СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 8, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1005–1013

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. А. Н. Ветохин

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определённых на некомпактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства топологическая энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

DOI: 10.31857/S037406412108001X

Топологическая энтропия для автономных динамических систем на инвариантном компактном метрическом пространстве определена в статье [1]. В дальнейшем в работе [2] это понятие было распространено на динамические системы, определённые на произвольном метрическом пространстве.

1. Класс Бэра топологической энтропии семейства динамических систем в случае неинвариантного компакта. Следуя [2], приведём необходимое в дальнейшем определение. Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\mathcal{K}(X)$ – множество компактных подмножеств (компактов) в X, а $f:X\to X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик d_n^f, $n\in\mathbb{N}$, равенством

$$d_n^f(x,y)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x),f^{\circ i}(y)),\quad x,y\in X,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $f^{\circ i}$, $i\in\mathbb{N}$, – i-я итерация отображения f, $f^{\circ 0}\equiv \mathrm{id}_X$. Для фиксированного $K\in\mathcal{K}(X)$ и каждых $n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(K,f,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в компакте K, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *верхней* и *нижней топологической энтропией* отображения f на компакте K называют соответственно величины

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n)\quad\text{и}\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n).\qquad(1)$$

Отметим, что если метрику d заменить на другую метрику, порождающую ту же, что и d, топологию, то значения величин (1) не изменятся [3, с. 121].

Напомним ещё формулы для вычисления верхней и нижней топологических энтропий отображения f на компакте K, используемые в дальнейшем. Для каждых $x\in X$, $\varepsilon>0$ и $n\in\mathbb{N}$ через $B_f(x,\varepsilon,n)$ обозначим открытый шар $\{y\in K: d_n^f(x,y)<\varepsilon\}$ с центром в x радиуса ε в пространстве (X,d_n^f). Множество $D\subset K$ называется (f,ε,n)-*покрытием* компакта K, если

$$K\subset\bigcup_{x\in D}B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(K,f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов, которое может содержать (f,ε,n)-покрытие компакта K. Тогда верхняя и нижняя топологические энтропии отображения f на компакте K могут быть вычислены по формулам [3, с. 122]

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(K,f,\varepsilon,n),\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(K,f,\varepsilon,n).\qquad(2)$$

Из формул (1) (или (2)) очевидно следует неравенство $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f) \geqslant \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)$. Если компакт K является для отображения f инвариантным множеством, т.е. выполнено включение $f(K) \subset K$, то значения верхней и нижней топологических энтропий отображения f на компакте K совпадают [3, с. 122]. В общем случае, как показывает следующий пример, величины (1) могут не совпадать между собой. Рассмотрим множество Ω_2 последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, где $x_i \in \{0,1\}$, с метрикой

$$d_{\Omega_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1/\min\{i : x_i \neq y_i\}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Отметим, что пространство (Ω_2, d_{Ω_2}) гомеоморфно множеству Кантора на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой. Пусть K_0 – компакт в Ω_2, задаваемый условием:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in K_0 \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i \in \bigcup_{k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \{(2k)!, \ldots, (2k+1)!\},$$

а отображение $\sigma : \Omega_2 \to \Omega_2$ – сдвиг влево на один элемент: $\sigma((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Тогда

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_0, \sigma) = \ln 2, \quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K_0, \sigma) = 0.$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$, компакту $K \subset X$ и непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X \tag{3}$$

образуем функции

$$\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot\,)), \tag{4}$$

$$\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot\,)). \tag{5}$$

В данной работе для любого отображения (3) функции (4) и (5) изучаются с точки зрения бэровской классификации функций. Напомним, что функциями *нулевого бэровского класса* на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции $M \to \mathbb{R}$, и для всякого натурального числа p функциями *p-го бэровского класса* называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го бэровского класса.

В случае инвариантности компакта K относительно отображения f, как уже отмечалось, величины (1) совпадают между собой, а их общее значение называют *топологической энтропией* отображения f и обозначают $h_{\mathrm{top}}(f)$. В работе [4] установлено, что для любого отображения (3) функция

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot\,)) \tag{6}$$

принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а в [5] для $X = \mathcal{M} = \Omega_2$ построено семейство гомеоморфизмов (3), для которого функция (6) не принадлежит первому бэровскому классу, а следовательно, функции (4) и (5), вообще говоря, также не принадлежат первому бэровскому классу. В работе [4] показано, что если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то множество точек полунепрерывности снизу функции (6) содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{M}$ множество типа G_δ, а в работе [6] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $\mathcal{M}$ множеством типа G_δ. Кроме того, в работе [7] для $X = \Omega_2$ и любого полного метрического сепарабельного нульмерного пространства $\mathcal{M}$ (в качестве примера такого пространства можно рассматривать Ω_2) для каждого всюду плотного в пространстве $\mathcal{M}$ множества типа G_δ построено такое отображение (3), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) совпадает с этим множеством. Оказывается, в случае неинвариантного компакта K справедлива следующая

Теорема 1. *Для любых $K\in\mathcal{K}(X)$ и отображения (3) функция (4) принадлежит третьему бэровскому классу, а функция (5) – второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$. Если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то для любого отображения (3) множество точек полунепрерывности снизу функции (5) является всюду плотным множеством типа G_δ.*

Доказательство. Для каждых $\varepsilon>0$ и $n\in\mathbb{N}$ функция $\mu\mapsto n^{-1}\ln N_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)$ полунепрерывна снизу [8], а функция $\mu\mapsto n^{-1}\ln S_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)$ полунепрерывна сверху [4], следовательно [9, гл. IX, § 37, XI], существуют последовательности непрерывных на пространстве $\mathcal{M}$ функций $\mu\mapsto\varphi_d^m(K;\mu,\varepsilon,n)$ и $\mu\mapsto\psi_d^m(K;\mu,\varepsilon,n)$, $m\in\mathbb{N}$, такие, что

$$\frac{1}{n}\ln N_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)=\sup_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(K;\mu,\varepsilon,n),\quad \mu\in\mathcal{M},\tag{7}$$

$$\frac{1}{n}\ln S_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)=\inf_{m\in\mathbb{N}}\psi_d^m(K;\mu,\varepsilon,n),\quad \mu\in\mathcal{M}.\tag{8}$$

Вследствие формулы (7) получаем представление

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(K;\mu,1/k,n)=$$
$$=\sup_{k\in\mathbb{N}}\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{l\geqslant n}\sup_{m\in\mathbb{N}}\varphi_d^m(K;\mu,1/k,l)=$$
$$=\lim_{p\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant p}\lim_{r\to\infty}\min_{1\leqslant n\leqslant r}\lim_{q\to\infty}\max_{n\leqslant l\leqslant q}\max_{1\leqslant m\leqslant q}\varphi_d^m(K;\mu,1/k,l),$$

а в силу формулы (8) – представление

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(K,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\varliminf_{n\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{N}}\psi_d^m(K;\mu,1/k,n)=$$
$$=\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{l\geqslant n}\inf_{m\in\mathbb{N}}\psi_d^m(K;\mu,1/k,l)=$$
$$=\lim_{p\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant p}\max_{1\leqslant n\leqslant p}\lim_{q\to\infty}\min_{n\leqslant l\leqslant q}\min_{1\leqslant m\leqslant q}\psi_d^m(K;\mu,1/k,l).$$

Из этих представлений, поскольку максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежит тому же классу [9, гл. IX, § 37, III], очевидно вытекает, что функция $\mu\mapsto\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра, а функция $\mu\mapsto\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))$ – второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.

Так как функция $\mu\mapsto\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))$ представима в виде неубывающей последовательности функций первого бэровского класса, то её множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным множеством типа G_δ [10, лемма 2]. Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 1 в силу теоремы Бэра [9, гл. IX, § 39, VI] вытекает, что для любого отображения (3) в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ найдётся всюду плотное множество G типа G_δ такое, что сужения функций $\mu\mapsto\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))$ и $\mu\mapsto\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot))$ на множество G непрерывны.

Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (4). Чтобы ответить на него, построим метрические пространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Точками пространства $\mathcal{B}$ являются, по определению, всевозможные (счётные) последовательности $\mu=(\mu_k)_{k=1}^\infty$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется равенством

$$d_{\mathcal{B}}(\mu,\nu)=\begin{cases}0, & \text{если } \mu=\nu;\\ 1/\min\{k:\mu_k\ne\nu_k\}, & \text{если } \mu\ne\nu.\end{cases}$$

Отметим, что пространство $(\mathcal{B},d_{\mathcal{B}})$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Точками пространства $\mathcal{C}$ являются всевозможные пары (x, i), где $x \in [0,1]$ и $i \in \mathbb{N}$. Расстояние между точками (x, i) и (y, j) определяется равенством

$$d_{\mathcal{C}}((x,i),(y,j)) = \begin{cases} |x-y|, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Для каждого $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $K_r \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ компакт $K_r = [0,1] \times \{1, \ldots, r\}$ в пространстве $\mathcal{C}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $X = \mathcal{C}$ и $K = K_r$, тогда существует отображение (3) такое, что функция (4) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. По последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ построим последовательность $\alpha(\mu)$ с элементами $\alpha_k(\mu) = \mu_{[\log_2(k+1)]}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа). Рассмотрим последовательность (f_k) отображений из $\mathcal{B} \times [0,1]$ в $[0,1]$, определяемых следующим образом:

$$f_k(\mu, x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/\alpha_k(\mu), \\ 2x - 1 + 1/\alpha_k(\mu), & \text{если } 1 - 1/\alpha_k(\mu) < x \leqslant 1 - 1/(2\alpha_k(\mu)), \\ -2x + 3 - 1/\alpha_k(\mu), & \text{если } 1 - 1/(2\alpha_k(\mu)) < x \leqslant 1. \end{cases}$$

По этой последовательности построим отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ следующим образом:

$$f(\mu, (x, k)) = (f_k(\mu, x), k+1). \tag{9}$$

Функция f в силу её определения непрерывна на $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, которые стремятся к бесконечности. Вычислим значение верхней топологической энтропии отображения (9) для $\mu \in \mathcal{E}$.

Лемма 1. *Если $\mu \in \mathcal{E}$, то для отображения (9) при любом $r \in \mathbb{N}$ выполнено равенство*

$$\overline{h}_{\text{top}}(K_r, f(\mu, \cdot)) = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и $\mu \in \mathcal{E}$, тогда найдётся такой номер $k_0(\varepsilon) > r$, что для любого $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство $1/\alpha_k(\mu) < \varepsilon/2$.

Пусть $A_{k_0(\varepsilon)}$ – такое $(f(\mu, \cdot), \varepsilon/2, k_0(\varepsilon))$-покрытие компакта K_r, которое содержит минимальное количество элементов. Докажем, что множество $A_{k_0(\varepsilon)}$ является $(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k_0(\varepsilon) + i)$-покрытием компакта K_r для любого $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

В силу определения множества $A_{k_0(\varepsilon)}$ для любой точки $(x, l) \in K_r$ найдётся такой элемент $(x_0, l) \in A_{k_0(\varepsilon)}$, что $(x, l) \in B_{f(\mu, \cdot)}((x_0, l), \varepsilon/2, k_0(\varepsilon))$.

Если $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x, l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x_0, l)) \in [0, 1 - \varepsilon/2] \times \mathbb{N}$, то для любого $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ выполнено неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu, (x, l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu, (x_0, l))) =$$
$$= d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x, l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x_0, l))) < \varepsilon/2, \tag{10}$$

поскольку отрезок $[0, 1 - \varepsilon/2]$ инвариантен относительно отображения $f_{k_0(\varepsilon)+i}(\mu, \cdot)$ для всех $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Если $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x, l))$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu, (x_0, l)) \in [1 - \varepsilon/2,\ 1] \times \mathbb{N}$, то для любого $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ имеет место неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu, (x, l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu, (x_0, l))) \leqslant \varepsilon/2, \tag{11}$$

так как отрезок $[1 - \varepsilon/2,\ 1]$ инвариантен относительно отображений $f_{k_0(\varepsilon)+i}(\mu, \cdot)$ для всех $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Если либо $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)) \in [0,1-\varepsilon/2]\times\mathbb{N}$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l)) \in [1-\varepsilon/2,1]\times\mathbb{N}$, либо $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l)) \in [0,1-\varepsilon/2]\times\mathbb{N}$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)) \in [1-\varepsilon/2,1]\times\mathbb{N}$, то для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ выполнено неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x,l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x_0,l))) \leqslant$$
$$\leqslant d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)), f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l))) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \tag{12}$$

Из неравенств (10)–(12) следует, что $(x,l)\in B_{f(\mu,\cdot)}((x_0,l),\varepsilon,k_0(\varepsilon)+i)$ для любого $i\in\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, а следовательно, множество $A_{k_0(\varepsilon)}$ является $(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k_0(\varepsilon)+i)$-покрытием компакта K_r для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Таким образом, при $n\geqslant k_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)\leqslant S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon)),$$

из которой вытекает, что

$$\overline{h}_{\text{top}}(K_r,f(\mu,\cdot)) = \lim_{\varepsilon\to0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)\leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon)) = 0.$$

Лемма доказана.

Теперь оценим значение верхней топологической энтропии отображения (9) для $\mu\notin\mathcal{E}$.

Лемма 2. *Если $\mu\notin\mathcal{E}$, то для отображения (9) выполнено неравенство*

$$\overline{h}_{\text{top}}(K_1,f(\mu,\cdot))\geqslant\frac{1}{4}\ln 2.$$

Доказательство. Пусть $\mu\notin\mathcal{E}$, тогда существуют подпоследовательность $(\mu_{k_j})_{j=1}^\infty\subset\subset(\mu_k)_{k=1}^\infty$ и натуральное число q такие, что $\mu_{k_j}=q$ при всех $j\in\mathbb{N}$.

Для всех $j\in\mathbb{N}$, $k\in\{2^{k_j}-1,\ldots,2^{k_j+1}-2\}$ и $x\in[0,1]$ справедливо равенство $f_k(\mu,x)==f_{2^{k_j}-1}(\mu,x)=t_q(x)$, где

$$t_q(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1-1/q;\\ 2x-1+1/q, & \text{если } 1-1/q<x\leqslant 1-1/(2q);\\ -2x+3-1/q, & \text{если } 1-1/(2q)<x\leqslant 1.\end{cases}$$

При помощи аффинного сохраняющего порядок преобразования φ отобразим отрезок $I_q==[1-1/q,\,1]$ на отрезок $[0,\,1]$, при этом отображение $t_q|_{I_q}:I_q\to I_q$ перейдёт в отображение $g=\varphi\circ t_q|_{I_q}\circ\varphi^{-1}:[0,\,1]\to[0,\,1]$, определяемое равенством

$$g(x)=\begin{cases} 2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1/2;\\ 2-2x, & \text{если } 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

В монографии [3, с. 502] установлено, что топологическая энтропия отображения g равна $\ln 2$, следовательно, найдётся такое $\varepsilon_0<1/q$, что для любого $\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d([0,\,1],g,\varepsilon,n)\geqslant\frac{1}{2}\ln 2,\quad d(x,y)=|x-y|.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ на отрезке $[0,\,1]$ рассмотрим множество точек $\{a_1,\ldots,a_{N_d([0,\,1],g,\varepsilon,n)}\}$, попарные d_n^g-расстояния между которыми больше $\varepsilon>0$.

Пусть $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $n = 2^{k_j+1} - 2^{k_j} - 1$, тогда $d^{f(\mu,\cdot)}_{2^{k_j}+n-1}$-расстояние между любыми прообразами любых двух точек $(\varphi^{-1}(a_i), 2^{k_j} - 1)$ и $(\varphi^{-1}(a_m), 2^{k_j} - 1)$, $i \neq m$, при отображении $f^{\circ(2^{k_j}-2)}(\mu,\cdot)$ больше $\varepsilon/q > 0$, а следовательно,

$$N_{d_{\mathcal{C}}}(K_1, f(\mu,\cdot), \varepsilon/q, 2^{k_j+1}) \geqslant N_d([0,\, 1], g, \varepsilon, 2^{k_j+1} - 2^{k_j}),$$

откуда получаем оценки

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_1, f(\mu,\cdot)) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{j\to\infty} \frac{(2^{k_j+1} - 2^{k_j})}{2^{k_j+1}} \frac{1}{(2^{k_j+1} - 2^{k_j})} \ln N_d([0,\, 1], g, \varepsilon, 2^{k_j+1} - 2^{k_j}) \geqslant \frac{1}{4}\ln 2.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2 воспользуемся следующим утверждением, установленным в работе [11]: если функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mu,\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра, то пересечение замыканий множеств $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mathcal{E},\cdot))$ и $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot))$ непусто. В силу лемм 1 и 2 имеем неравенства

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mathcal{E},\cdot)) = 0 < \frac{1}{4}\ln 2 \leqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_1, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)) \leqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)),$$

следовательно, функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму бэровскому классу, а в силу всюду плотности множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}\setminus\mathcal{E}$ в пространстве $\mathcal{B}$ она всюду разрывна на пространстве $\mathcal{B}$. Теорема доказана.

2. Класс Бэра топологической энтропии семейства динамических систем на некомпактном метрическом пространстве. Следуя [2], назовём величины

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f), \quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f) \tag{13}$$

соответственно *верхней* и *нижней топологической энтропией* отображения $f : X \to X$. Как показывает следующий пример, величины (13) могут не совпадать между собой. Построим пространство $\mathcal{A}$ следующим образом. Точками пространства $\mathcal{A}$ являются всевозможные пары (x, i), где $x \in \Omega_2$, $i \in \mathbb{N}$, а метрика определяется равенством

$$d_{\mathcal{A}}((x,i),(y,j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x,y), & \text{если } i = j,\\ 1, & \text{если } i \neq j.\end{cases}$$

По последовательности

$$f_n = \begin{cases} \mathrm{id}_{\Omega_2}, & \text{если } t_{2k} \leqslant n \leqslant t_{2k+1} - 1,\\ \sigma, & \text{если } t_{2k+1} \leqslant n \leqslant t_{2k+2} - 1,\end{cases} \qquad t_s = \sum_{m=0}^{s} m!, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

непрерывных отображений из Ω_2 в Ω_2 определим непрерывное отображение $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ равенством

$$f_{\mathcal{A}}(x, n) = (f_n(x), n + 1).$$

Лемма 3. *Имеет место неравенство* $\underline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) < \overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}})$.

Доказательство. Для произвольного $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $H_r \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ компакт $H_r = \Omega_2 \times \{1, \ldots, r\}$. Для любого компакта $K \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ найдётся такое r, что $K \subset H_r$, следовательно, выполнены равенства

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) = \lim_{r\to\infty} \underline{h}_{\mathrm{top}}(H_r, f_{\mathcal{A}}), \quad \overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) = \lim_{r\to\infty} \overline{h}_{\mathrm{top}}(H_r, f_{\mathcal{A}}).$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, а множество Q является $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k})$-покрытием компакта H_r, содержащим минимальное количество элементов. Тогда в силу определения отображения $f_{\mathcal{A}}$ это множество является $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k+1})$-покрытием компакта H_r. Так как точки $(x, i) \in \mathcal{A}$, где $x = (x_1, \ldots, x_{t_{2k}+p}, 0, 0, \ldots)$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, образуют $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k})$-покрытие компакта H_r, то количество элементов в множестве Q не превосходит $r2^{t_{2k}+p}$. Поэтому получаем

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(H_r, f_{\mathcal{A}}) \leqslant \lim_{p\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{t_{2k}+p}{(2k+1)!} \ln 2 + \frac{\ln r}{(2k+1)!} \right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2}{2k+1} \left(2 + \frac{p}{(2k)!} \right) = 0,$$

а следовательно, $\underline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) = 0$.

Установим неравенство $\overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) \geqslant 0.5 \ln 2$, из которого будет следовать утверждение леммы 3. В пространстве Ω_2 рассмотрим множество R_k, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, точек вида

$$(x_1, \ldots, x_{(2k+2)!}, 0, 0, \ldots).$$

В прообразе каждой точки (x, t_{2k+1}), $x \in R_k$, при отображении $f_{\mathcal{A}}^{\circ(t_{2k+1}-1)}$ выберем одну точку $(y_x, 1) \in H_1$. Пусть $x' \neq x''$, $x', x'' \in R_k$, тогда имеем

$$d_{t_{2k+2}}^{f_{\mathcal{A}}}((y_{x'}, 1), (y_{x''}, 1)) \geqslant \max_{0\leqslant i\leqslant (2k+2)!-1} d_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}^{\circ i}(x', t_{2k+1}), f_{\mathcal{A}}^{\circ i}(x'', t_{2k+1})) = 1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon < 1$ величина $N_{d_{\mathcal{A}}}(H_1, f_{\mathcal{A}}, \varepsilon, t_{2k+2})$ не меньше, чем $2^{(2k+2)!}$ – мощности множества R_k, а значит, справедливы неравенства

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) \geqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(H_1, f_{\mathcal{A}}) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{t_{2k+2}} \ln N_{d_{\mathcal{A}}}(H_1, f_{\mathcal{A}}, \varepsilon, t_{2k+2}) \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{t_{2k+2}} \ln 2 \geqslant \frac{\ln 2}{2}.$$

Лемма доказана.

Для отображения (3) рассмотрим функции

$$\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)), \tag{14}$$

$$\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{15}$$

В случае компактности метрического пространства X величины (13) равны топологической энтропии отображения f, поэтому, как вытекает из [4], функции (14) и (15) принадлежат второму бэровскому классу, а из работы [5] следует, что они, вообще говоря, не принадлежат первому бэровскому классу.

Теорема 3. *Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $X = \mathcal{C}$, то существует отображение (3) такое, что функция (14) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Для любого компакта $K \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ найдётся такое r, что $K \subset K_r$, следовательно, для топологической энтропии любого непрерывного отображения $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ выполнено равенство

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(\mathcal{C})} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f).$$

В силу лемм 1 и 2 для семейства (9) получаем цепочку неравенств

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mathcal{E}, \cdot)) = 0 < \frac{1}{4} \ln 2 \leqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}, \cdot)),$$

следовательно, функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму бэровскому классу [11], а в силу всюду плотности множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ в пространстве $\mathcal{B}$ она всюду разрывна на пространстве $\mathcal{B}$. Теорема доказана.

Напомним, что метрическое пространство X называют *локально компактным*, если каждая его точка обладает компактной окрестностью [12, с. 315], а локально компактное пространство X *счётно в бесконечности* [12, с. 316], если оно является объединением счётного семейства компактных множеств. Примерами таких пространств являются $\mathbb{R}^n$, определённое выше пространство $\mathcal{C}$ и, вообще, любое локально компактное пространство со счётной базой [12, с. 316; 13, с. 254].

Теорема 4. *Пусть локально компактное пространство X счётно в бесконечности, тогда для любого пространства $\mathcal{M}$ и отображения (3) функция (14) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а функция (15) – второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$. Если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то для любого отображения (3) множество точек полунепрерывности снизу функции (15) является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как пространство X счётно в бесконечности, то существует возрастающая последовательность $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ относительно компактных открытых множеств, образующая покрытие пространства X, такая, что $\overline{U}_s \subset U_{s+1}$ для всех $s \in \mathbb{N}$ [12, с. 316]. Для любого компакта $K \subset X$ найдётся такое s_0, что $K \subset U_{s_0}$, так как в противном случае из покрытия компакта K последовательностью $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ открытых множеств невозможно выделить конечное подпокрытие, что противоречит компактности K. Таким образом, для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ имеем

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \overline{h}_{\mathrm{top}}(\overline{U}_s, f),$$

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \underline{h}_{\mathrm{top}}(\overline{U}_s, f).$$

Используя формулу (7), получаем

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(\overline{U}_s, f(\mu,\cdot), \varepsilon, n) =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, n) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{l\geqslant n} \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, l) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant s\leqslant p} \max_{1\leqslant k\leqslant p} \lim_{r\to\infty} \min_{1\leqslant n\leqslant r} \lim_{q\to\infty} \max_{n\leqslant l\leqslant q} \max_{1\leqslant m\leqslant q} \varphi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, l).$$

Вследствие формулы (8) имеем

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(\overline{U}_s, f(\mu,\cdot), \varepsilon, n) =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \varliminf_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \psi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, n) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{l\geqslant n} \inf_{m\in\mathbb{N}} \psi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, l) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant s\leqslant p} \max_{1\leqslant k\leqslant p} \max_{1\leqslant n\leqslant p} \lim_{q\to\infty} \min_{n\leqslant l\leqslant q} \min_{1\leqslant m\leqslant q} \psi_d^m(\overline{U}_s; \mu, 1/k, l).$$

Так как максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежат тому же классу [9, гл. IX, § 37, III], функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра, а функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot))$ – второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.

Поскольку функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot\,,\,))$ представима в виде неубывающей последовательности функций первого бэровского класса, то её множество точек полунепрерывности снизу является множеством типа G_δ, которое является всюду плотным в случае, когда пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой [10, лемма 2]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 309–319.
2. *Bowen R.* Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
4. *Ветохин А.Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.
5. *Ветохин А.Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2016. № 2. С. 44–48.
6. *Ветохин А.Н.* Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2019. № 3. С. 69–71.
7. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1275–1283.
8. *Ветохин А.Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 327–333.
9. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 1937.
10. *Карпук М.В.* Строение множества точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 1404–1408.
11. *Ветохин А.Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1313–1317.
12. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. М., 1975.
13. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 13.10.2020 г.
После доработки 31.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1014–1022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911+517.923

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

© 2021 г. Дж. Кртинич, М. Микич

Для уравнения Эмдена–Фаулера $y'' - x^a y^\sigma = 0$ с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma < 0$ рассматривается задача Коши, у которой начальное значение решения принадлежит одной из положительных координатных полуосей. Для задачи с начальным значением на положительной полуоси ординат (при этом допускается несобственное начальное значение производной решения) получены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять параметры уравнения, чтобы эта задача Коши имела решение. Для задачи с начальным значением на положительной полуоси абсцисс доказано, что при $\sigma \in (-1, 0)$ она имеет единственное решение.

DOI: 10.31857/S0374064121080021

1. Введение. В работе изучается нелинейное дифференциальное уравнение Эмдена–Фаулера

$$y'' - x^a y^\sigma = 0, \tag{1.1}$$

здесь a и σ – вещественные параметры, $\sigma \neq 1$. Это уравнение и его обобщения имеют значительные применения во многих областях науки и техники. Уравнение Эмдена–Фаулера исследовалось во многих монографиях и статьях. Например, в монографиях [1, гл. 7; 2, гл. 5] изучены асимптотические свойства его решений в бесконечности. В работах [3–7] установлены некоторые асимптотические свойства решений уравнения Эмдена–Фаулера в окрестности нуля, а также получен ряд результатов о решении некоторых задач Коши для уравнения (1.1), которые побудили нас изучить в данной работе эти задачи в случае $\sigma < 0$ и $a \in \mathbb{R}$ полностью.

В [3] доказано, что при $\sigma < 1$, если $a = -2$, каждое решение $y(x)$ уравнения (1.1), определённое на интервале с нулевым левым концом, имеет при $x \to +0$ асимптотическое представление

$$y(x) = (1-\sigma)^{1/(1-\sigma)}(-\ln x)^{1/(1-\sigma)}(1 + o(1)),$$

а если $a < -2$, то каждое такое положительное решение $y(x)$ имеет при $x \to +0$ представление

$$y(x) = [(a+2)(1+a+\sigma)/(1-\sigma)^2]^{1/(\sigma-1)} x^{(a+2)/(1-\sigma)}(1 + o(1)),$$

из чего следует, что ось y является вертикальной асимптотой решения уравнения (1.1) при $a \leqslant -2$, $\sigma < 1$. В работе [5] показано, что если $\sigma \leqslant -1$ и $x_1 > 0$, то каждое положительное монотонное решение уравнения (1.1), определённое в точке x_1, существует на некотором интервале I таком, что $(0, x_1] \subset I$. В [5] показано также, что при $\sigma < 0$, $a > -2$, если $y(x)$ – положительное решение уравнения (1.1), определённое на полуинтервале $(0, x_0]$ при некотором $x_0 > 0$, такое, что $y'(x_0) \leqslant 0$, то $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ существует и конечен. Кроме того, в теореме 3 из [5] для уравнения (1.1) при $\sigma < 0$, $a > -1$ доказаны существование и единственность решения задачи Коши

$$y(0) = c, \quad y'(0) = \lambda, \tag{1.2}$$

где $c > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (здесь $y(0) = \lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ и $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0+} y'(x)$, существование этих пределов следует из приведённых выше результатов).

В этой работе мы дополним результаты [3] и [5].

Структура работы следующая. В п. 2 рассматривается задача Коши (1.1), (1.2) при $c \in \in (0,\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$. Мы получим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять параметры a и σ уравнения (1.1), чтобы задача Коши (1.1), (1.2) имела решение (или не имела решения). В случаях когда решение существует, мы исследуем его единственность. В п. 3 для уравнения (1.1) рассматривается задача Коши

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=\lambda, \quad x_0>0, \tag{1.3}$$

где $\sigma<0$, $a\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$. Доказано, что при $\sigma\in(-1,0)$ эта задача имеет единственное решение.

2. Задача Коши для уравнения Эмдена–Фаулера для начальной точки на положительной части оси y. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), в которой $\sigma<0$, $a\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$, $c>0$.

Прежде всего мы должны определить, что означает постановка задачи Коши в рассматриваемой ситуации. Будем понимать величины $y(0)$ и $y'(0)$ как пределы при $x\to 0+$ функций $y(x)$ и $y'(x)$. Как следует из приведённых во введении результатов работы [5], при $\sigma\leqslant -1$ и $a>-2$ для положительного решения $y(x)$ уравнения (1.1), определённого на интервале с нулевым левым концом, существует $y(0)\in[0,+\infty)$. Существование $y'(0)\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$ вытекает из того, что в силу уравнения (1.1) справедливо неравенство $y''(x)>0$ при $x>0$.

Рассмотрим уравнение (1.1) для $\sigma<0$ и $a\in\mathbb{R}$. Как сказано во введении, в [3] доказано, в частности, что если $\sigma<0$ и $a\leqslant -2$, то $x=0$ является вертикальной асимптотой всех положительных решений уравнения (1.1), определённых на интервалах с нулевым левым концом, а согласно теореме 3 из [5], если $\sigma<0$, $a>-1$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, то задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение. Вследствие этого естественно возникают два вопроса.

1. Как ведут себя положительные решения уравнения (1.1), определённые на интервалах с нулевым левым концом, при $x\to 0+$, в случае, когда $\sigma<0$ и $-2<a\leqslant -1$?

2. Могут ли решения уравнения (1.1) в случае $\sigma<0$ и $a>-1$ стремиться к конечной точке на положительной полуоси оси y, когда $x\to 0+$ с наклоном “$\lambda=-\infty$”?

Следующие лемма, теорема и пример дают ответ на первый вопрос.

Лемма 2.1. *Пусть $\sigma<0$, $-2<a\leqslant -1$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $c>0$. Тогда задача Коши (1.1), (1.2) не имеет решения.*

Доказательство. Предположим, что такое решение $y(\cdot)$ существует, и пусть оно определено на $(0,h]$ для некоторого $h>0$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h)-\lambda=\int\limits_0^h x^a y^\sigma(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Так как $y(x)\to c$, когда $x\to 0+$, то $x^a y^\sigma \sim Cx^a$ для некоторого $C>0$, когда $x\to 0+$. Поэтому правая часть равенства (2.1) бесконечна, а его левая часть конечна, получаем противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $\sigma<0$ и $-2<a\leqslant -1$. Тогда для любого положительного решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.1), определённого на интервале $(0,x_0]$ при некотором $x_0>0$, такого, что $y'(x_0)\leqslant 0$, имеет место соотношение*

$$\lim_{x\to 0+} y'(x)=-\infty.$$

Доказательство. В теореме 1 работы [5] доказано, что если $\sigma<0$ и $a+\sigma+1\leqslant 0$, то никакое положительное решение уравнения (1.1), определённое на интервале с нулевым левым концом, не стремится к нулю. Следовательно, решение $y(x)$, удовлетворяющее предположениям доказываемой теоремы, стремится при $x\to 0+$ к конечной точке положительной полуоси оси y. Так как $y''(x)>0$, то решения уравнения (1.1) представляют собой выпуклые функции, и поэтому существует $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x)$. Обозначим наклон к оси x решения $y(x)$ в точке 0 через λ, $\lambda \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$. Пусть $\lambda \neq -\infty$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h) - \lambda = \int\limits_0^h x^a y^\sigma(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Из того, что $y(x) \to c > 0$ при $x \to 0+$, следует эквивалентность $x^a y^\sigma \sim Cx^a$, где $C > 0$, когда $x \to 0+$. Поэтому левая часть равенства (2.2) конечна, а его правая часть бесконечна, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

В силу леммы 2.1 и теоремы 2.1 заключаем, что если $\sigma < 0$ и $a \in (-2, -1]$, то все положительные решения дифференциального уравнения (1.1), определённые на интервале $(0, x_0]$ при некотором $x_0 > 0$, имеют наклон $\lambda = -\infty$, когда $x \to 0+$, т.е. ось y является касательной к интегральным кривым решений этого уравнения.

Это приводит к вопросу о единственности решения задачи Коши

$$y(0) = c, \quad y'(0) = -\infty \tag{2.3}$$

для уравнения (1.1) при $\sigma < 0$, $-2 < a \leqslant -1$ и $c > 0$. Следующий пример показывает, что решение задачи Коши (1.1), (2.3) не обязательно будет единственным.

Пример. Пусть

$$x(t) = \frac{c^3}{2}\frac{1}{\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d}, \quad y(t) = \frac{ct}{\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d}, \tag{2.4}$$

где c и d – произвольные положительные постоянные. Заметим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ корректно определены на интервале $(1, \infty)$. Кроме того, функция $x(t)$ монотонна на $(1, \infty)$, поэтому $x(t)$ и $y(t)$ – параметрические представления некоторой функции $y(x)$. Простыми вычислениями получаем равенства

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\frac{c^3}{2}\frac{1}{(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^2}\sqrt{\frac{t}{t-1}},$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = c\frac{\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d - \sqrt{t/(t-1)}}{(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{c^3}{4}\frac{1 + 4t + \sqrt{t^{-1}(t-1)^{-1}}(\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = \frac{c}{2}\frac{5t + (5-4t)\sqrt{t/(t-1)}(\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3}.$$

Отсюда следует, что

$$y''_{x^2}(t) = \frac{1}{(x'(t))^3}(y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)) = \frac{2}{c^5}\frac{1}{t^2}(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3,$$

а из определения (2.4) – что

$$(x(t))^{-1}(y(t))^{-2} = \frac{2}{c^5}\frac{1}{t^2}(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3.$$

Поэтому $x(t)$ и $y(t)$ при каждых $c > 0$, $d > 0$ задают параметрическое представление функции $y(x)$, являющейся решением уравнения $y'' = x^{-1}y^{-2}$.

При $t \to \infty$ получаем $x(t) \to 0$, $y(t) \to c$,

$$y'_x(t) = -\frac{2}{c^2}\sqrt{1-\frac{1}{t}}\left(\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}) + d - \frac{1}{\sqrt{1-1/t}}\right) \to -\infty$$

для любого $d \in (0,\infty)$. Таким образом, функции $x(t)$ и $y(t)$, определённые равенствами (2.4), дают при каждом положительном d параметрическое представление решения $y(x)$ задачи Коши (2.3) для уравнения $y'' = x^{-1}y^{-2}$. Остаётся убедиться, что при разных d получаются различные решения.

Из определения (2.4) очевидно вытекает, что $y(t)/x(t) = 2t/c^2$. Поэтому, если график функции $y(x)$, имеющей параметрическое представление (2.4), при некотором значении параметра t проходит через точку $(x_0, y_0) \in (0,\infty)^2$, то это значение параметра определяется однозначно: $t_0 = c^2 y_0/(2x_0)$ (число $c > 0$ фиксировано). Но тогда из любого уравнения (2.4) однозначно находится $d = c^3/(2x_0) - (\sqrt{t_0(t_0-1)} + \ln(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0-1}\,))$. Таким образом, функции, имеющие параметрические представления (2.4) с разными d, не только не совпадают друг с другом, но их графики даже не имеют общих точек.

Ответ на второй из поставленных в начале этого пункта вопросов даёт

Лемма 2.2. *Пусть $\sigma < 0$, $a > -1$, $c > 0$ и $\lambda = -\infty$. Тогда задача Коши (1.1), (1.2) не имеет решения.*

Доказательство. Предположим, что такое решение $y(x)$ существует, и пусть это решение определено на $(0, h]$ при некотором $h > 0$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h) - y'(\delta) = \int_\delta^h y''(x)\,dx = \int_\delta^h x^a y^\sigma(x)\,dx, \tag{2.5}$$

где $\delta \in (0, h)$. Так как $y \to c$ при $x \to 0+$, то $x^a y^\sigma \sim Cx^a$ для некоторого $C > 0$, когда $x \to 0+$. Поэтому правая часть равенства (2.5) конечна, а его левая часть бесконечна, когда $\delta \to 0+$, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

3. Задача Коши для уравнения Эмдена–Фаулера для начальной точки на положительной части оси x. Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.3), в которой $\sigma < 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Уточнение постановки задачи (1.1), (1.3) проводится аналогично тому, как это сделано в начале п. 2 для задачи (1.2), т.е. под $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ понимаются односторонние пределы при $x \to x_0+$ функций $y(x)$ и $y'(x)$ соответственно.

Как отмечено выше, в теореме 1 из [5] показано, что если $\sigma < 0$ и $a + \sigma + 1 \leqslant 0$, то не существует положительного решения уравнения (1.1) такого, что его график "стремится к точке" $(0, 0)$.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях будет существовать решение уравнения (1.1) такое, что его график "стремится" к некоторой точке на оси x? Частичный ответ на этот вопрос следует для $\lambda = 0$ из работы [6]. Действительно, в теореме 1 этой работы показано, что при $\sigma > -1$, если $p(x)$ – непрерывная отрицательная функция на $[0, 1]$, существует решение уравнения $y'' + p(x)|y|^\sigma = 0$ такое, что $y(0) = y'(0) = 0$. Отметим, что в этом утверждении начальные условия относятся к точке $(0, 0)$, но если применить его к функции $p(x) = -(x - x_0)^a$, где $x_0 > 0$, то получим ответ на наш вопрос для точки x_0.

Ответ на поставленный вопрос для $\lambda \geqslant 0$, $\sigma \in (-1, 0)$ даёт

Теорема 3.1. *Пусть $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda \geqslant 0$. Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет решение, определённое на полуинтервале $(x_0, x_0 + h]$ при некотором $h > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство решений $y_\mu(x)$ на $[x_0, x_0 + h]$ такое, что

$$y_\mu(x_0) = \mu, \quad y'_\mu(x_0) = \lambda.$$

Так как $y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x)$, имеем, что $y''_\mu(x) > 0$ и $y'_\mu(x) \geqslant 0$ на $[x_0, x_0 + h]$. Кроме того, поскольку отображение $x \mapsto x^a$ непрерывно и положительно на $[x_0, x_0 + h]$, существуют постоянные m и M такие, что $M \geqslant x^a \geqslant m > 0$ для каждого $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Пусть $0 < \alpha \leqslant h$. Если $x \in (x_0, x_0+\alpha]$, то $y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \geqslant m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)$. Следовательно,

$$y'_\mu(x) - \lambda = y'_\mu(x) - y'_\mu(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \geqslant m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\int\limits_{x_0}^{x} dt = m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)(x-x_0)$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+\alpha]$. Воспользовавшись этим неравенством, аналогично получаем

$$y_\mu(x) - \mu = y_\mu(x) - y_\mu(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \geqslant \lambda(x-x_0) + \frac{m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)}{2}(x-x_0)^2$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+\alpha]$.

Поэтому

$$y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant \mu + \lambda\alpha + \frac{m}{2} y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\alpha^2 \geqslant \frac{m}{2} y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\alpha^2,$$

т.е. $y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant (m/2)^{1/(1-\sigma)}\alpha^{2/(1-\sigma)}$, а поскольку $0 < \alpha \leqslant h$ произвольно, имеем

$$y_\mu(x) \geqslant \left(\frac{m}{2}\right)^{1/(1-\sigma)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.1}$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+h]$.

Таким образом, справедлива оценка

$$y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \leqslant M(m/2)^{\sigma/(1-\sigma)}(x-x_0)^{(2\sigma)/(1-\sigma)} = c_1(x-x_0)^{(2\sigma)/(1-\sigma)}$$

для каждого $x \in (x_0, x_0+h]$ (где c_1 – постоянная, не зависящая от μ). Интегрируя два раза, получаем

$$y'_\mu(x) - \lambda = \int\limits_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \leqslant c_1\int\limits_{x_0}^{x}(t-x_0)^{2\sigma/(1-\sigma)}\,dt = c_1\frac{1-\sigma}{1+\sigma}(x-x_0)^{(1+\sigma)/(1-\sigma)} \tag{3.2}$$

и

$$y_\mu(x) - \mu - \lambda(x-x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \leqslant c_1\frac{(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)} = c_2(x-x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.3}$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+h]$ (где c_2 – постоянная, не зависящая от μ). Из оценки (3.3) следует, что семейство $(y_\mu(x))_\mu$ является равномерно ограниченным на $[x_0, x_0+h]$, а из оценки (3.2) – что это семейство равностепенно непрерывно. По теореме Арцела–Асколи заключаем, что существует последовательность $\mu' \to 0$ такая, что $y_{\mu'}(x)$ равномерно сходится на $[x_0, x_0+ h]$ к некоторой функции $y(x)$.

В частности, $y_{\mu'}(x)$ равномерно сходится к $y(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$ для каждого $\alpha \in (0,h)$. Из оценки (3.1) (ограниченность снизу) следует, что $y^\sigma_{\mu'}(x)$ равномерно сходится к $y^\sigma(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$. Так как $y''_{\mu'}(x) = x^a y^\sigma_{\mu'}(x)$, то $y''(x) = x^a y^\sigma(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$ (и поскольку α произвольно, это равенство выполняется также на $(x_0, x_0+h]$). Очевидно, что $y(x_0) = 0$ и $y'(x_0) = \lambda$. Теорема доказана.

Теорему 3.1 можно также доказать в случае $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda \leqslant 0$. Тогда решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0-h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого h. Доказательство этого случая вытекает из рассмотрения функции $y(2x_0-x)$.

Теорема 3.1 даёт нам существование решения задачи Коши (1.1), (1.3). Возникает вопрос о единственности такого решения. В случае, когда $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$, ответ можно получить стандартным способом. Это показано в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть* $-1 < \sigma < 0$ *и* $\lambda \in (0, \infty)$. *Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет единственное решение, определённое на некотором полуинтервале* $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$.

Доказательство. Задача Коши (1.1), (1.3) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (x - t) t^a y^\sigma(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи Коши (1.1), (1.3). Из представления (3.4) вытекает неравенство

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x - x_0) \int\limits_{x_0}^{x} t^a |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt. \tag{3.5}$$

Вследствие уравнения (1.1) и начальных условий получаем, что $y''(x) > 0$ и $\lambda \leqslant y'(x) \leqslant 2\lambda$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$ при некотором $h > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(x - x_0) \leqslant y_1(x) \leqslant 2\lambda(x - x_0) \quad \text{и} \quad \lambda(x - x_0) \leqslant y_2(x) \leqslant 2\lambda(x - x_0) \tag{3.6}$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Согласно теореме Лагранжа справедливо равенство

$$|y_1^\sigma(x) - y_2^\sigma(x)| = |\sigma| \xi^{\sigma - 1}(x) |y_1(x) - y_2(x)| \quad \text{при} \quad x \in (x_0, x_0 + h], \tag{3.7}$$

где $\xi(x) \geqslant \lambda(x - x_0)$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Поэтому

$$\xi^{\sigma - 1}(x) \leqslant \lambda^{\sigma - 1}(x - x_0)^{\sigma - 1} \quad \text{при} \quad x \in (x_0, x_0 + h]. \tag{3.8}$$

Из оценок (3.6) для $x \in (x_0, x_0 + h]$ следует, что

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \leqslant \frac{y_1(x) + y_2(x)}{x - x_0} \leqslant 4\lambda < \infty,$$

поэтому $\sup\limits_{x \in (x_0, x_0 + h]} (|y_1(x) - y_2(x)|(x - x_0)^{-1}) < \infty$. Далее, из неравенств (3.5), (3.7), (3.8) вытекает, что

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x - x_0)|\sigma|\lambda^{\sigma - 1} \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x} t^a (t - x_0)^\sigma\, dt,$$

откуда

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \leqslant |\sigma|\lambda^{\sigma - 1} \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x_0 + h} t^a (t - x_0)^\sigma\, dt \tag{3.9}$$

для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Так как интеграл в неравенстве (3.9) конечен, то при достаточно малых h получаем, что

$$\sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} < \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $y_1 \equiv y_2$. Теорема доказана.

Теорему 3.2 можно также доказать в случае $\lambda < 0$. Тогда единственное решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого h. Доказательство в этом случае аналогично предыдущему, поэтому оно опущено.

В случае $\lambda = 0$ рассуждения, проведённые в доказательстве теоремы 3.2, неприменимы. Тем не менее результат, сформулированный в этой теореме, имеет место и в этом случае. Это вытекает из работы [6]. Для полноты изложения в следующей теореме мы получим указанный результат, используя технику, отличную от применяемой в [6].

Теорема 3.3. *Пусть* $-1 < \sigma < 0$ *и* $\lambda = 0$. *Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет единственное решение, определённое на некотором полуинтервале* $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a \geqslant 0$. Предположим, что решение $y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.3) определено на интервале $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$, для некоторого h. Тогда в силу уравнения (1.1) имеем

$$y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant x_0^a y^\sigma(x) \tag{3.10}$$

для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Из уравнения (1.1) следует, что $y''(x) > 0$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$, а из начального условия $y'(x_0) = 0$ – что $y'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Умножая обе части неравенства (3.10) на $y'(x)$ и затем интегрируя полученное неравенство, будем иметь

$$y'^2(x) \geqslant \frac{2x_0^a}{\sigma + 1} y^{\sigma+1}(x)$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Отсюда, поскольку $y'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + h]$, следует, что

$$y'(x) \geqslant \left(\frac{2x_0^a}{\sigma + 1}\right)^{1/2} (y(x))^{(\sigma+1)/2}$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. После деления обеих частей этого неравенства на $(y(x))^{(\sigma+1)/2}$ и последующего интегрирования получаем

$$(y(x))^{(1-\sigma)/2} \geqslant \frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{2x_0^a}{\sigma + 1}\right)^{1/2} (x - x_0),$$

т.е.

$$y(x) \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)} \left(\frac{2x_0^a}{\sigma + 1}\right)^{1/(1-\sigma)} (x - x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.11}$$

при $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Задачи Коши (1.1), (1.3) при $\lambda = 0$ равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x - t) t^a y^\sigma(t)\, dt. \tag{3.12}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи Коши (1.1), (1.3). Для $x \in (x_0, x_0 + h]$ в силу представления (3.12) имеем

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} (x - t) t^a |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt \leqslant (x_0 + h)^a \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)|y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt. \tag{3.13}$$

Согласно теореме Лагранжа и вследствие неравенства (3.11) для $x \in (x_0, x_0 + h]$ получаем

$$|y_1^\sigma(x) - y_2^\sigma(x)| = \xi^{\sigma-1}(x)|y_1(x) - y_2(x)|,$$

где

$$\xi(x) \geqslant \min\{y_1(x), y_2(x)\} \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)} \left(\frac{2x_0^a}{\sigma + 1}\right)^{1/(1-\sigma)} (x - x_0)^{2/(1-\sigma)}.$$

Так как $\sigma \in (-1, 0)$, для $x \in (x_0, x_0 + h]$ имеем неравенство

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant \frac{2(\sigma + 1)}{(1-\sigma)^2 x_0^a} (x - x_0)^{-2}.$$

Из последнего неравенства и из (3.13) следует, что

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant (x_0+h)^a|\sigma|\frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2x_0^a}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2}|y_1(t)-y_2(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a|\sigma|\frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2}\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt \tag{3.14}$$

при $x\in(x_0,x_0+h]$. Для $x\in(x_0,x_0+h]$ интеграл $\int_{x_0}^x(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt$ сходится, поскольку $-2+2/(1-\sigma)\in(-1,0)$. Непосредственным вычислением находим

$$\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt=\frac{(1-\sigma)^2}{2(\sigma+1)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)},$$

тогда при $x\in(x_0,x_0+h]$ из неравенства (3.14) вытекает оценка

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\leqslant|\sigma|\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}. \tag{3.15}$$

Супремум в (3.15) является конечным, поскольку в силу неравенства (3.3) имеем

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\leqslant\frac{y_1(x)+y_2(x)}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\leqslant 2c_2<\infty$$

для $x\in(x_0,x_0+h]$. Так как $(1+h/x_0)^a\to1$ при $h\to0+$ и $\sigma\in(-1,0)$, то из оценки (3.15) следует, что

$$\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x-x_0}<\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x-x_0}$$

для достаточно малого $h>0$. Противоречие. Следовательно, $y_1\equiv y_2$.

Рассмотрим теперь случай $a<0$. Доказательство в этом случае аналогично доказательству в случае $a\geqslant0$, поэтому мы укажем только ключевые шаги. Неравенство

$$y''(x)=x^ay^\sigma(x)\geqslant(x_0+h)^ay^\sigma(x)$$

аналогично неравенству (3.10) для $x\in(x_0,x_0+h]$. Применяя тот же метод, что и в случае $a\geqslant0$, получаем неравенства, аналогичные неравенствам (3.11), (3.13) и (3.15) соответственно:

$$y(x)\geqslant\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)}\left(\frac{2(x_0+h)^a}{\sigma+1}\right)^{1/(1-\sigma)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)},$$

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant x_0^a\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)|y_1^\sigma(t)-y_2^\sigma(t)|\,dt$$

и

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\leqslant|\sigma|\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{-a}\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}$$

при $x\in(x_0,x_0+h]$. Из последнего неравенства в силу произвольности h следует, что $y_1\equiv y_2$ в случае $a<0$. Теорема доказана.

Теорему, аналогичную теореме 3.3, можно доказать в случае, когда $\lambda = 0$ и единственное решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого $h > 0$. Доказательство аналогично предыдущему, поэтому оно опущено.

Благодарим рецензента за полезные предложения, а также за литературные указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия в Математическом институте Сербской академии наук и искусств (проект OI174001) и при частичной финансовой поддержке Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия (грант 174017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
2. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
3. *Кнежевич-Милянович Ю.* Вертикальные асимптоты решений уравнения Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 12. С. 1710–1711.
4. *Кнежевич-Милянович Ю.* О задаче Коши для уравнения типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 2. С. 260–262.
5. *Krtinić Đ., Mikić M.* Note on asymptotical behavior of solutions of Emden–Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem // Miskolc Math. Notes. 2017. V. 18. № 1. P. 285–294.
6. *Лысова Т.В.* О решениях сингулярного уравнения типа Эмдена–Фаулера // Вестн. молодых ученых. Сер. Прикл. математика и механика. 2004. № 4. С. 17–22.
7. *Mikić M.* Note about asymptotic behaviour of positive solutions of superlinear differential equation of Emden–Fowler type at zero // Kragujevac J. of Math. 2016. V. 40. № 1. P. 105–112.

