СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 3–12

УДК 519.242

О ВЛИЯНИИ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАНСПОРТНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДУЛЯ НА ОСНОВЕ ТЕРМОЭМИССИОННОЙ ЯДЕРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

В. В. Онуфриев[1, *], Е. В. Онуфриева[1], В. В. Синявский[1]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
**e-mail: onufryev@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 24.06.2021 г.
После доработки 02.08.2021 г.
Принята к публикации 06.08.2021 г.

Использование ЯЭУ в составе ТЭМ в современных условиях рассматривается как одна из первоочередных задач транспортировки и электропитания функциональной аппаратуры КА. Уровень электрической мощности транспортного и энергетического режимов ЯЭУ ТЭМ обычно различаются в 2–3 раза, поэтому мероприятия, направленные на снижение мощности транспортного режима при сохранении требований пониженной мощности и заданного ресурса энергетического режима, могут привести к снижению массы и стоимости ЯЭУ. В настоящей работе выполнены исследования по влиянию типа и характеристик электроракетных двигателей (ЭРД) и ЭРДУ в целом на требуемую мощность транспортного режима и возможности за счет их целесообразного выбора понизить максимальный уровень мощности двухрежимной ЯЭУ.

Ключевые слова: транспортно-энергетический модуль, ядерная энергетическая установка, термоэмиссионный реактор-преобразователь, электроракетный двигатель, стационарный плазменный двигатель, электроракетный двигатель с дополнительным подводом тепла

DOI: 10.31857/S0002331021040099

ВВЕДЕНИЕ

Использование в космосе ядерно-энергетических установок (ЯЭУ) как источников электроэнергии возможно по трем направлениям:

– в качестве бортового источника электроэнергии функциональной аппаратуры энергоемких космических аппаратов (КА);

– для электропитания электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) космических транспортных аппаратов, называемых также межорбитальными буксирами (МБ);

– для обеспечения решения обеих перечисленных выше задач – транспортировки КА на энергоемкие рабочие орбиты и последующее длительное электропитание аппаратуры КА. Такие установки на основе двухрежимной ЯЭУ и ЭРДУ принято называть транспортно-энергетическими модулями (ТЭМ).

Применительно к использованию по первому направлению в нашей стране были разработаны космические ЯЭУ первого поколения: длительно и успешно эксплуатировавшаяся в космосе в составе разведывательных КА УС-А [1, 2] термоэлектрическая ЯЭУ "Бук" электрической мощностью 2.3 кВт [3], испытанная в космосе в составе КА "Плазма-А" [4] термоэмиссионная ЯЭУ "Топаз" полезной электрической мощностью 6 кВт [5], предназначенная для электропитания геостационарного КА непосредственного телевещания, и прошедшая наземные испытания термоэмиссионная ЯЭУ “Енисей” (“Топаз-2”) [6]. Для применения по первому направлению могут быть использованы и разрабатываемые по технологии “Топаз” ЯЭУ второго поколения с термоэмиссионным реактором-преобразователем (ТРП) электрической мощностью в несколько десятков киловатт [7]. К этому направлению могут быть отнесены и проекты лунных [8] и напланетных атомных электростанций мощностью в десятки и сотни киловатт [9].

Применительно ко второму направлению использования ЯЭУ рассматривается применение ядерных электроракетных транспортных аппаратов (ЭРТА) в качестве межорбитальных околоземных и многоразовых лунных буксиров [10–12]. Показана высокая эффективность ЭРТА на основе ЯЭУ с ТРП электрической мощностью в сотни и тысячи киловатт относительно традиционных средств космической транспортировки (разгонных блоков на основе жидкостных ракетных двигателей) [13].

Использование ЯЭУ в составе ТЭМ в современных условиях рассматривается как одна из первоочередных задач [14, 15]. Применительно к решению этой задачи в работах [10, 15] приведены характеристики разработанных проектов двухрежимных ЯЭУ на основе ТРП по технологии “Топаз” электрической мощностью до 50 кВт в режиме длительного до 6 лет электропитания функциональной аппаратуры КА с возможностью в течение до года работать в форсированном по электрической мощности примерно в 2 раза режиме для питания ЭРДУ. Предложены и другие варианты создания двухрежимных ЯЭУ на основе ТРП [16, 17].

Уровень электрической мощности транспортного и энергетического режимов ЯЭУ ТЭМ обычно различаются в 2–3 раза [18], в результате чего применительно к задаче питания аппаратуры КА масса ЯЭУ является переразмеренной. Поэтому мероприятия, направленные на снижение мощности транспортного режима при сохранении требований пониженной мощности и заданного ресурса энергетического режима, могут привести к снижению массы и стоимости ЯЭУ.

В настоящей работе выполнены исследования по влиянию типа и характеристик электроракетных двигателей (ЭРД) и ЭРДУ в целом на требуемую мощность транспортного режима и возможности за счет их целесообразного выбора понизить максимальный уровень мощности двухрежимной ЯЭУ.

УКРУПНЕННАЯ ЭНЕРГОМАССОВАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДУЛЯ

Примем следующую массовую модель ТЭМ КА, транспортирующего полезную нагрузку. В состав ТЭМ входит ЯЭУ на основе ТРП, система преобразования тока (СПТ), конструкция (связывает все агрегаты), бортовая кабельная сеть (БКС) и ЭРДУ, которая включает блок ЭРД и систему хранения и подачи рабочего тела (СХПТР), заправленную рабочим телом.

В этом случае массовое уравнение ТЭМ КА запишется в виде

$$M_{\text{ТЭМ}} = M_{\text{ЯЭУ}} + M_{\text{СПТ}} + M_{\text{ЭРД}} + M_{\text{БКС}} + M_{\text{СХПРТ}} + M_{\text{рт}} + M_{\text{кон.}}. \quad (1)$$

В (1) введены следующие модельные зависимости составляющих масс ТЭМ КА.

ЯЭУ на основе ТРП

$$M_{\text{ЯЭУ}} = \gamma_{\text{ЯЭУ}} N_{\text{ЯЭУ}}, \quad (2)$$

где $\gamma_{\text{ЯЭУ}}$ – удельная масса ЯЭУ, [кг/кВт]; $N_{\text{ЯЭУ}}$ – ее электрическая мощность.

Системы преобразования тока – СПТ

$$M_{\text{СПТ}} = \gamma_{\text{СПТ}} N_{\text{СПТ}}, \quad (3)$$

где $\gamma_{\text{СПТ}}$ – удельная масса СПТ; $N_{\text{СПТ}}$ – электрическая мощность СПТ, связанная с электрической мощностью ЯЭУ соотношением

$$N_{\text{СПТ}} = \eta_{\text{БКС}} N_{\text{ЯЭУ}}, \quad (4)$$

где $\eta_{\text{СПТ}}$ – КПД БКС на участках ТРП – СПТ и СПТ – ЭРДУ.

Блока ЭРД (включая блок питания и управления):

$$M_{ЭРД} = \gamma_{ЭРД} N_{ЭРД}, \tag{5}$$

где $\gamma_{ЭРД}$ – удельная масса блока ЭРД; $N_{ЭРД}$ – электрическая мощность блока ЭРД, определяемая как

$$N_{ЭРД} = \eta_{БКС} N_{СПТ} = \eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} N_{ЯЭУ}. \tag{6}$$

Бортовой кабельной сети

$$M_{БКС} = \gamma_{БКС} N_{БКС} \approx \gamma_{БКС} N_{ЯЭУ}, \tag{7}$$

где $\gamma_{БКС}$ – удельная масса кабельной сети.

СХПРТ как доли φ (φ = 0.1–0.3 [19, 20]) от массы рабочего тела $M_{рт}$

$$M_{СХПРТ} = \varphi_{СХПРТ} M_{рт}. \tag{8}$$

Конструкции КА

$$M_{кон.} = \alpha_{кон.} M_{ЯЭУ} + \alpha_{кон.1} M_{рт}, \tag{9}$$

где $\alpha_{кон.}$ – массовая доля конструкции, связанная с ЯЭУ и блоком ЭРД; $\alpha_{кон.1}$ – массовая доля конструкции, связанная с массой и объемом РТ в СХПРТ.

В результате получим следующее массовое уравнение КА

$$\begin{gathered} M_{КА} = \gamma_{ЯЭУ} N_{ЯЭУ} + \gamma_{СПТ} \eta_{БКС} N_{ЯЭУ} + \gamma_{ЭРД} \eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} N_{ЯЭУ} + \gamma_{БКС} N_{ЯЭУ} + \\ + \alpha_{кон.} M_{ЯЭУ} + \alpha_{кон.1} M_{рт}. \end{gathered} \tag{10}$$

Массу рабочего тела можно определить по формуле Мещерского [19, 20]

$$M_{рт} = M_{КА} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta V_{КА}}{I_{уд}} \right) \right], \tag{11}$$

где $\Delta V_{КА}$ – характеристическая скорость перелета; $I_{уд}$ – скорость истечения рабочего тела из ЭРД.

Вместе с тем масса рабочего тела, электрическая мощность ЭРД и скорость истечения связаны соотношением

$$N_{ЭРД} = \eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} N_{ЭУ} = \frac{m I_{уд}^2}{\eta_{ЭРД}} = \frac{M_{рт} I_{уд}^2}{t_р \eta_{ЭРД}} = \frac{M_{КА} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta V_{КА}}{I_{уд}} \right) \right] I_{уд}^2}{t_р \eta_{ЭРД}}, \tag{12}$$

где $t_р$ – время работы ЭРДУ; m – расход рабочего тела.

Таким образом, можно связать электрическую мощность ЯЭУ с массой рабочего тела на перелет

$$M_{рт} = \frac{\eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} N_{ЭУ} t_р \eta_{ЭРД}}{I_{уд}^2}. \tag{13}$$

В результате масса ТЭМ КА запишется в виде

$$\begin{gathered} M_{ТЭМ} = N_{ЯЭУ} \left[\gamma_{ЯЭУ} + \gamma_{СПТ} \eta_{БКС} + \gamma_{ЭРД} \eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} + \gamma_{БКС} + (1 + \varphi_{СХПРТ}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\eta_{БКС}^2\ \eta_{СПТ}\ \ 2 t_р \eta_{ЭРД}}{I_{уд}^2} + \ \alpha_{кон.} \gamma_{ЯЭУ} + \alpha_{кон.1} \frac{\eta_{БКС}^2 \eta_{СПТ} t_р \eta_{ЭРД}}{I_{уд}^2} \right] \end{gathered}$$

или:

$$M_{\text{ТЭМ}} = N_{\text{ЯЭУ}}\left[(1+\alpha_{\text{кон.}})\gamma_{\text{ЯЭУ}} + \gamma_{\text{СПТ}}\eta_{\text{БКС}} + \gamma_{\text{ЭРД}}\eta^2_{\text{БКС}}\eta_{\text{СПТ}} + \gamma_{\text{БКС}} + \right.$$
$$\left. + \left(1+\varphi_{\text{СХПРТ}}+\alpha_{\text{кон.1}}\right)\frac{\eta^2_{\text{БКС}}\,\eta_{\text{СПТ}}t_{\text{р}}\eta_{\text{ЭРД}}}{I^2_{\text{уд}}}\right]. \tag{14}$$

В свою очередь удельная масса ЯЭУ по данным [13] зависит от ее электрической мощности $N_{\text{ЯЭУ}}$ по формуле

$$\gamma_{\text{ЯЭУ}} = \frac{51.43}{0.00001N_{\text{ЯЭУ}} + 0.35} + 4.85. \tag{15}$$

Причем в вышеприведенной формуле электрическую мощность $N_{\text{ЯЭУ}}$ подставляем в (Вт).

Таким образом, выражение (14) примет вид

$$M_{\text{ТЭМ}} = N_{\text{ЯЭУ}}\left[(1+\alpha_{\text{кон.}})\left(\frac{51.43}{0.00001N_{\text{ЯЭУ}} + 0.35} + 4.85\right)\Big/1000 + \gamma_{\text{СПТ}}\eta_{\text{БКС}} + \right.$$
$$\left. + \gamma_{\text{ЭРД}}\eta^2_{\text{БКС}}\eta_{\text{СПТ}} + \gamma_{\text{БКС}} + \left(1+\varphi_{\text{СХПРТ}}+\alpha_{\text{кон.1}}\right)\frac{\eta^2_{\text{БКС}}\,\eta_{\text{СПТ}}\,2t_{\text{р}}\eta_{\text{ЭРД}}}{I^2_{\text{уд}}}\right]. \tag{16}$$

Следовательно, сравнение вариантов можно провести по функционалу (16), используя величины $N_{\text{ЯЭУ}}$ и $I_{\text{уд}}$. Первый параметр функционала влияет на массу энергоисточника и преобразователя энергии, а второй – на массу запасенного рабочего тела. Величина скорости истечения из ЭРДУ и требуемая электрическая мощность рассчитывались для каждого из вариантов. Используя эти условия, оценим величину электрической и тепловой мощности ЯЭУ, необходимую для совершения транспортной операции КА.

Сравнение вариантов ТЭМ по массе проведем при следующих условиях:

– одинаковая сила тяги ЭРД $P_{\text{т}}$;

– одинаковые характеристики агрегатов ТЭМ в обоих вариантах – удельная бортовой кабельной сети ($\gamma_{\text{БКС}}$) и системы преобразования тока ($\gamma_{\text{СПТ}}$);

– одинаковые массовые доли конструкции КА для его ТЭМ ($\alpha_{\text{кон.}}$, $\alpha_{\text{кон.1}}$);

– одинаковые КПД агрегатов ТЭМ – $\eta_{\text{СПТ}}$, $\eta_{\text{БКС}}$;

– одинаковое время перелета – $t_{\text{р}}$.

С целью поиска минимума массы $\text{М}_{\text{ТЭМ}}$ проведено исследование выражения (16) для вариантов:

– ТЭМ с ТРП и блок ЭРД на базе электростатических стационарных плазменных двигателей (СПД);

– ТЭМ с ТРП и ЭДПТ (ЭРД с дополнительным подводом тепла [22]).

Величина КПД современных ЭРДУ с электростатическими двигателями [23–25] составляет $\eta_{\text{ЭРД}} = 0.5$–0.6, массовый коэффициент СХПРТ для ксенона $\varphi_{\text{СХПРТ}.Xe} = 0.3$. Воспользуемся наиболее передовыми результатами разработки электростатических двигателей в РФ [25]. Авторы приводят линейку разработанных моделей двигателей СПД и ионных двигателей (ИД). В ИЦ им. М.В. Келдыша разработан эскизный проект двигателя ИД-МВ, который планируется использовать в качестве основы при создании ЭРДУ мегаваттного класса. Двигатель будет иметь номинальную мощность 32 кВт при тяге 725 мН и скорости истечения до 70 км/с [25].

Мощность струи $N_{\text{струи}}$ рабочего тела из ЭРД связана с его электрической мощностью соотношением

$$N_{\text{ЭРД}} = \frac{N_{\text{струи}}}{\eta_{\text{ЭРД}}} = \frac{P_{\text{т}} I_{\text{уд}}}{\eta_{\text{ЭРД}}}. \tag{17}$$

Выходная электрическая мощность ТРП (необходимая для перелета) определится с учетом КПД передающих агрегатов как

$$N_{\text{ЯЭУ}} = \frac{N_{\text{ЭРДУ}}}{\eta_{\text{БКС}}^2 \eta_{\text{СПТ}}} = \frac{P_{\text{т}} I_{\text{уд}}}{\eta_{\text{ЭРД}} \eta_{\text{БКС}}^2 \eta_{\text{СПТ}}}. \tag{18}$$

КПД БКС в квадрате, так как два участка шин в ТЭМ: ТРП – СПТ и СПТ – ЭРДУ.

Таким образом, массовое уравнение ТЭМ запишется как

$$\begin{aligned} M_{\text{ТЭМ}} = \frac{P_{\text{т}} I_{\text{уд}}}{\eta_{\text{ЭРД}} \eta_{\text{БКС}}^2 \eta_{\text{СПТ}}} \Bigg[& \frac{(1+\alpha_{\text{кон.}})\left(\dfrac{51.43}{0.00001 N_{\text{ЯЭУ}} + 0.35} + 4.85\right)}{1000} + \gamma_{\text{СПТ}} \eta_{\text{БКС}} + \\ & + \gamma_{\text{ЭРД}} \eta_{\text{БКС}}^2 \eta_{\text{СПТ}} + \gamma_{\text{БКС}} \Bigg] + (1 + \varphi_{\text{СХПРТ}.Xe} + \alpha_{\text{кон.1}}) \frac{P_{\text{Т}}}{I_{\text{уд}}} t_{\text{р}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Для расчетного сравнения введем общие одинаковые данные для обоих вариантов построения ТЭМ: $P_{\text{т}} = 1$ Н; $\eta_{\text{СПТ}} = 0.95$; $\eta_{\text{БКС}} = 0.98$; $t_{\text{р}} = 180$ сут; $\alpha_{\text{кон.}} = 0.1$; $\alpha_{\text{кон.1}} = 0.1$; $\gamma_{\text{БКС}} = 0.001$ кг/кВт; $\gamma_{\text{ЭРД}} = 0.001$ кг/кВт; $\gamma_{\text{СПТ}} = 0.002$ кг/кВт.

Величина скорости истечения из ЭРД электростатического типа лежит в диапазоне 15–40 км/с, что характерно для современных серийных двигателей типа СПД или ионных двигателей [23].

РЕЗУЛЬТАТЫ МАССОВОГО АНАЛИЗА ВАРИАНТОВ ТЭМ (ЯЭУ С ЭРД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ТИПА НА КСЕНОНЕ И ЯЭУ С ЭДПТ НА АММИАКЕ)

1. ТЭМ на основе ЯЭУ (ТРП), ЭРД на электростатических двигателях и СХПРТ на ксеноне

Результаты расчетов массы ТЭМ с ТРП и ЭРД электростатического типа приведены в табл. 1. Оптимальное значение скорости истечения из ЭРД электростатического типа в зависимости от мощности, как показали данные [23, 24], составляет 15–40 км/с. При проведении сравнения вариантов ТЭМ использовался именно этот диапазон скоростей истечения рабочего тела ксенона. Для расчетов задана величина КПД ЭРД электростатического типа порядка $\eta_{\text{ЭРД}} = 0.55$ [23, 24], что соответствует реальным конструкциям СПД, использующихся в составе КА [24].

Расчет показал, масса ТЭМ меняется в пределах 4300–5500 кг, а электрическая мощность от 40 до 80 кВт, то есть транспортировка может быть осуществлена ЯЭУ на основе ТРП второго поколения с ТРП на быстрых нейтронах и раскладываемым холодильником-излучателем.

Расчеты (результаты расчета энергомассовых характеристик ТЭМ с СПД приведены на рис. 1) показали, что потребная электрическая мощность энергоустановки (ТРП) составляет 40–80 кВт для варианта ТЭМ с электростатическим ЭРД.

Отметим, что массовая доля ЯЭУ в составе ТЭМ достигает 58–73%. Масса запаса рабочего тела в СХПРТ для режима тяги в 1 Н составляет от 550 до 1050 кг. Отметим, что СХПРТ на ксеноне работает при давлениях 10–15 МПа, что требует применения баков из композитных материалов, усиленных титановыми сплавами. При этом плотность ксенона в заправленной СХПРТ составляет 10^3 кг/м^3, т.е. объем СХПРТ будет от 0.5 до 1 м^3, что создаст дополнительные сложности при ее проектировании и создании. Ксенон, который используется в СПД, имеет значительную стоимость по сравнению с рабочими телами, используемыми ЭРД с тепловым ускорением потока.

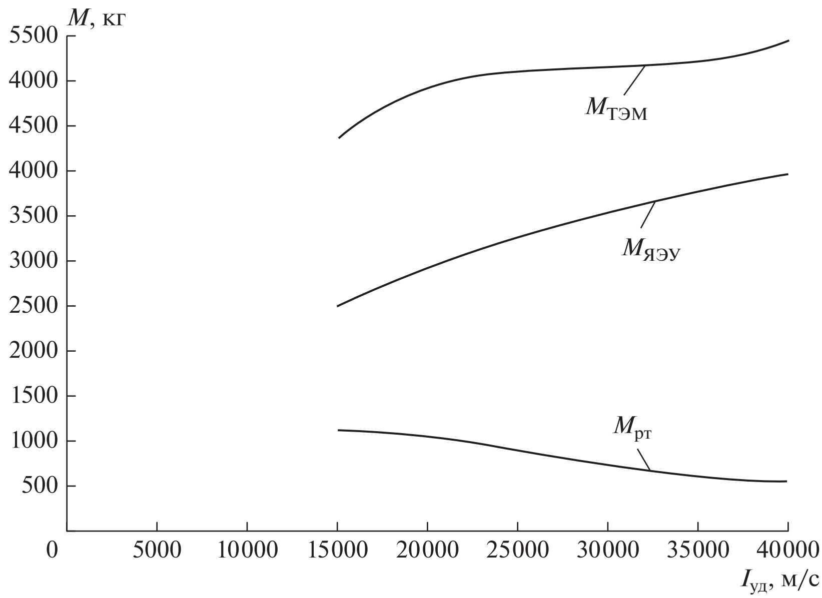

Рис. 1. Зависимость массы ТЭМ, ЯЭУ и рабочего тела для варианта построения энергодвигательной установки с электростатическим двигателем.

2. ТЭМ с ТРП и ЭРДУ на ЭДПТ (электроракетный двигатель с дополнительным подводом тепла) и СХПРТ на аммиаке

В данном типе двигателя мощность на создание тяги будет меньше в силу специфики рабочего процесса (нагрев и тепловое ускорение потока), однако и величина скорости истечения также будет меньше. В данном варианте запас рабочего тела будет больше, однако аммиак может храниться в СХПРТ в сжиженном виде, что снижает ее массу за счет использования тонкостенных баков. Для электротермического двигателя с дополнительным подводом энергии к потоку при расчете скорости истечения и тяги использовалось соотношение [22]

$$I_{\text{уд.ЭДПТ}} = \sqrt{\left[\frac{2k}{k-1}\frac{RT_1}{\mu_{\text{рт}}} + \frac{N_{\text{ЯЭУ}}\eta_{\text{СПТ}}\eta_{\text{ЭДПТ}}}{m}\right](1 - \pi^{-\frac{k-1}{k}})}, \tag{20}$$

где k – показатель адиабаты ($k = 1.2$ [22]); R – универсальная газовая постоянная; T_1 – температура рабочего тела в камере ЭДПТ; $\mu_{\text{рт}}$ – молярная масса рабочего тела (в качестве рабочего тела используем аммиак); π – степень расширения в сопле ЭДПТ (для расчетов принято значение степени расширения сопла $\pi = 500$); m – расход рабочего тела.

Таблица 1. Характеристики ТЭМ с ЭРД электростатического типа

$I_{уд}$, м/с	15000	20000	30000	40000
$N_{ЯЭУ}$, кВт	29.9	39.9	59.8	79.7
$M_{ЯЭУ}$, кг	2514	2932	3534	3961
$M_{рт}$, кг	1050	1103	735	551
$M_{рт} + M_{СХПРТ}$, кг	1470	1543	1029	772
$M_{ТЭМ}$, кг	4351	4922	5148	5437

Таблица 2. Величина требуемой электрической мощности ЯЭУ и расхода через электроракетный двигатель с дополнительным подводом тепла при его тяге $P_{\text{Т}} = 1$ Н

$I_{\text{уд}}$, м/с	m, мг/с	$N_{\text{ЯЭУ}}$, кВт		
		$\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.6$	$\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.7$	$\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.8$
6000	167	13.7	11.7	10.3
8000	125	19.8	16.9	14.4
10000	100	25.2	21.9	19.2
12000	83	31.3	26.9	23.5
15000	67	39.8	34.1	29.8

Результаты расчета соответствующих величин скорости истечения, требуемой мощности ЯЭУ и расхода рабочего тела через ЭДПТ при тяге 1 Н из формулы (20) приведены в табл. 2.

Результаты расчетов, приведенные в табл. 2, показывают, что для обеспечения тяги в 1 Н скорость истечения ЭДПТ составляет 6–15 км/с. При этом режим теплового ускорения требует практически в два раза меньшей мощности ЯЭУ, что существенно снизит массу энергоустановки и собственно всего ТЭМ. Результаты расчетов показывают, что можно снизить массу ЯЭУ (почти в два раза для КПД ЭДПТ $\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.8$, такое значение КПД достижимо в современных электродуговых плазматронах [25, 26]).

Величина требуемой энергии ЯЭУ рассчитывалась с учетом зависимости (20), учитывались КПД ЭДПТ и других систем ТЭМ. Электрическая мощность, приведенная выше в табл. 2, использовалась для расчета массы ЯЭУ и собственно ТЭМ по следующей зависимости аналогично (19)

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\text{ТЭМ}} = \mathrm{N}_{\text{ЯЭУ}}\Big[(1+\alpha_{\text{кон.}})\left(\frac{51.43}{0.00001N_{\text{ЯЭУ}}+0.35}+4.85\right)\Big/1000+\gamma_{\text{СПТ}}\eta_{\text{БКС}}+ \\ +\gamma_{\text{ЭРД}}\eta^{2}_{\text{БКС}}\eta_{\text{СПТ}}+\gamma_{\text{БКС}}\Big]+\left(1+\varphi_{\text{СХПРТ.NH}_3}+\alpha_{\text{кон.1}}\right)m\mathrm{t}_{\text{р}}. \end{aligned} \quad (21)$$

В расчетах принята величина КПД ЭДПТ $\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.6–0.8$.

Наиболее тяжелый по массе вариант построения такого варианта ТЭМ с ЭРДУ на основе ЭДПТ соответствует случаю с наименьшим КПД ЭДПТ ($\eta_{\text{ЭДПТ}} = 0.6$). Результаты расчета потребной электрической мощности ЯЭУ, массы ЯЭУ, рабочего тела и СХПРТ, а также массы ТЭМ (с учетом бортовой кабельной сети и системы преобразования тока и напряжения) приведены в табл. 3.

Мощность электрическая ЯЭУ, позволяющая совершить транспортную операцию, составляет 10–40 кВт. Масса ТЭМ лежит в пределах 4000–4900 кг, что делает такой вариант привлекательным с точки зрения использования ракеты-носителя (РН) “Союз-2” как средства выведения на опорную орбиту. Масса энергоустановки составляет от 27 до 63% от массы ТЭМ. Следует отметить, что варианты с электрической мощностью до 15–20 кВт могут использовать технологии ЯЭУ первого поколения “Топаз” с более совершенным рабочим процессом (требуемый КПД ЯЭУ 10–12%). При этом ЯЭУ может быть исполнена с жестким холодильником-излучателем и иметь размеры аналогичные ЯЭУ “Топаз”.

Результаты расчета варианта построения транспортно-энергетического модуля с ядерной установкой на основе ТРП и электроракетного двигателя типа ЭДПТ (с дополнительным подводом тепла и тепловым ускорением) приведены на рис. 2.

Следует отметить, что вариант ТЭМ с ЭДПТ со скоростью истечения 10–12 км/с является оптимальным – минимальное значение массы энергодвигательной системы (ТЭМ) в зависимости от КПД ЭДПТ составляет 4100–4500 кг.

Вариант построения ТЭМ с ТРП и ЭДПТ при скоростях истечения из сопла ЭДПТ 6–15 км/с не проигрывает по массе с вариантом ТЭМ, использующим ЭРД электростатического типа, причем именно за счет снижения мощности и массы ЯЭУ на основе ТРП. Масса СХПРТ и РТ в этом варианте построения ТЭМ существенно больше,

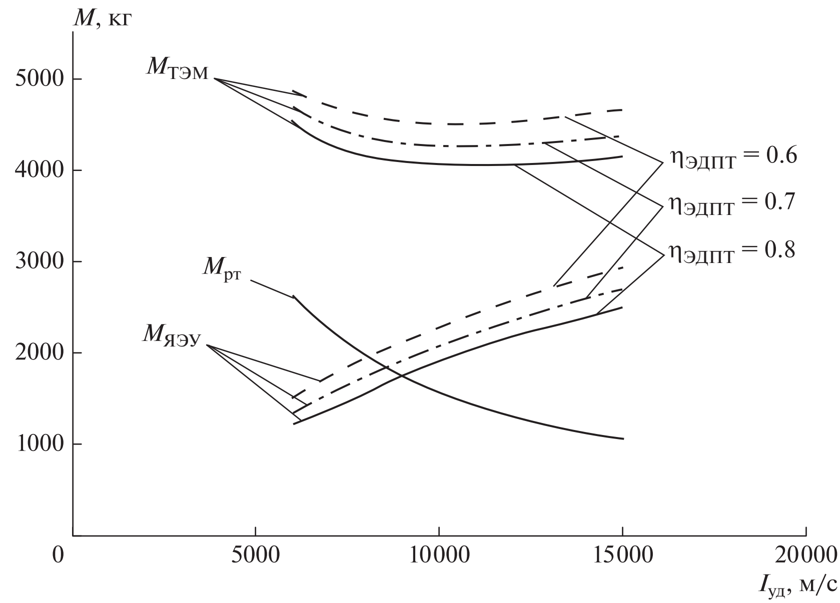

Рис. 2. Зависимость массы ТЭМ, ЯЭУ и рабочего тела (аммиака) для варианта энергодвигательной установки с ЭДПТ.

