СОДЕРЖАНИЕ

EDN: VEKWNL
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 3–8**

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 552.5.073;532.2;534.143

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ГЕОМЕТРИИ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ И ДАВЛЕНИЯ НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА ВИХРЕВОГО ТИПА

С. Р. Ганиев[1], О. В. Шмырков[1], Д. В. Курменев[1], А. И. Крюков[1],*

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: lle@bk.ru*

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В статье приведены результаты экспериментальных исследований влияния геометрии проточной части рабочей камеры и давления на входе и выходе генератора вихревого типа на интенсивность и характер протекания нелинейных волновых и гидродинамических процессов, картину течения, величину и характер распределения давления в камере генератора.

Ключевые слова: волновые процессы, гидродинамика, давление, пульсации, амплитуда, частота

DOI: 10.31857/S023571192203004X

Базовой задачей волновой технологии является разработка научных основ проектирования волновых машин и аппаратов. Теоретические основы протекания волновых процессов в многофазных средах изложены в работах [1–3]. Расчетные и экспериментальные исследования в этом направлении ведутся в основном на конкретных типах волновых устройств. В волновой технологии, базирующейся на возбуждении нелинейных колебаний и волн в многофазных средах, важную роль играют проточные гидродинамические генераторы вихревого типа [4]. В таких генераторах колебания давления возбуждаются проходящим высокотурбулентным закрученным и завихренным потоком жидкости, которая одновременно является обрабатываемой и рабочей средой. В ряде работ [5–9], посвященных исследованию течения в проточном гидродинамическом генераторе вихревого типа, было показано, что в проточной части реализуется сложная картина течения. В ней одновременно протекают взаимодействующие между собой гидродинамические, кавитационные и нелинейные волновые процессы. Интенсивность этих процессов существенно зависит от расположения отверстий тангенциальных каналов подачи рабочей среды, давления на входе и выходе, степени закрутки потока, длине и диаметре камеры и сопла генератора. В частности, наибольшая интенсивность кавитации реализуется в донной части генератора. Зависимости интенсивности кавитации от величины смещения подающих тангенциальных каналов и диаметра камеры носят нелинейный характер с наличием четких максимумов. При уменьшении диаметра камеры на выходе генератора в два раза и смещении тангенциальных каналов на расстояние от дна камеры, равное двум калибрам, интенсивность кавитации увеличивается практически на порядок. Однако, как показал анализ, несмотря на важность имеющихся в этих работах расчетных и экспериментальных данных, их оказалось недостаточно для описания реальной картины течения и про-

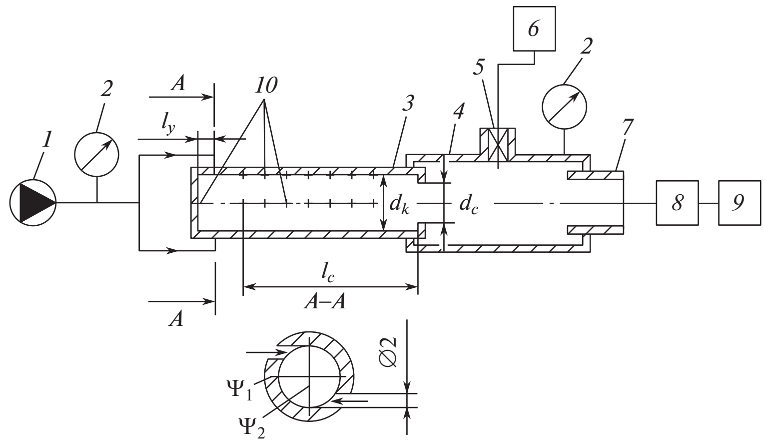


Рис. 1. Принципиальная схема гидродинамического стенда: *1* – плунжерный насос; *2* – манометры; *3* – гидродинамический генератор колебаний вихревого типа; *4* – рабочая камера; *5* – датчик динамического давления; *6* – осциллограф; *7* – дроссель; *8* – расходомер; *9* – регулировочный вентиль; *10* – точки измерения статического давления.

цессов, протекающих в камере генератора и, соответственно, для модернизации существующих физико-математических моделей с целью получения достоверных расчетных данных.

Цель статьи – исследование влияния геометрии проточной части и давления на входе и выходе гидродинамического генератора вихревого типа на интенсивность и характер протекания гидродинамических и нелинейных волновых процессов, величину и характер распределения давления в камере генератора при изменении в широком диапазоне определяющих параметров.

Методы и средства эксперимента. Испытание модели проточного гидродинамического генератора вихревого типа проводилось на экспериментальной базе НЦ НВМТ (ИМАШ РАН). Принципиальная схема стенда представлена на (рис. 1). Генератор представлял собой цилиндрический стакан, в боковой стенке которого были выполнены два тангенциальных канала диаметром $d_y = 2$ мм для подачи жидкости в камеру генератора. Расстояние от плоскости осевого сечения подающих каналов до дна камеры $l_y = 5$ мм. Диаметр камеры генератора $d_k = 10$ мм. Камера генератора была выполнена длиной $l_k = 40$ мм для получения максимальной амплитуды колебаний давления в нем [5].

На выходе камеры устанавливали сопла в виде цилиндрических отверстий с диаметрами $d_c = 2.5$, 3.0, 3.5, 3.7, 4.0, 4.2, 4.5, 5.0, 7.0 и 9.0 мм. В качестве рабочей среды использована водопроводная вода при температуре $T = 25°$C. Давление воды на входе в генератор изменялось в диапазоне $P_{\text{in}} = 0.1–5.0$ МПа; на выходе $P_{\text{out}} = 0.1–1.0$ МПа. Эти давления измерялись манометрами класса 1, расход и температура воды измерялась датчиками с погрешностью ±1%. Для измерения пульсаций давления в рабочей части за генератором был установлен пьезоэлектрический датчик типа 701А фирмы “Kistler”. Сигнал с датчика поступал на усилитель-преобразователь “Kistler-5011”, а затем для записи и обработки на осциллограф “Lecroy HRO 66Zi”. Измерение статического давления в центре дна P_d и на боковой поверхности камеры P_k генератора проводили манометрами и мановакумметрами класса 0.5.

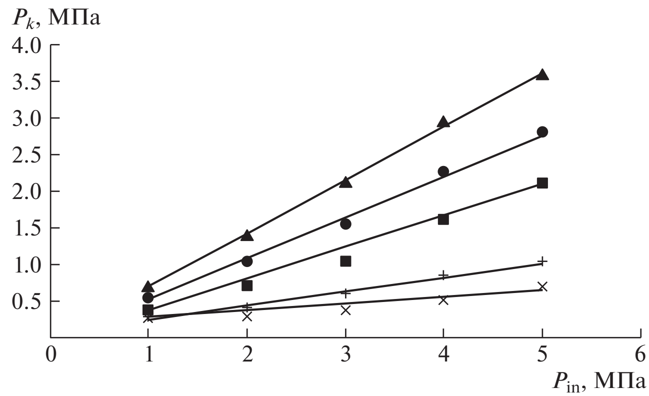


Рис. 2. Зависимость $P_k = f(P_{in}, d_c/d_k)$ при P_{out} = 0.1 МПа: ▲ – d_c/d_k = 0.25; ● – d_c/d_k = 0.35; ■ – d_c/d_k = = 0.4; + – d_c/d_k = 0.7; × – d_c/d_k = 0.9.

Результаты исследований. Измерение распределения давления на боковой стенке камеры генератора показало, что величина давления по длине камеры и в плоскостях Ψ_1 = 0–180° и Ψ_2 = 90–270° практически не меняются. Вблизи выходных отверстий тангенциальных каналов в плоскости Ψ_1 = 0–180° давление повышается на 20–30% и при смещении в плоскость Ψ_2 = 90–270° настолько же снижается. С увеличением входного давления P_{in} статическое давление на боковой поверхности камеры линейно возрастает при всех исследуемых диаметрах сопла (рис. 2).

Зависимость $P_k = f(d_c/d_k)$ носит нелинейный характер. С уменьшением диаметра сопла P_k возрастает (рис. 3), что, по-видимому, связано с усилением возвратного течения в камере генератора и влиянием вихревой каверны на его гидравлическое сопротивление.

Повышение давления на входе генератора также приводит к росту P_k. При P_{in} = 5.0 МПа, P_{out} = 0.3 МПа, d_c/d_k = 0.25 давление на боковой поверхности камеры достигает P_k = 3.5 МПа, что составляет 70% от входного давления.

При ступенчатом характере изменения диаметра сопла в диапазоне d_c/d_k = 0.3–0.45 при P_{in} = 5.0 МПа, P_{out} = 0.1 МПа в проточной части генератора на частотах f = 4.0–4.3 кГц возбуждаются пики давления резонансного типа (рис. 4).

С увеличением гидростатического давления на выходе до P_{out} = 0.3 МПа амплитуда этих пиков пульсации давления возрастает в 5 раз и достигает величины A = 0.8 МПа (рис. 5).

При дальнейшем увеличении давления на выходе до P_{out} = 1.0 МПа амплитуда этих пиков снижается. Зависимость $A_{max} = f(d_c/d_k)$ является существенно нелинейной с характерным максимумом при d_c/d_k = 0.35. Эти данные свидетельствуют о резком повышении интенсивности протекания волновых процессов в камере генератора при изменении диаметра сопла в пределах d_c/d_k = 0.35–0.45. Давление на дне камеры генератора с уменьшением диаметра сопла в пределах d_c/d_k = 0.9–0.25 при P_{in} = 5.0 МПа и P_{out} = 0.1 МПа плавно возрастает с P_d = 0.003 МПа до P_d = 1.6 МПа.

Зависимость $P_d = f(P_{in}, d_c/d_k)$, (рис. 6) носит сложный нелинейный характер. Так при $d_c/d_k > 0.7$ донное давление при всех P_{in} ниже атмосферного и с увеличением P_{in} до 5 МПа плавно снижается до P_d = 0.003 МПа. При $d_c/d_k \le 0.7$ с увеличением P_{in} донное

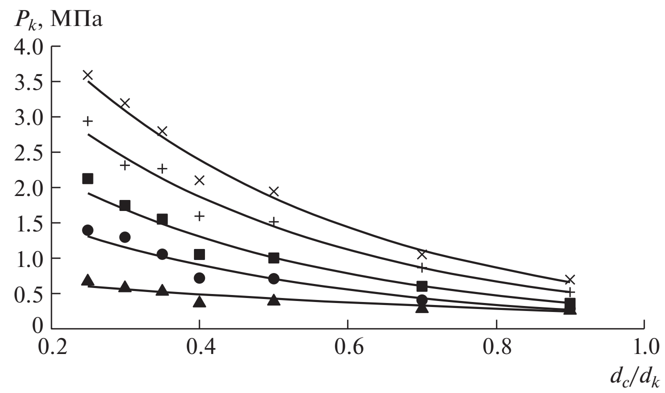


Рис. 3. Зависимость $P_k = f(P_{in}, d_c/d_k)$ при P_{out} = 0.1 МПа: ▲ – P_{in} = 1 МПа; ● – P_{in} = 2.0 МПа; ■ – P_{in} = 3.0 МПа; + – P_{in} = 4.0 МПа; × – P_{in} = 5.0 МПа.

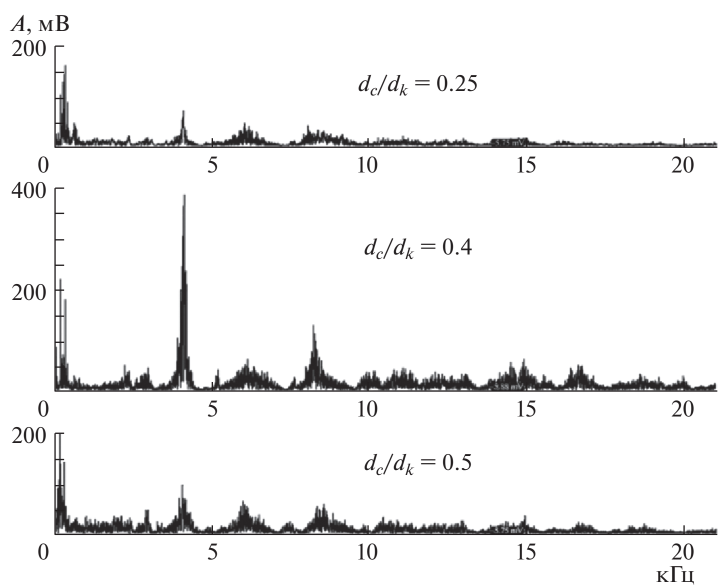


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики пульсаций давления в проточном гидродинамическом генераторе вихревого типа при P_{in} = 5.0 МПа, P_{out} = 0.3 МПа.

давление вначале плавно снижается ниже атмосферного, а затем при определенной величине P_{in} для конкретного диаметра сопла начинает резко возрастать до величины, заметно превышающей атмосферное давление, при этом наиболее существенно с уменьшением диаметра сопла.

Это связано с тем, что при уменьшении диаметра сопла в конце камеры образуется кольцевая площадка перпендикулярная оси генератора. По-видимому, это приводит к возникновению обратного течения части основного потока от сопла к днищу камеры. Наличие вращательной составляющей потока может приводить к появлению торои-

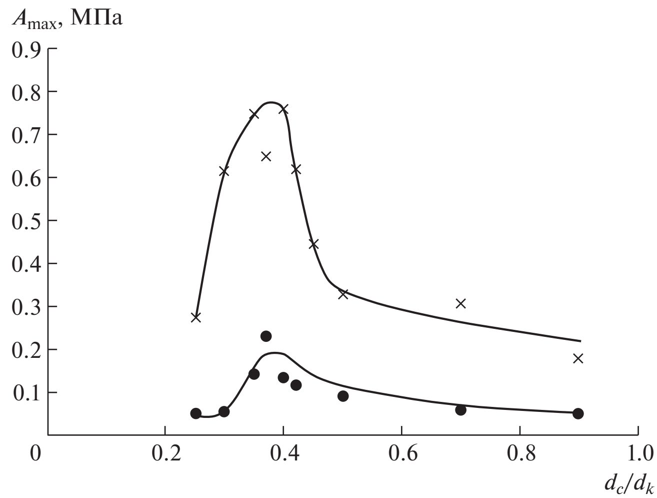


Рис. 5. Зависимость $A_{max} = f(d_c/d_k, P_{out})$ при P_{in} = 5.0 МПа: ● – P_{out} = 0.1 МПа; × – P_{out} = 0.3 МПа.

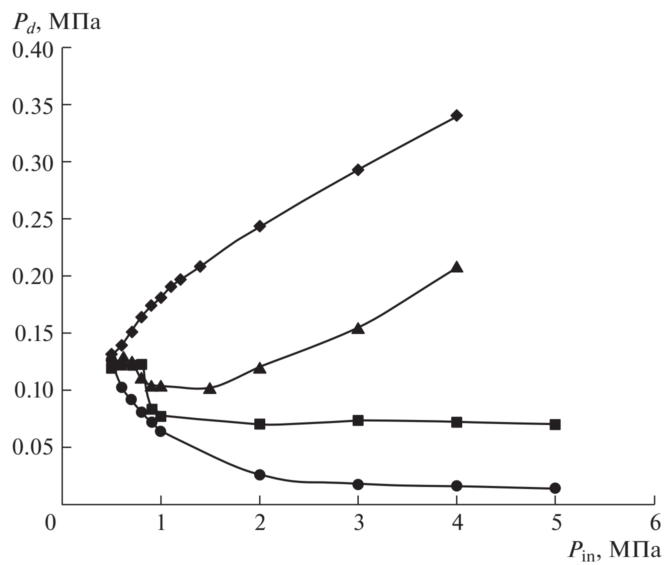


Рис. 6. Зависимость $P_d = (P_{in}, d_c/d_k)$ при P_{out} = 0.1 МПа: ◆ – d_c/d_k = 0.35; ▲ – d_c/d_k = 0.5; ■ – d_c/d_k = 0.7; ● – d_c/d_k = 0.9.

дальных вихрей, размеры которых возрастают по мере уменьшения диаметра сопла. Это приводит к повышению донного давления. Вихревая кавитационная каверна, возникающая в приосевой области камеры генератора при P_{in} = 5.0 МПа, P_{out} = 0.1 МПа, d_c/d_k = 0.9 [6] отрывается от дна и по мере уменьшения диаметра сопла смещается к нему. При d_c/d_k = 0.3–0.45 возникает неустойчивое положение вихревой каверны относительно сопла. Она возникает то перед соплом, то за ним, при этом периодически частично перекрывает проходное сечение сопла, в результате чего возбуждаются мощные пики давления. Причем этот процесс носит автоколебательный характер, и повышение давления на выходе P_{out} генератора лишь усиливает этот процесс.

Заключение. В результате проведенных исследований было выявлено следующее: при изменении геометрии проточной части камеры гидродинамического генератора вихревого типа происходит резкое повышение интенсивности протекания волновых и гидродинамических процессов. Так, при изменении диаметра сопла в пределах $d_c/d_k =$ $= 0.3–0.45$ в проточной части генератора при $P_{in} = 5.0$ МПа и $P_{out} = 0.3$ МПа в диапазоне частот $f = 4.0–4.3$ кГц возбуждаются мощные нелинейные волны, амплитуда которых достигает 0.8 МПа. Донное давление в камере генератора с уменьшением диаметра сопла диапазоне $d_c/d_k = 0.9–0.25$ при $P_{in} = 5.0$ МПа и $P_{out} = 0.1$ МПа возрастает с 0.003 МПа до 1.6 МПа (почти в 500 раз). Давление на боковой поверхности камеры генератора с увеличением P_{in}, P_{out} и уменьшением диаметра сопла также возрастает и при $P_{in} = 5.0$ МПа, $P_{out} = 0.3$ МПа, $d_c/d_k = 0.25$ достигает величины $P_k = 3.5$ МПа, что составляет 70% от максимальной величины входного давления.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев Р.Ф.* Волновые машины и технологии (введение в волновую технологию). М.: Науч.-изд. центр РХД, 2008. 192 с.

2. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. М.: Науч.-изд. центр РХД, 2008. 712 с.

3. *Ганиев Р.Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: Науч.-изд. Центр РХД, 2013. 592 с.

4. *Авдуевский В.С., Ганиев Р.Ф., Калашников Г.А., Костров С.А., Муфазалов Р.Ш.* РФ Патент 2015749, 1994.

5. *Ганиев Р.Ф., Шмырков О.В., Жебынев Д.А., Ганиев О.Р., Ганиев С.Р., Фельдман А.М.* Исследование влияния геометрических размеров гидродинамического вихревого генератора колебаний давления на спектральные характеристики // Справочник. Инженерный журнал. 2010. № 5. С. 15.

6. *Шмырков О.В.* Исследование кавитации в вихревом генераторе проточного типа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 3. С. 22.

7. *Корнеев А.С., Шмырков О.В.* Влияние закрутки потока на характеристики гидродинамических генераторов колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 5. С. 27.

8. *Корнеев А.С., Шмырков О.В.* Влияние геометрических параметров на характеристики гидродинамических генераторов колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 4. С. 46.

9. *Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С., Шмырков О.В.* Амплитудно-частотные характеристики гидродинамических генераторов колебаний // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 1.

EDN: SRCDED
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 9–17**

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОПОДОБНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИЛ

Л. Я. Банах[1,2,*], О. В. Бармина[1]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, Москва, Россия*
[2]*Институт прикладной физики РАН (ИПФ РАН), Нижний Новгород, Россия*
**e-mail: banl@inbox.ru*

Поступила в редакцию 24.11.2021 г.
После доработки 02.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Исследуется устойчивость самоподобных динамически-фрактальных систем при действии неконсервативных циркуляционных сил. Найдены аналитические критерии устойчивости для общего случая многомассовой роторной системы. Используются методы теории возмущений. Показано, что многомассовая система может оказаться устойчивой, даже при наличии отдельных неустойчивых узлов. Проведено сравнение динамических свойств самоподобных и периодических систем. Показано, что их динамика носит волновой характер и в низкочастотном диапазоне динамические свойства таких систем практически одинакова, но вблизи резонансных частот виброактивность самоподобных систем существенно отличается и зависит от коэффициента масштаба.

Ключевые слова: динамический фрактал, коэффициент масштаба, устойчивость, циркуляционные силы, дисперсионное уравнение, виброактивность

DOI: 10.31857/S0235711922030026

Постановка задачи. Многомассовые роторные системы используются во многих отраслях техники: авиационные двигатели, турбины, погружные нефтяные насосы и т.п. Для них особенно актуальна проблема снижения уровня вибраций, т.к. процесс балансировки каждого диска достаточно трудоемок и не всегда возможен. Многомассовые системы могут иметь как периодическую структуру, которая обладает волновыми свойствами, так и непериодическую. Имеется широкий класс непериодических структур, которые также обладают волновыми свойствами и для них возможно получение аналитических решений. Это самоподобные структуры – динамические фракталы, в которых жесткость каждого участка и инерционные характеристики дисков меняются с одинаковым масштабом γ [1]. Такие структуры достаточно часто используются в инженерных конструкциях, как например, в многомассовых роторах, роторах барабанного типа авиационных конструкций. Динамические фракталы представляют собой специальный класс структур, отличающийся от фракталов Мандельброта [2, 3], в которых происходит масштабирование только геометрических размеров. В настоящей статье приводится анализ динамики и устойчивости самоподобных роторных систем при воздействии гидроаэродинамических циркуляционных сил.

Уравнения колебаний динамически-фрактальных роторных системы при действии гидродинамических сил. Рассмотрим n-массовый ротор, имеющий самоподобную структуру (рис. 1), в котором в соответствии с определением динамического фрактала [1]

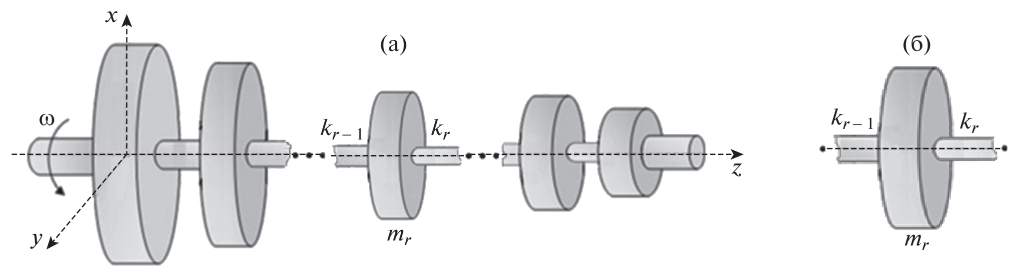


Рис. 1. Роторные системы: (а) – динамически-самоподобная роторная система; (б) – однодисковая r-я подсистема.

параметры двух соседних парциальных подсистем связаны между собой следующими соотношениями:

$$m_r = \gamma m_{r-1}, \quad A_r = \gamma A_{r-1}, \quad k_{rr+1} = \gamma k_{rr-1} \quad G_r = \gamma G_{r-1}, \quad (r = 1 \ldots n), \tag{1}$$

где m_r – масса r-го диска, A_r, G_r – экваториальный и полярный моменты инерции r-го диска; k_{ij} – коэффициент изгибной жесткости участка вала между i-м и j-м дисками; γ – коэффициент масштаба..

Прежде, чем исследовать многомассовую систему запишем вначале уравнения изгибных колебаний для отдельного диска как парциальной подсистемы (рис. 1б). Эти уравнения без учета сил внутреннего и внешнего трения имеют вид [4]

$$\begin{gathered} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{12}\varphi_y + = 0, \\ m\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\varphi_x = 0, \\ A\ddot{\varphi}_x + k_{22}\varphi_x + k_{12}y - G\omega\dot{\varphi}_y = 0, \\ A\ddot{\varphi}_y + k_{22}\varphi_y + k_{12}x + G\omega\dot{\varphi}_x = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где x, y – перемещения центра масс диска вдоль осей координат; φ_x, φ_y – углы поворота диска вокруг этих осей; k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – приведенные коэффициенты упругости парциальной подсистемы ротора.

В уравнениях (2) и далее индекс r ($r = 1, \ldots, n$) при координатах опущен, чтобы не загромождать изложение.

Одной из характерных особенностей роторных систем является потеря устойчивости и возникновение опасных автоколебательных режимов при действии неконсервативных циркуляционных сил. К таким силам относятся, в частности, силы внутреннего демпфирования, гидродинамические силы в уплотнениях и опорах, которые в свою очередь включают гидростатические силы $\mathbf{p}_1$, демпфирующие силы $\mathbf{p}_2$, циркуляционные силы $\mathbf{p_{21}} = -\omega\mathbf{p}_2/2$, а также аэродинамические силы $\mathbf{p}_a$, порождаемые венцовыми силами на турбинных колесах.

В линейном приближении эти силы пропорциональны поступательным координатам. Зависимость гидроаэродинамических коэффициентов от угловой скорости можно принять следующей [5, 6]

$$p_1 = p_{1n}\frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \quad p_2 = p_{2n}\frac{\omega}{\omega_n}, \quad p_a = p_{an}\frac{\omega}{\omega_n}, \tag{3}$$

где p_{1n}, p_{2n}, p_{an} – гидроаэродинамические коэффициенты при номинальной скорости вращения ω_n.

Положим, что происходят гармонические колебания: $x = Xe^{i\lambda t}$, $\varphi_y = \Phi_y e^{i\lambda t}$, $y = Ye^{i\lambda t}$, $\varphi_x = \Phi_x e^{i\lambda t}$. Тогда уравнения (2) колебаний диска с учетом гидроаэродинамических сил (3)

$$\begin{aligned}
-m\lambda^2 X + k_{11}X + p_1 X + i\lambda p_2 X + p^* Y + k_{12}\Phi_y &= 0,\\
-m\lambda^2 Y + k_{11}Y + p_2 Y + i\lambda p_2 Y - p^* X + k_{12}\Phi_x &= 0,\\
-A\lambda^2\Phi_x + k_{22}\Phi_x +_x + k_{12}Y - i\lambda G\omega\Phi_y &= 0,\\
-A\lambda^2\Phi_y + k_{22}\Phi_y + k_{12}X + i\lambda G\omega\Phi_x &= 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $p^* = \omega\left(p_a + \frac{1}{2}p_2\right)$ – суммарный коэффициент циркуляционных гидроаэродинамических сил

Разделение переменных, соответствующих прямой и обратной прецессии ротора. В роторных системах для снижения размерности задачи обычно применяют “спрессовывание” координат [4], вводя комплексные координаты $Z = X + iY$, $\Phi = \Phi_y + i\Phi_x$.

Уравнения (4) в комплексных координатах примут вид

$$\begin{aligned}
-m\lambda^2 Z + k_{11}Z + p_1 Z + i\lambda p_2 Z - ip^* Z + k_{12}\Phi &= 0,\\
-A\lambda^2\Phi + k_{22}\Phi + k_{12}Z + G\omega\Phi &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Физический смысл такого преобразования координат становится очевидным, если рассмотреть также комплексно-сопряженные координаты $Z^* = X - iY$, $\Phi^* = \Phi_y - i\Phi_x$. В роторных системах имеется вращающаяся ось симметрии. Введение комплексных координат использует симметрию вращающегося ротора, в результате чего переменные (Z, Φ) и (Z^*, Φ^*) описывают колебания в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях и совершают одинаковые колебания, но со сдвигом фазы $\pi/2$ (или $-\pi/2$), что соответствует прямой (или обратной) прецессии. При этом исходные уравнения разделяются на два независимых блока, и отличаются друг от друга только знаком при угловой скорости ω.

В матричном виде уравнения (5) для r-го диска примут вид

$$\mathbf{D}_r\begin{bmatrix} Z\\ \Phi\end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} -m\lambda^2 + k_{11} + p_1 + i\lambda p_2 - ip^* & k_{12}\\ k_{12} & -A\lambda^2 + k_{22} + G\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z\\ \Phi\end{bmatrix}_r = 0, \quad (r = 1\ldots n). \tag{6}$$

Это уравнение колебаний справедливо для каждого r-го диска системы (рис. 1б).

Устойчивость колебаний роторных систем при действии циркуляционных сил. В роторных системах, как уже указывалось, возникает потеря устойчивости при действии неконсервативных циркуляционных сил. Эти физические свойства циркуляционных сил отражает и структура матрицы $\mathbf{D}_r$ (6): консервативные силы (упругие, гидроупругие силы, гироскопические члены) описываются действительными членами матрицы, в то время как члены, описывающие неконсервативные циркуляционные силы – чисто мнимые. Учитывая это обстоятельство, используем для анализа устойчивости методы теории возмущения. При отсутствии неконсервативных сил все корни частотного уравнения – чисто мнимые, в то время как добавление неконсервативных сил приводит к появлению комплексных частот, что и отражает появление неустойчивости.

Сделаем теперь естественное предположение о малости циркуляционных сил по сравнению с силами упругости ротора. Тогда в матрице появляются малые члены порядка ε, что и позволяет применять методы теории возмущения. Полученные в результате действительные части поправок к собственным частотам определят условия устойчивости.

Запишем характеристическое матричное уравнение $\mathbf{D}_r = 0$ в виде, удобном для применения теории возмущения

$$\mathbf{D}_r = \left(\mathbf{K} + \mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}^*\right) - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^2(\varepsilon) + \left(\omega\mathbf{G} + i\mathbf{p}_2\right)\mathbf{\Lambda}(\varepsilon) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

где $(\mathbf{K} + \mathbf{p}_1)$ — матрица упругости, включающая в себя гидродинамическую жесткость; $\omega\mathbf{G}$ — матрица гироскопических элементов; $\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)$ — диагональная матрица собственных чисел; $\mathbf{M}$ — матрица инерции; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}^*$ — матрицы гидроаэродинамических сил, которые по предположению малы по сравнению с $\mathbf{K}$, и их отношение имеет порядок ε. При отсутствии перекрестного взаимодействия гидроаэродинамических сил матрицы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}^*$ — диагональные.

Полагая $\varepsilon = 0$, получим из (7) порождающую систему

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{p}_1\right)\mathbf{H}_0 = \mathbf{M}\mathbf{H}_0\mathbf{\Lambda}_0^2 + \omega\mathbf{G}\mathbf{H}_0\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{0}, \tag{8}$$

где $\mathbf{\Lambda}_0 = \operatorname{diag}(\lambda_{0i}(\omega))$ — диагональная матрица собственных частот; $\mathbf{H}_0 = (h_{0i}(\omega))$ — матрица, составленная из столбцов собственных векторов порождающей матрицы.

Применяя методы теории возмущения в виде, предложенном в [7], найдем решение возмущенного уравнения (7) в виде сходящихся рядов по степеням ε

$$\begin{gathered}\mathbf{\Lambda}(\varepsilon) = \mathbf{\Lambda}_0 + \varepsilon\left(\Delta_1\mathbf{\Lambda}_0\right) + \varepsilon^2\left(\Delta_2\mathbf{\Lambda}_0\right) + \ldots, \\ \mathbf{H}(\varepsilon) = \mathbf{H}_0 + \varepsilon\mathbf{H}_0\mathbf{S} + \varepsilon^2\mathbf{H}_0\mathbf{R} + \ldots, \quad s_{ii} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) и умножая слева на $\mathbf{H}_0^T$, приравняем члены при одинаковых степенях ε. Учитывая (8) и пренебрегая членами порядка ε^2, получим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{\Lambda}_0^2\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}_0^2) - \mathbf{g}(\mathbf{\Lambda}_0\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}_0) - 2\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{M} + \mathbf{p}_1\right)\mathbf{H}_0\mathbf{\Lambda}_0\left(\Delta_1\mathbf{\Lambda}_0\right) = i\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_2\lambda_1\right)\mathbf{H}_0, \\ \boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}(\mathbf{M} + \mathbf{p}_1)\mathbf{H}_0), \quad \mathbf{g} = \operatorname{diag}(\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}\omega\mathbf{G}\mathbf{H}_0).\end{gathered} \tag{10}$$

Раскроем левую часть (10). Вследствие того, что мы положили в матрице $\mathbf{S}$ диагональные члены $s_{ii} = 0$, матрицы, стоящие в левой части, не содержат в диагональных членах поправок к собственным векторам, а лишь поправки первого порядка $\Delta_1\lambda_q$ к q-й частоте λ_q

$$\begin{bmatrix} -2\mu_1\lambda_1\Delta_1\lambda_1 & \begin{bmatrix}\mu_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \\ g_1(\lambda_1 - \lambda_2)\end{bmatrix}s_{12} & \cdots & \begin{bmatrix}\mu_1(\lambda_1^2 - \lambda_n^2) + \\ g_1(\lambda_1 - \lambda_n)\end{bmatrix}s_{1n} \\ \begin{bmatrix}\mu_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \\ g_2(\lambda_2 - \lambda_1)\end{bmatrix}s_{21} & -2\mu_2\lambda_2\Delta_1\lambda_2 & \cdots & \begin{bmatrix}\mu_2(\lambda_2^2 - \lambda_n^2) + \\ g_2(\lambda_2 - \lambda_n)\end{bmatrix}s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{bmatrix}\mu_n(\lambda_n^2 - \lambda_1^2) + \\ g_n(\lambda_n - \lambda_1)\end{bmatrix}s_{n1} & \begin{bmatrix}\mu_n(\lambda_n^2 - \lambda_2^2) + \\ g_n(\lambda_n - \lambda_2)\end{bmatrix}s_{n2} & \cdots & -2\mu_n\Delta_1\lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}i\left(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_2\lambda_1\right)\mathbf{H}_0. \tag{11}$$

Чтобы найти эти поправки достаточно приравнять диагональные элементы матриц в левой и правой частях уравнения (11)

$$\Delta_1\lambda_q = -\frac{\operatorname{diag}\left(\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}\left(-\lambda\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}^*\right)\mathbf{H}_0\right)_{qq}}{2\lambda_q\mu_q}, \quad q = 1\ldots n. \tag{12}$$

Знак мнимой части этой поправки и определит условия устойчивости для q-й частоты. Поскольку знаменатель (12) всегда положителен, то знак поправки определяется знаком числителя.

Матрицы **p***, $\mathbf{p_2}$ – диагональные и содержат только один ненулевой элемент, тогда числитель (12) принимает вид

$$num = -\mathrm{diag}\left(\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_2\lambda\right)\mathbf{H}_0\right)_{qq} = i\sum_{s=1}^{n} h_{qs}^2\left[\omega\left(1/2p_{2s} + p_{as}\right) - p_{2s}\lambda_q\right], \tag{13}$$

где n – число узлов в системе. Используя неравенство Коши–Буняковского условие устойчивости (13) представим в виде

$$\sum_{s=1}^{n} h_{qs}^2\left[\omega\left(1/2p_{2s} + p_{as}\right) - p_{2s}\lambda_q\right] \le \sum_{s=1}^{n} h_{qs}^2 \sum_{s=1}^{n}\left[\omega\left(1/2p_{2s} + p_{as}\right) - p_{2s}\lambda_q\right] < 0. \tag{14}$$

Отсюда следует, что условие устойчивости выполняется, если каждое слагаемое в (14) отрицательно, т.е. каждый узел устойчив. Тем не менее, это условие может быть выполнено и в случае, если имеются неустойчивые узлы, но правая часть уравнения (14) остается отрицательной, т.е. возникает суммарная "коллективная" устойчивость системы.