Белградский университет,
Сербия

Поступила в редакцию 22.12.2020 г.
После доработки 21.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1023–1031

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

© 2021 г. А. С. Макин

Рассматривается спектральная задача для оператора Дирака с произвольными двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым потенциалом. Устанавливается существование нетривиальных краевых задач указанного типа, кратность собственных значений которых неограниченно растёт.

DOI: 10.31857/S0374064121080033

Введение. В настоящей работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \operatorname{col}(y_1(x), y_2(x))$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

функции $p, q \in L_1(0,\pi)$ комплекснозначные, с двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) \equiv C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} могут быть любыми комплексными числами, а строки матрицы

$$A = (CD) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Обозначим через $\|f\| = (|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $f = \operatorname{col}(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$ и положим $\langle f, g\rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2$, а через $\|W\| = \sup\limits_{\|f\|=1} \|Wf\|$ – норму произвольной 2×2-матрицы W. Пусть $L_{2,2}(a,b)$ – пространство двумерных вектор-функций $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$ с нормой $\|f\|_{L_{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|f(t)\|\,dt)^{1/2}$ и $L_{2,2}^{2,2}(a,b)$ – пространство 2×2-матриц-функций $W(t)$ с нормой $\|W\|_{L_{2,2}^{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|W(t)\|\,dt)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in L_{2,2}(0,\pi),\ U_j(\mathbf{y}) = 0\ \ (j = 1,2)\}$.

Пусть

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda) \\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная матрица уравнения (1) с краевым условием $E(0,\lambda) = I$, где I – единичная матрица, и $E_0(x,\lambda)$ – фундаментальная матрица невозмущённого уравнения $B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}$ с краевым условием $E_0(0,\lambda) = I$. Очевидно, что

$$E_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) & -\sin(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) & \cos(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x,\lambda)$ связаны соотношением

$$c_1(x,\lambda)c_2(x,\lambda)+s_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda)=1, \tag{3}$$

справедливом при любых x, λ. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A. Обозначим $J_0=J_{12}+J_{34}$, $J_1=J_{14}-J_{23}$, $J_2=J_{13}+J_{24}$.

Методом оператора преобразования в [1] показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2), равный

$$\Delta(\lambda)=J_{12}+J_{34}+J_{14}c_2(\pi,\lambda)-J_{23}c_1(\pi,\lambda)-J_{13}s_2(\pi,\lambda)-J_{24}s_1(\pi,\lambda), \tag{4}$$

может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt=\Delta_0(\lambda)+R(\lambda), \tag{5}$$

в котором функция

$$\Delta_0(\lambda)=J_0+J_1\cos(\pi\lambda)-J_2\sin(\pi\lambda)=$$

$$=J_{12}+J_{34}+\frac{1}{2}(e^{i\pi\lambda}(J_1+iJ_2)+e^{-i\pi\lambda}(J_1-iJ_2))=J_0+C_1e^{i\pi\lambda}+C_2e^{-i\pi\lambda}, \tag{6}$$

где $C_1=(J_1+iJ_2)/2$, $C_2=(J_1-iJ_2)/2$, является характеристическим определителем невозмущённой задачи

$$B\mathbf{y}'=\lambda\mathbf{y},\quad U(\mathbf{y})=0, \tag{7}$$

а функции r_j принадлежат пространству $L_1(0,\pi)$, $j=1,2$. Если $p,q\in L_2(0,\pi)$ (для краткости будем писать $V\in L_2(0,\pi)$), то $r_j\in L_2(0,\pi)$. Отсюда следует, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, стало быть, для спектра оператора $\mathbb{L}$ задачи (1), (2) могут представиться разве что только следующие возможности: 1) спектр отсутствует; 2) спектр является конечным непустым множеством; 3) спектр представляет собой счётное множество, не имеющее конечной предельной точки; 4) спектр заполняет всю комплексную плоскость.

Из соотношений (5), (6) вытекает, что для задачи (7) случай 1) реализуется, например, для краевых условий, задаваемых матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & -1 & i\\ 1 & -i & 1 & i\end{pmatrix},$$

а случай 4) – для краевых условий, задаваемых матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 1\end{pmatrix}.$$

Докажем, что случай 2) невозможен. Пусть уравнение

$$\Delta(\lambda)=0$$

имеет конечное число корней λ_k, $k=\overline{1,n}$. Если $C_1C_2\neq 0$, то условия (2) являются регулярными и задача (1), (2) имеет счётное множество собственных значений, поэтому $C_1C_2=0$. Обозначим $P(\lambda)=\prod_{k=1}^n(\lambda-\lambda_k)$. Согласно [2]

$$\Delta(\lambda)=P(\lambda)e^{a\lambda+b},$$

где a, b – некоторые постоянные. Предположим, например, что $C_2=0$. Полагая в равенстве (5) $\lambda=-iy$, где $y>0$, получаем

$$J_0+C_1e^{\pi y}+R(-iy)=P(-iy)e^{-iay+b},$$

откуда вытекает, что

$$J_0 e^{-\pi y} + C_1 + e^{-\pi y} R(-iy) = P(-iy) e^{b - i\,\mathrm{Re}\,a y} e^{(\mathrm{Im}\,a - \pi)y}. \tag{8}$$

Согласно [3, с. 36] выражение в левой части равенства (8) при $y \to \infty$ стремится к C_1. Если $\mathrm{Im}\,a - \pi \geqslant 0$, то выражение в правой части равенства (8) по абсолютной величине стремится к бесконечности, а если $\mathrm{Im}\,a - \pi < 0$, то к нулю. Отсюда следует, что $C_1 = 0$. Если $C_1 = C_2 = 0$, то

$$R(\lambda) = P(\lambda) e^{a\lambda + b}. \tag{9}$$

Очевидно, левая часть равенства (9) ограничена на вещественной оси, а правая часть нет, т.е. приходим к противоречию.

Определение. Будем говорить, что задача (1), (2) имеет *классическую асимптотику спектра*, если её спектр представляет собой счётное множество, причём кратности собственных значений равномерно ограничены.

Целью настоящей работы является построение задач (1), (2), для которых реализуется случай 3) и кратности собственных значений неограниченно растут, т.е. задач с неклассической асимптотикой спектра.

Основные результаты. Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно [4], что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g_j(\lambda), \quad s_j(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h_j(\lambda),$$

где $g_j, h_j \in PW_\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма 1 [5]. *Функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda), \quad v(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g(\lambda),$$

где $h, g \in PW_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n},$$

где $\lambda_n = n + \varepsilon_n$, $\{\varepsilon_n\} \in l_2$,

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2},$$

где $\lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n$, $\{\kappa_n\} \in l_2$.

Рассмотрим систему Дирака с краевыми условиями, задаваемыми матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $V \in L_2(0, \pi)$. Из представления (4) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) с матрицей A, определённой в (10), может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda) = s_1(\lambda) - s_2(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} r(t) e^{i\lambda t}\, dt = f(\lambda),$$

где $r \in L_2(0, \pi)$, $f \in PW_\pi$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Для любой функции $f \in PW_\pi$ существует такой потенциал $V \in L_2(0, \pi)$, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) с матрицей A, определённой равенством (10), и потенциалом $V(x)$ тождественно равен $f(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $f(\lambda)$ – произвольная функция из класса PW_π. Из теоремы Пэли–Винера и [3, с. 36] следует, что
$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|} f(\lambda) = 0, \tag{11}$$
следовательно, существует столь большое натуральное число N_0, что $|f(\lambda)| < 1/100$, если $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant N_0$.

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, – строго монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел такая, что $N_0 < \lambda_n < N_0 + 1/100$, если $1 \leqslant n \leqslant N_0$, $\lambda_n = n - 1/2$, если $n > N_0$, и $\lambda_n = -\lambda_{-n+1}$ для любого n. Обозначим
$$c(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2}.$$

Из леммы 1 вытекает равенство
$$c(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g(\lambda), \tag{12}$$
где $g \in PW_\pi$. Из теоремы Пэли–Винера и [3, с. 36] следует, что
$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|} g(\lambda) = 0,$$
поэтому
$$|c(\lambda)| \geqslant c_0 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{13}$$
$(c_0 = \mathrm{const} > 0)$ при $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M$, где M – некоторое достаточно большое число.

Дифференцируя равенство (12), получаем
$$\dot c(\lambda) = -\pi\sin(\pi\lambda) + \dot g(\lambda). \tag{14}$$
Так как функция $\dot g$ принадлежит классу PW_π, то, согласно [6], имеем
$$\dot c(\lambda_n) = -\pi\sin(\pi\lambda_n) + \tau_n,$$
где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tau_n|^2 < \infty.$$
Отсюда в силу определения чисел λ_n получаем
$$\dot c(\lambda_n) = \pi(-1)^n + \rho_n, \tag{15}$$
где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\rho_n|^2 < \infty.$$
Следовательно, при всех достаточно больших по абсолютной величине чётных n имеет место неравенство $\dot c(\lambda_n) > 0$. Несложно видеть, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ справедливо неравенство $\dot c(\lambda_n)\dot c(\lambda_{n+1}) < 0$. Отсюда вытекает, что
$$(-1)^n \dot c(\lambda_n) > 0 \tag{16}$$
при всех $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что из (15) следует равенство
$$\frac{1}{\dot c(\lambda_n)} = \frac{(-1)^n}{\pi} + \sigma_n, \tag{17}$$

где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sigma_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим квадратное уравнение
$$w^2 + f(\lambda_n)w - 1 = 0. \tag{18}$$

Оно имеет корни
$$s_n^{\pm} = \frac{-f(\lambda_n) \pm \sqrt{f^2(\lambda_n)+4}}{2}.$$

Обозначим через $\Gamma(z,r)$ круг с центром в точке z радиуса r. Нетрудно видеть, что все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,1/10)$, а все числа s_n^- – внутри круга $\Gamma(-1,1/10)$. Пусть $s_n = s_n^+$, если n нечётно, и $s_n = s_n^-$, если n чётно. Так как [6] $\{f(\lambda_n)\} \in l_2$, то из определения чисел s_n следует, что
$$s_n = (-1)^{n+1} + \vartheta_n, \tag{19}$$

где $\{\vartheta_n\} \in l_2$. Из определения чисел s_n и неравенства (16) также следует, что все числа $z_n = s_n/\dot{c}(\lambda_n)$ лежат строго левее мнимой оси, а из (17) и (19) вытекает равенство
$$z_n = -\frac{1}{\pi} + \rho_n,$$

где $\{\rho_n\} \in l_2$. Пусть $\beta_n = s_n - \sin(\pi\lambda_n)$, тогда $\{\beta_n\} \in l_2$ вследствие (19). Обозначим
$$h(\lambda) = c(\lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_n}{\dot{c}(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}.$$

Согласно [7, с. 120] функция h принадлежит классу PW_π и $h(\lambda_n) = \beta_n$. Обозначим $s(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda)$, тогда $s(\lambda_n) = s_n \neq 0$, следовательно, функции $s(\lambda)$ и $c(\lambda)$ не имеют общих корней.

Обозначим
$$Y_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая элементарная

Лемма 2. *Если системы функций* $\{\varphi_n\}$ *и* $\{\psi_n\}$ *полны в* $L_2(a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$, *то система векторов*
$$\Psi_{n,n} = \begin{pmatrix} \{\varphi_n\} \\ \{\psi_n\} \end{pmatrix} \bigcup \begin{pmatrix} \{\varphi_n\} \\ \{-\psi_n\} \end{pmatrix}$$

полна в $L_{2,2}(a,b)$.

Доказательство. Предположим, существует вектор $f(x) = \operatorname{col}(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ такой, что
$$\int_a^b (\varphi_n(x)\overline{f_1(x)} + \psi_n(x)\overline{f_2(x)})\,dx = 0, \quad \int_a^b (\varphi_n(x)\overline{f_1(x)} - \psi_n(x)\overline{f_2(x)})\,dx = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда
$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{f_1(x)}\,dx = 0, \quad \int_a^b \psi_n(x)\overline{f_2(x)}\,dx = 0,$$

следовательно, $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

Из [8] следует, что системы функций $\{\cos(\lambda_n x)\}$ и $\{\sin(\lambda_n x)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ полны в $L_2(0,\pi)$. Отсюда, из определения чисел λ_n и леммы 2 вытекает, что система векторов

$$Y_0(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix}\cos(\lambda_n x)\\ \sin(\lambda_n x)\end{pmatrix}$$

$(n \in \mathbb{Z})$ полна в $L_{2,2}(0,\pi)$. Обозначим

$$F(x,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg(\frac{s_n}{\dot{c}(\lambda_n)}(Y_0(x,\lambda_n)Y_0^{\text{т}}(t,\lambda_n)) + \frac{1}{\pi}Y_0(x,n-1/2)Y_0^{\text{т}}(t,n-1/2)\bigg). \tag{20}$$

Из [4] следует, что

$$\|F(\,\cdot\,,x)\|_{L_{2,2}^{2,2}(0,\pi)} + \|F(x,\cdot\,)\|_{L_{2,2}^{2,2}(0,\pi)} < C,$$

где C – постоянная, не зависящая от x. Докажем, что для каждого $x \in [0,\pi]$ однородное уравнение

$$f^{\text{т}}(t) + \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds = 0, \tag{21}$$

в котором $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$, $f \in L_{2,2}(0,x)$, $f(t) = 0$ при $x < t \leqslant \pi$, имеет только тривиальное решение. Умножая уравнение (21) на $\overline{f^{\text{т}}(t)}$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\|f\|^2_{L_{2,2}(0,x)} + \int\limits_0^x \bigg\langle \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds, \overline{f^{\text{т}}(t)}\bigg\rangle\,dt = 0.$$

Учитывая определение (20), несложными вычислениями находим

$$f^{\text{т}}(s)F(s,t) = -\bigg\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg\{z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t),$$

$$f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t),$$

$$f_1(s)\cos((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)]\bigg\}\bigg\} =$$

$$= -\bigg\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg\{z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t)],$$

$$z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos(((n-1/2)s))\sin((n-1/2)t)f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)]\bigg\}\bigg\},$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^x \bigg\langle \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds, \overline{f^{\text{т}}(t)}\bigg\rangle\,dt =$$

$$= -\Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \Big\{ z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t)]\Big\}\, ds\Big)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \Big\{ z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)]\Big\}\, ds\Big)\overline{f_2(t)}\, dt\Big\} =$$

$$= -\Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int\limits_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int\limits_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt\Big) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int\limits_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int\limits_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\, dt\Big)\Big\} =$$

$$= -\Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int\limits_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x [f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int\limits_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds\Big) \int\limits_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int\limits_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\, dt\Big)\Big\} =$$

$$= -\Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x z_n[f_1(t)\cos(\lambda_n t) + f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\, dt \int\limits_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x [f_1(t)\cos(\lambda_n t) + f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\, dt \int\limits_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_0^x [f_1(t)\cos((n-1/2)t) + f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\, dt \int\limits_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+\int\limits_0^x [f_1(t)\cos(nt)+f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\,dt\int\limits_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\,dt\Bigg)\Bigg\} =$$

$$= -\Bigg\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\int\limits_0^x [f_1(t)\cos(\lambda_n t)+f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\,dt\int\limits_0^x [\overline{f_1(t)}\cos(\lambda_n t)+\overline{f_2(t)}\sin(\lambda_n t)]\,dt +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x [f_1(t)\cos((n-1/2)t)+f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\,dt\,\times$$

$$\times\int\limits_0^x [\overline{f_1(t)}\cos((n-1/2)t)+\overline{f_2(t)}\sin((n-1/2)t)]\,dt\Bigg\} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\bigg|\int\limits_0^x \langle f(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt\bigg|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg|\int\limits_0^x \langle f(t), Y_0(t,(n-1/2))\rangle\,dt\bigg|^2.$$

Вследствие равенства Парсеваля получаем

$$\|f\|^2_{L_{2,2}(0,x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg|\int\limits_0^x \langle f(t), Y_0(t,(n-1/2))\rangle\,dt\bigg|^2,$$

поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\bigg|\int\limits_0^x \langle f(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt\bigg|^2 = 0. \tag{22}$$

Так как $\operatorname{Re} z_n < 0$ для любого n, то равенство (22) означает, что $\int_0^x \langle f(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt = 0$. Отсюда и из полноты системы векторов $\{Y_0(t,\lambda_n)\}$ в $L_{2,2}(0,\pi)$ следует тождество $f(t)\equiv 0$.

Из однозначной разрешимости уравнения (21) вытекает [4], что функции $c(\lambda)$ и $-s(\lambda)$ являются элементами первой строки матрицы монодромии

$$\tilde U(\pi,\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde c_1(\pi,\lambda) & -\tilde s_2(\pi,\lambda)\\ \tilde s_1(\pi,\lambda) & \tilde c_2(\pi,\lambda)\end{pmatrix}$$

задачи (1), (2) с матрицей A, определённой в (10), и некоторым потенциалом $\tilde V \in L_2(0,\pi)$, т.е.

$$c(\lambda) = \tilde c_1(\pi,\lambda), \quad s(\lambda) = \tilde s_2(\pi,\lambda). \tag{23}$$

В силу (4) характеристический определитель $\tilde\Delta(\lambda)$ этой задачи имеет вид

$$\tilde\Delta(\lambda) = \tilde s_1(\pi,\lambda) - \tilde s_2(\pi,\lambda) = \tilde f(\lambda),$$

где $\tilde f \in PW_\pi$. Из (3), (18) и (23) вытекает равенство

$$\tilde\Delta(\lambda_n) = \tilde s_1(\pi,\lambda_n) - \tilde s_2(\pi,\lambda_n) = \frac{1}{\tilde s_2(\pi,\lambda_n)} - \tilde s_2(\pi,\lambda_n) = \frac{1}{s(\lambda_n)} - s(\lambda_n) = f(\lambda_n),$$

из которого следует, что функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{f(\lambda)-\tilde\Delta(\lambda)}{c(\lambda)} = \frac{f(\lambda)-\tilde f(\lambda)}{c(\lambda)}$$

является целой. Так как

$$|f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda)|<c_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|},\quad c_1=\mathrm{const},\tag{24}$$

то вследствие неравенства (13) получаем, что $|\Phi(\lambda)|\leqslant c_2=\mathrm{const}$, если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$.

Обозначим через H объединение вертикальных отрезков $\{z:|\operatorname{Re}z|=n,|\operatorname{Im}z|\leqslant M\}$, где $|n|=N_0+1,N_0+2,\ldots$ Так как функция $c(\lambda)$ является функцией типа синуса [9], то $|c(\lambda)|>\delta>0$, если $\lambda\in H$. Из последнего неравенства, оценки (24) и принципа максимума вытекает неравенство $|\Phi(\lambda)|<c_3=\mathrm{const}$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant M$. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости и в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda|=M$. Тогда вследствие соотношения (11) имеем $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}(f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda))=0$, поэтому $\Phi(\lambda)\equiv0$, а значит, $f(\lambda)\equiv\tilde{\Delta}(\lambda)$. Теорема доказана.

Примеры функций из класса PW_π, имеющих корни сколь угодно высокой кратности, в литературе известны (см., например, [10, 11]). Заметим, что существование одномерных краевых задач с неограниченно растущей кратностью собственных значений ранее было установлено для оператора Штурма–Лувилля и обыкновенного дифференциального оператора любого чётного порядка [10–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lunyov A., Malamud M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57–103.
2. *Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш.* О структуре спектра краевой задачи Штурма–Лиувилля на конечном отрезке времени // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 2000. № 3. С. 29–34.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Tkachenko V.* Non-self-adjoint periodic Dirac operators // Oper. Theory: Adv. and Appl. 2001. V. 123. P. 485–512.
5. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II // Теор. функц., функц. анализ и их прил. 1979. Т. 31. С. 102–109.
6. *Tkachenko V.* Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra // Int. Equat. Oper. Theory. 2000. V. 36. P. 325–348.
7. *Левин Б.Я.* Целые функции (курс лекций). М., 1971.
8. *Седлецкий А.М.* Негармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. сов. мат. и ее прил. Тематич. обз. 2006. Т. 96. С. 106–211.
9. *Левин Б.Я., Островский И.В.* О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // ИАН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43. № 1. С. 87–110.
10. *Макин А.С.* О двухточечной краевой задаче для оператора Штурма–Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 564–572.
11. *Макин А.С.* Об одной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 317–322.
12. *Makin A.* Two-point boundary value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electr. J. Differ. Equat. 2018. V. 2018. № 95. P. 1–7.

Российский технологический университет (МИРЭА),
г. Москва

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 20.07.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1032–1038

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВЕБЕРА, ВОЗМУЩЁННОГО δ-ФУНКЦИЕЙ ДИРАКА

© 2021 г. А. С. Печенцов

В $L^2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля, порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2-2}{4} + a\delta(x-b), \quad a, b > 0,$$

и краевым условием $y(0)=0$. Доказывается, что собственные значения λ_n, $n=1,2,\ldots$, этого оператора удовлетворяют неравенствам $1<\lambda_1 \leqslant 2$, $2n-1 \leqslant \lambda_n \leqslant 2n$, $n=2,3,\ldots$

DOI: 10.31857/S0374064121080045

Введение. В пространстве $L^2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля, порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2-2}{4} + a\delta(x-b) \tag{1}$$

(δ – дельта-функция Дирака, a и b – положительные числа) и граничным условием $y(0)=0$.

При определении оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями будем следовать подходу, развитому А.М. Савчуком и А.А. Шкаликовым в работах [1, 2]. Для абсолютно непрерывной на любом отрезке $[0,t]$, $t>0$, функции $y(x)$ определим её квазипроизводную, положив

$$y^{[1]}(x) := \frac{dy(x)}{dx} - Q(x)y(x),$$

где

$$Q(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{2} + aH(x-b),$$

а H – функция Хевисайда: $H(x)=0$, если $x<0$, и $H(x)=1$ при $x \geqslant 0$. Если функция $y^{[1]}(x)$ в свою очередь является абсолютно непрерывной, то действие оператора (1) запишется в виде

$$l_{a,b}[y] := -\frac{dy^{[1]}(x)}{dx} - Q(x)y^{[1]}(x) - Q^2(x)y(x).$$

Нетрудно убедиться, что включение $y^{[1]} \in AC[0,t]$ (при всех $t>0$) равносильно тому, что функция y' обладает следующими четырьмя свойствами:

1) $y' \in C[0,b) \bigcup C(b,+\infty)$;

2) существуют односторонние пределы $y'(b-)$ и $y'(b+)$, и для них имеет место равенство $y'(b+)-y'(b-)=ay(b)$;

3) функция y', доопределённая в точке b значением $y'(b-)$, абсолютно непрерывна на отрезке $[0,b]$;

4) функция y', доопределённая в точке b значением $y'(b+)$, абсолютно непрерывна на отрезке $[b,t]$ (при всех $t>b$).

В пространстве $L^2[0,+\infty)$ зададим оператор $\mathcal{H}_{a,b}$, положив

$$\mathcal{H}_{a,b}y = l_{a,b}[y],$$

$\operatorname{Dom}\mathcal{H}_{a,b} := \{\, y \in L^2[0,+\infty):\ y(x) \in AC[0,+\infty),\ y'(x) \in AC([0,+\infty)\setminus\{b\}),\ y'(b+)-y'(b-) = ay(b),\ y(0)=0,\ l_{a,b}[y] \in L^2[0,+\infty)\}$.

Локализация спектра оператора $\boldsymbol{\mathcal{H}_{a,b}}$.

Теорема. *Собственные значения* λ_n *оператора* $\mathcal{H}_{a,b}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$1<\lambda_1\leqslant 2,\quad 2n-1\leqslant\lambda_n\leqslant 2n,\quad n=2,3,\ldots$$

Доказательство. Функции параболического цилиндра $D_\lambda(x)$, $D_\lambda(-x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Вебера [3]

$$-y''(x)+\frac{x^2-2}{4}y(x)=\lambda y(x). \tag{2}$$

Тогда функция

$$V_\lambda(x)=\frac{\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}}(D_\lambda(-x)-\cos(\pi\lambda)D_\lambda(x)),$$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция Эйлера, также является решением уравнения Вебера. Вронскиан функций $D_\lambda(x)$, $V_\lambda(x)$ равен единице. Поэтому эти функции образуют фундаментальную систему решений уравнения Вебера. Так как $D_\lambda(x)\in L^2[0,+\infty)$, а $V_\lambda(x)\notin L_2[0,+\infty)$, то собственная функция $\psi(x,\lambda)$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ на луче $b\leqslant x<+\infty$ пропорциональна функции $D_\lambda(x)$, а на отрезке $0\leqslant x\leqslant b$ допускает представление

$$\psi(x,\lambda)=C_1(\lambda)D_\lambda(x)+C_2(\lambda)V_\lambda(x).$$

Коэффициенты $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из условий в точке b:

$$C_1(\lambda)D_\lambda(b)+C_2(\lambda)V_\lambda(b)=D_\lambda(b),\quad C_1(\lambda)D'_\lambda(b)+C_2(\lambda)V'_\lambda(b)=D'_\lambda(b)-aD_\lambda(b).$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$C_1(\lambda)=1+aD_\lambda(b)V_\lambda(b),\quad C_2(\lambda)=-aD^2_\lambda(b).$$

Учитывая граничное условие $y(0)=0$, заключаем, что спектр оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ совпадает с множеством корней целой функции $\psi(0,\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=\psi(0,\lambda)=(1+aD_\lambda(b)V_\lambda(b))D_\lambda(0)-aD^2_\lambda(b)V_\lambda(0)=$$

$$=D_\lambda(0)+\frac{a\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}}D_\lambda(0)D_\lambda(b)(D_\lambda(-b)-D_\lambda(b)). \tag{3}$$

Невозмущённый оператор $\mathcal{H}_0$, соответствующий значению $a=0$, имеет дискретный спектр $\{\lambda^0_n\}_{n=1}^\infty$, являющийся множеством корней целой функции

$$D_\lambda(0)=\sqrt{\pi}\frac{2^{\lambda/2}}{\Gamma((1-\lambda)/2)}.$$

Следовательно, $\lambda^0_n=2n-1$, $n=1,2,\ldots$

Функция $D_\lambda(x)$ при $\operatorname{Re}\lambda<0$ может быть задана в виде интеграла [4]

$$D_\lambda(x)=\frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{t^2}{2}-tx\biggr)t^{-\lambda-1}\,dt, \tag{4}$$

а при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ – в виде контурного интеграла [4]

$$D_\lambda(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i}\int\limits_l\exp\biggl(-\frac{t^2}{2}+tx\biggr)t^{-\lambda-1}\,dt. \tag{5}$$

В (5) контур l состоит из: интервала $(-\infty, -r)$, $r > 0$, проходимого от $-\infty$ до $-r$, окружности $\gamma = r\exp(i\phi)$, ϕ возрастает от $-\pi$ до π, и интервала $(-\infty, -r)$, проходимого от $-r$ до $-\infty$. При $\lambda < 0$ из представления (4) вытекают неравенства

$$D_\lambda(b) > 0, \quad D_\lambda(-b) - D_\lambda(b) > 0,$$

кроме того,

$$D_\lambda(0) = \sqrt{\pi}\frac{2^{\lambda/2}}{\Gamma((1-\lambda)/2)} > 0, \quad \Gamma(-\lambda) > 0.$$

Поэтому в силу представления (3) характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ при $\lambda < 0$ положителен и, следовательно, оператор $\mathcal{H}_{a,b}$ не имеет отрицательных собственных значений (с.з.).

Лемма 1. *Характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *положителен при* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Доказательство. Воспользовавшись представлениями (3) и (4) и равенством $D_0(b) = \exp(-b^2/4)$, вычислим $\Delta(0)$:

$$\Delta(0) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp(-b^2/2)\lim_{\lambda\to 0-}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)(\exp(tb) - \exp(-tb))t^{-\lambda-1}\,dt.$$

Так как в этом несобственном интеграле подынтегральная функция положительна и

$$\exp(-t^2/2)(\exp(tb) - \exp(-tb))t^{-\lambda-1} \sim bt^{-\lambda} \quad \text{при} \quad t \to 0+,$$

то он сходится при $\lambda < 1$ и

$$\lim_{\lambda\to 0-}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)(\exp(tb) - \exp(-tb))t^{-\lambda-1}\,dt = c^2 > 0.$$

Таким образом,

$$\Delta(0) = 1 + \frac{ac^2}{\sqrt{2\pi}}\exp(-b^2/2) > 0.$$

Используя тождество [5]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2), \quad 2z \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

и равенство $D_1(b) = b\exp(-b^2/4)$, вычислим $\Delta(1)$:

$$\Delta(1) = -2ab^2\exp(-b^2/2)\lim_{\lambda\to 1}\frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma((1-\lambda)/2)} = ab^2\exp(-b^2/2) > 0.$$

Функция $\Delta(\lambda)$ принимает положительные значения и внутри отрезка [0,1]. В противном случае найдутся $\widetilde{\lambda}$, $\widehat{\lambda}$ такие, что $0 < \widetilde{\lambda} < \widehat{\lambda} < 1$ и

$$\Delta(\widetilde{\lambda}) = \psi(0, \widetilde{\lambda}) = \Delta(\widehat{\lambda}) = \psi(0, \widehat{\lambda}) = 0.$$

Следовательно, собственная функция $\psi(x, \widetilde{\lambda})$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$, соответствующая с.з. $\widetilde{\lambda}$, имеет нуль $x_{1,\widetilde{\lambda}} = 0$. Корни уравнения $\psi(x, \lambda) = 0$ являются непрерывными функциями от λ [6, лемма 3.1, с. 23], и при увеличении λ каждый нуль x_λ передвигается влево [6, теорема 3.2; 7, с. 144]. Поэтому собственная функция $\psi(x, \widehat{\lambda})$ имеет отрицательный нуль $x_{1,\widehat{\lambda}}$ и нуль $x_{2,\widehat{\lambda}} = 0$. По теореме Штурма [6, теорема 3.1] между двумя нулями $x_{1,\widehat{\lambda}} < x_{2,\widehat{\lambda}} = 0$ решения $\psi(x, \widehat{\lambda})$

уравнения (2) при $\lambda = \widehat{\lambda} < 1$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_1(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 1$. Но функция $D_1(x) = x\exp(-x^2/4)$ не имеет отрицательных нулей. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Пусть $1 < \lambda < 3$. На этом интервале нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ совпадают с нулями функции

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_\lambda(0)} = 1 + \frac{a\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} D_\lambda(b)(D_\lambda(-b) - D_\lambda(b)).$$

При $\operatorname{Re}\lambda > 1$ функция $D_\lambda(x)$ может быть задана в виде интеграла

$$D_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(x^2/4)\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\cos(xt - \pi\lambda/2)\,dt.$$

Тогда

$$D_\lambda(-b) - D_\lambda(b) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(x^2/4)\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\sin(bt)\,dt\,\sin(\pi\lambda/2).$$

Учитывая соотношение

$$\Gamma(-\lambda)\Gamma(1+\lambda) = -\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}, \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

получаем уравнение

$$\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = -d\Gamma(\lambda+1), \tag{6}$$

в котором

$$C(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\cos(bt - \pi\lambda/2)\,dt,$$

$$S(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\sin(bt)\,dt, \quad d = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(-b^2/2)}{a}.$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 1+}(C(\lambda)S(\lambda)) = C(1)S(1) = S^2(1) = \frac{\pi}{2}b^2\exp(-b^2) > 0,$$

то

$$\lim_{\lambda\to 1+}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = -\infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\lambda\to 3-}(C(\lambda)S(\lambda)) = C(3)S(3) = -S^2(3) = -\frac{\pi}{2}b^2(b^2-3)^2\exp(-b^2).$$

Поэтому, если $b \neq \sqrt{3}$, то

$$\lim_{\lambda\to 3-}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = +\infty,$$

а если $b = \sqrt{3}$, то

$$\lim_{\lambda\to 3-}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = 0.$$

Следовательно, поскольку обе части уравнения (6) непрерывны $(\lambda > 0)$, а его правая часть при $\lambda \in [1,3]$ отрицательна и убывает, то на интервале $(1,3)$ уравнение (6) имеет хотя бы одно решение.

Лемма 2. *На интервале* $(1,3)$ *характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *имеет единственный нуль* λ_1, *причём* $\lambda_1 \leqslant 2$.

Доказательство. Уравнение (6) запишем в виде

$$S^2(\lambda)\sin(\pi\lambda/2) + A(\lambda)\cos(\pi\lambda/2) = 0, \tag{7}$$

где

$$A(\lambda) = S(\lambda)\int\limits_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)t^\lambda \cos(bt)\,dt + d\Gamma(\lambda+1).$$

Так как выражение $A^2(\lambda) + S^4(\lambda)$ не принимает нулевых значений, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$\sin(\phi(\lambda) + \pi\lambda/2) = 0, \tag{8}$$

в котором

$$\phi(\lambda) = \arccos\frac{S^2(\lambda)}{\sqrt{A^2(\lambda) + S^4(\lambda)}}.$$

Заметим, что $0 \leqslant \phi(\lambda) \leqslant \pi/2$. Поэтому при $\lambda \in (1,3)$ аргумент функции $\sin$ в уравнении (8) принадлежит интервалу $(0,2\pi)$, а значит, это уравнение равносильно уравнению

$$\phi(\lambda) + \frac{\pi\lambda}{2} = \pi,$$

которое на интервале $(1,3)$ в силу непрерывности функции $\phi(\lambda)$ и того, что $\phi(\lambda) \in (0,\pi/2)$ и $\phi(1) \neq \pi/2$, имеет хотя бы один корень. Обозначим этот корень через λ_1. Если $2 < \lambda < 3$, то $\pi < \phi(\lambda) + \pi\lambda/2 < 2\pi$, а значит, уравнение (8) не имеет корней при $2 < \lambda < 3$. Поэтому $1 < \lambda_1 \leqslant 2$. Таким образом, $\psi(0,\lambda_1) = 0$ и собственная функция $\psi(x,\lambda_1)$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$, соответствующая с.з. λ_1, имеет нуль $x_{1,\lambda_1} = 0$. Такой же нуль $x^0_{1,1} = 0$ имеет решение $D_1(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 1$.

Предположим, что существует другое с.з. $\widetilde{\lambda}$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ и $\lambda_1 < \widetilde{\lambda} \leqslant 2$. Тогда $\psi(0,\widetilde{\lambda}) = 0$ и, следовательно, $x_{2,\widetilde{\lambda}} = 0$ является нулём функции $\psi(x,\widetilde{\lambda})$. Собственная функция $\psi(x,\widetilde{\lambda}) = 0$ имеет также отрицательный нуль $x_{1,\widetilde{\lambda}}$ – результат сдвига влево нуля $x_{1,\lambda_1} = 0$ собственной функции $\psi(x,\lambda_1)$ при возрастании λ от λ_1 до $\widetilde{\lambda}$. Таким образом, имеем неравенства

$$x^0_{1,3} \leqslant x_{1,\widetilde{\lambda}} < x_{2,\widetilde{\lambda}} = 0,$$

где $x^0_{1,3} = -\sqrt{3}$ – нуль функции $D_3(x)$. Нетрудно убедиться в том, что

$$D_3(x) = 2^{-3/2}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4}\biggr)x(x^2-3),$$

поэтому функция $D_3(x)$ имеет всего один отрицательный нуль $x^0_{1,3} \leqslant x_{1,\widetilde{\lambda}}$. Пришли к противоречию с теоремой Штурма [6, теорема 3.1], которая утверждает, что между двумя нулями $x_{1,\widetilde{\lambda}}$, $x_{2,\widetilde{\lambda}}$ решения $\psi(x,\widetilde{\lambda})$ уравнения (2) при $\lambda = \widetilde{\lambda} < 3$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_3(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 3$. Полученное противоречие доказывает единственность нуля характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ на интервале (1,3). Лемма доказана.

Если $b = \sqrt{3}$, то $D_3(b) = 0$, и $\Delta(3) = 0$ в силу (3). Значит, при $b = \sqrt{3}$ вторым с.з. оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ будет $\lambda_2 = 3$.

Если $b \neq \sqrt{3}$, то $\Delta(3) < 0$, и, следовательно, $\lambda = 3$ не является с.з. оператора.

Рассмотрим уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ на произвольном отрезке $[2n-1, 2n+1]$, $n = 1, 2, \ldots$ Находим

$$\Delta(2n-1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} D_{2n-1}(b)(D_{2n-1}(-b) - D_{2n-1}(b)) \lim_{\lambda\to 2n-1}(\Gamma(-\lambda)D_\lambda(0)),$$

$$\Delta(2n+1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} D_{2n+1}(b)(D_{2n+1}(-b) - D_{2n+1}(b)) \lim_{\lambda\to 2n+1}(\Gamma(-\lambda)D_\lambda(0)).$$

Из представления [4]

$$D_{2n-1}(b) = 2^{-(2n-1)/2}\exp(-b^2/4)H_{2n-1}(b/\sqrt{2}), \tag{9}$$

где $H_{2n-1}(x/\sqrt{2})$ – полином Эрмита степени $2n-1$, вытекает (в силу нечётности полинома Эрмита) равенство

$$D_{2n-1}(-b) - D_{2n-1}(b) = -2D_{2n-1}(b).$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 2n-1}(\Gamma(-\lambda)D_\lambda(0)) = 2^{-n-1/2}\Gamma(-n+1/2),$$

то

$$\Delta(2n-1) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}2^n} D^2_{2n-1}(b)\Gamma(-n+1/2).$$

Аналогично получаем

$$\Delta(2n+1) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}2^{n+1}} D^2_{2n+1}(b)\Gamma(-n-1/2).$$

Поскольку $\Gamma(-n+1/2)\Gamma(-n-1/2) < 0$, то произведение $\Delta(2n-1)\Delta(2n+1) < 0$ отрицательно, если b не является корнем полиномов Эрмита $H_{2n-1}(x/\sqrt{2})$, $H_{2n+1}(x/\sqrt{2})$. Таким образом, на концах отрезка $[2n-1, 2n+1]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков, если b не является корнем полиномов Эрмита $H_{2n-1}(b)$, $H_{2n+1}(b)$. Следовательно, в этом случае на интервале $(2n-1, 2n+1)$ существует нуль λ_n функции $\Delta(\lambda)$, который является с.з. оператора $\mathcal{H}_{a,b}$.

Доказательство единственности нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(2n-1, 2n+1)$ проведём методом математической индукции. При $n = 1$ единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(1, 3)$ доказана в лемме 1. Предположим, что на n-м интервале $(2n-1, 2n+1)$ функция $\Delta(\lambda)$ также имеет ровно один нуль λ_n. Докажем, что тогда и на интервале $(2n+1, 2n+3)$ она имеет равно один нуль. Заметим, что функция $D_{2n+1}(x)$ имеет n отрицательных нулей (следует из представления (9), в котором полином Эрмита $H_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$ является нечётной функцией. При переходе на следующий интервал $(2n+1, 2n+3)$ функция $\psi(x, \lambda_{n+1})$ будет иметь n отрицательных нулей $x_{1,\lambda_{n+1}} < x_{2,\lambda_{n+1}} < \ldots < x_{n,\lambda_{n+1}} < 0$ и нуль $x_{n+1,\lambda_{n+1}} = 0$. При этом функция $D_{2n+3}(x)$ имеет $n+1$ отрицательных нулей. Предположение о существовании у функции $\Delta(\lambda)$ ещё одного нуля $\widetilde{\lambda}$, $\lambda_{n+1} < \widetilde{\lambda} < 2n+3$, означает, что функция $\psi(x, \widetilde{\lambda})$ имеет $n+1$ отрицательных нулей $x_{1,\widetilde{\lambda}} < x_{2,\widetilde{\lambda}} < \ldots < x_{n+1,\widetilde{\lambda}} < 0$ и нуль $x_{n+2,\widetilde{\lambda}} = 0$. По теореме Штурма [6, теорема 3.1; 7, с. 142] между каждыми двумя из этих нулей решения $\psi(x, \widetilde{\lambda})$ уравнения (2) при $\lambda = \widetilde{\lambda} < 2n+3$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_{2n+3}(x)$ того же уравнения при $\lambda = 2n+3$. Следовательно, функция $D_{2n+3}(x)$ должна иметь не менее $n+2$ отрицательных нулей. Полученное противоречие доказывает единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(2n+1, 2n+3)$.

Уточним расположение с.з. λ_n на интервале $(2n-1, 2n+1)$. Воспользуемся уравнением (8). При $2n < \lambda < 2n+1$ справедливы неравенства

$$\pi n < \phi(\lambda) + \frac{\pi\lambda}{2} < \pi(n+1),$$

из которых следует, что $\sin(\phi(\lambda)+\pi\lambda/2)$ не обращается в нуль на этом интервале. Поэтому $2n-1<\lambda_n\leqslant 2n$.

Если b является корнем полинома Эрмита $H_{2n+1}(x/\sqrt{2})$, то $D_{2n+1}(b)=0$ в силу (9). Поэтому из представления (3) вытекает, что $\Delta(2n+1)=0$. Следовательно, $\lambda_{n+1}=2n+1$ является с.з.оператора $\mathcal{H}_{a,b}$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что уравнение (3) позволяет находить асимптотику с.з. λ_n при $n\to+\infty$ и расположение первого с.з. λ_1 в зависимости от параметров a и b, включая случай $a<0$. Для оператора Эйри с δ-взаимодействием асимптотика с.з. найдена в работе [8], формулы регуляризованных следов получены в работе [9]. След разности сингулярных операторов Штурма–Лиувилля с потенциалом, содержащим δ-функции, в случае непрерывного спектра вычислен в [10]. Асимптотика с.з. и формула регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, содержащем δ-функции, установлена в работе [11]. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с δ-потенциалом вычислен в работе [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
2. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М., 1963.
4. *Славянов С.Ю.* Асимптотика решений одномерного уравнения Шрёдингера. Л., 1990.
5. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М., 1990.
6. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
7. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., 1960.
8. *Печенцов А.С., Попов А.Ю.* Распределение спектра одного сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ-функцией Дирака // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 168–179.
9. *Печенцов А.С.* Регуляризованные следы оператора Эйри, возмущённого δ-функцией Дирака // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 498–503.
10. *Pechentsov A.* Trace of a difference of singular Sturm–Liouville operators with a potential containing Dirac functions // Russ. J. of Math. Phys. 2013. V. 20. № 2. P. 230–238.
11. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735–751.
12. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 6. С. 155–156.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.05.2020 г.
После доработки 04.02.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1039–1048

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Е. А. Бадерко, М. Ф. Черепова

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для параболической по Петровскому системы второго порядка с переменными коэффициентами в ограниченной области на плоскости с негладкими боковыми границами. Доказана единственность решения этих задач в классе функций, непрерывных вместе с пространственной производной первого порядка в замыкании области.

DOI: 10.31857/S0374064121080057

Введение. Работа посвящена вопросу о единственности классических решений начально-краевых задач для параболических по Петровскому систем второго порядка в плоских областях с негладкими боковыми границами. В случае одного уравнения единственность классического решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [1]), а единственность классического решения второй начально-краевой задачи установлена в [2, 3] с помощью теоремы о знаке косой производной. Заметим, что для систем, в отличие от уравнений, принцип максимума, вообще говоря, места не имеет (см. [4]).

Если область Ω имеет гладкую боковую границу, то однозначная разрешимость параболических начально-краевых задач для систем в классе Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ следует из работы [5] (см. также [6, с. 706–707]). В случае областей с негладкими боковыми границами единственность решения первой начально-краевой задачи доказана в [7, 8] для одномерной по пространственной переменной x параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения и на характер его гладкости по временно́й переменной, а в [9] – для одномерной параболической системы второго порядка с переменными коэффициентами в классе Гёльдера $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной параболических систем с переменными коэффициентами в плоской ограниченной области Ω с негладкими боковыми границами и доказывается единственность их решений в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ функций, непрерывных вместе с пространственной производной первого порядка в замыкании области. Результаты настоящей работы анонсированы в [10].

Статья состоит из трёх пунктов. В п. 1 ставится начально-краевая задача, приводятся необходимые сведения и формулируются основные теоремы единственности решений. В п. 2 доказывается вспомогательное утверждение, а в п. 3 – теоремы единственности.

1. Необходимые сведения и формулировка основных результатов. В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\}$, $T < +\infty$, рассматривается параболический по Петровскому [11] матричный оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A_k(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m > 1,$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^k = \partial^k/\partial x^k$, $A_k = \|a_{ij}^k\|_{i,j=1}^m$ – $m \times m$-матрицы, элементы которых – вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

а) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$, $r = \overline{1,m}$;

б) имеют место включения $a_{ij}^k \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, $\alpha \in (0,1)$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$, где $H^{\beta,\beta/2}(\overline{D})$ (β – нецелое число) – пространство Гёльдера [6, с. 16].

Известно (см., например, [12, с. 73; 13, с. 310]), что выполнение условий а) и б) обеспечивает существование фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$, $t > \tau$, системы $Lu = 0$, и при этом справедливы оценки

$$|\partial_t^l \partial_x^k \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},$$

$$2l + k \leqslant 2; \quad (x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}, \quad t > \tau,$$

для некоторых положительных постоянных C и c, где $\partial_t^l = \partial^l/\partial t^l$. Здесь и далее для матрицы B (вектора b) под нормой $|B|$ (соответственно нормой $|b|$) понимаем максимум из модулей её элементов (его компонент).

В полосе D выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими, вообще говоря, боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1,2$, где функции g_k удовлетворяют условиям

$$|g_k(t + \Delta t) - g_k(t)| \leqslant \mathcal{M}|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, t + \Delta t \in [0,T], \quad k = 1,2, \quad \mathcal{M} = \mathrm{const}, \tag{1}$$

$$g_1(t) < g_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В Ω рассматривается задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{4}$$

и одному из следующих граничных условий:

$$u(g_k(t),t) = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2, \tag{5}$$

или

$$\partial_x u(g_k(t),t) = \theta_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2. \tag{6}$$

Определим функциональные пространства, которые нам будут нужны в дальнейшем. Для любого отрезка $[\tau,\eta]$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, через $\underset{0}{C}[\tau,\eta]$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau,\eta] \to \mathbb{R}^m$, для которых $\psi(\tau) = 0$; при этом $\|\psi;[\tau,\eta]\|^0 = \max\limits_{t\in[\tau,\eta]} |\psi(t)|$. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} \psi(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Через $\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ обозначим (см. [14, 15]) пространство вектор-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$; при этом $\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)| + \max\limits_{t\in[0,T]} |\partial^{1/2}\psi(t)|$.

Определим $H^\beta[\tau,\eta]$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, $0 < \beta < 1$, как пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau,\eta] \to \mathbb{R}^m$, для которых конечна величина

$$\|\psi;[\tau,\eta]\|^\beta = \max_{t\in[\tau,\eta]} |\psi(t)| + \sup_{t,t+\Delta t\in(\tau,\eta)} \{|\Delta_t \psi(t)||\Delta t|^{-\beta}\},$$

и $\underset{0}{H}{}^\beta[\tau,\eta] = \{\psi \in H^\beta[\tau,\eta] : \psi(\tau) = 0\}$.

Для любой области $G \subset \Omega \bigcap (\mathbb{R}\times(\tau,\eta))$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, для которой $\overline{G} \bigcap \{(x,\tau) : x \in \mathbb{R}\} \neq \neq \varnothing$, через $\underset{0}{C}(\overline{G})$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $u : \overline{G} \to \mathbb{R}^m$ таких, что $u(x,\tau) = 0$, при этом $\|u;G\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in G} |u(x,t)|$. Через $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{G})$ обозначим пространство вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$, для которых $\partial_x u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$; при этом $\|u;G\|^{1,0} = \sup\limits_{(x,t)\in G} |u(x,t)| + + \sup\limits_{(x,t)\in G} |\partial_x u(x,t)|$. Под значениями вектор-функций и их производных на границе области G понимаем их предельные значения "изнутри" G. Через $\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство Гёльдера (см., например, [6, с. 16]) вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$, для которых конечна величина

$$\|u;G\|^{1+\alpha,(1+\alpha)/2} = \|u;G\|^{1,0} + \sup_{(x,t),(x,t+\Delta t)\in G} \frac{|\Delta_t u|}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} + \sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in G} \frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u|}{|\Delta x|^\alpha + |\Delta t|^{\alpha/2}},$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\Delta_t u = u(x,t+\Delta t) - u(x,t)$, $\Delta_{x,t}\partial_x u = \partial_x u(x+\Delta x,t+\Delta t) - \partial_x u(x,t)$.

При выполнении условий а), б) на коэффициенты системы и (1), (2) на боковые границы области существование классических решений задач (3)–(5) и (3), (4), (6) в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$, если для граничных функций имеют место включения $\psi_k \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $k = 1,2$, и $\theta_k \in \underset{0}{C}[0,T]$, $k = 1,2$, установлено в работах [14, 15] и [17] соответственно. В этих работах получено интегральное представление решений в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя. Основное содержание настоящей работы составляют следующие теоремы единственности.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия а), б) и (1), (2). Пусть u – классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \partial_x u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2, \tag{7}$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия а), б) и (1), (2). Пусть u – классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2, \tag{8}$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Замечание. Если существенно усилить требования к боковым границам области и к гладкости решения, а именно, если потребовать, чтобы $g_k \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $k = 1,2$, т.е. чтобы функции g_k были дифференцируемы на $[0,T]$ и их производные принадлежали пространству $H^{\alpha/2}[0,T]$, то из [5] (см. также [6], с. 706–707) вытекает единственность решения рассматриваемых задач в существенно более узком классе Гёльдера $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. В [9] установлена единственность решения задачи (3)–(5) в классе Гёльдера $\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. В случае параболического оператора с постоянными коэффициентами и полуполосы с негладкой боковой границей теорема 1.2 получена в [7, 8] при дополнительных условиях на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения и характер непрерывности решения по переменной t.