чем в варианте ТЭМ с СПД (ДАС, ИД), однако это дешевое рабочее тело, не требующее толстостенных баков.

Приведенные величины скорости истечения в тепловом режиме ускорения потока могут быть обеспечены электродуговыми двигателями и ЭДПТ с индукционным нагревом рабочего тела.

Если же перейти к случаю, когда скорость истечения 6 км/с (что достигается в современных ЭДД [22]), то масса энергоисточника снижается в два – два с половиной раза относительно массы ЯЭУ в ТЭМ с СПД, что облегчает разработку его конструкции, так как мощность ЯЭУ близка к мощности ТРП первого поколения [10].

Расчеты показали, что создание КА с ТЭМ электрической мощностью до 20 кВт и ЭДПТ со скоростью истечения 6–10 км/с позволит реализовать условия для транспортировки полезных нагрузок с радиационно-безопасных орбит на более высокие рабочие околоземные орбиты с последующим длительным энергопитанием энергоемкой аппаратуры КА без существенного изменения мощности ЯЭУ. Таким образом, реализация конструкции ЭДПТ с ресурсом 5000 часов позволит создавать ТЭМ с ТРП электрической мощностью 20–25 кВт для транспортировки КА и функционирования на околоземные орбиты.

Таблица 3. Массовые характеристики ТЭМ с ЭДПТ

$I_{уд}$, м/с	$M_{рт}$, кг	$M_{рт} + M_{СХПРТ}$, кг	$\eta_{ЭДПТ} = 0.6$		$\eta_{ЭДПТ} = 0.7$		$\eta_{ЭДПТ} = 0.8$	
			$M_{ЯЭУ}$, кг	$M_{ТЭМ}$, кг	$M_{ЯЭУ}$, кг	$M_{ТЭМ}$, кг	$M_{ЯЭУ}$, кг	$M_{ТЭМ}$, кг
6000	2630	3156	1513	4873	1345	4680	1219	4537
8000	1969	2363	1954	4589	1757	4361	1564	4139
10000	1575	1890	2280	4495	2086	4272	1915	4071
12000	1307	1569	2580	4528	2365	4275	2180	4058
15000	1055	1266	2930	4643	2703	4371	2510	4142

Отметим, что при относительно небольших мощностях ЯЭУ ТЭМ (до 20–25 кВт) и ограниченных массах, выводимых РН среднего класса (например, “Союз-2”), предпочтительным становится вариант ТЭМ с ТРП и ЭДПТ на аммиаке. В данном варианте построения ТЭМ с ЯЭУ на основе ТРП и ЭДПТ массовая доля источника энергии в среднем составляет не более 45–50%, а остальное связано с массой СХПРТ и запасом рабочего тела – аммиака.

Величина суммарного импульса силы тяги ЭРД в данной схеме транспортировки составляет 1.085×10^7 Нс. При массе КА 6000–7000 кг приращение характеристической скорости маневра составит порядка 1808 м/с. Это позволит выводить КА в одной плоскости с геопереходных орбит на высокопотенциальные, включая геостационарную.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана укрупненная массовая модель КА для транспортировки полезных нагрузок на орбиты для ТЭМ на основе термоэмиссионной ТРП ЯЭУ и ЭРД (в двух вариантах построения – на электростатических двигателях типа СПД, работающих на ксеноне, и на электротермических двигателях с дополнительным подводом тепла – ЭДПТ, работающих на аммиаке).

2. Проведено сравнение массовых характеристик двух вариантов использования ЭРД в ТЭМ для задачи межорбитальной транспортировки при равных: тяге ЭРД и времени перелета (тяга задана 1 Н).

3. Показано, что вариант использования ЭРД на основе ЭДПТ с аммиаком в качестве рабочего тела позволяет использовать в ТЭМ ЯЭУ меньшей мощности, что улучшает массогабаритные характеристики КА.

4. Анализ полученных результатов показывает, что целесообразно в комплексе оптимизировать массу всех агрегатов ТЭМ с учетом типа ЭРД и рабочего тела.

5. Вариант КА с ТЭМ (ЯЭУ на основе ТРП первого–второго поколения по технологии “Топаз” электрической мощностью 15–20 кВт и ЭДПТ на аммиаке) по массогабаритным характеристикам может выводится с помощью РН среднего класса типа “Союз-2” на опорные радиационно-безопасные орбиты, с которых будет осуществляться транспортировка с помощью ТЭМ на более высокие рабочие орбиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Землянов А.Б., Косов Г.Л., Траубэ В.А.* Система морской космической разведки и целеуказания (История создания). СПб.: Изд. “Галея Принт”, 2002.
2. 60 лет самоотверженного труда во имя мира. 1944–2004 (ФГУП “НПОмаш”). М.: ИД “Оружие и технологии”, 2004.
3. *Грязнов Г.М.* Космическая атомная энергетика и новые технологии (Записки директора). М.: ФГУП “ЦНИИатоминформ”, 2007. 136 с.
4. *Полетаев Б.И., Лянной Е.Г., Романов А.В., Павлов А.Ю.* Работы КБ “Арсенал” по созданию космических аппаратов с ядерными энергетическими установками // Материалы конф. “Ядерная энергетика в космосе”. В 3 т. Т. 1. М.: НИКИЭТ, 2005. С. 247–249.
5. *Грязнов Г.М., Пупко В.Я.* “ТОПАЗ-1”. Советская космическая ядерно-энергетическая установка // Природа, 1991. Вып. 10. С. 29–36.
6. *Кухаркин Н.Е., Пономарев-Степной Н.Н., Усов В.А.* Космическая ядерная энергетика (ядерные реакторы с термоэлектрическим и термоэмиссионным преобразованием – “Ромашка” и “Енисей”) / Под ред. акад. РАН Пономарева-Степного Н.Н. М.: ИздАТ, 2008. 146 с.
7. *Андреев П.В., Васильковский В.С., Зарицкий Г.А., Галкин А.Я.* Космическая ядерная энергетика: перспективы и направления развития // Полет. 2006. № 4. С.19–25.
8. Луна – шаг к технологиям освоения Солнечной системы / Под научной редакцией В.П. Легостаева и В.А. Лопоты. М.: РКК “Энергия”, 2011. 584 с.
9. *Синявский В.В., Юдицкий В.Д.* Планетная АЭС на основе термоэмиссионного реактора-преобразователя //Атомная энергия. 2000. Т. 89. № 1. С. 20–22.
10. *Андреев П.В., Жаботинский Е.Е., Никонов А.М.* Перспективы использования термоэмиссионных ЯЭУ для межорбитальных перелетов космических аппаратов в околоземном пространстве // Атомная энергия. 1992. Т. 73. № 5. С. 346–350.
11. *Островский В.Г., Синявский В.В., Сухов Ю.И.* Межорбитальный электроракетный буксир “Геркулес” на основе термоэмиссионной ядерно-энергетической установки // Космонавтика и ракетостроение. 2016. № 2(87). С. 68–74.

12. *Легостаев В.П., Лопота В.А., Синявский В.В.* Перспективы и эффективность применения космических ядерно-энергетических установок и ядерных электроракетных двигательных установок // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 4–16.
13. *Косенко А.Б., Синявский В.В.* Технико-экономическая эффективность использования многоразового межорбитального буксира на основе ядерной электроракетной двигательной установки для обеспечения больших грузопотоков при освоении Луны // Космическая техника и технологии. 2013. № 2. С. 72–84.
14. *Кузин А.И., Павлов К.А., Зубрев В.Н., Зацерковный С.П., Чупахин В.П., Шевцов Г.А.* Солнечные и ядерные транспортно-энергетические модули в составе космических аппаратов разного назначения // Атомная энергия. 2000. Т. 89. № 1. С. 15–20.
15. *Васильковский В.С., Андреев П.В., Зарицкий Г.А. и др.* Проблемы космической энергетики и роль ядерных энергетических установок в их решении // Ядерная энергетика в космосе. Сб. докл. в 3-х томах. Т. 1. М.: Изд. НИКИЭТ, 2005. С. 20–21.
16. *Юдицкий В.Д.* Двухрежимная ЯЭУ на основе гетерозонного термоэмиссионного реактора-преобразователя // Известия РАН. Энергетика. 2011. № 3. С. 82–89.
17. Патент RU 2238598. Российская Федерация. Космическая двухрежимная ядерно-энергетическая установка транспортно-энергетического модуля. Синявский В.В., Юдицкий В.Д.; заявитель и патентообладатель – ОАО РКК “Энергия”; заявка 2002135334/06; приоритет от 27.12.2002 // Изобретения. 2004. № 29.
18. *Юдицкий В.Д., Синявский В.В.* О рациональных уровнях электрической мощности ЯЭУ в режимах электроракетной доставки спутника на орбиту и энергопитания его аппаратуры // Известия РАН. Энергетика. 2003. № 3. С. 70–75.
19. *Hiller A.C., Branam R.D., Huffman R.E., Szabo J., Paintal S.* High thrust density propellants in Hall thrusters // AIAA. 2011. № 524. P. 9–10.
20. *Морозов А. И., Шубин А.П.* Космические электрореактивные двигатели: Новое в жизни, науке, технике. Сер. Космонавтика, астрономия. № 7 // М.: Знание, 1975. 64 с.
21. *Онуфриева Е.В., Алиев И.Н., Онуфриев В.В., Синявский В.В.* Энергетические характеристики высокотемпературных плазменных вентилей систем преобразования тока космических энергодвигательных установок // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 3. С. 127–140.
22. *Онуфриев В.В., Сидняев Н.И., Говор С.А., Синявский В.В., Геча В.Я., Макриденко Л.А., Ягодников Д.А.* Об энергетической эффективности электротермического двигателя с дополнительным подводом тепла для малого космического аппарата // Известия РАН. Энергетика. 2018. № 5. С. 92–100.
23. *Морозов А.И., Бугрова А.И., Десятсков А.В. и др.* Стационарный плазменный ускоритель – двигатель АТОН // Физика плазмы. № 7. Т. 23. 1997. С. 635–645.
24. *Горшков О.А., Муравлев В.А., Шагайда А.А.* Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов // Под ред. акад. РАН Коротеева А.С. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.
25. *Коротеев А.С., Миронов В.М., Свирчук Ю.С.* Плазмотроны. Конструкции, характеристики, расчет. М.: “Машиностроение”, 1993. 295 с.
26. Генераторы плазменных струй и сильноточные дуги / Под ред. Рутберга Ф.Г. Л.: “Наука”, 1973. 152 с.

On the Influence of an Electric Rocket Propulsion System on the Characteristics of a Transport and Energy Module Based on a Thermionic Nuclear Power Plant

V. V. Onufriev[a], *, E. V. Onufrieva[a], and V. V. Sinyavsky[a]

[a] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
**e-mail: onufryev@bmstu.ru*

The use of nuclear power plants as part of TEM in modern conditions is considered as one of the primary tasks of transportation and power supply of the functional equipment of the spacecraft. The level of electric power of the transport and energy modes of the TEM nuclear power plant usually differ by 2–3 times, therefore, measures aimed at reducing the power of the transport mode while maintaining the requirements of reduced power and a given resource of the energy regime can lead to a decrease in the mass and cost of the nuclear power plant. In this paper, studies have been carried out on the influence of the type and characteristics of electric rocket thruster (ERT) and electric rocket propulsion system (ERPS) as a whole on the required power of the transport mode and the possibility of lowering the maximum power level of a dual-mode nuclear power plant due to their appropriate choice.

Keywords: transport and energy module, nuclear power plant, thermal emission reactor-converter, electric rocket engine, stationary plasma engine, electric rocket thruster with additional heat supply

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 13–25

УДК 533.6,536.3

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОГРЕВА КОМПОЗИТНОЙ СТЕНКИ КАНАЛА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ ВЫСОКОЭНТАЛЬПИЙНЫМ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ

А. М. Руденко[1], *, В. В. Миронов[1], А. В. Колпаков[1]

[1]Государственный научный центр Российской Федерации — федеральное государственное унитарное предприятие "Исследовательский центр им. М.В. Келдыша", Москва, Россия

**e-mail: arudenko61@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.04.2021 г.
После доработки 07.10.2021 г.
Принята к публикации 15.10.2021 г.

Предложена методика расчета прогрева многослойной композитной стенки канала энергетической установки двухфазным высокоэнтальпийным потоком. Приведены результаты тестирования предложенной методики и примеры нестационарного расчета теплового состояния многослойной стенки. Методика учитывает изменение по времени температуры, давления и скорости течения двухфазного потока, а также изменение по времени геометрии стенки.

Ключевые слова: методика, энергетическая установка, теплообмен, излучение, высокоэнтальпийный поток, полидисперсный, двухфазный, пограничный слой, разностная схема, пиролиз, фильтрация

DOI: 10.31857/S000233102201006X

ВВЕДЕНИЕ

Результаты численных исследований теплового состояния теплонапряженных элементов конструкции современных и перспективных энергетических установок в высокоэнтальпийных двухфазных потоках в течение многих лет находят применение при создании теплозащитных материалов, ракетных двигателей и генераторов электроэнергии. В подавляющем большинстве прикладных задач имеется более или менее активный тепло- и (возможно) массообмен между газом и поверхностью, которую этот газ обтекает. Вследствие этого точное решение задачи теплопроводности в стенках проточного тракта требует сопряжения с решением газовой динамики.

Применительно к перспективным энергетическим установкам задача осложняется тем, что продукты сгорания твердого топлива содержат значительное количество частиц окислов металлов, которые при движении сталкиваются друг с другом, коагулируют или дробятся в результате соударений или под действием аэродинамических сил, осаждаются на стенки сопла и оказывают заметное влияние как на газовую динамику, так и на процессы тепло-массообмена на стенках.

В работе [1] предложена методика двумерного расчета прогрева стенки, включающая достаточно подробную модель термохимического разрушения поверхности. Однако данная методика не учитывает возможный пиролиз связующего композитных материалов. Кроме того, техническая реализация методики предполагает существенные ограничения на форму поверхности, что затрудняет практическое ее применение. В работе [2] построена одномерная модель пиролиза, фильтрации и термохимическо-

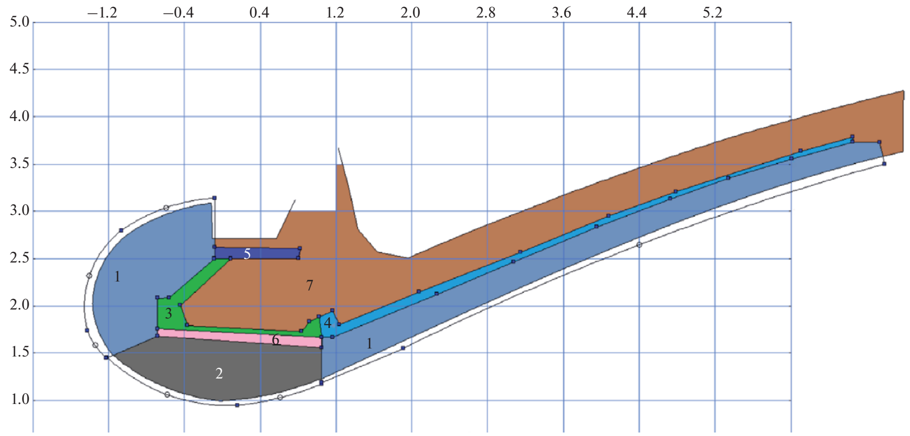

Рис. 1. Поверхность канала в безразмерных координатах.

го разрушения стенки. Область применения данной методики ограничена задачами, в которых двумерные эффекты, связанные с переносом тепла вдоль стенки, являются пренебрежимо малыми. Кроме того, не учитываются двумерные эффекты, возникающие в зонах контакта материалов с существенно разной теплопроводностью.

В связи с этим разработка универсальной двумерной методики расчета прогрева является достаточно актуальной.

ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Рассматривается прогрев (охлаждение) осесимметричной (или плоской) многослойной конструкции под действием тепловых потоков различной природы. Некоторые расположенные на поверхности материалы в процессе работы конструкции постепенно разрушаются, изменяя ее границы.

Методика ограничивается рассмотрением следующих конфигураций: многослойное плоское или многослойное осесимметричное тело – рис. 1.

На границах рассматриваемого тела возможны следующие условия теплообмена:

1. Конвективный теплообмен с высокотемпературным, турбулентным потоком газовой смеси (основной теплообмен). Он задается коэффициентами теплообмена, рассчитываемыми программой пограничного слоя на “крупных” шагах по времени, в процессе прогрева между этими шагами используются приближенные соотношения, полученные на основании закономерностей турбулентного пограничного слоя;

2. Теплоизолированные участки (внешний тепловой поток равен нулю);

3. Радиационный тепловой поток.

Часть материалов, расположенных на поверхностях с теплообменом, под действием высоких температур могут разрушаться (уноситься) во время работы, в связи с этим именно эти границы конструкции могут быть подвижными. В качестве приводящих к уносу материалов процессов рассматриваются:

– поверхностное химическое взаимодействие углерода стенки с окисляющими компонентами газового потока с образованием газообразных продуктов;

– на внешней поверхности тела допускается процесс абляции материалов под действием высоких тепловых потоков, описываемый на основе понятия об эффективной энтальпии.

Внутри рассматриваемая область обычно состоит из произвольно расположенных областей разнообразных материалов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Полная система уравнений для численного моделирования прогрева стенки канала включает:

– уравнения газовой динамики для совершенного газа в цилиндрической системе координат в двумерной постановке;

– уравнения движения частиц конденсированной фазы продуктов сгорания;

– уравнения двухфазной газовой динамики;

– уравнения сжимаемого турбулентного пограничного слоя в интегральной форме;

– уравнение переноса излучения в двухфазной смеси продуктов сгорания;

– уравнение теплопроводности для стенки сопла;

– уравнение фильтрации пиролизных газов;

– уравнения, описывающие унос массы материала стенки из-за взаимодействия с продуктами сгорания и термодеструкции связующего материала.

Математическая модель прогрева

Перенос тепла внутри стенки из углепластика, в рамках рассматриваемой модели, определяется теплопроводностью по твердому телу, термодеструкцией связующего (сток тепла) и фильтрацией газов к поверхности в предположении полного теплового равновесия между твердым телом и газом (конвективный член).

Уравнения теплопроводности и фильтрации записываются в цилиндрических координатах. Переход к плоской задаче моделируется добавлением величины R_0, много большей характерного размера тела, к координатам r поверхности.

В цилиндрических координатах прогрев такой конструкции описывается нестационарным двумерным уравнением теплопроводности:

$$c_m\rho_m\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_m\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_m\frac{\partial T}{\partial x}\right)+Q_{fT}+Q_{fH};$$

$$Q_{fT}=-c_f\rho_f u_D\frac{\partial T}{\partial x}-c_f\rho_f v_D\frac{\partial T}{\partial r};\quad \text{теплообмен с пиролизными газами}$$

$$Q_{fH}=-\rho_0\frac{d\varepsilon}{dt}\left[\frac{H}{\chi}+c_f T\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)\right];\quad \text{тепло термодеструкции} \tag{1}$$

$$\varepsilon=1-\frac{\rho_m}{\rho_0}\quad \text{или}\quad \frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_m}{dt}\ -\ \text{пористость}$$

$$\left.\begin{aligned}u_D&=-\frac{k_f}{\mu_f}\frac{\partial p_f}{\partial x};\\ v_D&=-\frac{k_f}{\mu_f}\frac{\partial p_f}{\partial r};\end{aligned}\right\}\ -\ \text{закон Дарси,}$$

где c_m, ρ_m, λ_m – удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материалов, зависящие от температуры, пористости и координаты;

H – тепловой эффект разложения связующего (термодеструкции);

c_f – удельная теплоемкость газообразных продуктов термодеструкции;

$\rho_f=\dfrac{P_f}{R_f T}$ – плотность продуктов термодеструкции;

χ – доля связующего вещества, обращающаяся в газ при термодеструкции;

ρ_0 – исходная плотность материалов;

$\lambda_m = \dfrac{\lambda(T) - \lambda_0}{1-k}\varepsilon + \lambda_0$ – коэффициент теплопроводности коксующегося материала, k – коксовое число;

$\lambda(T)$ – зависимость коэффициента теплопроводности материала от температуры при предельном для данной температуры коксовании;

$\lambda_0 = \lambda(T_0)$ – теплопроводность свежего материала (при начальной температуре).

Граничное условие:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha\left(T_e - T_w\right) + Q_R + Q_f;$$

Q_R – радиационный тепловой поток;

Q_f – тепловой поток от пиролизных газов.

Численное интегрирование уравнения (1) выполняется по неявной разностной схеме с граничными условиями третьего рода:

$$\begin{gathered} left \cdot T_{i-1,j} + center \cdot T_{i,j} + right \cdot T_{i+1,j} + top \cdot T_{i,j+1} + \\ + bot \cdot T_{i,j-1} = rightPart. \end{gathered}$$

Где:

$$\left[\begin{gathered}
left = \frac{\Delta t}{4h^2}\left(\lambda_{x_{i+1,j}} - \lambda_{x_{i-1,j}} - 4\lambda_{x_{i,j}} - \left[2hC_f\rho_f U_D\right]\right);\\
bot = \frac{\Delta t}{4h^2}\left(\lambda_{r_{i,j+1}} - \lambda_{r_{i,j-1}} + \left(\frac{2}{j} - 4\right)\lambda_{r_{i,j}} - \left[2hC_f\rho_f V_D\right]\right);\\
center = \left(\rho_{i,j}C_{i,j} + 8\frac{\Delta t}{4h^2}\left(\lambda_{x_{i,j}} + \lambda_{r_{i,j}}\right)\right)\\
top = \frac{\Delta t}{4h^2}\left(-\lambda_{r_{i,j+1}} + \lambda_{r_{i,j-1}} - \left(\frac{2}{j} + 4\right)\lambda_{r_{i,j}} + \left[2hC_f\rho_f V_D\right]\right);\\
right = \frac{\Delta t}{4h^2}\left(-\lambda_{x_{i+1,j}} + \lambda_{x_{i-1,j}} - 4\lambda_{x_{i,j}} + \left[2hC_f\rho_f U_D\right]\right);\\
\boxed{rightPart = \left(\rho_{i,j}C_{i,j}T_{i,j}^{k-1} + \left[Q_{fq_{i,j}}\right]\Delta t\right)}
\end{gathered}\right]$$

<u>Математическая модель фильтрации пиролизных газов</u>

При нагревании углепластика при температуре порядка 500–600 K начинается заметное разложение связующего. Этот процесс является сложным и многостадийным. В сопловом блоке реализуются очень высокие тепловые потоки в стенку и, соответственно, темпы нагрева поверхности. В результате все стадии процесса термодеструкции внутри материала происходят в достаточно узкой зоне (практически во фронте), что позволяет описывать протекающие процессы единой обобщенной реакцией.

На основе закона Аррениуса [3...5] изменение плотности материала в процессе термодеструкции связующего можно описать уравнением:

$$-\frac{d\rho_m}{dt} = k_0\chi\rho_0\left(\beta - \varepsilon/\chi\right)e^{-E_m/RT} = k_0\left(\rho_m - k\rho_0\right)e^{-E_m/RT}. \tag{2}$$

Вместо плотности можно определять пористость материала ε или долю газообразных продуктов h ($\varepsilon = h$):

$$\varepsilon = \int_0^t \chi k_0\left(\beta - \varepsilon/\chi\right)e^{-E_m/RT}dt. \tag{3}$$

Модель фильтрации пиролизных газов строится на основе уравнения неразрывности для совершенного газа:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_v V_v) = M^\bullet; \tag{4}$$

и закона Дарси:

$$V_D = -\frac{K_f}{\mu_f}\operatorname{grad} p_f, \tag{5}$$

где K_f — тензор проницаемости; p_f — давление газа в порах; V_D — среднерасходная скорость для объемной плотности, т.е. $-V_D = V_v$.

Используя уравнение состояния совершенного газа и уравнение (5), уравнение неразрывности (4) можно преобразовать:

$$\frac{\partial P_f^2}{\partial t} - \frac{k_f P_f T}{\mu_f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial P_f^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial P_f^2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial P_f^2}{\partial r}\right)\right) - \frac{k_f P_f}{\mu_f \varepsilon}\left(\frac{\partial P_f{}^2}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial P_f{}^2}{\partial r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) = $$
$$= 2R_f P_f\left(T\frac{M^\bullet}{\varepsilon} + \rho_f\frac{\partial T}{\partial t}\right). \tag{6}$$

Здесь: $M^\bullet$ — массоприход пиролизных газов; $M^\bullet = \rho_0\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_0}\right)\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Уравнения (1)–(6) являются замкнутой системой уравнений, описывающей прогрев материалов, подверженных термодеструкции.

Массовая скорость химического взаимодействия углеродных материалов, обтекаемых горячим окисляющим газовым потоком, определяется зависимостью

$$\dot m_w = \frac{\alpha}{c_p}\frac{\sqrt{\left(\frac{M_C}{M_e}\Omega + 1\right)^2 + 4B_m\Omega} - \left(\frac{M_C}{M_e}\Omega + 1\right)}{2\Omega}.$$

Или после очевидного преобразования:

$$\dot m_w = 2\frac{\alpha}{c_p}B_m\frac{1}{\left(\sqrt{\left(\frac{M_C}{M_e}\Omega + 1\right)^2 + 4B_m\Omega} + \left(\frac{M_C}{M_e}\Omega + 1\right)\right)}$$

$B_m = M_C\sum_i C'_{i,e} = \frac{M_C}{M_e}\sum_i r_i$ — окислительный потенциал газовой смеси на внешней границе пограничного слоя.

Здесь:

M_e — молекулярный вес газовой смеси на внешней границе пограничного слоя;

M_C — молекулярный вес углерода;

r_i — мольные доли окисляющих компонент газовой смеси на внешней границе пограничного слоя;

$$\Omega = \frac{\alpha}{c_p}\frac{RT_w}{k_o P_w M_C}e^{E/RT};$$

P_w — давление среды вблизи стенки;

T_w — температура поверхности стенки;

$\frac{\alpha}{c_p}$ — коэффициент тепломассообмена.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Для численного интегрирования системы уравнений газа используется стационарный аналог нецентральной конечно-разностной схемы Мак-Кормака [6], второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений фракции частиц осуществлялось по модели взаимопроникающих континуумов с помощью неявной разностной схемы, имеющей также второй порядок точности [7, 8]. Во входном сечении используется условие скоростного и температурного равновесия между газовой фазой и частицами.

Расчет параметров турбулентного пограничного слоя, энтальпии восстановления и коэффициента тепло-массообмена выполняется на основе решения интегральных уравнений пограничного слоя [9]. Расчет нестационарного теплового состояния и уноса материалов стенки выполняются сопряженно для найденного предварительно поля течения невязкого газа с частицами

Для численного решения уравнения (6) (уравнение фильтрации) используется конечноразностный метод на регулярной прямоугольной разностной сетке. Решение систем разностных уравнений выполняется по неявной разностной схеме с прогонкой по строкам и столбцам.

Алгоритм решения – следующий:

– из решения системы уравнений течения двухфазной среды при заданной температуре стенки в стационарной постановке определяются поля течения и конвективный тепловой поток в стенку;

– по известному полю концентрации частиц и полю температуры частиц конденсированной фазы определяется поток излучения в стенку. Радиационная компонента теплового потока определялась в P_1 – приближении метода сферических гармоник по известным параметрам течения и температуре стенки с учетом рассчитанных по теории Ми спектральных зависимостей оптических свойств частиц дисперсной фазы [10];

– определяются распределения температуры в сечениях по длине стенки и параметры разрушения материала для заданных моментов времени (коэффициент тепломассообмена пересчитывается в зависимости от текущей температуры поверхности стенки);

– температура поверхности с предыдущего приближения используется для расчета параметров течения двухфазной среды и радиационного потока в последующих приближениях.

ТЕСТИРОВАНИЕ

Результаты нестационарного двумерного расчета (после достижения стационарного распределения) сравниваются с приближенным решением одномерной стационарной задачи для тонкой пластины, охлаждаемой излучением, с заданными температурами на торцах. То есть с приближенным решением уравнения:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\sigma}{h} T^4, \text{ где } h \text{ – толщина пластины.}$$

С граничными условиями первого рода. Значения температур в граничных узлах задавались равными установившемуся значению температуры на соответствующей границе двумерного расчета.

В двумерном расчете тепловой поток слева и справа определялся как: $Q = \sigma\left(T_\infty^4 - T_W^4\right) \cong 13.6$ МВт/м^2.

Температура T_∞ – два варианта – $T_\infty = 4000$ K и 2000 K.

Ширина пластины – L = 0.1 м.

Толщина пластины – два варианта – $h = 0.001$ и $h = 0.0005$ м.

Теплоотвод вниз и вверх $Q = \sigma T_W^4$.