Устойчивость колебаний самоподобных систем. В самоподобной системе силу определения динамического самоподобия (1) [1], элементы матрицы $\mathbf{D_r}$ (6), описывающие r-й и $(r+1)$-й диски, а также упругие взаимодействия между ними $\mathbf{K}_{rr+1}$ связаны соотношениями (рис. 1а)

$$\mathbf{D}_r = \gamma\mathbf{D}_{r+1}, \quad \mathbf{K}_{rr-1} = \gamma\mathbf{K}_{rr+1}.$$

Тогда уравнение в конечных разностях для многодисковой системы примет вид

$$-\mathbf{K}_{rr-1}\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \end{bmatrix}_{r-1} + \mathbf{D}_r\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \end{bmatrix}_{r} - \gamma\mathbf{K}_{rr+1}\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \end{bmatrix}_{r+1} = 0.$$

Таким образом, матрица $\bar{\mathbf{D}}$ для всей системы – блочно-диагональная, где вдоль главной диагонали стоят блоки $\mathbf{D}_r$, а вне этой диагонали – блоки $\mathbf{K}_{rr-1}$, $\mathbf{K}_{rr+1.}$ В предположении, что также $p_{2s} = \gamma p_{2s-1}$, $p_{as} = \gamma p_{as-1}$, условие (14) существенно упрощается и принимает вид $\omega(1 + 2p_a/p_2) < 2\lambda_q$, что совпадает с условием устойчивости одномассовой системы.

Аналогичное условие устойчивости справедливо и для периодических систем. В роторных системах, как известно, нарушение этого критерия приводит к появлению низкочастотной вибрации (НЧВ).

Сравнение динамических свойств периодической и самоподобной систем. Самоподобные системы можно рассматривать как элементы самоподобного метаматериала, поэтому важно сравнить динамические свойства периодических и самоподобных структур в различных частотных диапазонах. Хотя условия устойчивости для них совпадают, но динамические свойства различны. В [1] показано, что для самоподобной системы имеется некоторая периодическая структура, эквивалентная ей по частотам. Это периодическая структура имеет дополнительное закрепление в узлах (рис. 2б). Что касается форм колебаний, то амплитуды самоподобной системы меняются пропорционально γ на каждом участке: $h_{qs}^* = h_{qs,}/\gamma$, где h_{qs}^* – s-я компонента q-го собственного вектора периодической системы, а h_{qs}, – соответствующая компонента собственного вектора самоподобной системы.

Таким образом, даже при выполнении условий устойчивости в случае уменьшающейся по длине структуры ($\gamma < 1$) могут возникать большие амплитуды колебаний.

Рассмотрим изгибные колебания роторной системы (рис. 2а), в которой упругие и инерционные параметры меняются в одинаковом соотношении γ от участка к участку.

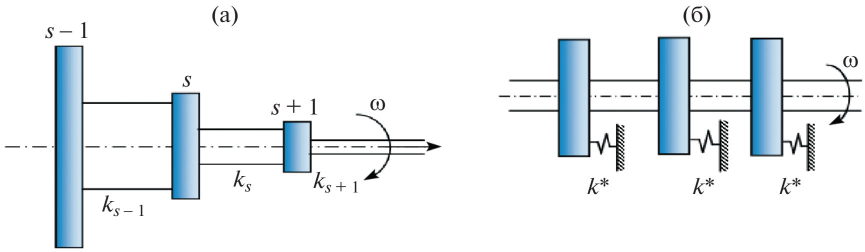


Рис. 2. Самоподобная многомассовая система – (а); частотно-эквивалентная периодическая система – (б).

Считаем, что длины участков ротора образованы балочными элементами. Матрица жесткости балочного конечного элемента [8]

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21T} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix},$$

где I – момент инерции участка ротора; l – его длина. Соотношения (15) описывают поступательные x и угловые перемещения θ концов конечного элемента. Они совпадают со статической матрицей жесткости [9]. В низкочастотном диапазоне возможно игнорировать сдвиговые угловые колебания, т.к. их парциальные частоты существенно выше частот поступательных перемещений. Действительно, из (15) следует, что отношение квадратов парциальных частот $\nu_{1s}^2 = \frac{12EI_s}{l_s^3 m_s}$ и $\nu_{2s}^2 = \frac{4EI_s}{l_s J_s}$, соответствующих поступательным y и угловым θ перемещениям равно $\frac{\nu_{2s}^2}{\nu_{1s}^2} = \frac{3r_s^2}{2l_s^2}$. Тогда при $r_s/l_s = 0.2$ имеем $\nu_{1s}^2/\nu_{2s}^2 = 0.04$, и, следовательно, погрешность при вычислениях для низших собственных частот $\omega \ll \nu_{2s}^2$ не превосходит 4%. Поэтому жесткость s-го участка балки можно принять равной $k_s = 12EI_s | l_s^3$.

При построении расчетной модели МКЭ считаем, что балочные элементы невесомые, а его масса разделена поровну концами: $m_s = \frac{1}{2}\rho l\left(F_{s-1} + F_s\right) + \frac{1}{2}\rho l\left(F_{j-1} + F_j\right)$, $l_s = \text{const}$ ($s = 1, \ldots, n$). Такая дискретизация системы справедлива, если размеры участка не превышают 1/4 длины волны [9, 10].

Как было показано в [1], самоподобная система частотно-эквивалентна периодической системе с такими же парциальными частотами, но с дополнительным закреплением $k^* = (1 - \sqrt{\gamma})^2/\gamma$ (рис. 2б). Такая структура, как известно [11, 12], является филь-

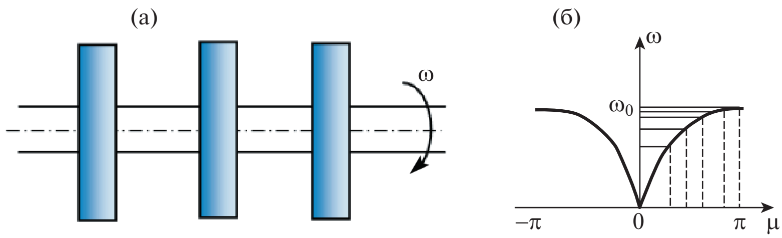


Рис. 3. Периодическая роторная система первого приближения с близкими частотами – (а); дисперсионная кривая, графическое определение собственных частот (пунктир) – (б).

тром низких частот, а в самоподобной системе в этой полосе отсутствуют собственные частоты и, следовательно, этот диапазон частот не виброактивен.

Следовательно, самоподобная система (по теореме Рэлея) является более жесткой, и ее собственные частоты выше, чем в периодической. Однако, в технических системах коэффициент подобия γ близок к единице, обычно $\gamma \geq 0.8$. Поэтому жесткость дополнительного закрепления в эквивалентной периодической структуре (рис. 2б), равная $\frac{(1-\sqrt{\gamma})^2}{\gamma}k$ не превышает 5% k. Следовательно, частоты фрактальной структуры с этой степенью точности совпадают с частотами периодической структуры без дополнительного закрепления (рис. 3а). В дальнейшем будем называть эту систему периодической системой первого приближения. В качестве такой системы сравнения для самоподобной системы можно рассматривать периодическую систему, в которой как инерционные, так и упругие элементов равны средней величине от суммы соответствующих элементов самоподобной системы

$$nm_{\text{пер}} = \sum_{s=0}^{n-1} m_1\gamma^s, \quad nk_{\text{пер}} = \sum_{s=0}^{n-1} k_1\gamma^s. \tag{16}$$

Поэтому для определения частот фрактальной системы можно использовать дисперсионное уравнение периодической роторной системы первого приближения

$$-m_1\omega^2 + k_1\cos\mu = 0,$$

где μ – длина волны (рис. 3б). Это существенно облегчает расчетный анализ многомассовых систем с такой структурой. Важно также, что дисперсионные уравнения справедливы при любых граничных условиях.

Из дисперсионного уравнения можно найти также и границы собственных частот. Так, первая собственная частота может быть при $0 < \mu < \pi/2$, что соответствует длине волны, равной $L/2$, где L – длина валопровода, вторая собственная частота – при $\pi/2 < \mu < \pi/3$. Соответствующие значения частоты ω легко также получить графически.

Пример расчета 5-массовой роторной системы. Полученные выше теоретические выводы о совпадении частот самоподобной и периодической систем подтверждают и расчетные данные. Рассмотрим в качестве примера изгибные колебания 5-массового ротора ступенчатого сечения, имеющего динамически-фрактальную структуру, при воздействии периодической нагрузки $P\sin\omega t$ (рис. 4). Параметры ротора следующие: $r_1 = 5 \times 10^{-2}$ м, $l_1 = 2 \times 10^{-1}$ м, $m_1 = 15$ кг, коэффициент масштаба (1) $\gamma = 0.85$. Таким образом, ротор имеет самоподобную структуру с уменьшающимися по длине параметрами.

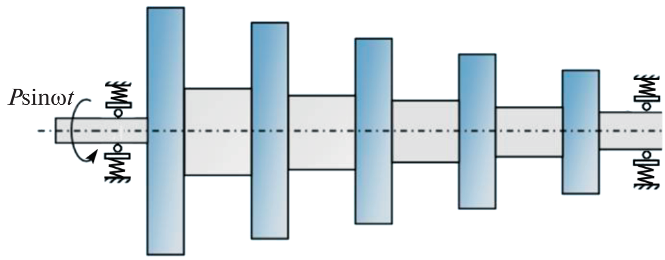


Рис. 4. 5-массовый ротор ступенчатого сечения, имеющий динамически-фрактальную структуру.

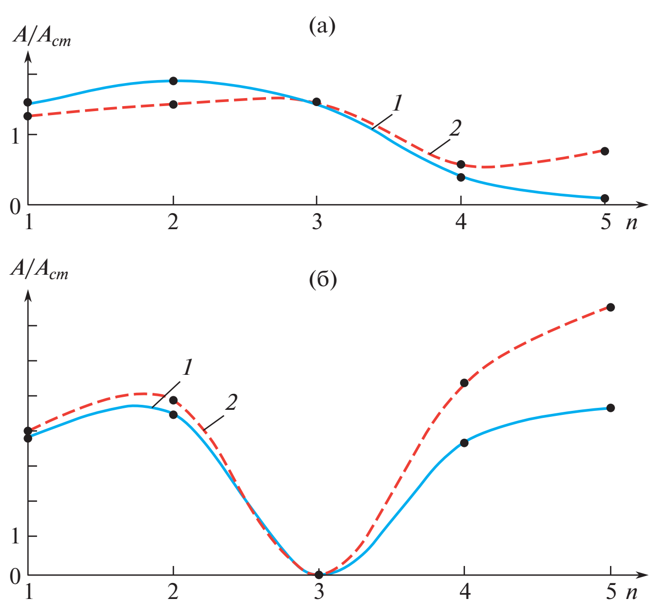


Рис. 5. Вынужденные колебания периодической – *1* и самоподобной – *2* систем: (а) – дорезонансный режим ν = 150 Гц; (б) – колебания вблизи 2-й критической скорости ν = 650 Гц.

Частотно-эквивалентный ротор периодической структуры первого приближения определяется соотношениями (16).

Собственные частоты фрактальной системы (Гц): 260, 515, 720, 890, 980. Проведенные расчеты подтвердили, что собственные частоты фрактальной и эквивалентной периодической структуры первого приближения совпадают с большой степенью точности.

Однако амплитуды вынужденных колебаний этих систем могут существенно отличаться, поскольку амплитуды самоподобной системы меняются пропорционально γ на каждом участке. Результаты расчета вынужденных колебаний периодической системы и самоподобной системы (пунктир) представлены на рис. 5а, б. На этих рисунках по вертикали отложено отношение амплитуд $A/A_{\text{ст}}$, где $A_{\text{ст}}$ – статическое смещение, а по горизонтали – номера масс $n = 1, \ldots, 5$.

Из анализа рис. 5 следует, что амплитуды колебаний в низкочастотном дорезонансном режиме для периодической и самоподобной систем достаточно близки (рис. 5а). Однако амплитуды колебаний вблизи резонанса для самоподобной системы с уменьшающимися по длине параметрами значительно выше, чем в периодической. Это связано с тем, что формы колебаний самоподобной структуры, как показано в [1], возрастают на тонком конце (рис. 5б). Следовательно, при работе вблизи резонанса более безопасной становится периодическая структура. Однако, для ротора с увеличивающимися по длине параметрами амплитуды колебаний уменьшаются на толстом конце.

Выводы. Найдены аналитические критерии устойчивости при воздействии циркуляционных сил для многомассовых роторных систем. Такие системы могут оказаться устойчивыми, даже при наличии отдельных неустойчивых узлов.

Многомассовые системы с динамически-самоподобной структурой имеют волновой характер колебаний, получено их дисперсионное уравнение. Сравнительный анализ динамики многомассовых периодических и самоподобных роторных систем в различных частотных диапазонах показал, что в низкочастотном диапазоне их динамика практически одинакова, но вблизи резонансных частот уровни колебаний самоподобных систем существенно отличаются в зависимости от коэффициента масштаба.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Поддержано грантом РНФ 21-19-00813.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Банах Л.Я.* Распространение упругих волн в динамически-самоподобных структурах. Динамический фрактал // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 3. С. 265.
2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
3. *Peitgen H.-O., Richter P.H.* The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1986. 199 p.
4. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебаний вращающихся валов. Москва: Изд. АН СССР, 1959. 247 с.
5. *Марцинковский В.А.* Бесконтактные уплотнения роторных машин. Москва: Машиностроение, 1982. 200 с.
6. *Иванов К.П.* Колебания рабочих колес турбомашин. Москва: Машиностроение, 1984. 224 с.
7. *Банах Л.Я.* Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. Москва: РХД. 1916. 292 с. ISBN: 978-5-4344-0374-0
8. *Постнов В.А., Хархурим И.А.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 341 с.
9. *Banakh L.Ya., Kempner M.L.* Vibrations of mechanical systems with regular structure. New York, London: Spinger, 2010. 262 p.
10. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. Москва: Высшая школа,1980. 408 с.
11. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Москва: Наука, 1984. 432 с.
12. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. Москва: Физматлит, 2008. 496 с.

EDN: YHJRWG
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 3, с. 18–28

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.214;539.374;621.9.011

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ: ТЕОРИЯ, АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. А. Кадымов[1,*], Е. Н. Сосенушкин[2], Е. А. Яновская[2]

[1]*Российский технологический университет – МИРЭА, Москва, Россия*
[2]*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия*
**e-mail: vkadymov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.
После доработки 04.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Высокий уровень механических характеристик изготавливаемых машиностроительных деталей, связанный с увеличением их эксплуатационного ресурса, закладывается на этапе формообразования обработкой металлов давлением. В статье рассматриваются краевые задачи современной теории пластичности применительно к тонкому слою, постановка которых основана на составлении статически определимой системы, включающей дифференциальные уравнения квазистатического равновесия в частных производных, условие полной пластичности и уравнения Коши для деформаций. Допущения и ограничения базируются на сформулированных А.А. Ильюшиным следствиях из известного решения Л. Прандтля. Задача дополнена несимметричными граничными условиями на торцевых поверхностях. С помощью варьирования актуальной постановкой задачи пластического течения тонкого слоя найдены решения, включая контактное давление и силовые параметры, различных обобщений задачи Л. Прандтля о свободном растекании полосы, занимающей линейную область и осаживаемой плоскими штампами, совершающими встречное движение.

Ключевые слова: вязкопластическое течение, тонкий слой, свободное растекание полосы, давление на контакте

DOI: 10.31857/S0235711922030063

Обзор состояния и актуальность проблемы. В технологии обработки давлением основой многих базовых операций являются задачи пластического течения в тонком слое материала, деформируемого валками (продольная прокатка, вальцовка) или штампами (объемная и листовая штамповка), описываемые пространственными математическими моделями с разнообразием параметров, определяющих реологию материала. На поверхностях контакта материала обработки с инструментом создаются давления, на порядок превышающие сдвиговые характеристики материала так, что в начальном приближении для описания свойств материала пластического слоя можно использовать модель гидродинамической жидкости [1–3]. Практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание, при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения, а удельные силы трения на них максимальны [4] и равны пределу текучести материала на сдвиг [5, 6]. Следует отметить другую особенность протекания указанных процессов, определяющую требования к точности конечной детали. Понятно, что большие контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей инструмента, соизмеримые с толщиной текущего слоя [7, 8]. А значит, пренебрежение упругими деформациями поверхностей инструмента становится неоправданным. В высокоскоростных процессах обработки давлением существенную роль играют силы вязкости и инерции [9], значительно затрудняющие физическое моделирование, где важную роль играют процессы дополнительного разогрева деформируемого металла за счет теплового эффекта деформации, с одной стороны, и охлаждения тонкого слоя, связанного с интенсивным теплообменом со штамповым инструментом, с другой стороны, не исключена и диссипация механической энергии. В некоторых случаях не оправдано пренебрежение влияния давления на реологию материала [10], грубым оказывается предположение об объемной несжимаемости [11]. Все это усугубляется тем, что в рассматриваемых процессах нет определенности в граничных условиях и сами границы заранее неизвестны.