2. Вспомогательная лемма. В этом пункте докажем лемму о единственности решения задачи (3), (4), (6) в пространстве Гёльдера, которая будет нужна для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть u – классическое решение задачи (7) такое, что $u \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда u является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad k = 1,2,$$

где $\psi_k(t) = u(g_k(t), t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1, 2$. При этом вектор-функции ψ_k, $k = 1, 2$, принадлежат пространству $\underset{0}{H}^{(1+\alpha)/2}[0, T]$. Из работ [9, 14, 15] о существовании и единственности решения первой начально-краевой задачи в классе Гёльдера $\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ для параболических систем в областях с негладкими боковыми границами следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \Gamma(x, t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

где $\varphi_l = (\varphi_{l1}, \ldots, \varphi_{lm})^{\text{т}} \in \underset{0}{C}[0, T]$, $l = 1, 2$, и (φ_1, φ_2) – единственное в $C[0, T] \times C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого рода

$$\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2.$$

Подставляя представление (9) для вектор-функции u в граничные условия (7) и пользуясь формулой "скачка" для пространственной производной векторного параболического потенциала простого слоя [16], получаем, что вектор-функции φ_l, $l = 1, 2$, одновременно являются решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$\frac{(-1)^k}{2} A_2(g_k(t), t)\varphi_k(t) + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \partial_x\Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = 0, \quad k = 1, 2; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

В силу единственности в $C[0, T] \times C[0, T]$ решения системы (10) (см. [17]) получаем, что $\varphi_l \equiv$ $\equiv 0$, $l = 1, 2$. Подставляя найденное решение φ_l, $l = 1, 2$, в представление (9), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Лемма доказана.

3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Для доказательства теорем введём следующие обозначения.

Для любых числа $h > 0$, ограниченной вектор-функции $\nu : \overline{D} \to \mathbb{R}$ и множества $\mathcal{B} \subset \overline{D}$ полагаем

$$\omega(h; \nu; \mathcal{B}) = \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \leqslant h \\ z_1, z_2 \in \mathcal{B}}} |\nu(z_1) - \nu(z_2)|. \tag{11}$$

Для каждого числа $R > 0$ через $\mathcal{B}_R$ обозначим отрезок $[-R, R]$ на пространственной оси, т.е.

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Зафиксируем произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и докажем, что $u(x_0, t_0) = 0$.

Рассмотрим область $\Omega_d = \{(x, t) \in \Omega : g_1(t) + d < x < g_2(t) - d,\ d < t < T - d\}$, где число $d \in (0, T/2)$ достаточно мало – такое, чтобы $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ (число d будет выбрано ниже). Не ограничивая общности, считаем, что $d \leqslant 1$. Обозначим через $\overline{u}$ продолжение вектор-функции u с $\overline{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса [6, с. 344], причём такое, что

$$\overline{u}(x, 0) = \partial_x\overline{u}(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, \quad u(x, t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad u(x, t) = u(x, T) \text{ при } t > T. \tag{13}$$

Пусть $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ – функция, определённая равенствами

$$\rho(x, t) = C_1 \exp\{(x^2 + t^2 - 1)^{-1}\}, \text{ если } x^2 + t^2 < 1, \quad \text{и} \quad \rho(x, t) = 0, \text{ если } x^2 + t^2 \geqslant 1, \tag{14}$$

где постоянная C_1 выбирается из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x,t)\,dx\,dt = 1. \tag{15}$$

Для каждого числа $s>0$ определим “сглаженную” вектор-функцию

$$u_s(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{u}(x-sy, t-s\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Зафиксируем произвольно выбранное число $\varepsilon>0$. Обозначим $\|u\|^{1,0} = \|u;\Omega\|^{1,0}$. Поскольку существует число $s_0>0$ такое, что для любого числа $0<s<s_0$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0,t_0) - \overline{u}(x_0,t_0)| < \varepsilon,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует число $0<s_1<s_0$, при котором имеет место неравенство

$$|u_{s_1}(x_0,t_0)| < \varepsilon. \tag{16}$$

Обозначим через $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ ф.м.р. системы

$$L_1\nu \equiv \partial_t\nu - A_2(x,t)\partial_x^2\nu - A_1(x,t)\partial_x\nu = 0.$$

Для матрицы Γ_1 в силу условий а), б) справедлива оценка

$$|\partial_x^k\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C_0(t-\tau)^{-(k+1)/2}\exp\{-c_0(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{17}$$

$$(x,t),(\xi,\tau)\in\overline{D}, \quad t>\tau, \quad k\leqslant 2,$$

для некоторых положительных постоянных C_0, c_0.

Обозначим $h_s(x) = u_s(x,d)$ и рассмотрим параболический потенциал Пуассона

$$P_s(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\,d\xi, \quad (x,t)\in\overline{D}_d = \overline{D}\bigcap(\mathbb{R}\times[d,T-d]).$$

В силу гладкости вектор-функций u_s имеет место включение

$$P_s \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D}_d). \tag{18}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to d+0} P_s(x,t) = h_s(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда для каждого числа $0<s<d$ вектор-функция $w_s = u_s - P_s \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D}_d)$ является решением задачи

$$L\nu = f_s \quad \text{в} \quad \Omega_d, \quad \nu(x,d)=0, \quad g_1(d)+d\leqslant x\leqslant g_2(d)-d, \tag{19}$$

$$\partial_x\nu(g_1(t)+d,t) = \theta_s^1(t), \quad \partial_x\nu(g_2(t)-d,t) = \theta_s^2(t), \quad d\leqslant t\leqslant T-d, \tag{20}$$

где $f_s(x,t) = Lu_s(x,t) + A_0(x,t)P_s(x,t)$, $\theta_s^1(t) = \partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x P_s(g_1(t)+d,t)$, $\theta_s^2(t) = \partial_x u_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x P_s(g_2(t)-d,t)$. Из включения (18), гладкости вектор-функции u_s и условия б) следует, что имеют место включения

$$f_s\in C(\overline{\Omega}_d), \quad \theta_s^k\in C[d,T-d], \quad k=1,2.$$

Кроме того, вектор-функция f_s удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x в $\overline{\Omega}_d$.

Поскольку $w_s \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_d)$, то в силу единственности решения задачи (19), (20) (см. лемму 2.1), а также из результатов работы [17] и гладкости соответствующих потенциалов (см. [16, 18]) вытекает, что вектор-функция w_s для каждого $0 < s < d$ может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов

$$w_s(x,t) = \int\limits_d^t d\tau \int\limits_{g_1(\tau)+d}^{g_2(\tau)-d} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f_s(\xi,\tau)\,d\xi + \int\limits_d^t \Gamma(x,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \Gamma(x,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\,d\tau \equiv V_s(x,t) + U_s^1(x,t) + U_s^2(x,t). \qquad (21)$$

Вектор плотности $\varphi_s^k \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, $k=1,2$, в представлении (21) – компоненты единственного в $C[d,T-d]\times C[d,T-d]$ решения $(\varphi_s^1,\varphi_s^2)$ системы интегральных уравнений Вольтерры

$$-\frac{1}{2}A_2(g_1(t)+d,t)\varphi_s^1(t) + \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_1(t)+d,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_1(t)+d,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\,d\tau = \hat\theta_s^1(t),$$

$$\frac{1}{2}A_2(g_2(t)-d,t)\varphi_s^2(t) + \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_2(t)-d,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_2(t)-d,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\,d\tau = \hat\theta_s^2(t), \quad d \leqslant t \leqslant T-d, \qquad (22)$$

где $\hat\theta_s^1(t) = \theta_s^1(t) - \partial_x V_s(g_1(t)+d,t) \equiv \partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x P_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x V_s(g_1(t)+d,t)$, $\hat\theta_s^2(t) = \theta_s^2(t) - \partial_x V_s(g_2(t)-d,t) \equiv \partial_x u_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x P_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x V_s(g_2(t)-d,t)$.

Следовательно, для каждого числа $0 < s < d$ вектор-функция u_s может быть представлена в виде

$$u_s(x,t) = V_s(x,t) + P_s(x,t) + U_s^1(x,t) + U_s^2(x,t), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d. \qquad (23)$$

Оценим потенциалы в (23). Пусть $(x,t)\in\overline{\Omega}_d$. Рассмотрим сначала потенциал P_s. Существует число $R_0 > 0$ такое, что $\Omega \subset \mathcal{B}_{R_0}\times(0,T)$ (см. обозначение (12)). Для любого числа $R \geqslant R_0$ справедливо равенство

$$P_s(x,t) = \int\limits_{|\xi|<2R} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\,d\xi + \int\limits_{|\xi|>2R} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\,d\xi \equiv I_{1,s} + I_{2,s}.$$

Оценим сначала интеграл $I_{2,s}$. В силу оценки (17) и неравенства $|\xi - x| > R$ (при $|\xi| > 2R$) имеем

$$|I_{2,s}| \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}(t-d)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-c|\xi-x|^2/(t-d)\}\,d\xi \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}. \quad (24)$$

Здесь и далее через C, c обозначаем постоянные, зависящие от δ, α, m, T, $\mathcal{M}$ и коэффициентов оператора L, конкретный вид которых для нас не важен.

Рассмотрим интеграл $I_{1,s}$. Воспользовавшись соотношениями (13)–(15) и непрерывностью вектор-функции $\overline{u}$, при $s < d$ получаем (см. обозначение (11))

$$|h_s(\xi)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} [\overline{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \overline{u}(\xi - sy, 0)]\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\overline{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \overline{u}(\xi - sy, 0)|\,dy\,d\tau \leqslant C\omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \xi \in \mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из оценки (17) следует, что $|I_{1,s}| \leqslant C\omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Таким образом,

$$|P_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \tag{25}$$

где $\omega_0(d,R) \equiv \omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Оценим $\partial_x P_s(x,t)$. В силу единственности решения задачи Коши [12, с. 269] имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)\,d\xi = 0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad d < t \leqslant T.$$

Поэтому

$$\partial_x P_s(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)][h_s(\xi) - h_s(x)]\,d\xi.$$

Для любого числа $R \geqslant R_0$ справедливо равенство

$$\partial_x P_s(x,t) = \Bigg(\int\limits_{|\xi|<2R} + \int\limits_{|\xi|>2R}\Bigg)[\partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)][h_s(\xi) - h_s(x)]\,d\xi \equiv J_{1,s} + J_{2,s}.$$

По теореме о среднем имеем

$$h_s(\xi) - h_s(x) \equiv u_s(\xi,d) - u_s(x,d) = (\xi - x)\partial_\xi u_s(\overline{\xi},d), \tag{26}$$

где точка $\overline{\xi}$ расположена между точками ξ и x. Поэтому, используя оценку (17) и гладкость вектор-функции $\overline{u}$, аналогично (24) получаем

$$|J_{2,s}| \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}.$$

Рассмотрим интеграл $J_{1,s}$. В силу соотношений (13)–(15) при $s < d$ имеем

$$|\partial_\xi u_s(\overline{\xi},d)| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi} - sy, d - s\tau) - \partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi} - sy, 0)|\,dy\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \overline{\xi}\in\mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из (17), (26) следует, что $|J_{1,s}| \leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$. Поэтому

$$|\partial_x P_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_1(d;R)],$$

где $\omega_1(d,R) \equiv \omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\|P_s;\Omega_d\|^{1,0} \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)]. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь потенциал V_s. Оценим вектор-функцию f_s. В силу (25) и условия б) для этого достаточно оценить вектор-функцию $f_s^1(x,t) \equiv Lu_s(x,t)$. Справедливо равенство

$$f_s^1(x,t) = \int\limits_{y^2+\tau^2<1} [L(x,t) - L(x-sy,t-s\tau)]\overline{u}(x-sy,t-s\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d.$$

Поэтому при $s \leqslant d/2$, используя гладкость вектор-функции $\overline{u}$ и условие б), получаем

$$|f_s^1(x,t)| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} [|sy|^\alpha + (s\tau)^{\alpha/2}]\{|\overline{u}(x-sy,t-s\tau)| +$$

$$+ |\partial_x\overline{u}(x-sy,t-s\tau)| + |\partial_x^2\overline{u}(x-sy,t-s\tau)|\}\,dy\,d\tau \leqslant C(d)s^{\alpha/2}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d.$$

Здесь и далее обозначено $C(d) = C(\|u\|^{1,0} + \sup\limits_{\Omega_{d/2}} |\partial_x^2 u|)$.

Таким образом, при $s \leqslant d/2$ выполнена оценка

$$|f_s(x,t)| \leqslant C(d)s^{\alpha/2} + C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d.$$

Следовательно, в силу свойств объёмного потенциала (см. [18]) вектор-функция V_s обладает свойствами:

$$V_s \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_d), \tag{28}$$

$$\|V_s;\Omega_d\|^{1,0} \leqslant C(d)s^{\alpha/2} + C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \quad s \leqslant d/2. \tag{29}$$

Рассмотрим потенциалы U_s^k, $k = 1,2$. Оценим вектор-функции $\hat{\theta}_s^k$, $k = 1,2$. В силу (27) и (29) для этого достаточно оценить вектор-функции $\overline{\theta}_s^1(t) \equiv \partial_x u_s(g_1(t)+d,t)$ и $\overline{\theta}_s^2(t) \equiv$ $\equiv \partial_x u_s(g_2(t)-d,t)$. Положим

$$\overline{\theta}_s^1(t) = [\partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)] + \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t) \equiv \overline{\theta}_{s,1}^1 + \overline{\theta}_{s,2}^1.$$

При $s \leqslant d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, где $\mathcal{M}$ – постоянная из условия (1), вследствие непрерывности производной $\partial_x\overline{u}$ имеем

$$|\overline{\theta}_{s,1}^1| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d-sy,t-s\tau) - \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)|\,dy\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(2s;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}) \leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}), \quad d \leqslant t \leqslant T-d,$$

$$|\overline{\theta}_{s,2}^1(t)| = |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)| = |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t) - \partial_x\overline{u}(g_1(t),t)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}), \quad d \leqslant t \leqslant T-d.$$

Следовательно,

$$\|\overline{\theta}_s^1;[d,T-d]\|^0 \leqslant C\omega_2(d), \tag{30}$$

где $\omega_2(d) \equiv \omega(2d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega})$.

Аналогично получаем оценку

$$\|\overline{\theta}_s^2;[d,T-d]\|^0 \leqslant C\omega_2(d). \tag{31}$$

Из соотношений (27)–(31) следует, что $\hat{\theta}_s^k \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, $k = 1,2$, и выполнены неравенства

$$\|\hat{\theta}_s^k;[d,T-d]\|^0 \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k = 1,2.$$

Отсюда и из результатов работы [17] заключаем, что существует решение $(\varphi_s^1, \varphi_s^2)$, где $\varphi_s^k \in \in \underset{0}{C}[d, T-d]$, $k = 1, 2$, системы (22) и имеют место оценки

$$\|\varphi_s^k; [d, T-d]\|^0 \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k = 1, 2.$$

Поэтому в силу свойств потенциала простого слоя [16] получаем

$$|U_s^k(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k = 1, 2, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d.$$

Отсюда и из оценок (25), (29) вытекает, что

$$|u_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d,$$

где постоянная C не зависит от R, d и s, а $C(d)$ не зависит от R и s. Выбирая сначала достаточно большое R, затем достаточно малое d и, наконец, достаточно малое $s_1 \leqslant d^2/[4(1+ + \mathcal{M})^2]$, получаем неравенство (16). Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 1.2. Тогда u является решением второй начально-краевой задачи

$$L\nu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \nu|_{t=0} = 0, \quad \partial_x \nu|_{\Sigma_k} = \theta_k(t), \quad k = 1, 2,$$

где $\theta_k(t) = \partial_x u(g_k(t), t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1, 2$. Из работы [17] и теоремы 1.1 следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя (9), где $\varphi_l = (\varphi_{l1}, \ldots, \varphi_{lm}) \in \underset{0}{C}[0, T]$, $l = 1, 2$, и (φ_1, φ_2) – единственное в $C[0,T] \times C[0,T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры

$$\frac{(-1)^k}{2} A_2(g_k(t), t)\varphi_k(t) + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = \theta_k(t), \quad k = 1, 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Подставляя вектор-функцию (9) в граничные условия (8), получаем, что вектор-функции φ_l, $l = 1, 2$, одновременно являются решением системы

$$\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2. \tag{32}$$

В силу единственности в $C[0,T] \times C[0,T]$ решения системы (32) (см. [15]) получаем, что $\varphi_l \equiv \equiv 0$, $l = 1, 2$. Подставляя найденное решение φ_l, $l = 1, 2$, в представление (9), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Исследование Череповой М.Ф. проведено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
2. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
3. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
4. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.

5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 241–243.
8. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
9. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness of a solution in a Holder class to the first initial boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the Plane // J. Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
11. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
12. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
15. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
16. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка: Деп. в ВИНИТИ АН СССР 02.09.88. № 6850-В88.
17. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений: Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 15.11.89. № 6906-В89.
18. *Черепова М.Ф.* О гладкости потенциала объёмных масс для параболических систем // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 1999. № 6. С. 86–97.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт"

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1049–1062

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

 О. А. Матевосян

Изучаются вопросы единственности и асимптотического разложения решения смешанной задачи Дирихле–Неймана для бигармонического уравнения во внешности компактного множества в предположении, что обобщённое решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле со степенным весом с показателем $a \in \mathbb{R}$. В зависимости от значения параметра a доказаны теоремы единственности (неединственности) и найдены точные формулы для вычисления размерности линейного пространства решений смешанной задачи Дирихле–Неймана.

DOI: 10.31857/S0374064121080069

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Omega \bigcup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ – замыкание области Ω, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

В Ω рассматривается задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле–Неймана

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}_1 \bigcup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, $\mathrm{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^{\mathrm{т}}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле (энергии), либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$. Подобного рода условия на бесконечности являются естественными и изучались рядом авторов (см., например, [1–3]).

Вопросы о поведении при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1) рассматривались в [4, 5], в которых при определённых условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\mathrm{grad}\, u(x)|$ при $|x| \to \infty$.

В данной статье таким условием является ограниченность интеграла Дирихле с весом

$$D_a(u, \Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2 \, dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В [6] изучается слабое решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости. При решении, используя формулу Грина, задачу сводят к системе интегральных уравнений Фредгольма для неизвестных данных на другой части границы. В соответствующих пространствах Соболева установлены существование и единственность решений системы граничных интегральных уравнений.

Отметим также работу [7], в которой методом отражения исследована единственность решений основных краевых задач для бигармонического уравнения и системы уравнений Стокса в весовых L^p-пространствах в полупространстве.

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) автором в работах [8–20] изучены вопросы единственности, а также найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди [1, 2, 21], в данной работе удалось получить критерий единственности решения смешанной задачи Дирихле–Неймана для бигармонического уравнения. Для построения решения используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Данная работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [22].

Введём обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области Ω, имеющих компактный носитель в Ω; $H^2(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma\subset\overline{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ, по норме

$$\|u;H^2(\Omega,\Gamma)\| = \biggl(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|\partial^\alpha u|^2\,dx\biggr)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha\equiv\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j\geqslant 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$; если $\Gamma=\varnothing$, то пространство $H^2(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u;H^2(G_0)\|$, где $G_0\subset\overline{\Omega}$ – произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u,\Omega)=\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u|^2\,dx,\quad D_a(u,\Omega)=\int\limits_\Omega |x|^a\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u|^2\,dx,$$

$$\Omega_R=\Omega\bigcap\{x:|x|<R\},\quad \partial\Omega_R=\partial\Omega\bigcup\{x:|x|=R\}.$$

Под конусом K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат понимаем такую область, что если $x\in K$, то $\lambda x\in K$ при всех $\lambda>0$. Будем считать, что начало координат $x_0=0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

1. Определения и вспомогательные утверждения.

Определение 1. *Решением* однородного бигармонического уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u\in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такую, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi\,dx=0.$$

Лемма. *Пусть u – решение уравнения (1) в Ω, удовлетворяющее условию $D_a(u,\Omega)<\infty$. Тогда*

$$u(x)=P(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leqslant\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+u^\beta(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord}P(x)<m_0=\max\{2,2-n/2-a/2\}$, $\beta_0=2-n/2+a/2$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1), $C_\alpha=\mathrm{const}$, $\beta\geqslant 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)|\leqslant C_{\gamma\beta}|x|^{3-n-\beta-|\gamma|},\quad C_{\gamma\beta}=\mathrm{const},$$

при любом мультииндексе γ.

Замечание. Для фундаментального решения $\Gamma(x)$ бигармонического уравнения известно [23], что

$$\Gamma(x)=\begin{cases}C|x|^{4-n}, & \text{если } 4-n<0 \text{ или } n \text{ нечётно},\\ C|x|^{4-n}\ln|x|, & \text{если } 4-n\geqslant 0 \text{ и } n \text{ чётно}.\end{cases}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим функцию $v(x)=\theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x)=\theta(|x|/N)$ и для функции $\theta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнены условия: $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $\theta(s)=0$ при $s\leqslant 1$, $\theta(s)=1$ при $s\geqslant 2$. Считаем, что $N\gg 1$ и $G\subset\{x:|x|<N\}$. Продолжим функцию v на $\mathbb{R}^n$, полагая $v=0$ на $G=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$.

Тогда функция v принадлежит пространству $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v=f,$$

где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f\subset\{x:|x|<2N\}$. Несложно видеть, что $D_a(v,\mathbb{R}^n)<\infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [24], поскольку она основывается на лемме 2 из [24], в которой никаких ограничений на знак σ нет, где σ – степень весовой функции в указанной лемме. Следовательно, разложение

$$v(x)=P(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leqslant\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+v^\beta(x)$$

справедливо для любого a, где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord}P(x)<m_0=\max\{2,2-n/2-a/2\}$, $\beta_0=2-n/2+a/2$, $C_\alpha=\mathrm{const}$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)|\leqslant C_{\gamma\beta}|x|^{3-n-\beta-|\gamma|},\quad C_{\gamma\beta}=\mathrm{const}.$$

Отсюда и из определения функции v следует равенство (3). Лемма доказана.

Определение 2. *Решением* однородной задачи Дирихле–Неймана (1), (2) будем называть функцию $u\in\overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Gamma_1)$ такую, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\varphi=\partial\varphi/\partial\nu=0$ на Γ_1, выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega\Delta u\,\Delta\varphi\,dx=0. \tag{4}$$

Обозначим через $\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ пространство обобщённых решений задачи Дирихле–Неймана (1), (2), имеющих конечный интеграл Дирихле, т.е.

$$\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)=\left\{u:\Delta^2u=0,\ \ u|_{\Gamma_1}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\ \ \Delta u|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=0,\ \ D(u,\Omega)<\infty\right\}.$$

Положим по определению

$$\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)=\left\{u:\Delta^2u=0,\ \ u|_{\Gamma_1}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\ \ \Delta u|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=0,\ \ D_a(u,\Omega)<\infty\right\}.$$

Через $\dim\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ обозначим размерности линейных пространств соответственно $\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$. Найдём $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ в зависимости от значения параметра a.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием* $D(u,\Omega)<\infty$ *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений, т.е.* $\dim\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)=n+1$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1 приведено в [22].

Теорема 2. *Если* $-n\leqslant a<n-4$, $n>4$, *то* $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)=n+1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $0 \leqslant a < n-4$, $n > 4$.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$, если $a \geqslant 0$.

Докажем, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Тогда, согласно лемме, решение u имеет вид (3), т.е.

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P(x) \leqslant 1$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Нетрудно заметить, что $D_a(P(x), \Omega) = 0$ и $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $a < n-4$. Следовательно, $D_a(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Итак, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Согласно теореме 1 справедливо равенство

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теперь рассмотрим случай $-n \leqslant a < 0$, $n > 4$. Пусть $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, где $-n \leqslant a < 0$. Согласно лемме решение уравнения (1) в Ω имеет вид (3).

Так как $\mathrm{ord}\, P(x) \leqslant 1$, то $D(P(x), \Omega) < \infty$. Несложно проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$ при $n > 4$. Следовательно, $D(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$.

С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, если $a < 0$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. В силу теоремы 1 имеем

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $n-4 \leqslant a < n-2$, $n > 4$, *то* $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n$.

Доказательство. Для произвольного числа $e \neq 0$ построим обобщённое решение $u = u_e$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_e|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_e|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

и условию

$$\chi(u_e, \Omega) \equiv \int\limits_\Omega \left(\frac{|u_e|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e|^2}{|x|^2} + |\nabla\nabla u_e|^2 \right) dx < \infty. \tag{6}$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\Delta v|^2 \, dx$$

в классе $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = e,\ \partial v/\partial \nu|_{\Gamma_1} = 0,\ \mathrm{supp}\, v - \text{компакт}\}$ допустимых функций.

Выполнимость условия (6) как следствие неравенства Харди следует из результатов работ [1, 2, 21]. Согласно лемме решение u_e имеет вид $u_e(x) = P_e(x) + R_e(x)$, где $P_e(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P_e(x) \leqslant 1$,

$$R_e(x) = C_0' \Gamma(x) + \sum_{0 < |\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Из условия (6) вытекает, что $P_e(x) \equiv 0$.

Покажем, что постоянная C_0' отлична от нуля. Предположим, что $C_0'=0$. Умножив уравнение (1) на 1 и затем проинтегрировав по Ω_R, получим

$$\Bigg(\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}+\int\limits_{|x|=R}\Bigg)\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds=0.$$

Покажем сначала, что

$$\int\limits_{|x|=R}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds\to 0\quad\text{при}\quad R\to\infty.$$

Так как $C_0'=0$, то

$$\left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right|\leqslant C|x|^{-n},$$

$$\Bigg|\int\limits_{|x|=R}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds\Bigg|\leqslant\mathrm{const}\int\limits_{|x|=R}\left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right|ds\leqslant\mathrm{const}\int\limits_{|x|=R}|x|^{-n}\,ds=$$

$$=\mathrm{const}\,R^{-1}\to 0\quad\text{при}\quad R\to\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds=0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u_e)^2\,dx=-e\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на u_e и проинтегрировав по Ω_R с учётом граничных условий (5), получим

$$\int\limits_{\Omega_R}(\Delta u_e)^2\,dx=-\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}u_e\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds+J_1(u_e)+J_2(u_e), \tag{9}$$

где

$$J_1(u_e)=\int\limits_{|x|=R}\Delta u_e\frac{\partial u_e}{\partial\nu}\,ds,\quad J_2(u_e)=-\int\limits_{|x|=R}u_e\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds.$$

Покажем, что $J_1(u_e)\to 0$, $J_2(u_e)\to 0$ при $R\to\infty$. Так как

$$|u_e|\leqslant C|x|^{4-n},\quad |\Delta u_e|\leqslant C|x|^{2-n},\quad \left|\frac{\partial u_e}{\partial\nu}\right|\leqslant C|x|^{3-n},\quad \left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right|\leqslant C|x|^{1-n},$$

то при $n>4$ и $R\to\infty$ имеем

$$|J_i(u_e)|\leqslant C\int\limits_{|x|=R}|x|^{5-2n}\,ds=\mathrm{const}\,R^{4-n}\to 0,\quad i=1,2.$$

Переходя к пределу в равенстве (9) при $R\to\infty$, получаем требуемое равенство (8), так как $u_e|_{\Gamma_1}=e$. Из равенств (7) и (8) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u_e)^2\,dx=0$$

и, значит, $\Delta u_e = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (5) следует [2, гл. 2.4], что $u_e \equiv e \neq 0$. Полученное соотношение противоречит условию (6). Таким образом, $C_0' \neq 0$.

Положим $s = e/C_0'$.

Рассмотрим теперь решение $u = u_A$ уравнения (1) с граничными условиями

$$u_A(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \Delta u_A|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_A}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

где A – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, а Ax обозначает стандартное скалярное произведение векторов A и x.

Для любого ненулевого вектора A построим обобщённое решение $u = u_A$ бигармонического уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (10) и условию

$$\chi(u_A, \Omega) < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (1), (10) строится вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций

$$\left\{ v : v \in H^2(\Omega), \quad v(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \operatorname{supp} v \text{ – компакт в } \overline{\Omega} \right\}.$$

Согласно лемме имеет место равенство $u_A(x) = P_A(x) + R_A(x)$, где $P_A(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P_A(x) \leqslant 1$,

$$R_A(x) = C_0 \Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Из условия (11) следует, что $P_A(x) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = (u_A(x) - Ax) - (u_e - e),$$

где $e = sC_0$, число s определено выше. Очевидно, что v – решение задачи (1), (2).

Докажем, что $D_a(v, \Omega) < \infty$ при $a < n - 2$. Имеем

$$u_A(x) = C_0 \Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x), \tag{12}$$

$$u_e(x) = C_0' \Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x), \tag{13}$$

причём $C_0' = e/s = sC_0/s = C_0$.

Следовательно,

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'' + u_0^\beta(x),$$

где $C_\alpha'' = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Нетрудно проверить, что $D_a(\partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'', \Omega) < \infty$ и $D_a(u_0^\beta, \Omega) < \infty$ при $a < n - 2$. Отсюда следует, что $D_a(u_A - u_e, \Omega) < \infty$ и $D_a(v, \Omega) < \infty$. Легко заметить, что $v \not\equiv 0$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору A из $\mathbb{R}^n$ отвечает ненулевое решение v_A задачи (1), (2) с условием $D_a(v_A, \Omega) < \infty$, причём

$$v_A = u_A(x) - u_e - Ax + e.$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что соответствующие решения $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$ линейно независимы.

Пусть $\sum_{i=1}^n C_i v_{A_i} \equiv 0$, где $C_i = \text{const}$. Положим $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x$. Тогда

$$W_1 = \sum_{i=1}^n C_i(u_{A_i} - u_e + e) \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx < \infty.$$

Покажем, что $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x \equiv 0$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = (t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx = \int\limits_\Omega |x|^{a-2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)\,dx = \infty,$$

если $T \neq 0$. Следовательно, $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов $A_1, \ldots, A_n$ следует, что $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Таким образом, задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере n линейно независимых решений.

Докажем, что любое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$, т.е.

$$u = \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}, \quad \text{где} \quad C_i = \text{const}.$$

Согласно лемме решение уравнения (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = Ax + B + \sum_{|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x),$$

где A – постоянный вектор, B – некоторое число.

Так как $A_1, \ldots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, то существуют константы $C_1, \ldots, C_n$ такие, что

$$A = -\sum_{i=1}^n C_i A_i.$$

Положим

$$u_1 \equiv u - \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}.$$

Очевидно, что функция u_1 является решением задачи (1), (2) и $D_a(u_1,\Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_1 \equiv 0$ в Ω. Имеем

$$u_1 = b + z(x),$$

где $b = B - \sum_{i=1}^n C_i e_i$,

$$z(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^n C_i[u_{A_i} - u_{e_i}],$$

т.е. $z = u_1 - b$ и

$$z|_{\Gamma_1} = -b, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta z|_{\Gamma_2} = \left.\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Несложно видеть, что $\chi(z,\Omega) < \infty$. Таким образом, z является решением следующей задачи, которую обозначим через (z_b):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z|_{\Gamma_1} = -b, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta z|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z,\Omega) < \infty.$$

Кроме того, $D_a(z,\Omega) < \infty$.

Докажем, что если $e \neq 0$, то $D_a(u_e,\Omega) = \infty$, где u_e – построенное выше решение задачи (5), (6) для уравнения $\Delta^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega$. Имеем $u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + R_1(x)$, причём $C_0' \neq 0$, если $e \neq 0$, и

$$R_1(x) = \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D_a(R_1(x),\Omega) < \infty$. Так как $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$, то внутри некоторого конуса K справедливо неравенство $|\nabla\nabla\Gamma(x)| \geqslant C|x|^{2-n}$. Поэтому

$$D_a(C_0'\Gamma(x),\Omega) \geqslant C(C_0') \int\limits_{K\bigcap\{|x|>H\}} |x|^{2(2-n)+a} dx = \infty,$$

если $C_0' \neq 0$ и $a \geqslant n-4$. Отсюда следует, что $D_a(u_e,\Omega) = \infty$ при $e \neq 0$.

Теперь докажем единственность решения u_e задачи (5), (6). Допустим, что существуют два решения v_1 и v_2 такие, что

$$v_i|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_i|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad i = 1,2.$$

Тогда функция $v_e = v_1 - v_2$ удовлетворяет условиям

$$v_e|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_e|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(v_e,\Omega) < \infty.$$

Покажем, что $v_e \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральное тождество (4) для функции $u = v_e$ подставим функцию $\varphi = v_e\theta_N(x)$, где функция $\theta_N(x)$ определена в начале доказательства леммы, получим

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2 \theta_N(x)\,dx = -J_1(v_e) - J_2(v_e), \tag{14}$$

где

$$J_1(v_e) = 2\int\limits_\Omega \Delta v_e \nabla v_e \nabla\theta_N(x)\,dx, \quad J_2(v_e) = \int\limits_\Omega \Delta v_e\, v_e \Delta\theta_N(x)\,dx. \tag{15}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского с учётом условия $\chi(v_e,\Omega) < \infty$, несложно показать, что $J_1(v_e) \to 0$ и $J_2(v_e) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя в равенстве (14) к пределу при $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta v_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v_e|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_e|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [25, гл. 2.4], что $v_e \equiv 0$ в Ω. Тем самым, решение u_e задачи (5), (6) единственно. Следовательно, $z = u_e$ при $e = -b$ и $D_a(z,\Omega) = \infty$ при $b \neq 0$.

С другой стороны, $D_a(z,\Omega) < \infty$, где $z = u_1 - b$, откуда $b = 0$. Таким образом, $u_1 = z$ является решением задачи (z_0). В силу единственности решения задачи (5), (6) верно тождество $u_1 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $n-2 \leqslant a < \infty$, $n > 4$, *то* $\dim \operatorname{Ker}_a(\Delta^2) = 0$.

Доказательство. Пусть $a = n-2$, $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ и $u \not\equiv 0$.

Так как $\operatorname{Ker}_{n-2}(\Delta^2) \subset \operatorname{Ker}_{n-4}(\Delta^2)$, то в силу теоремы 3 решение u имеет вид

$$u = u_A - Ax - u_e + e, \tag{16}$$

где $e = sC_0$, а C_0 определяется из формулы (12).

Подставляя представления (12) и (13) для функций u_A и u_e в (16), получаем

$$u(x) = P_0(x) + (C_0 - C_0')\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P_0(x) = -Ax + e$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Так как $C_0' = C_0$, то $C_0 - C_0' = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x). \tag{17}$$

Докажем, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в представлении (17). Пусть $\tilde{C}_1 = 0$, тогда

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{1<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Умножив уравнение (1) на u и проинтегрировав по Ω_R с учётом граничных условий (2), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u)^2\,dx = \int_{|x|=R} \Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds - \int_{|x|=R} u\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\,ds. \tag{18}$$

Из (17) следуют оценки

$$|u| \leqslant C|x|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \leqslant C, \quad |\Delta u| \leqslant C|x|^{-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right| \leqslant C|x|^{-n-1}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds\right| \leqslant \text{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n}\,ds = \text{const}\,R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Переходя к пределу в равенстве (18) при $R \to \infty$, будем иметь

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2\,dx = 0.$$

Отсюда и из граничных условий (2) вытекает [25, гл. 2.4] тождество $u \equiv 0$ в Ω. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (17).

Так как $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$, то, в частности, $D_a(u,\Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D_a(P_0(x),\Omega) = 0$ и $D_a(R_2(x),\Omega) < \infty$, где

$$R_2(x) = \sum_{1<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Тогда в силу (17) и неравенства треугольника получаем $D_a((\tilde{C}_1 \nabla)\Gamma(x),\Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$. Тогда внутри некоторого конуса K имеет место неравенство $|\nabla\nabla(\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x)| \geqslant C|x|^{1-n}$. Следовательно,

$$\infty > D_a((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x),\Omega) \geqslant C \int\limits_{K\bigcap\{|x|>H\}} |x|^{2-2n+a}\,dx = \infty \quad \text{при} \quad a \geqslant n-2.$$

Полученное противоречие означает, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Смешанная задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием* $D_a(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $k(r,n)$ *линейно независимых решений при* $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $n > 4$, $r > 1$, *где*

$$k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность линейного пространства всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $(r+n)!/(r!n!)$ [26]. Тогда размерность линейного пространства всех бигармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна определённому в формулировке теоремы числу $k(r,n)$, так как бигармоническое уравнение означает равенство нулю некоторого многочлена степени $r-4$ в $\mathbb{R}^n$.

Если через $l(r,n)$ обозначить число линейно независимых однородных многочленов степени r, являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r,n) = \sum_{s=0}^{r} l(s,n),$$

где

$$l(s,n) = \frac{(s+n-1)!}{(n-1)!s!} - \frac{(s+n-5)!}{(n-1)!(s-4)!}, \quad s > 0.$$

Докажем сначала, что задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$ имеет $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Пусть $w_1, \ldots, w_k$ – базис в пространстве полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r. Так как $\operatorname{ord} w_i \leqslant r$, то $D_a(w_i,\Omega) < \infty$ при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$.

По каждому w_i, $i = \overline{1,k}$, построим решение v_i уравнения (1) такое, что

$$v_i|_{\Gamma_1} = w_i|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \Delta v_i|_{\Gamma_2} = \Delta w_i|_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial\Delta v_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\Delta w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$D(v_i,\Omega) < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla v_i|^2|x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |v_i|^2|x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\Delta v|^2\,dx$$

в классе допустимых функций

$$\left\{v : v \in H^2(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = w, \quad \frac{\partial v}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \operatorname{supp} v \text{ – компакт в } \overline{\Omega}\right\}.$$

Рассмотрим разность $q_i = w_i - v_i$. Имеем

$$\Delta^2 q_i = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$q_i|_{\Gamma_1} = \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta q_i|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad D(q_i, \Omega) < \infty.$$

Докажем, что q_i, $i = \overline{1, k}$, линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{k} c_i q_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=1}^{k} c_i (w_i - v_i) = 0, \quad c_i = \mathrm{const},$$

то

$$W \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \equiv V.$$

Следовательно, $|W|^2 = |V|^2$, $|\nabla W|^2 = |\nabla V|^2$, $|\nabla\nabla W|^2 = |\nabla\nabla V|^2$ и

$$D(W, \Omega) = D(V, \Omega) < \infty,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla W|^2 |x|^{-2}\, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla V|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |W|^2 |x|^{-4}\, dx = \int\limits_{\Omega} |V|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Согласно лемме решение V уравнения (1) в Ω имеет вид $V(x) = P(x) + R(x)$, где $P(x)$ – многочлен,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x).$$

Нетрудно проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-4} dx < \infty \quad \text{при} \quad n > 4.$$

В силу неравенства треугольника получаем $D(P(x), \Omega) < \infty$,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla P(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) = 0$. Пусть $\operatorname{ord} P(x) = r_1$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|P(x)| \geqslant C|x|^{r_1}$. Поэтому

$$\infty > \int\limits_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx \geqslant C \int\limits_{K \bigcap \{|x| > H\}} |x|^{(r_1 - 2)2}\, dx = C \int\limits_{|x| > H} |x|^{2r_1 - 4 + n} |x|^{-1}\, d|x|.$$

Так как $n > 4$, то полученный интеграл сходится только при $r_1 < 0$.

Таким образом, $P(x) \equiv 0$ и $V(x) = R(x)$, где $R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \equiv W = V(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Так как W – многочлен, то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = 0.$$

Отсюда следует, что $c_i = 0$, $i = \overline{1,k}$, поскольку w_i, $i = \overline{1,k}$, – базис в пространстве полиномиальных решений.

Таким образом, смешанная задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что всякое решение u смешанной задачи Дирихле–Неймана (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений q_i, $i = \overline{1,k}$, $\quad q_i = w_i - v_i$.

Согласно лемме решение уравнения (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = [2 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r + 2 - n \leqslant a < -2r + 4 - n$, то $1 - n/2 - a/2 \leqslant r < 2 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [2 - n/2 - a/2] = m_0$. Таким образом, $\operatorname{ord} P(x) \leqslant r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение уравнения (1). Имеем $0 = \Delta^2 u = \Delta^2 P(x) + \Delta^2 R(x)$, причём $\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $\Delta^2 P(x)$ – многочлен и $\Delta^2 P(x) = -\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to$ $\to \infty$, то $\Delta^2 P(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение бигармонического уравнения (1). Следовательно, оно представляется в виде линейной комбинации функций w_i, $i = \overline{1,k}$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i.$$

Докажем, что $u = \sum_{i=1}^k c_i q_i$. Положим

$$u_2 = u - \sum_{i=1}^k c_i q_i, \quad \text{т.е.} \quad u_2 = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i.$$

Тогда

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_2|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

По построению решения v_i имеем $D(v_i,\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\,dx < \infty, \quad i = \overline{1,k}.$$

Кроме того, легко проверить, что $D(R(x),\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $D(u_2,\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Таким образом, u_2 является решением следующей задачи, которую обозначим через (u_2):

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_2|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$D(u_2, \Omega) < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Покажем, что $u_2 \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для любой функции $\varphi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такой, что

$$\varphi|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta \varphi|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

и функции $u = u_2$ справедливо интегральное тождество (4):

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u_2\, \Delta \varphi\, dx = 0.$$

Подставим в это равенство $\varphi = u_2 \theta_N(x)$, где функция $\theta_N(x)$ определена в начале доказательства леммы, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u_2)^2 \theta_N(x)\, dx = -J_1(u_2) - J_2(u_2), \tag{19}$$

функционалы J_1 и J_2 в котором заданы в (15). Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия задачи (u_2), несложно показать, что $J_1(u_2) \to 0$ и $J_2(u_2) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя в равенстве (19) к пределу при $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u_2)^2\, dx = 0.$$

Таким образом, $\Delta u_2 = 0$, $x \in \Omega$, и $u_2|_{\Gamma_1} = \partial u_2/\partial \nu|_{\Gamma_1} = 0$, $\Delta u_2|_{\Gamma_2} = \partial \Delta u_2/\partial \nu|_{\Gamma_2} = 0$. Отсюда следует [2, гл. 2.4], что $u_2 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
2. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 354–366.
4. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint–Venant's principle // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1983. V. 93A. P. 327–343.
5. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
6. *Cakoni F., Hsiao G.C., Wendland W.L.* On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation // Complex Variables. 2005. V. 50. № 1. P. 7–11.
7. *Farwig R.* A note on the reflection principle for the biharmonic equation and the Stokes system // Acta Appl. Math. 1994. V. 37. P. 41–51.

8. *Матевосян О.А.* О решениях краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения в полупространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 806–811.
9. *Матевосян О.А.* О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Мат. заметки. 2001. Т. 70. № 3. Р. 403–418.
10. *Матевосян О.А.* О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. Математика. 2003. Т. 67. № 5. С. 49–82.
11. *Matevosyan O.A.* On solutions of a boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2014. V. 21. № 1. P. 130–132.
12. *Matevossian H.A.* On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2015. V. 7. № 1. P. 74–78.
13. *Матевосян О.А.* Решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 481–494.
14. *Матевосян О.А.* О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Мат. заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947.
15. *Matevosyan O.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
16. *Матевосян О.А.* О решениях одной краевой задачи для бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
17. *Matevossian H.A.* On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces // Russ. J. Math. Phys. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
18. *Matevossian H.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2017. V. 9. № 2. P. 151–157.
19. *Matevossian H.A.* On the Steklov-type biharmonic problem in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 2. P. 271–276.
20. *Matevossian H.A.* On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. V. 64. № 1. P. 1–7.
21. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Hardy's and Korn's inequality and their application // Rend. Mat. Appl. 1990. Serie VII. V. 10. P. 641–666.
22. *Matevossian H.* Mixed biharmonic Dirichlet–Neumann problem in exterior domains // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2020. Т. 13. № 6. С. 755–762.
23. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
24. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. 75–99.
25. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производным и второго порядка. М., 1989.
26. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Московский авиационный институт (НИУ “МАИ”)

Поступила в редакцию 06.02.2019 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1063–1070

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

МЕТОД РИМАНА–АДАМАРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Для линейной неоднородной системы в частных производных первого порядка с тремя независимыми переменными доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, которое построено в терминах определяемой в работе матрицы Римана–Адамара.

DOI: 10.31857/S0374064121080070

Линейная система уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

коэффициенты a_{ik} и свободные члены f_i, $i, k = \overline{1, n}$, которой непрерывны, исследовалась многими авторами [1–3]. Эта система представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Отметим, что наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в системе (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, и в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. В статьях [5, 6] метод Римана применяется для исследования задач для систем уравнений с двумя и тремя независимыми переменными с кратными характеристиками. Системы гиперболических уравнений исследовались ранее рядом авторов в различных направлениях [7–13].

Отметим, что В.И. Жегаловым и его учениками разработан метод Римана для класса уравнений с доминирующими частными производными

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

здесь $D_1 \equiv \partial^{k_1+\ldots+k_n}/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}$, а D_2 – линейная комбинация с переменными коэффициентами операторов вида $\partial^{l_1+\ldots+l_n}/\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}$, где $0 \leqslant l_i \leqslant k_i$, $i = \overline{1, n}$, и $l_j < k_j$ хотя бы для одного $j \in \{1, \ldots, n\}$ (см., например, работы [14–16]). Уравнение (2) имеет приложения в теориях фильтрации жидкости в трещиноватых средах, поглощения влаги корнями растений, колебаний стержней с учётом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах.

Большой интерес представляет задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Эта задача рассматривалась, в частности, в работах [17, гл. 3, § 1; 18–23].

В статье [24] для уравнения Бианки третьего порядка исследованы существование и единственность решения задачи Дарбу, а также определена функция Римана–Адамара, доказаны её существование и единственность, построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара. При этом определение функции Римана–Адамара основывается на определении функции Римана [14].

Решение задачи Дарбу для системы (1) с двумя независимыми переменными построено в терминах матрицы Римана–Адамара в работе [25].

В настоящей работе для системы вида (1) с тремя независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся определённым развитием метода Римана, который естественно назвать *методом Римана–Адамара.*

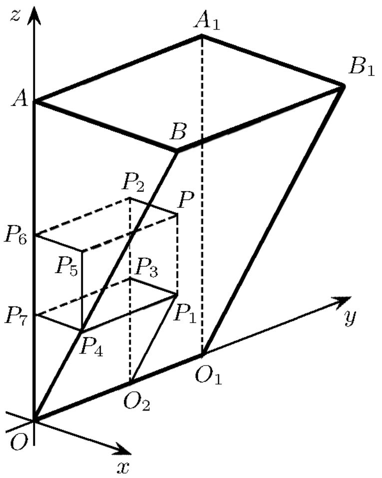

Рисунок. Области D и D_P, D_1, D_2 (призмы Π, Π_P, Π_2 и параллелепипед Π_1).

Пусть D – область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная призмой $\Pi = OABO_1A_1B_1$, задаваемой плоскостями (рисунок):

$$x = 0 \ \ (AA_1O_1O), \quad y = 0 \ \ (AOB), \quad y = y_0 > 0 \ \ (A_1O_1B_1),$$

$$z = x \ \ (OBB_1O_1), \quad z = z_0 > 0.$$

Обозначим боковые грани призмы Π при $x = 0$ и $z = x$ через X и T соответственно, а через Y её основание при $y = 0$.

В области $\overline{D}$ рассмотрим гиперболическую систему

$$u_x = a_{11}(x,y,z)u + a_{12}(x,y,z)v + a_{13}(x,y,z)w + f_1(x,y,z),$$

$$v_y = a_{21}(x,y,z)u + a_{22}(x,y,z)v + a_{23}(x,y,z)w + f_2(x,y,z),$$

$$w_z = a_{31}(x,y,z)u + a_{32}(x,y,z)v + a_{33}(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \quad (3)$$

Считаем, что её коэффициенты и свободные члены непрерывны: $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,j = \overline{1,3}$. Линейное преобразование искомых функций $u \mapsto b_1 u$, $v \mapsto b_2 v$, $w \mapsto b_3 w$, где $b_1 = b_1(x,y,z) = \exp\int_0^x a_{11}(\alpha,y,z)\,d\alpha$ и аналогичный вид имеют функции b_2 и b_3, приводит систему (3) к случаю, в котором

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \equiv 0. \quad (4)$$

Далее считаем эти условия выполненными.

Определим класс $C^{(k,l,m)}$ функций: включение $f \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$ равносильно существованию у функции f непрерывных производных $\partial^{r_1+r_2+r_3} f/\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}$ $(r_i = \overline{0,k_i})$. Решение (u,v,w) системы (3) такое, что $u \in C^{(1,0,0)}(D)$, $v \in C^{(0,1,0)}(D)$, $w \in C^{(0,0,1)}(D)$, назовём *регулярным* в области D.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение системы (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad v|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad w|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \quad (5)$$

где $\varphi_1 \in C(\overline{X})$, $\varphi_2 \in C(\overline{Y})$, $\psi \in C(\overline{T})$ – заданные функции.

Докажем существование и единственность решения задачи Дарбу.

Сведём систему (3) с учётом условий (4) и (5) к системе интегральных уравнений

$$u(x,y,z) = \varphi_1(y,z) + \int\limits_0^x (a_{12}v + a_{13}w + f_1)(\alpha,y,z)\,d\alpha,$$

$$v(x,y,z) = \varphi_2(x,z) + \int\limits_0^y (a_{21}u + a_{23}w + f_2)(x,\beta,z)\,d\beta,$$

$$w(x,y,z) = \psi(x,y) + \int\limits_x^z (a_{31}u + a_{32}v + f_3)(x,y,\gamma)\,d\gamma. \quad (6)$$

Решение системы интегральных уравнений Вольтерры (6) существует и единственно в классе непрерывных функций. Задача Дарбу (3)–(5) и система (6) эквивалентны. Действительно, система (6) – следствие (3)–(5). Обратно, дифференцируя уравнения системы (6), получаем систему (3) с условиями (4) и (5).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если выполняются условия $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,j = \overline{1,3}$, то решение задачи Дарбу (3), (4) существует и единственно.*

Перейдём к построению решения задачи Дарбу в терминах матрицы Римана–Адамара. Запишем систему (3), (4) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1\mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2\mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3\mathbf{U}_z - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathrm{colon}\,(u, v, w), \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{colon}\,(f_1, f_2, f_3).$$

Введём матрицу Римана [4] $\mathbf{R} = \mathrm{colon}\,(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$, где вектор-функции $\mathbf{R}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$, $i = \overline{1, 3}$, являются решениями систем

$$r_{i1}(x, y, z) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (a_{21}r_{i2} + a_{31}r_{i3})(\alpha, y, z)\,d\alpha,$$

$$r_{i2}(x, y, z) = \delta_{i2} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_{12}r_{i1} + a_{32}r_{i3})(x, \beta, z)\,d\beta,$$

$$r_{i3}(x, y, z) = \delta_{i3} - \int\limits_{\zeta}^{z} (a_{13}r_{i1} + a_{23}r_{i2})(x, y, \gamma)\,d\gamma, \tag{8}$$

в которых δ_{ij} – символ Кронекера. Решения систем (8) при каждом $i = \overline{1, 3}$ существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x, y, z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряжённой к (7) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{V}\mathbf{A}_1)_x - (\mathbf{V}\mathbf{A}_2)_y - (\mathbf{V}\mathbf{A}_3)_z - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Справедливо тождество

$$(\mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{R}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_z = \mathbf{R}L(\mathbf{U}), \tag{9}$$

которое может быть проверено непосредственно. Интегрированием этого тождества получаем решение задачи Дарбу.