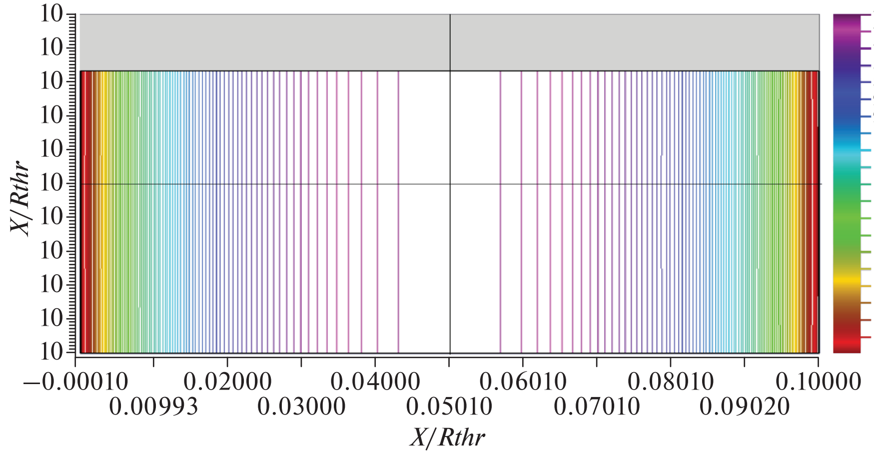

Рис. 2. Распределение температур в пластине.

Для моделирования плоского случая в осесимметричной двумерной задаче был задан большой радиус нижней поверхности $R = 10$ м.

Количество сеточных узлов: по длине 1000, по радиусу – 5.

На рис. 2 представлено расчетное стационарное распределение температуры в пластине. Сравнение профилей температуры по длине пластины показано на рис. 3 и 4.

Различие между аналитическим одномерным решением и двумерным расчетом не превышает 2%, что связано с наличием поперечного градиента температуры в пластине.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Ниже приводятся результаты расчета прогрева и эрозии стенки канала, показанного на рис. 1. Конструкция состоит из нескольких деталей, изготовленных из разных материалов. Детали (рис. 1) пронумерованы. Соответствующие номерам деталей материалы представлены в следующем списке.

<u>Материалы стенки:</u>

1. Углепластик
2. Углерод-углерод
3. Сталь
4. Сталь
5. Резина
6. Стеклопластик
7. Углепластик

Величины теплофизических параметров материалов обращенных в поток (материалы 1 и 2) моделируют свойства углепластиков и углерод-углеродных композиционных материалов:

✓ Материал 1 – Плотность ρ = 1400 кг/м^3; Коксующийся; Теплопроводность – линейно возрастает от 1.5 Дж/м/К до 15 Дж/м/К; Теплоемкость – линейно возрастает от 1000 Дж/кг/К до 4000 Дж/кг/К.

✓ Материал 2 – Плотность ρ = 1900 кг/м^3; Теплопроводность – линейно уменьшается от 80 Дж/м/К до 40 Дж/м/К; Теплоемкость – линейно возрастает от 1000 Дж/кг/К до 2500 Дж/кг/К.

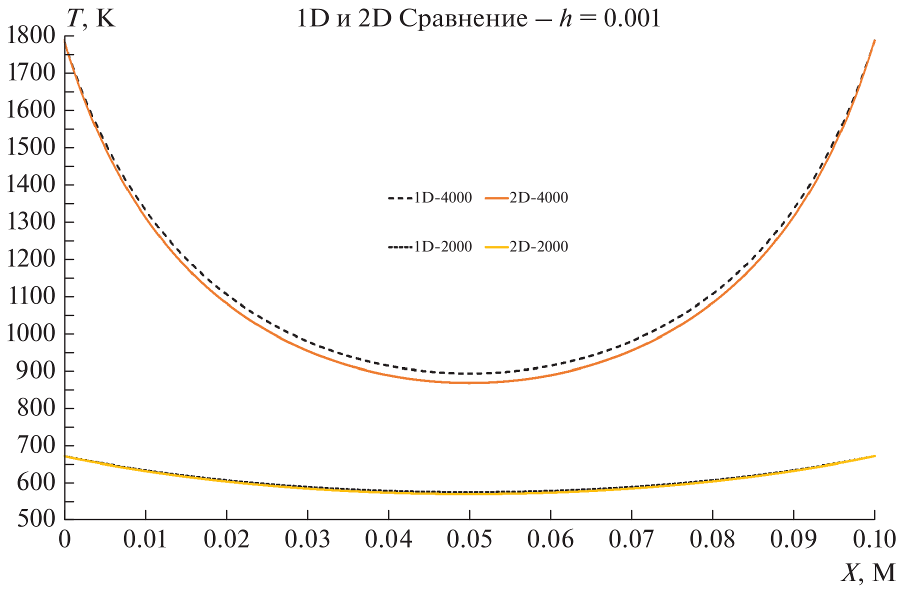

Рис. 3. Сравнение с аналитическим решением.

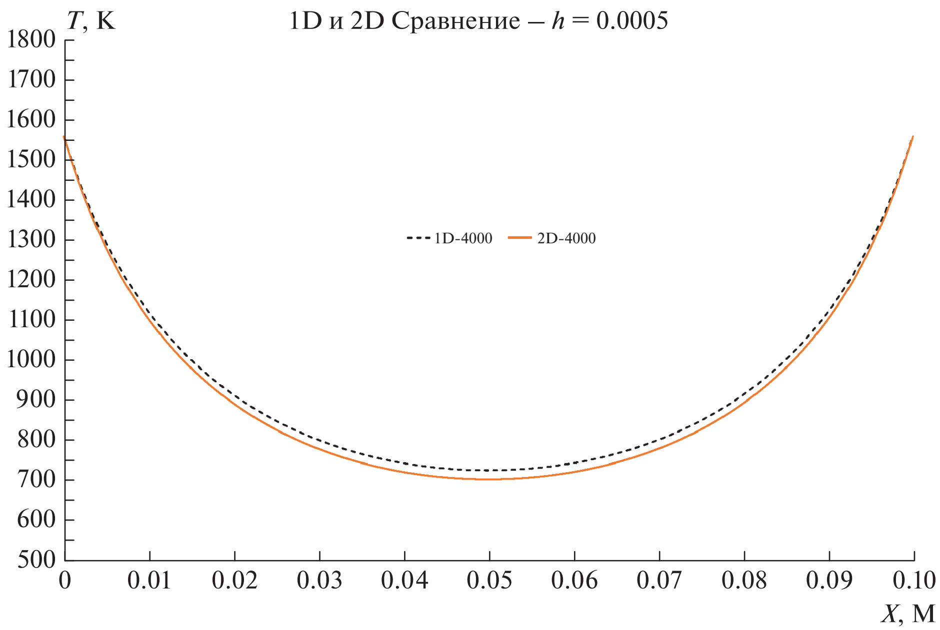

Рис. 4. Сравнение с аналитическим решением.

Расчеты теплофизических и газодинамических параметров двухфазного потока, натекающего на стенку, проводились для изменяющегося по времени давления торможения и температуры торможения $T_0 = 3400$ K. Зависимость давления торможения от времени показана на рис. 5.

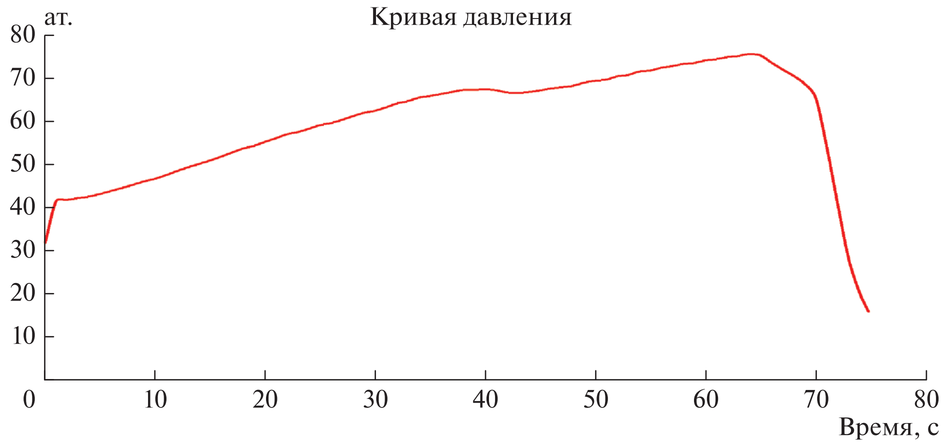

Рис. 5. Зависимость давления от времени.

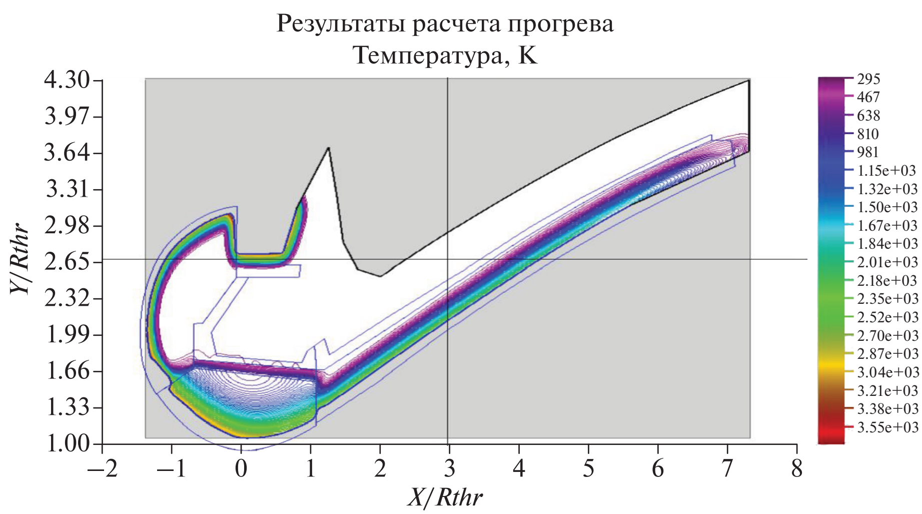

Рис. 6. Расчетное распределение температуры.

Параметры смеси и соответствующие параметры теплообмена пересчитывались с интервалом 0.5 с. Расчет проводился до момента времени 50 с.

На рис. 6 показано расчетное распределение температуры на последний момент времени и соответствующий этому моменту контур поверхности – на рис. 7. Видны два участка повышенного уноса в области стыка материалов обусловленный ростом коэффициента теплообмена. Расчетные значения эрозионного уноса показаны на рис. 8. Динамика уноса контура канала в критическом сечении и в точках стыка материалов показана на рис. 9. На рис. 10–11 показано распределение давления пиролизных газов и прококсованный слой материала. Следует обратить внимание на то, что расчетное давление пиролизных газов в области пиролиза (граница коксового слоя)

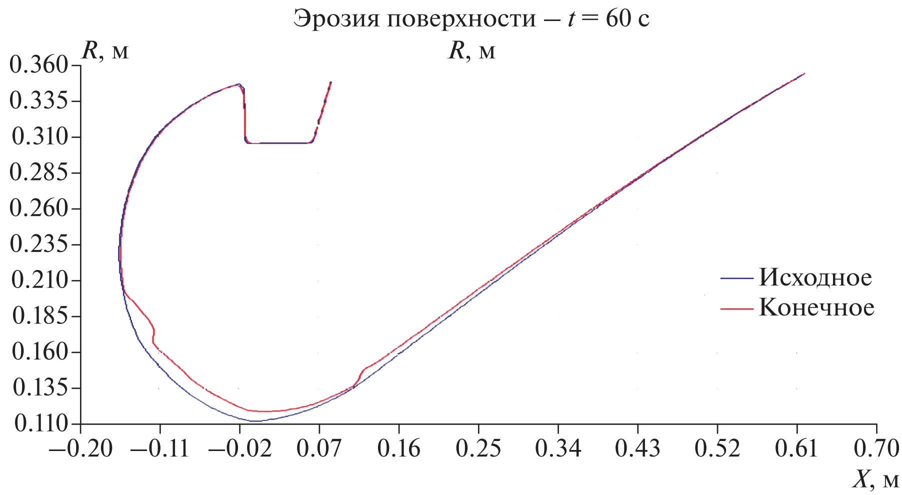

Рис. 7. Расчетный контур поверхности в сравнении с исходным.

Рис. 8. Расчетная величина уноса поверхности.

достигает величины порядка 200 атмосфер. То есть, перепад давления между материалом и поверхностью превышает 100 атмосфер. Очевидно, что перепад давления зависит главным образом от экспериментально определяемой величины проницаемости материала (кокса). В данном случае проницаемость материала, согласно [2], принималась равной 10^{-16} [м^2] и проницаемость кокса – 10^{-12} [м^2].

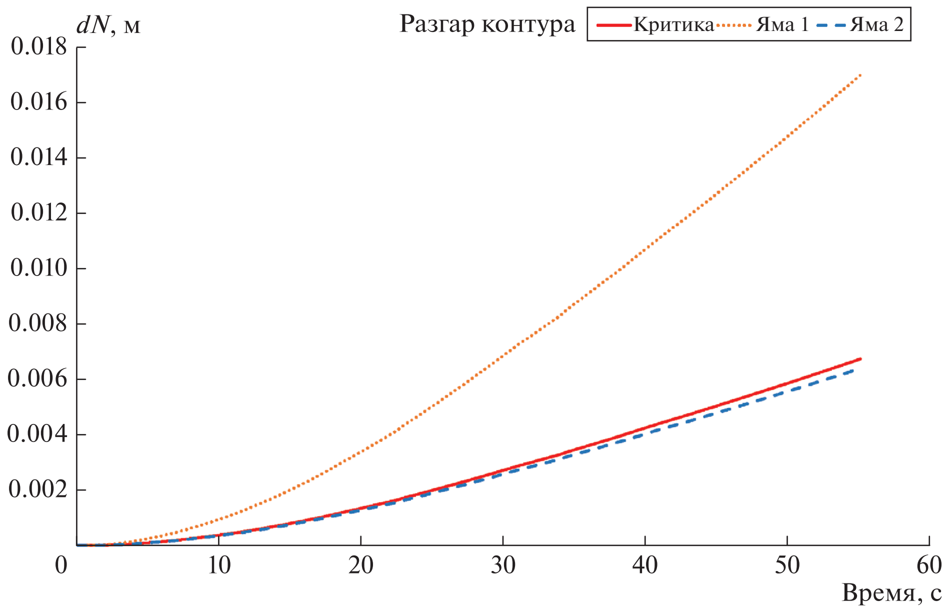

Рис. 9. Динамика разгара в критическом сечении и в точках стыка материалов.

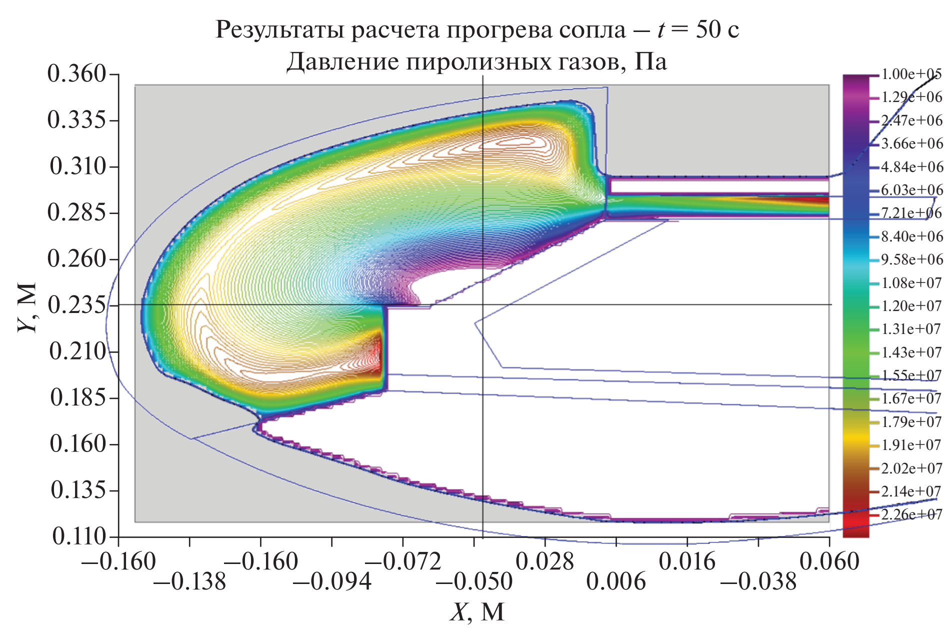

Рис. 10. Давление пиролизных газов.

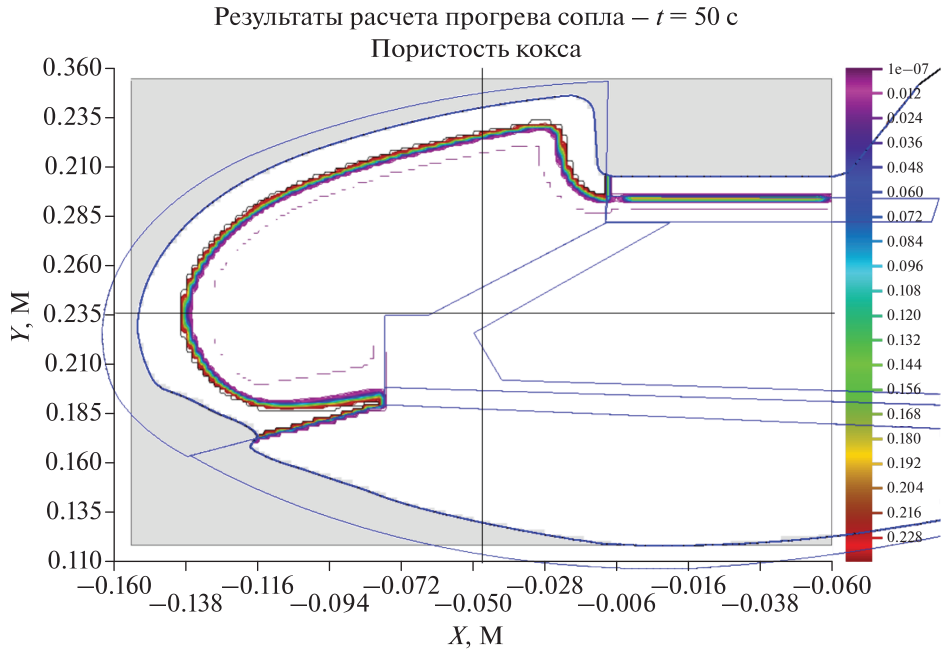

Рис. 11. Граница коксового слоя.

ВЫВОДЫ

Предложена численная методика расчета прогрева многослойной стенки канала энергетической установки двухфазным высокоэнтальпийным потоком. В результате решения уравнений теплопроводности и фильтрации в осесимметричной постановке определяются тепловые потоки и нестационарное тепловое состояние многослойной конструкции из композитных материалов, подверженных термодеструкции. Приведены результаты тестирования предложенной методики и примеры нестационарного расчета теплового состояния многослойной стенки. Методика учитывает изменение по времени температуры давления и скорости течения двухфазного потока, а также изменение по времени геометрии стенки.

Обозначения: u, v — компоненты вектора скорости $\vec{U}$ частиц; x, y — осевая и радиальная координаты; показатель адиабаты для газа (“замороженный”); C_g, C_p — удельные теплоемкости газа и материала частиц; приведенный коэффициент сопротивления и коэффициент теплообмена частиц соответственно; ρ_g — плотность газа; P_g — давление; T_g — температура; γ_g — показатель адиабаты для газа (“замороженный”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волкова Л.И., Волков Н.Н.* Расчет двумерного теплового состояния и разрушения элементов соплового блока РДТТ. Авиакосмическая техника и технология. М., 2003. № 3. С. 37–44.
2. *Волкова Л., Волков Н., Губертов А., Миронов В.* Математическое моделирование тепломассообмена и тепловой защиты в двигателях. Двигатель. 2000. № 1(7). С. 33–35.
3. *Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.* Тепловая защита. М.: Энергия, 1976.
4. *Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю.* Термодинамические и баллистические основы проектирования двигателей на твердом топливе”. М.: Машиностроение, 1979. 391 с.

5. *Волкова Л.И., Волков Н.Н., Губертов А.М., Миронов В.В.* Тепловая защита ракетных двигателей на твердом топливе // Изв. АН. Энергетика. 2004. № 5. С. 19–32.
6. *Васенин И.М., Рычков А.Д.* Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лаваля // Изв. АН СССР, МЖГ. 1973. № 5.
7. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. II. 360 с.
8. *Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф.* Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во ТГУ, 1986. 262 с.
9. *Борисов Д.М., Шураев Ю.А., Миронов В.В., Руденко А.М.* Метод расчета теплового состояния сопловых насадков энергодвигательных установок // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 5. С. 104–109.
10. *Гурина И.Н., Волкова Л.И., Волков Н.Н., Ковалкин С.С., Колпаков А.В., Миронов В.В.* Использование численного моделирования радиационно-конвективного теплообмена. РНКТ 6. 2014. С. 1198.

Technique for Calculation Nonstatic Heating of Compositum Wall in High-Enthalpy Two-Phase Flow in Power Channel

A. M. Rudenko[a], *, V. V. Mironov[a], and A. V. Kolpakov[a]

[a] *The State Scientific Center of Russian Federation – Federal State Unitary Enterprise “Research Center named after M.V. Keldysh”, Moscow, Russia*

**e-mail: arudenko61@mail.ru*

Computer calculation technique to model multilayer composite channel wall of power plant heating by a two-phase high-enthalpy flow is proposed. Test results for the technique and examples for non-stationary calculation of the thermal state of a multilayer wall are presented. Time dependence of pressure, temperature and flow rate of two-phase flow, as well as the time variation of the wall geometry are taken into account.

Keywords: technique, power plant, heat exchange, radiation, high-enthalpy flow, poly disperse, two phase, boundary layer, difference scheme, pyrolysis, filtration

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 26–46

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КОРНЕВОЙ ЗАВИСИМОСТИ

© 2022 г. Г. С. Кротов*

Образовательное учреждение профсоюзов высшего образования Академия труда и социальных отношений (АТИСО), Москва, Россия

**e-mail: yamaths555@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.
После доработки 03.08.2021 г.
Принята к публикации 11.08.2021 г.

Развит метод функций Грина для уравнения нестационарной теплопроводности в ограниченной области с границей, движущейся по закону $\beta\sqrt{t}$. Метод приводит к точным аналитическим решениям краевых задач в условиях температурного и теплового нагрева. Получен явный вид функций Грина для первой и второй краевых задач в описанной выше области. Показана эквивалентность результатов, полученных с помощью метода функции Грина и другими методами.

Ключевые слова: функция Грина, нестационарная теплопроводность, уравнение теплопроводности, задача Дирихле, задача Неймана, первая краевая задача, вторая краевая задача, движущаяся граница, интегральное преобразование, корневая зависимость, корень из “времени”, функция параболического цилиндра, корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента, согласованность результатов

DOI: 10.31857/S0002331021040063

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение решений задач нестационарной теплопроводности имеет как практический, так и сугубо научный интерес. Например, это касается различных вопросов термоупругости, гидромеханики, фазовых превращений, процессов диффузии, абляции, горения [1, 2]. Несмотря на хорошо развитую аналитическую теорию нестационарного тепломассопереноса и близких направлений, достигнутые за последнее время успехи в нахождении точных аналитических решений весьма незначительны. Среди них можно отметить, например, статьи [3–5], в которых получены функции Грина и точные аналитические решения задачи нестационарной теплопроводности в различных областях.

В настоящей работе получена функция Грина второй краевой задачи в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Текущая статья является продолжением работы [5], в которой получена функция Грина первой краевой задачи в этой области. Несмотря на верность полученных в [5] результатов, в ней есть ряд неточностей, которые устранены в настоящей работе.

Попытка получить функции Грина второй краевой задачи нестационарной теплопроводности в областях $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$ и $x \ge \beta\sqrt{t}$ была предпринята в работе Антимирова М.Я. [4]. Однако в ней были неверно выписаны граничные условия, что привело к неверным результатам. В работе [3] эта ошибка была устранена и получена верная функция Грина для области $x \ge \beta\sqrt{t}$. В текущей работе впервые получена функция Грина второй краевой задачи нестационарной теплопроводности в области $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$. Верность ее аналитического вида подтверждается согласованностью данного результата с результатами, полученными методом рядов, развитым Э.М. Карташовым и Б.Я. Любовым в работе [8]. Вопросу согласованности с необходимыми для этого выводами посвящен 6-й раздел текущей работы.

Найденная функция Грина в свою очередь позволяет выписать точное аналитическое решение в ограниченной области $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$ для произвольных условий теплового нагрева, которое приведено в текущей статье.

1. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le y(t), t \ge 0\}$

Для начала напомним метод функции Грина для ограниченной области с подвижной границей. Пусть $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le y(t), t \ge 0\}$, где $y(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда температурное поле $T(x,t)$ может быть найдено в области Ω_t как результат решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < y(t), \quad t > 0; \tag{1}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad 0 \le x \le y(0), \quad y(0) \ge 0; \tag{2}$$

$$\left.\left(\beta_{11}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \beta_{12}T(x,t)\right)\right|_{x=0} = \beta_{13}\varphi_1(t), \quad t \ge 0; \tag{3}$$

$$\left.\left(\beta_{21}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \beta_{22}T(x,t)\right)\right|_{x=y(t)} = \beta_{23}\varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{4}$$

В рамках такой постановки могут быть рассмотрены 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи. Тогда (3)–(4) примут вид:

для первой краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$, $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{22} = \beta_{23} = 1$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \ t \ge 0, \tag{5}$$

$$T(x,t)\big|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \ t \ge 0; \tag{6}$$

для второй краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{13} = \beta_{23} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0; \tag{8}$$

для третьей краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{13} = -h_1$, $\beta_{22} = \beta_{23} = h_2$, где h_1, h_2 – относительные коэффициенты теплообмена

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1\left(T(x,t) - \varphi_1(t)\right), \quad t \ge 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = -h_2\left(T(x,t)-\varphi_2(t)\right), \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Функция Грина $G\left(x,t,x',\tau\right)$ для задачи (1)–(4) является решением

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x}, \quad 0 < x < y(t), \quad t > \tau, \tag{11}$$

$$\left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{t=\tau} = \delta\left(x-x'\right), \quad 0 < \left(x',x\right) < y(\tau), \tag{12}$$

$$\left.\left(\beta_{11}\frac{\partial G}{\partial x} + \beta_{12}G\right)\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{13}$$

$$\left.\left(\beta_{21}\frac{\partial G}{\partial x} + \beta_{22}G\right)\right|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau. \tag{14}$$

В случае первой краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 1$

$$\left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{15}$$

$$\left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau; \tag{16}$$

для второй краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau; \tag{18}$$

для третьей краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_{12} = -h_1$, $\beta_{22} = h_2$, где h_1, h_2 – относительные коэффициенты теплоообмена

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1 \left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{x=0}, \quad t > \tau, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = -h_2 \left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{x=y(t)}, \quad t > \tau. \tag{20}$$

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Интегральное представление (1)(4) будет иметь вид

$$\begin{gathered} T\left(x,t\right) = \int\limits_0^{y(0)} T\left(x',\tau\right)\left.G\left(x,t,x',\tau\right)\right|_{\tau=0} dx' + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{y(\tau)} f\left(x',\tau\right)G\left(x,t,x',\tau\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x' + \\ + a\int\limits_0^t \left\{\left[\alpha_{11}\frac{\partial T\left(x',\tau\right)}{\partial x'} + \alpha_{12}T\left(x',\tau\right)\right]\times\left[\gamma_{11}\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x'} + \gamma_{12}G\left(x,t,x',\tau\right)\right]\right\}_{x'=0} d\tau + \\ + a\int\limits_0^t \left\{\left[\alpha_{21}\frac{\partial T\left(x',\tau\right)}{\partial x'} + \alpha_{22}T\left(x',\tau\right)\right]\left[\gamma_{21}\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x'} + \gamma_{22}G\left(x,t,x',\tau\right)\right]\right\}_{x'=y(\tau)} d\tau, \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\alpha_{i1} = \gamma_{i2} = 0;\ \ \alpha_{i2} = (-1)^{i-1},\ \ \gamma_{i1} = 1 \ \text{ в случае первой краевой задачи;}$$
$$\alpha_{i2} = \gamma_{i1} = 0;\ \ \alpha_{i1} = (-1)^{i},\ \ \gamma_{i2} = 1 \ \text{ в случае второй краевой задачи;}$$
$$\alpha_{i1} = (-1)^{i},\ \ \alpha_{i2} = h_i,\ \ \gamma_{i1} = 0,\ \ \gamma_{i2} = 1 \ \text{ в случае третьей краевой задачи.}$$

2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Температурное поле может быть найдено в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t),\quad 0 < x < \beta\sqrt{t},\quad t > 0, \tag{22}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t),\quad t \ge 0, \tag{23}$$

$$T(x,t)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = \varphi_2(t),\quad t \ge 0. \tag{24}$$

Начальное условие (2) в этом случае не задается, так как при $t = 0$ область вырождается в точку. Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (22)–(24) будет являться решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2},\quad 0 < x < \beta\sqrt{t},\quad t > \tau, \tag{25}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x - x'),\quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \tag{26}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0,\quad t > \tau, \tag{27}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0,\quad t > \tau. \tag{28}$$

Интегральное представление будет иметь вид

$$T(x,t) = a\int_0^t \left[T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} - T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \right] d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\beta\sqrt{\tau}} f(x',\tau)\,G(x,t,x',\tau)\,dx'. \tag{29}$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Найдем аналитический вид функции Грина $G(x,t,x',\tau)$ задачи (25)–(28). Эту задачу можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(t - \tau)\,\delta(x - x'),\quad 0 < x < \beta\sqrt{t},\quad t > \tau, \tag{30}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=0} = 0,\quad x \ge 0, \tag{31}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0,\quad t > \tau, \tag{32}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0,\quad t > \tau. \tag{33}$$

Введем переменные

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2at}},\quad \theta = \frac{1}{2}\ln t\ \ (t = e^{2\theta}). \tag{34}$$

Тогда задача (30)–(33) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}+x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{\partial G}{\partial \theta}-2e^{2\theta}\delta\left(x_1\sqrt{2a}e^{\theta}-x'\right)\delta\left(e^{2\theta}-\tau\right),\quad 0<x_1<\frac{\beta}{\sqrt{2a}},\quad -\infty<\theta<+\infty. \tag{35}$$

$$G\big|_{x_1=0}=0,\quad G\big|_{x_1=\frac{\beta}{\sqrt{2a}}}=0,\quad \lim_{\theta\to-\infty}G=0. \tag{36}$$

Перейдем в пространство изображений Фурье

$$\bar{G}\left(x,i\lambda,x',\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(x_1,\theta,x',\tau\right)e^{-i\lambda\theta}d\theta. \tag{37}$$

Предварительно вычислим интеграл

$$I=2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\theta}\delta\left(x_1\sqrt{2a}e^{\theta}-x'\right)\delta\left(e^{\theta}-\tau\right)e^{-i\lambda\theta}d\theta=\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau}-x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}. \tag{38}$$

Вычисление интеграла (38) можно найти, например, в [3], [5].