На основе анализа решения плоской задачи Л. Прандтля об осадке полосы А.А. Ильюшин [1] сформулировал базовые гипотезы кинематического характера и относительно сил трения на контакте, с помощью которых разработал весьма эффективную, двумерную модель течения в тонком пластическом слое. А.А. Ильюшин предложил постановку краевой задачи течения в тонком пластическом слое общего вида (модель “вязкой жидкости”), и упрощенную постановку (модель “идеальной жидкости”), описываемую нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, в которой пренебрегают касательными напряжениями. В рамках упрощенной постановки исследована кинематика процессов течения пластического слоя и выведено эволюционное уравнение, определяющее свободную границу растекающейся области. В работе [14] получены другие формы представления эволюционного уравнения растекания, а также установлено, что полученное уравнение сводится к частному случаю нелинейного уравнения теплопроводности.

Однако не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны в рамках упрощенной модели “идеальной жидкости”, что подтверждается экспериментальными исследованиями [12], поэтому для корректного описания задач, учитывающих наличие касательных напряжений, анизотропию в процессах течения [13], упругое деформирование инструмента [8] и другие факторы, необходимо использовать более общую модель “вязкой жидкости”. В рамках математической модели “вязкой жидкости” сформулирована краевая задача течения пластического слоя в области с подвижной границей, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных относительно трех неизвестных функций — контактного давления и двух компонент скорости течения [1, 2].

Краевая задача течения в тонком слое: математические постановки и варианты решения. Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости [1, 2, 6, 12—14]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3}\frac{dt}{d\lambda}\Delta u - \frac{2\tau_s}{h}\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3}\frac{dt}{d\lambda}\Delta u - \frac{2\tau_s}{h}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \tag{3}$$

где p, u, v — контактное давление и компоненты скорости течения; $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ — напряжения течения пластического материала в рассматриваемой области; $h = h(t)$ — заданный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln\frac{h_0}{h(t)}$ — степень деформации; t_0 — начальный момент времени.

На заранее неизвестной свободной границе $\Gamma_\sigma : F(x, y, t) = 0$ задаются следующие краевые условия:

два скалярных динамических (4)

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma}\vec{n} = \left(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y; \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x\right) = \vec{0}, \quad (4)$$

и одно кинематическое (5)

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial F/\partial t}{|\mathrm{grad}\, F|}, \quad (5)$$

из которого определяется сама граница Γ_σ. На поверхности контакта с инструментом $\Gamma_c : G(x, y, t) = 0$, как правило, известной, задаются следующие два условия: одно динамическое относительно касательного напряжения (6)

$$\left|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}\right| = \left|\sigma_{xx}n_x n_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_x n_y\right| = \mu\tau_s, \quad (0 \le \mu \le 1), \quad (6)$$

и одно кинематическое в виде условия непроницаемости (7)

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial G/\partial t}{|\mathrm{grad}\, G|}, \quad (7)$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы касательной и нормали к границе Γ_c.

В частности, на неподвижной границе нормальная скорость равна нулю.

Пусть $\sigma_s,\ p_0,\ L_0,\ h_0,\ \dfrac{dh(t_0)}{dt}$ – характерные значения предела текучести материала, контактного давления, линейного размера и толщины слоя, а также скорости сближения деформирующих инструментов. Относительную толщину пластического слоя $\varepsilon = \dfrac{h_0}{L_0} \ll 1$ примем за малый параметр. При оценке порядка слагаемых в уравнении несжимаемости (3) получаем, что $t_0 = \dfrac{L_0}{v_0}$; $v_0 = -\dfrac{dh(t_0)}{dt}\dfrac{1}{\varepsilon}$, а из квазистатических уравнений равновесия (1) и (2), что $p_0 = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon}$. Поэтому приходим к очевидным выводам, что характерная величина скорости течения вдоль слоя намного больше скорости сближения инструментов и что характерная величина контактного давления намного превышает предел текучести материала слоя. Полагая, что толщина слоя h, в отличие от других линейных размеров (координат), при делении на $h(t_0)$ становится безразмерной, перепишем в безразмерном виде систему уравнений (8)–(10)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda}\overline{\Delta u} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}}\frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda}\overline{\Delta v} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}}\frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (10)$$

где безразмерные величины отмечены чертой сверху (заметим, что в уравнениях равновесия при слагаемых со старшими производными-лаплассианами появился малый параметр ε).

Обезразмерим условия на свободной границе $\Gamma_\sigma : F(x, y, t) = 0$

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)\varepsilon\right]n_x + \left[\frac{1}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)\varepsilon\right]n_y = 0; \tag{11}$$

$$\left[\frac{1}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)\varepsilon\right]n_x + \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)\varepsilon\right]n_y = 0; \tag{12}$$

$$\bar{v}_n = -\frac{\partial\bar{F}/\partial\bar{t}}{\left|\operatorname{grad}\bar{F}\right|}, \tag{13}$$

и на границе контакта с инструментом Γ_c

$$\begin{gathered}\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)\varepsilon\right]n_x n_y + \left[\frac{1}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)\varepsilon\right]\left(n_y^2 - n_x^2\right) - \\ - \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)\varepsilon\right]n_x n_y = \pm\frac{\mu}{\sqrt{3}}\varepsilon;\end{gathered} \tag{14}$$

$$\overline{v_n} = -\frac{\partial\bar{G}/\partial\bar{t}}{\left|\operatorname{grad}\bar{G}\right|}. \tag{15}$$

Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных (8)—(10) вместе с граничными условиями (11)—(15) составляют общую краевую задачу растекания слоя в модели “вязкой жидкости”.

В главном приближении $(\varepsilon = 0)$ исходные уравнения упрощаются с понижением порядка системы (15)

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}}\frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}}\frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0.$$

Понятно, что количество граничных условий для упрощенной задачи в рамках “идеальной жидкости” уменьшается.

Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке. Введем функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, такую чтобы выполнялось условие несжимаемости (3)

$$u = \frac{d\lambda}{dt}\left(\psi'_y + \frac{x}{2}\right); \quad v = -\frac{d\lambda}{dt}\left(\psi'_x - \frac{y}{2}\right). \tag{16}$$

Компоненты скоростей (16) подставим в квазистатические уравнения равновесия и в результате получим систему из двух дифференциальных уравнений (17) и (18) относительно p и ψ

$$\frac{p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right)\Delta\psi'_y}{p'_y + \left(\frac{\sigma_s}{3}\right)\Delta\psi'_x} = -\frac{2\tau_s}{h}\frac{\psi'_y + \frac{x}{2}}{\psi'_x - \frac{y}{2}}; \tag{17}$$

$$\left(p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right)\Delta\psi'_y\right)^2 + \left(p'_y - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right)\Delta\psi'_x\right)^2 = \frac{4\sigma_s^2}{3h^2}. \tag{18}$$

В качестве примера рассмотрим в натуральных величинах задачу течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (рис. 1).

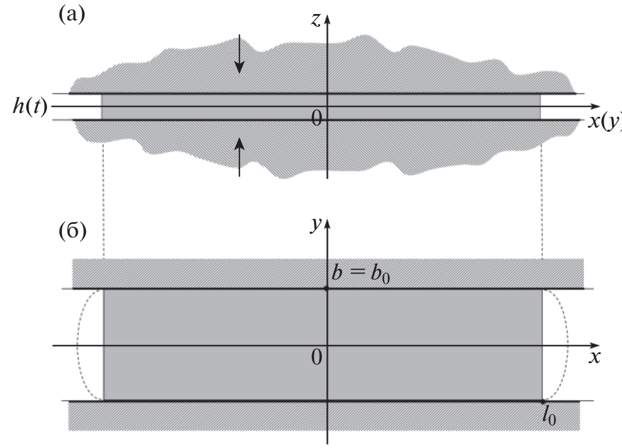


Рис. 1. Схема течения осаживаемого пластического слоя с ограничением по боковым поверхностям: (а) – в поперечном сечении (плоскость xz); (б) – в сечении (плоскость xy).

Используя симметрию пластической области, ограничимся рассмотрением элемента слоя, расположенного в первом квадранте выбранной системы координат. У неподвижной стенки инструмента при $(G(x, y) : y - b_0 = 0)$

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \tag{20}$$

Краевые условия

$$y = 0\colon v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0; \tag{21}$$

$$x = 0\colon u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0. \tag{22}$$

На неизвестной свободной границе $F(x, y, t) = 0$, в начальный момент имеющей параметры $x = l_0$ $(n_x = 1, n_y = 0)$, краевые условия определяются как

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0. \tag{23}$$

Во избежание влияния краевых эффектов найдем аналитическое решение задачи вдали от оси $x = 0$ и свободной границы $x = 0.5l_0$, поскольку протяженность области течения в направлении x позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения $v(x, y) = 0$. После интегрирования уравнения несжимаемости (3) получаем

$$u(x, y) = \lambda'[x + g(y)],$$

где функцию $g(y)$ можно определить из других уравнений системы: (2) дает $p = p(x)$ и тогда из (1) следует (24)

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3} g''(y) - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\bar{h}}, \tag{24}$$

где в левой части стоит функция аргумента x, а в правой – функция y и параметра $h(t)$, другими словами, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получаем систему с произвольной постоянной (функцией времени) k

$$g''(y) = k = \text{const}; \quad p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}. \tag{25}$$

Интегрирование первого из уравнений (25) с учетом граничных условий (19), (20) дает

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0}y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}; \tag{26}$$

$$u(x, y) = \lambda'\left[x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0}y^2 + c\right], \tag{27}$$

где c – постоянная интегрирования.

Заметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (27) соответствует скорости течения в модели "идеальной жидкости", в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе, равно как и на других границах, отсутствует. Положим, что сечение $x = x_f$ представляет собой условную свободную границу ($x_f h = x_0 h_0$). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала

$$-x_f(t)\frac{dh}{dt}b_0 = \int_0^{b_0} hu(x_f, y)\,dy,$$

определяем входящую в решение произвольную постоянную $c = \frac{\sqrt{3}}{6}\mu b_0$, что дает возможность получить окончательную формулу для скорости течения

$$u(x, y) = \lambda'\left[x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0}(\mu b_0^2 - 3y^2)\right]. \tag{28}$$

Сопоставлением найденной скорости (28) и граничного условия (22) при значении $x = 0$ убеждаемся, что оно выполняется в интегральном виде

$$\int_0^{b_0} u(0, y)\,dy = \frac{\lambda'\sqrt{3}}{6b_0}\int_0^{b_0}(b_0^2 - 3y^2)dy = 0.$$

Интегрирование второго уравнения системы (25) дает (29)

$$p(x) = p_{0-}\frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0}\right), \tag{29}$$

с постоянной интегрирования p_0, не зависящей от координаты y. Полагая, что на свободной границе нормальное напряжение равно нулю $\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0$, находим $p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left(\frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3}\right)\sigma_s$. При достаточно большом x_f, третьим слагаемым в правой части можно пренебречь, тогда $p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0}\right)$, и искомое давление будет иметь более простой вид (30)

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0}\right)(x_f - x). \tag{30}$$

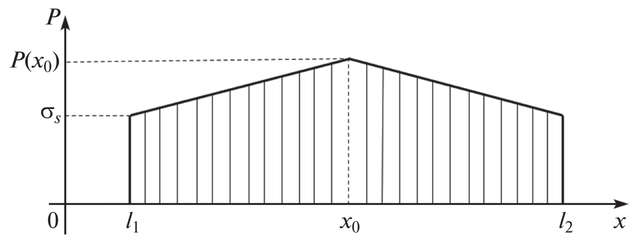


Рис. 2. Эпюра распределения контактного давления в полосе.

В завершение выпишем функцию тока

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0}\left(\mu b_0^2 - 3y^2\right) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0}\left(\mu b_0^2 y - 3y^3\right) + c_1.$$

Таким образом, в рамках общей модели "вязкой жидкости" получено приближенное аналитическое решение. На границе $x = 0$, а также на свободной границе $x = x_f(t)$ оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ($x = \text{const}$) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Этот факт подтверждается результатами проведенных экспериментов [13]. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели "идеальной жидкости", в которой не учитываются касательные напряжения.

Различные обобщения задачи Л. Прандтля и их решения. Тонкая полоса, занимающая область $S(x, y)\{(x, y)|l_1(t) < x < l_2(t);\ 0 \le y \le h(t)\}$ свободно растекается под действием деформирующего инструмента, при этом дифференциальные уравнения квазистатического равновесия имеют вид [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h}\frac{u}{|u|}; \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} - \frac{d\lambda}{d\overline{t}} = 0, \tag{31}$$

где $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины осаживаемой пластической полосы; $\lambda(t) = \ln\frac{h_0}{h(t)} \ge 0$ – степень деформации по А.А. Ильюшину (аналог меры накопленной в частице деформации); $u = u(x, t)$; $p = p(x, t)$ – соответственно скорость течения вдоль слоя и контактное давление в полосе.

Краевые условия на свободных границах

$$x = l_1; \quad p = \sigma_s; \quad x = l_2; \quad p = \sigma_s. \tag{32}$$

Существует неизвестная линия ветвления течения $x = x_0 \in (l_1, l_2)$, на которой $u(x_0, t) = 0$. Интегрируя первое уравнение (31) с учетом краевых условий (32), определяем контактное давление в полосе (рис. 2)

$$p(x,t) = \begin{cases} \sigma_s + \dfrac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), & x \in (x_0, l_2), \\ \sigma_s + \dfrac{2\tau_s}{h}(x - l_1), & x \in (l_1, x_0). \end{cases} \tag{33}$$

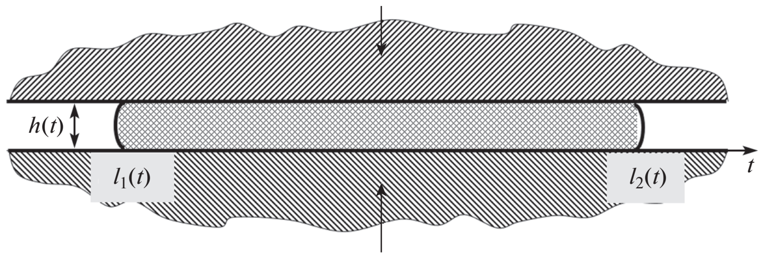


Рис. 3. Свободное растекание материала полосы с подвижными концами.

Интегрируя уравнение несжимаемости из (31) с учетом условия на линии ветвления, находим

$$u(x,t) = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}(x - x_0) = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\left(x - \frac{l_1 + l_2}{2}\right), \tag{34}$$

при этом линия ветвления течения $x = x_0(t)$ определяется из условия непрерывности контактного давления. Удельная сила для осуществления пластической осадки полосы равна площади эпюры (рис. 2)

$$\begin{gathered} P(t) = \int_{l_1}^{l_2} p(x,t)\,dx = \int_{l_1}^{x_0}\left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1)\right]dx + \int_{x_0}^{l_2}\left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x)\right]dx = \\ = \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}\left(\frac{x^2}{2} - l_1 x\right)\right]\Bigg|_{l_1}^{x_0} + \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}\left(l_2 x - \frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_{x_0}^{l_2} = \sigma_s(l_2 - l_1) + \frac{2\tau_s}{h}\frac{(l_2 - l_1)^2}{4}. \end{gathered} \tag{35}$$

Остановимся отдельно на различных обобщениях задачи о свободном растекании полосы.

1. Материал полосы свободно растекается в обе стороны так, что область контакта инструмента с пластической полосой, расширяясь в обе стороны, образует отрезок $[l_1(t), l_2(t)]$ с подвижными концами (рис. 3).

В этом случае положения свободно перемещающихся концов полосы находятся из решения задачи Коши, описанной системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dl_2}{dt} = u(l_2,t) = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right), \\ \frac{dl_1}{dt} = u(l_1,t) = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right) = \frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right), \\ t = t_0\colon l_1(t) = l_{10}, \quad l_2(t) = l_{20}. \end{gathered} \tag{36}$$

Ниже выписано решение задачи (36)

$$l_2(t) = \frac{1}{2}\left[(l_{20} + l_{10}) + \frac{h_0}{h(t)}(l_{20} - l_{10})\right]; \quad l_1(t) = \frac{1}{2}\left[(l_{20} + l_{10}) - \frac{h_0}{h(t)}(l_{20} - l_{10})\right]. \tag{37}$$

Осаживаемая пластическая полоса, занимает область контакта с неподвижным левым концом так, что она может свободно перемещаться в противоположную от зафиксированного конца (правую) сторону, и представляется отрезком $[l_{10}, l_2(t)]$ с одним подвижным концом (рис. 4). При этом допускаем, что пластический материал течет по всей области контакта.

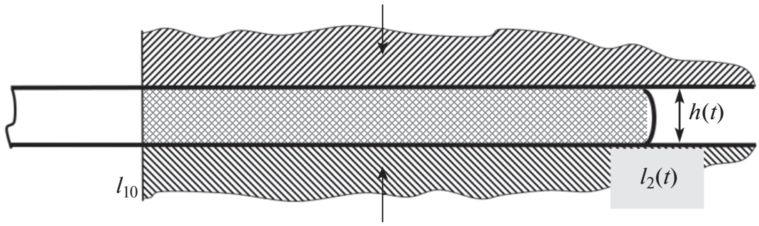


Рис. 4. Пластическая осадка полосы с подвижным правым концом.

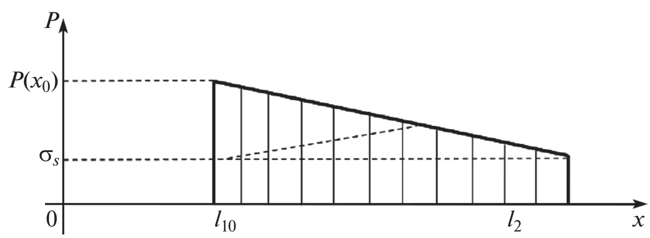


Рис. 5. Распределение контактного давления в задаче о растекании пластической полосы с защемленным левым концом.