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta)$. Она определяет (см. рисунок) область D_P, ограниченную призмой $\Pi_P = O_2P_1PP_2OP_4P_5P_6$ и состоящую из двух частей – области D_1, ограниченной прямоугольным параллелепипедом $\Pi_1 = P_1PP_2P_3P_4P_5P_6P_7$, и области D_2, ограниченной призмой $\Pi_2 = O_2P_1P_3OP_4P_7$.

Определим матрицу Римана–Адамара задачи Дарбу $\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (h_{ij})$, $i, j = \overline{1, 3}$, равенством

$$\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \mathbf{R}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_1, \\ \mathbf{Q}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_2. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{Q} = \mathrm{colon}\,(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3)$, где вектор-функции $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3})$, $i = \overline{1, 3}$, являются решениями задачи Дарбу в D_2 для сопряжённой системы

$$q_{i1_x} = -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3}, \quad q_{i2_y} = -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3}, \quad q_{i3_z} = -a_{13}q_{i1} - a_{23}q_{i2}$$

с условиями
$$q_{i1}|_{z=x}=0,\quad q_{i2}|_{y=\eta}=0,\quad q_{i3}|_{z=\xi}=r_{i3}|_{z=\xi}. \tag{10}$$
Последнее условие в (10) можно записать в виде $[h_{i3}]|_{z=\xi}=0$, где $[h_{i3}]|_{z=\xi}$ – скачок функции h_{i3} на плоскости $z=\xi$.

Очевидно, что матрица Римана–Адамара существует и единственна.

Проинтегрируем тождество (9) по области D_1 (она определяется неравенствами $0<x<\xi$, $0<y<\eta$, $\xi<z<\zeta$):
$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{11}u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta-\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{11}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{12}v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha-$$
$$-\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{12}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{13}w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha-\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{13}w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha=$$
$$=\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta(r_{11}f_1+r_{12}f_2+r_{13}f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{11}$$
$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{21}u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta-\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{21}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{22}v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha-$$
$$-\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{22}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{23}w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha-\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{23}w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha=$$
$$=\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta(r_{21}f_1+r_{22}f_2+r_{23}f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{12}$$
$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{31}u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta-\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{31}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{32}v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha-$$
$$-\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{32}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{33}w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha-\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta r_{33}w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha=$$
$$=\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta(r_{31}f_1+r_{32}f_2+r_{33}f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha. \tag{13}$$

В равенствах (11)–(13) у r_{ij} указана только первая тройка аргументов, вторая их тройка – (ξ,η,ζ). В этих равенствах учтено также, что согласно (8) справедливы равенства
$$r_{11}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=1,\quad r_{12}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=0,\quad r_{13}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)=0,$$
$$r_{21}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=0,\quad r_{22}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=1,\quad r_{23}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)=0,$$
$$r_{31}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=0,\quad r_{32}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=0,\quad r_{33}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)=1.$$

Теперь проинтегрируем тождество (9) по области D_2. Очевидно, область D_2 может быть задана любой из двух систем неравенств:

1) $0 < x < \xi,\ \ 0 < y < \eta,\ \ x < z < \xi$;

2) $0 < x < z,\ \ 0 < y < \eta,\ \ 0 < z < \xi$.

Интегрируя равенство для первых компонент векторов в (9), получаем

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{11}u)_x(x,y,z)\,dx+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z dx\int\limits_0^\eta (q_{12}v)_y(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dx\int\limits_x^\xi (q_{13}w)_z(x,y,z)\,dz=\iiint\limits_{D_2}(q_{11}f_1+q_{12}f_2+q_{13}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{11}u(z,y,z)-q_{11}u(0,y,z))\,dz+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{12}v(x,\eta,z)-q_{12}v(x,0,z))\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{13}w(x,y,\xi)-q_{13}w(x,y,x))\,dx=\iiint\limits_{D_2}(q_{11}f_1+q_{12}f_2+q_{13}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (14)$$

Здесь $q_{11}(z,y,z)=q_{12}(x,\eta,z)\equiv 0$ в силу условий (10).

Интегрируем равенство для вторых компонент векторов в (9):

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{21}u)_x(x,y,z)\,dx+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z dx\int\limits_0^\eta (q_{22}v)_y(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dx\int\limits_x^\xi (q_{23}w)_z(x,y,z)\,dz=\iiint\limits_{D_2}(q_{21}f_1+q_{22}f_2+q_{23}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{21}u(z,y,z)-q_{21}u(0,y,z))\,dz+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{22}v(x,\eta,z)-q_{22}v(x,0,z))\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{23}w(x,y,\xi)-q_{23}w(x,y,x))\,dx=\iiint\limits_{D_2}(q_{21}f_1+q_{22}f_2+q_{23}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (15)$$

Снова $q_{21}(z,y,z)=q_{22}(x,\eta,z)\equiv 0$ в силу условий (10).

Аналогично, интегрируя равенство для третьих компонент векторов в (9), будем иметь

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{31}u)_x(x,y,z)\,dx+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z dx\int\limits_0^\eta (q_{32}v)_y(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int_0^\eta dy\int_0^\xi dx\int_0^z (q_{33}w)_z(x,y,z)\,dz=\iiint_{D_2}(q_{31}f_1+q_{32}f_2+q_{33}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int_0^\eta dy\int_0^\xi (q_{31}u(z,y,z)-q_{31}u(0,y,z))\,dz+\int_0^\xi dz\int_0^z (q_{32}v(x,\eta,z)-q_{32}v(x,0,z))\,dx+$$

$$+\int_0^\eta dy\int_0^\xi (q_{33}w(x,y,\xi)-q_{33}w(x,y,x))\,dx=\iiint_{D_2}(q_{31}f_1+q_{32}f_2+q_{33}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad (16)$$

где $q_{31}(z,y,z)=q_{32}(x,\eta,z)\equiv 0$ в силу условий (10).

Складывая почленно равенства (11) и (14), получаем

$$\int_0^\eta\int_\xi^\zeta u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int_0^\eta\int_0^\zeta (q_{13}-r_{13})w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha=$$

$$=\int_0^\eta\int_\xi^\zeta r_{11}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int_0^\xi\int_\xi^\zeta r_{12}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\int_0^\eta\int_0^\xi q_{11}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int_0^\xi\int_0^z q_{12}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\int_0^\xi\int_0^\eta q_{13}w(\alpha,\beta,0)\,d\beta\,d\alpha+\iiint_{D_P}(h_{11}f_1+h_{12}f_2+h_{13}f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha.\quad (17)$$

Второе слагаемое в левой части равенства (17) обращается в нуль в силу (10).

Обозначим грани D_1 и D_2 при $z=x$ через S, при $x=0$ через X_1 и X_2, а при $y=0$ через Y_1 и Y_2 соответственно. Запишем формулу (17) в виде

$$\int_0^\eta\int_\xi^\zeta u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta=\iint_{X_1+X_2}h_{11}u\,d\gamma\,d\beta+\iint_{Y_1+Y_2}h_{12}v\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\iint_S h_{13}w\,d\beta\,d\alpha+\iiint_{D_P}(h_{11}f_1+h_{12}f_2+h_{13}f_3)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha.\quad (18)$$

Обозначим правую часть равенства (18) через $F_1(\xi,\eta,\zeta)$. Очевидно, что $F_1(\xi,\eta,\zeta)$ может считаться известной функцией, так как выражается через элементы матрицы $\mathbf{H}$ и данные задачи Дарбу. Дифференцируя (18), получаем

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2F_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta\partial\zeta}.\quad (19)$$

Аналогично складывая равенства (12) и (15), (13) и (16), находим соответственно, что

$$\int_0^\xi \int_\xi^\zeta v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha = \iint_{X_1+X_2} h_{21}u\,d\gamma\,d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} h_{22}v\,d\gamma\,d\alpha +$$

$$+\iint_S h_{23}w\,d\beta\,d\alpha + \iiint_{D_P}(h_{21}f_1+h_{22}f_2+h_{23}f_3)d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{20}$$

$$\int_0^\xi \int_0^\eta w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha = \iint_{X_1+X_2} h_{31}u\,d\gamma\,d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} h_{32}v\,d\gamma\,d\alpha +$$

$$+\iint_S h_{33}w\,d\beta\,d\alpha + \iiint_{D_P}(h_{31}f_1+h_{32}f_2+h_{33}f_3)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{21}$$

откуда дифференцированием получаем

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 F_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\zeta}, \quad w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 F_3(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\eta}, \tag{22}$$

где $F_2(\xi,\eta,\zeta)$ и $F_3(\xi,\eta,\zeta)$ – известные правые части равенств (20) и (21), выражающиеся через элементы матрицы $\mathbf{H}$ и данные задачи Дарбу.

Формулы (19) и (22) представляют собой решение задачи Дарбу (3), (5) в терминах матрицы Римана–Адамара $\mathbf{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
2. *Чекмарев Т.В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
3. *Плещинская И.Е.* Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1634–1637.
4. *Миронова Л.Б.* О методе Римана в $\mathbb{R}^n$ для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.
5. *Жегалов В.И., Миронова Л.Б.* Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 12–21.
6. *Миронова Л.Б.* Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2019. № 6. С. 48–57.
7. *Романовский Р.К.* О матрицах Римана первого и второго рода // Мат. сб. 1985. Т. 127. № 4. С. 494–501.
8. *Жегалов В.И.* Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2008. № 8. С. 70–72.
9. *Воронова Ю.Г.* О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщёнными инвариантами Лапласа // Уфимский мат. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 20–26.
10. *Жибер А.В., Костригина О.С.* Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка // Уфимский мат. журн. 2011. Т. 3. № 3. С. 67–79.
11. *Созонтова Е.А.* О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // Изв. вузов. Математика. 2013. № 10. С. 43–54.
12. *Андреев А.А., Яковлева Ю.О.* Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Вып. 4. С. 752–759.

13. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Вариант метода исключения для одной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 841–845.
14. *Жегалов В.И.* О трехмерной функции Римана // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1074–1079.
15. *Миронов А.Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 584–594.
16. *Миронов А.Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2007. Вып. 2. С. 27–32.
17. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
18. *Моисеев Е.И.* Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу // Мат. заметки. 1982. Т. 32. Вып. 2. С. 175–186.
19. *Моисеев Е.И.* О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 73–87.
20. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
21. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
22. *Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г.* Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
23. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.* Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
24. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
25. *Mironova L.B.* Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 21.09.2020 г.
После доработки 21.09.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1071–1080

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2021 г. К. Б. Сабитов, С. Н. Сидоров

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде изучается начально-граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде ряда по ортогональной системе функций. При обосновании сходимости этого ряда возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов. Найдены достаточные условия равномерной отделённости от нуля знаменателей, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно возмущений граничных функций.

DOI: 10.31857/S0374064121080082

Введение. Рассмотрим оператор смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu := \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

и область $Q = \{(x,y,t) : (x,y) \in D,\ \ t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\ \ 0 < y < q\}$, а α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное действительное число. Обозначим $Q_+ = \{(x,y,t) \in Q : t > 0\}$ и $Q_- = \{(x,y,t) \in Q : t < 0\}$.

Начально-граничная задача. Найти функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \bigcap C^2(Q_+ \bigcup Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q_+ \bigcup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)|_{x=0} = u(x,y,t)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,y,t)|_{y=0} = u(x,y,t)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,y,t)|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $\psi(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция, для которой выполнены условия согласования с граничными данными (4) и (5).

Отметим, что задача Трикоми и её аналоги для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами [1–6] (см. также библиографию в указанных работах) в двумерных областях, гиперболическая часть которых представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками уравнения и линией $t = 0$ изменения типа. В работах [7; 8; 9, с. 56–94] изучены аналоги начально-граничных задач для уравнений параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях.

Постановка задачи (2)–(6) впервые была приведена в докладе [10] и в нём же сформулирован критерий единственности её решения. Ранее в работе [11] в многомерном пространстве изучались начально-граничные задачи для параболо-гиперболических уравнений, в которых сопряжение производилось по пространственной координате.

В данной работе доказан критерий единственности решения, а само решение в случае, когда D – квадрат, построено в виде ряда по собственным функциям двумерной спектральной задачи оператора Лапласа. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, в связи с чем получены достаточные условия, обеспечивающие равномерную отделённость от нуля знаменателей, и на основании этого доказана сходимость указанного ряда в классе функций $C^2(\overline{Q}_+ \bigcup \overline{Q}_-)$ при некоторых условиях относительно функции $\psi(x,y)$, а также получены оценки решения, из которых вытекает его устойчивость по отношению к возмущению граничных условий.

1. Критерий единственности решения. Пусть $u(x,y,t)$ – решение задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_{mn}(t) = \iint\limits_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)\,dx\,dy, \quad m,n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где

$$v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}, \quad m,n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

– полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (8) образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Продифференцируем тождество (7) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза, учитывая определение (1) оператора L, и вычислим затем интегралы по частям с учётом граничных условий (4) и (5), в результате получим уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda^2_{mn} u_{mn}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda^2_{mn} u_{mn}(t) = 0, \quad t < 0, \tag{10}$$

здесь

$$\lambda^2_{mn} = b + \pi^2\left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Далее в равенстве (11) будем считать, что $b = \mu^2 \geqslant 0$ $(\mu \geqslant 0)$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$, правая часть (11) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на положительность при всех достаточно больших n или m правой части в (11), а значит, как будет следовать из дальнейшего, и на справедливость полученных результатов.

Интегрируя уравнения (9) и (10) с учётом условий задачи (2)–(6), найдём, что

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda^2_{mn} t}, & t \geqslant 0, \\ \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos(\lambda_{mn} t) - \lambda_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\psi_{mn} = \iint\limits_D \psi(x,y)v_{mn}(x,y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

при условии, что при всех $m,n \in \mathbb{N}$ выполняетя соотношение

$$\delta_{mn}(\alpha) := \cos(\lambda_{mn}\alpha) + \lambda_{mn}\sin(\lambda_{mn}\alpha) \neq 0. \tag{14}$$

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно только тогда, когда при всех натуральных m и n выполнены условия (14).*

Доказательство. Пусть $\psi(x,y) \equiv 0$ и условия (14) выполнены при всех $m,n \in \mathbb{N}$. Тогда из (13), (12) и (7) следует, что при всех $m,n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$ справедливо равенство

$$\iint\limits_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (8) в пространстве $L_2(D)$ следует, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Согласно условию (2) функция $u(x,y,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых $m = m_0$ и $n = n_0$ справедливо равенство $\delta_{m_0n_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6) (где $\psi(x,y) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{m_0n_0}(x,y,t) = \begin{cases} C_{m_0n_0} e^{-\lambda^2_{m_0n_0} t} v_{m_0n_0}(x,y), & t \geqslant 0, \\ C_{m_0n_0}(\cos(\lambda_{m_0n_0}t) - \lambda_{m_0n_0}\sin(\lambda_{m_0n_0}t)) v_{m_0n_0}(x,y), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

где $C_{m_0n_0} \neq 0$ – произвольная постоянная.

Поэтому возникает вопрос о нулях выражения $\delta_{mn}(\alpha)$. Для ответа на него представим это выражение в виде

$$\delta_{mn}(\alpha) = \sqrt{1+\lambda^2_{mn}}\sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn}), \tag{15}$$

где $\gamma_{mn} = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda^2_{mn}})$. Из представления (15) вытекает, что $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ только в том случае, когда α имеет вид

$$\alpha = \frac{\pi k}{\lambda_{mn}} - \frac{\gamma_{mn}}{\lambda_{mn}}, \quad \text{где} \quad k,m,n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Равенство (16) с учётом выражения (11) запишем в равносильном виде

$$\left(\frac{k-\gamma_{mn}/\pi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{m}{p}\right)^2 - \left(\frac{n}{q}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^2. \tag{17}$$

Таким образом, выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда число α представляется в виде (16) или, равносильно, диофантово уравнение (17) имеет решение (k,m,n) во множестве натуральных чисел. Придавая в равенстве (16) k, m и n всевозможные натуральные значения, получаем счётное множество нулей выражения $\delta_{mn}(\alpha)$. Теорема доказана.

2. Существование решения задачи. При соблюдении условий (14) решение $u(x,y,t)$ задачи (2)–(6) формально определяется рядом Фурье по системе функций (8), т.е.

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \tag{18}$$

в котором коэффициенты $u_{mn}(t)$ находятся по формуле (12). Так как выражения $\delta_{mn}(\alpha)$ являются знаменателями коэффициентов ряда (18) и, как показано выше, уравнение $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счётное множество нулей (16), то возникает проблема малых знаменателей более сложной природы, чем в плоском случае [7; 8; 9, с. 61–66]. В связи с этим для обоснования сходимости ряда (18) в классе функций (2) необходимо установить достаточные условия, обеспечивающие равномерную отделённость от нуля выражения $\delta_{mn}(\alpha)$ при всех достаточно больших m и n.

Пусть $n \geqslant m$. Представим выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ в виде

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda^2_{mn}}\sin(\pi n\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn}), \tag{19}$$

где

$$\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{q}, \quad \widetilde{\lambda}_{mn} = \sqrt{1 + \left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2}.$$

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant m$, отношение q/p рационально и $q/p \leqslant 1$. Если $\widetilde{\alpha}$ – положительное рациональное число, т.е. $\widetilde{\alpha} = r/s$, где $r,s \in \mathbb{N}$, $(r,s) = 1$, и выполнено неравенство*

$$(2\mu rpq)^2 + (2p)^2\pi qrs < 3\pi^2, \tag{20}$$

то существуют положительные постоянные C_0 *и* n_0 $(n_0 \in \mathbb{N})$ *такие, что при всех* $n > n_0$ *и любом фиксированном* m *справедлива оценка*

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| \geqslant C_0. \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n > m$, где m – фиксированное натуральное число. Представим выражение $\widetilde{\lambda}_{mn}$ в следующем виде:

$$\widetilde{\lambda}_{mn} = 1 + \theta_{mn}, \tag{22}$$

при этом для θ_{mn} для всех достаточно больших n имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{3}{8}\left[\left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2\right] < \theta_{mn} < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2\right], \tag{23}$$

так как существует номер n_1 такой, что при $n > n_1$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2 < 1.$$

Подставляя выражение (22) для $\widetilde{\lambda}_{mn}$ в представление (19), будем иметь

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda_{mn}^2}\sin(\pi n\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}), \tag{24}$$

здесь $\widetilde{\theta}_{mn} = \pi n\theta_{mn}$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = \alpha/q = r/s$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $(r,s) = 1$. Разделим nr на s с остатком: $nr = ds + d_0$, где $d, d_0 \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $0 \leqslant d_0 < s$; вообще говоря, d и d_0 зависят от n. Тогда равенство (24) можно записать в виде

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = (-1)^d\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}\sin\left(\frac{\pi d_0}{s} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}\right). \tag{25}$$

В силу известных неравенств $|x| \leqslant |\arcsin x| \leqslant \pi|x|/2$, если $0 \leqslant |x| \leqslant 1$, для выражения γ_{mn} имеем оценки

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}} \leqslant \gamma_{mn} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}}. \tag{26}$$

Если $d_0 = 0$, то вследствие представления (25) получаем

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| = \sqrt{1+\lambda_{mn}^2}|\sin(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn})|. \tag{27}$$

Из оценок (23) и (26) следует соответственно, что $\widetilde{\theta}_{mn} \to 0$ и $\gamma_{mn} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует натуральное число n_2 такое, что при всех $n > n_2$ справедливы неравенства $0 < < \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn} < \pi/2$. Теперь в силу известного неравенства

$$\sin x > 2x/\pi, \quad \text{если} \quad 0 < x < \pi/2, \tag{28}$$

и соотношений (27), (28), (26) и (23) приходим к оценке

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| > \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}) \geqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \frac{2}{\pi} > \frac{2}{\pi} = C_1 > 0. \tag{29}$$

Пусть $d_0 > 0$. Так как $1 \leqslant d_0 \leqslant s-1$, $s \geqslant 2$, то $\pi/s \leqslant \pi d_0/s \leqslant \pi - \pi/s$, а значит, как следует из равенства (25), существует число $n_3 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_3$ имеют место оценки

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| > \frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_{mn}^2}\left|\sin\frac{\pi}{s}\right| > \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{s}\right|\frac{\pi n}{q}(1+\widetilde{\theta}_{mn}) = C_2 n \geqslant C_2 > 0. \tag{30}$$

Отметим, что C_1 и C_2 здесь и в дальнейшем C_i – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, p и q.

Теперь рассмотрим случай, когда $m = n$. В этом случае выражение для $\widetilde{\lambda}_{mn}$ примет вид

$$\widetilde{\lambda}_{nn} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mu p q}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}A_n, \tag{31}$$

где $A_n = 1 + a_n$ и для остатка a_n при $n > n_4$, где n_4 – некоторое натуральное число, справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{\mu p q}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2 < a_n < \frac{1}{2}\left(\frac{\mu p q}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2. \tag{32}$$

Введём в рассмотрение число

$$\nu = \widetilde{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = \frac{r}{s}\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Тогда выражение (19) с учётом представления (31) принимает вид

$$\delta_{nn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin(\pi n\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_{nn} + \gamma_{nn}) = \sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin(\pi n\nu + \pi n\nu a_n + \gamma_{nn}). \tag{33}$$

Число ν, если отношение q/p рационально, может быть только рациональным или квадратично иррациональным числом. Если оно является рациональным числом, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим оценки вида (29) и (30).

Пусть теперь число ν является квадратично иррациональным. Для него, согласно теореме Лиувилля [12, с. 60], существует положительное число δ, зависящее от ν, такое, что при любых целых n и l $(n > 0)$ справедливо неравенство

$$\left|\nu - \frac{l}{n}\right| > \frac{\delta}{n^2}. \tag{34}$$

Соотношение (33) представим в виде

$$\delta_{nn}(\widetilde{\alpha}) = (-1)^k\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \pi n\nu a_n + \gamma_{nn}\right]. \tag{35}$$

Очевидно, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, чтобы имело место неравенство [9, с. 63]

$$\left|\nu - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{2n}. \tag{36}$$

В силу оценок (26) и (32) существует натуральное число n_5 такое, что

$$0 < \nu\pi n a_n + \gamma_{nn} < \pi/4 \tag{37}$$

при всех $n > n_5$. Тогда на основании оценок (36) и (37) заключаем, что для аргумента синуса в соотношении (35) возможны только два случая: число $\pi n(\nu - k/n) + \pi/4 + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}$ принадлежит либо 1) полуинтервалу $[\pi/2, 3\pi/4)$, либо 2) полуинтервалу $(-\pi/4, \pi/2)$.

В случае 1) имеем

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right]\right| > \sin\frac{3\pi}{4} = C_3 \geqslant \frac{C_3}{n}. \tag{38}$$

В случае 2), учитывая неравенство (28), получаем

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right|. \tag{39}$$

Теперь на основании неравенств (26), (32) и (34) оценим правую часть неравенства (39):

$$\frac{2}{\pi}\left|\pi n\left(\nu-\frac{k}{n}\right)+\nu\pi n a_n+\gamma_{nn}\right| \geqslant 2n\left|\nu-\frac{k}{n}\right|-2\nu n a_n-\frac{2}{\pi}\gamma_{nn} > \frac{2\delta}{n}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)n}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}} >$$

$$> \frac{2\delta}{n}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)n}-\frac{pq}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(2\delta-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\right)=\frac{C_4}{n}. \tag{40}$$

Из оценки (40) следует, что нам достаточно показать положительность постоянной C_4. Для этого из неравенства (34) выразим число δ через ν. Не теряя общности, будем предполагать, что $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$. Так как ν является квадратично иррациональным числом, то оно является корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами

$$(sp)^2x^2-r^2(p^2+q^2)=(ps)^2(x-\nu)(x+\nu). \tag{41}$$

На основании результатов из монографии [9, с. 65–66], где получена формула для вычисления δ через коэффициенты многочлена (41), имеем

$$\delta=\frac{1}{ps}\frac{1}{r\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{r^2(p^2+q^2)+1}}=\frac{1}{ps}\left(\sqrt{r^2(p^2+q^2)+1}-r\sqrt{p^2+q^2}\right)=$$

$$=\frac{r}{ps}\sqrt{p^2+q^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1\right)=\nu\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1\right), \tag{42}$$

при этом из оценки (32) следует, что

$$\frac{3}{8}\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}<\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1<\frac{1}{2}\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}. \tag{43}$$

Тогда с учётом соотношений (42) и (43) постоянная C_4 будет больше нуля, если имеет место неравенство

$$\frac{3\nu}{8r^2(p^2+q^2)}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{2\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{2\pi\sqrt{p^2+q^2}}>0,$$

или, равносильно,

$$\frac{3}{8r^2(p^2+q^2)}-\frac{(\mu pq)^2}{2\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{2\pi\nu\sqrt{p^2+q^2}}>0.$$

Последнее неравенство равносильно условию (20). Теперь из равенства (33) на основании оценок (38)–(40) вытекает, что

$$|\delta_{nn}(\widetilde{\alpha})|=\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\frac{C_4}{n}>\lambda_{nn}\frac{C_4}{n}=\frac{\pi C_4}{q}\widetilde{\lambda}_{nn}>\frac{\pi C_4}{q}=C_5>0. \tag{44}$$

Тогда из неравенств (29), (30) и (44) следует справедливость оценки (21) при всех $n>n_0$, где $n_0=\max\{n_i: 1\leqslant i\leqslant 5\}$, $C_0=\min\{C_i\ 1\leqslant i\leqslant 5\}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Отметим, что если $m\geqslant n$, то для рационального p/q такого, что $p/q\leqslant 1$, аналогично получаем оценку

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})|\geqslant C_0$$

при всех $m>m_0$ и любом фиксированном n. В этом случае в качестве числа $\widetilde{\alpha}$ берётся отношение α/p.

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1, то при всех $n>n_0$, $n\geqslant m$ справедливы оценки*

$$|u_{mn}(t)|\leqslant C_6 n|\psi_{mn}|,\quad |u'_{mn}(t)|\leqslant C_7n^2|\psi_{mn}|,\quad \text{где}\quad -\alpha\leqslant t\leqslant\beta; \tag{45}$$

$$|u''_{mn}(t)|\leqslant C_8n^3|\psi_{mn}|,\quad \text{где}\quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0. \tag{46}$$

Справедливость оценок (45), (46) непосредственно следует из формулы (12) на основании оценки (21).

В силу замечания 1 имеют место оценки, аналогичные оценкам (45), (46), где только n_0 надо заменить на m_0 и считать, что $m \geqslant n$.

Для обоснования равномерной сходимости ряда (18) и его производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и производных второго порядка соответственно на замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ воспользуемся следующим утверждением из теории двойных рядов [13, с. 368–369]. Рассмотрим двойной ряд $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, где $a_{mn} \geqslant 0$, и повторные ряды $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$. Если один из этих рядов сходится, то остальные сходятся и имеют одну и ту же сумму.

Теперь формально почленным дифференцированием ряда (18) составим ряды

$$u_{xx}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mnxx}(x,y) = -\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} m^2 u_{mn}(t)v_{mn}(x,y),$$

$$u_{yy}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mnyy}(x,y) = -\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} n^2 u_{mn}(t)v_{mn}(x,y),$$

$$u_{tt}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \quad t \leqslant 0,$$

которые при $p = q$ для точек $(x,y,t) \in \overline{Q}$ мажорируются числовым рядом

$$C_9\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>n_0\\ n\geqslant m}} n^3|\psi_{mn}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m>m_0\\ m>n}} m^3|\psi_{mn}|\Bigg].$$

Для обоснования сходимости этой суммы нам достаточно исследовать на сходимость следующие ряды:

$$C_{10}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>n_0\\ n\geqslant m}} n^3|\psi_{mn}| \quad \text{и} \quad C_{11}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m>m_0\\ m>n}} m^3|\psi_{mn}|. \tag{47}$$

Лемма 3. *Пусть* $\psi(x,y) \in C^5(\overline{D})$ *и* $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi''_{xx}(p,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant q$, $\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant p$. *Тогда справедливы представления*

$$\psi_{mn} = \frac{p}{m\pi}\left(\frac{q}{n\pi}\right)^4 \psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{q}{n\pi}\left(\frac{p}{m\pi}\right)^4 \psi_{mn}^{(4,1)}, \tag{48}$$

где

$$\psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{2}{\sqrt{pq}}\iint\limits_D \psi_{xyyyy}\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy, \quad \psi_{mn}^{(4,1)} = \frac{2}{\sqrt{pq}}\iint\limits_D \psi_{xxxxy}\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

при этом следующий ряд сходится:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leqslant \iint\limits_D \left(\frac{\partial^5\psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right)^2 dx\,dy, \tag{49}$$

здесь $i = 1$ *и* $j = 4$ *или* $i = 4$ *и* $j = 1$.

Доказательство. Чтобы получить представления (48), достаточно проинтегрировать по частям пять раз в формуле (13) с учётом условий данной леммы. Сходимость указанного ряда следует из неравенства Бесселя, которое имеет место для кратных рядов Фурье [14, с. 333], т.е. неравенство (49) является неравенством Бесселя для производной пятого порядка функции $\psi(x,y)$. Лемма доказана.

На основании этой леммы ряды (47) соответственно мажорируются сходящимися рядами

$$C_{12}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>n_0\\ n\geqslant m}}\frac{1}{nm}|\psi_{mn}^{(1,4)}| \quad \text{и} \quad C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m>m_0\\ m>n}}\frac{1}{nm}|\psi_{mn}^{(4,1)}|.$$

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 1 при некоторых $n=l=n_1,n_2,\ldots,n_k$, где $1\leqslant n_1<n_2<\ldots$ $\ldots<n_k\leqslant n_0$, n_i, $i=\overline{1,k}$, и k – заданные натуральные числа, $\delta_{ml}(\widetilde{\alpha})=0$, то для разрешимости задачи (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\psi_{ml}=0, \quad l=n_1,n_2,\ldots,n_k. \tag{50}$$

В этом случае решение задачи (2)–(6) задаётся рядом

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\biggl(\sum_{n=1}^{n_1-1}+\ldots+\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k-1}+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\biggr)u_{mn}(t)v_{mn}(x,y)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l}u_{ml}(t)v_{ml}(x,y), \tag{51}$$

где в последней сумме l принимает значения $n_1,n_2,\ldots,n_k$,

$$u_{ml}(t)=\begin{cases}C_{ml}e^{-\lambda_{ml}^2 t}, & t\geqslant 0,\\ C_{ml}(\cos(\lambda_{ml}t)-\lambda_{ml}\sin(\lambda_{ml}t)), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

C_{ml} – произвольные постоянные, при этом если в конечных суммах в правой части (51) верхний предел меньше нижнего, то эти постоянные следует считать нулями.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть постоянные $\widetilde{\alpha}$, μ, p и q удовлетворяют условиям леммы 1 и $p=q$, а функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})\neq 0$ при $n=\overline{1,n_0}$ и $m=\overline{1,m_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6) и оно определяется рядом (18); если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})=0$ при некоторых $n=n_1,n_2,\ldots,n_k\leqslant n_0$, то задача (2)–(6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (50) и решение в этом случае определяется рядом (51).*

3. Устойчивость решения относительно граничных условий. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)}=\biggl(\iint\limits_D u^2(x,y,t)\,dx\,dy\biggr)^{1/2},$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}=\max_{(x,y,t)\in\overline{Q}}|u(x,y,t)|,$$

$$\|f(x,y)\|_{W_2^l(D)}=\biggl(\iint\limits_D\sum_{i,j=0}^{l}\biggl|\frac{\partial^{(i+j)}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\biggr|\biggr)^{1/2},$$

$$\|f(x,y)\|_{C^l(\overline{D})}=\sum_{i,j=0}^{l}\max_{(x,y)\in\overline{D}}\biggl|\frac{\partial^{(i+j)}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\biggr|, \quad l\geqslant 1.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (18) задачи (2)–(6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)}\leqslant C_{13}\|\psi(x,y)\|_{W_2^1(D)} \quad \text{и} \quad \|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}\leqslant C_{14}\|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})}. \tag{52}$$

Доказательство. Так как система функций (18) ортонормирована в пространстве $L_2(D)$, то из формулы (18) на основании первой оценки в (45) имеем

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u^2_{mn}(t) = \sum_{n\geqslant m} u^2_{mn}(t) + \sum_{m>n} u^2_{mn}(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2C_6^2 \sum_{n\geqslant m} n^2\psi^2_{mn} + 2C_6^2 \sum_{m>n} m^2\psi^2_{mn}. \tag{53}$$

Вследствие представлений

$$\psi_{mn} = \frac{q}{n\pi}\psi^{(0,1)}_{mn} = \frac{p}{m\pi}\psi^{(1,0)}_{mn},$$

где

$$\psi^{(0,1)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_y(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

$$\psi^{(1,0)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_x(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

из неравенства (53) вытекает, что

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} \leqslant 2\left(\frac{C_6 q}{\pi}\right)^2 \sum_{n\geqslant m} |\psi^{(0,1)}_{mn}|^2 + 2\left(\frac{C_6 q}{\pi}\right)^2 \sum_{m>n} |\psi^{(1,0)}_{mn}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}^2\bigg[\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi^{(0,1)}_{mn}|^2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi^{(1,0)}_{mn}|^2\bigg] \leqslant C_{13}^2 \|\psi(x,y)\|^2_{W_2^1(D)}.$$

Отсюда следует справедливость первой оценки в (52).

Пусть (x,y,t) – произвольная точка из $\overline{Q}$. Тогда в силу формулы (18) на основании первой оценки в (45) имеем

$$|u(x,y,t)| \leqslant \sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}(t)| \leqslant C_6 \sum_{n\geqslant m} n|\psi_{mn}| + C_6 \sum_{m>n} m|\psi_{mn}|. \tag{54}$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\psi_{mn} = -\frac{q}{n\pi}\left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi^{(2,1)}_{mn} = -\frac{p}{m\pi}\left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi^{(1,2)}_{mn},$$

здесь

$$\psi^{(2,1)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_{xxy}(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

$$\psi^{(1,2)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_{xyy}(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy.$$

Тогда, продолжая оценку (54), имеем

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_6\left(\frac{q}{\pi}\right)^2 \frac{p}{\pi} \sum_{n\geqslant m} \frac{1}{mn} |\psi^{(1,2)}_{mn}| + C_6 \frac{q}{\pi}\left(\frac{p}{\pi}\right)^2 \sum_{m>n} \frac{1}{mn} |\psi^{(2,1)}_{mn}|.$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского получаем

$$|u(x,y,t)| \leqslant \widetilde{C}_6 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}(|\psi_{mn}^{(1,2)}| + |\psi_{mn}^{(2,1)}|) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_6\bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{mn}\Big)^2\bigg)^{1/2}\bigg[\bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty}|\psi_{mn}^{(1,2)}|^2\bigg)^{1/2} + \bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty}|\psi_{mn}^{(2,1)}|^2\bigg)^{1/2}\bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{\widetilde{C}}_6\|\psi(x,y)\|_{W_2^3(D)} \leqslant C_{14}\|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})},$$

где $\widetilde{C}_6$ и $\widetilde{\widetilde{C}}_6$ – положительные постоянные, зависящие только от p, q и α. Из последнего неравенства уже непосредственно следует вторая оценка в (52).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60016.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М., Бжихталов Х.Г.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамаджанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
3. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью I. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
4. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. II. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1379–1386.
5. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
6. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 656–662.
7. *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175–1181.
8. *Сабитов К.Б.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.
9. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. М., 2016.
10. *Сабитов К.Б.* Начально-краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде // Всерос. науч. семинар “Неклассические уравнения математической физики”, посвящ. 65-летию проф. В.Н. Врагова. Якутск, 2010. С. 79–81.
11. *Ладыженская О.А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленинградск. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. 1965. Т. 19. № 4. С. 38–46.
12. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М., 1978.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М., 2003.
14. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М., 1987.

Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета,
Стерлитамакский филиал Института стратегических
исследований Республики Башкортостан

Поступила в редакцию 31.12.2019 г.
После доработки 07.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1081–1090

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

ОБОБЩЁННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ОБЛАСТЯХ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2021 г. И. Б. Тымчишин, Д. А. Номировский

Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются обобщёнными функциями, описывающая процесс тепло- и массопереноса в областях с тонкими включениями. Доказано, что оператор задачи является непрерывным и инъективным, а также установлена теорема о существовании и единственности обобщённого решения.

DOI: 10.31857/S0374064121080094

Введение. При построении математических моделей процессов тепло- и/или массопереноса в неоднородных средах зачастую возникает необходимость учитывать инородные включения, входящие в рассматриваемую область. Такие включения, расположенные внутри области или на её границе, могут представлять собой тонкие слои краски, оксиды, огнеупорные покрытия, газовые зазоры, разнообразные плёнки и мембраны, разломы и трещины и т.п. При моделировании указанных процессов размером включений, как правило, пренебрегают. Вместо них накладывают так называемые условия сопряжения, учитывающие физические свойства прослойки таким образом, чтобы полученная математическая модель адекватно описывала физический процесс. В результате получают некоторую краевую задачу, обычно в некоторой неодносвязной области. Именно в такой постановке традиционно изучается задача переноса в неоднородных средах, и для неё получены достаточно обширные результаты (см., например, работы [1–12] и представленную в них библиографию). Например, в работах [5–8] разработан метод свёртывания разложений Фурье, позволяющий по известным решениям классических краевых задач строить решения краевых задач с условиями сопряжения.

Для моделирования процессов тепло- и массопереноса в областях с инородными включениями В.Ф. Демченко предложил альтернативный подход [13; 14, гл. II]. Вместо одного уравнения второго порядка, описывающего динамику процесса, рассматривают систему дифференциальных уравнений первого порядка в естественных переменных. В роли “новых” переменных выступают компоненты вектора потока переносимой субстанции. При этом удалённую прослойку (разрез) возвращают в область протекания процесса, а влияние включений, выраженных условиями сопряжения, учитывают при помощи коэффициентов уравнений [13–18].

Такой подход имеет ряд преимуществ перед традиционным. Например, полученные уравнения системы имеют простую физическую интерпретацию: они отражают основные физические законы, описывающие исследуемый процесс. Одно из уравнений (скалярное) выражает закон движения субстанции, второе (векторное) – феноменологический закон её переноса по тому или иному механизму. Наличие нескольких уравнений системы даёт больше свободы для проверки необходимых свойств исследуемых операторов по сравнению с традиционной постановкой. Этот подход, по своей сути, подобен так называемому смешанному методу конечных элементов [19]. Кроме того, при таком способе моделирования область протекания процесса становится односвязной, что часто является существенным преимуществом на этапе численного расчёта модели. Характерной негативной особенностью этого подхода является наличие обобщённых функций в коэффициентах уравнений. В статье [20], основываясь на идее В.Ф. Демченко, построена математическая модель процессов переноса для параболических систем с различными условиями сопряжения, в частности идеального контакта, неидеального контакта, сосредоточенного собственного источника, а также исследована связь полученной модели с классической и слабой постановками задачи.

Целью данной работы является исследование свойств (непрерывности и инъективности) построенного в работе [20] оператора, а также доказательство теоремы о существовании и единственности решения. Эти утверждения обобщают результаты статьи [16].

1. Основные множества, пространства и обозначения. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ – ограниченная односвязная область с регулярной границей $\partial\Omega$, разбитая достаточно гладкой гиперповерхностью Ω_0 на две односвязные области Ω_+ и Ω_- с регулярными границами. Таким образом, множество Ω можно представить в виде дизъюнктного объединения $\Omega=\Omega_+\bigcup\Omega_0\bigcup\Omega_-$, где $\overline{\Omega}_0=\overline{\Omega}_+\bigcap\overline{\Omega}_-$, а $\overline{\Omega}_+$, $\overline{\Omega}_-$ и $\overline{\Omega}_0$ – замыкания в $\mathbb{R}^m$ соответственно множеств Ω_+, Ω_- и Ω_0. Обозначим $Q_+=(0,T)\times\Omega_+$, $Q_-=(0,T)\times\Omega_-$, $Q_0=(0,T)\times\Omega_0$.

Через $C^k(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-)$, где $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, будем обозначать множество функций $u(t,\vec{\xi})\in C^k(Q_+\bigcup Q_-)$, допускающих продолжение с сохранением гладкости из множеств Q_+ и Q_- в $\overline{Q}_+$ и $\overline{Q}_-$ соответственно. Аналогично определим множество функций $C^k(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$.

Пусть $K=(k_{ij})$ – симметричная $m\times m$-матрица, элементами которой являются функции $k_{ij}\in C^2(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$ и для которой выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m k_{ij}(\vec{\xi})\lambda_i\lambda_j\geqslant C_K\sum_{i=1}^m\lambda_i^2,\quad \lambda_i\in\mathbb{R},\quad \vec{\xi}\in\Omega_+\bigcup\Omega_-,$$

где $C_K>0$ – постоянная, не зависящая от $\vec{\xi}$.

Будем изучать параболические операторы L и L^+ следующего вида:

$$Lu=u_t+hu-\sum_{i,j=1}^m(k_{ij}u_{\xi_j})_{\xi_i}+\sum_{i=1}^m(v_iu)_{\xi_i},$$

$$L^+q=-q_t+hq-\sum_{i,j=1}^m(k_{ij}q_{\xi_j})_{\xi_i}-\sum_{i=1}^m v_iq_{\xi_i},$$

где $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$, $(t,\vec{\xi})\in Q_+\bigcup Q_-$, $h\in C^0(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$, $h\geqslant0$, $v_i\in C^1(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$. Обозначим i-ю координату вектора $K^{-1}\vec{v}$ через $\bar{k}_i$.

Считаем, что операторы L и L^+ определены на множествах $D(L)$ и $D(L^+)$ функций класса $C^2(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-)$, удовлетворяющих соответственно краевым условиям

$$u|_{t=0}=0,\quad u|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega}=0, \tag{1}$$

$$q|_{t=T}=0,\quad q|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Пусть $\bar{D}(L)$ и $\bar{D}(L^+)$ – множества функций из ортогональных дополнений множеств $\ker L$ и $\ker L^+$ до $C^2(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-)$ относительно скалярного произведения пространства $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, удовлетворяющих соответственно условиям (1) и (2).

Определим следующие пространства: W – пополнение множества $D(L)$, а H – множества $D(L^+)$ соответственно по нормам

$$\|u\|_W^2=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}u_t^2+\sum_{i=1}^m u_{\xi_i}^2\,dQ,\quad \|q\|_H^2=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}q^2+\sum_{i=1}^m q_{\xi_i}^2\,dQ.$$

Кроме того, пусть $\bar{W}$ и $\bar{H}$ – пополнения соответственно множеств $\bar{D}(L)$ и $\bar{D}(L^+)$ по норме

$$\|u\|_{\bar{W}}^2=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}u_t^2+\sum_{i,j=1}^m u_{\xi_i\xi_j}^2\,dQ.$$

Для функции $\varphi \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ введём следующие обозначения:

$$\varphi^+(t, \vec{\xi}_0) = \lim_{\substack{\vec{\xi}\to\vec{\xi}_0 \\ \vec{\xi}\in\Omega_+}} \varphi(t, \vec{\xi}), \quad \varphi^-(t, \vec{\xi}_0) = \lim_{\substack{\vec{\xi}\to\vec{\xi}_0 \\ \vec{\xi}\in\Omega_-}} \varphi(t, \vec{\xi}),$$

$$[\varphi](t, \vec{\xi}_0) = \varphi^+(t, \vec{\xi}_0) - \varphi^-(t, \vec{\xi}_0), \quad (t, \vec{\xi}_0) \in Q_0.$$

Такие же обозначения будем использовать и для других функций, имеющих корректно определённые следы на Q_0.

Через $L_2^m(Q, Q_0^\pm)$ будем обозначать пополнение множества $(C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ по норме

$$\|\vec{\omega}\|^2_{L_2^m(Q,Q_0^\pm)} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} \sum_{i=1}^m \omega_i^2\, dQ + \int\limits_{Q_0} ((\vec{\omega}, \vec{n})^+)^2 + ((\vec{\omega}, \vec{n})^-)^2\, dQ_0.$$

Здесь и далее через $\vec{n}$ обозначается вектор нормали к Ω_0, внешний по отношению к области Ω_-.

Для изучения задачи в постановке В.Ф. Демченко определим следующие произведения:

$$X = W \times L_2^m(Q, Q_0^\pm), \quad Y = H \times L_2^m(Q, Q_0^\pm),$$

$$\bar{X} = \bar{W} \times L_2^m(Q, Q_0^\pm), \quad \bar{Y} = \bar{H} \times L_2^m(Q, Q_0^\pm).$$

Заметим, что имеют место вложения $\bar{X} \subset X$, $\bar{Y} \subset Y$.

Через W^* и H^* обозначим соответственно негативные пространства к W и H относительно пространства $L_2(Q_+ \bigcup Q_-)$. Аналогичным образом введём негативное пространство $(L_2^m(Q, Q_0^\pm))^*$ относительно $L_2^m(Q, Q_0^\pm)$. Это означает, что сопряжённые пространства X^* и Y^* равны $W^* \times (L_2^m(Q, Q_0^\pm))^*$ и $H^* \times (L_2^m(Q, Q_0^\pm))^*$ соответственно.

Значение функционала l, принадлежащего некоторому негативному пространству, например H^*, на элементе v из соответствующего позитивного пространства H будем обозначать $\langle l, v\rangle_H$.

2. Оператор задачи. Рассмотрим параболическое уравнение $Lu = f(t, \vec{\xi})$, описывающее процесс переноса в областях Ω_+ и Ω_-, где $(t, \vec{\xi}) \in Q_+ \bigcup Q_-$. Представим его в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + hu + \operatorname{div} \vec{\omega} = f, \tag{3}$$

$$\vec{\omega} = -K \operatorname{grad} u + \vec{v}u, \tag{4}$$

где неизвестными переменными являются функция u и вектор потока $\vec{\omega}$.

Функция u удовлетворяет краевым условиям (1) и следующим условиям сопряжения на Q_0:

$$[u] + a_1(\xi)(\vec{\omega}, \vec{n})^+ + a_2(\xi)(\vec{\omega}, \vec{n})^- = f_a(t, \xi), \tag{5}$$

$$[(\vec{\omega}, \vec{n})] + b_1(\xi)u^+ + b_2(\xi)u^- = f_b(t, \xi), \tag{6}$$

где $(t, \xi) \in Q_0$, $a_i, b_i \in C(\overline{\Omega}_0)$. Такие условия обобщают многие классические однородные и неоднородные условия сопряжения, отвечающие различным механизмам переноса через однослойное или многослойное включения, например, идеального контакта $([u] = 0, [(\vec{\omega}, \vec{n})] = 0)$, неидеального контакта $([u] + a(\vec{\omega}, \vec{n})^\pm = 0,\ [(\vec{\omega}, \vec{n})] = 0)$, неидеального контакта через трёхслойное включение $([u] + a_1(\vec{\omega}, \vec{n})^+ + a_2(\vec{\omega}, \vec{n})^- = 0,\ [(\vec{\omega}, \vec{n})] = f_b)$, сосредоточенного собственного источника $([u] = 0, [(\vec{\omega}, \vec{n})] = \alpha u^\pm)$, сосредоточенного внешнего источника $([u] = 0, [(\vec{\omega}, \vec{n})] = f_b)$ и т.п. Отметим, что условия сопряжения (5) и (6) описывают не все важные случаи контактов сред. Например, в работе [5] рассматриваются условия сопряжения, содержащие вторую производную по пространственной переменной.

Следуя работе [20], рассмотрим задачу (3) и (4) с условиями (1), (5) и (6) в обобщённой постановке
$$\mathcal{L}x = F, \quad \mathcal{L} : X \to Y^*,$$
где $x = (u, \vec{\omega}) \in X$, $F = (F_1, \vec{F_2}) \in Y^*$. Сам оператор $\mathcal{L}$ задаётся символической матрицей
$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{N} & \mathcal{D}iv \\ \mathcal{G}rad & \mathcal{M} \end{bmatrix}, \tag{7}$$
где $\mathcal{N} : W \to H^*$, $\mathcal{D}iv : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to H^*$, $\mathcal{G}rad : W \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$, $\mathcal{M} : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to$ $\to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ – линейные операторы, которые для функций $u \in D(L)$, $\vec{\omega} \in (C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$, $q \in D(L^+)$, $\vec{\eta} \in (C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ и некоторых $p_i, s_i \in C(\overline{Q}_0)$ действуют следующим образом:
$$\langle \mathcal{N}u, q\rangle_H = \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} u_t q + huq\, dQ + \int\limits_{Q_0} (b_1 u^+ + b_2 u^-)(p_1 q^+ + p_2 q^-)\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{D}iv\, \vec{\omega}, q\rangle_H = -\int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} \sum_{i=1}^m \omega_i q_{\xi_i}\, dQ + \int\limits_{Q_0} [(\vec{\omega}, \vec{n})](p_1 q^+ + p_2 q^-) - (\vec{\omega}, \vec{n})^+ q^+ + (\vec{\omega}, \vec{n})^- q^-\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{G}rad\, u, \vec{\eta}\rangle_{L_2^m(Q, Q_0^{\pm})} = \sum_{i=1}^m \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} u_{\xi_i}\eta_i - \bar{k}_i u \eta_i\, dQ + \int\limits_{Q_0} [u](s_1(\vec{\eta}, \vec{n})^+ + s_2(\vec{\eta}, \vec{n})^-)\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{M}\vec{\omega}, \vec{\eta}\rangle_{L_2^m(Q, Q_0^{\pm})} = \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} k_{ij}^{-1}\omega_j \eta_i\, dQ +$$
$$+ \int\limits_{Q_0} (a_1(\vec{\omega}, \vec{n})^+ + a_2(\vec{\omega}, \vec{n})^-)(s_1(\vec{\eta}, \vec{n})^+ + s_2(\vec{\eta}, \vec{n})^-)\, dQ_0.$$

Из определений операторов матрицы (7) следует, что в рассматриваемой постановке коэффициенты дифференциальных уравнений являются суммами регулярных функций, определённых в областях Q_+ и Q_-, и обобщённых дельта-функций Дирака, сосредоточенных на одной или на другой стороне гиперповерхности Q_0. Регулярная часть коэффициентов порождается коэффициентами уравнений (3) и (4), а сингулярная – коэффициентами условий сопряжения (5) и (6).

Применяя неравенство Гёльдера, несложно показать непрерывность операторов матрицы (7).

Лемма 1. *Линейные операторы* $\mathcal{N} : W \to H^*$ *и* $\mathcal{G}rad : W \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ *непрерывны на* $D(L)$.

Лемма 2. *Линейные операторы* $\mathcal{D}iv : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to H^*$ *и* $\mathcal{M} : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ *непрерывны на* $(C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$.

Продолжим операторы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{G}rad$ по непрерывности на всё пространство W, сохраняя для них прежнее обозначение. Аналогично поступим и с операторами $\mathcal{D}iv$ и $\mathcal{M}$ – продолжим их по непрерывности на всё пространство $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$. Таким образом, можно считать, что оператор $\mathcal{L} : X \to Y^*$ определён на всём пространстве X и является непрерывным на X.