Применим теперь интегральное преобразование (37) к уравнению (35), считая $G\to 0$ при $\theta\to\infty$ и вводя обозначения $\beta_0=\dfrac{\beta}{\sqrt{2a}}$, $\xi_0=\dfrac{x'}{\sqrt{2a\tau}}$, получим

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx_1^2}+x_1\frac{d\bar{G}}{dx_1}-i\lambda\bar{G}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau}-x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}, \tag{39}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=0}=0,\quad \bar{G}\big|_{x_1=\beta_0}=0. \tag{40}$$

Задача (39)–(40) эквивалентна следующей:

$$\bar{G}''+x_1\bar{G}'-i\lambda\bar{G}=0, \tag{41}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=0}=0, \tag{42}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\beta_0}=0, \tag{43}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\xi_0-0}=\bar{G}\big|_{x_1=\xi_0+0}, \tag{44}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0-0}-\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0+0}=\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \tag{45}$$

Вопрос эквивалентности задач (39)–(40) и (41)–(45) подробно рассмотрен в [3].

Уравнение (41) является уравнением Вебера, частным решение которого являются функции

$$\begin{cases} e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{-1-i\lambda}\left(x_1\right),\quad e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{-1-i\lambda}\left(x_1\right),\\ e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{i\lambda}\left(ix_1\right),\quad e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{i\lambda}\left(-ix_1\right),\end{cases} \tag{46}$$

где $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра. Функции $D_\nu(z)$ и $D_\nu(-z)$ – линейно независимы, если ν не является целым числом, а функции $D_{-1-\nu}(z)$ и $D_\nu(\pm iz)$ линейно независимы при $\forall\nu$. Каждая функция из (46) может быть выражена линейно через две другие. Поэтому в качестве общего решения уравнения (41) можно взять любую пару линейно независимых функций (46), например, первую и третью. Тогда решение уравнения (41) примет вид:

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_1 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_2 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \tag{47}$$

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \tag{48}$$

Используя граничные условия (44) и (45), получим систему

$$\begin{cases} c_1 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_2 D_{i\lambda}(i\xi_0) = c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0), \\ c_1\left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} + c_2\left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{\mathrm{d}x_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} = \\ = c_3\left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + c_4\left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \end{cases} \tag{49}$$

Найдем выражения постоянных c_1, c_2 через c_3, c_4. Для этого воспользуемся методом Крамера и выражением для вронскиана функции параболического цилиндра [10]

$$D_\nu(z)\frac{d}{dz} D_{-\nu-1}(iz) - D_{-\nu-1}(iz)\frac{d}{dz} D_\nu(z) = -ie^{\frac{-\nu\pi i}{2}}. \tag{50}$$

Получаем $c_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $c_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(x_1) & D_{i\lambda}(ix_1) \\ \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right] & \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right] \end{vmatrix}\right|_{x_1=\xi_0+0} = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}, \tag{51}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} & D_{i\lambda}(ix_1)\Big|_{x_1=\xi_0-0} \\ \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} & \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(x_1)\Big|_{x_1=\xi_0-0} & \left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} \\ \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} & \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Преобразовывая далее (52) и (53), находим

$$\Delta_1 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_3 - D_{i\lambda}\left(i\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{54}$$

$$\Delta_2 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_4 + D_{-1-i\lambda}\left(\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{55}$$

Откуда получаем

$$c_1 = c_3 - D_{i\lambda}\left(i\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{56}$$

$$c_2 = c_4 + D_{-1-i\lambda}\left(\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{57}$$

Используя условия (42) $\bar{G}\big|_{x_1=0} = 0$ и (43) $\bar{G}\big|_{x_1=\beta_o} = 0$, получаем систему на c_3 и c_4:

$$\begin{cases} \left[c_3 - D_{i\lambda}\left(\mathrm{i}\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{-1-i\lambda}\left(0\right) + \left[c_4 + D_{-1-i\lambda}\left(\xi_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{i\lambda}\left(0\right) = 0, \\ c_3 D_{-1-i\lambda}\left(\beta_0\right) + c_4 D_{i\lambda}\left(\mathrm{i}\beta_0\right) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Следовательно,

$$c_3 = D_{i\lambda}\left(i\beta_0\right) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \frac{D_{i\lambda}\left(i\xi_0\right) D_{-1-i\lambda}\left(0\right) - D_{-1-i\lambda}\left(\xi_0\right) D_{i\lambda}(0)}{D_{i\lambda}\left(i\beta_0\right) D_{-1-i\lambda}\left(0\right) - D_{-1-i\lambda}\left(\beta_0\right) D_{i\lambda}(0)} \tag{59}$$

или

$$c_3 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} D_{i\lambda}(i\beta_0)}{2\sqrt{a\pi}\left[D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(0)\right]}\left[D_{-1-i\lambda}(0) D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]. \tag{60}$$

Так как $c_4 = -c_3 \dfrac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)}$, то

$$c_4 = -\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} D_{-1-i\lambda}\left(i\beta_0\right)}{2\sqrt{a\pi}\left[D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(0)\right]}\left[D_{-1-i\lambda}\left(0\right) D_{i\lambda}\left(i\xi_0\right) - D_{i\lambda}(0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]. \tag{61}$$

Подставляя (60) и (61) в (56) и (57), находим c_1, c_2:

$$c_1 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \frac{D_{i\lambda}(0)\left[D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]}{D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(0)}, \tag{62}$$

$$c_2 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \frac{D_{-1-i\lambda}(0)\left[-D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(i\xi_0) + D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]}{D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(0)}. \tag{63}$$

Тогда решение задачи (41)–(45) примет вид

$$\bar{G} = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \dfrac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(0)}[D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\xi_0) - \\ \qquad - D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(0)], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \\ \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \dfrac{D_{-1-i\lambda}(0)\,D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(0)\,D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(0)}[D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\beta_0) - \\ \qquad - D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(\beta_0)], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \end{cases} \tag{64}$$

Используя замену (34) и применяя обратное преобразование Фурье

$$G(x_1,t,x',\tau) = G(x_1,\theta,x',\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(x_1,i\lambda,x',\tau)\,e^{i\lambda\theta}d\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}\times$$
$$\times (x_1,i\lambda,x',\tau)\,e^{i\lambda\theta}d(i\lambda) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}(x_1,p,x',\tau)\,e^{p\theta}dp = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}\left(x_1,p,x',\tau\right)\times \tag{65}$$
$$\times\, e^{\frac{p}{2}\ln t}dp = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}(x_1,p,x',\tau)\,t^{p/2}dp$$

к решению (64), получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{D_p(i\xi_0)D_{-p-1}(\beta_0) - D_p(i\beta_0)D_{-p-1}(\xi_0)}{D_p(i\beta_0)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}(\beta_0)}[D_p(0)D_{-p-1}(x_1) - \tag{66}$$
$$- D_{-p-1}(0)D_p(ix_1)]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.$$

В переменных x, x', t, τ функция Грина (66) будет записана в виде

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{D_p\left(\frac{ix'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times \tag{67}$$
$$\times\left[D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)\,D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.$$

Целью дальнейших преобразований будет получение аналитического вида функции Грина задачи (41)–(45) в виде ряда. Для этого, используя согласно [9]

$$D_p(iz) = \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{\pi}{2}pi}D_{-p-1}(z) + e^{\frac{\pi}{2}pi}D_{-p-1}(-z)\right], \tag{68}$$

получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0) - D_{-p-1}(\xi_0)\,D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0)}\times \tag{69}$$
$$\times\left[D_{-p-1}(x_1) - D_{-p-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.$$

В переменных x, x', t, τ (69) примет вид

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(p+1) \frac{D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \times \tag{70}$$

$$\times \left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp.$$

Пусть

$$F(p) = \Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0) - D_{-p-1}(\xi_0)\,D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0)} \times$$

$$\times \left[D_{-p-1}(x_1) - D_{-p-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как функция $D_p(z)$ является целой функцией переменного z и параметра p, то подынтегральная функция $F(p)$ является аналитической во всей комплексной плоскости p, за исключением простых полюсов в точках $p = -n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и в точках $p = p_n$, где p_n — нецелые корни уравнения

$$D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0) = 0. \tag{71}$$

Решение уравнений типа (71) представляет собой самостоятельную задачу. Насколько известно автору, работы [6] и [7] являются первыми, рассматривающими этот вопрос. Далее по теореме о вычетах

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\left(2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=-n}{res}\, F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=p_n}{res}\, F(p)\right]\right). \tag{72}$$

Используя свойства гамма-функции, функции параболического цилиндра при целых p, а также пользуясь соотношениями для функции Эрмита [9]

$$D_n(z) = e^{-\frac{z^2}{4}} 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,H_n(y)}{2^n n!} t^n = \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2xyt - \left(x^2+y^2\right)t^2}{1-t^2}\right),$$

$$|t| < 1, \quad H_n(-z) = (-1)^n H_n(z); \quad D_n(-z) = (-1)^n D_n(z); \tag{73}$$

$$\lim_{p\to -n} (p+n)\,\Gamma(p+1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2\ldots,$$

получаем, что первая сумма в (72) равна нулю. Это означает, что функция Грина имеет следующий вид

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=p_n}{res}\, F(p) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n+1) \times$$

$$\times \frac{D_{-p_n-1}(-\xi_0)\,D_{-p_n-1}(\beta_0) - D_{-p_n-1}(\xi_0)\,D_{-p_n-1}(-\beta_0)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0)\right]\Big|_{p=p_n}} \left[D_{-p_n-1}(x_1) - D_{-p_n-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}}, \tag{74}$$

где p_n — действительные отрицательные нецелые корни уравнения (71).

Переходя к переменным x, x', t, τ в (74), получаем функцию Грина в виде ряда

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left(\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n+1) \times$$
$$\times \frac{D_{-p_n-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Big|_{p=p_n}} \times \tag{75}$$
$$\times \left[D_{-p_n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}},$$

где p_n — действительные отрицательные нецелые корни уравнения (71).

Подведем итог этой части работы. Формулы (67) и (70) — явный вид функции Грина первой краевой задачи в области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$ *в интегральной форме*, а формула (75) — *в виде ряда*.

4. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$

Температурное поле может быть найдено в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > 0, \tag{76}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{77}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{78}$$

Начальное условие (2), как и в случае первой краевой задачи, не задается, так как при $t = 0$ область вырождается в точку. Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (76)–(78) будет являться решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{79}$$

$$G(x,t,x',\tau')\big|_{t=\tau} = \delta(x-x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \tag{80}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{81}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{82}$$

Интегральное представление будет иметь вид

$$T(x,t) = a\int_0^t \left[\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} G\right]\Bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau - a\int_0^t \left[\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} G\right]\Bigg|_{x'=0} d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\beta\sqrt{\tau}} f(x',\tau) \times \tag{83}$$
$$\times G(x,t,x',\tau)\, dx'.$$

5. ФУНКЦИЯ ГРИНА ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \left\{(x,t);0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$

Найдем аналитический вид функции Грина $G\left(x,t,x',\tau\right)$ задачи (79)–(82). Эту задачу можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(t-\tau)\delta(x-x'),\quad 0 < x < \beta\sqrt{t},\quad t > \tau, \tag{84}$$

$$G\left(x,t,x',\tau\right)\Big|_{t=0} = 0,\quad x \ge 0, \tag{85}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad t > \tau, \tag{86}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0,\quad t > \tau. \tag{87}$$

В переменных (34) задача (84)–(87) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial G}{\partial \theta} - 2e^{2\theta}\delta\left(\sqrt{2a}x_1e^{\theta} - x'\right)\delta\left(e^{2\theta} - \tau\right),\quad 0 < x_1 < \frac{\beta}{\sqrt{2a}}, \tag{88}$$
$$-\infty < \theta < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{\beta}{\sqrt{2a}}} = 0,\quad \lim_{\theta\to-\infty} G = 0. \tag{89}$$

Применяя к уравнению (88) интегральное преобразование Фурье (37), воспользовавшись интегралом (38) и вводя обозначения $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\sqrt{2a}}$, $\xi_0 = \dfrac{x'}{\sqrt{2a\tau}}$, получим

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx_1^2} + x_1\frac{d\bar{G}}{dx_1} - i\lambda\bar{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau} - x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}, \tag{90}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0. \tag{91}$$

Задача (90)–(91) эквивалентна следующей:

$$\bar{G}'' + x_1\bar{G}' - i\lambda\bar{G} = 0, \tag{92}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = 0, \tag{93}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0, \tag{94}$$

$$\bar{G}\Big|_{x_1=\xi_0-0} = \bar{G}\Big|_{x_1=\xi_0+0}, \tag{95}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0-0} - \left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0+0} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \tag{96}$$

Как уже упоминалось выше, вопрос эквивалентности задач (90)–(91) и (92)–(96) подробно рассмотрен в [3]. Используя подход, примененный в случае первой краевой задачи, будем искать решение уравнения (92) в виде:

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_1 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_2 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \tag{97}$$

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0, \tag{98}$$

где $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра.

Воспользовавшись граничными условиями (95) и (96), получим систему

$$\begin{cases} c_1 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_2 D_{i\lambda}(i\xi_0) = c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0), \\ c_1\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} + c_2\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} = \\ = c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \end{cases} \tag{99}$$

Найдем выражения постоянных c_1, c_2 через c_3, c_4. Для этого воспользуемся методом Крамера и выражением (50) для вронскиана функции параболического цилиндра.

Получаем $c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(\xi_0) & D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0-0} & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} \end{vmatrix} = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}, \tag{100}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0) & D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0-0} \end{vmatrix}, \tag{101}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(\xi_0) & c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0-0} & \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} \end{vmatrix}. \tag{102}$$

Преобразовывая далее (101) и (102), находим

$$\Delta_1 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{103}$$

$$\Delta_2 = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{104}$$

Откуда получаем

$$c_1 = c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{105}$$

$$c_2 = c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{106}$$

Используя условия (93) $\left.\frac{d\overline{G}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = 0$ и (94) $\left.\frac{d\overline{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0$, получаем систему на c_3 и c_4:

$$\begin{cases} \left[c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{-i\lambda}(0) + i\left[c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{i\lambda+1}(0) = 0, \\ c_3 D_{-i\lambda}(\beta_0) + c_4\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right] = 0. \end{cases} \tag{107}$$

Решая систему (107), получаем

$$c_3 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \frac{\left[D_{i\lambda}(i\xi_0) D_{-i\lambda}(0) - iD_{-1-i\lambda}(\xi_0) D_{i\lambda+1}(0)\right]\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right]}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0) D_{-i\lambda}(\beta_0)}, \tag{108}$$

$$c_4 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \frac{D_{-i\lambda}(\beta_0)\left[iD_{-1-i\lambda}(\xi_0) D_{i\lambda+1}(0) - D_{i\lambda}(i\xi_0) D_{-i\lambda}(0)\right]}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0) D_{-i\lambda}(\beta_0)}, \tag{109}$$

Подставляя (108) и (109) в (105) и (106), находим c_1, c_2:

$$\begin{gathered} c_1 = \frac{ie^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \times \\ \times \frac{-\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) D_{i\lambda}(i\beta_0) - iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + D_{-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0) D_{-i\lambda}(\beta_0)} D_{i\lambda+1}(0), \end{gathered} \tag{110}$$

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \times \\ \times \frac{\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + D_{-i\lambda}(\beta_0) D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0) D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0) D_{-i\lambda}(\beta_0)} D_{-i\lambda}(0). \end{gathered} \tag{111}$$

Тогда решение задачи (92)–(96) примет вид

$$\bar{G}=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\dfrac{\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(i\beta_0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)-D_{-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}\times\\ \qquad\times\left[D_{i\lambda}(ix_1)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-1-i\lambda}(x_1)\right],\quad 0<x_1<\xi_0,\\ \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\dfrac{iD_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda+1}(0)-D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-i\lambda}(0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}\times\\ \qquad\times\left\{D_{i\lambda}(ix_1)D_{-i\lambda}(\beta_0)-\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right]D_{-1-i\lambda}(x_1)\right\},\quad \xi_0<x_1<\beta_0.\end{cases}\tag{112}$$

Используя замену (34) и применяя обратное преобразование Фурье (65) к решению (112), где $\lambda = pi$, получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\beta_0 D_{-1-p}(\xi_0)D_p(i\beta_0)+iD_{p+1}(i\beta_0)D_{-1-p}(\xi_0)-D_{-p}(\beta_0)D_p(i\xi_0)}{\beta_0 D_p(i\beta_0)D_{-p}(0)+iD_{p+1}(i\beta_0)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p}(\beta_0)}\times$$
$$\times\left[D_p(ix_1)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-1-p}(x_1)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.\tag{113}$$

В переменных x, x', t, τ функция Грина (113) будет записана в виде

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\times$$
$$\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2a}}D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)+iD_{p+1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\beta}{\sqrt{2a}}D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0)+iD_{p+1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times\tag{114}$$
$$\times\left[D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2a\tau}}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.$$

Преобразовывая далее и используя (68), получаем (114) в виде

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)+D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)+D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.\tag{115}$$

Целью дальнейших преобразований будет получение аналитического вида функции Грина задачи (92)–(96) в виде ряда. Пусть

$$F(p)=\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)+D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)+D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как функция $D_p(z)$ является целой функцией переменного z и параметра p, то подынтегральная функция $F(p)$ является аналитической во всей комплексной плоскости p, за исключением простых полюсов в точках $p = -n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и в точках $p = p_n$, где p_n – нецелые корни уравнения

$$D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) = 0. \tag{116}$$

Как уже упоминалось выше, решение уравнений типа (116), в которых значения аргумента функции параболического цилиндра фиксированы, представляет собой самостоятельную задачу. Далее по теореме о вычетах

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\left(2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=-n}{res}\, F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=p_n}{res}\, F(p)\right]\right). \tag{117}$$

Используя свойства функции параболического цилиндра при целых p, а также пользуясь соотношениями (73), получаем, что первая сумма в (117) равна нулю. Это означает, что функция Грина может быть представлена в виде ряда

$$\begin{gathered} G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left(\frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t}\right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n + 1) \times \\ \times \frac{D_{-p_n-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p_n}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{-p_n}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p_n-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Big|_{p=p_n}} \times \\ \times \left[D_{-p_n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) + D_{-p_n-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}}, \end{gathered} \tag{118}$$

где p_n – действительные отрицательные нецелые корни уравнения (116).

Итог этой части работы. Формулы (114) и (115) – явный вид функции Грина второй краевой задачи в области $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$ *в интегральной форме*, а формула (118) – *в виде ряда*.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ. СОГЛАСОВАННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вопрос согласованности результатов, полученных разными методами, играет очень важную роль. В связи с этим в качестве приложения найдем с помощью описанного выше метода функции Грина температурную функцию, полученную в известной работе Карташова Э.М. и Любова Б.Я. [8] с помощью метода рядов. Метод рядов является очень мощным инструментом и позволяет решить *первую краевую задачу* (22)–(24) при условии, что функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают представление в виде рядов

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}, \quad t > 0, \tag{119}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} t^{\frac{k}{m}}, \quad t > 0. \tag{120}$$

В этом случае, согласно [8], решение в области

$$\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \gamma\sqrt{2at}, t \ge 0\right\} \tag{121}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} T(x,t) = e^{-\frac{x^2}{8at}} \Bigg[& \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}(0) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}} + \\ & + e^{\frac{\gamma^2}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} \frac{D_{2\frac{k}{m}}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{m}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{m}}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{m}-1}(0)} t^{\frac{k}{m}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{122}$$

Используя интегральное представление температурного поля (29), а также явный вид полученной функции Грина (67) покажем, что решение (122) может быть получено и с помощью приведенного выше подхода. Согласно ему температурная функция при граничных условиях (119) и (120) будет представлена в виде

$$T(x,t) = a\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0} - c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \right] d\tau. \tag{123}$$

Очевидно, что для ее получения потребуется найти частные производные $\frac{\partial G}{\partial x'}$ на границах области. Для удобства найдем эти частные производные в области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$. Продифференцировав частным образом (67) и воспользовавшись (68), получаем

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=0} = \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{124}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\left[D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0) D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{125}$$

Далее, замыкая контур полуокружностью в правую полуплоскость, используя согласно [10] асимптотику поведения $D_\nu(z)$, если $|z|$ ограничен и $|\arg(-\nu)| \le \frac{\pi}{2}$ при $\nu \to \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - z\sqrt{-\nu}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right], \tag{126}$$

применяя теорему о вычетах и вводя константу c, такую что $p_1 < c < 0$, где p_1 – наименьший по модулю корень уравнения (71), найдем интеграл

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0} d\tau = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a\tau} b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}} dp\right] d\tau =$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}} b_{\frac{k}{n}}}{4\pi i a} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2}}{D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \int_0^t \tau^{\frac{k}{n} - \frac{p}{2} - 1} d\tau\right] dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a} b_{\frac{k}{n}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{p}{2} + \frac{k}{n} - \frac{p}{2}}}{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)\right]\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{2}\right)} dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i a} b_{\frac{k}{n}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{n}}}{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)\right]\left(2\frac{k}{n} - p\right)} dp =$$

$$= b_{\frac{k}{n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0)\, D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}}.$$

Контур интегрирования состоит из отрезка прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$ и дуги окружности радиуса R. На этой дуге при $R \to \infty$ в силу (126) интеграл обращается в нуль. Константа c введена с целью достижения сходимости внутренних интегралов при $x' = 0$ и $\tau = 0$. Такую постоянную c ввести возможно в силу того, что между прямыми $(c - i\infty, c + i\infty)$ и $(-i\infty, +i\infty)$ нет особых точек подынтегральных функций и на соответствующих дугах применима лемма Жордана.

Итак,

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0} d\tau = b_{\frac{k}{n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}}. \tag{127}$$

Используя аналогичный подход, найдем интеграл

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a\tau} c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}} dp\right] d\tau =$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} \frac{c_{\frac{k}{m}}[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)]t^{p/2}}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \int_0^t \tau^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}-1} d\tau\right] dp =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2} t^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(\frac{k}{m}-\frac{p}{2}\right)} dp =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i a} c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{m}-p\right)} dp =$$

$$= c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}. \tag{128}$$

Подставляя далее (127) и (128) в (123), а также учитывая, что $\beta = \gamma\sqrt{2a}$, получаем (122).

Метод рядов позволяет также решить *вторую краевую задачу* (76)–(78) при условии, что функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают разложение в ряды

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}, \quad t > 0, \tag{129}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} t^{\frac{k}{m}}, \quad t > 0. \tag{130}$$

В этом случае, согласно [8], решение второй краевой задачи в области (121) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x,t) = \sqrt{2a} e^{-\frac{x^2}{8at}} \Bigg[&\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} \frac{iD_{-2\frac{k}{n}}(\gamma)\, D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}(i\gamma)\, D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{n}}(\gamma)\, D_{2\frac{k}{n}+1}(0) + 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}(i\gamma)\, D_{-2\frac{k}{n}}(0)} t^{\frac{k}{n}} - \\ &- e^{\frac{\gamma^2}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} \frac{iD_{-2\frac{k}{m}}(0)\, D_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{m}}(\gamma)\, D_{2\frac{k}{m}+1}(0) + 2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}(i\gamma)\, D_{-2\frac{k}{m}}(0)} t^{\frac{k}{m}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{131}$$

Используя интегральное представление температурного поля (83), а также явный вид полученной функции Грина (114) покажем, что решение (131) может быть получено и с помощью приведенного выше подхода. Согласно ему температурная функция при граничных условиях (129) и (130) будет представлена в виде

$$T(x,t) = a\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[c_{\frac{k}{m}}\, G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}}\,\tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} - b_{\frac{k}{n}}\, G\big|_{x'=0}\,\tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}}\right]d\tau. \tag{132}$$

Найдем $G(x,t,x',\tau)$ на границах области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$, воспользовавшись (50). Получаем

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x'=0} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi\mathrm{i}\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{-p}(0)\,D_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{133}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} = -\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi\mathrm{i}\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{iD_{-p}(0)\,D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{-p}(0)\,D_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{134}$$

Далее, как и в случае первой краевой задачи, замыкая контур полуокружностью в правую полуплоскость, используя асимптотику (126), применяя теорему о вычетах и вводя константу c, такую что $p_1 < c < 0$, где p_1 — наименьший по модулю корень уравнения (116), найдем интеграл

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}}\, G\big|_{x'=0}\,\tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}}d\tau = -\frac{b_{\frac{k}{n}}e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a}}\times$$

$$\times\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{\left[iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{p}{2}}}{pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\int_0^t \tau^{\frac{k}{n}-\frac{p}{2}-1}d\tau\right]dp =$$

$$= -b_{\frac{k}{n}}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left[iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{k}{n}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{n} - p\right)}dp =$$

$$= -b_{\frac{k}{n}}\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{8at}}}{\sqrt{a}}\,\frac{iD_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{2\frac{k}{n}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + 2\frac{k}{n}D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{n}D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}}(0) + D_{2\frac{k}{n}+1}(0)\,D_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}t^{\frac{k}{n}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} G\big|_{x'=0} \tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}} d\tau = -b_{\frac{k}{n}} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{x^2}{8at}}}{\sqrt{a}} \times$$
$$\times \frac{iD_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}}(0) + D_{2\frac{k}{n}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{n}}. \tag{135}$$

Используя аналогичные преобразования, найдем интеграл

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} d\tau = -c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a}} \times$$
$$\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \int_0^t t^{\frac{p}{2}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}-1} d\tau \right] dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(\frac{k}{m}-\frac{p}{2}\right)} dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2}e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{a}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\, D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{m}-p\right)} dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2}e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{\sqrt{a}} \frac{iD_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} d\tau =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2}e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{\sqrt{a}} \frac{iD_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}. \tag{136}$$

Подставляя далее (135) и (136) в (132), а также учитывая, что $\beta = \gamma\sqrt{2a}$, получаем (131).

ВЫВОДЫ

Получен явный вид функций Грина в интегральной форме и в виде ряда первой и второй краевых задач нестационарной теплопроводности в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Показана согласованность результатов, полученных с помощью метода функции Грина, и другими авторами с использованием иных подходов. Приведенный в работе метод позволяет получать решения первой и второй задач нестационарной теплопроводности для более широких классов температурного и теплового нагревов, чем в случае метода рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. С. 540.
2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. С. 655.
3. *Карташов Э.М., Кротов Г.С.* Функции Грина в задачах нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по корневой зависимости // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 4. С. 134–149.
4. *Антимиров М.Я.* Функция Грина одномерного уравнения параболического типа при движении границы по закону $\beta\sqrt{t}$ // Латвийский математический ежегодник. Рига. Зинатне. 1973. С. 70–97.
5. *Кротов Г.С.* Аналитическое решение и функция Грина первой краевой задачи нестационарной теплопроводности в ограниченной области с границей, движущейся по корневой зависимости // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 1. С. 149–160.
6. *Кротов Г.С.* Корни трансцендентного уравнения с функцией параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента // Тепловые вопросы в технике. 2015. Т. 7. № 7. С. 318–324.
7. *Кротов Г.С.* Корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента // Ученые Записки МИТХТ. М. 2005. Выпуск 14. С. 41–48.
8. *Карташов Э.М., Любов Б.Я.* Метод решения краевых задач теплопроводности для области с границей, движущейся по параболическому закону // Журн. технической физики. 1971. Т. XVI. № 1. С. 3–16.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз., 1962. 1100 с.
10. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. II. 330 с.

Analytic Solutions and Green's Functions of Dirichlet and Neumann Problems of Non-Stationary Heat Conduction in a Bounded Domain with a Boundary Moving According to a Root Dependence

G. S. Krotov*

Academy of Labour and Social Relations, Moscow, Russia

**e-mail: yamaths555@gmail.com*

Green's functions method is developed for the equation of non-stationary heat conduction in a bounded domain with a boundary moving according to the $\beta\sqrt{t}$ law. The method leads to exact analytical solutions of boundary value problems during temperature heating (Dirichlet boundary condition) and thermal heating (Neumann boundary condition). An explicit form of the Green's functions was obtained for the first and second-type boundary value problems in the area described above. The equivalence of the obtained results using the Green's function method and other methods is shown.

