24. Климина Л.А. Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вест. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 2009. № 5. С. 71–74.
25. Chen C., Kuo C. Effects of Pitch Angle and Blade Camber on Flow Characteristics and Performance of Small-Size Darrieus VAWT // J. Vis. 2013. V. 16. P. 65–74.