Введём линейный и непрерывный оператор $\mathcal{L}^+ : Y \to X^*$ таким образом, чтобы для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнялось равенство $\langle \mathcal{L}x, y\rangle_Y = \langle \mathcal{L}^+ y, x\rangle_X$. Определим также сужение $\bar{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ на множество $\bar{X}$ и сужение $\bar{\mathcal{L}}^+$ оператора $\mathcal{L}^+$ на множество $\bar{Y}$. Отметим, что операторы $\bar{\mathcal{L}} : \bar{X} \to Y^*$ и $\bar{\mathcal{L}}^+ : \bar{Y} \to X^*$ непрерывны.

3. Инъективность оператора. Для произвольных векторов (вектор-функций) u и v через $\langle u, v\rangle$ будем обозначать их скалярное произведение. Кроме того, будем использовать обозначение $\nabla q = (q_{\xi_i})_{i=\overline{1,m}}$ для вектора производных функции q.

Положим

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \langle\vec{\omega}, \nabla q\rangle + \langle\nabla u, \vec{\eta}\rangle - \langle K^{-1}\vec{v}u, \vec{\eta}\rangle + \langle K^{-1}\vec{\omega}, \vec{\eta}\rangle\, dQ.$$

В зависимости от контекста линейный оператор $\mathcal{I}$ будем рассматривать как действующий в парах пространств $\mathcal{I} : X \to Y^*$ или в парах пространств $\mathcal{I} : \bar{X} \to Y^*$. Заметим, что в обоих случаях он является ограниченным и всюду определённым.

Далее будем использовать следующее обозначение: $\zeta(u, \vec{\omega}) = \nabla u - K^{-1}\vec{v}u + K^{-1}\vec{\omega}$.

Лемма 3. *Для произвольной постоянной $C > 0$ и для всех $x = (u, \vec{\omega}) \in X$ таких, что $\zeta(x)$ – ненулевой элемент в $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$, существует $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Лемму 3 легко доказать, положив $q \equiv 0$, $\vec{\eta} = C_x\zeta(x)\rho$, где $\rho : Q_+\bigcup Q_- \to \mathbb{R}$ – расстояние до $\overline{Q}_0$, а $C_x > 0$ – достаточно большая постоянная, зависящая от $x \in X$. Несложно убедиться, что введённый таким образом элемент $y = (q, \vec{\eta}\,)$ принадлежит пространству Y. Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$, $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$.

Лемма 4. *Для произвольной постоянной $C > 0$ и для всех $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ таких, что $\zeta(x)$ – нулевой элемент в $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$, существует $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \sum_{i=1}^m v_i u q_{\xi_i} + \sum_{i,j=1}^m k_{ij} u_{\xi_j} q_{\xi_i}\, dQ. \tag{9}$$

Обозначим $\sum_{j=1}^m k_{ij}u_{\xi_j}$ через k_i, а вектор, элементами которого являются k_i, – через $\vec{k}$. Тогда равенство (9) можно записать следующим образом:

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq + \sum_{i=1}^m ((v_i u)_{\xi_i} - (k_i)_{\xi_i})q\, dQ + \int\limits_{Q_0} [(\vec{v}uq, \vec{n})] - [(\vec{k}q, \vec{n})]\, dQ_0. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда Lu – ненулевой элемент в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$. Положим $q_0 = C_x Lu \in L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, где C_x – некоторая положительная постоянная. Тогда существует такое $q_\varepsilon \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, что $q_\varepsilon^+ = q_\varepsilon^- = 0$ и $\|q_0 - q_\varepsilon\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Выберем $q_{\varepsilon\delta} \in C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\|q_{\varepsilon\delta} - q_\varepsilon\|_C < \delta$, где $\|\cdot\|_C$ – равномерная норма. Заменив в равенстве (10) y на $(q_{\varepsilon\delta}, \vec{0}\,) \in Y$, получим

$$\mathcal{I}_x(y) = C_x\|Lu\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + O(\varepsilon, \delta),$$

где $O(\varepsilon, \delta)$ – такая функция, что $O(\varepsilon, \delta) \to 0$ при $\varepsilon, \delta \to 0$. Таким образом, выбирая достаточно большое C_x, а потом достаточно малые ε и δ, получим сколь угодно большое $\mathcal{I}_x(y)$. Следовательно, существует такая функция q, что выполняется неравенство (8).

Если Lu – нулевой элемент в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, то $u \equiv 0$. Это следует из определения пространств $\bar{W}$ и $\bar{D}(L)$. В этом случае, разумеется, неравенство (8) также остаётся верным.

Из лемм 3 и 4 вытекает справедливость следующих двух утверждений.

Лемма 5. *Существует такая постоянная $C > 0$, что для каждого $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ найдётся $y \in Y$, при котором справедливо неравенство $\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}$.*

Лемма 6. *Если* $\vec{v} \equiv 0$, *то для произвольной постоянной* $C > 0$ *и для всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in X$ *таких, что* $\zeta(x) \equiv 0$, *существует* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, *при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}.$$

Последнюю лемму легко доказать, положив $\vec{\eta} = 0$, $q = -C\int_T^t u(\tau, \vec{\xi})d\tau$ и оценив каждое из слагаемых, входящих в $\mathcal{I}_x(y)$, по отдельности.

Из лемм 3 и 6 следует

Лемма 7. *Если* $\vec{v} \equiv 0$, *то существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для каждого* $x = (u, \vec{\omega}) \in X$ *найдётся* $y \in Y$, *при котором имеет место неравенство* $\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{A} : \bar{X} \to Y^*$ – *такой оператор, что для всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *и* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$ *выполняется равенство*

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y = \mathcal{I}_x(y) + \varphi(x, y), \tag{11}$$

где $\varphi : \bar{X} \times Y \to \mathbb{R}$ – *непрерывная функция, для которой при всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *и* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, $q^- = q^+ = 0$, $\vec{\eta}^{\,-} = \vec{\eta}^{\,+} = \vec{0}$, *верно равенство* $\varphi(x, y) = 0$. *Тогда существует такая постоянная* $C > 0$, *что для любого* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *найдётся* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, *при котором имеет место неравенство*

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое достаточно малое число. Определим множество

$$Q_0^\varepsilon = \{(t, \vec{\xi}\,) \in Q_+ \textstyle\bigcup Q_- : \rho(\vec{\xi}, \Omega_0) < \varepsilon\},$$

где $\rho(\vec{\xi}, \Omega_0)$ – расстояние от точки $\vec{\xi}$ до поверхности Ω_0 в $\mathbb{R}^m$.

Зафиксируем $x \in \bar{X}$ и выберем для него $y_0 = (q_0, \vec{\eta}_0) \in Y$, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathcal{I}_x(y)|_{y=y_0} \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}, \tag{13}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от x и y. Согласно лемме 5 такая постоянная существует. Из неравенства (13) следует, что

$$\langle \bar{A}x, y_0\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)} + \varphi(x, y_0).$$

Возьмём функцию $q_1 \in \bar{D}(L^+)$ такую, чтобы для неё выполнялось неравенство

$$\langle \bar{A}x, y_1\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)} + \varphi(x, y_0) + O(\|q_0 - q_1\|_{\bar{W}}),$$

где $y_1 = (q_1, \vec{\eta}_0)$. Заметим, что вследствие плотности множества $\bar{D}(L^+)$ в $\bar{H}$ значение величины $O(\|q_0 - q_1\|_{\bar{W}})$ можно сделать сколь угодно малым.

Положим

$$q_\varepsilon(t, \vec{\xi}\,) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} q_1(t, \vec{\xi}\,)\rho(\vec{\xi}, \Omega_0), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \in Q_0^\varepsilon, \\ q_1(t, \vec{\xi}\,), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \notin Q_0^\varepsilon, \end{cases}$$

$$\vec{\eta}_\varepsilon(t, \vec{\xi}\,) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} \vec{\eta}_0(t, \vec{\xi}\,)\rho(\vec{\xi}, \Omega_0), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \in Q_0^\varepsilon, \\ \vec{\eta}_0(t, \vec{\xi}\,), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \notin Q_0^\varepsilon. \end{cases} \tag{14}$$

Функция q_ε является непрерывной, но не обязательно дважды непрерывно дифференцируемой. Для корректности выкладок найдём такую функцию $q_{\varepsilon\delta} \in C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, чтобы выполнялось неравенство $\|q_\varepsilon - q_{\varepsilon\delta}\|_C < \varepsilon_\delta$, где $\|\cdot\|_C$ – равномерная норма на $C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$.

Таким образом, $y_\varepsilon = (q_{\varepsilon\delta}, \vec{\eta}_\varepsilon)$, очевидно, принадлежит пространству Y.

Из условий теоремы следует, что функция φ является непрерывной на $\bar{X}\times Y$, причём $\varphi\equiv 0$, когда $q^-=q^+=0$, $\vec{\eta}^{\,-}=\vec{\eta}^{\,+}=\vec{0}$. Поэтому можно выбрать такое $\varepsilon_\delta>0$, что

$$\varphi(x,y_{\varepsilon\delta})\geqslant -\frac{C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что имеет место равенство $\mathcal{I}_x(y_\varepsilon)=\mathcal{I}_x(y_0)+O(\varepsilon_\delta+\varepsilon+\|q_0-q_1\|_{\bar{W}})$. Из неравенства (13) вытекает существование таких $\varepsilon_\delta>0$, $\varepsilon>0$ и $q_1\in\bar{D}(L^+)$, что

$$\mathcal{I}_x(y_\varepsilon)\geqslant\frac{3C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)},\quad O(\varepsilon_\delta+\varepsilon)\geqslant-\frac{C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{16}$$

В силу неравенств (15) и (16) и равенства (11) получаем

$$\langle\bar{A}x,y\rangle_Y|_{y=y_\varepsilon}\geqslant\frac{C}{2}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Таким образом, найдётся такая постоянная $C>0$, что для произвольного $x\in\bar{X}$ существует $y\in Y$, при котором верно неравенство (12). Теорема доказана.

Следствие 1. *Существует такая постоянная $C>0$, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in\bar{X}$ найдётся $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором справедливо неравенство*

$$\langle\bar{\mathcal{L}}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для сопряжённого оператора $\bar{\mathcal{L}}^+$.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $A:X\to Y^*$ – такой оператор, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ и $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$ выполняется равенство*

$$\langle Ax,y\rangle_Y=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}u_tq+huq-\langle\vec{\omega},\nabla q\rangle+\langle\nabla u,\vec{\eta}\rangle+\langle K^{-1}\vec{\omega},\vec{\eta}\rangle\,dQ+\varphi(x,y), \tag{17}$$

где $\varphi:X\times Y\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, для которой при всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ и $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, $q^-=q^+=0$, $\vec{\eta}^{\,-}=\vec{\eta}^{\,+}=\vec{0}$, верно равенство $\varphi(x,y)=0$. Тогда существует такая постоянная $C>0$, что для любого $x=(u,\vec{\omega})\in X$ найдётся $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором имеет место неравенство

$$\langle Ax,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Следствие 2. *Пусть $\vec{v}\equiv 0$, тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ существует $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором*

$$\langle\mathcal{L}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Аналогичное утверждение выполняется и для сопряжённого оператора $\mathcal{L}^+$.

Теорема 3. *Оператор $\bar{A}:\bar{X}\to Y^*$, заданный равенством (11), инъективен.*

Доказательство. Пусть $x=(u,\vec{\omega})\in\ker\bar{A}$. Из теоремы 1 следует существование такого $y\in Y$, что

$$0=\langle\bar{A}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Отсюда сразу получаем, что $u=0$ в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, а следовательно, и в $\bar{W}$. Поэтому $x=(0,\vec{\omega})$. Таким образом, имеет место равенство

$$\langle\bar{A}x,y\rangle_Y=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}-\langle\vec{\omega},\nabla q\rangle+\langle K^{-1}\vec{\omega},\vec{\eta}\rangle\,dQ+\varphi(x,y)\Big|_{u=0}. \tag{18}$$

Пусть $\vec{\eta}_0 = K\vec{\omega}$. Рассмотрим функцию $\vec{\eta}^*$, определённую соотношением (14). Заменив в равенстве (18) y на $(0,\vec{\eta}^*)$, получим

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y\Big|_{y=(0,\vec{\eta}^*)} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} \langle\vec{\omega},\vec{\omega}\rangle\, dQ + O(\varepsilon).$$

Поскольку $\langle \bar{A}x, y\rangle_Y = 0$, заключаем, что $\vec{\omega}=\vec{0}$. Отсюда $x=0$.

Таким образом, оператор $\bar{A}:\bar{X}\to Y^*$ является инъективным.

Следствие 3. *Оператор* $\bar{\mathcal{L}}:\bar{X}\to Y^*$ *инъективен.*

Рассуждая аналогично, можно доказать инъективность оператора $\bar{\mathcal{L}}^+:\bar{Y}\to X^*$, а также справедливость следующей теоремы и следствия из неё.

Теорема 4. *Оператор* $A: X\to Y^*$, *заданный равенством (17), инъективен.*

Следствие 4. *Пусть* $\vec{v}\equiv 0$, *тогда операторы* $\mathcal{L}:X\to Y^*$ *и* $\mathcal{L}^+:Y\to X^*$ *инъективны.*

4. Свойства параболической модели в областях с тонкими включениями. Рассмотрим следующие множества:

$$D_t^1 = \{u\in C^1(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-) : u|_{t=0}=0,\quad [u]=0\},$$

$$D_\xi^1 = \{u\in C^1(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-) : u|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega}=0,\quad [u]=0\}.$$

Пусть W_1 и H_1 – пополнения множеств $D_t^1\bigcap D_\xi^1$ и D_ξ^1 по нормам $\|\cdot\|_W$ и $\|\cdot\|_H$ соответственно. Заметим, что $W_1\subset W$ и $H_1\subset H$.

Кроме того, пусть $X_1 = W_1\times L_2^m(Q,Q_0^\pm)$ и $Y_1 = H_1\times L_2^m(Q,Q_0^\pm)$. Введём негативные относительно $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$ пространства X_1^* и Y_1^*.

При условии $\vec{v}\equiv 0$ рассмотрим сужение $\mathcal{L}_1: X_1\to Y_1^*$ оператора $\mathcal{L}$ на X_1, а также сужение $\mathcal{L}_1^+: Y_1\to X_1^*$ оператора $\mathcal{L}_1^+$ на Y_1. Понятно, что доказанные свойства непрерывности и инъективности операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+$ переносятся и на операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^+$.

Теорема 5. *Если выполняются условия*

$$p_1(t,\vec{\xi}) + p_2(t,\vec{\xi}) \equiv B_p(\vec{\xi}),\qquad B_p(b_1+b_2)\geqslant 0, \tag{19}$$

где B_p *– не зависящая от* t *функция, то существует такая постоянная* $C>0$, *что при всех* $y\in Y_1$ *выполняется неравенство* $\|\mathcal{L}_1^+ y\|_{X_1^*}\geqslant C\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $y=(q,\vec{\eta})$, где $q\in D_\xi^1$, $\vec{\eta}\in$ $\in (C^1(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-))^m$.

Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим множество $Q_0^\varepsilon = \{(t,\vec{\xi})\in Q_+\bigcup Q_- : \rho(\vec{\xi},\Omega_0)<\varepsilon\}$. Положим $x=(u,\vec{\omega})\in X_1$, где

$$u = \int\limits_0^t q(\tau,\vec{\xi})d\tau,\quad \vec{\omega} = \begin{cases} -K\nabla u\rho(\vec{\xi},\Omega_0), & \text{если}\quad (t,\vec{\xi})\in Q_0^\varepsilon,\\ -K\nabla u, & \text{если}\quad (t,\vec{\xi})\notin Q_0^\varepsilon.\end{cases}$$

В силу равенств $\vec{v}\equiv 0$, $[u]\equiv 0$ и $[q]\equiv 0$ имеем

$$\langle \mathcal{L}_1^+ y, x\rangle_{X_1} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \langle\vec{\omega},\nabla q\rangle + \langle\nabla u,\vec{\eta}\rangle + \langle K^{-1}\vec{\omega},\vec{\eta}\rangle\, dQ +$$

$$+\int\limits_{Q_0}(b_1+b_2)(p_1+p_2)u_+q_+\, dQ_0.$$

Отсюда при достаточно малом ε вытекает оценка

$$\langle \mathcal{L}_1^+ y, x\rangle_{X_1^*\times X_1}\geqslant C\|y\|_1^2, \tag{20}$$

в которой $\|y\|_1$ – полунорма элемента y, заданная равенством

$$\|y\|_1^2 = \|q\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\Omega_+\bigcup\Omega_-} \biggl(\int\limits_0^t q_{\xi_i}(\tau,\vec{\xi})d\tau\biggr)^2 d\Omega.$$

Покажем, что существует такая постоянная $C>0$, при которой верно неравенство $\|x\|^2_{X_1}\leqslant$ $\leqslant C\|y\|_1^2$. Действительно,

$$\|x\|^2_{X_1} = \|u_t\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \|u_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \|\vec{\omega}\|^2_{L_2^m(Q,Q_0^\pm)} \leqslant$$

$$\leqslant C\biggl(\|u_t\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \|u_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant C\biggl(\|q\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\Omega_+\bigcup\Omega_-} \biggl(\int\limits_0^t q_{\xi_i}(\tau,\vec{\xi})d\tau\biggr)^2 d\Omega\biggr) = C\|y\|_1^2.$$

Применяя неравенство Шварца к левой части оценки (20), получаем $\|\mathcal{L}_1^+y\|_{X_1^*}\|x\|_{X_1}\geqslant$ $\geqslant C\|y\|_1^2$, а значит,

$$\|\mathcal{L}_1^+y\|_{X_1^*} \geqslant C\|y\|_1 \geqslant C\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Теорема 6. *Если выполняются условия (19), то для произвольной правой части* $F\in$ $\in S_1=\{(f,\vec{0}\,): f\in L_2(Q_+\bigcup Q_-)\}$ *существует единственный элемент* $x\in X_1$, *для которого в пространстве* Y_1^* *выполняется равенство* $\mathcal{L}_1x=F$.

Доказательство. Опираясь на установленные выше свойства оператора $\mathcal{L}_1$, теорему можно доказать, используя общую связь между корректной разрешимостью сопряжённого оператора и разрешимостью всюду прямого оператора [21, гл. III]. Таким методом доказаны теоремы единственной разрешимости параболических уравнений с некоторыми условиями сопряжения, например, в работах [3, 17].

Пусть $F\in S_1$. В силу теоремы 5 имеем

$$|\langle F,y\rangle_{Y_1}| = |(f,q)_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} \leqslant C\|\mathcal{L}_1^+y\|_{X_1^*}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{L}_1^+$ инъективен, то на $\operatorname{Im}\mathcal{L}_1^+\subset X_1^*$ можно определить линейный ограниченный функционал $l(w)=\langle F,y\rangle_{Y_1}$, $w=\mathcal{L}_1^+y$. По теореме Хана–Банаха расширим функционал l на X_1^* с сохранением линейности и непрерывности. Тогда из теоремы Рисса–Шварца следует существование такого элемента $x\in X_1$, при котором $l(w)=\langle w,x\rangle_{X_1}$. Таким образом, для всех $y\in Y$ выполняется равенство

$$\langle F,y\rangle_{Y_1} = l(\mathcal{L}_1^+y) = \langle \mathcal{L}_1^+y,x\rangle_{X_1} = \langle \mathcal{L}_1x,y\rangle_{Y_1},$$

откуда $\mathcal{L}_1x=F$ в Y_1^*. Единственность решения следует из инъективности оператора $\mathcal{L}_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York, 1980.
2. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев, 1998.
3. *Семенов В.В.* Разрешимость параболической задачи сопряжения с условием обобщенного собственного сосредоточенного источника // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6. С. 836–843.

4. *Номировский Д.А.* Приближенный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 6. С. 1045–1057.
5. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
6. *Холодовский С.Е.* Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1209–1213.
7. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
8. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.
9. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев, 2009.
10. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с трехслойным пленочным включением // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1697–1702.
11. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа в шаре, ограниченном многослойной плёнкой // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 919–926.
12. *Kholodovskii S.E.* Solution of boundary value problems in cylinders with two-layer film inclusions // J. of Math. Sci. 2018. V. 230. № 1. P. 55–59.
13. *Ляшко И.И., Демченко В.Ф.* Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах. Киев, 1987. – (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 87–14).
14. *Ляшко И.И., Демченко В.Ф., Демченко Л.И.* Численное моделирование процессов тепломассопереноса. Киев, 1988.
15. *Ляшко С.И., Номировский Д.А.* Обобщенная разрешимость и оптимизация параболических систем в областях с тонкими слабопроницаемыми включениями // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 5. С. 131–142.
16. *Номировский Д.А.* Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399.
17. *Nomirovskii D.* Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // J. of Differ. Equat. 2007. V. 233. № 1. P. 1–21.
18. *Demchenko V.F., Pavlyk V.O., Dilthey U. et al.* Problems of heat, mass and charge transfer with discontinuous solutions // European J. of Appl. Math. 2011. V. 22. № 4. P. 365–380.
19. *Mercier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P-A.* Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods // Math. of Comput. 1981. V. 36. № 154. P. 427–453.
20. *Номировский Д.А., Востриков А.И.* Обобщенные постановки и свойства моделей процессов переноса в областях с разрезами // Кибернетика и системный анализ. 2016. Т. 52. № 6. С. 114–126.
21. Функциональный анализ. / Под. общ. ред. С.Г. Крейна. М., 1972.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступила в редакцию 04.07.2019 г.
После доработки 26.03.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1091–1097

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. Р. С. Хайруллин

Для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0$ с параметром $\alpha\leqslant -1/2$, заданного в смешанной области – прямоугольнике $[0,1]\times[-\beta,\gamma]$, где $\beta>0$ и $\gamma>0$, исследуется задача А.А. Дезина, в которой на вертикальных сторонах прямоугольника задано условие периодичности, на верхней стороне – значения искомой функции, на особой линии определены условия склеивания и задано нелокальное условие, связывающее значения искомой функции на особой линии со значениями нормальной производной этой функции на нижней стороне. Решение задачи построено в виде ряда. Найдены достаточные условия на заданные функции и параметры β и γ, обеспечивающие существование решения. Установлен критерий единственности.

DOI: 10.31857/S0374064121080100

1. Постановка задачи. В настоящее время много внимания уделяется исследованию разрешимости различных краевых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях (см., например, [1–9]). Основным методом их решения является некоторый аналог метода Фурье, приспособленный к уравнениям смешанного типа. Такой подход к изучению указанных задач предложен К.Б. Сабитовым в работе [1]. Автором в работах [10–13] этот подход распространён на уравнения с сильным вырождением, а именно, были изучены задача Дирихле и задача с условием периодичности.

В данной статье рассматривается нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0,\quad \alpha\leqslant -1/2, \tag{1}$$

в смешанной области $\Omega=\{(x,y): 0<x<1,\ -\beta<y<\gamma\}$, где $\beta>0$ и $\gamma>0$, при этом существенно применяются результаты предыдущих работ автора. В частности, здесь используются общая схема этих работ, а также некоторые утверждения, полученные в них, или методы их доказательства.

Пусть m и n – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $1<2\alpha+m\leqslant 2$, $-1/2<\alpha+n=\alpha_0\leqslant 1/2$. Очевидно, что $m=2n+2$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и $m=2n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Обозначим $\Omega_1=\Omega\bigcap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\bigcap\{y<0\}$.

Задача Дезина. В области Ω найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1°) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega_1\bigcup\Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1\bigcup\Omega_2$;

2°) существуют пределы из областей $((x,y)\in\Omega_i,\ i=1,2)$

$$\tau_i(x)=\lim_{y\to 0}u(x,y),\quad \nu_i(x)=\lim_{y\to 0}|y|^\alpha(u(x,y)-A_\alpha(x,y,\tau_i))_y,$$

где

$$A_\alpha(x,y,\tau_i)=\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!}y^s\quad\text{при}\quad \alpha\neq -n,$$

$$A_\alpha(x,y,\tau_i)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!}y^s-\frac{\tau_i^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\quad\text{при}\quad \alpha=-n,$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа, $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_s = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)$, и на особой линии выполняются условия склеивания

$$\tau_1(x) = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$

3°) имеют место равенства

$$\tau^{(s)}(0) = \tau^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, 2[m/2]-1}, \tag{4}$$

где через $\tau(x)$ обозначены обе части равенства (2);

4°) выполняется условие периодичности

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\beta \leqslant y \leqslant \gamma; \tag{5}$$

5°) функция $u(x,y)$ удовлетворяет краевому

$$u(x,\gamma) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$

и нелокальному

$$u_y(x,-\beta) - \mu u(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$

условиям, где $\varphi_i(x)$, $i=1,2$, – заданные функции, μ – заданный вещественный параметр.

Будем предполагать, что для заданных функций $\varphi_i(x)$, $i=1,2$, справедливы следующие условия.

Условие 1. Функция $\varphi_1(x)$ принадлежит классу $C^2[0,1]\bigcap C^3(0,1)$ и выполняются равенства

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1), \quad \varphi_1''(0) = \varphi_1''(1).$$

Условие 2. Функция $\varphi_2(x)$ принадлежит классу $C^{[m/2]}[0,1]\bigcap C^{[m/2]+1}(0,1)$ и выполняются равенства

$$\varphi_2^{(s)}(0) = \varphi_2^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, [m/2]}.$$

2. Построение частных решений. Сформулированная задача решается с помощью аналога метода Фурье. Поэтому необходимы частные решения уравнения (1), имеющие вид

$$u(x,y) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y)$$

и удовлетворяющие условиям (2)–(5).

Обозначим

$$\mathbf{X}_0(x) = 1; \quad \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{X}_{k,1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi kx)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{X}_{k,2}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi kx) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Тогда обозначим

$$\mathbf{Y}_{k,1}(y) = |y|^{-\alpha_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^{s+n+1}}{(2-\alpha)_s s!}, \tag{8}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^s}{(\alpha)_s s!} \quad \text{при} \quad \alpha \neq -n, \tag{9}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\lambda_k^s y^s}{(-n)_s s!} + \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^s}{s!(s-n-1)!} \times$$
$$\times [\ln|y| - \psi(1+s) - \psi(s-n)] \quad \text{при} \quad \alpha = -n, \tag{10}$$

где $\psi(z)$ – пси-функция.

Имеет место доказанная в работе [13]

Теорема 1. *Функции*

$$u_k(x,y)=\mathbf{X}_k(x)(c_k\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k\mathbf{Y}_{k,2}(y)),\quad k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},$$

где c_k *и* d_k *– произвольные постоянные, представляют собой решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)–(5).*

3. Теорема единственности. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи Дезина и $y\in(-\beta,0)\bigcup(0,\gamma)$. Рассмотрим интегралы $(k\in\mathbb{N})$

$$w_0(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\,dx,\quad v_k(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx,\quad w_k(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx. \tag{11}$$

По аналогии со статьёй [13] несложно показать, что функции (11) удовлетворяют уравнению

$$y\mathbf{Y}''+\alpha\mathbf{Y}'-\lambda\mathbf{Y}=0$$

при соответствующих значениях параметра λ, условиям склеивания

$$\mathbf{Y}(0+)=\mathbf{Y}(0-),$$

соотношению

$$\lim_{y\to0+}y^\alpha\left(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\lambda^s y^s}{(\alpha)_s s!}\right)_y=(-1)^n\lim_{y\to0-}(-y)^\alpha\left(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\lambda^s y^s}{(\alpha)_s s!}\right)_y$$

при $\alpha\ne-n$ и соотношению

$$\lim_{y\to0+}y^\alpha\left(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda^s y^s}{(\alpha)_s s!}+\frac{(-1)^n\lambda^{n+1}}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\right)\right)_y=$$

$$=(-1)^n\lim_{y\to0-}(-y)^\alpha\left(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda^s y^s}{(\alpha)_s s!}+\frac{(-1)^n\lambda^{n+1}}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\right)\right)_y$$

при $\alpha=-n$.

Поэтому эти функции можно представить следующим образом:

$$w_0(y)=c_0\mathbf{Y}_{0,1}(y)+d_0\mathbf{Y}_{0,2}(y), \tag{12}$$

$$v_k(y)=c_k^1\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k^1\mathbf{Y}_{k,2}(y),\quad w_k(y)=c_k^2\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k^2\mathbf{Y}_{k,2}(y), \tag{13}$$

где c_0, d_0, c_k^1, d_k^1, c_k^2, d_k^2 – некоторые числа.

Перейдём в интегралах (11) к пределу при $y\to\gamma$, тогда с учётом условия (6) получим

$$w_0(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\,dx=\varphi_{1,0}, \tag{14}$$

$$v_k(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx=\varphi_{1,k}^1,\quad w_k(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx=\varphi_{1,k}^2. \tag{15}$$

Затем воспользуемся условием (7), из которого следует, что

$$w_0'(-\beta) - \mu w_0(0) = \int\limits_0^1 \varphi_2(x)\,dx = \varphi_{2,0}, \tag{16}$$

$$v_k'(-\beta) - \mu v_k(0) = \int\limits_0^1 \varphi_2(x)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx = \varphi_{2,k}^1, \tag{17}$$

$$w_k'(-\beta) - \mu w_k(0) = \int\limits_0^1 \varphi_2(x)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx = \varphi_{2,k}^2. \tag{18}$$

Вследствие представлений (12), (13) с учётом равенств (14)–(18) получаем линейные алгебраические системы относительно неизвестных коэффициентов c_0, d_0 и c_k^p, d_k^p $(p = 1, 2,$ $k \in \mathbb{N})$. В силу того, что

$$\mathbf{Y}_{k,1}(0) = 0, \quad \mathbf{Y}_{k,2}(0) = 1,$$

эти системы можно записать в следующем виде:

$$c_0\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma) + d_0\mathbf{Y}_{0,2}(\gamma) = \varphi_{1,0}, \quad c_0\mathbf{Y}_{0,1}'(-\beta) + d_0(\mathbf{Y}_{0,2}'(-\beta) - \mu) = \varphi_{2,0}; \tag{19}$$

$$c_k^p\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma) + d_k^p\mathbf{Y}_{k,2}(\gamma) = \varphi_{1,k}^p, \quad c_k^p\mathbf{Y}_{k,1}'(-\beta) + d_k^p(\mathbf{Y}_{k,2}'(-\beta) - \mu) = \varphi_{2,k}^p. \tag{20}$$

Обозначим $(k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\})$

$$\Delta_k^j(y_1, y_2) = \mathbf{Y}_{k,1}^{(j)}(y_1)(\mathbf{Y}_{k,2}'(y_2) - \mu) - \mathbf{Y}_{k,2}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,1}'(y_2).$$

Однозначная разрешимость систем (19) и (20) зависит от их определителей $\Delta_k^0(\gamma, -\beta)$. Выясним, могут ли эти определители обращаться в нуль. Сначала рассмотрим случай $k = 0$. Из соотношений (8)–(10) при $\lambda_0 = 0$ получим $\mathbf{Y}_{0,1}(y) = |y|^{1-\alpha}$, $\mathbf{Y}_{0,2}(y) = 1$. Поэтому

$$\Delta_k^0(\gamma, -\beta) = -\mu\gamma^{1-\alpha} + (1-\alpha)\beta^{-\alpha}.$$

Эта величина обращается в нуль только при $\mu = (1-\alpha)\beta^{-\alpha}\gamma^{\alpha-1}$.

Пусть $k > 0$. Используя свойства функции Бесселя (см., например, формулы (9.1.10), (9.1.11), (9.1.30), (9.2.1), (9.2.2), (9.6.2), (9.6.10), (9.6.11), (9.6.28), (9.7.1), (9.7.2) в [14]), получаем, что при $k \to +\infty$ нули функции $\Delta_k^0(\gamma, -\beta)$ стремятся в случае чётных значений n – к нулям функции $\sin(4\pi k\sqrt{\beta} - \pi/4)$, а в случае нечётных значений n к нулям функции $\cos(4\pi k\sqrt{\beta} - \pi/4)$, т.е. при определённых соотношениях между β и k определитель $\Delta_k^0(\gamma, -\beta)$ может обратиться в нуль.

Лемма 1. *Если все* $\Delta_k^0(\gamma, -\beta)$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *отличны от нуля, то задача Дезина не может иметь более одного решения.*

Лемма 2. *Если для некоторого* $l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ *выполняется равенство* $\Delta_l^0(\gamma, -\beta) = 0$, *то однородная задача Дезина имеет нетривиальные решения*

$$u(x, y) = (\mathbf{Y}_{l,1}(y)(\mathbf{Y}_{l,2}'(-\beta) - \mu) - \mathbf{Y}_{l,2}(y)\mathbf{Y}_{l,1}'(-\beta))\sin(2\pi lx)$$

и

$$u(x, y) = (\mathbf{Y}_{l,1}(y)(\mathbf{Y}_{l,2}'(-\beta) - \mu) - \mathbf{Y}_{l,2}(y)\mathbf{Y}_{l,1}'(-\beta))\cos(2\pi lx) \quad \text{при} \quad l > 0;$$

$$u(x, y) = (\mathbf{Y}_{0,1}(y)(\mathbf{Y}_{0,2}'(-\beta) - \mu) - \mathbf{Y}_{0,2}(y)\mathbf{Y}_{0,1}'(-\beta)) \quad \text{при} \quad l = 0.$$

Из лемм 1 и 2 вытекает необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дезина.

Теорема 2. *Для того чтобы задача Дезина имела не более одного решения необходимо и достаточно, чтобы все определители* $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *были отличны от нуля.*

4. Существование решения. Приступим к доказательству существования решения сформулированной задачи. Через E обозначим множество таких $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, при которых выполняется равенство
$$\Delta_k^0(\gamma,-\beta)=0.$$

Если $0\ne k\in E$, то для разрешимости систем (20) $(p=1,2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства
$$\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)\varphi_{2,k}^p-\mathbf{Y}'_{k,1}(-\beta)\varphi_{1,k}^p=0; \tag{21}$$
в этом случае решения систем (20) задаются формулой
$$c_k^p=\frac{\varphi_{1,k}^p-d_k^p\mathbf{Y}_{k,2}(\gamma)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)},$$
где d_k^p – произвольные числа. Соответствующие решения уравнения (1) примут вид
$$u_k^p(x,y)=\mathbf{X}_k^p(x)\bigg(\varphi_{1,k}^p\frac{\mathbf{Y}_{k,1}(y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}+d_k^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}\bigg), \tag{22}$$
здесь и ниже
$$\overline{\Delta_k^j}(y_1,y_2)=\mathbf{Y}_{k,1}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,2}(y_2)-\mathbf{Y}_{k,2}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,1}(y_2).$$
В представлении (22) учтён тот факт, что $\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)\ne0$, который следует из определения (8).

Пусть $0\ne k\notin E$. В этом случае системы (20) имеют единственные решения. Найдём их и запишем решения уравнения (1):
$$u_k^p(x,y)=\mathbf{X}_k^p(x)\bigg(\varphi_{1,k}^p\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\bigg). \tag{23}$$

В случае $0\in E$ необходимое и достаточное условие разрешимости системы (19) имеет вид
$$\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)\varphi_{2,0}-\mathbf{Y}'_{0,1}(-\beta)\varphi_{1,0}=0, \tag{24}$$
а решения уравнения (1) задаются формулой
$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\mathbf{Y}_{0,1}(y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}+d_0\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}, \tag{25}$$
где d_0 – произвольная постоянная.

Если же $0\notin E$, то уравнение (1) имеет единственное решение
$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\Delta_0^0(y,-\beta)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,0}\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}. \tag{26}$$

Теперь с учётом равенств (22), (23) и (25), (26) запишем формальное решение исходной задачи в виде
$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,y), \tag{27}$$
где
$$u_k(x,y)=\sum_{p=1}^{2}\mathbf{X}_k^p(x)\bigg(\varphi_{1,k}^p\frac{\mathbf{Y}_{k,1}(y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}+d_k^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}\bigg)\quad\text{при}\quad 0\ne k\in E, \tag{28}$$

$$u_k(x,y)=\sum_{p=1}^{2}\mathbf{X}_k^p(x)\left(\varphi_{1,k}^p\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\right)\quad \text{при}\quad 0\neq k\notin E, \tag{29}$$

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\mathbf{Y}_{0,1}(y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}+d_0\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}\quad \text{при}\quad 0\in E, \tag{30}$$

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\Delta_0^0(y,-\beta)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,0}\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}\quad \text{при}\quad 0\notin E, \tag{31}$$

где d_k^1, d_k^2, d_0 – произвольные постоянные.

При обосновании существования решения используются следующие утверждения.

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют такие постоянные l_1 и k_1, зависящие от ε, что для всех $y_1,y_2\in[-\beta,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,\gamma]$ и $k\geqslant k_1$ справедлива оценка $(j=0,1,2)$*

$$|\overline{\Delta_k^j}(y_1,y_2)|\leqslant l_1k^{j-1}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют такие постоянные l_2 и k_2, зависящие от ε, что для всех $y\in[-\beta,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,\gamma]$ и $k\geqslant k_2$ справедлива оценка $(j=0,1,2)$*

$$|\Delta_k^j(y,-\beta)|\leqslant l_2k^je^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Лемма 5. *Если число $8\sqrt{\beta}$ является рациональным и в его представлении $8\sqrt{\beta}=p/q$ в виде несократимой дроби $(p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1)$ число q нечётно, то существуют такие значения l_3 и k_3, что для всех $k\geqslant k_3$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^0(\gamma,-\beta)|\geqslant l_3e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Следствие. *При условиях леммы 5 множество E не может быть бесконечным.*

Лемма 6. *Для всех $y\in[-\beta,\gamma]$ справедливы оценки*

$$|\overline{\Delta}_k^j(y,\gamma)|\leqslant l_4k^{j-1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}},$$

где l_4 – постоянная, не зависящая от значения y.

Лемма 7. *Для всех $y\in[-\beta,\gamma]$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^j(y,-\beta)|\leqslant l_5k^{j+1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}},$$

где l_5 – постоянная, не зависящая от значения y.

Отметим, что лемма 7 в отличие от леммы 4 позволяет исследовать сходимость соответствующих рядов в окрестности особой линии.

Справедлива

Теорема 3. *Если число $8\sqrt{\beta}$ является рациональным и в его представлении $8\sqrt{\beta}=p/q$ в виде несократимой дроби $(p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1)$ число q нечётно, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям 1 и 2, то задача Дезина имеет решение и его можно записать в виде ряда (27), где функции $u_k(x,y)$ определяются формулами (28)–(31), а d_0, d_k^1, d_k^2 – произвольные постоянные, причём если $E\neq\varnothing$, то для всех $k\in E$ дополнительно должны выполняться условия разрешимости (21) или (24) соответственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.
2. *Рахманова Л.Х.* Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 36–40.

3. *Егорова И.П.* Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2009. № 8 (74). С. 15–27.
4. *Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2009. № 11. С. 43–52.
5. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1199–1203.
6. *Сафина Р.М.* Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1354–1366.
7. *Сабитов К.Б., Новикова В.А.* Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Математика. 2016. № 6. С. 61–72.
8. *Гущина В.А.* Критерий единственности решения задачи Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-науч. сер. 2016. № 3–4. С. 24–31.
9. *Сабитов К.Б., Гущина В.А.* Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Математика. 2017. № 3. С. 37–50.
10. *Хайруллин Р.С.* К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 528–534.
11. *Хайруллин Р.С.* О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 684–692.
12. *Хайруллин Р.С.* К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 565–568.
13. *Хайруллин Р.С.* Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с сильным вырождением // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1139–1151.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 28.04.2019 г.
После доработки 05.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1098–1103

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.56:532.5

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2021 г. **М. А. Артемов**

Изучается задача оптимизации для линеаризованных эволюционных уравнений модели Олдройда движения вязкоупругой среды. Уравнения заданы в трёхмерной ограниченной области. В качестве управляющей функции используется распределение скоростей в начальный момент времени. Функционал цели является финальным. Доказано существование единственного оптимального управления при заданном множестве допустимых управлений. Выведено вариационное неравенство, характеризующее оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0374064121080112

Введение. В последние годы активно ведутся исследования систем уравнений, описывающих нестационарные и установившиеся течения вязкоупругих сред олдройдовского типа (см., например, [1–4] и многочисленные ссылки, приведённые в этих работах). Модель Олдройда относится к классу дифференциальных моделей неньютоновской гидродинамики и успешно применяется при описании динамики растворов и расплавов полимеров, смазок, гелей, крови и ряда других встречающихся на практике сред.

Как известно, во многих задачах гидродинамики особую роль играют оптимальные решения, т.е. решения, на которых достигается минимум/максимум целевого функционала при заданных ограничениях на выбор управляющих параметров [5]. Большое внимание уделяется поиску оптимальных решений в моделях неньютоновских сред, а также изучению управляемости соответствующих уравнений. В [6] установлено существование оптимального слабого решения в модели граничного управления течением вязкоупругой жидкости при условии малости норм функций, описывающих исходные данные. Статья [7] посвящена доказательству аппроксимационно-конечномерной управляемости для линеаризованных (т.е. без учёта действия сил инерции) уравнений движения жидкости Олдройда в ограниченных двумерных и трёхмерных областях с гладкой границей. В [8] изучается оптимальное граничное управление в модели протекания дилатантной жидкости через сосуд с открытыми отверстиями. В работе [9] представлен качественный анализ задачи оптимизации для уравнений, моделирующих установившееся ползущее неизотермическое течение.

Несмотря на значительное число работ в данном направлении, случай стартового управления течением до сих пор не изучен. В настоящей статье рассматривается экстремальная задача стартового управления для линеаризованных уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды типа Олдройда в ограниченной трёхмерной пространственной области $\mathcal{O}$ на промежутке времени $[0,T]$:

$$\mathsf{Re}\,\partial_t \boldsymbol{v} - (1-a)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\mathbb{E} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p = \boldsymbol{f}, \quad \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\mathcal{O}, \quad t\in(0,T), \tag{1}$$

$$\mathsf{We}\,\partial_t\mathbb{E} + \mathbb{E} = 2a\mathbb{D}(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathcal{O}, \quad t\in(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathcal{O}, \quad t\in(0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{u}\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}, \quad \mathbb{E}|_{t=0} = \mathbb{E}_0, \tag{4}$$

$$\lambda\|\boldsymbol{v}|_{t=T} - \boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} \to \min. \tag{5}$$

Здесь Re (число Рейнольдса), We (число Вайсенберга) и a – константы, причём $\mathsf{Re}>0$, $\mathsf{We}>0$ и $a\in(0,1)$, t – время, ∂_t – частная производная по t, $\partial\mathcal{O}$ – граница области $\mathcal{O}$,

$\boldsymbol{v}\colon \overline{\mathcal{O}}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ – векторная функция скорости, $\overline{\mathcal{O}}$ – замыкание области $\mathcal{O}$, $\mathbb{E}\colon \overline{\mathcal{O}}\times[0,T]\to$ $\to \mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$ – упругая часть тензора напряжений, $\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$ – пространство симметрических 3×3-матриц, $p\colon \overline{\mathcal{O}}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ – функция давления, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v})$ – тензор скоростей деформаций, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):=$ $:=(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}+\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})/2$, где $\nabla_{\boldsymbol{x}}$ – градиент по пространственным переменным, $\boldsymbol{f}\colon \overline{\mathcal{O}}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ – внешняя сила, $\boldsymbol{b}\colon \overline{\mathcal{O}}\to\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{E}_0\colon \overline{\mathcal{O}}\to\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$ – заданные векторные функции, $\boldsymbol{u}\colon \overline{\mathcal{O}}\to\mathbb{R}^3$ – управляющая векторная функция, $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ – множество допустимых управлений, λ – скалярный параметр, $\lambda\in(0,1)$.

Главной целью данной работы является обоснование однозначной разрешимости экстремальной задачи (1)–(5) в классе непрерывных по t обобщённых (слабых) решений.

1. Строгая формулировка задачи. В этом пункте приводятся обозначения, исходные предположения и строгая формулировка экстремальной задачи (1)–(5).

Пусть N – натуральное число и $q,r,s\geqslant 1$. Условимся использовать стандартные обозначения для пространства Лебега $\boldsymbol{L}_q(\Omega,\mathbb{R}^N)$ и пространства Соболева $\boldsymbol{W}^r_s(\Omega,\mathbb{R}^N)$ векторных функций, заданных на области Ω и со значениями в $\mathbb{R}^N$. Ради упрощения скалярное произведение в $\boldsymbol{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^N)$ будем обозначать с помощью круглых скобок, т.е. $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}):=(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{L}_2}$.

Запись $\partial\Omega\in C^{0,1}$ означает, что граница области Ω удовлетворяет условию Липшица.

Следуя [10, гл. I], введём обозначения: $\mathcal{V}:=\{\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{C}^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R}^3):\operatorname{supp}\boldsymbol{\varphi}\subset\mathcal{O},\ \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\varphi}=0\}$, $\boldsymbol{H}$ – замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{R}^3)$ и $\boldsymbol{V}$ – замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $\boldsymbol{W}^1_2(\mathcal{O},\mathbb{R}^3)$. Снабдим пространство $\boldsymbol{V}$ скалярным произведением $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{V}}:=(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi},\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\psi})$ и соответствующей нормой $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{V}}:=(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi},\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi})^{1/2}$. Всюду далее будем предполагать, что выполняются условия:

(i) $\partial\mathcal{O}\in C^{0,1}$, $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{H}$, $\mathbb{E}_0\in\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})$, $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{R}^3))$;

(ii) множество допустимых управлений $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ выпукло, замкнуто и ограничено в $\boldsymbol{H}$.

Определение 1. *Допустимой тройкой* для задачи (1)–(5) назовём тройку $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\mathbb{E})$ такую, что

$$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V})\bigcap\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H}),\quad \mathbb{E}\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})),$$

$$\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}},\quad \boldsymbol{v}(\,\cdot\,,0)=\boldsymbol{u},\quad \mathbb{E}(\,\cdot\,,0)=\mathbb{E}_0$$

и для любых векторных функций $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{V}$ и $\mathbb{F}\in\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})$ выполнены следующие равенства:

$$\mathsf{Re}\,\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi})+(1-a)(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v},\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varphi})+(\mathbb{E},\mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi}))=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}),\quad \mathsf{We}\,\frac{d}{dt}(\mathbb{E},\mathbb{F})+(\mathbb{E},\mathbb{F})=2a(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}),\mathbb{F}),\tag{6}$$

в которых оператор d/dt обозначает обобщённую производную по t.

Совокупность всех допустимых троек обозначим через $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$.

В п. 2 будет показано, что для любого управления $\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ существует единственная тройка $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\mathbb{E})$, принадлежащая множеству $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$. Это означает, что задача (1)–(4) задаёт непрерывную динамическую систему и позволяет корректно определить семейство эволюционных операторов $\{\boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$, которое вводит

Определение 2. *Эволюционный оператор* $\boldsymbol{S}_t$ – это отображение из множества $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ в $\boldsymbol{H}$, заданное по правилу $\boldsymbol{u}\xrightarrow{\boldsymbol{S}_t}\boldsymbol{v}(\,\cdot\,,t)$, где векторная функция $\boldsymbol{v}$ – это вторая компонента тройки $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\mathbb{E})\in\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$.

Определение 3. Будем говорить, что векторная функция $\boldsymbol{u}_\star\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ является *оптимальным управлением* в задаче (1)–(5), если

$$\lambda\|\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_\star)-\boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}+(1-\lambda)\|\boldsymbol{u}_\star\|^2_{\boldsymbol{L}_2}=\inf\{\lambda\|\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}+(1-\lambda)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}:\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}\}.$$

2. Свойства допустимых троек. Установим сначала некоторые свойства допустимых троек, а именно докажем леммы 1 и 2.

Лемма 1. *Если* $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1,\mathbb{E}_1)\in\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$ *и* $(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2,\mathbb{E}_2)\in\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$, *то*

$$\max\left\{\frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{v}_1(\,\cdot\,,t)-\boldsymbol{v}_2(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2}+\frac{\mathsf{We}}{4a}\|\mathbb{E}_1(\,\cdot\,,t)-\mathbb{E}_2(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2}:t\in[0,T]\right\}\leqslant\frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.\tag{7}$$

Доказательство. Будем считать, что гильбертово пространство $\boldsymbol{H}$ и сопряжённое к нему пространство $\boldsymbol{H}^*$ отождествлены в соответствии с теоремой представления Рисса. Тогда приходим к цепочке вложений $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{H}^* \subset \boldsymbol{V}^*$. Аналогично отождествим пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\rm sym})$ и $\boldsymbol{L}^*_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\rm sym})$.

Обратим внимание на то, что выполнены включения

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V}^*), \quad \frac{d\mathbb{E}_i}{dt} \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}^*_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\rm sym})),$$

где $i = 1, 2,$ и применим лемму 1.2 из [10, гл. III, § 1] к векторным функциям $\boldsymbol{v}_i$ и $\mathbb{E}_i$. В результате получим, что для п.в. $t \in (0,T)$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = 2\left\langle \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}, \boldsymbol{w}\right\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times \boldsymbol{V}} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\|\mathbb{Q}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = 2\left\langle \frac{d\mathbb{Q}}{dt}, \mathbb{Q}\right\rangle_{\boldsymbol{L}^*_2\times \boldsymbol{L}_2}, \tag{8}$$

в которых $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ и $\mathbb{Q} := \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2$, а угловые скобки $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\boldsymbol{X}^*\times\boldsymbol{X}}$ обозначают отношение двойственности между банаховым пространством $\boldsymbol{X}$ и его сопряжённым $\boldsymbol{X}^*$.

Так как $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i, \mathbb{E}_i) \in \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\rm ad})$, $i = 1, 2,$ и оба уравнения в (6) линейны, то очевидно, что

$$\mathsf{Re}\left\langle \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}, \boldsymbol{\varphi}\right\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times \boldsymbol{V}} + (\mathbb{Q}, \mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi})) + (1-a)(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{w}, \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varphi}) = 0,$$

$$\mathsf{We}\left\langle \frac{d\mathbb{Q}}{dt}, \mathbb{F}\right\rangle_{\boldsymbol{L}^*_2\times \boldsymbol{L}_2} + (\mathbb{Q}, \mathbb{F}) = 2a(\mathbb{D}(\boldsymbol{w}), \mathbb{F}) \tag{9}$$

для любых $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}$ и $\mathbb{F} \in \boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\rm sym})$. Положим $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{w}(t)$ в первом из равенств (9) и $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(t)/(2a)$ – во втором. Сложим полученные равенства. Учитывая соотношения (8), приходим к равенству

$$\frac{\mathsf{Re}}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-a)\|\boldsymbol{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{V}} + \frac{\mathsf{We}}{4a}\frac{d}{dt}\|\mathbb{Q}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{1}{2a}\|\mathbb{Q}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = 0,$$

из которого, в частности, следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{\mathsf{We}}{4a}\|\mathbb{Q}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2}\right) \leqslant 0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до t, получаем, что

$$\frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{\mathsf{We}}{4a}\|\mathbb{Q}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{w}(\,\cdot\,,0)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{\mathsf{We}}{4a}\|\mathbb{Q}(\,\cdot\,,0)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \frac{\mathsf{Re}}{2}\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|^2_{\boldsymbol{L}_2} \tag{10}$$

для любого $t \in [0,T]$. Взяв максимум по $t \in [0,T]$ в левой части (10), приходим к требуемой оценке (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{U}_{\rm ad}$. *Тогда существует единственная пара* $(\boldsymbol{v}, \mathbb{E})$ *такая, что* $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}, \mathbb{E}) \in \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\rm ad})$.