Keywords: Green's function, Dirichlet problem, Neumann problem, Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition, non-stationary heat conduction, transient heat conduction, heat equation, moving boundary, a boundary moving according to the $\beta\sqrt{t}$ law, integral transform

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 47–56

УДК 621.316.93

РАСЧЕТ ГРОЗОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ С ИМПУЛЬСНОЙ КОРОНОЙ В ЦЕПНЫХ СХЕМАХ

© 2022 г. С. Л. Шишигин[1], *, Д. С. Шишигин[1], И. Н. Смирнов[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Вологодский государственный университет, Вологда, Россия*

**e-mail: ctod28@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.
После доработки 02.08.2021 г.
Принята к публикации 06.08.2021 г.

Удары молнии вызывают в воздушной линии (ВЛ) волны перенапряжений опасные для электрооборудования электрических подстанций. Импульсная корона проводов ВЛ приводит к затуханию и сглаживанию волн, что облегчает выбор средств защиты от перенапряжений. Расчеты волновых процессов обычно проводятся в программе ATP-EMTP. Проблема в том, что подключение динамической емкости короны в типовые схемы ВЛ приводит к нарушению устойчивости численного решения по формуле трапеций. Исследование показало, что методы демпфирования численных осцилляций, рекомендуемые ATP-EMTP для статических элементов, неэффективны для динамической емкости. В данной работе ВЛ моделируются цепными схемами с сосредоточенными параметрами. При большом числе звеньев они позволяют учесть распределенный характер параметров линии, включая импульсную корону, и моделировать волновые процессы с достаточной точностью. Статические элементы моделируются по формуле трапеций, динамическая емкость короны – по неявной формуле Эйлера, что обеспечивает устойчивое решение с высоким быстродействием. Эффективность предлагаемого подхода подтверждена сравнением результатов расчета с экспериментальными данными (Гари, Вагнера, Потужного) реальных ВЛ. Расчет выполнен с тремя моделями импульсной короны (ЛПИ, ВНИИЭ, Гари). Установлено: все модели короны адекватны, модель ВНИИЭ наиболее точна, модель Гари “проигрывает” ей при положительных импульсах. Модель ЛПИ, не учитывающая скачок динамической емкости в момент возникновения короны, наименее точная.

Ключевые слова: воздушная линия, грозовые перенапряжения, моделирование, цепная схема, импульсная корона, динамическая емкость, эксперимент Гари, эксперимент Вагнера, эксперимент Потужного

DOI: 10.31857/S0002331021040130

1. ВВЕДЕНИЕ

Удары молнии в воздушных линиях (ВЛ) вызывают волны перенапряжений, распространение которых представляет опасность для электрооборудования электрических подстанций. Импульсная корона проводов ВЛ приводит к затуханию и сглаживанию волн [1–4], что облегчает выбор средств защиты от перенапряжений.

К настоящему времени разработано множество моделей импульсной короны. В большинстве исследований импульсная корона моделируется одним элементом – динамической емкостью, нелинейно зависящей от напряжения. Среди наиболее распространенных моделей выделим модель ЛПИ [5], модель ВНИИЭ [6] и модель Гари [7].

Нам неизвестны работы сравнительного характера, которые позволили бы выбрать наиболее адекватную модель. В данной работе проблему выбора будем решать путем сравнения результатов расчета волновых процессов (при использовании разных моделей импульсной короны) с результатами измерений на реальных ВЛ [1–3].

Наиболее часто расчеты волновых процессов ВЛ и ПС производятся в программе ATP-EMTP. Модель импульсной короны здесь не реализована, но пользователь может ее создать как нелинейный компонент [8]. Здесь две проблемы. Для адекватного моделирования импульсной короны линия должна дробится на элементы длиной 10–30 м [8], поэтому модель ВЛ становится громоздкой, а набирать ее надо вручную. Вторая проблема серьезнее, поскольку связана с устойчивостью расчетов.

Интегрирование дифференциальных уравнений в EMTP производится в шаговых алгоритмах по формуле трапеций, которая является A-устойчивой, но не является L-устойчивой, что в жестких задачах приводит к численным осцилляциям [9]. Скачкообразное включение/изменение/отключение динамической емкости также является источником численных осцилляций, приводящих к нарушению устойчивости. Можно было бы применить известные методы демпфирования численных осцилляций формулы трапеций [10], но они эффективны только для статических элементов.

Необходимость дробления ВЛ на элементы малой длины для адекватного моделирования импульсной короны позволяет рассматривать цепные схемы с сосредоточенными параметрами в качестве альтернативной модели длинной линии. Главным достоинством цепных моделей является универсальность – они применимы для произвольных 3D систем проводников в воздухе и земле. Цепные схемы с успехом используются в теории заземлителей, что позволяет использовать разработанные модели, методы, программы [11].

Проблема численных осцилляций и нарушения устойчивости расчета волновых процессов ВЛ с импульсной короной решена применением L-устойчивой формулы Влаха третьего порядка вместо формулы трапеций [12]. Недостаток этого подхода – в значительном увеличении трудоемкости. В данной работе моделирование статических элементов производится по формуле трапеций, а моделирование динамической емкости производится по неявной формуле Эйлера, что обеспечивает устойчивое решение с высокой производительностью.

Показать эффективность предлагаемого подхода моделирования волновых процессов ВЛ с импульсной короной в цепных схемах, а также выбрать наиболее адекватную модель динамической емкости при сравнении с измерениями на реальных ВЛ [1–3] – цель настоящей работы.

2. ЦЕПНАЯ МОДЕЛЬ ТОНКОГО ПРОВОДНИКА

Проводники (заземляющие стержни, провода ВЛ, шины ПС) дробятся на элементы длиной $l < \lambda/10$, где λ – длина электромагнитной волны. Каждому элементу ставится в соответствие П-схема с продольным сопротивлением $\mathbf{Z}$, включающим внутреннее и внешнее индуктивное сопротивление проводника, и поперечной проводимостью $\mathbf{Y}$, моделирующей растекание тока в земле или емкостные токи проводников в воздухе (рис. 1). Взаимные электромагнитные связи между П-схемами учитываются взаимными сопротивлениями и проводимостями. Параметры цепной модели проводника (рис. 1) приведены в [11].

Для моделирования импульсной короны в поперечные ветви включается нелинейная емкость

$$\Delta C(u) = C_d(u) - C_0,$$

где C_0 – геометрическая емкость провода; $C_d(u)$ – динамическая емкость импульсной короны.

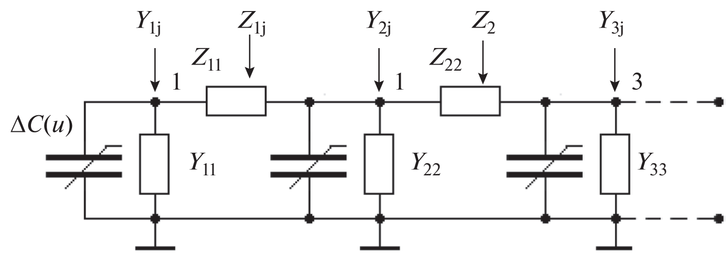

Рис. 1. Цепная модель тонкого проводника.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ ИМПУЛЬСНОЙ КОРОНЫ

Коронный разряд на проводах ВЛ возникает, когда напряженность электрического поля провода превысит критическую напряженность [12]

$$E_0 = 23.3m\delta\left(1 + \frac{0.62}{\delta^{0.3} r_0^{0.38}}\right) [\text{кВ/см}],$$

где r_0 – радиус провода [см]; δ – относительная плотность воздуха (далее $\delta = 1$); m – коэффициент негладкости провода (далее – $m = 0.82$).

До возникновения коронного разряда емкостной ток пропорционален статической (геометрической) емкости провода

$$i = \frac{dq}{dt} = C_0 \frac{du}{dt}.$$

При коронном разряде заряд провода (включая объемный заряд короны) нелинейно зависит от напряжения, тогда

$$i = \frac{dq(u)}{dt} = \frac{dq(u)}{du}\frac{du}{dt} = C_d \frac{du}{dt}.$$

Таким образом, форма записи стекающего тока провода (и уравнений длинной линии) не изменятся при коронном разряде, если геометрическую емкость провода заменить динамической емкостью

$$C_d = \frac{dq(u)}{du}.$$

Расчетная модель динамической емкости [13, стр. 237]

Примем, что чехол короны представляет цилиндрический проводник радиуса r. Среднюю напряженность чехла E считаем постоянной величиной: $E = E_+ = 9$ кВ/см, $E = E_- = 21$ кВ/см [13]. В современных исследованиях $E_+ = 5$ кВ/см, $E_- = 18$ кВ/см [14].

Тогда

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}, \quad q = 2\pi\varepsilon E r, \quad u = Er\ln(2h/r),$$

где q – погонный заряд провода (включая объемный заряд короны); h – высота подвеса провода.

Динамическая емкость провода (с учетом $E = \text{const}$)

$$C_d = \frac{dq}{du} = \frac{d}{d}\frac{2\pi\varepsilon Er}{Er\ln(2h/r)} = \frac{\frac{d}{dr}2\pi\varepsilon Er}{\frac{d}{dr}Er\ln(2h/r)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(2h/r) - 1} = C_0\frac{\ln(2h/r_0)}{\ln(2h/r) - 1}, \tag{1}$$

где r – радиус чехла определен при заданном напряжении провода u и заданной напряженности E, из условия

$$u = Er\ln(2h/r).$$

Для дальнейшего исследования важно, что в момент возникновения коронного разряда (при $r = r_0$) динамическая емкость согласно (1) возрастает скачком.

Модель импульсной короны ЛПИ [5]

Динамическая емкость провода

$$C_d(u) = C_0 + C_0 \times 5/3\, k\left(u/U_0 - 1\right)^{2/3}, \quad k_- = 0.375, \quad k_+ = 0.78, \tag{2}$$

где C_0 – геометрическая емкость провода; k – коэффициенты для положительного и отрицательного импульса. Заметим, что $C_d = C_0$ при $u = U_0$, что противоречит (1).

Модель импульсной короны ВНИИЭ [6]

$$C_d(u) = 4/3\, C_0 B\sqrt[3]{u/U_0}, \quad B_+ = 1.02, \quad B_- = 0.85. \tag{3}$$

В момент возникновения коронного разряда, при $u = U_0$, емкость короны возрастает скачком, что согласуется с (1).

Модель импульсной короны Гари [6]

$$C_d(u) = C_0 B\left(u/U_0\right)^{B-1}, \quad B_+ = 2.63d^{0.153}, \quad B_- = 1.121 + 3.4d, \tag{4}$$

где d – диаметр провода. В момент возникновения коронного разряда динамическая емкость возрастает скачком, что согласуется с (1) и (3). В данной модели динамическая емкость зависит от диаметра провода.

3. РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ СХЕМ

Расчет цепной схемы с нелинейной емкостью (рис. 1) производится во временной области методом дискретных схем. Этот метод используется и в EMTP.

Временной интервал разбивается на n равных шагов длиной h. При малом шаге произвольные частотно-зависимые сопротивления и проводимости моделируются дискретными резистивными схемами.

Найдем дискретную схему емкости. Выполним интегрирование дифференциального уравнения, связывающего напряжение и ток, на k–м временном шаге по формуле трапеций

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{i_{k+1} + i_k}{2} = C\frac{u_{k+1} - u_k}{h} \Rightarrow i_{k+1} = \frac{2C}{h}u_{k+1} - \left(i_k + \frac{2C}{h}u_k\right) = Gu_{k+1} - J_k, \tag{5}$$

по неявной формуле Эйлера

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow i_{k+1} = C\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \frac{C}{h}u_{k+1} - \frac{C}{h}u_k = Gu_{k+1} - J_k. \tag{6}$$

Уравнениям (5), (6) соответствует дискретная схема (рис. 2)

Дискретная схема индуктивности получается аналогично. Дискретные схемы произвольного частотно-зависимого сопротивления и проводимости получены в [11].

Таким образом, расчет переходного процесса в цепных схемах (рис. 1) сводится к расчету резистивной цепи на последовательности временных шагов. Использование формулы трапеций, имеющей второй порядок точности, обеспечивает высокую точность расчетов.

Проблема в том, что формула трапеций не является L-устойчивой [9]. При определенных условиях она приводит к численным осцилляциям, что можно показать на примере.

Пусть к емкости C приложено импульсное напряжение с линейным фронтом длительностью T и единичной амплитудой. Примем шаг $h = T$, тогда напряжение шагов $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = ..u_n = 1$.

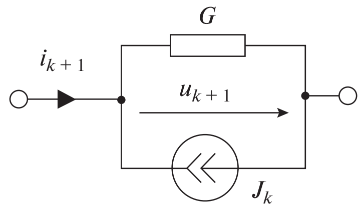

Рис. 2. Дискретная схема емкости на k-м временном шаге.

Найдем ток емкости по формуле трапеций (5) при $C/h = 1$

$$
\begin{aligned}
&i_0 = 0,\\
&i_1 = 2C/h\,u_1 = 2,\\
&i_2 = 2C/h\,u_2 - (i_1 + 2C/h\,u_1) = -2,\\
&\ldots\\
&i_{n+1} = -i_n.
\end{aligned}
$$

Таким образом, ток осциллирующий $i = (0, 2, -2, 2, -2...)$, при численных расчетах такое решение разваливается.

С использованием неявной формулы Эйлера (6) при $C/h = 1$

$$
\begin{aligned}
&i_0 = 0,\\
&i_1 = C/h\,u_1 = 1,\\
&i_2 = C/h\,u_2 - C/h\,u_1 = 0,\\
&\ldots\\
&i_{n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $i = (0, 1, 0, 0...)$, т.е. численных осцилляций нет, конденсатор заряжается за один шаг и далее не пропускает ток, что соответствует физике процесса.

Рассмотренная проблема возникает при моделировании коронного разряда. При скачкообразном изменении динамической емкости формула трапеций приводит к численной осцилляции и неустойчивости решения.

Рассмотрим возможные способы решения проблемы.

В работе [16] для решения жестких задач рекомендовано использование неявной формулы Эйлера, которая является L-устойчивой. Выполненные расчеты подтверждают обоснованность данной рекомендации, однако этот способ потребует значительно уменьшить шаг интегрирования (по сравнению с формулой трапеций) для достижения заданной точности решения. Автоматическое изменение шага, рекомендованное в [16], здесь нецелесообразно (из-за высокой трудоемкости в сложных цепях), поскольку потребует пересчета матрицы узловых проводимостей на каждом шаге.

В работе [10] для решения жестких задач рекомендуется применение линейной комбинации формулы трапеций и неявной формулы Эйлера в соотношении 0.85/0.15. Этот способ реализован в программе EMTP. Исследование этого способа показало, что он эффективен для моделирования статических емкостей, но не гарантирует устойчивое решение при моделировании динамической емкости – доля неявной формулы Эйлера должна быть значительно увеличена.

В работе [17] используется формула трапеций, однако, если происходит топологическое изменение цепи, “включается” неявная формула Эйлера с вдвое меньшим шагом, что позволяет не пересчитывать матрицу узловых проводимостей цепи, найденную по формуле трапеций. Этот способ эффективен при подключении единичного элемента, однако подключение динамической емкости производится практически во всех узлах провода ВЛ со смещением во времени по мере распространения волны, а значит формула трапеций фактически заменяется неявной формулой Эйлера, а число шагов удваивается.

В работе [12] устойчивое решение задачи получено с использование L-устойчивой формулы Влаха 3 порядка, однако, трудоемкость решения и требования к оперативной памяти возрастают в несколько раз по сравнению с формулой трапеций из-за расчетов с комплексными числами.

Простое, устойчивое и достаточно точное решение дает следующая методика: формула трапеций используется для моделирования индуктивностей и емкостей с постоянными параметрами, для моделирования переменной части динамической емкости $\Delta C = C_d - C_0$ используется неявная формула Эйлера.

4. ОСОБЕННОСТИ МОДАЛЬНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВЛ С ИМПУЛЬСНОЙ КОРОНОЙ

Волновые процессы в многопроводных ВЛ рассчитываются модальным методом, который исследован в работе [4] и других работах этих авторов. Идея метода заключается в преобразованиях уравнений n-проводной длинной линии к системе из n-уравнений однопроводных, независимых друг от друга линий, иначе, из общего волнового процесса выделяются независимые модальные (волновые) каналы.

Пример. В крайний провод трехпроводной ВЛ (с горизонтальным расположением проводов) вводится импульс тока 1 А, два другие провода изолированы. Вектор фазных токов $I = (1,0,0)^T$. Применение модального метода приводит к матрице токов волновых каналов (с округлением результатов для наглядности)

$$I_w = \begin{pmatrix} 1/3 & 0.5 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -0.5 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец определяет волновой канал “провода–земля”, поскольку токи всех проводов, равные 1/3 А, движутся в прямом направлении по проводам и возвращаются через землю. Затухание и деформация волны земляного канала определяется сопротивлением земли (по формуле Карсона), методика расчета которого с помощью эквивалентных схем рассмотрена в [4], в шаговых алгоритмах – в [12].

Второй столбец определяет волновой канал “крайний провод–крайний провод”, третий столбец – “крайние провода–средний провод”. Токи этих каналов замыкаются по проводам (без возврата через землю), что соответствует распространению волны в воздухе, т.е. с очень малым затуханием и запаздыванием (из-за потерь в проводах), которыми в рассматриваемых далее задачах (при пробеге волн до 10 км) можно пренебречь. Это позволяет объединить волновые каналы в воздухе (независимо от числа проводов), что упрощает расчеты. В результате рассматриваем волновой канал в земле I_{gr} и волновой канал в воздухе I_{air}, где

$$I_{gr} = (1/3, 1/3, 1/3)^T, \quad I_{air} = I - I_{gr} = (2/3, -1/3, -1/3)^T.$$

Модальный метод, основанный на принципе наложения, применим только в линейных задачах. В работе [4] и других работах этих авторов показано, что для применения модального метода в нелинейных распределенных системах характеристика динамической емкости должна быть аппроксимирована кусочно-постоянной функцией, т.е. задача становится линейной на каждом временном шаге. В дискретные моменты времени в дискретные узлы схемы подключается сосредоточенная емкость, величина которой определяется напряжением в данный момент времени.

Этот подход реализован и в данной работе. Нелинейная емкость (2)–(4) принимается постоянной величиной в пределах каждого шага, т.е. нелинейная характеристика динамической емкости становится кусочно-постоянной функцией во времени. На каждом

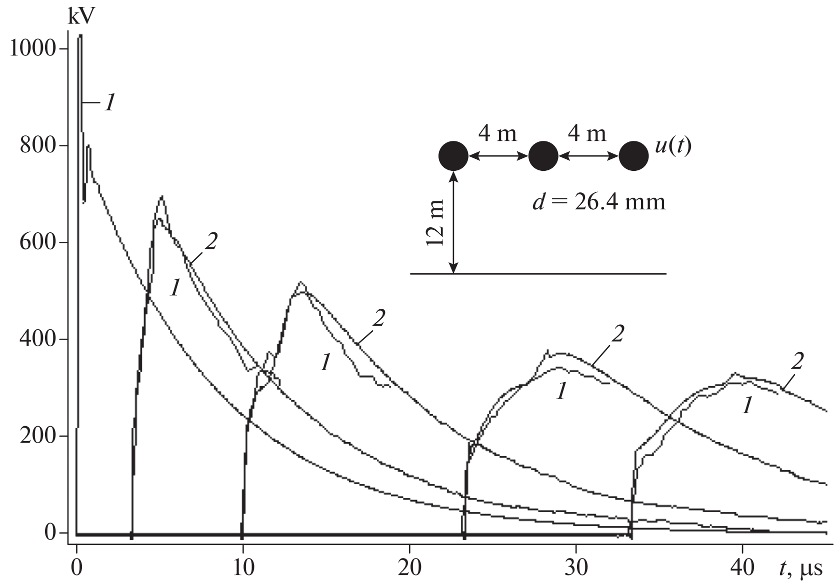

Рис. 3. Напряжение на расстоянии 0, 1, 3, 7, 10 км от начала ВЛ: *1* – измерения Гари (из документации к программе EMTP-RV); *2* – расчет с моделью короны ВНИИЭ (3).

шаге проводится последовательный расчет всех волновых каналов, полученные напряжения и токи волновых каналов суммируются, в конце шага определяется новое значение динамической емкости, которое используется на следующем шаге. Этот подход далее успешно протестирован в сравнении с экспериментальными данными.

5. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА С ИЗМЕРЕНИЯМИ НА РЕАЛЬНЫХ ВЛ

Расчеты волновых процессов ВЛ выполнены в программе ZYM [11].

Задача 1. В экспериментах Гари (C. Gary) [1] в начало крайнего провода ВЛ (рис. 3) вводится импульс положительного напряжения

$$u(t) = U_m\left[0.988e^{-0.123t} - 1.064e^{-4.1t}\sin(12.3t + 70°)\right], \quad \text{где} \quad U_m = 850\times10^3,\ t[\text{мкс}],$$

и получены осциллограммы напряжения на расстоянии 1, 3, 7, 10 км (рис. 3). Удельное сопротивление грунта не измерялось, но авторы [1] проводят расчеты при ρ = 100–1000 Ом · м. В данной работе примем ρ = 200 Ом · м.

Расчеты хорошо согласуются с данными измерений (рис. 3). По результатам расчета на расстоянии 3 км (рис. 4а) и 10 км (рис. 4б) видим, что модель ВНИИЭ наиболее точная, модель Гари (из-за результата на 3 км) и модель ЛПИ менее точны. Заметим, что наши расчеты (по всем моделям короны) лучше согласуются с экспериментом, чем расчеты по программе EMTP-RV (рис. 4б).

Задача 2. В экспериментах Вагнера (Wagner C.F.) [2] в начало крайнего провода трехпроводной ВЛ вводятся различные по амплитуде и полярности импульсы напряжения (рис. 5). Грунт низкоомный (ρ = 50 Ом · м), поэтому влиянием заземленных тросов, которые включены параллельно сопротивлению грунта, при расчетах можно пренебречь. Сравним напряжение, измеренное на расстоянии 2222 м, с результатами расчетов (рис. 5). Модель ВНИИЭ и модель Гари одинаково точны при отрицательной полярности, но модель ВНИИЭ точнее при положительной полярности. Модель ЛПИ здесь наименее точная, динамическая емкость при малых напряжениях недоста-

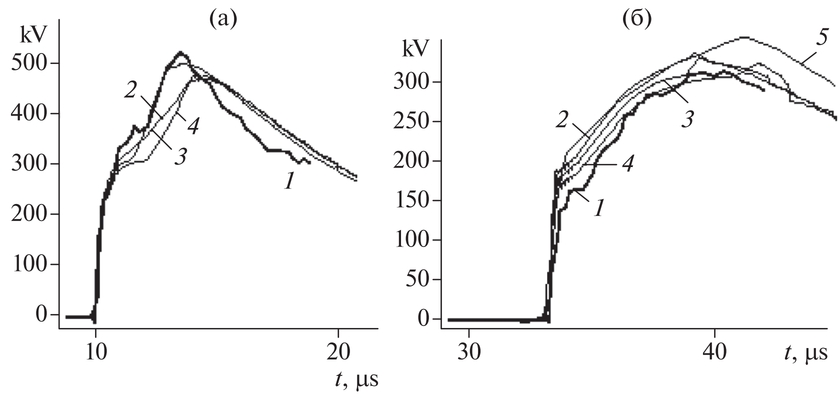

Рис. 4. Напряжение на расстоянии 3 км (а), 10 км (б) от начала ВЛ: *1* – измерения Гари; *2* – расчет с моделью короны ЛПИ (2); *3* – расчет с моделью короны ВНИИЭ (3); *4* – расчет с моделью короны Гари (4); *5* – расчет по программе EMTP-RV (из документации к этой программе).

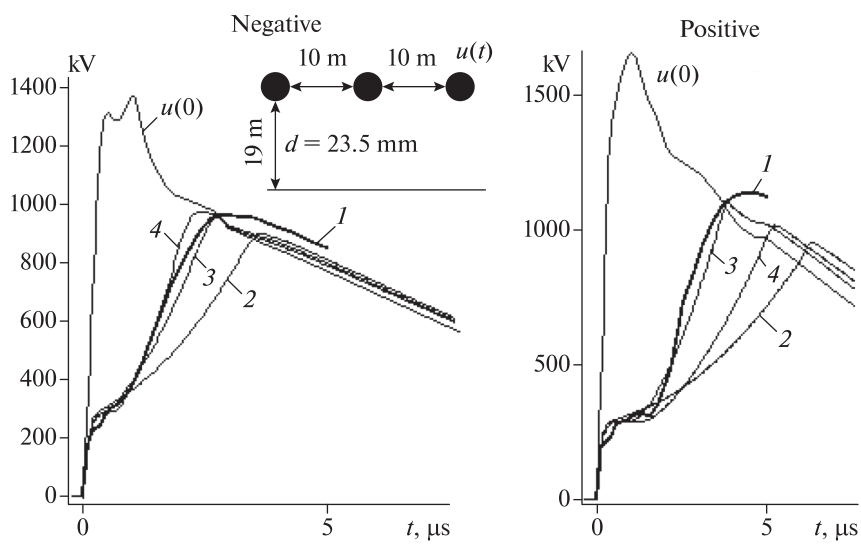

Рис. 5. Напряжение в начале линии $u(0)$ и на расстоянии 2222 м (7290’ в оригинале) при отрицательной и положительной полярности: *1* – измерения Вагнера; *2* – расчет с моделью короны ЛПИ (2); *3* – расчет с моделью короны ВНИИЭ (3); *4* – расчет с моделью короны Гари (4); удельное сопротивление грунта $\rho = 50$ Ом · м.

точна, при больших напряжениях избыточна. Были рассмотрены и другие варианты [2], которые приводят к аналогичным выводам.

Задача 3. В экспериментах Потужного и Фертика [3] в начало крайнего провода ВЛ вводятся импульсы напряжения разной полярности и амплитуды (рис. 6). Сравним результаты измерений и расчетов на расстоянии 5.52 км (рис. 6). При отрицательной полярности импульса наилучшее совпадение с измерениями дают расчеты с моделью Гари, но расчеты с моделью ВНИИЭ также хорошо согласуются с измерениями. Расчеты с моделью ЛПИ наименее точные. При положительной полярности импульса расчеты при всех моделях короны хорошо описывают затухание волны, но не позволяют моделировать запаздывание фронта волны с достаточной точностью (рис. 6), поэтому здесь сравнение моделей затруднительно.

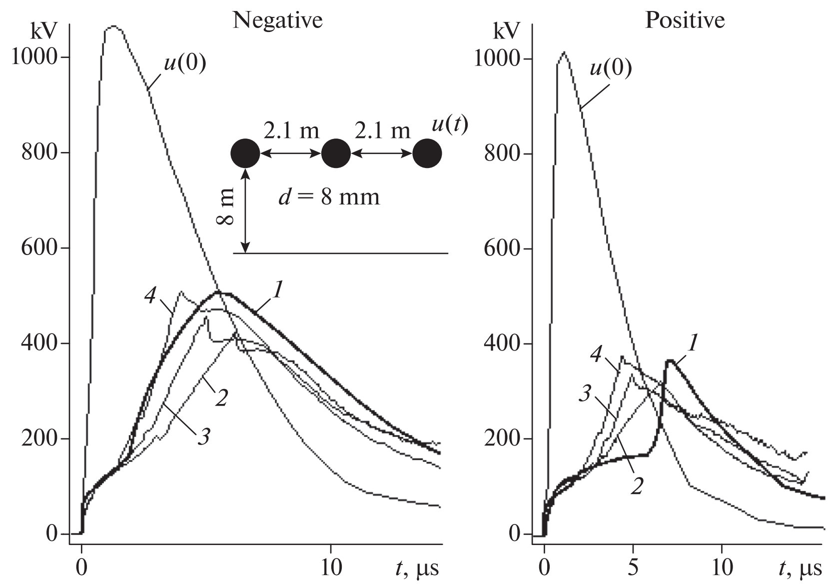

Рис. 6. Напряжение в начале линии $u(0)$ и на расстоянии 5.52 км: *1* – измерения Потужного и Фертика; *2* – расчет с моделью короны ЛПИ (2); *3* – расчет с моделью короны ВНИИЭ (3); *4* – расчет с моделью короны Гари (4); удельное сопротивление грунта ρ = 200 Ом · м.

Подводя итоги решенных задач, считаем модель импульсной короны ВНИИЭ (3) наиболее адекватной для ВЛ с одиночными проводами.

ВЫВОДЫ

Моделирование грозовых перенапряжений ВЛ с импульсной короной требует дробления проводов на элементы малой длины (10–30 м) так, что цепные модели с сосредоточенными параметрами конкурентоспособны по сравнению с моделью длинной линии.

Расчеты волновых процессов в реальных ВЛ с использованием трех наиболее распространенных моделей короны при сравнении с экспериментальными данными показали, что модель ВНИИЭ (3) является наиболее адекватной. Более сложная модель Гари (4) дает избыточную динамическую емкость при положительной полярности. Модель ЛПИ (2) не учитывает эффект скачка динамической емкости при возникновении короны, из-за чего динамическая емкость занижена при малых напряжениях короны, и поэтому не возникает характерной “ступеньки” в графике волны напряжения. При больших напряжениях динамическая емкость в модели ЛПИ завышена по сравнению с моделью ВНИИЭ.