В этом случае выписанное выше решение остается в силе, а изменяется лишь дифференциальное уравнение для определения $l_2(t)$

$$l_1(t) = l_{10}; \quad \frac{dl_2}{dt} = u(l_2, t) - \frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\left(\frac{l_2 - l_{10}}{2}\right), \qquad (38)$$
$$t = t_0; \quad l_2(t) = l_{20},$$

решение которого, имеет вид

$$l_1(t) = l_{10} + (l_{20} - l_{10})\sqrt{\frac{h_0}{h(t)}}. \qquad (39)$$

2. Левый неподвижный конец области контакта защемлен так, что пластическое течение в области $[l_{10}, l_2(t)]$ происходит в одном направлении, причем $x_0 \equiv l_{10}$. В этом случае решение краевой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h}; \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} - \frac{d\lambda}{d\overline{t}} = 0,$$

при граничных условиях $x = l_{10}$; $u(l_{10}, t) = 0$; $x = l_2(t)$; $p = \sigma$ имеет вид

$$p(x,t) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x); \quad u(x,t) = \frac{1}{h}\frac{dh}{dt}(x - l_{10}); \quad l_2(t) = l_{10} + \frac{h_0}{h}(l_{20} - l_{10}). \qquad (40)$$

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае, безусловно, зависит от условия на левом конце (рис. 5), и в данном случае принимает вид

$$p(t) \equiv p_3(t) = \int_{l_{10}}^{l_2}\left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x)\right]dx = \sigma_s(l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s}{h}\frac{(l_2 - l_{10})^2}{2}. \qquad (41)$$

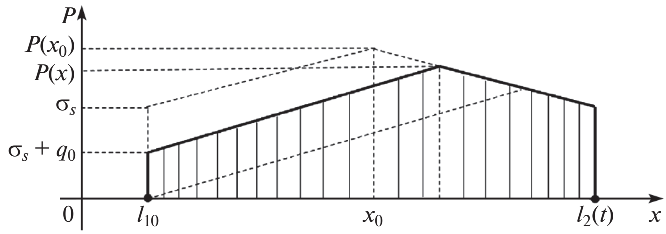


Рис. 6. Эпюра контактного давления в пластической полосе, на левом конце которой приложено растягивающее напряжение $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$.

3. К левому неподвижному концу области контакта приложено растягивающее напряжение: $x = l_{10}$; $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$, такое, что $-\sigma_s < q_0 < 0$. Согласно условию полной пластичности [1], для контактного давления на левом конце $p = q_0 + \sigma_s$ справедливо условие $0 < p < \sigma_s$.

Выделим отдельно предельный случай $q_0 = -\sigma_s$, который моделирует процесс пластического растяжения тонкой полосы с одновременной пластической осадкой "зажатых" концевых ее частей. Решение краевой задачи в этом случае определяется системой (42)

$$p(x,t) = \begin{cases} \sigma_s + \dfrac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), & x \in (x_0, l_2); \\ \sigma_s + q_0 + \dfrac{2\tau_s}{h}(x - l_{10}), & x \in (l_{10}, x_0); \end{cases} \qquad u(x,t) = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}(x - x_0), \tag{42}$$

где $x_0 = \dfrac{l_{10} + l_2}{2} - \dfrac{q_0}{4\tau_s} h \geq \dfrac{l_{10} + l_2}{2}$.

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае равна площади заштрихованной эпюры, изображенной на рис. 6.

При этом давление определяется уравнением (43)

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{l_{10}}^{l_2} p(x,t)\,dt = \left[(\sigma_s + q_0)x + \frac{2\tau_s}{h}\left(\frac{x^2}{2} - l_{10}x\right)\right]\Bigg|_{l_{10}}^{x_0} + \left[\sigma_s x + \frac{2\tau_s}{h}\left(l_2 x - \frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_{x_0}^{l_2} = \\ &= \sigma_s(l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s}{h}\frac{(l_2 - l_{10})^2}{4} + q_0\left(\frac{l_2 + l_{10}}{2} - \frac{q_0}{2\tau_s}h\right) \leq P_1(t), \end{aligned} \tag{43}$$

где $p_1(t) = \sigma_s(l_2 - l_{10}) + \dfrac{2\tau_s}{h}\dfrac{(l_2 - l_{10})^2}{4}$ — удельная сила для осуществления пластической осадки полосы со свободными концами.

Заключение и выводы. В рамках общей математической модели "вязкой жидкости" получено приближенное аналитическое решение. Приведенные в статье различные обобщения классической задачи Л. Прандтля представляют интерес не только для анализа сжатия тонкого слоя, но и при исследовании задач о правке плоских заготовок с наложением одноосного растяжения за пределом упругости, выравнивание которых другими способами не дает удовлетворительных результатов, а также при решении плоских задач гибки с растяжением, крупногабаритных облицовочных деталей.

Отметим, что решения универсальны, подтверждены результатами экспериментов, и их можно распространить на пространственные контактные задачи течения в тонком пластическом слое между сближающимися поверхностями инструмента.

Дальнейшие исследования будут направлены на учет упругой деформации инструмента; объемной сжимаемости обрабатываемого материала; использование многослойных материалов с разными пластическими характеристиками слоев; использование штамповых инструментов с рельефными поверхностями контакта; моделирование сложного нагружения и эффекта сверхпластичности, используемых в технологических процессах.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
2. *Белов Н.А., Кадымов В.А.* О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 46.
3. *Георгиевский Д.В.* Одна оценка эволюции возмущений в нестационарных плоскопараллельных течениях Сен-Венана // Прикладная математика и математическая физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 147.
4. *Мамаев В.Б., Первов М.Л.* Учет сил контактного трения при объемной штамповке // Вестник машиностроения. 2016. № 3. С. 74.
5. *Георгиевский Д.В.* Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 47.
6. *Кийко И.А.* Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
7. *Мартьянов А.А.* Осадка образцов в поле сверхвысокого давления. Обзор // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. № 1. С. 44.
8. *Воронцов А.Л.* Учет упругих деформаций инструмента для повышения точности теории обработки давлением // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2014. № 9. С. 3.
9. *Воробьев В.М.* Построение теоретических решеток каналов многоразъемных штампов и расчет действующих в них сил // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2011. № 1. С. 25.
10. *Грешнов В.М.* Физико-математическая теория больших необратимых деформаций. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
11. *Кийко И.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы на случай сжимаемого материала // Вестник Московского университета. 2002. № 4. С. 47.
12. *Белов Н.А., Кадымов В.А., Сосенушкин Е.Н.* Эксперимент и теория растекания тонкого пластического слоя в штампе прямоугольного сечения / Препринт № 1100. Институт Проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2015. 23 с.
13. *Кийко И.А.* Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 344.
14. *Kadymov V.A., Sosenushkin E.N., Yanovskaya E.A.* Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane // Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 2016. V. 71. № 3. P. 69.

EDN: FLJVKF
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 3, с. 29–44

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

РАСЧЕТ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ ЭЛЛИПСОИДА НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ДИСКРЕТИЗАЦИИ С ИНВАРИАНТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРОЙ

Ю. В. Клочков[1,*], Н. А. Гуреева[2], О. В. Вахнина[1], Т. А. Соболевская[1], М. Ю. Клочков[3]

[1]*Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия*
[2]*Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия*
[3]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**e-mail: klotchkov@bk.ru*

Поступила в редакцию 24.01.2021 г.
После доработки 05.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Разработан алгоритм получения матрицы жесткости элемента дискретизации в форме треугольного фрагмента срединной поверхности эллипсоидальной оболочки с узловыми неизвестными в его вершинах в виде компонент векторов перемещений и их частных производных первого порядка по криволинейным координатам. Для улучшения условий непрерывности на границах смежных элементов в значениях производных перемещений, перпендикулярных к срединной поверхности, вдоль касательных нормалей к граничным кривым смежных дискретных элементов использованы множители Лагранжа в серединах сторон. На примере расчета тонкой упругой оболочки со срединной поверхностью в форме эллипсоида, нагруженного внутренним давлением, показана эффективность разработанного конечного элемента.

Ключевые слова: эллипсоидальная оболочка, радиус-вектор, параметризация эллипсоида, треугольный конечный элемент, базисные векторы, скалярная интерполяция, векторная интерполяция, множители Лагранжа, условный функционал, матрица жесткости

DOI: 10.31857/S0235711922030075

В настоящее время область применения оболочечных конструкций все более расширяется благодаря их легкости и экономичности с точки зрения расхода материала. Причем геометрия такого рода конструкций все более усложняется [1], не ограничиваясь только цилиндрической формой. Несмотря на достаточно подробно разработанную теорию деформирования твердых тел [2–8] аналитическое решение систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс деформирования оболочечных конструкций возможно лишь для наиболее простых случаев, в основном, для оболочек цилиндрической формы. Поэтому, в последнее время наибольшую популярность приобрели численные методы расчета оболочечных конструкций [9–16], среди которых на первый план вышел метод конечных элементов (МКЭ). Несмотря на значительное количество публикаций [17–29] актуальной задачей остается совершенствование конечно-элементных алгоритмов расчета оболочек сложной геометрии с использованием альтернативной общепринятой формой интерполяционной процедуры, основанной на интерполяции компонент вектора перемещения как составляющих векторных полей [30]. В настоящей статье излагается алгоритм расчета тонкой упругой оболочки в форме трехосного эллипсоида на основе конечного элемента треугольной формы, для улучшения совместности которого на границах смежных элементов применяются дополнительные узловые неизвестные в виде множителей Лагранжа. На основе векторной формы интерполяционной процедуры получены интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения и их производных в глобальной криволинейной системе координат.

Геометрия эллипсоидальной оболочки. Срединная поверхность эллипсоидальной оболочки, например, эллипсоида в декартовой системе координат задается радиус-вектором

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

где a, b, c — полуоси трехосного эллипсоида.

Дифференцированием (1) по x и y можно получить тангенциальные векторы локального базиса точки срединной поверхности эллипсоида

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1^0 &= \mathbf{R}^0_{,x} = \mathbf{i} - \frac{cx}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}\mathbf{k};\\ \mathbf{a}_2^0 &= \mathbf{R}^0_{,y} = \mathbf{j} - \frac{cy}{b^2\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{2}$$

Использование формул (2) не вполне удобно вследствие необходимости соблюдения условия

$$1-(x/a)^2-(y/b)^2 > 0. \tag{3}$$

Поэтому наиболее приемлемым является использование параметрической формулы [31]

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + b_x \sin t\mathbf{j} + c_x \cos t\mathbf{k}. \tag{4}$$

Входящие в (4) b_x и c_x представляют собой полуоси эллипса, являющегося сечением эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox на расстоянии x от начала координат

$$b_x = b\sqrt{1-(x/a)^2}; \quad c_x = c\sqrt{1-(x/a)^2}. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) по x и t можно получить векторы локального базиса, лежащие в соприкасающейся плоскости к срединной поверхности эллипсоида

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{i} - \frac{bx\sin t}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2}}\mathbf{j} - \frac{cx\cos t}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2}}\mathbf{k}; \quad \mathbf{a}_2^0 = b_x\cos t\mathbf{j} - c_x\sin t\mathbf{k}. \tag{6}$$

Орт нормали к срединной поверхности эллипсоида определяется векторным произведением

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}_1^0\times\mathbf{a}_2^0}{\sqrt{a^0}} = \frac{\left(bcx/a^2\right)\mathbf{i} + \left(c\sqrt{a^2-x^2}\sin t/a\right)\mathbf{j} + \left(b\sqrt{a^2-x^2}\cos t/a\right)\mathbf{k}}{\sqrt{a^0}}, \tag{7}$$

где $a^0 = \left(\mathbf{a}_1^0\cdot\mathbf{a}_1^0\right)\left(\mathbf{a}_2^0\cdot\mathbf{a}_2^0\right) - \left(\mathbf{a}_1^0\cdot\mathbf{a}_2^0\right)^2$ — детерминант метрического тензора, отнесенного к точке срединной поверхности эллипсоида.

На основании (6) и (7) можно скомпоновать прямую и обратную матричные зависимости

$$\underset{3\times1}{\left\{\mathbf{a}^0\right\}} = \underset{3\times3}{\left[d^0\right]}\underset{3\times1}{\{\mathbf{i}\}};\quad \underset{3\times1}{\{\mathbf{i}\}} = \underset{3\times3}{\left[d^0\right]^{-1}}\underset{3\times1}{\left\{\mathbf{a}^0\right\}},\tag{8}$$

где $\left\{\mathbf{a}^0\right\}^T = \left\{\mathbf{a}_1^0\mathbf{a}_2^0\mathbf{a}^0\right\}$; $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{ijk}\}$.

Дифференцируя первое матричное соотношение (8) по x и t, получим производные векторов локального базиса, которые можно представить компонентами этого же базиса

$$\begin{gathered}\left\{\mathbf{a}^0_{,x}\right\} = \left[d^0_{,x}\right]\{\mathbf{i}\} = \left[d^0_{,x}\right]\left[d^0\right]^{-1}\left\{\mathbf{a}^0\right\};\\ \left\{\mathbf{a}^0_{,t}\right\} = \left[d^0_{,t}\right]\{\mathbf{i}\} = \left[d^0_{,t}\right]\left[d^0\right]^{-1}\left\{\mathbf{a}^0\right\}.\end{gathered}\tag{9}$$

В процессе деформирования под действием заданной нагрузки точка N^0 срединной поверхности эллипсоида займет новое положение N, а точка $N^{0\zeta}$, отстоящая от точки N по нормали на расстоянии ζ, переместится в точку N^{ζ}.

Радиус-векторы, характеризующие положения точек $N^{0\zeta}$ и N^{ζ}, определяются выражениями

$$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta\mathbf{a}^0;\quad \mathbf{R}^{\zeta} = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{V}.\tag{10}$$

Входящий в (10) вектор перемещения точки $N^{0\zeta}$ на основании гипотезы о прямой нормали определяется выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \zeta\left(\mathbf{a} - \mathbf{a}^0\right),\tag{11}$$

где $\mathbf{a}$ — орт нормали к срединной поверхности точки N.

Входящий в (11) вектор перемещения точки срединной поверхности N^0 и его производные по x и t можно представить компонентами, отнесенными к локальному базису этой же точки

$$\mathbf{v} = v^{\rho}\mathbf{a}^0_{\rho} + v\mathbf{a}^0;\quad \mathbf{v}_{,\alpha} = l^{\rho}_{\alpha}\mathbf{a}^0_{\rho} + l_{\alpha}\mathbf{a}^0,\tag{12}$$

где v^{ρ}, v — тангенциальная и нормальная компоненты вектора перемещения соответственно; l^{ρ}_{α}, l_{α} — компоненты первой производной вектора перемещения. Здесь нижний индекс α принимает значения x, t, а индекс ρ последовательно принимает значения 1, 2.

Векторы базисов точек $N^{0\zeta}$ и N^{ζ} определяются дифференцированием (10) по x и t

$$\begin{gathered}\mathbf{g}^0_{\alpha} = \mathbf{R}^{0\zeta}_{,\alpha} = \left(\mathbf{R}^0 + \zeta\mathbf{a}^0\right)_{,\alpha} = \mathbf{a}^0_{\alpha} + \zeta\mathbf{a}^0_{,\alpha};\\ \mathbf{g}_{\alpha} = \mathbf{R}^{\zeta}_{,\alpha} = \mathbf{g}^0_{\alpha} + l^{\rho}_{\alpha}\mathbf{a}^0_{\rho} + l_{\alpha}\mathbf{a}^0 + \zeta\left(\mathbf{a} - \mathbf{a}^0\right)_{,\alpha}.\end{gathered}\tag{13}$$

Ковариантные компоненты тензора деформаций определяются соотношениями механики сплошной среды [32]

$$\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta} = \left(g_{\alpha\beta} - g^0_{\alpha\beta}\right)/2,\tag{14}$$

где $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha}\cdot\mathbf{g}_{\beta}$; $g^0_{\alpha\beta} = \mathbf{g}^0_{\alpha}\cdot\mathbf{g}^0_{\beta}$.

Конечный элемент и интерполяционная процедура. Срединная поверхность эллипсоида моделируется совокупностью треугольных конечных элементов с узлами m, n, p, расположенными в точках пересечения линий треугольной конечно-элементной сетки. Узловыми варьируемыми параметрами были выбраны компоненты вектора перемещения и их частные производные первого порядка по x и t. Треугольный фрагмент срединной поверхности эллипсоида отображается на прямоугольный треугольник с единичными катетами в локальной системе координат $0 \le \xi, \eta \le 1$, используемой для организации численного интегрирования по формуле Хаммера. Столбцы узловых неизвестных в глобальной (x, t) и локальной системах координат можно записать в виде соответствующих матриц-строк

$$\underset{1\times 27}{\{U^G\}^T} = \left\{ \underset{1\times 9}{\{v^{1G}\}^T} \underset{1\times 9}{\{v^{2G}\}^T} \underset{1\times 9}{\{v^{G}\}^T} \right\}; \tag{15}$$

$$\underset{1\times 27}{\{U^L\}^T} = \left\{ \underset{1\times 9}{\{v^{1L}\}^T} \underset{1\times 9}{\{v^{2L}\}^T} \underset{1\times 9}{\{v^{L}\}^T} \right\}, \tag{16}$$

где

$$\underset{1\times 9}{\{q^G\}^T} = \left\{ q^m q^n q^p q_{,x}^m\ q_{,x}^n\ q_{,x}^p\ q_{,t}^m\ q_{,t}^n\ q_{,t}^p \right\}; \tag{17}$$

$$\underset{1\times 9}{\{q^L\}^T} = \left\{ q^m q^n q^p q_{,\xi}^m\ q_{,\xi}^n\ q_{,\xi}^p\ q_{,\eta}^m\ q_{,\eta}^n\ q_{,\eta}^p \right\}. \tag{18}$$

Под q в (17) и (18) понимается компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v.