Доказательство. Чтобы найти $\boldsymbol{v}$ и $\mathbb{E}$ сконструируем, следуя подходу [11], последовательность приближённых решений $((\boldsymbol{v}_n, \mathbb{E}_n))_{n=1}^\infty$ по методу Фаэдо–Галёркина и затем на основе оценок норм функций $\boldsymbol{v}_n$ и $\mathbb{E}_n$ осуществим предельный переход при $n \to \infty$.

Приближённые решения, соответствующие выбору $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$, будем искать в виде сумм:

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=1}^n a_{nk}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{x}), \quad \mathbb{E}_n(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=1}^n B_{nk}(t)\mathbb{F}_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{O}, \quad t \in (0,T),$$

где $a_{nk}, B_{nk}\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ – неизвестные функции, $(\boldsymbol{\varphi}_k)_{k=1}^\infty$ – полная система в $\boldsymbol{V}$, образующая ортонормированный базис в $\boldsymbol{H}$, и $(\mathbb{F}_k)_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\rm sym})$.

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ линейную задачу Коши:

$$\mathsf{Re}\,(\partial_t \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{\varphi}_k) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi}_k)) + (1-a)(\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\varphi}_k) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_k), \quad t \in (0,T), \quad k = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\mathsf{We}\,(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) = 2a(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_n), \mathbb{F}_k), \quad t \in (0,T), \quad k = \overline{1,n}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},0) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_k)\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{x}), \quad \mathbb{E}_n(\boldsymbol{x},0) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}_0, \mathbb{F}_k)\mathbb{F}_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{O}. \tag{13}$$

Выведем не зависящие от параметра n оценки решений этой задачи. Предположим, что пара $(\boldsymbol{v}_n, \mathbb{E}_n)$ удовлетворяет системе (11)–(13). Умножим обе части равенства (11) на $a_{nk}(t)$. Складывая полученные равенства при $k=\overline{1,n}$, находим, что

$$\mathsf{Re}\,(\partial_t \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_n)) + (1-a)(\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n), \quad t \in (0,T). \tag{14}$$

Затем умножим обе части равенства (12) на $B_{nk}(t)$ и просуммируем полученные равенства по $k=\overline{1,n}$:

$$\mathsf{We}\,(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) = 2a(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_n), \mathbb{E}_n), \quad t \in (0,T). \tag{15}$$

Далее, умножим обе части равенства (14) на $2a$ и сложим результат с (15); в результате получим равенство

$$2a\,\mathsf{Re}\,(\partial_t \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) + 2a(1-a)(\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) + \mathsf{We}\,(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) = 2a(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n), \quad t \in (0,T), \tag{16}$$

из которого с помощью леммы Гронуолла–Беллмана выводим оценку

$$a\,\mathsf{Re}\,\|\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{\mathsf{We}}{2}\|\mathbb{E}_n(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(a\,\mathsf{Re} \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}} \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \frac{\mathsf{We}}{2}\|\mathbb{E}_0\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + a\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2)}\right) e^{T/\mathsf{Re}}. \tag{17}$$

Так как мы считаем, что функции $\boldsymbol{f}$ и множество $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ подчиняются условиям (i) и (ii) соответственно, то из (17) следует, что совокупность норм $\{\|\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}_2}, \|\mathbb{E}_n(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}_2}\}$ равномерно ограничена относительно $n\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,T]$. В силу равенства (16) имеем также равномерную (по параметру n) ограниченность норм $\{\|\boldsymbol{v}_n\|_{\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V})}\}$. Поэтому, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), получаем следующие сходимости:

$$\boldsymbol{v}_n \xrightarrow{\text{слабо}} \boldsymbol{v} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \mathbb{E}_n \xrightarrow{\text{слабо}} \mathbb{E} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})) \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{18}$$

для некоторой пары $(\boldsymbol{v},\mathbb{E}) \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O},\mathbb{M}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}))$.

Умножим обе части равенства (11) на произвольную C^∞-гладкую функцию $\xi\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ с носителем, содержащимся в интервале $(0,T)$, и проинтегрируем по t от 0 до T. Применив интегрирование по частям к первому слагаемому из левой части полученного равенства, приходим к соотношению

$$-\,\mathsf{Re}\int_0^T (\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{\varphi}_k)\xi'\,dt + \int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi}_k))\xi\,dt + (1-a)\int_0^T (\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\varphi}_k)\xi\,dt = \int_0^T (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_k)\xi\,dt, \tag{19}$$

где символ $'$ обозначает классическую производную по t. Умножим теперь обе части равенства (12) на функцию ξ, проинтегрируем по t в пределах от 0 до T и затем применим формулу интегрирования по частям к первому слагаемому из левой части; в результате будем иметь

$$-\mathsf{We}\int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k)\xi'\,dt + \int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k)\xi\,dt = 2a\int_0^T (\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_n), \mathbb{F}_k)\xi\,dt. \tag{20}$$

Используя сходимости (18), осуществим предельный переход при $n \to \infty$ в равенствах (19) и (20). В результате приходим к соотношениям (6) с $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_k$ и $\mathbb{F} = \mathbb{F}_k$, где k – произвольное натуральное число. Более того, так как система $(\boldsymbol{\varphi}_k)_{k=1}^{\infty}$ полна в $\mathbf{V}$, а система $(\mathbb{F}_k)_{k=1}^{\infty}$ полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}})$, в полученных равенствах допустимо заменить $\boldsymbol{\varphi}_k$ и $\mathbb{F}_k$ на произвольные векторные функции $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}$ и $\mathbb{F} \in \boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}})$ соответственно. Отсюда, в частности, следует, что $d\boldsymbol{v}/dt \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{V}^*)$ и $d\mathbb{E}/dt \in \boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{L}_2^*(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}))$. Поэтому, снова применяя лемму 1.2 из [10, гл. III, § 1], получаем, что $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H})$ и $\mathbb{E} \in \boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}))$. Принимая во внимание равенства (13), нетрудно убедиться в том, что выполнены начальные условия: $\boldsymbol{v}(\,\cdot\,,0) = \boldsymbol{u}_0$ и $\mathbb{E}(\,\cdot\,,0) = \mathbb{E}_0$. Итак, установлено, что $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}, \mathbb{E}) \in \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{U}_{\mathrm{ad}})$.

Единственность допустимой тройки, удовлетворяющей условиям леммы 2, непосредственно вытекает из леммы 1.

Следствие. *Эволюционный оператор $\boldsymbol{S}_t$ определён корректно для любого $t \in [0,T]$.*

3. Главный результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *При выполнении предположений (i) и (ii) в задаче (1)–(5) существует единственное оптимальное управление. При этом векторная функция $\boldsymbol{u}_\star \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда выполнено вариационное неравенство*

$$(1-\lambda)(\boldsymbol{u}_\star, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\star) + \lambda(\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_\star) - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_\star)) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad \boldsymbol{u} \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}. \tag{21}$$

Доказательство. Введём функцию (целевой функционал)

$$\mathfrak{J}\colon \mathbf{U}_{\mathrm{ad}} \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{J}(\boldsymbol{u}) := \lambda\|\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Из леммы 1 следует, что эта функция является непрерывной. Более того, функция $\mathfrak{J}$ строго выпукла. В самом деле, пусть $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ и $\alpha \in (0,1)$. Тогда, принимая во внимание соотношение $\boldsymbol{S}_T(\alpha\boldsymbol{u}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{u}_2) = \alpha\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_1) + (1-\alpha)\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_2)$ и строгую выпуклость квадрата нормы гильбертова пространства, выводим строгое неравенство Йенсена для $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{J}(\alpha\boldsymbol{u}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{u}_2) = \lambda\|\boldsymbol{S}_T(\alpha\boldsymbol{u}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)\|\alpha\boldsymbol{u}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{u}_2\|^2_{\boldsymbol{L}_2} =$$

$$= \lambda\|\alpha(\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{b}) + (1-\alpha)(\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{b})\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)\|\alpha\boldsymbol{u}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{u}_2\|^2_{\boldsymbol{L}_2} <$$

$$< \lambda\alpha\|\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + \lambda(1-\alpha)\|\boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{b}\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)\alpha\|\boldsymbol{u}_1\|^2_{\boldsymbol{L}_2} + (1-\lambda)(1-\alpha)\|\boldsymbol{u}_2\|^2_{\boldsymbol{L}_2} =$$
$$= \alpha\mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_1) + (1-\alpha)\mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_2).$$

Поскольку функция $\mathfrak{J}$ непрерывна и выпукла, то она слабо полунепрерывна снизу.

Пусть $\gamma = \inf\{\mathfrak{J}(\boldsymbol{u})\colon\ \boldsymbol{u} \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}\}$ и $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ – минимизирующая последовательность, т.е. $\mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_k) \to \gamma$ при $k \to \infty$. Так как множество $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ ограничено в $\boldsymbol{H}$, то, не умаляя общности, можно считать, что $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому элементу $\boldsymbol{u}_\star$ в $\boldsymbol{H}$ при $k \to \infty$. Согласно условию (ii) множество $\mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ выпукло и замкнуто и, значит, слабо замкнуто в $\boldsymbol{H}$. Поэтому $\boldsymbol{u}_\star \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$. Тогда

$$\gamma \leqslant \mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_\star) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_k) = \gamma.$$

Таким образом, $\mathfrak{J}(\boldsymbol{u}_\star) = \gamma$ и, следовательно, $\boldsymbol{u}_\star$ – оптимальное управление в системе (1)–(5). Единственность оптимального управления вытекает из строгой выпуклости функции $\mathfrak{J}$.

Наконец, заметим, что $\boldsymbol{u}_\star \in \mathbf{U}_{\mathrm{ad}}$ является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда пара $(\boldsymbol{u}_\star, \boldsymbol{S}_T(\boldsymbol{u}_\star))$ совпадает с метрической проекцией пары $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$ на график эволюционного оператора $\boldsymbol{S}_T$ в декартовом произведении $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{g})_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}} := (1-\lambda)(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{g}_1)_{\boldsymbol{H}} + \lambda(\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{g}_2)_{\boldsymbol{H}},$$

где $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$ и $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$. Применяя соответствующим образом теорему 2.3 из [12, гл. I], выводим вариационное неравенство (21), завершая тем самым доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saut J.-C.* Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 3. Somerville, 2013. P. 325–393.
2. *Fang D., Zi R.* Global solutions to the Oldroyd-B model with a class of large initial data // SIAM J. Math. Anal. 2016. V. 48. P. 1054–1084.
3. *Baranovskii E.S.* Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Commun. Pure Appl. Anal. 2019. V. 18. P. 735–750.
4. *Wan R.* Some new global results to the incompressible Oldroyd-B model // Zeitschr. Angew. Math. Phys. 2019. Bd. 70. Art. 28.
5. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
6. *Кузнецов А.В.* Граничное оптимальное управление в начально-краевой задаче для модели вязкоупругой среды с полной производной // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2008. № 1. С. 232–248.
7. *Doubova A., Fernandez-Cara E.* On the control of viscoelastic Jeffreys fluids // Systems Control Lett. 2012. V. 61. P. 573–579.
8. *Барановский Е.С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
9. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Art. ID 133.
10. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
11. *Baranovskii E.S., Artemov M.A.* Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // Acta Appl. Math. 2017. V. 147. P. 197–210.
12. *Киндерлерер Д., Стампакья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М., 1982.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 13.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1104–1115

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.935.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

© 2021 г. А. С. Фурсов, Р. П. Митрев,
П. А. Крылов, Т. С. Тодоров

Рассматривается управляемая нелинейная система, замкнутая обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, представляющая собой упрощённую модель одной термомеханической установки. Получены условия на регулятор и параметры системы, гарантирующие существование в этой системе периодического режима.

DOI: 10.31857/S0374064121080124

Введение. В работе [1] рассматривалась заданная на полуоси $t \geqslant 0$ управляемая нелинейная система

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = \alpha l^{-1}E(T(t))(\Delta - y(t)) - mg,$$
$$\alpha\gamma^{-1}\dot{T}(t) + T(t) = u \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad T(0) = T_0, \tag{2}$$

замкнутая обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом (рис. 1):

$$u = u_r(y(t)) = \begin{cases} \overline{u}, & \text{если } y(t) \leqslant y_1; \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \geqslant y_2; \\ \overline{u}, & \text{если } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in [0, t]; \\ \overline{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & y(s) = y_1 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]; \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & y(s) = y_2 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]. \end{cases} \tag{3}$$

Система (1) представляет собой упрощённую модель одной термомеханической установки [2], для которой используются следующие обозначения: y – выходная переменная, характеризующая величину механической деформации материала с памятью формы [3], при этом предполагается, что $0 < y_0 < \Delta$; T – температура деформируемого материала, причём $T_0 \geqslant 0$; положительные числа m, β, k, α, l, Δ, γ являются физическими параметрами термомеханической установки; g – ускорение свободного падения; u – управление в форме обратной связи по переменной y $(u = u(y))$; E – модуль Юнга деформируемого материала (нелинейная характеристика с гистерезисом и насыщением, рис. 2).

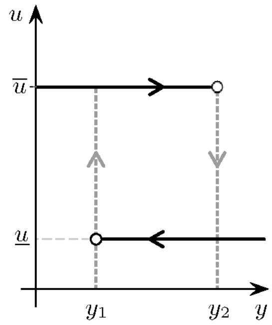

Рис. 1. Обратная связь в виде реле.

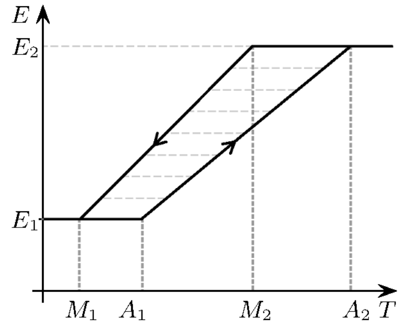

Рис. 2. Возможный вид характеристики $E(T)$ с гистерезисом.

Отображение $E(T)$ можно рассматривать как многозначное отображение $E:\overline{\mathbb{R}}_+\to\overline{\mathbb{R}}_+$

$$E(T)=\begin{cases} E_1, & \text{если } T\leqslant M_1;\\ \left[E_1,\dfrac{T-M_1}{M_2-M_1}(E_2-E_1)+E_1\right], & \text{если } \begin{cases}M_2<A_1,\\ T\in(M_1,M_2];\end{cases}\\ \left[\dfrac{T-A_1}{A_2-A_1}(E_2-E_1)+E_1,\dfrac{T-M_1}{M_2-M_1}(E_2-E_1)+E_1\right], & \text{если } \begin{cases}A_1\leqslant M_2,\\ T\in(A_1,M_2];\end{cases}\\ [E_1,E_2], & \text{если } \begin{cases}M_2<A_1,\\ T\in(M_2,A_1];\end{cases}\\ \left[\dfrac{T-A_1}{A_2-A_1}(E_2-E_1)+E_1,E_2\right], & \text{если } \begin{cases}M_2<A_1,\\ T\in(A_1,A_2];\end{cases}\\ \left[\dfrac{T-A_1}{A_2-A_1}(E_2-E_1)+E_1,E_2\right], & \text{если } \begin{cases}A_1\leqslant M_2,\\ T\in(M_2,A_2];\end{cases}\\ E_2, & \text{если } T>A_2.\end{cases}$$

Здесь A_1, A_2, M_1, M_2, E_1, E_2 – положительные константы, определяемые физическими свойствами материала с памятью формы. Далее будем считать, что они связаны следующими неравенствами:

$$0<A_1<A_2,\quad 0<M_1<M_2,\quad M_1<A_1,\quad M_2<A_2,\quad 0<E_1<E_2.$$

Отметим, что для каждой конкретной непрерывной функции $T(t)$ из отображения $E(T)$ выделяется однозначная ветвь, являющаяся непрерывной функцией, множество значений которой принадлежит отрезку $[E_1,E_2]$ (см. [1]).

Считаем, что пороговые значения y_1, y_2, характеризующие управление (3), удовлетворяют условию $0<y_1<y_2<\Delta$.

В работе [1] получены эффективно проверяемые условия на коэффициенты и начальные значения переменных состояния системы (1), (2) и на параметры регулятора (3), обеспечивающие возникновение колебательных движений [4, с. 10] в соответствующей замкнутой системе. При этом в [1] использовалось следующее определение колебательного движения (колебательного режима). Решение системы (1), (2), т.е пару $(y(t),T(t))$ функций, удовлетворяющих этой системе и начальным условиям при управлении u, задаваемом условиями (3), называем *колебательным режимом*, если найдутся такие положительные константы (параметры режима) t_1^*, t_2^*, $\underline{y}$, $\overline{y}$ $(0<t_1^*<t_2^*$ и $0<\underline{y}<\overline{y}<\Delta)$, что выполняются следующие условия:

1) найдётся момент $t\geqslant 0$, для которого $y(t)=\overline{y}$;

2) для любого момента t такого, что $y(t)=\overline{y}$, существует момент $\xi\in[t+t_1^*,t+t_2^*]$, при котором справедливо равенство $y(\xi)=\underline{y}$ и $y(\tau)\neq\underline{y}$ для всех $\tau\in(t,t+t_1^*)$;

3) для любого момента t такого, что $y(t)=\underline{y}$, существует такой момент $\xi\in[t+t_1^*,t+t_2^*]$, при котором справедливо равенство $y(\xi)=\overline{y}$ и $y(\tau)\neq\overline{y}$ для всех $\tau\in(t,t+t_1^*)$.

Анализируя результаты работы [1], можно утверждать, что проблема определения условий на параметры замкнутой системы (1)–(3), гарантирующих существование колебательных режимов, оказалась весьма непростой. Однако с прикладной точки зрения более актуальной является задача определения условий существования периодического режима для указанной замкнутой системы.

Основываясь на результатах работы [1], в настоящей статье получены достаточные условия существования периодического режима в замкнутой системе (1)–(3).

1. Постановка задачи. Запишем систему (1), (2) в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t),\\
&\dot{x}_2(t) = -\Big(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E(x_3(t))\Big)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E(x_3(t)),\\
&\dot{x}_3(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u),\\
&x_1(0) = y_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = T_0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = T$, а $0 < y_0 < \Delta$, $T_0 \geqslant 0$.

Замкнём систему (4) регулятором (3) и при $t \geqslant 0$ рассмотрим соответствующую замкнутую систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t),\\
&\dot{x}_2(t) = -\Big(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E(x_3(t))\Big)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E(x_3(t)),\\
&\dot{x}_3(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u_r(x_1(t))),\\
&x_1(0) = y_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = T_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $0 < y_0 < \Delta$, $T_0 \geqslant 0$, для которой будем предполагать, что $y_0 < y_1$, $T_0 < M_1$. Запишем замкнутую систему (5) в векторной форме

$$\dot{x}(t) = P(x(t), u_r), \quad x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{т}}.$$

Тогда если выход реле принимает значение $\overline{u}$, то считаем, что активной является система

$$\dot{x}(t) = P(x(t), \overline{u}), \tag{6}$$

если же выход реле принимает значение $\underline{u}$, то считаем, что активной является система

$$\dot{x}(t) = P(x(t), \underline{u}). \tag{7}$$

Тогда при заданных начальных условиях $x(0) = (y_0, 0, T_0)^{\mathrm{т}}$ решение замкнутой системы (5) с учётом того, что $y_0 < y_1$, ищется в классе непрерывных вектор-функций $x(t)$ в соответствии со следующим алгоритмом чередования активных режимов:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases}
P(x(t), \overline{u}), & \text{если } x_1(t) \leqslant y_1;\\
P(x(t), \underline{u}), & \text{если } x_1(t) \geqslant y_2;\\
P(x(t), \overline{u}), & \text{если } x_1(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что}\\
& x_1(s) = y_1 \text{ и } x_1(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t];\\
P(x(t), \underline{u}), & \text{если } x_1(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0; t) \text{ такое, что}\\
& x_1(s) = y_2 \text{ и } x_1(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t].
\end{cases} \tag{8}$$

При этом в точках разрыва правой части системы (на гиперплоскостях $x_1 = y_1$, $x_1 = y_2$) происходит "склейка по непрерывности" соответствующих решений систем (6) и (7). Далее определённую на полуоси $t \geqslant 0$ функцию f будем называть Θ-периодической, если $f(t + \Theta) = f(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Сформулируем теперь задачу управления для системы (4).

Задача. Найти ограничения на числовые параметры m, k, α, l, β, Δ, γ системы (4), а также на параметры y_1, y_2, $\underline{u}$, $\overline{u}$ регулятора (3), при выполнении которых в замкнутой системе (5) существует периодическое решение (периодический режим).

2. Периодический режим в системе с программным управлением. Решение поставленной задачи о существовании периодического решения в системе (5) разобьём на несколько шагов. Вначале исследуем вопрос о существовании периодического решения системы (4), замкнутой программным управлением вида

$$u_p(t) = \begin{cases} \overline{u}, & \text{если} \quad t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_1), \\ \underline{u}, & \text{если} \quad t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta_1 + \Theta_2), \end{cases} \qquad q = 0, 1, 2, \ldots; \quad \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta. \tag{9}$$

Здесь $\overline{u}$, $\underline{u}$, Θ_1, Θ – положительные параметры указанного программного управления.

Рассмотрим теперь задачу выбора таких параметров управления (9), которые обеспечивают существование периодического решения в соответствующей замкнутой системе (4), (9).

Прежде всего заметим, что рассматриваемое управление $u(t)$ является кусочно-постоянной периодической функцией с периодом Θ. Покажем, что для любых $\overline{u}$, $\underline{u}$, $\Theta > \Theta_1 > 0$ уравнение

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u_p(t)) \tag{10}$$

имеет периодическое решение с периодом Θ. Действительно, при любых $t \geqslant s \geqslant 0$ для решений уравнения (10) справедлива формула Коши

$$x_3(t) = x_3(s)e^{-\gamma(t-s)/\alpha} + \int\limits_s^t e^{-\gamma(t-\tau)/\alpha}\frac{\gamma}{\alpha}u(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Пусть $x_3(0) = T_0$. Тогда, учитывая, что $u_p(t) \equiv \overline{u}$ на промежутке $[0, \Theta_1)$, и используя формулу (11), найдём $x_3(\Theta_1)$:

$$x_3(\Theta_1) = T_0 e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\overline{u}\int\limits_0^{\Theta_1} e^{-\gamma(\Theta_1-\tau)/\alpha}\,d\tau =$$

$$= T_0 e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} + \overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) = \overline{u} + (T_0 - \overline{u})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}. \tag{12}$$

Далее, учитывая, что $u_p(t) \equiv \underline{u}$ на промежутке $[\Theta_1, \Theta)$, для $x_3(\Theta)$ получаем

$$x_3(\Theta) = \underline{u} + (x_3(\Theta_1) - \underline{u})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} = \underline{u} + (\overline{u} + (T_0 - \overline{u})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} - \underline{u})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} =$$

$$= \underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}) + \overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} + T_0 e^{-\gamma\Theta/\alpha}. \tag{13}$$

Учитывая Θ-периодичность функции $u_p(t)$, заключаем, что решение $x_3(t)$ будет Θ-периодическим, если и только если выполняется равенство $x_3(\Theta) = T_0$. Тогда из представления (13) находим начальное условие для Θ-периодического решения $x_3^\Theta(t)$:

$$T_0 = \underline{T} = \frac{\underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}) + \overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}}. \tag{14}$$

Из равенств (13) и (14) следует, что

$$x_3^\Theta(\Theta_1) = \frac{\overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) + \underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}}.$$

Теперь, обозначая $\overline{T} = x_3^\Theta(\Theta_1)$ и $\hat{\gamma} = \gamma/\alpha$, запишем в явном виде Θ-периодическое решение уравнения (10):

$$x_3^\Theta(t) = \begin{cases} \overline{u} + (\underline{T} - \overline{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta)}, & \text{если} \quad t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_1), \\ \underline{u} + (\overline{T} - \underline{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta-\Theta_1)}, & \text{если} \quad t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta), \end{cases} \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Будем теперь предполагать, что параметры $\overline{u}$, $\underline{u}$, Θ_1, Θ регулятора (9) выбраны так, что выполняются неравенства

$$\underline{T} < M_1, \quad \overline{T} > A_2. \tag{15}$$

Полагая, что компонента x_3 решения замкнутой системы (4), (9) удовлетворяет начальному условию $x_3(0) = \underline{T}$, рассмотрим её подсистему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t),\\
&\dot{x}_2(t) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}\varphi(t)\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta\varphi(t),\\
&x_1(0) = y_0, \quad x_2(0) = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $\varphi(t) = E(x_3^\Theta(t))$. В силу условий (15) и того, что $x_3^\Theta(t)$ является Θ-периодическим решением уравнения (10), функция $\varphi(t)$ также будет Θ-периодической, и при этом её можно описать следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases}
E_1, & t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_{A_1}),\\
\dfrac{\overline{u} + (\underline{T} - \overline{u})e^{-\hat{\gamma}(t - q\Theta)} - A_1}{A_2 - A_1}(E_2 - E_1) + E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{A_1}, q\Theta + \Theta_{A_2}),\\
E_2, & t \in [q\Theta + \Theta_{A_2}, q\Theta + \Theta_1),\\
E_2, & t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta_{M_2}),\\
\dfrac{\underline{u} + (\overline{T} - \underline{u})e^{-\hat{\gamma}(t - q\Theta - \Theta_1)} - M_1}{M_2 - M_1}(E_2 - E_1) + E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{M_2}, q\Theta + \Theta_{M_1}),\\
E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{M_1}, q\Theta + \Theta),
\end{cases} \tag{17}$$

где

$$\Theta_{A_1} = \frac{1}{\hat{\gamma}}\ln\frac{\underline{T} - \overline{u}}{A_1 - \overline{u}}, \quad \Theta_{A_2} = \frac{1}{\hat{\gamma}}\ln\frac{\underline{T} - \overline{u}}{A_2 - \overline{u}},$$

$$\Theta_{M_1} = \Theta_1 + \frac{1}{\hat{\gamma}}\ln\frac{\overline{T} - \underline{u}}{M_1 - \underline{u}}, \quad \Theta_{M_2} = \Theta_1 + \frac{1}{\hat{\gamma}}\ln\frac{\overline{T} - \underline{u}}{M_2 - \underline{u}}$$

и учтено, что $T_0 < M_1$.

На рис. 3, 4 схематично изображены графики функций $x_3^\Theta(t)$ и $\varphi(t)$ при $t \in [0, \Theta]$.

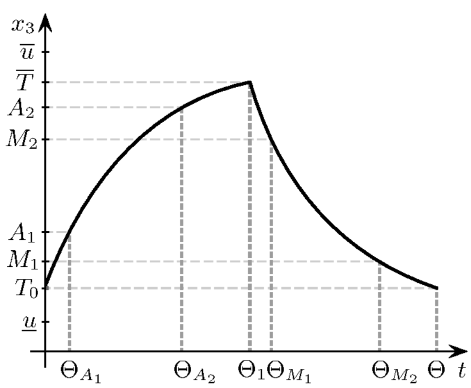

Рис. 3. График функции $x_3^\Theta(t)$.

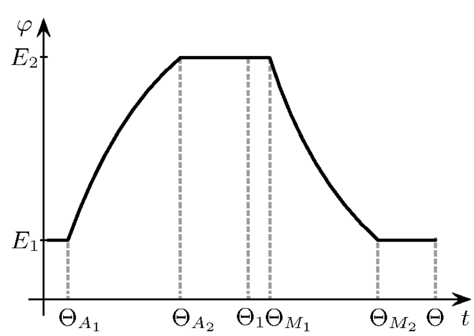

Рис. 4. График функции $\varphi(t)$.

Из сказанного выше следует, что система (16) фактически является линейной нестационарной системой вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{18}$$

где $x = (x_1, x_2)^{\text{т}}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} - \dfrac{\alpha}{lm}\varphi(t) & -\dfrac{\beta}{m} \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha}{lm}\Delta\varphi(t) - g \end{pmatrix}, \tag{19}$$

причём матрица $A(t)$ и вектор-столбец $f(t)$ – непрерывные и периодические с периодом Θ функции, т.е., в частности, $A(t+\Theta) = A(t)$, $f(t+\Theta) = f(t)$ для любого $t \geqslant 0$.

Известно [5, с. 215], что если линейная однородная Θ-периодическая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{20}$$

не имеет нетривиального Θ-периодического решения, то соответствующая неоднородная система (18) имеет единственное Θ-периодическое решение. Теперь заметим, что если однородная система (20) является асимптотически устойчивой, то она не может иметь нетривиального Θ-периодического решения.

Получим условия, при которых рассматриваемая линейная однородная система (20) является асимптотически устойчивой. Для этого воспользуемся методом, предложенным в [5, с. 197]. Рассмотрим систему (20), матрица $A(t)$ коэффициентов которой задана в (19). Эта система эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b(t)y(t) = 0, \tag{21}$$

где $y(t) = x_1(t)$, $\dot{y}(t) = x_2(t)$, а

$$a = \frac{\beta}{m}, \quad b(t) = \frac{\alpha}{lm}\varphi(t) + \frac{k}{m}.$$

Сделаем в уравнении (21) стандартную замену зависимой переменной $y = e^{-at/2}z$, тогда

$$\dot{y} = \left(\dot{z} - \frac{a}{2}z\right)e^{-at/2} \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \left(\ddot{z} - a\dot{z} + \frac{a^2}{4}z\right)e^{-at/2}.$$

Поэтому в результате указанной замены уравнение (21) приводится к виду

$$\ddot{z}(t) + p(t)z(t) = 0, \tag{22}$$

где

$$p(t) = \frac{\alpha}{lm}\varphi(t) + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}.$$

В соответствии с результатами, изложенными в монографии [5, с. 202], если для Θ-периодической функции $p(t)$ выполнены неравенства

$$p(t) \geqslant 0, \quad 0 < \Theta\int\limits_0^{\Theta} p(t)\,dt \leqslant 4,$$

то все решения $z(t)$ уравнения (22) ограничены вместе с их производными первого порядка. Но из ограниченности $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ вытекает, что решения $y(t)$ уравнения (21) вместе с их производными $\dot{y}(t)$ стремятся к нулю и, следовательно, система (20) асимптотически устойчива. Тогда, учитывая, что $E_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant E_2$, получаем достаточное условие того, чтобы система (20) с матрицей коэффициентов $A(t)$, заданной в (19), была асимптотически устойчива:

$$\frac{\alpha}{lm}E_1 + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} > 0, \quad \frac{\alpha}{lm}E_2 + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} \leqslant \frac{4}{\Theta^2}. \tag{23}$$

Следовательно, при выполнении условия (23) линейная неоднородная система (18) имеет, и при том единственное, Θ-периодическое решение. Обозначим это решение через $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t))^{\mathrm{т}}$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть параметры $\overline{u}$, $\underline{u}$, Θ_1, Θ программного управления (9) для системы (4) выбраны так, что выполняются следующие условия:*

1) справедливы неравенства

$$M_1 < \underline{T} = \frac{\underline{u}(1 - e^{-\gamma(\Theta-\Theta_1)/\alpha}) + \overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma(\Theta-\Theta_1)/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}},$$

$$A_2 > \overline{T} = \frac{\overline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) + \underline{u}(1 - e^{-\gamma(\Theta-\Theta_1)/\alpha})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}};$$

2) имеет место условие (23).

Тогда в системе (4), замкнутой программным управлением (9), существует единственное периодическое движение $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t), x_3^\Theta(t))^{\mathrm{т}}$, причём $x_3^\Theta(0) = \underline{T}$.

3. Периодический режим в системе с обратной связью. Вернёмся к исходной задаче (см. п. 2) о построении регулятора в форме обратной связи (3), обеспечивающего существование периодического режима в замкнутой системе (5). Основная идея решения этой задачи состоит в выборе параметров обратной связи (3) на основе результатов работы [1], позволяющих гарантировать существование колебательного режима в замкнутой системе (5), а также на основе рассчитанного, в соответствии с теоремой 1, программного управления (9) и обеспечиваемого им периодического решения $x^\Theta(t)$.

Итак, на основании теоремы 1 и достаточных условий существования колебательных режимов, полученных в работе [1], справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть*

1) для параметров системы (4) выполняется неравенство

$$\Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_1/l} > 0;$$

2) спектр каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{kl + \alpha E_1}{m} & -\dfrac{\beta}{m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{kl + \alpha E_2}{m} & -\dfrac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

лежит на отрицательной полуоси и является простым;

3) параметры $\overline{u}$, $\underline{u}$, Θ_1, Θ удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того,

$$\underline{u} < M_1, \quad \overline{u} > A_2;$$

4) величины $y_1 = x_1^\Theta(0)$, $y_2 = x_1^\Theta(\Theta_1)$ удовлетворяют неравенствам

$$y_1 > \Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_1/l}, \quad y_2 < \Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_2/l},$$

где $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t), x_3^\Theta(t))^{\mathrm{т}}$ – периодическое решение системы (4), замкнутой программным управлением (9) с параметрами $\overline{u}$, $\underline{u}$, Θ_1, Θ;

5) для системы (4), замкнутой обратной связью (3) с параметрами $\overline{u}$, $\underline{u}$, y_1, y_2, выполняются неравенства

$$\frac{E_2}{E_1} - \frac{\beta C_3^2}{\bar{t}_1^*} < 1, \quad \left(\frac{m^2 g^2}{k} + \frac{\alpha E_2}{l}\Delta^2\right)\nu_0 < k\left(\Delta + \frac{mg}{k}\right)^2,$$

где

$$\bar t_1^* = \min\left\{\frac{1}{C_2\sqrt{2m}}, (y_2 - y_1)\sqrt{\frac{E_1 m}{2E_2C_1}}\right\},$$

$$C_1 = k\left(y_1 + \frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{\alpha}{l}E_2(y_1-\Delta)^2, \quad C_2 = \frac{E_2}{mE_1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{m}} + \sqrt{k} + \sqrt{\frac{\alpha}{l}E_2}\right),$$

$$C_3 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2(k+\alpha E_2/l)}}, \quad \nu_0 = \max\{H_{\max}/H_0, 2\}, \quad H_0 = \frac{4mg\Delta E_1}{k+E_1},$$

$$H_{\max} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 \bar H^*, \quad \bar H^* = \max\{H^*, \bar H\}, \quad \bar H = \max\left\{\frac{m^2g^2}{k} + \frac{\alpha}{l}E_2\Delta^2, k\left(\Delta + \frac{mg}{k}\right)^2\right\},$$

$$H^* = \max\left\{\left(\frac{2\beta C_3C_4/\bar t_1^*}{1-E_2/E_1} + \beta C_3^2/\bar t_1^*\right)^2, \frac{C_4^2}{C_3^2}\right\}, \quad C_4 = \frac{mg}{k} + \Delta + y_1;$$

6) для момента времени t_0 выполняются условия

$$0 < x_1^\Theta(t_0) < \zeta_+, \quad x_2^\Theta(t_0) = 0, \quad t_0 < \Theta_{A_2},$$

где ζ_+ – положительный корень квадратного трёхчлена

$$p(\zeta) \equiv k\nu_0\left(\zeta + \frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{\alpha\nu_0E_2}{l}(\zeta-\Delta)^2 - k\left(\Delta + \frac{mg}{k}\right)^2.$$

Тогда решение $\tilde x(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями

$$\tilde x_1(0) = x_1^\Theta(t_0), \quad \tilde x_2(0) = x_2^\Theta(t_0), \quad \tilde x_3(0) = x_3^\Theta(t_0) \tag{24}$$

является колебательным режимом с параметрами t_1^*, t_2^*, y_1, y_2, где

$$t_1^* = (y_2 - y_1)\sqrt{m/H_{\max}}$$

(алгоритм для расчёта константы t_2^* достаточно громоздкий и полностью приведён в [1]). Кроме того, для решения $\tilde x(t)$ верно тождество $\tilde x(t) \equiv x^\Theta(t+t_0)$ при $t \in [0, t_1^*]$.

Теперь покажем, что при некоторых дополнительных условиях на константу t_1^* колебательный режим $\tilde x(t)$ системы (5) с начальными условиями (24) является, на самом деле, периодическим режимом. Для этого достаточно установить, что при начальных условиях (24) переключения реле обратной связи (3) с параметрами $\overline{u}$, $\underline{u}$, y_1, y_2, удовлетворяющими условиям теоремы 2, на промежутке $[0,\Theta]$ происходят при $t_1 = \Theta_1 - t_0$ и $t_2 = \Theta - t_0$.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 2 и для t_1^* справедливо неравенство

$$\Theta_{A_2} - t_0 < t_1^* \leqslant \Theta_1 - t_0. \tag{25}$$

Тогда в силу колебательности решения $\tilde x(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) выполнено неравенство

$$\tilde x_1(t) < y_2, \quad t \in [0, \Theta_{A_2} - t_0]. \tag{26}$$

Отсюда вытекает, что в силу теоремы 2 при $t \in [0, \Theta_{A_2} - t_0]$ верно тождество $\tilde x(t) \equiv x^\Theta(t+t_0)$.

Далее рассмотрим поведение функций $\tilde x_1(t)$ и $\tilde x_2(t)$ на промежутке $[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$. Прежде всего заметим, что вследствие определения обратной связи (3) тождества $\tilde x_1(t) \equiv$ $\equiv x_1^\Theta(t+t_0)$ и $\tilde x_2(t) \equiv x_2^\Theta(t+t_0)$ на промежутке $[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$ остаются верными вплоть до момента $t_* \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$, для которого выполняется равенство $\tilde x_1(t_*) = x_1^\Theta(t_*+t_0) = y_2$. Покажем, что $x_1^\Theta(t+t_0) \neq y_2$ при $t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0)$. Так как $\varphi(t+t_0) \equiv E_2$ на промежутке

$[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0]$, то функции $x_1^\Theta(t+t_0)$ и $x_2^\Theta(t+t_0)$ на нём тождественно совпадают с соответствующими компонентами $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ решения $\hat{x}(t)$ линейной стационарной системы

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\&\dot{x}_2(t)=-\Big(\frac{k}{m}+\frac{\alpha}{lm}E_2\Big)x_1(t)-\frac{\beta}{m}x_2(t)-g+\frac{\alpha}{lm}\Delta E_2\end{aligned}\qquad(27)$$

с начальными условиями

$$x_1(\Theta_{A_2}-t_0)=x_1^\Theta(\Theta_{A_2}),\quad x_2(\Theta_{A_2}-t_0)=x_2^\Theta(\Theta_{A_2}).\qquad(28)$$

Согласно условию 2) теоремы 2 матрица коэффициентов системы (27) является устойчивой и имеет простой спектр. Покажем, что для решения $\hat{x}(t)$ этой системы с начальными условиями (28) выполняется соотношение $\hat{x}_1(t)\ne y_2$ при $t\in[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0)$.

Действительно, первая компонента $x_1(t)$ любого решения $x(t)$ системы (27) обладает свойством

$$x_1(t)\to x_1^*>y_2\quad\text{при}\quad t\to+\infty,\qquad(29)$$

где $x_1^*=\Delta-(mg+k\Delta)/(k+\alpha E_2/l)$; в (29) сходимость доказана в работе [1], а неравенство – это второе неравенство в условии 4) теоремы 2.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{x}_1(t)=y_2,\quad t\geqslant\Theta_{A_2}-t_0.\qquad(30)$$

Так как вектор-функция $(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t))^{\mathrm{T}}$ на промежутке $[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0]$ является решением системы (27), собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы коэффициентов которой отрицательны и различны, то справедливо представление

$$\hat{x}_1(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}+x_1^*,$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные. При этом, поскольку

$$\hat{x}_1(\Theta_{A_2}-t_0)<y_2<x_1^*,$$

постоянные C_1 и C_2 не равны одновременно нулю.

Поэтому уравнение (30) можно записать в виде

$$C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}=y_2-x_1^*,\quad\text{где}\quad\lambda_1<0,\quad\lambda_2<0,\quad C_1^2+C_2^2>0,\quad t>\Theta_{A_2}.$$

Заметим, что функция в левой части рассматриваемого уравнения может иметь не более одной точки экстремума при $t>0$, а значит, в силу свойства (29) уравнение (30) может иметь не более одного корня. Следовательно, уравнение $x_1^\Theta(t+t_0)=y_2$ может иметь не более одного корня на промежутке $t\in[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0]$. Поэтому, так как в силу условия теоремы 2 функция $x_1^\Theta(t+t_0)$ принимает значение y_2 при $t=\Theta_1-t_0$, то $x_1^\Theta(t+t_0)\ne y_2$ при $t\in$ $\in[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0)$. Таким образом,

$$\tilde{x}_1(t)\ne y_2,\quad t\in[\Theta_{A_2}-t_0,\Theta_1-t_0),\quad\text{и}\quad\tilde{x}_1(\Theta_1-t_0)=y_2.\qquad(31)$$

Теперь предположим, что для t_1^* дополнительно выполнено условие

$$\Theta_{M_1}-\Theta_1<t_1^*\leqslant\Theta_2.\qquad(32)$$

Тогда в силу того, что решение $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) является колебательным режимом, выполнено неравенство $\tilde{x}_1(t)>y_1,\quad t\in[\Theta_1-t_0,\Theta_{M_1}-t_0]$. Отсюда, учитывая соотношения (31) и (26), получаем тождество

$$\tilde{x}(t)\equiv x^\Theta(t+t_0)\quad\text{при}\quad t\in[0,\Theta_{M_1}-t_0].\qquad(33)$$

Рассмотрим теперь поведение функций $\tilde{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ на промежутке $[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$. Аналогично приведённым выше рассуждениям заметим, что тождества $\tilde{x}_1(t)\equiv x_1^{\Theta}(t+t_0)$ и $\tilde{x}_2(t)\equiv x_2^{\Theta}(t+t_0)$ на промежутке $[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$ остаются верными вплоть до момента $t_*\in\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$, для которого выполняется равенство $\tilde{x}_1(t_*)=x_1^{\Theta}(t_*+t_0)=y_1$. Покажем, что $x_1^{\Theta}(t+t_0)\neq y_1$ при $t\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0)$. Так как $\varphi(t+t_0)\equiv E_1$ на промежутке $[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$, то функции $x_1^{\Theta}(t+t_0)$ и $x_2^{\Theta}(t+t_0)$ тождественно совпадают на нём с соответствующими компонентами $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ решения $\hat{x}(t)$ линейной стационарной системы

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ &\dot{x}_2(t)=-\left(\frac{k}{m}+\frac{\alpha}{lm}E_1\right)x_1(t)-\frac{\beta}{m}x_2(t)-g+\frac{\alpha}{lm}\Delta E_1\end{aligned}\tag{34}$$

с начальными условиями

$$x_1(\Theta_{M_1}-t_0)=x_1^{\Theta}(\Theta_{M_1}),\quad x_2(\Theta_{M_1}-t_0)=x_2^{\Theta}(\Theta_{M_1}).\tag{35}$$

Согласно условию 2) теоремы 2 матрица коэффициентов системы (34) является устойчивой и имеет простой спектр. Покажем, что для решения $\hat{x}(t)$ этой системы с начальными условиями (35) выполняется соотношение $\hat{x}_1(t)\neq y_1$ при $t\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0)$.

Действительно, первая компонента $x_1(t)$ любого решения $x(t)$ системы (34) обладает свойством

$$x_1(t)\to x_1^{**}<y_1\quad\text{при}\quad t\to\infty,\tag{36}$$

где $x^{**}=\Delta-(mg+k\Delta)/(k+\alpha E_1/l)$; в (36) сходимость доказана в работе [1], а неравенство – первое неравенство в условии 4) теоремы 2.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{x}_1(t)=y_1,\quad t\geqslant\Theta_{M_1}-t_0.\tag{37}$$

Так как вектор-функция $(x_1^{\Theta}(t),x_2^{\Theta}(t))^{\mathrm{т}}$ на промежутке $[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$ является решением системы (34), собственные значения λ_1' и λ_2' матрицы коэффициентов которой отрицательны и различны, то справедливо представление

$$\hat{x}_1(t)=C_1e^{\lambda_1' t}+C_2e^{\lambda_2' t}+x_1^{**},$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные. При этом, поскольку

$$\hat{x}_1(\Theta_{M_1}-t_0)>y_1>x_1^{**},$$

C_1 и C_2 не равны одновременно нулю.

Поэтому уравнение (37) можно записать в виде

$$C_1e^{\lambda_1' t}+C_2e^{\lambda_2' t}=y_1-x_1^{**},\quad\text{где}\quad\lambda_1'<0,\quad\lambda_2'<0,\quad C_1^2+C_2^2>0,\quad t\geqslant\Theta_{M_1}-t_0.$$

Заметим, что функция в левой части рассматриваемого уравнения может иметь не более одной точки экстремума при $t>0$, а тогда в силу свойства (36) уравнение (37) может иметь не более одного корня. Следовательно, уравнение $x_1^{\Theta}(t+t_0)=y_1$ может иметь не более одного корня на промежутке $t\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0]$. Поэтому, так как в силу условия теоремы 2 функция $x_1^{\Theta}(t+t_0)$ принимает значение y_1 при $t=\Theta-t_0$, $x_1^{\Theta}(t+t_0)\neq y_1$ при $t\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0)$. Таким образом,

$$\tilde{x}_1(t)\neq y_1,\quad t\in[\Theta_{M_1}-t_0,\Theta-t_0),\quad\text{и}\quad\tilde{x}_1(\Theta-t_0)=y_1.$$

Отсюда и из тождества (33) вытекает, что

$$\tilde{x}(t)\equiv x^{\Theta}(t+t_0)\quad\text{при}\quad t\in[0,\Theta-t_0].\tag{38}$$

Наложим ещё одно ограничение на константу t_1^*, а именно, пусть

$$t_1^* > t_0. \tag{39}$$

Тогда вследствие того, что решение $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) является колебательным режимом, выполнено неравенство

$$\tilde{x}_1(t) < y_2, \quad t \in [\Theta - t_0, \Theta]. \tag{40}$$

Отсюда и из тождества (38) вытекает, что при $t \in [0, \Theta]$ моменты переключений реле обратной связи (3) и реле программного управления (9) совпадают. Но тогда на этом промежутке справедливо тождество $\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0)$, а в силу Θ-периодичности функции $x^\Theta(t + t_0)$ это тождество верно при всех $t \geqslant 0$.

Следовательно, колебательное решение $\tilde{x}(t)$ системы (5) с начальными условиями (24) является периодическим режимом. Таким образом, доказана следующая теорема о существовании периодического режима в замкнутой системе (5).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и имеют место неравенства (25), (32) и (39). Тогда в замкнутой системе (5) существует периодический режим с начальными условиями (24).*

4. Результаты моделирования. Рассмотрим систему (1) со следующими параметрами:

$$m = 0.018, \quad \beta = 0.7, \quad k = 0.07, \quad \alpha = 1.32 \cdot 10^{-8}, \quad l = 0.2, \quad \Delta = 0.009, \quad \gamma = 1.76 \cdot 10^9,$$

$$M_1 = 24.3, \quad M_2 = 52.7, \quad A_1 = 32.8, \quad A_2 = 57.5, \quad E_1 = 3 \cdot 10^8, \quad E_2 = 8 \cdot 10^8.$$

Используя результаты настоящей статьи, удаётся рассчитать параметры

$$\overline{u} = 80, \quad \underline{u} = 1, \quad y_1 = 0.00172, \quad y_2 = 0.0063$$

обратной связи (3), при которых в соответствующей замкнутой системе при $E(0) = 4.73 \cdot 10^8$ и начальных условиях

$$y(0) = 0.0032, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad T(0) = 41.067$$

возникает периодическое движение (рис. 5) с периодом $\Theta = 0.2$. При этом моменты переключения реле обратной связи $t_1 = \Theta_1 - t_0$, $t_2 = \Theta - t_0$, где $\Theta_1 = 0.1$ и $t_0 = 0.036$.

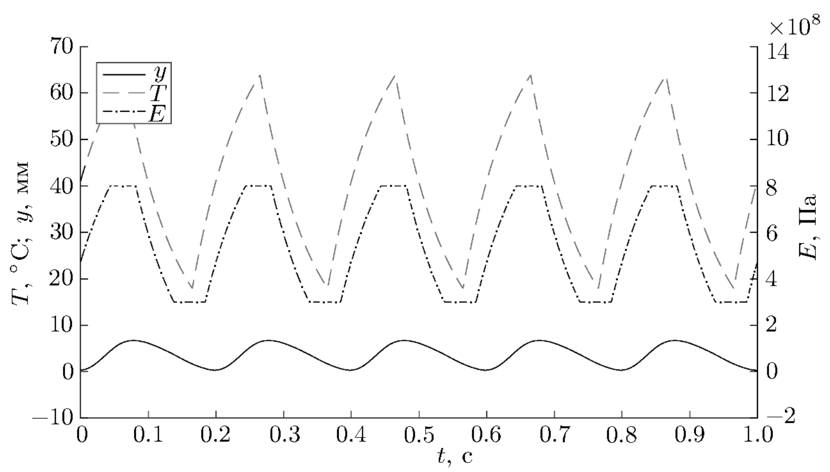

Рис. 5. Графики функций $y(t)$, $T(t)$, $E(t)$, соответствующих периодическому режиму системы (1).