Скачкообразное изменение динамической емкости является источником численных осцилляций и нарушения устойчивости расчета волновых процессов по формуле трапеций в программах типа EMTP. Рекомендуется выделять переменную составляющую динамической емкости $\Delta C = C_d - C_0$ и моделировать ее по неявной формуле Эйлера, что обеспечивает устойчивое решение при достаточной точности расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gary C., Timotin A., Cristescu D.* Prediction of surge propagation influenced by corona and skin effect. IEE Proc. 1983. V. 130. Pt. A. № 5. P. 264–272.
2. *Wagner C.F., Gross I.W., Lloyd B.L.* High-Voltage Impulse Tests on Transmission Lines. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems. 1954. V. 73. Issue 2. P. 196–209.

3. *Потужный А.К., Фертик С.М.* Затухание волн высокого напряжения в 35-kV линии // Электричество. 1938. № 1. С. 29–39.
4. *Ефимов Б.В., Гумерова Н.И.* Моделирование деформации грозовых волн в воздушных линиях с учетом совместного влияния конструкции опор, короны на проводах и потерь в земле // Труды КНЦ РАН. Энергетика. 2013. Вып. 7(17). С. 13–32.
5. *Богатенков Н.М., Гумерова Н.И., Костенко М.В. и др.* Вольт-кулоновые характеристики короны на расщепленных проводах при импульсном напряжении // Труды ЛПИ. Электроэнергетика. № 340. 1974. С. 8–13.
6. *Бочковский Б.Б.* Импульсная корона на одиночных и расщепленных проводах // Электричество. 1966. № 7. С. 22–27.
7. *Gary C., Dragan G., Langu I.* Impulse corona discharge energy around the conductors. IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, Oct 1990. P. 922–924.
8. *Anane Z., Bayadi A., Huang K.* Distortion Phenomena on Transmission Lines Using Corona Modeling ATP/EMTP. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation. 2018. V. 25. № 2. P. 383–389.
9. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
10. *Alvarado F.L., Lasseter R.H, Sanchez J.J.* Testing of trapezoidal integration with damping for the solution of power transient problems. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. 1983. V. PAS-102. № 12. P. 3783–3790.
11. *Шишигин С.Л., Шишигин Д.С.* Расчет заземлителей (монография). Вологда: ВоГУ, 2020. 219 с.
12. *Шишигин С.Л., Шишигин Д.С., Смирнов И.Н.* Расчет грозовых перенапряжений воздушных линий в цепных схемах с учетом частотных свойств грунта // Материаловедение. Энергетика. 2020. Т. 26. № 4. С. 87–99.
13. Техника высоких напряжений / Под ред. Разевига Д.В., Изд. 2-е, перераб. и доп. М., “Энергия”, 1976. 488 с.
14. *Sun Y., Montenegro A., Tobin T.* Corona characteristics of aerial conductors under switching impulse voltages. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation. 2020, V. 27. Issue: 1. P. 206–213.
15. *Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. Учебник для вузов. 5-е изд. Т. 2. / Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. СПб.: Питер, 2009. 432 с.
16. *Демирчян К.С., Бутырин П.А.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высш. школа, 1988. 335 с.
17. *Marti J.R., Lin J.* Suppression of numerical oscillations in the EMTP. IEEE Trans. on Power Systems. 1989. V. 4. № 2. P. 739–747.

Calculation of Lightning Surges in Overhead Lines with Impulse Corona in pi–Circuits

S. L. Shishigin[a, *], D. S. Shishigin[a], and I. N. Smirnov[a]

[a] *Vologda State University, Vologda, Russia*
**e-mail: ctod28@yandex.ru*

Lightning strikes cause surge waves in the overhead transmission line, which are dangerous for the electrical equipment of electrical substations. The pulse corona of the overhead line leads to attenuation and smoothing of the waves, which makes it easier to choose means of protection against surges. Calculations of wave processes are usually carried out in the ATP-EMTP program. The problem is that the connection of the dynamic corona capacitance to the typical transmission line circuits leads to a violation of the stability of the numerical solution according to the trapezoid formula. The study showed that the numerical oscillation damping methods recommended by ATP-EMTP for static elements are ineffective for dynamic capacitance. In this paper, transmission lines are modeled by pi-circuits. With a large number of links, they allow us to take into account the distributed nature of the line parameters, including the pulse corona, and to model wave processes with sufficient accuracy. Static elements are modeled using the trapezoid formula, and the dynamic corona capacity is modeled using the implicit Euler formula, which provides a stable solution with high performance. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by comparing the calculation results with experimental data (Gary, Wagner, Potuzhny) of real transmission lines. The calculation was performed with three models of the pulse corona (LPI, VNIIE, Gari). It is established that all models of the corona are adequate, the VNIIE model is the most accurate, and the Gary model “loses” to it with positive impulses. The LPI model, which does not take into account the jump in dynamic capacity at the time of the corona occurrence, is the least accurate.

Keywords: transmission line, lightning surges, simulation, pi-circuit, pulse corona, dynamic capacitance, Gary experiment, Wagner experiment, Potuzhny experiment

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 57–65

УДК 621.314.21

РАСПОЗНАВАНИЕ ВИТКОВЫХ ЗАМЫКАНИЙ В ОБМОТКЕ ТРАНСФОРМАТОРА ПО ЛОКАЛЬНЫМ СОСТАВЛЯЮЩИМ НАБЛЮДАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

И. Д. Кочетов[1], *, Ю. Я. Лямец[1]

[1]ООО "Релематика", Чувашский госуниверситет, Чебоксары, Россия

**e-mail: kochetov_id@relematika.ru*

Поступила в редакцию 02.03.2021 г.
После доработки 07.10.2021 г.
Принята к публикации 15.10.2021 г.

Рассматриваются информационные аспекты распознавания витковых замыканий в обмотке трансформатора. Алгоритм распознавания основан на разделении наблюдаемого процесса на две части – нормальный и локальный процессы. Последний концентрирует в себе информацию о повреждении обмотки, так как инициируется единственным источником – током замыкания. Что же касается нормального процесса, то он создается в модели неповрежденного трансформатора половиной наблюдаемых величин. Применительно к трансформатору обоснована целесообразность активирования нормального процесса токами, наблюдаемыми на поврежденной стороне трансформатора, и напряжениями, наблюдаемыми на неповрежденной стороне. Реакцией модели неповрежденного объекта станут нормальные составляющие напряжений на одной стороне и нормальные составляющие токов на другой. Локальные составляющие соответствующих напряжений и токов представляют собой разности между наблюдаемыми величинами и их нормальными составляющими. В модели локального режима входы поврежденной стороны трансформатора разомкнуты, а неповрежденной – зашунтированы. Модель нормального режима востребована в реальном времени, а модель локального режима – в отложенном времени для априорного определения области отображения замера при витковых замыканиях. В качестве замера используется двухкоординатная функция магнитодвижущей силы поврежденной части обмотки.

Ключевые слова: трансформатор, витковое замыкание, компоненты тока замыкания

DOI: 10.31857/S0002331022010058

В состав токов и напряжений, наблюдаемых на разных сторонах энергообъекта, входят компоненты, несущие информацию о его повреждении [1]. Первыми по хронологии появления в теории и практике стали составляющие обратной и нулевой последовательности. Намного позже вошли в обиход аварийные составляющие, более ценные в информационном отношении, так как в отличие от симметричных составляющих на них не сказывается несимметрия объекта [2]. В случае короткого замыкания (КЗ) источником аварийных составляющих токов и напряжений становится ток, возникший в месте КЗ и изменивший предшествующий режим энергообъекта на текущий режим КЗ. В текущую электрическую величину наряду с аварийной составляющей входит еще одна, представляющая собой экстраполированную на время после КЗ ту же величину, взятую из предшествующего режима.

Относительно недавно обнаружилось, что в аварийной составляющей, а, следовательно, и в текущей величине, присутствует примечательный компонент, названный локальной составляющей [3]. Он концентрирует в себе информацию о повреждении. Пару с ним образует нормальная составляющая, дополняющая его до текущей величины, или, как модификация, до ее аварийной составляющей. Хотя локальная составляющая создается тем же током КЗ, что и аварийная, у нее имеется существенное преимущество. В локальном режиме каждое место наблюдения энергообъекта либо зашунтировано, либо отключено от внешних связей; в разных местах может быть сделано одинаково или по-разному. Будем исходить из того, что в каждом месте наблюдения регистрируются и ток, и напряжение. Наблюдаемые величины подразделяются на две равные части, по одному представителю от каждого места наблюдения. Нормальные и локальные составляющие определяются для величин второй группы: нормальные составляющие – как реакции модели наблюдаемого объекта на воздействие всех величин первой группы, а локальные составляющие – как разности между величинами второй группы и их нормальными составляющими.

Принцип разделения наблюдаемых величин на группу воздействия и группу реакции исходит из учета свойств объекта и характера задачи распознавания повреждений. Витковые замыкания в трансформаторе обусловлены износом изоляции, причиной которого являются электродинамические воздействия токов КЗ, или же непосредственно старение изоляции. Износ изоляции происходит постепенно. Сначала замыкается относительно малое число витков трансформатора, при котором чувствительности дифференциальной защиты трансформатора будет не хватать, а газовая защита не сработает ввиду незначительного газообразования в масле. Со временем число замкнувшихся витков трансформатора будет увеличиваться из-за электродинамического воздействия тока КЗ на изоляцию, после чего данные защиты смогут сработать. Рассматриваемый далее алгоритм выявления витковых замыканий по локальным составляющим токов и напряжений имеет целью распознавание повреждения еще на ранней стадии его возникновения.

На рис. 1а иллюстрируется текущий режим виткового КЗ, в котором наблюдаются напряжения и токи, представленные в комплексном базисе как $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ и $\underline{U}_2, \underline{I}_2$. В той же модели показан неизвестный ток КЗ $\underline{I}_f$ в замкнувшейся части обмотки, число витков w_f и сопротивление $\underline{Z}_f$ которой также неизвестны. Будем считать, что известны параметры неповрежденных обмоток w_1, $\underline{Z}_1$ и w_2, $\underline{Z}_2$, а также сопротивление ветви намагничивания, обозначенное на рис. 1в, 1д как $\underline{Z}_{\mu}^{(2)}$, что указывает на приведение к вторичной обмотке. Это сопротивление может быть определено по напряжению и токам предшествующего режима

$$\underline{Z}_{\mu}^{(2)} = \frac{\underline{U}_{1\text{пд}}^{(2)} - \underline{Z}_1^{(2)} \underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)}}{\underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)} - \underline{I}_{2\text{пд}}}.$$

Из двух пар наблюдаемых напряжений и токов для создания нормального режима контролируемого объекта должны быть отобраны две величины, по одной от каждой пары. На первый взгляд, самый простой вариант – токи $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$, но тогда придется столкнуться с чрезмерно высокой чувствительностью нормального режима к характеристике магнитопровода. Менее чувствителен комбинированный вариант – ток $\underline{I}_1$ со стороны предположительно поврежденной обмотки и напряжение $\underline{U}_2$ со стороны неповрежденной (рис. 1б). Нормальные составляющие $\underline{U}_{1\text{нм}}$ и $\underline{I}_{2\text{нм}}$ двух оставшихся величин $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_2$ из числа наблюдаемых определяются как реакции на воздействие двух источников – $\underline{I}_1$ и $\underline{U}_2$. Из схемной модели нормального режима (рис. 1в), где величины и параметры первичной обмотки приведены к вторичной обмотке, следуют соотношения

$$\underline{U}_{1\text{нм}} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_2 \big/ \underline{Z}_{\mu}^{(2)}} \left(\left(\underline{Z}_1^{(2)} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1^{(2)} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{\mu}^{(2)}} \right) \underline{I}_1^{(2)} + \underline{U}_2 \right), \tag{1}$$

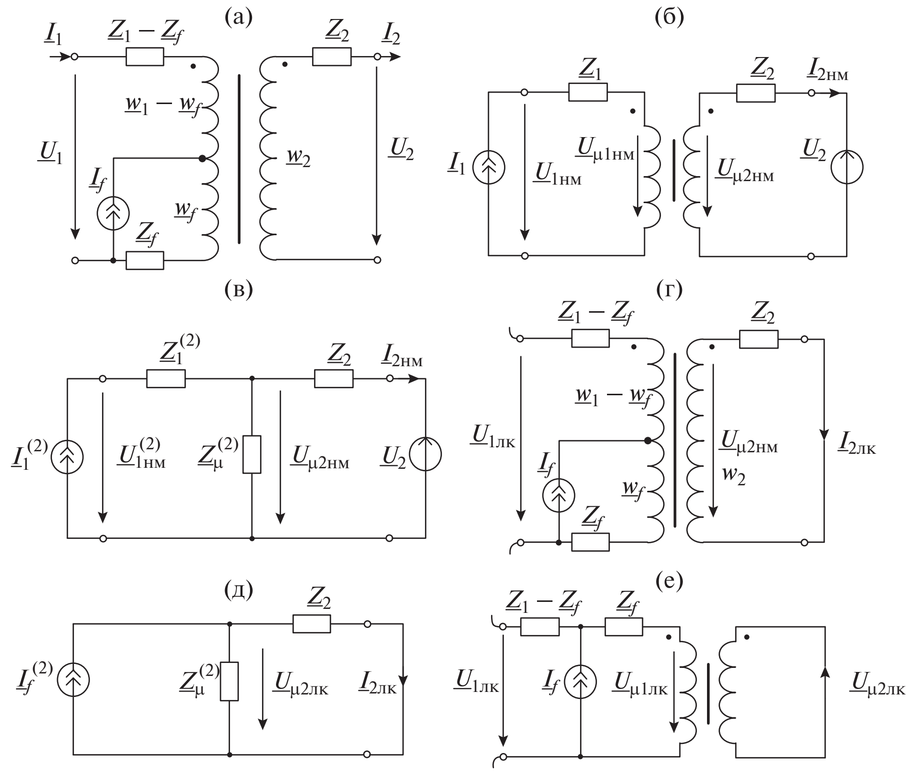

Рис. 1. Наблюдаемый режим виткового КЗ в однофазном трансформаторе и его составляющие: (а) текущий режим; (б) нормальный режим; (в) модель нормального режима с приведением к числу витков вторичной обмотки; (г) локальный режим; (д) локальный режим во вторичной обмотке; (е) локальный режим в первичной обмотке.

$$\underline{I}_{2\,\text{нм}} = \frac{1}{1+\underline{Z}_2\big/\underline{Z}_\mu^{(2)}}\left(\underline{I}_1^{(2)} - \frac{1}{\underline{Z}_\mu^{(2)}}\underline{U}_2\right), \tag{2}$$

$$\underline{I}_1^{(2)} = (1/k)\,\underline{I}_1,\quad \underline{U}_1^{(2)} = k\underline{U}_1,\quad \underline{Z}_1^{(2)} = k^2\underline{Z}_1,\quad k = w_2/w_1. \tag{3}$$

Без учета ветви намагничивания ($\underline{Z}_\mu \to \infty$) выражения (1)–(3) сводятся к простым зависимостям

$$\underline{U}_{1\,\text{нм}} = \left(\underline{Z}_1 + (1/k)^2\,\underline{Z}_2\right)\underline{I}_1 + (1/k)\,\underline{U}_2, \tag{4}$$

$$\underline{I}_{2\,\text{нм}} = (1/k)\,\underline{I}_1. \tag{5}$$

Режим нормальных составляющих создается моделью неповрежденного объекта инвариантной по отношению ко всему множеству возможных повреждений. Что же касается локальных составляющих наблюдаемых величин, то они определяются в установленном порядке, инвариантном относительно модели неповрежденного объекта

$$\underline{U}_{1\,\text{лк}} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{1\,\text{нм}}, \tag{6}$$

$$\underline{I}_{2\,\text{лк}} = \underline{I}_2 - \underline{I}_{2\,\text{нм}}. \tag{7}$$

В неповрежденном трансформаторе, где $\underline{U}_{1\,\text{нм}} \approx \underline{U}_1$ и $\underline{I}_{2\,\text{нм}} \approx \underline{I}_2$, локальные составляющие находятся на уровне, определяемом погрешностями именно этой структуры, моделирующей неповрежденный объект. Операции (1)–(7) приводят к величинам локального режима в результате обработки величин $\underline{I}_1$, $\underline{U}_2$ и $\underline{U}_1$, $\underline{I}_2$ конкретного режима наблюдаемого трансформатора. Иначе говоря, это операции алгоритма распознавания реальной ситуации на защищаемом объекте. Между тем локальный режим обладает собственной моделью (рис. 1г), которая не принимает участия в преобразовании реально наблюдаемых величин, но зато раскрывает взаимосвязи локального режима. Эта модель с разомкнутым входом и закороченным выходом активируется единственным источником – неизвестным источником тока КЗ $\underline{I}_f$, создающим магнитодвижущую силу (МДС) $\underline{F}_f = w_f \underline{I}_f$ и реакции модели локального режима в виде тока короткозамкнутой вторичной обмотки (рис. 1д)

$$\underline{I}_{2\,\text{лк}} = \underline{M}\underline{F}_f, \tag{8}$$

$$\underline{M} = \frac{(1/w_2)}{1 + \left(\underline{Z}_2 / \underline{Z}_\mu^{(2)}\right)} \tag{9}$$

и напряжения разомкнутой первичной обмотки (рис. 1е)

$$\underline{U}_{1\,\text{лк}} = (1/k)\,\underline{Z}_2 \underline{I}_{2\,\text{лк}} + \Delta\underline{Z}_1 \underline{F}_f = \underline{N}\underline{F}_f, \tag{10}$$

$$\underline{N} = \frac{w_1}{w_2^2} \frac{\underline{Z}_2}{1 + \left(\underline{Z}_2 / \underline{Z}_\mu^{(2)}\right)} + \Delta\underline{Z}_1, \tag{11}$$

где $\Delta\underline{Z}_1 = \underline{Z}_f / w_f = \underline{Z}_1 / w_1$ – сопротивление одного витка поврежденной части обмотки, что соответствует сопротивлению одного витка первичной обмотки.

Величина $\underline{F}_f$ является тем параметром, который несет информацию о витковом замыкании. Каждый из двух локальных компонентов $\underline{I}_{2\,\text{лк}}$ и $\underline{U}_{1\,\text{лк}}$ дает ему свою оценку. Из (8) и (10) следует

$$\hat{\underline{F}}_{fI} = \underline{M}^{-1} \underline{I}_{2\,\text{лк}}, \tag{12}$$

$$\hat{\underline{F}}_{fU} = \underline{N}^{-1} \underline{U}_{1\,\text{лк}}. \tag{13}$$

В идеальном случае оценки (12), (13) должны совпадать. В реальных ситуациях будет иметь место расхождение $\Delta\hat{\underline{F}}_f = \hat{\underline{F}}_{fI} - \hat{\underline{F}}_{fU}$. Сформируем замер в виде двумерного вещественного вектора

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \hat{F}_f \\ \Delta\hat{F}_f \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\hat{F}_f = 0.5\left(\hat{F}_{fI} + \hat{F}_{fU}\right)$, $\hat{F}$ и ΔF – модули комплексов $\underline{\hat{F}}$ и $\Delta\underline{\hat{F}}$. Условие распознавания витковых замыканий имеет вид

$$\mathbf{s} \in S, \tag{15}$$

где S – заданная область отображения вектора $\mathbf{s}$ на плоскости $\left(\hat{F}_f, \Delta\hat{F}_f\right)$. Процедура априорного построения области S с помощью модели локального режима заключается в применении преобразований (8) и (10), с одной стороны, и (12), (13), с другой стороны, по разным схемам. Параметры (9) и (11) $\underline{M}$ и $\underline{N}$ задаются в виде функций $\underline{M}(\underline{Z})$ и $\underline{N}(\underline{Z})$ возможных значений вектора $\underline{Z}$ параметров модели: $\underline{Z} \in W$, где W – область его определения. В то же время коэффициенты $\underline{M}^{-1}$ и $\underline{N}^{-1}$ в (12), (13) являются уста-

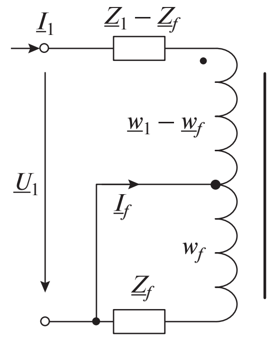

Рис. 2. Модель для оценивания числа замкнувшихся витков по известной МДС $\underline{F}_f$.

вочными константами $\underline{M}_{\text{уст}}^{-1}$ и $\underline{N}_{\text{уст}}^{-1}$, предназначаемыми для преобразования реальных величин $\underline{I}_{2\,\text{лк}}$ и $\underline{U}_{2\,\text{лк}}$.

Хотя в распознавании витковых замыканий главная роль отводится МДС $\underline{F}_f$, нельзя обойти стороной вопрос о числе замкнувшихся витков w_f. Определим оценку $\hat{w}_f$ для текущего режима модели трансформатора, который находился в режиме холостого хода до того, как произошло замыкание через нулевое переходное сопротивление (рис. 2). Примем, что напряжение в текущем режиме равно номинальному $(U_1 = U_{\text{ном}})$. Кроме того, $\underline{Z}_1 = \underline{\Delta Z} w_1$, так что $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_f = w_1 / w_f$. Обмотка по рис. 2 описывается уравнением

$$\underline{U}_1 = \left(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_f\right)\underline{I}_1 - \frac{w_1 - w_f}{w_f}\underline{Z}_f\left(\underline{I}_1 + \underline{I}_f\right). \tag{16}$$

Вводя вещественную величину $I_{\text{sup}} = U_{\text{ном}} / \Delta Z$ и переходя в уравнении (16) к модулям комплексов, получим искомую оценку

$$\frac{w_1}{\hat{w}_f} = 1 + \frac{I_{\text{sup}}}{\hat{F}_f}, \tag{17}$$

выражаемую через модуль оценки МДС, получаемый из соотношений (12), (13) по ортогональным составляющим электрических величин. Минимальная МДС определяется из (17) при $\hat{w}_f = 1$

$$\hat{F}_{f,\text{inf}} = \frac{I_{\text{sup}}}{w_1 - 1}. \tag{18}$$

Взятый сам по себе изложенный алгоритм распознавания витковых замыканий свободен от методической погрешности. Иное дело те погрешности, которые встречаются на каждом из трех этапов преобразования фиксируемых токов и напряжений: измерительное и аналого-цифровое преобразование; фильтрация ортогональных составляющих; формирование замера – операции (1), (2) и (12), (13), в которых задействованы сопротивления модели трансформатора. Имеются средства минимизации погрешности каждого преобразования. Проблему первого этапа снимают оптико-электронные измерительные преобразователи [4]. На втором этапе необходимую точность обеспечивают адаптивные фильтры ортогональных составляющих [5]. А на третьем помогает корректировка сопротивлений $\underline{Z}_1^{(2)} = R_1^{(2)} + jX_1^{(2)}$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ и $\underline{Z}_\mu^{(2)}$ модели нормального режима (рис. 1в) по результатам наблюдения предшествующего режима – токам и напряжениям $\underline{I}_{1\text{пд}}$, $\underline{U}_{1\text{пд}}$; $\underline{I}_{2\text{пд}}$, $\underline{U}_{2\text{пд}}$, что создает условия для оценивания четырех вещественных параметров из шести неизвестных. Скажем, известны реактивные сопротивления $X_1^{(2)}$ и X_2, тогда остающиеся параметры получают следующие оценки

$$\hat{R}_2 = (1/K_{\mathrm{Im}})X_{12}, \quad \hat{R}_1 = K_{\mathrm{Re}}\hat{R}_2 + R_{12}, \quad \underline{\hat{Z}}_\mu^{(2)} = \frac{\underline{U}_{2\text{пд}} + (\hat{R}_2 + jX_2)\underline{I}_{2\text{пд}}}{\underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)} - \underline{I}_{2\text{пд}}},$$

где

$$K_{\mathrm{Re}} + jK_{\mathrm{Im}} = \underline{I}_{2\text{пд}}/\underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)}, \quad R_{12} + jX_{12} = \underline{U}_{12\text{пд}}/\underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)},$$
$$\underline{U}_{12\text{пд}} = \underline{U}_{2\text{пд}} - \underline{U}_{1\text{пд}}^{(2)} + j\left(X_1^{(2)}\underline{I}_{1\text{пд}}^{(2)} + X_2\underline{I}_{2\text{пд}}\right).$$

Процедура разделения наблюдаемого режима трехфазного трансформатора на нормальный и локальный режимы не имеет принципиальных особенностей по сравнению с однофазным трансформатором. На рис. 3 иллюстрируются режимы трансформатора с соединением обмоток по схеме $Y/\Delta - 11$. Наблюдаются напряжения и токи на входе и выходе трансформатора: $\underline{U}_{\nu 1}, \underline{I}_{\nu 1}$ и $\underline{U}_{\nu,\nu+1,2}, \underline{I}_{\nu 2}$, где $\nu = A, B, C$, $\nu \pm 1$ – обозначение опережающей и отстающей фаз. Наблюдение токов в треугольнике $\underline{I}_{\nu\pm 1,\nu,2}$ не предполагается, хотя стоит заметить, что информация о них не была бы излишней.

Как и ранее при разграничении режимов в однофазном трансформаторе, источниками нормального режима будут выбраны наблюдаемые токи первичной обмотки и наблюдаемые напряжения вторичной обмотки. На этот раз три тока $\underline{I}_{\nu 1}$ и три напряжения $\underline{U}_{\nu,\nu+1,2}$. Процессы в обмотках, расположенных на одном из стержней четырехстержневого трансформатора, без учета токов намагничивания стержней протекают независимо от обмоток, находящихся на иных стержнях. В таком случае модель нормального режима распадается на три автономные модели пофазной трансформации (рис. 3б). Для каждой из них применимы соотношения (1)–(13). Например, зависимости (4), (5) принимают следующий вид

$$\underline{U}_{\nu 1\,\text{нм}} = \left(\underline{Z}_1 + (1/k)^2\,\underline{Z}_2\right)\underline{I}_{\nu 1} + (1/k)\,\underline{U}_{\nu,\nu+1,2}, \tag{19}$$

$$\underline{I}_{\nu+1,\nu 2\,\text{нм}} = (1/k)\,\underline{I}_{\nu 1}. \tag{20}$$

Локальные напряжения определяются, как и раньше, выражением (6)

$$\underline{U}_{\nu 1\,\text{лк}} = \underline{U}_{\nu 1} - \underline{U}_{\nu 1\,\text{нм}},$$

а с локальными токами дело обстоит несколько сложнее в связи с тем, что токи в треугольнике неизвестны, в то время как соотношение (20) определяет нормальные составляющие именно этих токов. Очевидна необходимость перехода от токов в треугольнике к нормальным токам на его выходе

$$\underline{I}_{\nu 2\,\text{нм}} = \underline{I}_{\nu+1,\nu 2\,\text{нм}} - \underline{I}_{\nu,\nu-1,2\,\text{нм}}$$

с последующим определением локальных составляющих наблюдаемых токов

$$\underline{I}_{\nu 2\,\text{лк}} = \underline{I}_{\nu 2} - \underline{I}_{\nu 2\,\text{нм}}.$$

Заметим, что закономерность, которой должны подчиняться наблюдаемые вторичные токи

$$\underline{I}_{A2} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{C2} = 0,$$

распространяется на их составляющие, что дает возможность оценить адекватность модели неповрежденного трансформатора реальному объекту.

Витковому замыканию в первичной обмотке фазы A (рис. 3а) отвечает модель локального режима с зашунтированными обмотками трансформатора (рис. 3в). В дан-

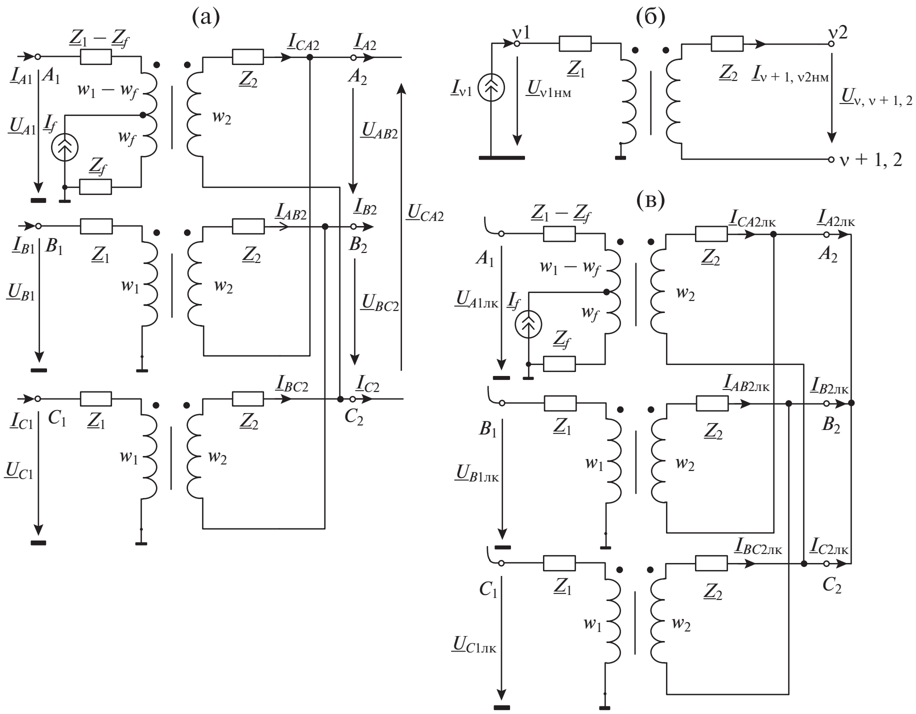

Рис. 3. Наблюдаемый режим трехфазного трансформатора и его составляющие:
(а) текущий; (б) нормальный; (в) локальный.