Одним из важнейших аспектов в МКЭ является организация интерполяционной процедуры. Общепринятой в настоящее время в МКЭ является интерполяция отдельных компонент вектора перемещения как составляющих скалярных полей [17–23, 33]

$$q = \underset{1\times 9}{\{\psi\}^T} \underset{9\times 1}{\{q_y^L\}}, \tag{19}$$

где $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_9\}$ – матрица-строка функций формы, представленная полными полиномами третьей степени.

Из (19) следует, что каждая компонента вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента интерполируется через узловые значения этой же компоненты и ее производные. Такой подход позволяет получать корректные результаты при использовании декартовой системы координат. При анализе НДС тел, имеющих криволинейные поверхности, в частности трехосного эллипсоида, удобнее использовать криволинейные координаты, связанные с геометрией исследуемой поверхности.

Однако использование криволинейных систем координат требует учета возможных смещений конечного элемента как жесткого целого. На данную проблему имеются указания как в ранних научных публикациях по МКЭ [34], так и в работах современного периода [35, 36]. В настоящей статье эту проблему предлагается решить за счет использования интерполяции компонент вектора перемещения как составляющих векторных полей [37, 38], согласно которой интерполяционное выражение записывается для вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента

$$\mathbf{v} = \underset{1\times 9}{\{\psi\}^T} \underset{9\times 1}{\{\mathbf{v}_y^L\}} = \underset{1\times 9}{\{\psi\}^T} \underset{9\times 9}{[PR]} \underset{9\times 1}{\{\mathbf{v}_y^G\}}, \tag{20}$$

где

$$\underset{1\times 9}{\{\mathbf{v}_y^L\}^T} = \left\{ \mathbf{v}^m \mathbf{v}^n \mathbf{v}^p \mathbf{v}_{,\xi}^m\ \mathbf{v}_{,\xi}^n\ \mathbf{v}_{,\xi}^p\ \mathbf{v}_{,\eta}^m\ \mathbf{v}_{,\eta}^n\ \mathbf{v}_{,\eta}^p \right\}; \tag{21}$$

$$\underset{1\times 9}{\left\{\mathbf{v}_y^G\right\}^T} = \left\{\mathbf{v}^m \mathbf{v}^n \mathbf{v}^p \mathbf{v}_{,x}^m\ \mathbf{v}_{,x}^n\ \mathbf{v}_{,x}^p\ \mathbf{v}_{,t}^m\ \mathbf{v}_{,t}^n\ \mathbf{v}_{,t}^p\right\}; \tag{22}$$

$[PR]$ – матрица перехода от столбца (21) к столбцу (22).

Столбец векторных узловых неизвестных $\left\{\mathbf{v}_y^G\right\}$ в глобальной системе координат на основании (12) можно представить матричным произведением

$$\underset{9\times 1}{\left\{\mathbf{v}_y^G\right\}} = \underset{9\times 27}{[\mathbf{A}]}\underset{27\times 1}{\{t_y\}}, \tag{23}$$

где элементами квазидиагональной матрицы $[\mathbf{A}]$ являются векторы локальных базисов узлов треугольного конечного элемента $\mathbf{a}_1^{0s}$, $\mathbf{a}_2^{0s}$, $\mathbf{a}^{0s}$ $(s = m, n, p)$, а столбец $\{t_y\}$ имеет вид

$$\underset{1\times 27}{\{t_y\}} = \left\{v^{1m} v^{2m} v^m v^{1n} v^{2n} v^n v^{1p} v^{2p} v^p l_x^{1m} l_x^{2m} l_x^m \ldots l_x^p \ldots l_t^{1m} l_t^{2m} l_t^m \ldots l_t^p\right\}. \tag{24}$$

Интерполяционное выражение (20) с учетом (23) можно выразить как

$$\mathbf{v} = \underset{1\times 9}{\{\psi\}^T}\underset{9\times 9}{[PR]}\underset{9\times 27}{[\mathbf{A}]}\underset{27\times 27}{[T]}\underset{9\times 1}{\left\{U_y^G\right\}} = \underset{1\times 9}{\{\varphi\}^T}\underset{9\times 27}{[\mathbf{A}]}\underset{27\times 27}{[T]}\underset{9\times 1}{\left\{U_y^G\right\}}, \tag{25}$$

где $[T]$ – матрица перехода от столбца $\{t_y\}$ к столбцу $\left\{U_y^G\right\}$ (15).

Входящие в структуру матрицы $[\mathbf{A}]$ векторы локального базиса узлов треугольного конечного элемента на основании (8) можно выразить через векторы базиса точки внутренней области конечного элемента

$$\underset{3\times 1}{\left\{\mathbf{a}^{0s}\right\}} = \underset{3\times 3}{\left[d^{0s}\right]}\underset{3\times 3}{\left[d^{0}\right]^{-1}}\underset{3\times 1}{\left\{\mathbf{a}^{0}\right\}} = \underset{3\times 3}{\left[b^{0s}\right]}\underset{3\times 1}{\left\{\mathbf{a}^{0}\right\}}, \tag{26}$$

где $\underset{3\times 1}{\left\{\mathbf{a}^{0s}\right\}^T} = \left\{\mathbf{a}_1^{0s}\mathbf{a}_2^{0s}\mathbf{a}^{0s}\right\}$.

Интерполяционную зависимость (25) с учетом (12) и (26) можно записать в виде

$$\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v \end{Bmatrix} = \left\{\varphi_1\mathbf{a}_1^{0m} \middle| \varphi_1\mathbf{a}_2^{0m} \middle| \varphi_1\mathbf{a}^{0m} \middle| \varphi_2\mathbf{a}_1^{0n} \middle| \varphi_2\mathbf{a}_2^{0n} \middle| \varphi_2\mathbf{a}^{0n} \ldots \middle| \varphi_9\mathbf{a}_1^{0p} \middle| \varphi_9\mathbf{a}_2^{0p} \middle| \varphi_9\mathbf{a}^{0p} \middle|\right\}\{Z_y\} =$$

$$= \left\{\varphi_1\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0m} \\ b_{12}^{0m} \\ b_{13}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_1\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{21}^{0m} \\ b_{22}^{0m} \\ b_{23}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_1\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0m} \\ b_{32}^{0m} \\ b_{33}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_2\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0n} \\ b_{12}^{0n} \\ b_{13}^{0n} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_2\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{21}^{0n} \\ b_{22}^{0n} \\ b_{23}^{0n} \end{Bmatrix} \middle| \right. \times \tag{27}$$

$$\left. \times \middle| \varphi_2\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0n} \\ b_{32}^{0n} \\ b_{33}^{0n} \end{Bmatrix} \middle| \ldots \middle| \varphi_9\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0p} \\ b_{12}^{0p} \\ b_{13}^{0p} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_9\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{21}^{0p} \\ b_{22}^{0p} \\ b_{23}^{0p} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_9\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0p} \\ b_{32}^{0p} \\ b_{33}^{0p} \end{Bmatrix} \right\}\{Z_y\},$$

где $\{Z_y\} = [T]\left\{U_y^G\right\}$.

Из (27) можно получить интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения точки внутренней области треугольного конечного элемента при реализа-

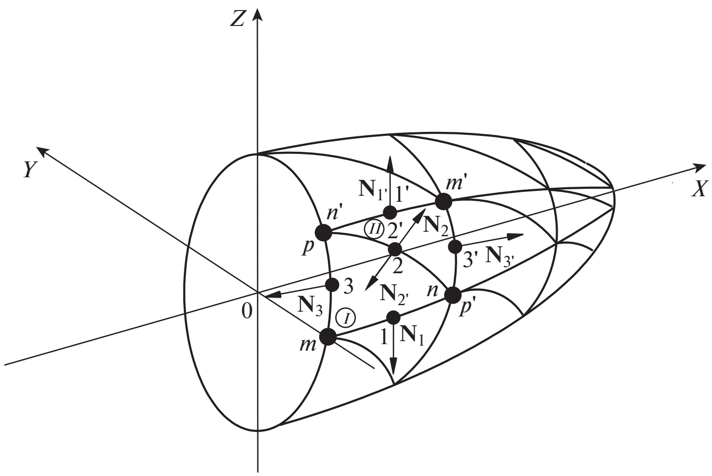


Рис. 1. Дискретизация эллипсоида.

ции интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения как составляющих векторных полей

$$\begin{aligned} v^1 &= \left\{\varphi_1 b_{11}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{21}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{31}^{0m} \middle| \varphi_2 b_{11}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{21}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{31}^{0n} \middle| \ldots \middle| \varphi_9 b_{11}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{21}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{31}^{0p}\right\}\left\{Z_y\right\}; \\ v^2 &= \left\{\varphi_1 b_{12}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{22}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{32}^{0m} \middle| \varphi_2 b_{12}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{22}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{32}^{0n} \middle| \ldots \middle| \varphi_9 b_{12}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{22}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{32}^{0p}\right\}\left\{Z_y\right\}; \\ v &= \left\{\varphi_1 b_{13}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{23}^{0m} \middle| \varphi_1 b_{33}^{0m} \middle| \varphi_2 b_{13}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{23}^{0n} \middle| \varphi_2 b_{33}^{0n} \middle| \ldots \middle| \varphi_9 b_{13}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{23}^{0p} \middle| \varphi_9 b_{33}^{0p}\right\}\left\{Z_y\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Анализируя (28), отметим их принципиальные отличия от (19), которые заключаются в том, что при реализации интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения как составляющих векторных полей каждая компонента вектора перемещения зависит от столбца узловых неизвестных, в структуру которого входят узловые значения всех трех компонент вектора перемещения и их производные. Кроме того, в интерполяционные выражения (28) входят параметры используемой криволинейной системы координат, чего не наблюдается при использовании интерполяционной процедуры отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин (19).

Описанный выше треугольный конечный элемент является совместным по компонентам вектора перемещения, но несовместным по их производным, что может приводить к некорректным результатам в зонах значительных градиентов деформаций. Так, например, в значениях производных нормальных компонент векторов перемещений, вычисленных в направлении нормалей к серединам сторон смежных конечных элементов I и II будет иметь место скачок (рис. 1)

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{N}_i} \neq \frac{\partial v_i^{'}}{\partial \mathbf{N}_i^{'}}, \quad (i = 1,2,3). \tag{29}$$

Для обеспечения равенства в значениях производных предлагается использовать в качестве дополнительных узловых неизвестных треугольного конечного элемента множители Лагранжа λ_i $(i = 1,2,3)$. В этом случае выражение (29) можно представить в виде

$$\lambda_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{N}_i} - \frac{\partial v_i'}{\partial \mathbf{N}_i'} \right) = 0. \tag{30}$$

Входящие в (30) производные нормальных компонент векторов перемещений, вычисленные вдоль нормалей к серединам сторон треугольных конечных элементов можно представить через частные производные нормальных компонент по глобальным криволинейным координатам

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{N}_i} = \left(v_{,x}\right)_i \cos\alpha_i + \left(v_{,t}\right)_i \cos\beta_i, \tag{31}$$

где α_i и β_i – углы между векторами $\mathbf{N}_i$ и тангенциальными векторами локального базиса $\left(\mathbf{a}_1^0\right)_i, \left(\mathbf{a}_2^0\right)_i$.

Для определения входящих в (31) частных производных нормальной компоненты $\left(v_{,x}\right)_i$ и $\left(v_{,t}\right)_i$ необходимо выполнить операцию дифференцирования интерполяционного выражения (20) по x и t

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,x} &= \left(\{\psi_{,\xi}\}^T \xi_{,x} + \{\psi_{,\eta}\}^T \eta_{,x}\right)[PR]\left\{U_y^G\right\}; \\ \mathbf{v}_{,t} &= \left(\{\psi_{,\xi}\}^T \xi_{,t} + \{\psi_{,\eta}\}^T \eta_{,t}\right)[PR]\left\{U_y^G\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

С учетом (23)–(25) выражения (32) примут следующий вид

$$\mathbf{v}_{,x} = \{\varphi_x\}^T [\mathbf{A}][T]\left\{U_y^G\right\}; \quad \mathbf{v}_{,t} = \{\varphi_t\}^T [\mathbf{A}][T]\left\{U_y^G\right\}. \tag{33}$$

Принимая во внимание второе равенство (12) из (33) можно получить следующие матричные соотношения:

$$\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} l_x^1 \\ l_x^2 \\ l_x \end{Bmatrix} = \left\{ \varphi_{x1}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0m} \\ b_{12}^{0m} \\ b_{13}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_{x1}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{21}^{0m} \\ b_{22}^{0m} \\ b_{23}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_{x1}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0m} \\ b_{32}^{0m} \\ b_{33}^{0m} \end{Bmatrix} \right| \ldots$$

$$\ldots \left| \varphi_{x9}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0p} \\ b_{12}^{0p} \\ b_{13}^{0p} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_{x9}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{21}^{0p} \\ b_{22}^{0p} \\ b_{23}^{0p} \end{Bmatrix} \middle| \varphi_{x9}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0p} \\ b_{32}^{0p} \\ b_{33}^{0p} \end{Bmatrix} \right\} \{Z_y\}; \tag{34}$$

$$\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} l_t^1 \\ l_t^2 \\ l_t \end{Bmatrix} = \left\{ \varphi_{t1}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{11}^{0m} \\ b_{12}^{0m} \\ b_{13}^{0m} \end{Bmatrix} \middle| \ldots \middle| \varphi_{t9}\left\{a^0\right\}^T \begin{Bmatrix} b_{31}^{0p} \\ b_{32}^{0p} \\ b_{33}^{0p} \end{Bmatrix} \right\} \{Z_y\}.$$

Из (34) можно записать искомые интерполяционные зависимости

$$\begin{aligned} l_x &= \left\{\varphi_{x1}b_{13}^{0m} \middle| \varphi_{x1}b_{23}^{0m} \middle| \varphi_{x1}b_{33}^{0m} \middle| \ldots \middle| \varphi_{x9}b_{13}^{0p} \middle| \varphi_{x9}b_{23}^{0p} \middle| \varphi_{x9}b_{33}^{0p}\right\}\{Z_y\}; \\ l_t &= \left\{\varphi_{t1}b_{13}^{0m} \middle| \varphi_{t1}b_{23}^{0m} \middle| \varphi_{t1}b_{33}^{0m} \middle| \ldots \middle| \varphi_{t9}b_{13}^{0p} \middle| \varphi_{t9}b_{23}^{0p} \middle| \varphi_{t9}b_{33}^{0p}\right\}\{Z_y\}, \end{aligned} \tag{35}$$

где l_x и l_t – многочлены, содержащие производные $v_{,x}$ и $v_{,t}$.

При рассмотрении каждого треугольного конечного элемента в отдельности, можно записать равенство

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{N}_1} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{N}_2} + \lambda_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{N}_3} = 0, \tag{36}$$

которое с учетом (31) и (35) представим матричным произведением

$$\underset{1\times 3}{\{\lambda\}^T}\ \underset{3\times 27}{[L]}\underset{27\times 1}{\left\{U_y^G\right\}} = 0, \tag{37}$$

где $\{\lambda\}^T = \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$.

Для компоновки матрицы жесткости и столбца узловых усилий треугольного конечного элемента воспользуемся функционалом Лагранжа

$$F_L = \int_V \left\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\right\}^T \left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\} dV - \int_S \{U\}^T \{P\}\, dS + \{\lambda\}^T [L]\left\{U_y^G\right\} = 0, \tag{38}$$

где $\left\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\right\}^T = \left\{\varepsilon_{xx}^{\zeta}\right\}\left\{\varepsilon_{tt}^{\zeta}\right\}\left\{2\varepsilon_{xt}^{\zeta}\right\}$, $\left\{\sigma^{\alpha\beta}\right\}^T = \left\{\sigma^{xx}\right\}\left\{\sigma^{tt}\right\}\left\{\sigma^{xt}\right\}$ – деформации и напряжения в точке N^{ζ}; $\{U\}^T = \{u_1 u_2 u\}$ – матрица-строка компонент вектора перемещения точки N^0; $\{P\}^T = \left\{p^1 p^2 p\right\}$ – столбец внешней поверхностной нагрузки.

Пример расчета. В качестве примера была решена задача по определению НДС усеченного эллипсоида, нагруженного внутренним давлением интенсивности $q = 5$ МПа. Параметры эллипсоида имели следующие значения: $a = 1.3$ м; $b = 0.92$ м; $c = 0.9$ м. Осевая координата x изменялась в пределах $0 \le x \le 1.2$ м. Модуль упругости был равен $E = 2\times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, толщина оболочки была принята равной $h = 0.02$ м.

Вследствие наличия плоскостей симметрии рассматривалась 1/8 часть эллипсоида (рис. 2). Расчеты были выполнены в трех вариантах: в первом варианте элементом дискретизации трехосного эллипсоида был выбран треугольный фрагмент без множителей Лагранжа со стандартной интерполяционной процедурой (19); во втором варианте применялся описанный в настоящей статье конечный элемент с интерполяцией компонент вектора перемещения как составляющих векторных полей (20)–(25) с применением множителей Лагранжа для улучшения совместности на границах смежных элементов дискретизации; в третьем контрольном варианте использовался четырехугольный конечный элемент с аналогичным числом неизвестных в узле [30].