Заключение. В работе рассмотрена математическая модель одной термомеханической установки [1] в виде управляемой нелинейной динамической системы (1), коэффициенты которой – положительные числовые параметры. При этом основная задача состояла в выборе алгоритма управления, обеспечивающего в замкнутой системе возникновение периодического движения. В качестве алгоритма управления предложено использовать обратную связь по выходу с оператором обратной связи в форме двухпозиционного реле с гистерезисом. В результате получены достаточные условия на коэффициенты и начальные значения переменных состояния системы (1) и на параметры регулятора (3), обеспечивающие возникновение периодического режима в соответствующей замкнутой системе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного фонда Болгарии (проект 19-57-18006), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-0001, 20-07-00827, 19-07-00294), Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
2. *Todorov T., Nikolov N., Todorov G., Ralev Y.* Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 148. P. 12002.
3. *Pai A.* A phenomenological model of shape memory alloys including time-varying stress: master's thesis of applied science. Waterloo, Ontario, Canada, 2007.
4. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М., 1965.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича, г. Москва,
Технический университет, г. София, Болгария

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 19.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1116–1141

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ: АЛЬТЕРНАТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕЛАКСАЦИЙ

© 2021 г. А. Г. Ченцов

Исследуется нелинейная дифференциальная игра (ДИ) сближения–уклонения. Для неё Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным установлена фундаментальная теорема об альтернативе. Параметрами игры являются целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО); в указанной теореме оба эти множества предполагались замкнутыми в пространстве позиций. В настоящем исследовании замкнутости множества, формирующего ФО, не предполагается, а постулируется только замкнутость всех его сечений, отвечающих фиксации моментов времени; ЦМ предполагается замкнутым. При этих условиях устанавливается вариант утверждения об альтернативной разрешимости и конструируются релаксации исходной ДИ, определяемые ослаблением условий окончания игры сближения. Данное построение использует известный метод программных итераций (МПИ), реализуемый на пространстве множеств, точками которых являются позиции игры. В результате формируется специальная последовательность функций, поточечно сходящаяся к некоторой предельной функции позиции. Значения последней имеют смысл наименьшего размера окрестностей множеств-параметров, при котором игрок, заинтересованный в сближении с ЦМ, гарантированно решает свою задачу при ослабленных отмеченным выше способом условиях; при этом, однако, допускается та или иная степень приоритетности в части вопросов сближения с ЦМ и соблюдения ФО. Для построения упомянутой предельной функции предлагается также “прямая” итерационная процедура МПИ в функциональном пространстве, причём искомая предельная функция оказывается неподвижной точкой оператора, порождающего данную процедуру. Кроме того, показано, что каждое значение этой функции является ценой некоторой ДИ со специальным функционалом качества.

DOI: 10.31857/S0374064121080136

Введение. Теорема Красовского–Субботина об альтернативе (см. [1, 2]) является ключевым положением современной теории дифференциальных игр (ДИ); с использованием данной теоремы установлено [2] существование седловой точки для типичных функционалов качества, важных для теории и приложений. В самой этой теореме рассматривается вариант ДИ, для которой функционал качества отсутствует; предполагаются заданными замкнутые целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). Игрок I заинтересован в приведении траектории на ЦМ при соблюдении ФО; цель игрока II (уклониста) противоположна. Из теоремы об альтернативе следует, что множество, формирующее ФО, допускает разбиение в сумму множеств (успешной) разрешимости игроков. При этом игроки могут использовать позиционные стратегии соответствующего типа, определяемого условиями информационной согласованности [2] (используются процедуры управления по принципу обратной связи); возможно (см. [3]) использование квазистратегий (неупреждающих стратегий). Таким образом, множество разрешимости игрока I определяет конкретный вариант позиционной стратегии (стратегия экстремального сдвига Н.Н. Красовского), гарантирующей наведение на ЦМ при соблюдении ФО. В связи с процедурой, устойчивой к помехам в канале наблюдения, отметим схему управления с поводырем (моделью) Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [2]).

Исследованиям различных вопросов, связанных с теорией ДИ, посвящено очень много публикаций. Напомним прежде всего монографию [4], где приведено большое число практических задач, формализуемых в виде ДИ, и указаны некоторые методы их исследования. Имеются монографии [2, 5–11], в которых изложены основные положения теории и указаны возможные приложения. В связи с задачами теории ДИ отметим особо основополагающие работы

Л.С. Понтрягина и его учеников [12–15] и исследования Б.Н. Пшеничного [16–18]. В работах А.И. Субботина [10, 11, 19, 20] и его учеников создано новое направление, связанное с изучением обобщённых решений уравнения Гамильтона–Якоби. Эти исследования позволили установить целый ряд важных свойств функции цены ДИ. Отметим принципиальный результат А.В. Кряжимского [21], в котором утверждение об альтернативе в ДИ сближения–уклонения распространено на случай управляемых систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной.

Одним из методов исследования ДИ является метод программных итераций (МПИ) – см. [22–27]. Обзор ранних исследований по МПИ содержится в [10, гл. IV, V]. Конструкции на основе МПИ используются и в настоящей работе (см. также [26, 27]; в частности, см. [27, раздел 6]). Схема применения МПИ здесь подобна в значительной степени работам [28–31], развитием которых является настоящее исследование, имеющее следующие основные этапы.

1) Обоснование положения об альтернативной разрешимости ДИ сближения–уклонения при ослаблении требований к множеству, определяющему ФО в задаче игрока I.

2) Построение функции позиции, значения которой определяют аналог наименьшего размера окрестностей ЦМ и множества, формирующего ФО, для которого игрок I ещё в состоянии гарантировать успех в задаче сближения при ослабленных должным образом условиях окончания игры.

3) Построение нового варианта МПИ, реализующего функцию позиции из этапа 2) в виде предела последовательности итераций в функциональном пространстве.

4) Доказательство свойства неподвижной точки для функции из этапов 2), 3), а также свойства её экстремальности в порядковом смысле.

5) Обоснование положения о том, что упомянутая выше функция позиции есть функция цены некоторой ДИ на минимакс-максимин в несимметричных классах стратегий (квазистратегии игрока I и стратегии с управляемыми моментами коррекции игрока II).

Целый ряд положений настоящей работы допускает естественные аналогии с [28–31], но имеются и существенные различия. В части, касающейся применения МПИ, отметим следующее. Конструкции на основе МПИ здесь являются средствами теоретического исследования и не претендуют на роль инструмента решения конкретных задач теории ДИ.

1. Общие сведения. Используется стандартная теоретико-множественная символика; $\varnothing$ – пустое множество, $\triangleq$ – равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого – множества. Принимаем аксиому выбора. Двум произвольным объектам x и y ставим в соответствие их неупорядоченную пару $\{x;y\}$ [32, с. 60]. Если h – объект, то $\{h\}\triangleq\{h;h\}$ есть синглетон, содержащий h. Следуя [32, с. 67], полагаем для любых объектов a и b, что $(a,b)\triangleq\{\{a\};\{a;b\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для всякой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно, т.е. $h=(\mathrm{pr}_1(h),\mathrm{pr}_2(h))$.

Если H – множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) множества H; $\mathcal{P}'(H)\triangleq\mathcal{P}(H)\setminus\{\varnothing\}$ – семейство всех непустых п/м множества H. Множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ ставим в соответствие семейство $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}]\triangleq\{\mathbb{M}\setminus M\colon\ M\in\in\mathcal{M}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, двойственное к $\mathcal{M}$. Обычным образом определяем след семейства: если $\mathcal{A}$ – семейство и B – множество, то $\mathcal{A}|_B\triangleq\{A\bigcap B\colon\ A\in\mathcal{A}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$. Для произвольных множеств A и B через B^A обозначаем [32, с. 77] множество всех отображений из A в B. Если A и B – множества, $g\in B^A$ и $C\in\mathcal{P}(A)$, то $g^1(C)\triangleq\{g(x)\colon\ x\in C\}$ – образ множества C при действии g, а $(g\mid C)\in B^C$ – сужение отображения g на множество C, определяемое условием $(g\mid C)(y)\triangleq g(y)$ для любого $y\in C$.

Полагаем, что $\mathbb{R}_+\triangleq\{\xi\in\mathbb{R}:0\leqslant\xi\}$ ($\mathbb{R}$ – вещественная прямая). Как обычно, $\mathbb{N}\triangleq\triangleq\{1,2,\ldots\}$ – множество натуральных чисел; пусть, кроме того, $\mathbb{N}_0\triangleq\{0\}\bigsqcup\mathbb{N}$. Если $m\in\in\mathbb{N}_0$, то $\overline{1,m}\triangleq\{k\in\mathbb{N}:k\leqslant m\}$ и $\overrightarrow{m,\infty}\triangleq\{k\in\mathbb{N}_0:m\leqslant k\}$. Полагаем, что элементы множества $\mathbb{N}$ не являются множествами. С учётом этого для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H (т.е. множества всех кортежей в H "длины" k) вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное обозначение H^k; в качестве H может использоваться семейство. В дальнейшем часто используется запись отображений в индексной форме (семейство с индексом; см. [33, с. 11]); в частности, это относится к кортежам. Согласно введённому обозначению $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей в $\mathcal{H}$; если $\mathcal{H}$ – семейство, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{H}$ – множество, то

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{H}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathbb{H} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i) \ \&\ (H_{k+1} \subset H_k \quad \forall k \in \mathbb{N})). \tag{1}$$

Непустому множеству S поставим в соответствие множество $\mathcal{R}_+[S] \overset{\triangle}{=} (\mathbb{R}_+)^S$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S; в качестве S может использоваться семейство. В последнем случае элементы $\mathcal{R}_+[S]$ – суть функции множеств.

Измеримость, меры. Произвольному множеству E ставим в соответствие семейство $(\sigma\text{-alg})[E]$ всех σ-алгебр п/м множества E; если $\mathcal{E} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, то пара $(E, \mathcal{E})$ – стандартное измеримое пространство (ИП), множества из $\mathcal{E}$ называются *измеримыми*. Если $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ (т.е. $\mathfrak{E}$ – семейство п/м множества E), то через $\sigma_E^0(\mathfrak{E}) \in (\sigma\text{-alg})[E]$ обозначаем σ-алгебру на E, порождённую семейством $\mathfrak{E}$. Типичный вариант соответствует случаю, когда $\mathfrak{E}$ – топология на E; тогда $\sigma_E^0(\mathfrak{E})$ есть σ-алгебра борелевских п/м множества E. Для множеств X и $Y \in \mathcal{P}(X)$, семейств $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $\mathcal{X}|_Y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ всегда $\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^0(\mathcal{X})|_Y$;

$$(Y \in \sigma_X^0(\mathcal{X})) \Longleftrightarrow (\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma_X^0(\mathcal{X}) : \Sigma \subset Y\}). \tag{2}$$

Если $(E, \mathcal{E})$ – стандартное ИП, то через $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных счётно-аддитивных (с.-а.) мер на $\mathcal{E}$, в частности, $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{E}]$. При $\mathcal{E} = \sigma_E^0(\tau)$, где τ – топология на E, меры из $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}]$ называют *борелевскими*; в случае метризуемости топологического пространства (E, τ) все такие меры регулярны (см. [34, гл. 1]). Данный случай достаточен для последующих построений.

2. Игра сближения–уклонения (содержательное обсуждение). Рассматриваем $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в качестве фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{3}$$

функционирование которой рассматривается на промежутках $[t, \vartheta_0]$, $t \in T$, где $T \overset{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0]$ при $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$ (итак, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$). В (3) P и Q – непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$,

$$f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n \tag{4}$$

– непрерывная (по совокупности переменных) функция. Предполагается, что в системе (3) $u \in P$ и $v \in Q$ – управления игроков I и II соответственно. Для упрощения полагаем сейчас, что при $t \in T$ игроки I и II могут формировать кусочно-постоянные, непрерывные справа на $[t, \vartheta_0)$ и непрерывные слева в точке ϑ_0 функции на $[t, \vartheta_0]$ со значениями в компактах P и Q соответственно; через $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ обозначим множества всех таких управлений на $[t, \vartheta_0]$ игроков I и II соответственно. Будем предполагать сейчас, что при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ реализуется единственная обычная траектория $\mathbf{x}(\,\cdot\,, t, x, u(\cdot), v(\cdot))$ системы (3), (4); $\mathbf{x}(\,\cdot\,, t, x, u(\cdot), v(\cdot)) \in C_n([t, \vartheta_0])$, где (здесь и ниже) $C_n([t, \vartheta_0])$ – множество всех непрерывных отображений из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$, $C_n([t, \vartheta_0]) \subset (\mathbb{R}^n)^{[t, \vartheta_0]}$. Управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, где $t \in T$, являются программными. Будем предполагать, что они формируются некоторыми (допустимыми) способами; поэтому каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ ставятся в соответствие непустые множества $\mathfrak{U}\langle t_*, x_*\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t_*, x_*\rangle$ возможных способов формирования реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно; выбором $\mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*, x_*\rangle$ распоряжается игрок I, а выбором $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t_*, x_*\rangle$ – игрок II. Каждому такому способу $\mathbb{U}$ ставится в соответствие непустой пучок $\mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ траекторий, возможных при использовании $\mathbb{U}$ и стартующих из позиции (t_*, x_*); предполагается, что эти траектории представляют собой равномерные пределы обычных траекторий. Аналогично способу $\mathbb{V}$ ставится в соответствие непустой пучок $\mathfrak{X}_{II}(t_*, x_*, \mathbb{V})$ траекторий, стартующих из позиции (t_*, x_*) и являющихся равномерными пределами обычных траекторий.

Пусть $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$; M есть ЦМ игрока I, а N формирует его ФО в виде системы своих сечений. Возникают следующие две (M, N)-задачи.

$I(M, N)$. Найти множество всех $(t_*, x_*) \in N$, для которых $\exists \mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*, x_*\rangle$ $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ $\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \ \& \ ((t, x(t)) \in N \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{5}$$

$II(M, N)$. Найти множество всех $(t^*, x^*) \in N$, для которых $\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t^*, x^*\rangle$ $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_{II}(t^*, x^*, \mathbb{V})$ $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \ \Rightarrow \ (\exists t \in [t^*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin N). \tag{6}$$

Ситуацию (5) рассматриваем как (M, N)-*сближение*, а ситуацию (6) – как (M, N)-*уклонение*. Если множества, определяющие решение задач $I(M, N)$, $II(M, N)$, образуют разбиение N, будем говорить, что имеет место (M, N)-*альтернатива*. В [1, 2] (M, N)-задачи рассматривались в случае, когда $\mathfrak{U}\langle t, x\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t, x\rangle$ определялись как не зависящие от (t, x) множества позиционных стратегий, а пучки траекторий конструировались в классе равномерных пределов реализуемых пошаговых движений; важную роль играли при этом условия информационной согласованности (см. [2, гл. XI]).

Подчеркнём, что в рассматриваемой постановке имеется существенная особенность в сравнении с [1, 2]. Так, обращаясь к задаче $I(M, N)$, отметим, что в момент сближения с ЦМ допускается нарушение ФО, т.е. (по сути) потеря дальнейшей работоспособности объекта управления, при фактическом осуществлении сближения, что может иметь место в некоторых технических системах "одноразового действия" (цель достигнута, а остальное несущественно). Данное соглашение важно для последующих построений. Если же (как и в [1, 2]) множество, определяющее ФО, замкнуто в обычном смысле, то, как легко видеть, наведение на ЦМ в смысле задачи $I(M, N)$ будет осуществляться (для позиций из N) так же, как и в [1, 2], включая соблюдение ФО в момент реального осуществления упомянутого наведения. Итак, отмеченная особенность связана с более общим допущением в отношении множества N, определяющего ФО задачи.

В [3] элементы множеств $\mathfrak{U}\langle t, x\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t, x\rangle$ отождествлялись с многозначными квазистратегиями; сами эти множества зависели только от t. Представляет интерес вопрос о зависимости решений задач $I(M, N)$, $II(M, N)$ от множеств M и N. В частности, в условиях (M, N)-альтернативы для позиции, не принадлежащей множеству разрешимости задачи (M, N)-сближения, интересен вопрос о наименьшем значении ε, $\varepsilon > 0$, при котором эта позиция содержится в множестве, являющемся решением задачи $I(M_\varepsilon, N_{\chi\varepsilon})$, где M_b и N_b – b-окрестности множеств M и N при $b > 0$, а χ, $\chi > 0$, – некоторый коэффициент приоритетности в смысле вопросов, связанных с достижением ЦМ и соблюдением ФО.

3. Обобщённые управления. Ниже используются управления-меры, называемые также *обобщёнными управлениями* (ОУ). Напомним, что $T = [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. При $t \in T$ рассматриваем конечномерные компакты: $[t, \vartheta_0]$, $Y_t \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times P$, $Z_t \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times P \times Q$, оснащаемые σ-алгебрами борелевских множеств:

$$\mathcal{T}_t \in (\sigma\text{-alg})[[t, \vartheta_0]], \quad \mathcal{K}_t \in (\sigma\text{-alg})[Y_t], \quad \mathcal{D}_t \in (\sigma\text{-alg})[Z_t], \quad \mathcal{C}_t \in (\sigma\text{-alg})[\Omega_t].$$

Итак, $([t, \vartheta_0], \mathcal{T}_t)$, $(Y_t, \mathcal{K}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$, $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ – стандартные ИП. Среди борелевских множеств выделяем цилиндры: при $t \in T$ и $I \in \mathcal{T}_t$ имеем $I \times P \in \mathcal{K}_t$, $I \times Q \in \mathcal{D}_t$ и $I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$. Кроме того, имеем [35, с. 17] $\Omega_t = ([t, \vartheta_0] \times P) \times Q = Y_t \times Q$, а потому $S \times Q \in \mathcal{C}_t$ при $S \in \mathcal{K}_t$. Наконец, при $D \in \mathcal{D}_t$ справедливо включение $D \underline{\times} P \stackrel{\triangle}{=} \{(\xi, u, v) \in \Omega_t : (\xi, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t$.

В связи с указанными свойствами цилиндров см. [34, добавление II; 36]. Отметим очевидные следствия эквивалентности (2): при $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$ выполняются включения

$$\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{C}_{t_1}|_{[t_1,t_2[\times P\times Q} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} : C \subset [t_1, t_2[\times P \times Q\} \in (\sigma\text{-alg})[[t_1, t_2[\times P \times Q],$$

$$\mathcal{D}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{D}_{t_1}|_{[t_1,t_2[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} : D \subset [t_1, t_2[\times Q\} \in (\sigma\text{-alg})[[t_1, t_2[\times Q].$$

Если $t \in T$, то через λ_t обозначаем след меры Лебега на $\mathcal{T}_t$ (см. [37, с. 155]);

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{C}_t] : \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{K}_t] : \mu(I \times P) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{D}_t] : \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\}.$$

Заметим, что (см. [10, гл. IV, § 2]) $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ допускает погружение в $\mathcal{H}_t$, а $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ допускают аналогичные погружения в $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ соответственно. Элементы $\mathcal{H}_t$ – “совокупные” (программные) ОУ, а элементы $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ – ОУ игроков I и II соответственно. Полагаем, что

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \eta(K \times Q) = \mu(K) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\} \quad \forall \mu \in \mathcal{R}_t,$$

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \tag{7}$$

В определении (7) введены специальные множества ОУ, отвечающие содержательно ситуации, когда при реализации УП $(u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ одно из программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ фиксировано, а другое может быть произвольным. Через $\mathcal{B}$ обозначаем σ-алгебру борелевских п/м множества Q; при $K \in \mathcal{K}_t$ и $B \in \mathcal{B}$ имеем $K \times B \in \mathcal{C}_t$ (см. [34, добавление II]). Если $v \in Q$, то для меры Дирака, сосредоточенной в точке v, через δ_v обозначаем след на σ-алгебре $\mathcal{B}$; если $t \in T$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то $\mu \bigotimes v \in \pi_t(\mu)$ определяем условиями

$$(\mu \bigotimes v)(K \times B) \triangleq \mu(K)\delta_v(B) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t \quad \forall B \in \mathcal{B};$$

данная мера отвечает совместному действию на систему (3), (4) ОУ μ и константы v; см. построения в [38, 39].

Через $C(\Omega_t)$, $C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на компактах Ω_t, Y_t и Z_t соответственно. Определяя на этих множествах линейные операции поточечно и вводя норму равномерной сходимости, получаем сепарабельные банаховы пространства; топологически сопряжённые к ним обозначим $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ (пространства линейных ограниченных функционалов на $C(\Omega_t)$, $C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно). Оснащаем $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ *-слабыми топологиями. С учётом теоремы Рисса [37, гл. IV] $\mathcal{H}_t$, $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ отождествляются со *-слабо компактными п/м в $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ соответственно (являются сильно ограниченными и *-слабо замкнутыми), а потому эти три множества сами могут рассматриваться как *-слабые метризуемые компакты (используем свойство сепарабельности предсопряжённых пространств; см. [37, гл. V]). При этом замкнутость и компактность отождествимы с секвенциальной замкнутостью и секвенциальной компактностью соответственно (см. [40, § 2.7]). Итак, все нужные в дальнейшем топологические свойства представимы в терминах *-слабой сходимости последовательностей, обозначаемой через $\rightharpoonup$. В частности, при $t \in T$ получаем, что

$$\mathfrak{F}_t^* \triangleq \{\mathbb{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t) : \forall (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad ((\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \ \Rightarrow \ (\eta \in \mathbb{F})\}$$

– семейство всех *-слабо замкнутых п/м множества $\mathcal{H}_t$. Отметим также (см. [36]), что имеют место включения

$$(\pi_t(\mu) \in \mathfrak{F}_t^* \quad \forall \mu \in \mathcal{R}_t) \ \& \ (\Pi_t(\nu) \in \mathfrak{F}_t^* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t). \tag{8}$$

Из сильной ограниченности $\mathcal{H}_t$ и включений (8) вытекает (секвенциальная) *-слабая компактность множеств (7); см. [36, с. 16].

4. Стратегии игроков. В качестве стратегий игрока I используем многозначные квазистратегии [3], а в качестве стратегий игрока II – стратегии-тройки [38, 39]. Рассмотрим сначала определения, относящиеся к квазистратегиям, фиксируя $t_* \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Тогда (см. [27, разд. 10])

$$\tilde{A}_{t_*} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) : \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$((\nu_1 | \mathcal{D}^{\theta}_{t_*}) = (\nu_2 | \mathcal{D}^{\theta}_{t_*})) \;\Rightarrow\; (\{(\eta | \mathcal{C}^{\theta}_{t_*}) : \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta | \mathcal{C}^{\theta}_{t_*}) : \eta \in \alpha(\nu_2)\})\} \qquad (9)$$

– множество всех квазистратегий игрока I на $[t_*, \vartheta_0]$. Среди всевозможных квазистратегий выделяем (см. [27]) квазипрограммы

$$\tilde{A}^{\Pi}_{t_*} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\alpha \in \tilde{A}_{t_*} : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}^*_{t_*}\right\}; \qquad (10)$$

нетрудно видеть (см. (8)), что $\Pi_{t_*}(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$. Поэтому множества (9) и (10) непустые. Заметим, что использование в (9) и (10) многозначных отображений связано с конструкциями на основе МПИ: именно в классе таких отображений удаётся (см. [27, предложение 10.3]) конструктивно определить квазипрограмму, гарантирующую решение задачи игрока I.

Рассмотрим один специальный вариант стратегий игрока II. Полагая

$$\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n},$$

получаем непустое множество всех многозначных позиционных стратегий, подобных в идейном отношении используемым в [1, 2]. При $t \in T$ обозначим [38, 39]

$$G^*(t) \stackrel{\triangle}{=} \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t,\vartheta_0])} : \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\; \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\; \forall \theta \in [t, \vartheta_0]$$

$$((g_1 | [t, \theta]) = (g_2 | [t, \theta])) \;\Rightarrow\; (g^*(g_1) \bigcap [t, \theta] = g^*(g_2) \bigcap [t, \theta])\};$$

кроме того, $\mathbb{G}^*_0(t) \stackrel{\triangle}{=} G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$ (множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$). Наконец, при $\theta \in T$ полагая

$$\mathbb{G}^*_\theta \stackrel{\triangle}{=} \prod_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \mathbb{G}^*_0(t),$$

получаем (непустое) множество стратегий коррекции на промежутке $[\theta, \vartheta_0]$. Если $(\mathbf{s}_t)_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \in \mathbb{G}^*_\theta$, $\tau \in [\theta, \vartheta_0]$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то отображение $C_n([\tau, \vartheta_0]) \to \mathcal{P}'([\tau, \vartheta_0])$, действующее по правилу $h \mapsto \mathbf{s}_\tau(x)(h)$, представляет собой неупреждающее правило выбора моментов коррекции управления, формируемого позиционной стратегией. При $t_* \in T$ назовём стратегией-тройкой на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ всякий триплет $(V, \beta, m) \in \mathfrak{V}_{pos} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}$ (число m определяет ограничение на возможное число переключений формируемого управления из $\mathcal{V}_{t_*}$).

5. Обобщённые траектории и пучки движений. Следуя идейно работе [21], введём условия на систему. Полагаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ интегральная воронка

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \stackrel{\triangle}{=} \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) : x(\theta) = x_* + \int\limits_{[t_*, \theta[\times P \times Q} f(t, x(t), u, v) \eta(d(t, u, v)) \quad \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]\}$$

одноэлементна: $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta)\}$, где

$$\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$$

– траектория (скользящий режим), порождённая ОУ η из позиции (t_*, x_*). В дальнейшем $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant c\}$ при $c \in \mathbb{R}_+$. Как и в [20], предполагаем, что

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \exists b \in \mathbb{R}_+ : \quad \varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \tau \in [t, \vartheta_0]. \tag{11}$$

Условие (11) – это условие равномерной ограниченности обобщённых траекторий. При $t \in T$ отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \to C_n([t, \vartheta_0]), \quad (x, \eta) \mapsto \varphi(\,\cdot\,, t, x, \eta), \tag{12}$$

непрерывно; при этом $\mathcal{H}_t$ оснащается относительной *-слабой топологией, $\mathbb{R}^n$ – топологией покоординатной сходимости, а $C_n([t, \vartheta_0])$ – топологией равномерной сходимости (см. [27, с. 309]). При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ полагаем, что

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\}, \tag{13}$$

получая непустой компакт в пространстве $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости (учитываем включения (8), непрерывность отображения (12) и *-слабую компактность $\mathcal{H}_{t_*}$). Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, то

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \triangleq \left\{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\right\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \tag{14}$$

– пучок траекторий, порождённых квазистратегией α из позиции (t_*, x_*). Если же $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то множество (14) – компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

Следуя [38, 39], при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $m \in \mathbb{N}$ вводим пучок $\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m] \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0]))$ траекторий, порождённых стратегией-тройкой (V, β, m) из позиции (t_*, x_*); см. [38, разд. 7; 39, формулы (7.4)–(7.8)]. Введём, наконец, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ непустой компакт

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \mu \bigotimes v) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \tag{15}$$

В связи с определением (15) отметим свойство [38, формула (7.7)]: при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$ и $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; 1] = \bigcup_{v \in V(t_*, x_*)} \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v). \tag{16}$$

6. Множества в пространстве позиций. Пространство позиций отождествляем с $T \times \mathbb{R}^n$; на $T \times \mathbb{R}^n$ задаём метрику $\rho \in \mathcal{R}_+[(T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n)]$ правилом

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \triangleq \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})$$

для всех $(t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $(t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ (итак, $\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2))$ – наибольшее из расстояний $|t_1 - t_2|$ и $\|x_1 - x_2\|$). Метрическая топология $\mathbf{t}$ на $T \times \mathbb{R}^n$, порождённая метрикой ρ, – это обычная топология покоординатной сходимости. Полагаем, что $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$, получая семейство всех замкнутых в традиционном смысле п/м в $T \times \mathbb{R}^n$; тогда

$$\mathcal{F}' \triangleq \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \tag{17}$$

– семейство всех непустых замкнутых п/м в $T \times \mathbb{R}^n$. Чтобы ввести другое оснащение на $T \times \mathbb{R}^n$, полагаем, что $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$ (дискретная топология на T) и $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ – топология на $\mathbb{R}^n$, порождённая нормой $\|\cdot\|$ (итак, $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ – топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$). Через $\tau_\partial \bigotimes \tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$

обозначаем метризуемую топологию на $T\times\mathbb{R}^n$, соответствующую стандартному произведению топологических пространств (ТП) (T,τ_∂) и $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Пусть $\mathfrak{F}\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\tau_\partial\bigotimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ и

$$\mathfrak{F}'\stackrel{\triangle}{=}\mathfrak{F}\setminus\{\varnothing\} \tag{18}$$

(семейство всех непустых замкнутых в $(T\times\mathbb{R}^n,\tau_\partial\bigotimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ п/м $T\times\mathbb{R}^n$). Если $E\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $t\in T$, то $E\langle t\rangle\stackrel{\triangle}{=}\{x\in\mathbb{R}^n:(t,x)\in E\}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ – t-*сечение* множества E. Полагая, что $\mathbf{F}\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$, получаем по двойственности, что (см. [27, разд. 5])

$$\mathfrak{F}=\{F\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n):F\langle t\rangle\in\mathbf{F}\quad\forall t\in T\}. \tag{19}$$

Из определений легко следуют (см., в частности, (17), (18)) вложения $\mathcal{F}\subset\mathfrak{F}$ и $\mathcal{F}'\subset\mathfrak{F}'$.

7. Метод программных итераций. 1. Приведём краткую сводку положений, относящихся к вариантам МПИ, реализуемым на пространстве п/м множества $T\times\mathbb{R}^n$. С учётом (13) и [27, формула (5.5)] при $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathbf{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, следующим образом:

$$\mathbf{A}[M](S)\stackrel{\triangle}{=}\{(t,x)\in S:\forall\nu\in\mathcal{E}_t\ \ \exists\mathbf{x}(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t,x,\nu)\ \ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]:((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in M)\ \&$$
$$\&\ ((\tau,\mathbf{x}(\tau))\in S\quad\forall\tau\in[t,\vartheta[)\}\quad\forall S\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

В общем случае для множеств $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ определена [27, разд. 6] последовательность $(W_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$ по рекуррентному правилу

$$(W_0(M,N)\stackrel{\triangle}{=}N)\ \&\ (W_{k+1}(M,N)=\mathbf{A}[M](W_k(M,N))\quad\forall k\in\mathbb{N}_0), \tag{21}$$

а также предельное множество

$$W(M,N)\stackrel{\triangle}{=}\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}W_k(M,N). \tag{22}$$

Будем использовать определения (21), (22) при различных множествах M и N. Из (20) и (21) следует (см. [27, формула (6.3)]), что

$$\forall M_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall N_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall M_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall N_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$$
$$((M_1\subset M_2)\ \&\ (N_1\subset N_2))\ \Rightarrow\ ((W_k(M_1,N_1)\subset W_k(M_2,N_2)\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&$$
$$\&\ (W(M_1,N_1)\subset W(M_2,N_2))). \tag{23}$$

Если же $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathfrak{F}$, то [27, разд. 6] имеем включения

$$(W_s(M,N)\in\mathfrak{F}\quad\forall s\in\mathbb{N}_0)\ \&\ (W(M,N)=\mathbf{A}[M](W(M,N))\in\mathfrak{F}). \tag{24}$$

Для дальнейшего важны аналоги секвенциальной непрерывности: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и при этом $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow M$ и $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow N$, то $M\in\mathcal{F}$, $N\in\mathfrak{F}$ и, самое главное,

$$((W_k(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_k(M,N)\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\ ((W(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W(M,N)). \tag{25}$$

Свойство (25) существенно для дальнейшего. Если $N\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n)$, то $\mathbf{t}|_N$ – топология на N, индуцированная из $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$, а $\mathcal{F}|_N$ – семейство всех п/м множества N, замкнутых в топологическом пространстве $(N,\mathbf{t}|_N)$. Тогда (см. [27, разд. 7]) при $M\in\mathcal{F}'$ и $N\in\mathfrak{F}'$ справедливы включения

$$(W_k(M,N)\in\mathcal{F}|_N\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\ (W(M,N)\in\mathcal{F}|_N). \tag{26}$$

В (24) и (26) сформулированы важные топологические свойства. Из включений (26) следует, что если $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathcal{F}'$, то

$$(W_k(M,N) \in \mathcal{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (W(M,N) \in \mathcal{F}).$$

Рассмотрим итерационную процедуру [36, § 11], определяя при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ оператор стабильности $\mathbb{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, по правилу: если $S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\mathbb{A}[M](S) \overset{\triangle}{=} \{(t,x) \in S : \forall v \in Q \ \ \exists \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t,x,v) \ \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0] :$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in M) \ \& \ ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in S \ \ \forall \xi \in [t,\vartheta[)\}. \tag{27}$$

С помощью оператора (27) определяем новую итерационную процедуру: если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то [38, разд. 5] последовательность $(\mathcal{W}_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$ зададим рекуррентно следующим образом:

$$(\mathcal{W}_0(M,N) \overset{\triangle}{=} N) \ \& \ (\mathcal{W}_{k+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_k(M,N)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0); \tag{28}$$

кроме того, положим

$$\mathcal{W}(M,N) \overset{\triangle}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M,N). \tag{29}$$

Свойства процедуры (28), (29) во многом аналогичны свойствам (21), (22). Напомним их предельно кратко (подробнее см. в [38, 39]). Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то

$$(\mathcal{W}_k(M,N) \in \mathfrak{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\mathcal{W}(M,N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M,N)) \in \mathfrak{F}).$$

Отметим аналог свойства (26): при $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathfrak{F}'$ справедливы включения

$$(\mathcal{W}_k(M,N) \in \mathcal{F}|_N \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\mathcal{W}(M,N) \in \mathcal{F}|_N).$$

Заметим, наконец, что (см. [36, с. 61, 62]) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ выполняется равенство

$$W(M,N) = \mathcal{W}(M,N) \tag{30}$$

(для несколько менее общего случая аналог соотношения (30) отмечен в [10, гл. V, формула (4.3)]).

8. Вопросы альтернативной разрешимости. Рассматривается некоторый аналог теоремы Красовского–Субботина об альтернативе, относящийся к случаю, когда множество, определяющее ФО, не является замкнутым в топологии $\mathbf{t}$. Ключевую роль в этих построениях играет МПИ. Всюду в дальнейшем считаем, что

$$\mathbf{M} \in \mathcal{F}' \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \in \mathfrak{F}'; \tag{31}$$

$\mathbf{M}$ есть ЦМ игрока I, а множество $\mathbf{N}$ формирует его ФО. С парой множеств (31) связываем две последовательности

$$(W_k(\mathbf{M},\mathbf{N}))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}_0} \quad \text{и} \quad (\mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N}))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}_0}, \tag{32}$$

а также общее (см. (30)) предельное множество

$$W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W_k(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}). \tag{33}$$

Согласно (31) и [27, теорема 10.1] имеем цепочку равенств

$$W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x) \in \mathbf{N} : \exists \alpha \in \tilde{A}_t \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \ \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0] :$$

$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\ \&\ ((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in\mathbf{N}\quad\forall\xi\in[t,\vartheta[)\}=\{(t,x)\in\mathbf{N}:$$

$$\exists\alpha\in\tilde{A}_t^{\Pi}\ \ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathbb{X}[t;x;\alpha]\ \ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]:((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\ \&\ ((\xi,\mathbf{x}(\xi))\in\mathbf{N}\ \ \forall\xi\in[t,\vartheta[)\}. \tag{34}$$

Итак, множество (33) является решением задачи $I(\mathbf{M},\mathbf{N})$ и в классе квазистратегий, и в классе квазипрограмм; при $(t_*,x_*)\in W(\mathbf{M},\mathbf{N})$ квазипрограмма, гарантирующая $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-сближение, определена в [27, формула (10.23), предложение 10.3, следствие 10.2]. С другой стороны (см. [38, 39]), в силу (33) имеем

$$\mathbf{N}\setminus W(\mathbf{M},\mathbf{N})=\{(t,x)\in\mathbf{N}:\exists V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}\ \ \exists\beta\in\mathbb{G}_t^*\ \ \exists m\in\mathbb{N}\ \ \forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m]\ \ \forall\vartheta\in[t,\vartheta_0]$$

$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in\mathbf{M})\ \Rightarrow\ (\exists\xi\in[t,\vartheta[:(\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbf{N})\}. \tag{35}$$

Свойство (35) следует из [38, теорема 9.2] с учётом равенств (33). Из (34) и (35) вытекает следующая

Теорема 8.1. *Если $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}$, то справедливо одно и только одно из следующих двух утверждений:*

1) $\exists\alpha\in\tilde{A}_{t_*}\ \ \forall x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]\ \ \exists\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$: $((\vartheta,x(\vartheta))\in\mathbf{M})\ \&\ ((t,x(t))\in\mathbf{N}\ \ \forall t\in[t_*,\vartheta[)$;

2) $\exists(V,\beta,m)\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}\times\mathbb{G}_{t_*}^*\times\mathbb{N}\ \ \forall x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;m]\ \ \forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]\ \ ((\vartheta,x(\vartheta))\in\mathbf{M})\ \Rightarrow\ (\exists t\in$ $\in[t_*,\vartheta[:(t,x(t))\notin\mathbf{N})$.

Согласно [38, следствие 9.1] при $(t_*,x_*)\in\mathbf{N}\setminus W(\mathbf{M},\mathbf{N})$ осуществимо гарантированное решение задачи игрока II с некоторым "запасом" (осуществимо уклонение по отношению к некоторым окрестностям множеств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$); сама структура разрешающей стратегии-тройки в значительной степени пояснена в [38, разд. 8].

9. Окрестности множеств и релаксация задачи сближения. Начинаем рассмотрение вопросов, связанных с ослаблением условий окончания игры сближения. Полагаем в дальнейшем, наряду с (31), что

$$\mathbf{N}\langle t\rangle\neq\varnothing\quad\text{для всех}\quad t\in T. \tag{36}$$

При $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ полагаем $\rho((t,x);\mathbf{M})\triangleq\inf(\{\rho((t,x),(\tau,y)):(\tau,y)\in\mathbf{M}\})$. Соответственно функция $\rho(\cdot\,;\mathbf{M})\triangleq(\rho(z;\mathbf{M}))_{z\in T\times\mathbb{R}^n}\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$ представляет собой расстояние до множества $\mathbf{M}$. При $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ получаем, что

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon)\triangleq\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n:\rho((t,x);\mathbf{M})\leqslant\varepsilon\}=\rho(\cdot\,;\mathbf{M})^{-1}([0,\varepsilon])\in\mathcal{F}'; \tag{37}$$

$\mathbf{M}=S_0(\mathbf{M},0)\subset S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$ (см. (31)). При $\varepsilon>0$ множество (37) является замкнутой ε-окрестностью множества $\mathbf{M}$. При $S\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x\in\mathbb{R}^n$ верно также $(\|\cdot\|\text{-inf})[x;S]\triangleq$ $\triangleq\inf\{\|x-s\|:s\in S\}\in\mathbb{R}_+$. Если $H\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, то $(\|\cdot\|\text{-inf})[\cdot\,;H]\in\mathcal{R}_+[\mathbb{R}^n]$ определяет функцию $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ по правилу $x\mapsto(\|\cdot\|\text{-inf})[x;H]$. В силу (36) для всех $t\in T$ имеем $\mathbf{N}\langle t\rangle\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. Если $H\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, то

$$B_n^0(H,\varepsilon)\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n:(\|\cdot\|\text{-inf})[x;H]\leqslant\varepsilon\}=(\|\cdot\|\text{-inf})[\cdot\,;H]^{-1}([0,\varepsilon])\in\mathbf{F}', \tag{38}$$

здесь и ниже $\mathbf{F}'\triangleq\mathbf{F}\setminus\{\varnothing\}$. При $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ получаем, что

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\triangleq\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n:x\in B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)\}\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n), \tag{39}$$

$\mathbf{N}\subset\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)$. Отметим очевидное

Предложение 9.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{S}(\mathbf{N},0)=\mathbf{N}$.

Отметим также легко проверяемое свойство $\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\langle t\rangle = B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)$ для любого $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ и всех $t\in T$. С учётом этого и (19) получаем, что

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\in\mathfrak{F}' \quad \text{для любого} \quad \varepsilon\in\mathbb{R}_+. \tag{40}$$

Предложение 9.2. *Если* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ *и при этом* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\to\varepsilon$ *и* $\varepsilon_{k+1}\leqslant\varepsilon_k$ *для всех* $k\in\mathbb{N}$, *то* $(S_0(\mathbf{M},\varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$ *и* $(\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon)$.

Доказательство следует из определений.

Введём в рассмотрение и зафиксируем параметр $\kappa\in\mathbb{R}_+$, $\kappa\neq 0$, в качестве специального коэффициента приоритетности: будем рассматривать в качестве возможных замены

$$\mathbf{M}\to S_0(\mathbf{M},\varepsilon), \quad \mathbf{N}\to\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon), \tag{41}$$

где $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. В связи с (41) отметим несложно проверяемое равенство

$$T\times\mathbb{R}^n=\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)) \tag{42}$$

(для доказательства (42) используется тот очевидный факт, что $M\bigcap N\subset W(M,N)$ для любых $M,N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$). Из (22) и (42) вытекает следующее свойство:

$$T\times\mathbb{R}^n=\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}W_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)) \quad \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{43}$$

В силу равенств (42) и (43) заключаем, что справедливо утверждение: если $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$, то

$$\begin{gathered}(\Sigma_0^{(k)}(t,x|\kappa)\overset{\triangle}{=}\{\varepsilon\in\mathbb{R}_+:(t,x)\in W_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \quad \forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\\ \&\ (\Sigma_0(t,x|\kappa)\overset{\triangle}{=}\{\varepsilon\in\mathbb{R}_+:(t,x)\in W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)).\end{gathered} \tag{44}$$

С учётом включений (44) при $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t,x|\kappa)\overset{\triangle}{=}\inf(\Sigma_0^{(k)}(t,x|\kappa))\in\mathbb{R}_+ \quad \forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\ (\varepsilon_0(t,x|\kappa)\overset{\triangle}{=}\inf(\Sigma_0(t,x|\kappa))\in\mathbb{R}_+). \tag{45}$$

Вследствие определений (20), (21) имеем: $W_{k+1}(M,N)\subset W_k(M,N)$ при $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $k\in\mathbb{N}_0$. Поэтому если $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ и $k\in\mathbb{N}_0$, то

$$\Sigma_0^{(k+1)}(t,x|\kappa)\subset\Sigma_0^{(k)}(t,x|\kappa). \tag{46}$$

Тогда из (45) и (46) вытекает следующее свойство:

$$\varepsilon_0^{(k)}(t,x|\kappa)\leqslant\varepsilon_0^{(k+1)}(t,x|\kappa) \quad \forall k\in\mathbb{N}_0 \quad \forall(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n. \tag{47}$$

Стандартным образом, используя (45), получаем, что

$$\begin{gathered}(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)\overset{\triangle}{=}(\varepsilon_0^{(k)}(z|\kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n}\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n] \quad \forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\\ \&\ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)\overset{\triangle}{=}(\varepsilon_0(z|\kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n}\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]).\end{gathered} \tag{48}$$

Через $\leqq$ обозначаем поточечный порядок на $\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$, т.е.

$$(g_1\leqq g_2)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}(g_1(t,x)\leqslant g_2(t,x) \quad \forall(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n) \tag{49}$$

для $g_1, g_2 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Из (47)–(49) следует очевидное свойство

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{50}$$

Предложение 9.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство вытекает из определения (22).

Из предложения 9.3 несложно следует (см. (45), (49)) неравенство

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \varepsilon_0(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{51}$$

Предложение 9.4. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \;\&\; (\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)).$$

Доказательство. Ограничимся проверкой первого включения (проверка второго аналогична). Фиксируем $s \in \mathbb{N}_0$, пусть $\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa)$. С учётом включений (45) выберем последовательность $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa)^{\mathbb{N}}$, для которой $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \to \varepsilon_*$ и $a_{k+1} \leqslant a_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу предложения 9.2, а также сходимости (25) получаем, что

$$(W_s(S_0(\mathbf{M}, a_j), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_j)))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \tag{52}$$

причём $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, a_k), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_k))$ при $k \in \mathbb{N}$. Вследствие (1) и (52) заключаем, что $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Осталось учесть включение (44). Предложение доказано.

Следствие 9.1. *При* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *элемент* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$ *является наименьшим во множестве* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$, *и, кроме того,* $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$ *– наименьший элемент множества* $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$ *при* $k \in \mathbb{N}_0$.

С учётом неравенства (51) имеем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ включение

$$\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)]).$$

Предложение 9.5. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного утверждения в [29–31] (отметим только использование свойства (23)).

Следствие 9.2. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *представляет собой точную верхнюю грань множества* $\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)\colon\; k \in \mathbb{N}_0\}$ *в* $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$.

Доказательство очевидно.

Таким образом, частично упорядоченное множество (ЧУМ) $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$ таково, что последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k \in \mathbb{N}_0}$ и функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ связаны свойством точной верхней грани. Ещё одно очевидное следствие состоит в том, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ (см. (47)) имеют место соотношения

$$((\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa))_{k \in \mathbb{N}} \to \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)) \;\&\; (\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa) \leqslant \varepsilon_0^{(s+1)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall s \in \mathbb{N}). \tag{53}$$

В силу (53) функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ является поточечным пределом последовательности $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k \in \mathbb{N}}$.

10. Основная последовательность в пространстве функций. Функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)$, $k \in \in \mathbb{N}_0$, и $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ определены в терминах итерационных процедур (21), (22). Мы укажем далее "прямую" итерационную процедуру, позволяющую строить упомянутую последовательность и определять её предел в терминах преобразований в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Однако предварительно следует установить целый ряд свойств данных функций, привлекая лишь первоначальное (см. (44), (45)) их определение.

Предложение 10.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa), \infty[$.

Доказательство легко следует из определений с учётом свойства (23) (см. также [30, предложение 7]).

Аналогичным образом устанавливается

Предложение 10.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa), \infty[$.

Предложение 10.3. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \&$$

$$\& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))).$$

Доказательство следует из предложений 10.1, 10.2 с учётом включений (44).

Предложение 10.4. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}|_{\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}|_{\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)}).$$

Доказательство получается комбинацией включений (26) и предложения 10.3.

Из (24), (37) и предложения 10.3 вытекает, что при $b \in \mathbb{R}_+$ справедливы включения

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F}). \tag{54}$$

Введём в рассмотрение следующее множество неотрицательных полунепрерывных снизу функций на топологическом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \bigotimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$:

$$\mathfrak{M} \overset{\triangle}{=} \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] : g^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+\}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) вытекает важное свойство полунепрерывности снизу

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}); \tag{56}$$

предложение 10.4 дополняет утверждение (56). Напомним, что $\rho(\cdot\,; \mathbf{M})$ – непрерывная в/з функция; в частности, $\rho(\cdot\,; \mathbf{M}) \in \mathfrak{M}$. Введём в рассмотрение функцию

$$\zeta_\kappa \overset{\triangle}{=} (\kappa^{-1}(\|\cdot\|\text{-inf})[x; \mathbf{N}\langle t\rangle])_{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \tag{57}$$

Предложение 10.5. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то* $(\zeta_\kappa)^{-1}([0, b]) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$.

Доказательство следует из определений.

Из включения (40) и предложения 10.5 вытекает, что $(\zeta_\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F}'$ для всех $b \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что функция

$$\psi_\kappa \overset{\triangle}{=} (\sup(\{\rho((t, x); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t, x)\}))_{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \tag{58}$$

является точной верхней гранью в ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \overset{\leqq}{=})$ неупорядоченной пары $\{\rho(\cdot\,; \mathbf{M}); \zeta_\kappa\}$. Нетрудно видеть (см. (55)), что $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}$.

Предложение 10.6. *Справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa) = \zeta_\kappa$.

Доказательство. В силу определения (21), включений (44) и предложения 10.1 имеем

$$\Sigma_0^{(0)}(t, x|\kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} = [\varepsilon_0^{(0)}(t, x|\kappa), \infty[\quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{59}$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \stackrel{\triangle}{=} \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa)$; $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$. В силу (59) $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$, а тогда, согласно (39), $(\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \leqslant \kappa\varepsilon_*$. В силу (57) верно неравенство $\zeta_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_*$. С другой стороны, для $\delta_* \stackrel{\triangle}{=} (\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \in \mathbb{R}_+$ имеем (см. (38), (39)) включение $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \delta_*)$. Вследствие (59) получаем

$$\frac{\delta_*}{\kappa} \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa). \tag{60}$$

Из соотношений (59) и (60) вытекает неравенство $\varepsilon_* \leqslant \delta_*/\kappa = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$. В итоге $\varepsilon_* = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$. Так как выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, требуемое равенство установлено.

Предложение 10.7. *Функция* ψ_κ *мажорирует функцию* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$, *т.е.* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b_* \stackrel{\triangle}{=} \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})$; тогда

$$c_* \stackrel{\triangle}{=} (\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] = \kappa\zeta_\kappa(t_*, x_*).$$

С учётом включения (39) получаем

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*) \bigcap \mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*), \tag{61}$$

где $a_* \stackrel{\triangle}{=} \kappa^{-1} c_* \in \mathbb{R}_+$, $d_* \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{a_*; b_*\}) \in \mathbb{R}_+$. Тогда $a_* = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$, $S_0(\mathbf{M}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, d_*)$, $c_* = \kappa a_* \leqslant \kappa d_*$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*) \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)$. Вследствие (61) имеем $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, d_*) \bigcap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)$, а потому (см. (44)) $d_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$ и, согласно (45), $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \leqslant d_* = \psi_\kappa(t_*, x_*)$. Так как выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, предложение доказано.

Следствие 10.1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa$.

Доказательство получается комбинацией неравенства (51) и предложения 10.7.

Пусть

$$\mathfrak{M}_\psi \stackrel{\triangle}{=} \{g \in \mathfrak{M} : g \stackrel{\leq}{=} \psi_\kappa\}. \tag{62}$$

Из включений (56), предложения 10.7 и следствия 10.1 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \tag{63}$$

Здесь же отметим, что

$$(\zeta_\kappa \stackrel{\leq}{=} \varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\zeta_\kappa \stackrel{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot|\kappa)) \tag{64}$$

в силу неравенств (50), (51) и предложения 10.6.

11. Вспомогательные функционалы качества. Введём в рассмотрение некоторые специальные функционалы, для которых позднее будет установлено совпадение значений минимакса в классе квазистратегий с соответствующими значениями функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$. Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее

Условие (квазиограниченность $\mathbf{N}$). Для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+$ имеет место соотношение

$$\mathbb{B}_n(\mathbf{c}) \bigcap \mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{65}$$

Число $\mathbf{c}$ со свойством (65) зафиксируем и будем использовать в последующих построениях. При $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ функция $[t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|x(t)\|$, непрерывна и достигает максимума; при этом

$$(\|\cdot\|\text{-inf})[x(\tau); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \mathbf{c} + \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\| \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0].$$

В силу непрерывности функции $\rho(\cdot\,; \mathbf{M})$ при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ имеем непрерывность функции $[t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \rho((t, x(t)); \mathbf{M})$; если при этом $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, то

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \kappa^{-1}(\max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}). \tag{66}$$

Пусть при $t \in T$ отображение $\mathbb{I}_t \in \mathcal{P}'([t,\vartheta_0])^{[t,\vartheta_0]}$ таково, что

$$(\mathbb{I}_t(t) \triangleq \{t\}) \ \& \ (\mathbb{I}_t(\vartheta) \triangleq [t,\vartheta[\quad \forall \vartheta \in]t,\vartheta_0]). \tag{67}$$

В силу (66), (67) имеем при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*,\vartheta_0]$, что

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \kappa^{-1}(\max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}) \quad \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta); \tag{68}$$

с учётом оценки (68) получаем следующее (конечное) значение:

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{69}$$

Из определений вытекает очевидное свойство

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), t_*) = \psi_\kappa(t_*, x(t_*)) \quad \forall t_* \in T \quad \forall x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]). \tag{70}$$

При $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{C}_n([t_*,\vartheta_0])]$ определяем условием

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \triangleq \inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{C}_n([t_*,\vartheta_0]). \tag{71}$$

При $t \in T$ через $\|\cdot\|_t^{(\mathbf{C})}$ обозначаем норму равномерной сходимости на $C_n([t,\vartheta_0])$. Тогда при $t_* \in T$ имеем легко проверяемое свойство:

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\quad \exists \delta \in]0,\infty[\quad \forall x_1(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]) \quad \forall x_2(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0])$$

$$(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta) \ \Rightarrow \ (|\omega_\kappa(t_*, x_1(\cdot), \vartheta) - \omega_\kappa(t_*, x_2(\cdot), \vartheta)| < \varepsilon \quad \forall \vartheta \in [t_*,\vartheta_0]). \tag{72}$$

Предложение 11.1. *Если $t_* \in T$, то функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ на пространстве $C_n([t_*,\vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости непрерывен.*

Доказательство получается комбинацией определения (71) и свойства (72).