ном случае при условии автономной трансформации между обмотками, расположенными на одном стержне, ненулевой локальный ток будет протекать только в одной вторичной обмотке, а именно

$$\underline{I}_{CA2\,\text{лк}} \neq 0, \quad \underline{I}_{AB2\,\text{лк}} = 0, \quad \underline{I}_{BC2\,\text{лк}} = 0.$$

Соответственно, на выходе трансформатора будут протекать два локальных тока, находящихся в противофазе

$$\underline{I}_{A2\,\text{лк}} = -\underline{I}_{C2\,\text{лк}} = \underline{I}_{CA2\,\text{лк}}, \quad \underline{I}_{B2\,\text{лк}} = 0.$$

В модели по рис. 3в ток $\underline{I}_{CA2\,\text{лк}}$ и напряжение $\underline{U}_{A1\,\text{лк}}$ определяются формулами (8) и (10).

Построение области S отображения режимов витковых замыканий на плоскости $\Delta\hat{F}_f\left(\hat{F}_f\right)$ рассмотрим на примере трехфазного трансформатора 110/10 кВ мощностью 10 МВА. Сопротивления первичной и вторичной обмоток $\underline{Z}_1 = 3.84 + j69.3$ Ом, $\underline{Z}_2 = 0.04 + j0.63$ Ом, числа витков $w_1 = 12650$, $w_2 = 1210$, сопротивление ветви намагничивания, приведенное к числу витков первичной обмотки $\underline{Z}^{(1)}_{\mu,\min} = 77.79 + j311.18$ кОм, сопротивление витка первичной обмотки $\underline{\Delta Z}_1 = \underline{Z}_1/w_1 = (3 + j55)\times 10^{-4}$ Ом. Искомая область определялась вариациями сопротивления ветви намагничивания $\underline{Z}^{(1)}_{\mu}$ в пределах от $\underline{Z}^{(1)}_{\mu,\min}$ до ∞ и сопротивлений $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ в пределах $\pm 5\%$. Результат применения процедуры обучения индикатора витковых замыканий приведен на рис. 4. Область S отображения режимов витковых замыканий на плоскости замера **s** имеет трапецеидаль-

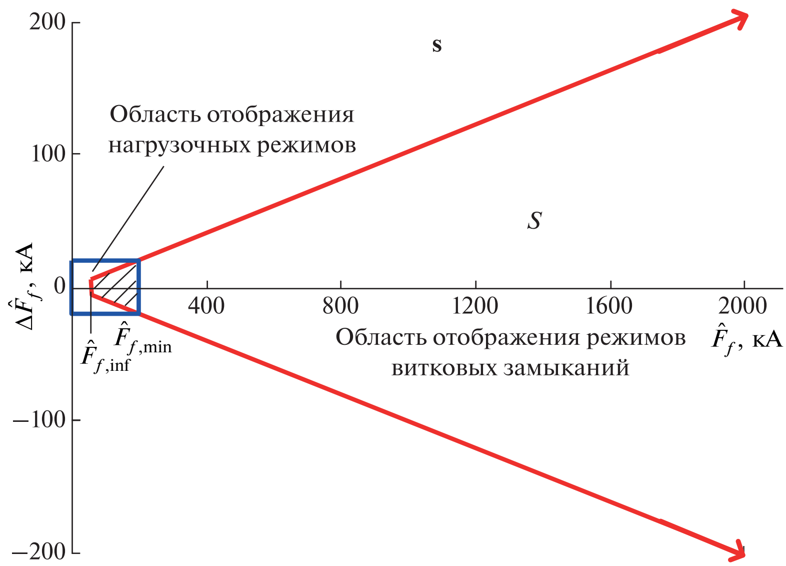

Рис. 4. Области отображения режимов трансформатора на плоскости замера **s**.

ную форму. Трапеция, ось которой располагается на координатной оси $\hat{F}_f$, занимает место между предельно низким значением $\hat{F}_{f,\inf}$ при замыкании одного витка (18) и максимальным значением

$$\hat{F}_{f,\max} = \frac{\hat{w}_{f,\max}}{w_1 - \hat{w}_{f,\max}} I_{\sup},$$

определяемым из соотношения (17) для максимально возможного числа замкнувшихся витков.

Погрешности преобразователей наблюдаемых величин и модулей нормального режима приводят к тому, что нагрузочные режимы трансформатора также отображаются на плоскости замера **s**. Область отображения занимает всю окрестность начала координат, пересекаясь с начальной частью области S. Чувствительность индикатора витковых замыканий определяется правым граничным значением $\hat{F}_{f,\min}$ заштрихованной подобласти пересечения, в которой отображаются как аварийные, так и рабочие режимы. Минимальное поддающееся распознаванию число замкнувшихся витков определяется все тем же соотношением (17)

$$\hat{w}_{f,\min} = \frac{w_1}{1 + I_{\sup}/\hat{F}_{f,\min}},$$

что для рассматриваемого примера составляет 215 витков или 1.7% от общего числа витков.

ВЫВОДЫ

1. Метод распознавания аварийных ситуаций, в основу которого положено разделение наблюдаемого процесса на две части – нормальную и локальную, универсален, но модифицируется в зависимости от типа наблюдаемого объекта. Модель объекта в локальном режиме активируется током в месте КЗ, а ее входы зашунтированы или разо-

мкнуты. В отличие от линий электропередачи, для которой подходит модификация с зашунтированными входами, для распознавания витковых замыканий в обмотке трансформатора предпочтительнее модификация с разомкнутыми входами на стороне повреждения и с короткозамкнутыми на неповрежденных сторонах.

2. Алгоритм распознавания витковых замыканий по локальным составляющим напряжения поврежденной обмотки и токов неповрежденной группы обмоток свободен как таковой от методической погрешности, однако в процедуру распознавания привносятся погрешности преобразования наблюдаемых величин. Предполагается корректировка параметров модели нормального режима по результатам наблюдения трансформатора в предшествующем режиме.

3. Локальная составляющая напряжения и тока как поврежденной, так и неповрежденной обмотки дает свою оценку МДС замкнувшихся витков. В идеальном случае оценки совпадают, а в реальном отображаются в области двухкоординатного замера, определяемой априорно на этапе обучения индикатора витковых замыканий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kang Y.-C., Lee B.-E., Zheng T.-Y., Kim Y.-H., Crossley P.A.* Protection, faulted phase and winding identification for the three-winding transformer using the increments of flux linkages // IET Generation, Transmission & Distribution. 2010. T. 4. № 9. P. 1060–1068.
2. *Попов И.Н., Лачугин В.Ф., Соколова Г.В.* Релейная защита, основанная на контроле переходных процессов. Энергоатомиздат, 1986.
3. *Кочетов И.Д., Лямец Ю.Я., Макашкин Ф.А.* Унификация моделей и характеристик поврежденной электропередачи при двухстороннем наблюдении // Изв. РАН. Энергетика. 2020. № 4. С. 55–65.
4. *Ураксеев М.А., Левина Т.М.* Оптоволоконные трансформаторы как элементы современных электротехнических комплексов и систем // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2013. Т. 9. № 2. С. 23–29.
5. *Иванов С.В., Лямец Ю.Я., Макашкин Ф.А.* Оценивание параметров элементарных компонентов электрической величины по малому числу отсчетов // Электротехника. 2020. № 3. С. 59–67.

Recognition of Transformer Winding Faults by Local Components of Observed Voltages and Currents

I. D. Kochetov[a], * and Yu. Ya. Lyamets[a]

[a] *"Relematika", LLC, Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**e-mail: kochetov_id@relematika.ru*

The article considers the informational aspects of the recognition of winding faults in the transformer. The recognition algorithm is based on dividing the observed process into two components – normal and local. The latter carries information about damage of winding, since it is initiated by a single short-circuit current source. As for the normal process, it is created by the half of the observed values in the model of an intact transformer. With regard to the transformer, the expediency of activating the normal process by the currents observed on the damaged side of the transformer and the voltages observed on the undamaged side is substantiated. The reaction of the intact object model is normal voltage components on the one side and normal current components on the other. The local components of voltages and currents are the differences between the observed values and their normal components. In the local mode model, the inputs of the damaged side of the transformer are opened, and the inputs of the intact side are shunted. The normal mode model is in demand in real time, while the local mode model is in demand in deferred time for a priori determination of the display area of measurement during winding faults. The two-coordinate function of the magnetomotive force of the damaged part of the winding is used as a measurement.

Keywords: transformer, winding fault, circuit current components

ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 66–80

УДК 004.021:[004.92+628.9+535.2+536.3]

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕЖДУ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ КОНТУРНЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

А. А. Басов[1], *, Д. К. Винокуров[2], **, М. А. Клочкова[1]

[1]ПАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева" (ПАО "РКК "Энергия"), Королев, Россия

[2]Акционерное общество "Центральный научно-исследовательский институт машиностроения" (АО "ЦНИИмаш"), Королев, Россия

**e-mail: andrey.basov@rsce.ru*

***e-mail: vinokurovdk@tsniimash.ru*

Поступила в редакцию 01.06.2021 г.
После доработки 07.10.2021 г.
Принята к публикации 15.10.2021 г.

Предложен алгоритм расчета диффузных угловых коэффициентов излучения для произвольно расположенных многоугольников, реализующий комбинированный метод контурного интегрирования. Метод сочетает интегрирование по квадратурным формулам Гаусса невысокого порядка с точным аналитическим решением. Показаны особенности, связанные с погрешностью расчета угловых коэффициентов численными методами контурного интегрирования. Предложены способы, позволяющие обеспечить заданную точность расчета.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, численные методы, контурное интегрирование, алгоритм, угловой коэффициент излучения

DOI: 10.31857/S0002331022010034

ВВЕДЕНИЕ

Среди факторов, определяющих успешное функционирование любого технического устройства, немаловажное значение имеют условия теплообмена с окружающей средой и внутренний теплообмен. Для технических устройств, эксплуатируемых в разряженной газовой среде (вакууме) и при высоких температурах внешней поверхности, главенствующее значение приобретает радиационный теплообмен.

Задачи расчета радиационного теплообмена встречаются при проектировании СОТР для моделирования тепловых потоков как в условиях полета для сложных многомодульных объектов типа международной космической станции [1] и небольших конструкций [2], так и для условий наземной экспериментальной отработки [3].

Для численного моделирования радиационного теплообмена широко применяется зональный метод, в котором поверхности, участвующие в радиационном теплообмене, разбиваются на зоны [4 стр. 130], в пределах которых теплофизические свойства принимаются однородными. При этом зачастую используется диффузная модель излучения и отражения, в которой излучение и поглощение каждой поверхности не зависит от направления. В таком случае расчет радиационного теплообмена сводится к определению диффузных угловых коэффициентов излучения [5].

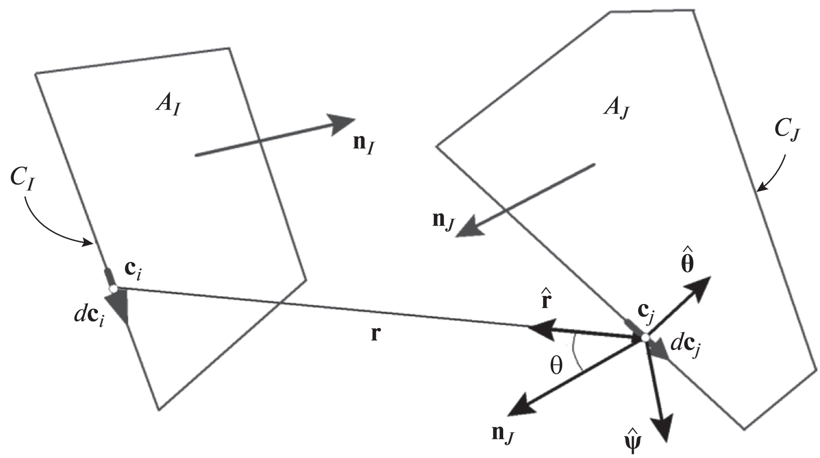

Рис. 1. К определению угловых коэффициентов контурным интегрированием.

Для космических аппаратов расчет внешних воздействующих тепловых потоков сводится по сути к расчету угловых коэффициентов радиационного теплообмена внешних элементов конструкции между собой и внешних элементов конструкции и естественными источниками тепловой энергии в космосе (излучением Солнца и Земли), а для расчета внутреннего радиационного теплообмена в полостях – к расчету угловых коэффициентов элементов конструкции между собой.

Определение и основные формулы расчета диффузных угловых коэффициентов можно найти в [5–7]. Классификация методов расчета угловых коэффициентов приведена в [8].

Сегодня особые требования предъявляются к скорости и точности расчетов. При отсутствии препятствий между поверхностями A_I и A_J (рис. 1) одним из используемых приближенных численных методов определения угловых коэффициентов является контурное интегрирование.

Имеется множество форм контурного интеграла, который выводится из двойного интеграла по площадям с использованием теоремы Стокса [9–12].

В общем виде интегралы можно записать

$$F_{I-J} = \frac{1}{2\pi A_I} \oint_{C_I} \oint_{C_J} d\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \cdot d\mathbf{c}_j, \tag{1}$$

где матрица $\mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ – одно из подынтегральных выражений, полученных на основе использования диад в сферической системе координат с базисами $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (табл. 1). Остальные символы определены на рис. 1.

Для многоугольников вычисления производятся для каждой стороны независимо

$$F_{I-J} = \frac{1}{2\pi A_I} \sum_{k=1}^{K_I} \sum_{m=1}^{K_J} \int_0^{L_m} \int_0^{L_k} d\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \cdot d\mathbf{c}_j = \frac{1}{2\pi A_I} \sum_{k=1}^{K_I} \sum_{m=1}^{K_J} S_{km}\left(f_{\mathbf{M}}\right). \tag{2}$$

При численном определении угловых коэффициентов используются квадратурные формулы [13] – на каждой стороне выбирается набор узловых точек $\mathbf{c}$ с весами $\mathbf{g}$ и единичными векторами $\hat{\mathbf{c}}$. Имеем

Таблица 1. Вид матрицы в подынтегральном выражении

Вид матрицы $\mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$	Обозначение
$\ln\lvert\mathbf{r}\rvert\,\mathbf{E}$	IS
$-\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}$	IDL1
$(1 - \theta/\mathrm{tg}\theta)\,\hat{\boldsymbol{\psi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\psi}}$	IDL2
$\hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\psi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\psi}}$	IDL3

Примечание: подынтегральное выражение $\ln\lvert\mathbf{r}\rvert\,\mathbf{E}$ соответствует диаде $\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\psi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\psi}}$, которая является единичным афинором.

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} g_i, \quad L_m = \sum_{j=1}^{n_m} g_j, \tag{3}$$

$$S_{km}(f_{\mathbf{M}}) = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_m} g_i g_j \hat{\mathbf{c}}_i \cdot \mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \cdot \hat{\mathbf{c}}_j. \tag{4}$$

Выбор узловых точек с весами фактически означает построение на сторонах сетки.

Самым простым численным методом определения значения интеграла является сеточный метод с квадратурной формулой средних (прямоугольников), в котором сторона делится на интервалы, как правило, равной длины, а в качестве узловых точек выступают середины интервалов, при этом веса узловых точек равны длинам интервалов. Широкое распространение получило использование квадратурных формул Гаусса, в которых в качестве узловых точек выступают корни полиномов Лежандра. Формулы Гаусса позволяют получить точное значение интеграла, если подынтегральная функция является полиномом. Однако подынтегральные функции в формуле (1) не являются полиномами, поэтому сходимость интегралов с применением формул Гаусса в ряде случаев оказывается хуже, чем с применением формулы средних.

Применение любого численного метода означает, что рассчитываемая величина определяется с некоторой погрешностью. Проведенное исследование показывает, что на некоторых конфигурациях многоугольников применение квадратурных методов не позволяет получить значения угловых коэффициентов с требуемой точностью. Использование же точных аналитических формул [14, 15] достаточно ресурсоемко (выражения не приводим из-за их громоздкости).

В данной работе показаны особенности, связанные с погрешностью расчета угловых коэффициентов численными методами контурного интегрирования, и предложен алгоритм, позволяющий обеспечить заданную погрешность расчета.

Предложенный алгоритм сочетает интегрирование по квадратурным формулам Гаусса невысокого порядка с точным аналитическим решением.

Алгоритмы расчета угловых коэффициентов контурным интегрированием с использованием квадратурных формул средних и Гаусса для четырех интегралов из табл. 1, а также с использованием точного аналитического решения [14, 16] по программе CONTVF [17].

1. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ

Для практических вычислений необходимо иметь алгоритм, позволяющий проводить расчеты для выбранного типа интеграла, квадратурной формулы и ее степени. Общий алгоритм определения угловых коэффициентов между многоугольниками A_I и A_J при разбиении каждой стороны на $\mathbf{n}$ интервалов состоит из следующих шагов

Алгоритм 1. Расчет угловых коэффициентов между многоугольниками квадратурными формулами двойным контурным интегрированием

A.1 $S \leftarrow 0$
A.2 **for** $k \leftarrow 1, K_I$ **do** !Цикл по сторонам многоугольника A_I
A.3 **for** $m \leftarrow 1, K_J$ **do** !Цикл по сторонам многоугольника A_J
A.4 $S_{km} \leftarrow 0$
A.5 Построение сетки на стороне L_k
A.6 Построение сетки на стороне L_m
A.7 **for** $i \leftarrow 1, n_k$ **do** !Цикл по узловым точкам на стороне L_k
A.8 **for** $j \leftarrow 1, n_m$ **do** !Цикл по узловым точкам на стороне L_m
A.9 $S_{km} \leftarrow S_{km} + g_i g_j \hat{\mathbf{c}}_i \cdot \mathbf{M}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \cdot \hat{\mathbf{c}}_j$
A.10 **end for**
A.11 **end for**
A.12 $S \leftarrow S + S_{km}$
A.13 **end for**
A.14 **end for**
A.15 $F_{I-J} \leftarrow S/2\pi A_I$

Общий алгоритм реализует все подынтегральные выражения из табл. 1. При расчете по формуле (4) возникают особенности при совпадении узловых точек [18]. В интеграле IS возникает сингулярность из-за того, что $|\mathbf{r}|$ становится равным нулю при конечных значениях g_i и g_j, а во всех интегралах IDL происходит вырождение единичного вектора $\hat{\mathbf{r}}$ в нулевой. Эти особенности можно обойти, например, изменением степени разбиения одного из пары отрезков.

При расчетах на ЭВМ из-за особенностей применяемых алгоритмов вычисления координат узловых точек может возникнуть ситуация, когда точки должны были совпасть, но не совпали. В таком случае для интеграла IS получаем большое по абсолютной величине значение логарифма, а для интегралов IDL получаем неверное направление вектора $\hat{\mathbf{r}}$ и, соответственно, большую общую погрешность. Во всех случаях это приводит к большим суммарным погрешностям.

Подобная ситуация может возникнуть при определении узловых точек на двух совпадающих отрезках. В такой ситуации направления обхода отрезков в контурных интегралах будут противоположными. Пусть имеем $\mathbf{v}_1^1 = \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{V}_1$ и $\mathbf{v}_2^1 = \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{V}_2$. При разбиении стороны на n интервалов имеем

$$\mathbf{c}_i^1 = \mathbf{v}_1^1 + (2i-1)\left(\mathbf{v}_2^1 - \mathbf{v}_1^1\right)/2n = \mathbf{V}_1 + (2i-1)(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/2n, \quad (5)$$

$$\mathbf{c}_k^2 = \mathbf{v}_1^2 + (2k-1)\left(\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2\right)/2n = \mathbf{V}_2 + (2k-1)(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/2n. \quad (6)$$

Несмотря на то, что с точки зрения математики значения $\mathbf{c}_i^1$ и $\mathbf{c}_{n-i+1}^2$ тождественно равны, при расчетах на ЭВМ их значения зачастую различаются из-за различной последовательности вычислений и присутствия ошибок округления.

Для того чтобы обеспечить точное совпадение точек (а, следовательно, иметь возможность устранить возникшую особенность) предлагается использовать следующие выражения, получаемые из (5) и (6):

$$\mathbf{c}_i^1 = \left[(2n - 2i + 1)\,\mathbf{V}_1 + (2i-1)\,\mathbf{V}_2\right]/2n, \quad (7)$$

$$\mathbf{c}_k^2 = \left[(2k-1)\,\mathbf{V}_1 + (2n - 2k - 1)\,\mathbf{V}_2\right]/2n. \quad (8)$$

При $k = n - i + 1$ формулы (7) и (8) совпадают.

Еще одна выявленная ситуация – при задании геометрии модели вершины “общей стороны” двух многоугольников могут не совпадать, если на это не обратить внимание. Для того чтобы подобная ситуация не возникала, необходимо проводить предварительное отождествление концов отрезков, например, на этапе построения геометрии.

Несмотря на имеющиеся способы устранения указанных особенностей, все же остается проблема, связанная с большими вычислительными погрешностями применительно к некоторым конфигурациям многоугольников, которая обусловлена свойствами подынтегральной функции.

Следует отметить, что, несмотря на наличие формул, позволяющих оценить ошибку вычислений [19], в некоторых конфигурациях полную ошибку предсказать не представляется возможным. Так для интеграла

$$U = \int_a^b u(x)dx \tag{9}$$

общая ошибка для формулы среднего n-ой степени может быть записана как

$$|R_N| \le \frac{h^2}{24}(b-a)\,M_2, \tag{10}$$

где $M_p = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|u^{(p)}(x)\right|$. В случае интегрирования IS по двум сторонам с общей вершиной значение M_2 равно бесконечности. Подобная ситуация возникает при использовании квадратур Гаусса, так как мы имеем следующую оценку ошибки

$$|R_N| \le \frac{[(N+1)!]^4}{(2N+3)[(2N+2)!]^3}(b-a)^{2N+3}\,M_{2N+2}. \tag{11}$$

Таким образом интеграл IS для конфигураций, в которых стороны расположены близко друг к другу, формула (11) дает оценку ошибки, непригодную для практического применения. Плохая сходимость квадратурных формул в данном случае следует из значения остаточного члена $R_n(x)$ в ряде Тейлора

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} + R_n(x), \quad x \in (0,2]. \tag{12}$$

При $x < 1$ ряд становится знакопостоянным. Зависимость $R_n(x)$ от количества членов n для разных x представлена на рис. 2.

Видно, что для получения 6 точных цифр после запятой необходимо использовать более 100 членов ряда. Подобная степень квадратурных формул для практических расчетов является неприемлемой.

2. ПОГРЕШНОСТЬ НА ПАРЕ СТОРОН

Покажем на примерах насколько широкий диапазон погрешностей может возникать при расчетах угловых коэффициентов контурным интегрированием с использованием квадратурных формул. Рассмотрим несколько конфигураций треугольников (рис. 3) и выполним расчеты угловых коэффициентов по программе CONTVF с использованием различных подынтегральных функций из табл. 1 и квадратурных формул (Гаусса или средних).

Пример 1. Возьмем два треугольника (рис. 3а) из работы [20] с координатами вершин (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0) и (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), для которых точное значение углового коэффициента равно 0.099912. Результаты расчета угловых коэффициентов разными интегралами по квадратурам средних и Гаусса приведены на рис. 4.

Пример 2. Возьмем два треугольника (рис. 3б) с координатами вершин (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0.8, 1, 0) и (1, 0, 0), (0, 0, 0), (0.8, 1, 0). Повернем второй треугольник вокруг первой стороны на угол 45°. Точное значение равно 0.5988134. Результаты расчета угловых коэффициентов разными интегралами по квадратурам средних и Гаусса приведены на рис. 5.

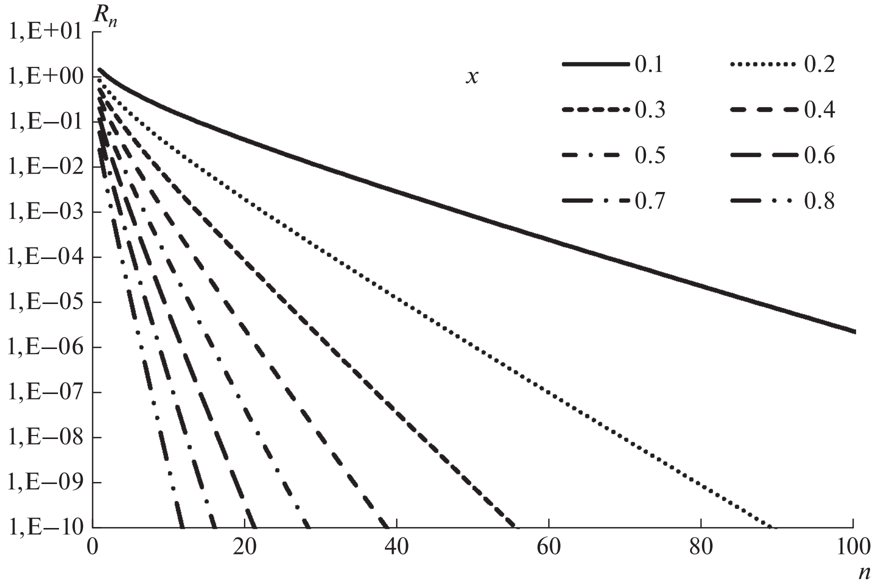

Рис. 2. Остаточный член $R_n(x)$.

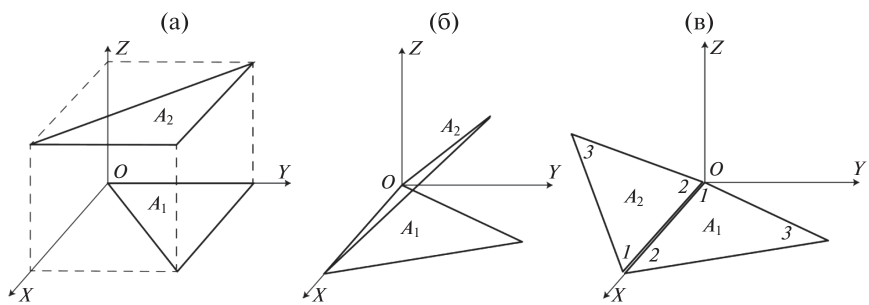

Рис. 3. Конфигурация двух треугольников: (а) пример 1; (б) пример 2; (в) пример 3.

В этих двух примерах получена хорошая сходимость по всем методам за исключением IDL3 с квадратурами Гаусса в примере 1 и IS с квадратурами Гаусса в примере 2, что подтверждает тезис о том, что сходимость интегралов с применением формул Гаусса в ряде случаев оказывается хуже, чем с применением формулы средних.

Пример 3. Возьмем два треугольника (рис. 3в) с координатами вершин (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0.8, 1, 0) и (1, 0, 0), (0, 0, 0), (0.8, 1, 0). Повернем второй треугольник вокруг первой стороны на угол 170° и переместим по оси OY на расстояние –0.1. Точное значение углового коэффициента равно 0.00248. Результаты расчета угловых коэффициентов разными интегралами по квадратурам средних и Гаусса приведены на рис. 6.

Значения, полученные для IS и IDL1, приведены в табл. 2. В таблице приняты следующие обозначения: n – степень разбиения сторон; ΔF – абсолютная погрешность рассчитанного углового коэффициента; δF – относительная погрешность рассчитанного углового коэффициента.

Можно заметить неудовлетворительные результаты по всем вариантам расчетов с использованием квадратурных формул. Данный пример показывает, что вывод, при-

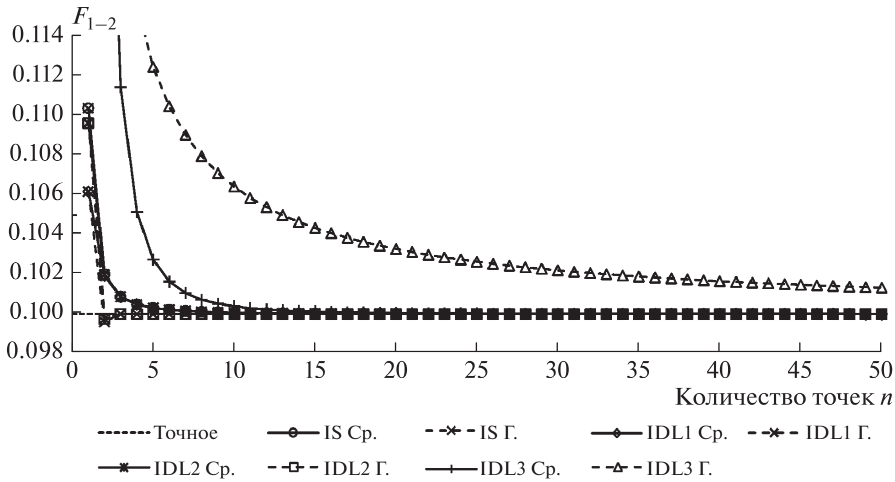

Рис. 4. Результаты расчета угловых коэффициентов для примера 1.