Результаты повариантных расчетов представлены в табл. 1, в которой приведены значения нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{tt} на внутренней σ^{in} и наружной σ^{out} поверхностях эллипсоида в зависимости от густоты конечно-элементной сетки.

Анализ данных, представленных в табл. 1, показывает, что в точке, лежащей на пересечении вертикальных плоскостей симметрии ($x = 0.0$ м; $t = 0.0$ рад) наблюдается по сути безмоментное напряженное состояние и численные значения напряжений по всем трем вариантам имеют достаточно близкие значения. В концевом сечении ($x = 1.2$ м), где имеет место моментное напряженное состояние, различие между первым и вторым вариантом расчета весьма значительно. В точке $B\,(1.2; 0.0)$ σ_{tt} в первом варианте в 2.5–3.0 раза больше, чем во втором варианте расчета, а в точке $C\,(1.2; \pi)$ σ_{tt} в первом варианте оказались меньше на 18%, чем во втором варианте расчета. Кроме того, в концевом сечении напряжения σ_{xx} должны монотонно уменьшаться, что и наблюдается во втором варианте расчета. В первом варианте σ_{xx} в точке C на порядок больше, чем во втором варианте и имеют тенденцию к росту при сгущении сетки дискретизации, что является некорректным.

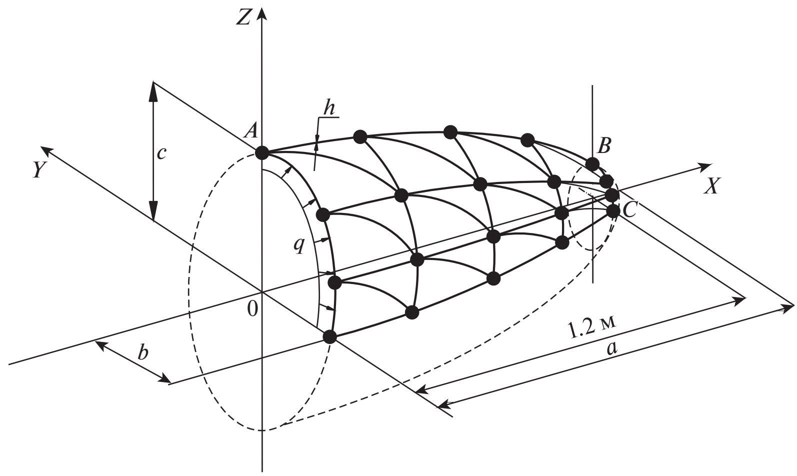


Рис. 2. Сечение эллипсоида.

Сравнение между собой второго и контрольного третьего вариантов расчета показывает, что вычисленные значения напряжений достаточно близки между собой и разница между ними некритична.

Итак, можно сделать вывод, что разработанный совместный треугольный конечный элемент с множителями Лагранжа и инвариантной векторной формой интерполяционной процедуры обладает принципиальными преимуществами по сравнению с треугольным конечным элементом в традиционной формулировке и позволяет получать корректные значения прочностных параметров при расчете оболочек в форме трехосного эллипсоида.

Численные эксперименты. Численный эксперимент 1. С целью верификации в первом приближении разработанного треугольного элемента дискретизации был реали-

Таблица 1. Значения нормальных напряжений на поверхностях эллипсоида

Номер варианта	Густота сетки	Координаты точек (x, м; t, рад)						
		$A\,(0.0; 0.0)$		$B\,(1.2; 0.0)$		$C\,(1.2; \pi)$		
		Напряжения, МПа						
		σ_{xx}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{xx}^{in}	σ_{xx}^{out}	σ_{tt}^{in}
I	81 × 81	175.3	183.5	–636.2	611.0	–328.9	313.0	463.3
	101 × 101	175.3	183.5	–649.7	624.9	–344.7	330.8	462.6
	121 × 121	175.3	183.5	–659.8	635.7	–355.9	343.1	462.0
II	81 × 81	173.7	180.3	–235.9	214.9	26.8	–40.1	534.8
	101 × 101	174.8	179.4	–258.1	230.7	22.7	–35.5	533.6
	121 × 121	175.5	178.8	–276.7	244.8	18.6	–31.2	532.1
III	61 × 61	174.9	184.0	–200.1	277.5	2.36	–22.0	542.5
	81 × 81	174.8	184.0	–208.5	264.4	0.45	–14.5	550.6
	101 × 101	174.8	184.0	–213.2	257.0	–0.41	–10.4	555.1

Таблица 2. Значения нормальных напряжений σ_{tt} в круговом цилиндре, загруженным внутренним давлением

Номер варианта	Густота сетки	Координаты точек (x, см; t, рад)							
		$A\,(1.0; 0.0)$		$B\,(0.0; 0.0)$		$C\,(1.0; \pi/2)$		$D\,(0.0; \pi/2)$	
		Напряжения, Н/см^2							
		σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}
I	21 × 2	99.69	100.23	99.21	100.85	99.21	100.85	99.69	100.23
	31 × 2	99.48	100.44	98.97	101.11	98.97	101.11	99.48	100.44
II	21 × 2	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5
	31 × 2	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5
III	21 × 2	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5
	31 × 2	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5	100.5	99.5

зован численный эксперимент по расчету кругового цилиндра, загруженного внутренним давлением интенсивностью $q = 1$ Н/см^2. Радиус цилиндра R был принят равным 10 см, толщина стенки $h = 0.1$ см, длина образующей $L = 1$ см, модуль упругости $E = 2.1 \times 10^7$ Н/см^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Расчеты, как и в примере исследования НДС трехосного эллипсоида, были выполнены в трех вариантах. Результаты численного эксперимента представлены в табл. 2, в которой приведены значения напряжений σ_{tt} на наружной и внутренней поверхностях цилиндра в зависимости от сетки узлов дискретизации.

Анализ результатов (табл. 2) показывает, что во всех трех вариантах наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. Причем, во втором и третьем вариантах сходимость — абсолютная. Численные значения напряжений соответствуют аналитическому решению, полученному из условия статического равновесия

$$\sigma_{tt} = qR/t = 1 \times 10/0.1 = 100.0 \text{ Н/см}^2.$$

Представленный численный эксперимент является наиболее простейшим и выполнен для верификации разработанного треугольного элемента дискретизации лишь в первом приближении. Для более полного анализа эффективности разработанного алгоритма необходимо выполнить численные эксперименты с другими видами внешней нагрузки и отличной от круговой геометрической формы.

Численный эксперимент 2. С целью наиболее полной верификации разработанного треугольного элемента дискретизации был выполнен следующий численный эксперимент по определению НДС кругового цилиндра с образующей единичной длины $L = 1$ см, загруженного двумя диаметрально противоположно направленными линейно распределенными нагрузками интенсивностью $q = 0.1$ Н/см (рис. 3). Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра $R = 10$ см, толщина стенки $h = 0.1$ см, модуль упругости $E = 2.1 \times 10^7$ Н/см^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/4 часть цилиндра. Численный эксперимент был реализован, как и в предыдущем примере, в трех вариантах.

Результаты численного эксперимента представлены в табл. 3, в которой приведены значения нормального напряжения σ_{tt} на внутренней σ^{in} и на наружной σ^{out} поверхностях цилиндра в точках приложения линейной нагрузки $q\,(t = 0)$ и в точках с пара-

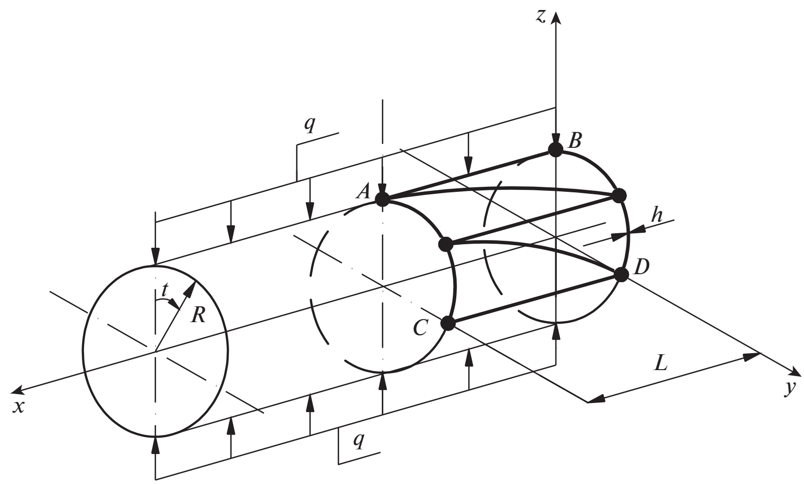


Рис. 3. Расчетная схема кругового цилиндра с линейно распределенной нагрузкой q.

метром $t = \dfrac{\pi}{2}$ в зависимости от густоты сетки дискретизации. Анализ табличных данных показывает, что результаты первого варианта численного эксперимента нельзя признать удовлетворительными по причине отсутствия сходимости вычислительного процесса и увеличивающегося до неприемлемого уровня различия между значениями напряжений в точках A, B и C, D по мере сгущения сетки дискретизации. Исходя из расчетной схемы кругового цилиндра (рис. 3) и наличия плоской деформации напряжения в точках A, B и C, D должны быть попарно одинаковыми.

Во втором и третьем вариантах численного эксперимента можно констатировать быструю сходимость вычислительного процесса и равенство значений напряжений в

Таблица 3. Значения напряжений σ_{tt} в круговом цилиндре, загруженном линейно распределенной нагрузкой q

Номер варианта	Густота сетки	Координаты точек (x, см; t, рад)							
		A (1.0; 0.0)		B (0.0; 0.0)		C (1.0; π/2)		D (0.0; π/2)	
		Напряжения, Н/см^2							
		σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}	σ_{tt}^{in}	σ_{tt}^{out}
I	2 × 21	110.0	–119.9	23.6	–12.2	–8.66	0.04	–60.3	67.3
	2 × 31	77.1	–86.1	–9.28	23.8	8.90	–19.9	–42.7	48.9
	2 × 51	64.2	–75.9	–27.4	48.1	18.4	–33.8	–36.8	45.0
II	2 × 21	190.9	–191.4	191.5	–190.8	–110.3	108.3	–110.3	108.3
	2 × 31	190.7	–190.5	191.9	–190.3	–110.2	108.1	–110.2	108.1
	2 × 51	191.9	–190.1	191.9	–190.1	–110.1	108.0	–110.1	108.0
III	2 × 21	191.0	–191.2	191.0	–191.2	–110.3	108.3	–110.3	108.3
	2 × 31	191.7	–190.4	191.7	–190.4	–110.2	108.1	–110.2	108.1
	2 × 51	191.9	–190.1	191.9	–190.1	–110.1	108.0	–110.1	108.0

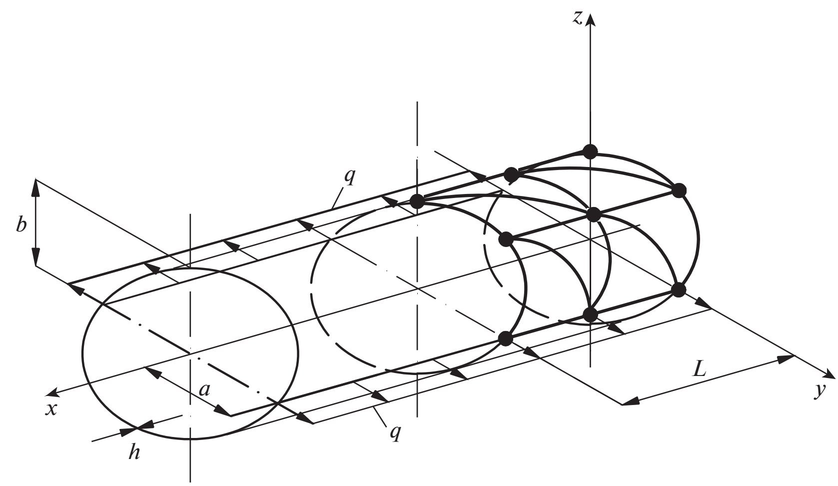


Рис. 4. Расчетная схема эллиптического цилиндра с линейно распределенной нагрузкой q.

точках A, B и C, D соответственно. Различия между вторым и третьим вариантами практически отсутствуют. Погрешность полученных в ходе численного эксперимента значений напряжений можно оценить, воспользовавшись известной формулой сопротивления материалов для задачи о сжатии кольца двумя сосредоточенными силами P [39]. В точке приложения сил момент по формуле сопротивления материалов равен $M_A = 0.3183\ PR = 0.3183 \times 0.1 \times 10 = 0.3183$ Н см. В точках кольца с координатой $t = \frac{\pi}{2}$ момент равен $M_C = 0.1817\ PR = 0.1817 \times 0.1 \times 10 = 0.1817$ Н см.

Для вычисления напряжений можно воспользоваться формулой

$$\sigma = M/W, \tag{39}$$

где W – момент сопротивления поперечного сечения.

Подставив в формулу (39) значения исходных данных, можно получить следующие значения напряжений: $\sigma_A = 0.3183/(1 \times 0.1^2/6) = 190.98$ Н/см^2; $\sigma_C = 0.1817/(1 \times 0.1^2/6) = 109.02$ Н/см^2.

Сопоставив значения σ_A и σ_C со значениями, полученными в ходе численного эксперимента, можно отметить, что погрешность данных (табл. 3) минимальна, и не превышает 1%.

Таким образом, можно сделать вывод, что проведенный численный эксперимент подтверждает эффективность разработанного треугольного элемента дискретизации и демонстрирует достаточную для инженерных расчетов точность вычислений, полученных при его использовании.

Численный эксперимент 3. Исследовано НДС эллиптического цилиндра с различным соотношением полуосей эллипса поперечного сечения. Эллиптический цилиндр был загружен приложенной вдоль диаметрально противоположных образующих линейно распределенной растягивающей нагрузкой интенсивностью $q = 0.1$ Н/см (рис. 4). Были использованы следующие исходные данные: длина образующей $L = 1$ см, длина большей полуоси $a = 10$ см, толщина стенки $h = 0.1$ см, модуль упругости $E = 2.1 \times 10^7$ Н/см^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Длина малой полуоси эллипса

Таблица 4. Значения нормальных напряжений σ_{tt} в эллиптическом цилиндре, загруженном линейно распределенной нагрузкой q

Номер варианта	Координаты точек (x, см; t, рад)	Напряжение σ_{tt}, Н/см^2	Отношение полуосей эллипса $k = a/b$ поперечного сечения			
			1.0	1.1	1.3	1.5
I	$C(1.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	9.28	9.86	8.29	5.55
		σ_{tt}^{in}	−23.81	−26.20	−27.62	−26.70
	$D(0.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	−77.15	−66.21	−51.29	−41.72
		σ_{tt}^{in}	86.10	75.45	60.53	49.89
II	$C(1.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	−191.85	−177.37	−154.5	−137.2
		σ_{tt}^{in}	190.3	175.6	152.2	134.4
	$D(0.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	−191.68	−177.2	−154.4	−137.1
		σ_{tt}^{in}	190.48	175.7	152.3	134.5
III	$C(1.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	−191.7	−177.25	−154.4	−137.1
		σ_{tt}^{in}	190.4	175.7	152.3	134.5
	$D(0.0; \pi/2)$	σ_{tt}^{in}	−191.7	−177.25	−154.4	−137.1
		σ_{tt}^{in}	190.4	175.7	152.3	134.5
Решение по формулам сопротивления материалов [39]		σ_{tt}	190.98	177.0	153.0	136.2

поперечного сечения варьировалась от 10 см до 6.67 см. Численный эксперимент, как и в предыдущих расчетах, был реализован в трех вариантах.

Результаты численного эксперимента представлены в табл. 4, в которой приведены значения нормальных напряжений σ_{tt} на внешней и внутренней поверхностях эллиптического цилиндра в зависимости от соотношения полуосей эллипса поперечного сечения $k = a/b$ при фиксированной сетке узлов дискретизации 31×2. Анализ данных, представленных в табл. 4, показывает, что в первом варианте численного эксперимента получены некорректные значения нормальных напряжений σ_{tt}. Так, например, в точке C σ_{tt}^{in} – растягивающие, тогда как исходя из расчетной схемы (рис. 4), они должны быть сжимающими. То же самое можно сказать и о нормальных напряжениях на наружной поверхности эллиптического цилиндра в точке C σ_{tt}^{out}. Они должны быть растягивающими, а в таблице σ_{tt}^{out} в точке C – отрицательные, т.е. сжимающие.

Можно констатировать абсолютное несовпадение значений напряжений в точках C и D в первом варианте численного эксперимента, в то время как, исходя из расчетной схемы эллиптического цилиндра, напряжения в точках C и D должны полностью совпадать.

Во втором и третьем вариантах численного эксперимента можно констатировать обязательное, вследствие наличия плоскостей симметрии в деформированном состоянии, совпадение значений нормальных напряжений в точках C и D (процент расхождения между значениями напряжений в этих точках во втором варианте пренебрежимо мал). Можно отметить практически полное совпадение значений напряжений, полученных во втором и третьем вариантах численного эксперимента.

Для верификации выполненного численного эксперимента в нижней строке табл. 4 приведены значения напряжений, вычисленные с привлечением формул сопротивления материалов для задачи о растяжении эллиптического кольца двумя сосредоточенными силами [39], согласно которым изгибающий момент в точках приложения сил равен

$$M = kPa, \tag{40}$$

где $k = a/b$ – коэффициент отношения полуосей эллипса поперечного сечения.