Замечание. Несложно видеть, что на самом деле при $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ равномерно непрерывен на $(C_n([t_*,\vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})})$, что непосредственно следует из (72). Здесь же отметим, что, как нетрудно проверить, имеет место следующее представление для множества нулей этого функционала:

$$(\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}) = \{x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]) : \exists \vartheta \in [t_*,\vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \ \& \ ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta))\}.$$

12. Минимакс в классе квазистратегий. В данном пункте при фиксированной начальной позиции исследуется задача на минимакс функционала (71) в классе квазистратегий. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{S}_{M,N}(t,x) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \ \&$$

$$\& \ ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \quad \forall \xi \in [t,\vartheta[)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall (t,x) \in N. \tag{73}$$

Тогда (см. [27, теорема 10.1]) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ получаем цепочку равенств

$$W(M,N) = \Big\{(t,x) \in N : \exists \alpha \in \tilde{A}_t : \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\Big\} =$$

$$= \Big\{(t,x) \in N : \exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\Pi} : \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\Big\}. \tag{74}$$

Фиксируем до конца пункта позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Следуя идейно [27, формула (10.22)], полагаем

$$\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu | M, N\rangle \triangleq \{\eta \in \Pi_{t_*}(\nu) : \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M) \; \& $$
$$\& \; ((\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \eta)) \in W(M, N) \quad \forall \xi \in [t_*, \vartheta[)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}.$$

Согласно утверждению (44), предложению 9.4 и [27, предложение 10.3] получаем, что

$$\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa))\rangle \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}. \tag{75}$$

Из включений (14) и (75) вытекает, что определено значение

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 12.1. *Справедливо неравенство*

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство легко следует из [27, следствие 10.2], (69) и (71).

Заметим, что в силу непрерывности отображения (12) и предложения 11.1 функционал $\mathcal{H}_{t_*} \to \mathbb{R}_+$, действующий по правилу $\eta \mapsto \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta))$, также непрерывен и, в силу *-слабой компактности множества $\mathcal{H}_{t_*}$, ограничен. Поэтому (см. (14)) при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ ограничен функционал $\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \to \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \mapsto \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))$, и определено (конечное) значение

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \tag{76}$$

Если $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то в (76) sup можно заменить на max. С учётом этого получаем, поскольку $\tilde{A}^{\Pi}_{t_*} \neq \varnothing$, что

$$(\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+) \; \&$$
$$\& \; (\mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+). \tag{77}$$

Отметим очевидные следствия (см. (75), (77), предложение 12.1)

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa). \tag{78}$$

Предложение 12.2. *Если* $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ *и* $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] : b \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Доказательство легко следует из (44) и (74) (см. (69), (71), (78)).

Из предложения 12.2 вытекает, что при $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ имеют место неравенства

$$b \leqslant \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa). \tag{79}$$

Теорема 12.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство вытекает из неравенств (79).

Согласно теореме 12.1 $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)$ представляют собой минимаксную квазипрограмму. В частности, $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$ (см. (75)) и при этом

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*,x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*,x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*). \quad (80)$$

Получаем (см. (77)) следующее очевидное теперь равенство:

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \min_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

13. Программный оператор на пространстве функций. Рассмотрим вариант МПИ, аналогичный [26] и реализуемый в функциональном пространстве. Наша ближайшая цель состоит в представлении преобразования $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \to \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa)$ в терминах действия данного оператора. Сначала рассмотрим, однако, некоторые вспомогательные построения, подобные [28–31]. В силу предположения (11) при $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ функция $[t, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $\xi \mapsto \psi_\kappa(\xi, x(\xi))$, ограничена (см. также условие в п. 11) и определено (конечное) значение

$$\sup_{\xi\in[t,\vartheta_0]} \psi_\kappa(\xi, x(\xi)) \in \mathbb{R}_+; \quad (81)$$

если, кроме того, $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то в силу (62) при $\tau \in [t, \vartheta_0]$ значения $g(\tau, x(\tau))$ не превосходят величины (81). Поэтому при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$ определено значение

$$\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_t(\vartheta)} g(\tau, x(\tau)); \rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M})\}) \in \mathbb{R}_+. \quad (82)$$

С учётом этого при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $t \in T$ определим функционал $\mathfrak{H}[g; t] \in \mathcal{R}_+[C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]]$ правилом: каждой УП $(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]$ поставим в соответствие значение (82), т.е. $(x(\cdot), \vartheta) \mapsto \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta)$; данное значение также не превосходит величины (81).

Предложение 13.1. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, то для каждого $b \in \mathbb{R}_+$ множества Лебега $\mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \vartheta)^{-1}([0, b])$ функционала*

$$\mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \vartheta) \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta))_{x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])]$$

замкнуты в топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

Доказательство подобно в идейном отношении обоснованию предложения 13 работы [30] и поэтому для уменьшения объёма статьи опущено.

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то (см. (13))

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{H}[g; t_*]|\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) = (\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, x(\tau));$$

$$\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M})\}))_{(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]]; \quad (83)$$

если $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$, то для функционала (83) определено его сечение

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \theta))_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)],$$

для которого $\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b]) = \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \bigcap \mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b])$ при $b \in \mathbb{R}_+$. С учётом предложения 13.1 получаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$ множество $\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b])$ замкнуто в (относительной) топологии равномерной сходимости на $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$, а следовательно, и компактно в этой топологии (учитываем компактность множества (13)); очевидно, что данное множество компактно и в пространстве $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. С учётом этого свойства и предложения 13.1 несложно (подобно [28–31]) устанавливается

Предложение 13.2. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ *и* $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, *то существует* $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ *такой, что*

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{x}(\cdot), \vartheta) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta).$$

В силу предложения 13.2 определено значение

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+,$$

где g, t_*, x_*, ν и ϑ удовлетворяют условиям этого предложения. В качестве следствия имеем включения

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall t_* \in T \quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \tag{84}$$

Вместе с тем, как легко видеть, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливо неравенство

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)). \tag{85}$$

С учётом (85) при $t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\exists b \in \mathbb{R}_+ : \quad \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant b \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

С учётом этого (см. (84), (85)) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Используя последнее свойство, задаём оператор $\Gamma : \mathfrak{M}_\psi \to \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ посредством следующего правила: при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ функция $\Gamma(g) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ такова, что

$$\Gamma(g)(t, x) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \inf_{\vartheta \in [t, \vartheta_0]} \min_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, \nu)} \mathbf{h}[g; t; x; \nu](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{86}$$

Итак, определён оператор $\Gamma \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]^{\mathfrak{M}_\psi}$. С учётом включений (63) имеем

$$(\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \quad \& \quad (\Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]).$$

14. Метод программных итераций. 2. Покажем, что последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k \in \mathbb{N}_0}$ может быть реализована при помощи итерационной процедуры с использованием оператора Γ. Сначала отметим два достаточно простых вспомогательных утверждения.

Предложение 14.1. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, *то* $g \stackrel{\leq}{=} \Gamma(g)$.

Предложение 14.2. *Оператор* Γ *обладает свойством изотонности: если* $g_1 \in \mathfrak{M}_\psi$, $g_2 \in \in \mathfrak{M}_\psi$ *и* $g_1 \stackrel{\leq}{=} g_2$, *то* $\Gamma(g_1) \stackrel{\leq}{=} \Gamma(g_2)$.

Доказательства обоих положений аналогичны [28–31] (см., в частности, [29, предложения 15, 16]).

Теорема 14.1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$.

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$, получая функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$, $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$ и значение $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$; тогда

$$(a_* \stackrel{\triangle}{=} \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+) \;\&\; (b_* \stackrel{\triangle}{=} \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \tag{87}$$

В силу предложения 9.4 и включений (87) получаем, что $a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa)$, и поэтому (см. (44))
$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{88}$$
Тогда, в частности (см. (21), (88)), реализуется включение
$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{89}$$
Согласно (21) и (89) имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)$. В силу предложения 10.5 $\zeta_\kappa(t_*, x_*) \leqslant a_*$. Из (21) и (88) вытекает, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)))$. Поэтому (см. (20))
$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*))$$
$$\&((\tau, x(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta[). \tag{90}$$
Фиксируем $\bar\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и подбираем (см. (90)) $\bar x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)$ и $\bar\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ так, что
$$((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \ \& \ ((\tau, \bar x(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \bar\vartheta[). \tag{91}$$
Вследствие включений (37), (91) и предложения 10.3 верно неравенство
$$(\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall \tau \in [t_*, \bar\vartheta[\ \& \ (\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*). \tag{92}$$
При этом в силу (67) имеем импликацию
$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)).$$
В итоге
$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)). \tag{93}$$
В силу включений (44), (45) и (89) выполняется неравенство $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \leqslant a_*$. Поэтому из (83), (92) и (93) вытекает импликация
$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{94}$$
Пусть теперь $\bar\vartheta \in \,]t_*, \vartheta_0]$. С учётом (67) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = [t_*, \bar\vartheta[$, и согласно (92) имеем следующие неравенства: $\sup\limits_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) \leqslant a_*$ и $\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*$. Используя (83), получаем импликацию
$$(\bar\vartheta \in \,]t_*, \vartheta_0]) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{95}$$
Из (94) и (95) следует, что $\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*$ во всех возможных случаях. Таким образом, справедливо неравенство
$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \ \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*.$$
Так как выбор меры $\bar\nu$ был произвольным, установлено, что (см. (86), (87))
$$b_* = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \leqslant a_*. \tag{96}$$
В силу предложения 14.1 верно неравенство $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$, а поэтому $b_* \in [\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa), \infty[$. Согласно утверждению (44) и предложению 10.1 имеем
$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \tag{97}$$

Далее, из (86) и (87) следует, что

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]}\ \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\vartheta)\leqslant b_* \quad \forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}. \tag{98}$$

Выберем произвольно $b^*\in\,]b_*,\infty[$, т.е. $b^*\in\mathbb{R}_+$ и $b_*<b^*$. Пусть $\nu^*\in\mathcal{E}_{t_*}$. Тогда в силу (98) для некоторых $\vartheta^*\in[t_*,\vartheta_0]$ и $x^*(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu^*)$ справедливо неравенство

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;\nu^*](x^*(\cdot),\vartheta^*)<b^*,$$

из которого вытекает следующее свойство:

$$(\rho((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*));\mathbf{M})<b^*)\ \&\ (\varepsilon_0^{(k)}(\tau,x^*(\tau)|\kappa)<b^* \quad \forall\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)). \tag{99}$$

С учётом (23) в силу выбора числа b^* имеем

$$W_k(S_0(\mathbf{M},b_*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b_*))\subset W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)),$$

а тогда (см. (97))

$$(t_*,x_*)\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)). \tag{100}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\vartheta^*=t_*$ и $\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0]$.

1) Пусть $\vartheta^*=t_*$. Тогда $[t_*,\vartheta^*[\,=\varnothing$ и, очевидно, $(t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ для любого $t\in[t_*,\vartheta^*[$. С учётом неравенств (99) получаем импликацию

$$(\vartheta^*=t_*)\ \Rightarrow\ (((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&$$

$$\&\ ((t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta^*[)). \tag{101}$$

2) Пусть $\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)=[t_*,\vartheta^*[$. Поэтому в силу (44), (99) и предложения 10.1 $(t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ для любого $t\in[t_*,\vartheta^*[$. С учётом неравенств (99) получаем импликацию

$$(\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0])\ \Rightarrow\ (((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&$$

$$\&\ ((t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta^*[)). \tag{102}$$

Вследствие импликаций (101) и (102) и произвольного выбора числа ϑ^* заключаем, что $\forall\nu\in\in\mathcal{E}_{t_*}$ $\exists x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)$ $\exists\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$:

$$((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&\ ((t,x(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta[).$$

Из (20) и (100) вытекает, что $(t_*,x_*)\in\mathbf{A}[S_0(\mathbf{M},b^*)](W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)))$. С учётом определения (21) имеем $(t_*,x_*)\in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ и в силу (44) $b^*\in\Sigma_0^{(k+1)}(t_*,x_*|\kappa)$. Так как число b^* выбиралось произвольно, установлено, что $]b_*,\infty[\,\subset\Sigma_0^{(k+1)}(t_*,x_*|\kappa)$. С учётом включений (45) получаем неравенство $a_*\leqslant b_*$. В итоге $a_*=b_*$ (см. (96)). Так как выбор позиции (t_*,x_*) был произвольным, получили (см. (87)) требуемое утверждение. Теорема доказана.

Итак, последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k\in\mathbb{N}_0}$ реализуется в виде итерационной процедуры

$$(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa)=\zeta_\kappa)\ \&\ (\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa)=\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))\quad \forall k\in\mathbb{N}_0). \tag{103}$$

Можно рассматривать процедуру (103) как новую реализацию МПИ; в связи с этим отметим [26, 31].

15. Свойство неподвижной точки. Вследствие соотношений (53) и (103) возникает вопрос об описании предельной функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ в терминах оператора Γ. Ответ доставляет

Теорема 15.1. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *является неподвижной точкой оператора* Γ, *т.е. справедливо равенство* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)=\Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))$.

Доказательство. Выбирая произвольно позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, получаем, что

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+) \ \& \ (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \tag{104}$$

В силу предложения 14.1 $a_* \leqslant b_*$.

Докажем справедливость обратного неравенства. При этом $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$ согласно предложению 9.4, а тогда

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{105}$$

Из (24) и (105) следует включение $(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)))$, а поэтому $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \ \& \ ((t, x(t)) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{106}$$

С учётом включений (44), (45) получаем, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$(\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*) \ \& \ (\varepsilon_0(t, x(t)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{107}$$

Пусть $\bar\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$. В силу неравенств (107) для некоторых $\bar x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)$ и $\bar\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем

$$(\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*) \ \& \ (\varepsilon_0(t, \bar x(t)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall t \in [t_*, \bar\vartheta[). \tag{108}$$

Случаи $\bar\vartheta = t_*$ и $\bar\vartheta \in \,]t_*, \vartheta_0]$ рассмотрим отдельно.

а) Пусть $\bar\vartheta = t_*$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = \{t_*\}$ и $\varepsilon_0(t, x(t)|\kappa) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = a_*$ для любого $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)$; см. (104). С учётом (83) и (108) получаем импликацию

$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{109}$$

б) Пусть $\bar\vartheta \in \,]t_*, \vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = [t_*, \bar\vartheta[$. Поэтому из неравенств (108) следует, что $\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*$ и $\varepsilon_0(t, \bar x(t)|\kappa) \leqslant a_*$ для любого $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)$, а тогда в силу представления (83) получаем импликацию

$$(\bar\vartheta \in \,]t_*, \vartheta_0]) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{110}$$

Из импликаций (109) и (110) вытекает, что неравенство $\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*$ справедливо во всех возможных случаях. В качестве следствия (см. (84)) получаем

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \ \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*.$$

Так как выбор меры $\bar\nu$ был произвольным, заключаем, что $b_* = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \leqslant a_*$. В итоге $a_* = b_*$, откуда (см. (104)) вытекает требуемое равенство функций (выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным). Теорема доказана.

Обозначим $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi : (g = \Gamma(g)) \ \& \ (\zeta_\kappa \leqq g)\}$.

Теорема 15.2. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *является* $\leqq$*-наименьшим элементом во множестве* $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$, *т.е.*

$$(\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \leqq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}).$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения в [28–31] (см., в частности, [29, теорема 3]).

Отметим очевидное следствие: справедливы неравенства $\zeta_\kappa \leqq \varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ и $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \leqq \psi_\kappa$; см. (64) и предложение 10.7. Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем (см. (58)) импликацию

$$(\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \zeta_\kappa(t_*, x_*)) \ \Rightarrow \ (\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \zeta_\kappa(t_*, x_*)).$$

16. Свойство функции цены. Дополним теорему 12.1, а именно: покажем, что при $(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n$ значение $\varepsilon_0(t,x|\kappa)$ представляет собой цену ДИ с функционалом качества $\gamma_t^{(\kappa)}$ (см. (71)).

Для этого сначала рассмотрим связь функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ с функцией максимина в классе стратегий-троек игрока II. Учитываем при этом (см. (31)), что при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ имеют место включения

$$(S_0(\mathbf{M},\varepsilon)\in\mathcal{F}')\ \&\ (\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\in\mathfrak{F}'). \tag{111}$$

Напомним построения пп. 4 и 5 в части стратегий-троек и порождаемых ими движений (подробнее см. в [38, 39]). Упомянутые движения [38, разд. 7] порождаются ОУ. Однако сами стратегии-тройки игрока II формируют управления из множеств $\mathcal{V}_t,\ t\in T$ (реализации управления игрока I допускаются в [38, 39] обобщёнными). Итак, при $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$ и $(V,\beta,m)\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}\times\mathbb{G}^*_{t_*}\times\mathbb{N}$ имеем непустой пучок $\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;m]$ траекторий, стартующих из позиций (t_*,x_*) и порождаемых совместным воздействием ОУ игрока I и обычных управлений из $\mathcal{V}_{t_*}$. Последние формируются пошагово посредством позиционой стратегии V, включаемой в моменты, вырабатываемые с помощью β в количестве, не превосходящем m; см. [38, разд. 7].

Согласно [38, теорема 9.2] с учётом включений (111) получаем при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ и $k\in\mathbb{N}$ равенство

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\setminus\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))=\{(t,x)\in\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon):\exists V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}\ \ \exists\beta\in\mathbb{G}_t\ \ \exists l\in\overline{1,k}$$
$$\forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t;x;V;\beta;l]\ \ \forall\vartheta\in[t,\vartheta_0]\ \ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon))\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (\exists\xi\in[t,\vartheta[:(\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\}. \tag{112}$$

Напомним свойство, отмеченное в [38, следствие 9.1] и касающееся совпадения множеств успешной разрешимости задач “обычного” и строгого уклонения (уклонения “с запасом”). В силу (29) и (30) при $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\setminus W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\setminus\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))). \tag{113}$$

Из равенств (112), (113), в частности, следует, что справедлива импликация

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\quad\forall(t,x)\in\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)\setminus W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\quad\exists V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}\quad\exists\beta\in\mathbb{G}^*_t\quad\exists k\in\mathbb{N}$$
$$\forall\mathbf{x}(\cdot)\in\mathfrak{X}[t;x;V;\beta;k]\quad\forall\vartheta\in[t,\vartheta_0]$$
$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon))\ \Rightarrow\ (\exists\xi\in[t,\vartheta[:(\xi,\mathbf{x}(\xi))\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)). \tag{114}$$

Отметим, что при $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$, $V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta\in\mathbb{G}^*_{t_*}$ и $k\in\mathbb{N}$ определено (конечное) значение

$$\inf_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]}\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))\in\mathbb{R}_+.$$

Предложение 16.1. *Если* $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$, $V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta\in\mathbb{G}^*_{t_*}$, $k\in\mathbb{N}$, $x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]$ *и* $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ *таковы, что*

$$((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon))\ \Rightarrow\ (\exists t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta):\quad(t,x(t))\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)),$$

то $\varepsilon<\omega_\kappa(t_*,x(\cdot),\vartheta)$.

Доказательство следует непосредственно из определений.

Следствие 16.1. *Если* $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$, $V\in\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta\in\mathbb{G}^*_{t_*}$, $k\in\mathbb{N}$ *и* $x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]$ *таковы, что*

$$\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]\quad((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon))\ \Rightarrow\ (\exists t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta):(t,x(t))\notin\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)),$$

то выполняется неравенство $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))\geqslant\varepsilon$.

Доказательство очевидно (см. (71) и предложение 16.1).

Предложение 16.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T\times\mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$, *то* $\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$ $\exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$. Тогда $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$. В силу (44) и (45) имеем $(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Поэтому

$$((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \vee ((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))). \tag{115}$$

Рассмотрение первого (в (115)) случая опустим в силу его очевидности (см. (15), (16)); итогом его является импликация

$$((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*} \quad \exists k \in \mathbf{N} : \varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))). \tag{116}$$

Рассмотрим второй случай. Пусть $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Тогда в силу (114) для некоторых $V^* \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta^* \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеет место импликация $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$ $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \ \Rightarrow \ (\exists t \in [t_*, \vartheta[\colon (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{117}$$

Пусть $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$. Тогда $y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, $y(t_*) = x_*$ и, согласно (117), верна импликация $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, y(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \ \Rightarrow \ (\exists t \in [t_*, \vartheta[\colon (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{118}$$

Выберем произвольно $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$ и рассмотрим отдельно случаи $\vartheta^* = t_*$ и $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$.

$1'$) Пусть $\vartheta^* = t_*$. Тогда согласно (70) $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*) = \psi_\kappa(t_*, x_*)$. В силу того, что $[t_*, t_*[\, = [t_*, \vartheta^*[\, = \varnothing$ согласно (118) имеем $(\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$, т.е. $(t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$. Поэтому согласно включению (37) $\varepsilon_* < \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \psi_\kappa(t_*, x_*)$ (см. (58)). В итоге $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$. Таким образом, установлено, что если $\vartheta^* = t_*$, то $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$.

$2'$) Пусть $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) = [t_*, \vartheta^*[$. Из импликации (118) следует, что

$$((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \ \Rightarrow \ (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) : (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{119}$$

Напомним, что $(t_*, x_*) \in T\times\mathbb{R}^n$, $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$, $V^* \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta^* \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $r \in \mathbb{N}$, $y(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$ и $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$. В силу предложения 16.1 и импликации (119) неравенство $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$ справедливо и в случае $2'$). Получили, что если $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$, то $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$.

Так как выбор числа ϑ^* был произвольным, получаем, что $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta)$ для всех $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$. Отсюда с учётом определения (71) вытекает неравенство $\varepsilon_* \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(y(\cdot))$. Так как и выбор функции $y(\cdot)$ был произвольным, установлено, что $\varepsilon_* \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))$ для всех $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$. Поэтому

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V^*;\beta^*;r]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Итак, доказана следующая импликация:

$$((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*} \quad \exists k \in \mathbb{N} : \varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))). \tag{120}$$

Из (116) и (120) вытекает требуемое утверждение. Предложение доказано.

Предложение 16.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]: \quad \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$. В силу предложения 9.4 $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Из (29) и (30) следует включение

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{121}$$

Тогда (см. [38, предложение 7.5]) для некоторых $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ и $\bar\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем

$$((\bar\vartheta, y(\bar\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \;\&\; ((t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \quad \forall t \in [t_*, \bar\vartheta[). \tag{122}$$

При этом $y(t_*) = x_*$ (см. п. 3, а также [38, 39]). Рассмотрим отдельно случаи $\bar\vartheta = t_*$ и $\bar\vartheta \in]t_*, \vartheta_0]$.

а$'$) Пусть $\bar\vartheta = t_*$. Тогда $(\bar\vartheta, y(\bar\vartheta)) = (t_*, x_*)$ и, согласно (67), $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = \{t_*\}$. Из включения (121) следует, что $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$. Согласно предложению 10.5 $(t_*, y(t_*)) \in (\zeta_\kappa)^{-1}([0, \varepsilon_*])$, т.е. $\zeta_\kappa(t_*, y(t_*)) \leqslant \varepsilon_*$. Итак, $\zeta_\kappa(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_*$ для всех $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)$. Отсюда с учётом включений (122) получаем, что

$$(\zeta_\kappa(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_* \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)) \;\&\; (\rho(\bar\vartheta, y(\bar\vartheta); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_*). \tag{123}$$

Вследствие (69) и (123) в случае а$'$) верно неравенство $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant \varepsilon_*$. Таким образом,

$$(\bar\vartheta = t_*) \;\Rightarrow\; (\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant \varepsilon_*). \tag{124}$$

б$'$) Пусть $\bar\vartheta \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = [t_*, \bar\vartheta[$ и в силу включений (122) получаем

$$(\rho((\bar\vartheta, y(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_*) \;\&\; ((t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)). \tag{125}$$

Из (125) и предложения 10.5 вытекает, в частности, что $(t, y(t)) \in (\zeta_\kappa)^{-1}([0, \varepsilon_*])$ для всех $t \in \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)$. Получили (см. (125)) свойство (123). В силу (69) неравенство $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant \varepsilon_*$ верно и в случае б$'$). Следовательно, если $\bar\vartheta \in]t_*, \vartheta_0]$, то $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant \varepsilon_*$. Поэтому с учётом (124) получаем, что $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant \varepsilon_*$ во всех возможных случаях. Тогда $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(y(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ в силу (71). Учитывая выбор $y(\cdot)$, приходим к требуемому свойству. Предложение доказано.

Из предложения 16.3 вытекает следующее свойство: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то определено (конечное) значение

$$\sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)].$$

С учётом предложения 16.2 заключаем, что справедлива

Теорема 16.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Из равенств (80) и теорем 12.1, 16.1 вытекает

Теорема 16.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$ *есть цена игры на минимакс-максимин* $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}$, *при этом*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \; \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) = \min_{\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}} \; \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) =$$

$$= \sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
3. *Ченцов А.Г.* Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1801–1808.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., 1967.
5. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М., 1985.
7. *Krasovskii A.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc., 1995.
8. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург, 2011.
9. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев, 1992.
10. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1977.
11. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М., 1991.
12. *Понтрягин Л.С.* К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук. 1996. Т. 21. № 4. С. 219–274.
13. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
14. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
15. *Мищенко Е.Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 5. С. 3–9.
16. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 185–187.
17. *Пшеничный Б.Н.* О линейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1968. № 1. С. 65–78.
18. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев, 1992.
19. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston; Basel; Berlin, 1995.
20. *Субботин А.И.* Об одном свойстве субдифференциала // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 9. С. 1315–1330.
21. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
22. *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
23. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
24. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
25. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
26. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 455–467.
27. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321.
28. *Ченцов А.Г., Хачай Д.М.* Релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения и методы итераций // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 18. № 4. С. 246–269.
29. *Chentsov A.G., Khachay D.M.* Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game / Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications. 2019. V. 203. P. 129–161.
30. *Ченцов А.Г., Хачай Д.М.* Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 64–91.
31. *Ченцов А.Г.* Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения–уклонения // Вестн. российск. ун-тов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С.196–244.
32. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М., 1970.
33. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
34. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

35. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., 1964.
36. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ. № 1933-79 / Уральский политехн. ин-т им. С.М. Кирова. Свердловск, 1979.
37. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
38. *Ченцов А.Г.* Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302.
39. *Ченцов А.Г.* Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. 2017. Т. 49. С. 17–54.
40. *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London, 2002.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.
После доработки 28.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1142–1145

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О БАЗИСНОСТИ В L_p СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2021 г. **Н. Ю. Капустин**

Изучается задача Штурма–Лиувилля с квадратом спектрального параметра в одном граничном условии и однородным другим граничным условием. При наличии кратного собственного значения устанавливается базисность системы собственных функций без любой функции с простым собственным значением.

DOI: 10.31857/S0374064121080148

Рассматривается спектральная задача

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$X(0) = 0, \quad X'(1) = d\lambda^2 X(1) \tag{2}$$

с ненулевым постоянным коэффициентом d. Эта задача в случае действительного физического параметра d изучалась в работах [1, 2]. Исследованы вопросы полноты, минимальности и базисности системы собственных функций в пространствах L_p, C и C^1.

Решением задачи (1), (2) является система собственных функций

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

отвечающих собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} = d(\sqrt{\lambda})^3. \tag{3}$$

Отметим, что при действительных значениях коэффициента d все корни характеристического уравнения (3) простые. В статье [3] рассматривался общий случай – когда физический параметр d может принимать и комплексные значения. Для определённости будем предполагать, что

$$-\pi/2 < \arg\sqrt{\lambda_n} \leqslant \pi/2,$$

а собственные числа занумеруем в порядке возрастания их абсолютных величин.

В упомянутой работе [3] получены следующие два результата. В случае простых корней, т.е. когда $d \notin \{\operatorname{ctg} z/z^3\}$, где $\{z\}$ – множество (комплексных) корней уравнения

$$1 + \frac{3\sin z\cos z}{z} = 0, \tag{4}$$

показано, что если из системы собственных функций задачи (1), (2) удалить любые две функции, то получившаяся система образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$), а биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m)X_n(1)}{(\lambda_l - \lambda_m)X_l(1)}X_l(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l)X_n(1)}{(\lambda_m - \lambda_l)X_m(1)}X_m(x)\right], \quad n \neq m, l,$$

где $A_n = (1 + 3d\lambda_n\sin^2\sqrt{\lambda_n})/2$, а m и l – номера удалённых функций.

В случае появления кратного корня, т.е. если $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, где комплексное число z – некоторый корень уравнения (4), система $\{X_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{l\}$, собственных функций задачи (1), (2) без одной функции $X_l(x)$, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$ (кратность в этом случае равна 2), образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p>1$ (базис Рисса при $p=2$), а биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_l-\lambda_n)X_n(1)}{X_l(1)}Z_l(x) - \left(1-\frac{(\lambda_l-\lambda_n)Z_l(1)}{X_l(1)}\right)\frac{X_n(1)}{X_l(1)}X_l(x)\right], \quad n\neq l,$$

где $Z_l(x) = -(2\sqrt{\lambda_l})^{-1}x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)$.

В настоящей статье мы дополним второй результат, рассмотрев случай, когда из системы собственных функций задачи (1), (2) удаляется произвольная функция с простым собственным значением.

Теорема. *Если $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, где комплексное число z – какой-либо корень уравнения (4), то система $\{X_n(x)\}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}$, собственных функций задачи (1), (2) без одной собственной функции $X_m(x)$, соответствующей простому собственному значению λ_m, при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m\neq l$, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p>1$ (базис Рисса при $p=2$). Биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что*

$$\overline{\Psi}_l(x) = A_l^{-1}\left[Z_l^\alpha(x) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{X_m(1)}X_m(x)\right],$$

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_n-\lambda_m)X_n(1)}{(\lambda_l-\lambda_m)X_l(1)}X_l(x) - \frac{(\lambda_n-\lambda_l)X_n(1)}{(\lambda_m-\lambda_l)X_m(1)}X_m(x)\right], \quad n\neq l,$$

где

$$Z_l^\alpha(x) = -\frac{x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha\sin(\sqrt{\lambda_l}x), \quad \alpha = \frac{1}{\lambda_l-\lambda_m}+\frac{d\lambda_l}{2},$$

$$A_l = \int_0^1 Z_l^\alpha(x)X_l(x)\,dx + d(\lambda_l+\lambda_m)Z_l^\alpha(1)X_l(1) = \frac{d\lambda_l^2+1}{4\lambda_l}.$$

Доказательство. Если $n\neq k$, то справедливо равенство

$$\int_0^1 X_n(x)X_k(x)\,dx + d(\lambda_n+\lambda_k)X_n(1)X_k(1) = 0, \tag{5}$$

которое в случае, когда все корни простые, даёт алгоритм построения биортогонально сопряжённой системы.

Пусть z – какой-либо корень уравнения (4) и пусть $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим спектральную задачу для присоединённой функции:

$$Z_l''(x) + \lambda Z_l(x) = X_l(x), \quad 0<x<1, \tag{6}$$

$$Z_l(0)=0, \quad Z_l'(1) = d\lambda^2 Z_l(1) - 2d\lambda X_l(1). \tag{7}$$

Решением задачи (6), (7) в случае собственной функции $X_l(x) = \sin(\sqrt{\lambda_l}x)$ является корневая функция

$$Z_l^\alpha(x) = -\frac{x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha\sin(\sqrt{\lambda_l}x),$$

где α – произвольное комплексное число. Для упрощения мы полагаем $\alpha = 0$.

Если $n \neq l$, то справедливо аналогичное равенству (5) соотношение

$$\int\limits_0^1 X_n(x) Z_l^\alpha(x)\,dx + d(\lambda_n+\lambda_l)X_n(1)Z_l^\alpha(1) - dX_n(1)X_l(1) = 0.$$

Нам остаётся проверить следующие два равенства:

$$\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_n(x)\,dx = 0, \quad n\neq l, \quad \text{и} \quad A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_l(x)\,dx = \frac{d\lambda_l^2+1}{4\lambda_l}.$$

Воспользуемся для этого соотношениями

$$3d\lambda_l \sin^2\sqrt{\lambda_l} = -1, \quad \sin^2\sqrt{\lambda_l} = 1+\frac{d\lambda_l^2}{3},$$

$$\int\limits_0^1 x\sin(\sqrt{\lambda_l}x)\cos(\sqrt{\lambda_l}x)\,dx = \frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} - \frac{1}{3\sqrt{\lambda_l}}, \quad \int\limits_0^1 \sin^2(\sqrt{\lambda_l}x)\,dx = \frac{2}{3},$$

справедливыми для кратного собственного значения.

Докажем первое из этих равенств:

$$A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_n(x)\,dx = \left[\int\limits_0^1 X_n(x)Z_l^\alpha(x)\,dx - \frac{Z_l^\alpha(1)}{X_m(1)}\int\limits_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx\right] =$$

$$= \left[-d(\lambda_n+\lambda_l)X_n(1)Z_l^\alpha(1) + d(\lambda_n+\lambda_m)X_n(1)Z_l^\alpha(1) + dX_n(1)X_l(1)\,dx\right] =$$

$$= dX_n(1)\left[Z_l^\alpha(1)(\lambda_l-\lambda_m) + X_l(1)\right] = 0,$$

так как

$$Z_l^\alpha(1) = -\frac{\cos\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} + \frac{d\lambda_l\sin\sqrt{\lambda_l}}{2} = \frac{X_l(1)}{\lambda_l-\lambda_m}.$$

Доказательство второго равенства содержат следующие преобразования:

$$A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_l(x)\,dx = \left[\int\limits_0^1 X_l(x)Z_l^\alpha(x)\,dx - \frac{Z_l^\alpha(1)}{X_m(1)}\int\limits_0^1 X_l(x)X_m(x)\,dx\right] =$$

$$= \left[\int\limits_0^1 X_l(x)Z_l^\alpha(x)\,dx + d(\lambda_l+\lambda_m)X_l(1)Z_l^\alpha(1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_l}}\left(\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} - \frac{1}{3\sqrt{\lambda_l}}\right) + \frac{2}{3}\alpha + d(\lambda_l+\lambda_m)\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} =$$

$$= -\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{4\lambda_l} - \frac{d}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_l} - 2d\lambda_l\sin^2\sqrt{\lambda_l}\left(\frac{1}{\lambda_l-\lambda_m} + \frac{d\lambda_l}{2}\right) +$$

$$+ d(\lambda_l+\lambda_m)\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} = -\frac{1}{4\lambda_l} - \frac{d\lambda_l}{12} - \frac{3}{2}d\sin^2\sqrt{\lambda_l} - d\lambda_l^2\sin^2\sqrt{\lambda_l} =$$

$$= -\frac{1}{4\lambda_l} - \frac{d\lambda_l}{12} + \frac{1}{2\lambda_l} + \frac{d\lambda_l}{3} = \frac{d\lambda_l^2+1}{4\lambda_l}.$$

Теперь, используя технику, разработанную для доказательства основной теоремы работы [4], несложно получить сформулированные в теореме утверждения о базисности. Теорема доказана.

Рассмотренная спектральная задача возникает при решении методом разделения переменных следующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$ с граничным условием, также записанным с помощью оператора теплопроводности, но в котором временна́я и пространственная переменные поменялись местами. Требуется найти функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\overline{D}) \bigcap C^2(\overline{D} \bigcap \{t > 0\})$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{8}$$

с начальным

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{9}$$

и граничными

$$u(0,t) = 0, \quad du_{tt}(1,t) = u_x(1,t), \quad t \in (0,T), \tag{10}$$

условиями, $d < 0$. В работе [3] подробно изучен вопрос о корректности этой смешанной задачи. Получены следующие результаты: пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера $C^{2+\alpha}[0,1]$, $\alpha > 0$ и $f(0) = f''(0) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (8)–(10). Отметим, что задача (8)–(10) в классической постановке – о нахождении решения в классе $C^{1,0}(\overline{D}) \bigcap C^2(\overline{D} \bigcap \{t > 0\})$ – имеет неединственное решение.

Автор благодарит академика Е.И. Моисеева за проявленный интерес к этой работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504–1507.
2. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе C1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
3. *Капустин Н.Ю.* К вопросу о базисности системы собственных функций одной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1284–1289.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.
После доработки 19.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1146–1150

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.58

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2021 г. В. И. Максимов

Приводится регуляризирующий алгоритм решения задачи динамического восстановления неизвестного входа, действующего на нелинейное векторное дифференциальное уравнение. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений.

DOI: 10.31857/S037406412108015X

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий (управлений). Предполагается, что система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ – управление, P – компакт, $f : T \times \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ – векторная функция, непрерывная по t, u и липшицева по x. Эволюция фазового состояния $x(t)$, $t \in T$, определяется некоторым входом $u(\cdot)$. Этот вход, а также траектория $x(\cdot)$ системы неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, измеряются с некоторой ошибкой координаты вектора $x(\tau_i)$. Требуется восстановить управление $u(\cdot)$, порождающее решение $x(\cdot)$. Так как точное восстановление управления $u(\cdot)$ невозможно, то необходимо построить алгоритм приближённого вычисления некоторого приближения к $u(\cdot)$. Это приближение должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности измерения $x(\tau_i)$ и чем гуще сетка $\{\tau_i\}$, взятая на промежутке T.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем. Один из подходов к решению подобного типа задач развит в работах [1–5]. Здесь мы указываем только монографии и обзорные статьи. В соответствии с этим подходом задача динамического восстановления заменяется задачей позиционного управления некоторой специальным образом подобранной системы, называемой *моделью*. При этом приближение неизвестного входа строится с помощью модели. В настоящей работе предложен отличный от известных алгоритм решения задачи восстановления, основанный на тех же идеях, что и алгоритмы из указанных выше работ.

2. Алгоритм решения. Рассмотрим разбиение отрезка T на $m_h - 1$ полуинтервалов $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ узлами $\tau_{h,i} = t_0 + i\delta_h$, $0 \leqslant i \leqslant m_h$, с шагом $\delta_h = (\vartheta - t_0)/m_h$. Через ξ_i^h обозначим результаты измерений состояний $x(\tau_i)$, т.е. векторы, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h| \leqslant h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2}$$

где $h \in (0, 1)$ – величина погрешности измерения фазового состояния системы (1), а $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

В соответствии с подходом [1–5], прежде чем приступить к описанию алгоритма решения задачи, мы должны указать вспомогательную систему (модель). В данной статье модель описывается уравнением вида

$$\dot{w}_h(t) = v^h(t), \quad t \in T, \quad w_h(t_0) = \xi_0^h. \tag{3}$$

Её решение – абсолютно непрерывная функция $w_h(\cdot) = w_h(\cdot\,; t_0, w_h(t_0), v^h(\cdot))$.

Заметим, что модель является простейщей дифференциальной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным. Обозначим

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n) : u(t) \in P \ \text{ при п.в. } \ t \in T\}.$$

Пусть $\operatorname{sel} U(x(\cdot))$ – совокупность всех управлений $u(\cdot)$ из $P(\cdot)$, порождающих $x(\cdot)$, т.е.

$$\operatorname{sel} U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ \text{ при п.в. } \ t \in T\};$$

в дальнейшем через $\operatorname{dist}(u(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot)))$ обозначаем расстояние между управлением $u(\cdot)$ и непустым множеством $\operatorname{sel} U(x(\cdot))$ в метрике пространства $L_2(T;\mathbb{R}^n)$.

Через $v_{[a,b]}(\cdot)$ будем обозначать сужение функции $v(t)$ на отрезок $[a,b]$. Введём два управления $u^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$. При этом второе управление (управление в модели (3)) будет носить вспомогательный характер. Оно необходимо для вычисления $u^h(\cdot)$. Пусть функции $v^h_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(\cdot)$ и $u_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(\cdot)$ вычисляются в моменты $\tau_i = \tau_{h,i}$ по правилу

$$v^h(t) = 0, \quad u^h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \delta_0 = [t_0, \tau_1),$$

$$v^h(t) = v^h_i = v^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i, w_h(\tau_i)), \quad u^h(t) = u^h_i = u^h(\tau_i, \xi^h_i, v^h_i)$$
$$\text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [1 : m-1], \quad m = m_h,$$

где

$$v^h_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \rho^h_i \leqslant 0 \ \text{ или } \ |\pi^h_i| \leqslant \varepsilon, \\ -\rho^h_i (a^h_i)^{-2}\pi_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$u^h_i = \arg\min\{|f(\tau_i, \xi^h_i, v) - v^h_i| : v \in P\},$$

$$\rho^h_i = -(\pi^h_i, \chi^h_i), \quad \pi^h_i = w_h(\tau_i) - \xi^h_{i-1}, \quad \chi^h_i = \xi^h_i - \xi^h_{i-1}, \quad a^h_i = |\pi^h_i|\delta^{1/2},$$

здесь через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Утверждение [6, с. 69]. *Если семейство управлений $\tilde{u}^h(\cdot) \in P(\cdot)$ таково, что*

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} |f(t, x(t), \tilde{u}^h(t)) - \dot{x}(t)|^2 dt \to 0 \quad \text{\it при} \quad h \to 0,$$

то имеет место сходимость

$$\operatorname{dist}(\tilde{u}^h(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot))) \to 0 \quad \text{\it при} \quad h \to 0.$$

Теорема. *Пусть при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ и всех $h \in (0,1)$ выполняется неравенство $h^{1-\varepsilon}\delta^{-1}(h) \leqslant c_0$ $(c_0 = \mathrm{const} \in (0,+\infty))$. Тогда*

$$\operatorname{dist}(u^h(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot))) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Оценим изменение величины $\varepsilon_{i+1} = |r_{i+1}|^2$, $r_{i+1} = w_h(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)$, $i \in [0 : m-1]$. Имеем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_i + J_{1,i} + J_{2,i}, \tag{5}$$

где

$$J_{1,i} = 2\biggl(r_i, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\,d\tau\biggr), \quad J_{2,i} = \biggl|\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\,d\tau\biggr|^2, \quad \mu_1(\tau; v^h, \dot{x}) = v^h(\tau + \delta) - \dot{x}(\tau).$$

Ввиду (2) верно неравенство
$$\left|\chi_i^h - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{x}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant 2h, \tag{6}$$
воспользовавшись которым получим
$$\rho_i^h \leqslant -\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{x}(\tau)\,d\tau\right) + 2h|\pi_i^h|.$$
Отсюда следует, что
$$\rho_i^h \leqslant a_i^h|\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h|\pi_i^h|. \tag{7}$$
Далее, в силу неравенств (6) верна оценка
$$J_{1,i} \leqslant \overline{J}_{1,i} + \beta_{h,i}. \tag{8}$$
Здесь
$$\beta_{h,i} = 2h \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\mu_1(\tau; v^h, \dot{x})|\,d\tau,$$
$$\overline{J}_{1,i} = 2\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\,d\tau\right) \leqslant 2\rho_i^h + 4h|\pi_i^h| + 2\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v^h(\tau+\delta)\,d\tau\right).$$
Заметим, что при выполнении условия
$$\rho_i^h > 0 \tag{9}$$
управление $v^h(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, вида (4) обеспечивает выполнение неравенства
$$\rho_i^h + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\pi_i^h, v^h(\tau+\delta))\,d\tau \leqslant 0. \tag{10}$$
В таком случае при условии (9) из определения (4) и оценки (7) вытекает неравенство
$$|v^h(\cdot)|_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} \leqslant \left(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\rho_i^h|\pi_i^h|(a_i^h)^{-2})^2\,dt\right)^{1/2} =$$
$$= \rho_i^h/a_i^h \leqslant |\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h|\pi_i^h|^{-1}\delta^{-1/2}|\pi_i^h| = |\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h\delta^{-1/2}. \tag{11}$$
Очевидно, неравенства (10) и (11) верны и при $\rho_i^h \leqslant 0$.

Рассмотрим величину $\beta_{h,i}$. Имеем
$$\beta_{h,i} \leqslant 4h^2 + \delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)}\}. \tag{12}$$
Ввиду (11) справедливо неравенство
$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} \leqslant 2|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 8h^2\delta^{-1}, \tag{13}$$
учитывая которое в неравенстве (12), получаем
$$\beta_{h,i} \leqslant 4h^2 + 3\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 8h^2\delta^{-1} \leqslant 12h^2\delta^{-1} + 3\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)}. \tag{14}$$

Кроме того, в силу (13) имеет место оценка

$$J_{2,i} \leqslant 2\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)}\} \leqslant 4\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 16h^2. \tag{15}$$

Воспользовавшись неравенством (10), устанавливаем оценку

$$\overline{J}_{1,i} \leqslant 4h(h + \varepsilon_i^{1/2}) \leqslant 4h^2 + 2h + 2h\varepsilon_i \leqslant 6h + 2h\varepsilon_i. \tag{16}$$

Объединив (14) и (15), получим

$$\beta_{h,i} + J_{2,i} \leqslant 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 28h^2\delta^{-1}. \tag{17}$$

Из неравенства (5) вследствие оценок (8), (16) и (17) выводим неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (1+2h)\varepsilon_i + 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 6h + 28h^2\delta^{-1}, \quad i \in [0 : m-1],$$

учитывая которое, аналогично [7, с. 59–61] устанавливаем, что

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (|w^h(t_0+\delta) - x(t_0)|^2 + 6h\delta^{-1} + 28h^2\delta^{-2} + 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)}) \times$$

$$\times \exp\{(1 + 2h\delta^{-1})(\tau_{i+1} - t_0)\}, \quad i \in [0 : m-1]. \tag{18}$$

Далее, при всех $t \in \delta_i$ выполняется соотношение

$$|w_h(t) - x(t)|^2 = \left| w_h(\tau_{i+1}) - \int\limits_t^{\tau_{i+1}} v^h(s+\delta)ds - x(\tau_i) - \int\limits_{\tau_i}^t \dot{x}(s)ds \right|^2 \leqslant \varepsilon_{i+1} + e_i. \tag{19}$$

Здесь

$$e_i = 2|w_h(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\dot{x}(\tau)| + |v^h(\tau+\delta)|\}\, d\tau + 2\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1};\mathbb{R}^n)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{i+1} + 4\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1}:\mathbb{R}^n)}\}.$$

В таком случае, воспользовавшись неравенством (11), несложно показать, что $e_i \leqslant \varepsilon_{i+1} + c_1\delta$. Отсюда и из (18), (19) вытекает оценка

$$|x(t) - w_h(t)|^2 \leqslant c_2(h\delta^{-1}(1 + h\delta^{-1}) + \delta), \quad t \in T. \tag{20}$$

Здесь и ниже c_j, $j = 1, 2, \ldots,$ – положительные постоянные.

Далее, в силу (11), каково бы ни было $\lambda \in (0, +\infty)$, верно неравенство

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1};\mathbb{R}^n)} \leqslant (|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + 2h\delta^{-1/2})^2 \leqslant (1+\lambda)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + 4h^2(\lambda\delta)^{-1}.$$

Следовательно,

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant (1+\lambda)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} + 4(\vartheta - t_0)\lambda^{-1}(h\delta^{-1})^2. \tag{21}$$

Если $\lambda = h^\varepsilon$, $h^{1-\varepsilon}\delta^{-1}(h) \leqslant c_0$ при $h \in (0,1)$, то $(\vartheta - t_0)\lambda^{-1}(h\delta^{-1})^2 \leqslant c_2h^\varepsilon$ и из (21) следует неравенство

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant (1 + h^\varepsilon)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} + c_4h^\varepsilon. \tag{22}$$

Воспользовавшись неравенствами (20) и (22), стандартным образом (см., например, [3, с. 24–26]) устанавливаем сходимость

$$v^h(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{23}$$

Через $X(\cdot)$ обозначим пучок решений системы (1), т.е.

$$X(\cdot) = \{x(\cdot) : \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \quad u(\cdot) \in P(\cdot), \quad x(t_0) = x_0\}.$$

Пусть $K = \sup\{|x| : x \in X(t),\ \ t \in T\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant K + 1\}$. Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in T$ и всех $x(\cdot) \in X(\cdot)$ справедливо неравенство $|\dot{x}(t)| \leqslant c_5$. Поэтому при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0 : m-1]$, $u \in P$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} ||f(t, x(t), u) - \dot{x}(t)| - |f(\tau_i, \xi_i^h, u) - v_i^h|| \leqslant \omega(\delta) + L(|\xi_i^h - x(t)| + |\dot{x}(t) - v_i^h|) \leqslant \\ \leqslant c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v^h(t)|). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\omega(\delta) = \sup\{|f(t_1, x, u) - f(t_2, x, u)| : t_1, t_2 \in T,\ \ |t_1 - t_2| \leqslant \delta,\ \ x \in Q,\ \ u \in P\}$. Пусть $u(\cdot) \in \operatorname{sel} U(x(\cdot))$, L – постоянная Липшица функции $x \mapsto f(t, \cdot, u)$. Положив в (24) $u = u^h(t)$, устанавливаем справедливую при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0 : m-1]$ оценку

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant |f(\tau_i, \xi_i^h, u^h(t)) - v_i^h| + c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|).$$

Отсюда, учитывая правило определения u_i^h (см. (4)), получаем

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant |f(\tau_i, \xi_i^h, u(t)) - v_i^h| + c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|). \tag{25}$$

Пусть в (24) $u = u(t)$, тогда, воспользовавшись равенством

$$|f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)| = 0 \quad (\text{при п.в.} \quad t \in T),$$

из (24) выводим справедливую при п.в. $t \in \delta_i$ оценку

$$|f(\tau_i, \xi_i^h, u(t)) - v_i^h| \leqslant c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|). \tag{26}$$

Учитывая неравенства (25), (26), получаем, что при п.в. $t \in T$ верна оценка

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant 2c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v^h(t)|). \tag{27}$$

Справедливость теоремы следует из утверждения, сходимости (23) и неравенства (27). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
2. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
3. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011.
4. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
5. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов И.И.* Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
6. *Кряжимский А.В.* О непрерывности лебеговских множеств в задаче оптимального управления // Задачи оптимизации и устойчивости в управляемых системах. Свердловск, 1990. С. 54–73.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 07.11.2020 г.
После доработки 09.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.