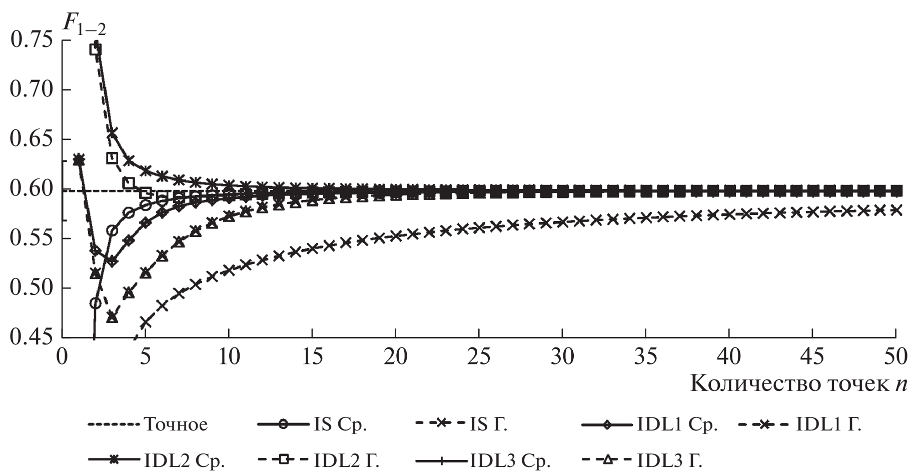

Рис. 5. Результаты расчета угловых коэффициентов для примера 2.

веденный в работе [20], о достаточности применения 10-точечных квадратур Гаусса не подтверждается. Проблема заключается в том, что на паре сторон 1—1 из-за их близости возникает большая погрешность расчетов, которая и является определяющей.

Характерной чертой контурного интегрирования является то, что ряд, получаемый в процессе вычисления значения контурного интеграла по квадратурным формулам, в отличие от двойного интегрирования по площадям, не является монотонно неубывающей функцией. Результаты вычисления интегралов на парах сторон (рис. 7) показывают, что значения отдельных слагаемых могут быть как положительными, так и отрицательными с абсолютными значениями, на порядки превышающими конечный результат.

Абсолютные ошибки расчета угловых коэффициентов не превышают суммы абсолютных ошибок на парах сторон

$$\Delta F \le \frac{1}{2\pi A_I}\sum_{k=1}^{K_I}\sum_{m=1}^{K_J}\left|\Delta_{km}\right|. \tag{13}$$

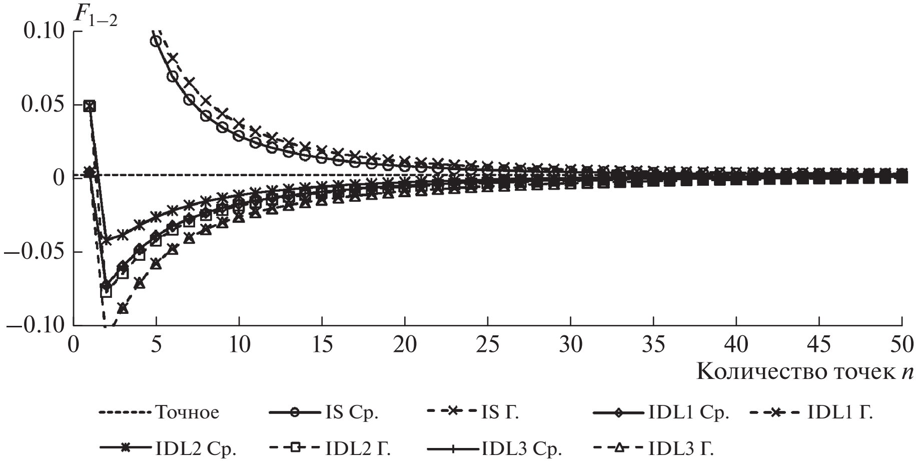

Рис. 6. Результаты расчета угловых коэффициентов для примера 3.

Значения ошибок по парам сторон представлены в табл. 3. В качестве точного значения для IS принимались расчеты по формулам [14], для IDL1 в качестве оценки точного решения взято значение интеграла при $n = 4000$.

Видно, что в примере 3 основной вклад в суммарную погрешность вносит пара 1–1, поэтому точность расчетов может быть существенно повышена, если на паре сторон 1–1 использовать точное аналитическое значение. В табл. 4 приводятся значения F_{1-2}, ΔF и δF, посчитанные при известном точном значении интеграла на паре сторон 1–1.

Видно, что использование точного решения только на одной паре сторон (из девяти) привело к значительному уменьшению погрешности.

Следует отметить, что погрешности на разных парах сторон имеют разные знаки и могут компенсироваться. Так, при использовании квадратурной формулы средних с $n = 4$ сумма абсолютных погрешностей равна 0.01235, т.е. практически составляет 500%! Тем не менее расчетное значение имеет погрешность менее 26%. Для IDL1 при использовании квадратурной формулы средних с $n = 25$ сумма абсолютных погрешностей равна 0.00113, т.е. 45%, расчетное значение имеет погрешность 20.6%. Уменьшение ошибки только на некоторых парах сторон может привести к росту полной ошибки, поэтому необходимо на каждой паре сторон двух многоугольников проводить вычисления одним и тем же видом интеграла, но с применением различных квадратурных формул и степеней разбиений сторон вплоть до применения точного аналитического решения.

Таблица 2. Результаты расчета угловых коэффициентов для примера 3

Квадратурная формула	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса
n	4	4	10	10	25	25	50	50
Решение с применением интеграла IS								
F_{1-2}	0.13262	0.14352	0.02883	0.03713	0.00583	0.00797	0.00286	0.00327
ΔF	0.13014	0.14104	0.02635	0.03465	0.00335	0.00549	0.00038	0.00079
δF	5247%	5686%	1062%	1397%	135%	221%	15%	32%
Решение с применением интеграла IDL1								
F_{1-2}	–0.04773	–0.07053	–0.01719	–0.02591	–0.00231	–0.00528	0.00247	0.00061
ΔF	–0.05022	–0.07301	–0.01968	–0.02839	–0.00479	–0.00776	–0.00001	–0.00187
δF	–2024%	–2944%	–793%	–1144%	–193%	–313%	–0.58%	–75.5%

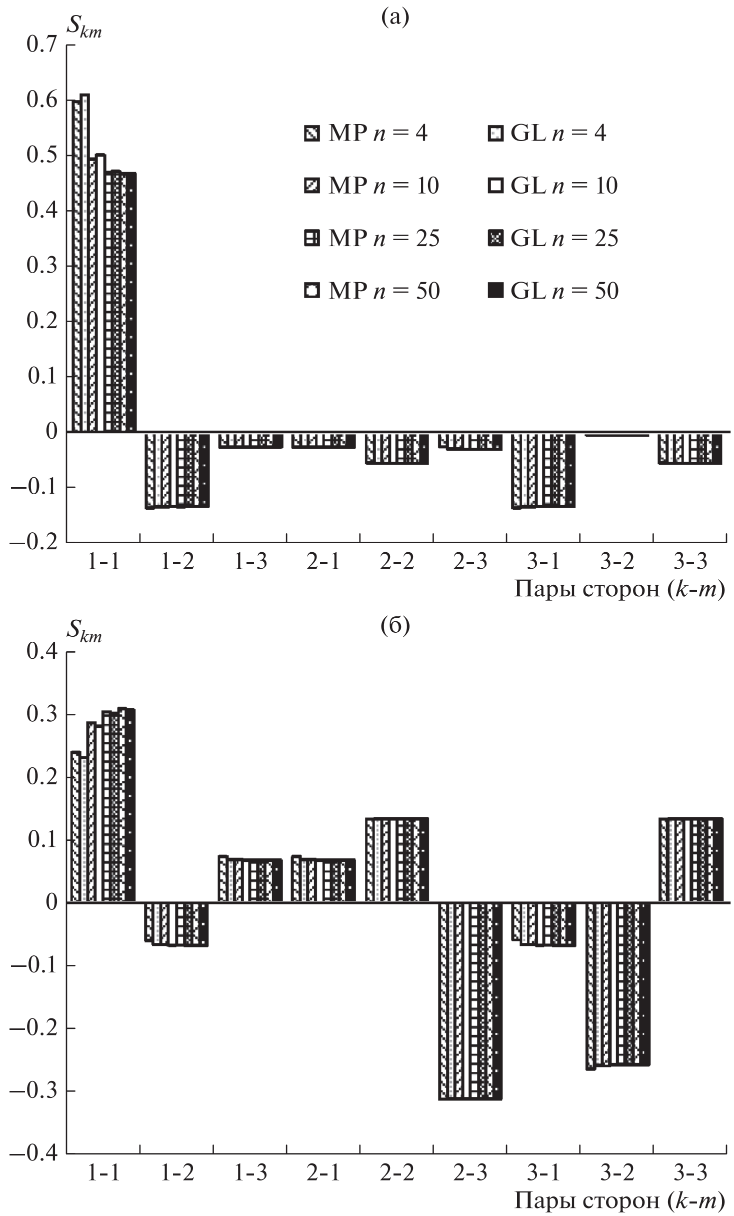

Рис. 7. Значения интегралов IS (а) и IDL1 (б) на парах сторон в примере 3.

3. КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ

Исходя из особенностей численного интегрирования и невозможности заранее предсказать величины погрешностей без выполнения громоздких вычислений, для получения результата с заданной точностью предлагается алгоритм, реализующий комбинированный метод, сочетающий интегрирование по квадратурным формулам Гаусса невысокого порядка с точным аналитическим решением. Комбинированный алгоритм заключается в следующем

Таблица 3. Абсолютные ошибки на парах сторон

Пара сторон	Квадратурные формулы							
	среднего $n = 4$	Гаусса $n = 4$	среднего $n = 10$	Гаусса $n = 10$	среднего $n = 25$	Гаусса $n = 25$	среднего $n = 50$	Гаусса $n = 50$
Решение с применением интеграла IS								
1 1	**0.13077588**	**0.14248197**	**0.02647416**	**0.03466102**	**0.00336609**	**0.00549116**	**0.00038257**	**0.00079022**
1 2	–0.00309524	–0.00070398	–0.00057654	–0.00000508	–0.00009918	0.00000000	–0.00002521	–0.00000001
1 3	–0.00015264	–0.00008585	–0.00003429	–0.00000115	–0.00000674	0.00000000	–0.00000180	0.00000000
2 1	–0.00015246	–0.00008553	–0.00003417	–0.00000112	–0.00000669	0.00000000	–0.00000177	0.00000000
2 2	0.00087537	–0.00000074	0.00013996	0.00000002	0.00002240	0.00000002	0.00000561	0.00000002
2 3	0.00364358	0.00017923	0.00073233	0.00000151	0.00013352	0.00000000	0.00003505	0.00000000
3 1	–0.00309127	–0.00070055	–0.00057511	–0.00000490	–0.00009878	0.00000001	–0.00002509	0.00000000
3 2	0.00046091	–0.00004703	0.00008278	–0.00000119	0.00001381	–0.00000000	0.00000345	0.00000000
3 3	0.00087553	–0.00000078	0.00013995	–0.00000003	0.00002237	–0.00000003	0.00000557	–0.00000003
Решение с применением интеграла IDL1								
1 1	**–0.07016388**	**–0.07748990**	**–0.02298190**	**–0.02840219**	**–0.00530472**	**–0.00775526**	**–0.00004344**	**–0.00187373**
1 2	0.00825070	0.00177381	0.00138225	0.00000319	0.00021805	–0.00000016	0.00001317	–0.00000001
1 3	0.00597063	0.00096532	0.00111721	0.00000943	0.00019189	–0.00000000	0.00001186	–0.00000001
2 1	0.00596527	0.00096216	0.00111541	0.00000919	0.00019141	–0.00000000	0.00001183	–0.00000001
2 2	–0.00052577	–0.00000486	–0.00008491	0.00000000	–0.00001361	0.00000000	–0.00000085	0.00000000
2 3	–0.00054668	–0.00007355	–0.00012180	–0.00000112	–0.00002369	–0.00000000	–0.00000167	0.00000000
3 1	0.00824159	0.00176574	0.00137980	0.00000264	0.00021760	–0.00000016	0.00001315	–0.00000001
3 2	–0.00688273	–0.00090465	–0.00139650	–0.00001504	–0.00025774	0.00000001	–0.00001747	0.00000001
3 3	–0.00052569	–0.00000487	–0.00008490	0.00000000	–0.00001360	0.00000000	–0.00000085	0.00000000

Таблица 4. Результаты расчета угловых коэффициентов для примера 3 с использованием точного значения на паре сторон 1–1

Квадратурная формула	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса	Среднего	Гаусса
n	4	4	10	10	25	25	50	50
Решение с применением интеграла IS								
F_{1-2}	0.00184	0.00104	0.00236	0.00247	0.00246	0.00248	0.00247	0.00248
ΔF	–0.00067	–0.00145	–0.00012	–0.00001	–0.00002	0.00000	–0.00001	–0.00000
δF	–25.65%	–58.27%	–5.04%	–0.48%	–0.78%	0.00%	–0.17%	0.00%
Решение с применением интеграла IDL1								
F_{1-2}	0.02243	0.00696	0.00579	0.00249	0.00299	0.00248	0.00251	0.00248
ΔF	0.01995	0.00448	0.00331	0.00001	0.00051	0.00000	0.00003	0.00000
δF	804.2%	180.6%	133.3%	0.3%	20.6%	0.0%	1.2%	0.0%

Алгоритм 2. Расчет УК между многоугольниками комбинированным методом

A.1 $S \leftarrow 0$
A.2 **for** $k \leftarrow 1, K_I$ **do** !Начало цикла по сторонам многоугольника I
A.3 **for** $m \leftarrow 1, K_J$ **do** !Начало цикла по сторонам многоугольника J
A.4 $S_{km} \leftarrow 0$
A.5 $n1 \leftarrow n_k$
A.6 $n2 \leftarrow n_m$
A.7 **if** *СтороныНаОднойПрямой* **then**
A.8 $S_{km} \leftarrow$ *АналитическоеРешение*(k, m)
A.9 **else**
A.10 Построение сетки на стороне L_k
A.11 Построение сетки на стороне L_m
A.12 **for** $i \leftarrow 1, n1$ **do** !Цикл по узловым точкам на стороне L_k
A.13 **for** $j \leftarrow 1, n2$ **do** !Цикл по узловым точкам на стороне L_m
A.14 **if** $\mathbf{c}_i == \mathbf{c}_j$ **then**
A.15 $S_{km} \leftarrow$ *АналитическоеРешение*(k, m)
A.16 **go to** A.30
A.17 **else**
A.18 $S_{km} \leftarrow S_{km} + g_i g_j \ln\left|\mathbf{r}_{i-j}\right| \hat{\mathbf{c}}_i \cdot \hat{\mathbf{c}}_j$
A.19 **end if**
A.20 **end for**
A.21 **end for**
A.22 **if** $n_m == n1$ **then** !Первый проход?
A.23 $n1 \leftarrow n1 + 1$
A.24 $n2 \leftarrow n2 + 1$
A.25 $St \leftarrow S_{km}$
A.26 **go to** A.10
A.27 **else if** $\left|St - S_{km}\right| > 2\pi A_I \alpha_{\mathrm{err}} / K_I K_J$ **then**
A.28 $S_{km} \leftarrow$ *АналитическоеРешение*(k, m)
A.29 **end if**
A.30 $S \leftarrow S + S_{km}$
A.31 **end if**
A.32 **end for**
A.33 **end for**
A.34 $F_{I-J} = S / 2\pi A_I$

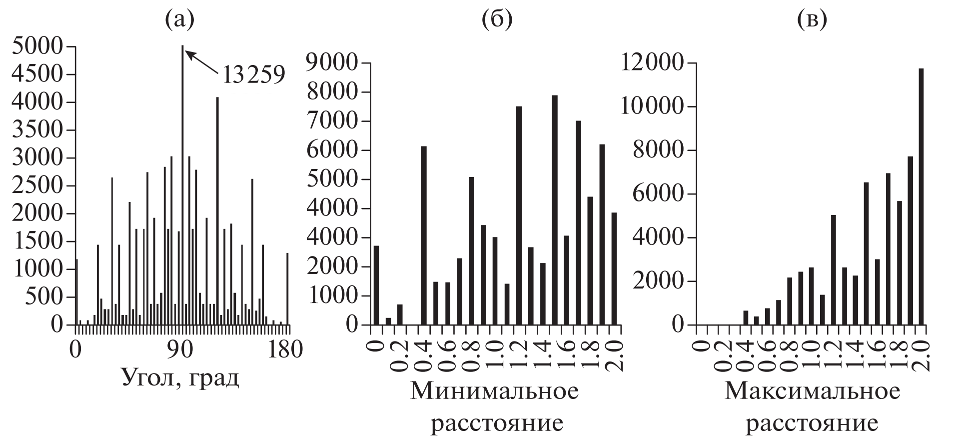

Рис. 8. Распределение пар отрезков: (а) по углу; (б) по минимальному расстоянию; (в) по максимальному расстоянию.

Для комбинированного алгоритма выбран интеграл IS, так как для него имеется точное аналитическое решение для многоугольников. Тогда для пары сторон имеем интегральную сумму

$$S_{km}^{(n_k,n_m)} = \sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_m} g_i g_j \ln\left|\mathbf{r}_{i-j}\right| \hat{\mathbf{c}}_i \cdot \hat{\mathbf{c}}_j, \tag{14}$$

которая рассчитывается с использованием квадратур Гаусса.

Суть комбинированного алгоритма заключается в том, что интеграл на паре сторон рассчитывается по аналитическим формулам только при выполнении одного из условий:

– стороны лежат на одной прямой (может определяться предварительно на этапе построения геометрии);

– в ходе вычислений $S_{km}^{(n_k,n_m)}$ или $S_{km}^{(n_k+1,n_m+1)}$ обнаружено совпадение узловых точек;

– разница между вычислениями по квадратурным формулам для последовательных степеней разбиения сторон превышает заданную погрешность

$$\left|S_{km}^{(n_k+1,n_m+1)} - S_{km}^{(n_k,n_m)}\right| > 2\pi A_I \alpha_{\mathrm{err}} / K_I K_J\,. \tag{15}$$

В остальных случаях в качестве значения интеграла на паре сторон берется $S_{km}^{(n_k+1,n_m+1)}$.

После проведения многочисленных численных экспериментов мы рекомендуем использовать $n_k = n_m = 4$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для сравнения расчетных методов контурного интегрирования УК в части точности и быстродействия проведем несколько численных экспериментов. Для этого рассмотрим модель, представляющую внутреннюю поверхность сферы единичного радиуса, разбитую на 96 плоских многоугольников: 24 треугольника и 72 четырехугольника. Данная модель позволяет изучить поведение вычислительных алгоритмов в широком диапазоне взаимного расположения площадок и пар отрезков, возникающих при интегрировании.

На рис. 8 представлено частотное распределение пар отрезков по углу между ними (а), а также минимальному (б) и максимальному (в) расстояниям между концами отрезков.

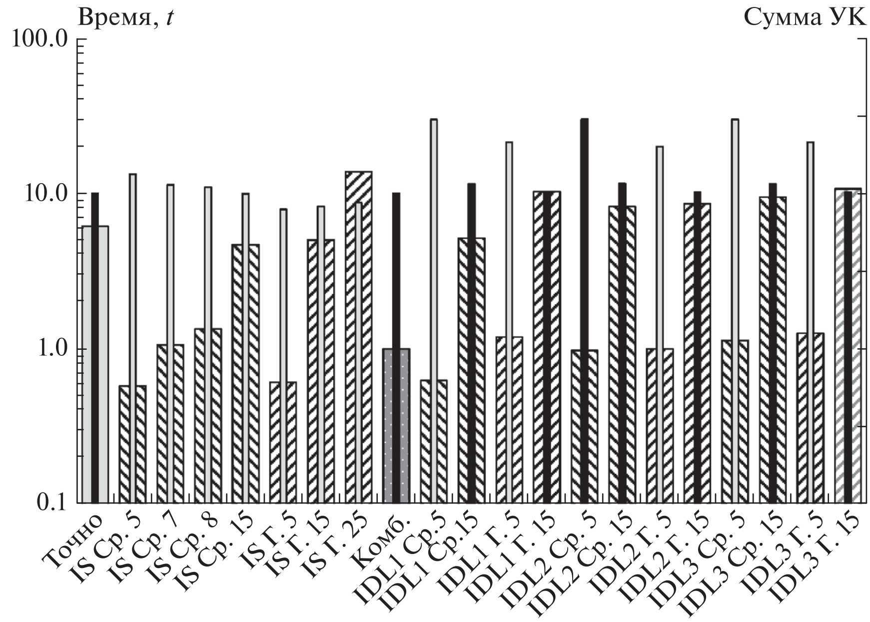

Рис. 9. Результаты сравнения расчетных вариантов.

Кроме того, в данной модели присутствует неточность – при построении сферы использовался алгоритм, приведший к тому, что координаты “совпадающих” вершин 1-й и 12-й площадок не совпадают. Одна из координат оказалась равной 0.3314135740355918*5* и 0.331413574035591*74* (различающиеся цифры выделены курсивом).

Проведены расчеты угловых коэффициентов по вариантам, различающимся используемыми алгоритмами, квадратурными формулами и степенью разбиения (количеством точек на стороне). Полученные результаты приведены на рис. 9. Тонким столбцам соответствует сумма значений угловых коэффициентов первой площадки с остальными площадками сферы. При этом отрицательные значения, которые получались в некоторых расчетных случаях, при суммировании не учитывались, как не имеющие физического смысла. Случаи, в которых были получены отрицательные угловые коэффициенты, отмечены розовым цветом, случаи, где все угловые коэффициенты положительные – красным.

Теоретическое значение суммы угловых коэффициентов для каждой площадки равно единице. Отклонение суммы угловых коэффициентов, полученных в конкретном расчетном случае для первой площадки, от единицы может служить оценкой точности данного алгоритма при заданном количестве точек на стороне.

Широкими столбцами показано относительное время счета t всех угловых коэффициентов модели в разных расчетных случаях по отношению ко времени счета по комбинированному алгоритму. Данное исследование проводилось на компьютерном коде без каких-либо оптимизаций для того, чтобы результаты не зависели от того, как компилятор осуществляет оптимизацию. Проведенное сравнение, тем не менее, позволяет сделать качественные выводы о предпочтительности применения алгоритмов.

Видно, что быстрее комбинированного алгоритма угловые коэффициенты рассчитываются только по квадратурным методам с пятью точками на стороне, при этом погрешности расчета составляют более 1%. Приемлемая точность порядка 0.1% достигается при $n = 15$ для IS по формуле средних (присутствуют отрицательные угловые ко-

Таблица 5. Количество отрицательных угловых коэффициентов

Расчетный вариант	Точно	IS Ср. 5	IS Ср. 7	IS Ср. 8	IS Ср. 15	IS Г. 5	IS Г. 15	IS Г. 25	Комб.	IDL1 Ср. 5	IDL1 Ср. 15	IDL1 Г. 5	IDL1 Г. 15	IDL2 D 5	IDL2 D 15	IDL2 Г. 5	IDL2 Г. 15	IDL3 D 5	IDL3 D 15	IDL3 Г. 5	IDL3 Г. 15
Количество отрицательных значений	–	3	2	2	2	3	2	2	–	3	–	2	–	–	–	2	–	3	–	2	–

эффициенты) и для всех IDL по формуле Гаусса. При этом время счета по указанным алгоритмам примерно в 10 раз больше, чем время счета комбинированного алгоритма и сопоставимо со временем счета точного аналитического решения.

Количество отрицательных угловых коэффициентов между площадкой 1 и другими площадками модели по расчетным вариантам приведено в табл. 5.

Результаты для случаев, в которых получены отрицательные значения угловых коэффициентов, не могут считаться удовлетворительными.

Предложенный автором комбинированный метод показал высокую точность при достаточно малом времени счета.

5. ВЫВОДЫ

Проведенное исследование показывает, что на некоторых конфигурациях многоугольников применение квадратурных методов не позволяет получить значения угловых коэффициентов с требуемой точностью. При этом сходимость интегралов с применением формулы Гаусса в ряде случаев оказывается хуже, чем с применением формулы средних. Использование же имеющихся точных аналитических формул для произвольных многоугольников достаточно ресурсоемко.

Для получения значения углового коэффициента с заданной точностью предложен алгоритм, реализующий комбинированный метод, сочетающий интегрирование по квадратурным формулам Гаусса невысокого порядка с точным аналитическим решением. По результатам численного эксперимента предложенный метод показал высокую точность при достаточно малом времени счета по сравнению с другими методами контурного интегрирования.

Предложенный алгоритм позволяет производить расчеты угловых коэффициентов с заданной точностью для любых конфигураций многоугольников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басов А.А., Елчин А.П.* Отработка на борту международной космической станции перспективных технических решений по обеспечению теплового режима космических аппаратов // Космонавтика и ракетостроение. 2018. № 4(103) С. 61–71.
2. *Клочкова М.А.* Проектирование системы обеспечения теплового режима узлового модуля Международной космической станции // Космонавтика и ракетостроение. 2013. № 1(70). С. 46–50.
3. *Залетаев С.В., Румынский Н.А., Басов А.А., Клочкова М.А., Федорук Г.Д.* Применение обобщенной характеристики лучистого взаимодействия двух тел для оценки температурного влияния термобарокамеры на космический аппарат при проведении тепловакуумных испытаний // Тепловые процессы в технике. 2020. № 6. Т. 12. С. 282–288.
4. *Финченко В.С., Котляров Е.Ю., Иванков А.А.* Системы обеспечения тепловых режимов межпланетных станций. Химки: АО “НПО С.А. Лавочкина”, 2018. 400 с.
5. *Блох А.Г.* Теплообмен излучением: Справочник / Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.: ил. – ISBN 5-283-00118-0.

6. *Howell J.R.* Thermal radiation heat transfer / John R.Howell, M. Pinar Mengüç, Kyle Daun, Robert Siegel.– 7th ed. – Boca Raton: CRC press, 2021. – 1006, [34] p. – ISBN 978-0-367-34707-9.
7. *Modest M.* Radiative Heat Transfer / Michael F. Modest. – 3rd ed. – N.Y.; San Francisco; London: Elsevier Science, 2013. 882, [22] p. – ISBN: 978-0-12-386944-9.
8. *Винокуров Д.К.* Классификация методов расчета диффузных угловых коэффициентов излучения // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 12. С. 57–70. https://doi.org/10.1134/S0234087919120050
9. *Фок В.А.* Избранные труды. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2003. 488 с.
10. *DiLaura D.L., Santoro S.* Nondiffuse Radiative Transfer 4: General Procedure for Planar Area Sources and Area Receivers // J. Illuminating Engineering Society. 1997. V. 26:1. P. 188–200. https://doi.org/10.1080/00994480.1997.10748179
11. *Sparrow E.M.* A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors // ASME J. Heat Transfer. 1963. V. 85. Iss. 2. P. 81–88. https://doi.org/10.1115/1.3686058
12. *Herman R.A.* A Treatise on Geometrical Optics. London: C.J.Clay and Sons, Cambridge University Press Warehouse, 1900. P. 344+[10].
13. *Калиткин Н.Н., Альшина Е.А.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ. М.: Издательский центр “Академия”, 2013. 304 с.
14. *Schröder P., Hanrahan P.* On the form factor between two polygons // Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '93). – ACM, N.Y., NY, USA, 1993. P. 163–164. https://doi.org/10.1145/166117.166138
15. *Narayanaswamy A.* An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons // International J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 91. P. 841–847. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.131
16. *Glass M.W.* CHAPARRAL: A Library for Solving Large Enclosure Radiaton Heat Transfer Problems. – Sandia National Laboratories.Technical Report SAND95-2049, Albuquerque, New Mexico. 1995. https://doi.org/10.2172/120875
17. *Винокуров Д.К.* Методы контурного интегрирования угловых коэффициентов излучения – CONTVF.. – Св-во о гос. регистр. программы для ЭВМ № 2018663500 29.10.2018.
18. *Винокуров Д.К.* Особенности определения углового коэффициента излучения между многоугольниками контурным интегрированием // Космонавтика и ракетостроение. 2019. № 4(109). С. 36–47.
19. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 554 с.
20. *Mazumder S., Ravishankar M.* General Procedure for Calculation of Diffuse View Factors Between Arbitrary Planar Polygons // International J. Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55(23–24). P. 7330–7335. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.07.066

Combined Algorithm of the Determination of Radiation Configuration Factors between the Polygons by the Contour Integration

A. A. Basov[a], *, D. K. Vinokurov[b], **, and M. A. Klochkova[a]

[a] *Korolev Rocket and Space Corporation Energia (PAO RSC Energia), Korolev, Russia*
[b] *Joint Stock Company “Central Research Institute for Machine Building” (JSC “TsNIIMash”), Korolev, Russia*

**e-mail: andrey.basov@rsce.ru*

***e-mail: vinokurovdk@tsniimash.ru*

This article presents the algorithm of the calculation of the diffuse radiation configuration factors for the arbitrarily located polygons, which realizes combined contour integration method. Method combines integration for the low order Gaussian quadrature formulas with the precise analytical solution. The peculiarities associated with an error in the calculation of configuration factors by numerical contour integration methods are shown. The techniques, which make it possible to ensure the assigned accuracy of calculation, are proposed.

Keywords: radiation heat transfer, numerical methods, the contour integration, algorithm, radiation configuration factor