Подставив в (40) исходные данные проводимого численного эксперимента и воспользовавшись формулой (39), получили значения нормальных напряжений (табл. 4).

Сравнительный анализ напряжений, полученных во втором и третьем вариантах численного эксперимента и значений нормальных напряжений, вычисленных по формулам сопротивления материалов показывает, что расхождения между ними минимальны и в целом не превышают 1%.

Вывод. На основании рассмотренных примеров по определению НДС трехосного эллипсоида и выполненных с целью верификации разработанного алгоритма численных экспериментов, можно сделать вывод об эффективности представленного треугольного элемента дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа, матрица жесткости которого скомпонована на основе векторной формы интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения и их производных.

Треугольный элемент дискретизации без корректирующих множителей Лагранжа, матрица жесткости которого формируется на основе общепринятой в МКЭ скалярной формы интерполяционной процедуры, позволяет получать удовлетворительные по точности результаты лишь в случаях простых геометрических форм оболочечных конструкций, загруженных равномерно распределенным давлением. В случае отличного от равномерного давления вида внешней нагрузки или усложнения геометрических форм оболочек, получить удовлетворительные значения напряжений не представляется возможным.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krivoshapko S.N.* Optimal shells of revolution and main optimizations // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2019. V. 15. № 3. P. 201.
2. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
3. *Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г.* Основания нелинейной теории оболочек. Казань: Изд-во “Фэн”, 1996. 216 с.
4. *Тимошенко С.П.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
5. *Петров В.В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.
6. *Беляев А.К. и др.* Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. № 4. С. 397.
7. *Trusov P.V., Yanz A.Y.* Physical meaning of nonholonomic strain measure // Physical Mesomechanics. 2016. V. 19. № 2. P. 215.
8. *Trusov P.V., Kondratev N.S., Shveykin A.I.* About geometrically nonlinear constitutive relations for elastic material // PNRPU Mechanics Bulletin. 2015. № 3. P. 182.

9. *Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear elastic state of a composite cylindrical shell with a rectangular hole // International Applied Mechanics. 2019. V. 55. № 4. P. 504.
10. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V.* Stress-strain state near a hole in a shear-compliant composite cylindrical shell with elliptical cross-section // International Applied Mechanics. 2018. V. 54. № 5. P. 559.
11. *Krysko V.A., Vetsel' S.S., Dobriyan V.V., Saltykova O.A.* Chaotic interaction dynamics of three structures: two cylindrical shells nested into each other and their reinforcing local rib // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017. V. 58. № 3. P. 489.
12. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core // Russian Mathematics. 2017. V. 61. № 1. P. 69.
13. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells // International Applied Mechanics. 2016. V. 54. № 4. P. 386.
14. *Paimushin V.N.* On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. V. 80. № 1. P. 65.
15. *Urnev A.S., Chernyatin A.S., Matvienko Y.G., Razumovskii I.A.* Experimental and numerical sizing of delamination defects in layered composite materials // Inorganic Materials. 2019. V. 55. № 15. P. 1516.
16. *Петров В.В., Кривошеин И.В.* Влияние неоднородности материала на устойчивость нелинейно деформируемых пологих оболочек двоякой кривизны // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2014. Т. 4. № 1 (77). С. 20.
17. *Agapov V., Golovanov R.* Comparative analysis of the simplest finite elements of plates in bending // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. V. 692. P. 1009.
18. *Belostotsky A.M., Akimov P.A., Afanasyeva I.N., Kaytukov T.B.* Contemporary problems of numerical modelling of unique structures and buildings // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. V. 13. № 2. P. 9.
19. *Игнатьев А.В., Чумаков А.В., Гилка В.В.* Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 1. С. 62.
20. *Tyukalov Yu.Ya.* Finite element model of reisner's plates in stresses // Civil Engineering Journal. 2019. V. 89. № 5. P. 61.
21. *Лалин В.В., Денисов Г.В.* Трансформация волн, распространяющихся по заглубленному трубопроводу, вследствие конструктивных включений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 2. С. 56.
22. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва: Физматлит, 2006. 392 с.
23. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. Москва: Физматлит, 2010. 1022 с.
24. *Leonetti L., Magisano D., Madeo A., Garcea G., Kiendl J., Reali A.* A simplified Kirchhoff–Love large deformation model for elastic shells and its effective isogeometric formulation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019. V. 354. P. 369.
25. *Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* Stress recovery procedure for solving boundary value problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V. 74. № 3. P. 341.
26. *Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* A Stress recovery procedure for solving geometrically non-linear problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V. 74. № 6. P. 710.
27. *Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. V. 113. № 4. P. 634.
28. *Likeb A., Gubeljak N., Matvienko Y.* The determination of the stress intensity factor solutions for the new pipe-ring specimen using fea // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). 2019. V. 89. № 5. P. 897.
29. *Kirichevsky R.V., Skrynnykova A.V.* The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2019. № 57. P. 26.

30. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Marchenko S.S.* Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. V. 45. № 4. P. 328.
31. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu.* A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2020. V. 15. № 13. P. 1472.
32. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Москва: Наука. 1976. Т. 1. 536 с.
33. *Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V.* Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers // Moscow University Mechanics Bulletin. 2017. V. 72. № 4. P. 94.
34. *Кантин Г., Клауф Р.* Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки // Ракетная техника и космонавтика. 1968. № 6. С. 82.
35. *Sultanov L.U.* Analysis of finite elasto-plastic strains. Medium kinematics and constitutive equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. V. 37. № 6. P. 787.
36. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 3 (711). С. 5.
37. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Фомин С.Д., Клочков М.Ю.* Конечноэлементные модели дискретизации тонкостенных конструкций предприятий АПК // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2019. Т. 53. № 1. С. 255.
38. *Dzhabrailov A.Sh., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P.* The finite element analysis of shells of revolution with a branching meridian // Russian Aeronautics. 2009. V. 52. № 1. P. 22.
39. *Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И.* Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышейшая школа, 1970. 630 с.

EDN: QJJBIU
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 3, с. 45–49

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.833

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ДОПУСКАЕМОГО УГЛА ПЕРЕКОСА В ЗУБЧАТОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

Ф. Г. Нахатакян[1,2,*], Д. Ф. Нахатакян[1,2]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
[2]*Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*
**e-mail: filnahat7@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.12.2021 г.
После доработки 03.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

На основе метода по решению задачи о контакте двух цилиндров в условиях перекоса, получено аналитическое определение допустимого угла перекоса в зубчатых зацеплениях. Показано, что эта величина не является константой, а зависит от многих параметров: геометрических и силовых факторов; материалов зубчатых колес. Получено аналитическое выражение, с помощью которого можно оценить величину допустимого угла перекоса в зубчатом зацеплении в зависимости от перечисленных параметров.

Ключевые слова: зубчатое зацепление, угол перекоса, контактные напряжения, коэффициент угла перекоса, допустимый угол перекоса, погонная нагрузка

DOI: 10.31857/S0235711922030099

При расчете нагруженности и прочности зубчатых зацеплений, а также оценке их усталостного разрушения, учитывают снижение их нагрузочной способности и концентрацию напряжений в торцевых сечениях при кромочном контакте в результате перекоса [1–7]. В работе [1] приведены результаты моделирования напряженного состояния в контакте зубьев прямозубых эвольвентных зубчатых передач, работающих в условиях перекосов осей колес. Установлено, что применяемые стандартные расчеты дают завышенную нагрузочную способность передачи. Показано, что для работающих при перекосах передач увеличение радиусов профильной кривизны поверхностей в контакте не приводит к дополнительному (помимо вытекающего из теории Герца) повышению нагрузочной способности передачи. Анализ результатов указывает на то, что при углах перекоса зубьев относительно друг друга $\psi = (0.1–1.0) \times 10^{-3}$ рад, обусловленных перекосом зубчатых колес, нагрузочная способность передач редукторов снижается в 2–15 раз, что является недопустимым [3]. В работах [4–7] обоснована необходимость учета напряженности зубьев на периферийных участках пятна контакта при прочностных расчетах зубчатых передач с локальным контактом зубьев.

В работах [8–14], где подробно исследованы контактные напряжения и деформации при перекосе, показано, что при перекосе сильно растут контактные напряжения и деформации, и тем самым снижается нагрузочная способность зубчатой передачи. Для оценки влияния отклонений профилей и погрешностей в зубчатых зацеплениях в [11, 12] используются специальные математические подходы и многолистные функции. Показано, что существующие методы отражают важную для анализа качества зубчатых передач информацию лишь для части параметров зацепления.

Так как одним из главных недостатков эвольвентных зубчатых передач, из-за повышенной жесткости зубьев, является их чувствительность к упругим деформациям элементов и погрешностям монтажа, приводящим к перекосу и начальному неприлеганию зубьев, то максимальное значение угла перекоса [γ] является важным параметром при прочностных расчетах, долговечности передачи, износа элементов передачи, а также максимальных контактных напряжений [15–17].

В проведенных ранее исследованиях, в результате сделанных допущений, не учитываются все факторы, влияющие на [γ]. Целью настоящей статьи является аналитическое определение допускаемого угла перекоса с учетом всех параметров зубчатой передачи.

В работе [6] показано, что контактные напряжения при перекосе определяются по формуле

$$\sigma_\gamma = K_\sigma \sigma_H = \sqrt{K_\gamma}\sigma_H, \tag{1}$$

где K_σ – коэффициент концентрации контактных напряжений; σ_H – контактные напряжения по Герцу [18]; $\sigma_H = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2q}{R\vartheta}}$, где $\vartheta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}$; $q = \frac{P}{l}$ – погонная нагрузка; R – приведенный радиус кривизны профиля зубьев в рассматриваемом сечении; ν и E – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала; K_γ – коэффициент угла перекоса, согласно работе [6] определяется как

$$K_\gamma = 1 + 0.5\xi, \quad \text{при} \quad \xi \le 2 \quad (\text{т.е. } l_\text{к} = l), \tag{2}$$

$$K_\gamma = \sqrt{2}\xi^{1/2}, \quad \text{при} \quad \xi \ge 2 \quad (\text{т.е. } l_\text{к} \le l), \tag{3}$$

где $\xi = \frac{l\gamma}{\alpha_H}$ – безразмерный нагрузочный параметр; l – длина контактной линии, для прямозубых колес при номинальном контакте она совпадает с длиной зуба; γ – угол перекоса; α_H – контактная деформация в отсутствие перекоса, которая согласно работе [19] определяется по формуле $\alpha_H = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} q\left(\ln\frac{4R}{b_\text{H}} - 0.5\right)$; b_H – полуширина площадки контакта по Герцу, $b_H = 2\sqrt{2qR\vartheta}$; $l_\text{к}$ – длина пятна контакта.

Следует отметить, что формулы для коэффициента угла перекоса (2) и (3) при значении безразмерного параметра нагруженности $\xi = 2$ дают одинаковый результат $K_\gamma = 2$.

Анализ этих формул показал, что с достаточно хорошей точностью для инженерных расчетов можно построить зависимость для всего диапазона изменения параметра ξ.

При варьировании безразмерного параметра в интервале $0 \le \xi \le 10$ для коэффициента угла перекоса K_γ получена функция в виде

$$K_\gamma = 1 + 0.57\xi^{4/5}, \tag{4}$$

которая удовлетворительно соответствует (погрешность не более 5%) зависимостям (2) и (3).

На рис. 1 показаны графики зависимостей K_γ от ξ: ◆ – при $\xi \le 2$ по формуле (2), ■ – при $\xi \ge 2$ по формуле (3), ▲ – при $0 \le \xi \le 10$ по формуле (4).

Учитывая, что условие прочности по контактным напряжениям запишется в виде

$$\sigma_\gamma \le [\sigma_H], \tag{5}$$

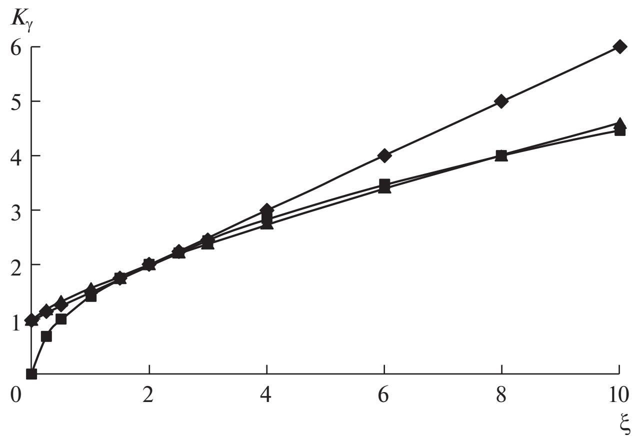


Рис. 1. Зависимости коэффициента угла перекоса от безразмерного нагрузочного параметра по формулам: ◆ – при $\xi \leq 2$ (2); ■ – при $\xi \geq 2$ (3); ▲ – при $0 \leq \xi \leq 10$ (4).

где $[\sigma_H]$ – допускаемое контактное напряжение, то из соотношений (1), (4) и (5) получаем

$$\sigma_\gamma = \sqrt{1 + 0.57\zeta^{0.8}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\left(1-\nu^2\right)}}\sqrt{\frac{qE}{R}} \leq [\sigma_H],$$

или

$$0.57\zeta^{0.8} \leq \frac{[\sigma_H]^2}{a_1^2 qE/R} - 1,$$

или

$$\zeta^{0.8} \leq \frac{1.75R[\sigma_H]^2}{a_1^2 qE} - 1.75,$$

или

$$\zeta \leq \left[\frac{1.75R[\sigma_H]^2}{a_1^2 qE} - 1.75\right]^{5/4}.$$

Отсюда для допустимого угла перекоса окончательно получаем выражение

$$[\gamma] \leq \frac{\alpha_H}{l}\left[\frac{10R[\sigma_H]^2}{qE} - \frac{7}{4}\right]^{5/4}. \qquad (6)$$

Анализ формулы (6) показывает, что в отличие от существующих решений для допускаемого угла перекоса, $[\gamma]$ зависит от многих параметров: материал, геометрия, а также силовые факторы.

Несмотря на важность параметра $[\gamma]$, в международных исследованиях и разработках его аналитическое определение отсутствует. Среди отечественных авторов следует отметить работы [16, 17], в которых используется условная удельная расчетная нагрузка, представляемая в виде произведения номинальной удельной нагрузки на ряд коэффициентов, учитывающих реальные условия работы передачи. Такой подход опре-

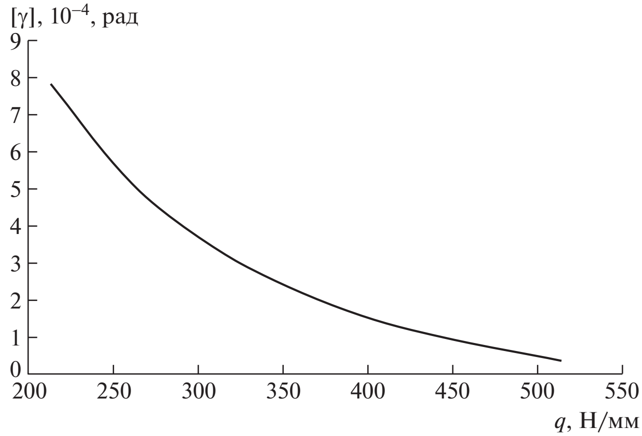


Рис. 2. Зависимость допускаемого угла перекоса от погонной нагрузки в зубчатом зацеплении.

деления удельной нагрузки вызывает возражения из-за условности учета реальных условий работы передачи при определении фиктивной расчетной удельной нагрузки в зацеплении.

Определим допускаемый угол перекоса для зубчатой передачи из примера расчета ГОСТ [20]. Параметры кинематической пары зубчатой передачи: делительный диаметр и количество зубьев шестерни $d_1 = 166.7$ мм и $Z_1 = 32$ соответственно; передаточное число передачи $u = 2$; модуль зацепления $m = 5$ мм; ширина зубчатого венца $b_w = 60$ мм; окружная сила в зацеплении $P_t = 25635$ Н; приведенный радиус кривизны зубьев $R_1 = 19$ мм; допускаемые контактные напряжения $[\sigma_H] = 1075$ Мпа; модуль упругости материалов зубьев $E = 21000$ Н/мм^2.

На рис. 2 показан график зависимости допустимого угла перекоса в зубчатом зацеплении от погонной нагрузки для указанных выше величин.

Расчеты показали, что при варьировании погонной нагрузки в диапазоне 214–513 Н/мм, допустимый угол перекоса для передачи изменяется в пределах $(7.81-0.39) \times 10^{-4}$ рад (рис. 2). А для нагрузки 427 Н/мм, что имеет место в рассматриваемом примере, он равняется 1.187×10^{-4} рад.

Таким образом, предложен новый подход для определения важного параметра для прочностного расчета – допускаемого угла перекоса в зубчатых зацеплениях.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Короткин В.И., Газзаев Д.А., Сухов Д.Ю.* Контактная напряженность прямых зубьев эвольвентных зубчатых передач в условиях перекосов в зацеплении // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2011. № 4. С. 83.
2. *Han X., Hua L., Deng S., Luo Q.* Influence of alignment errors on contact pressure during straight bevel gear meshing process // Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition). 2015. Т. 28. № 6. P. 1089.

3. *Попов А.П., Каиров А.С.* Контактная прочность эвольвентного зацепления с учетом перекоса зубчатых колес // Прогресивні технології і системи машинобудування. 2007. № 2 (34). С. 183.

4. *Короткин В.И., Колосова Е.М., Онишков Н.П.* Оценка нагрузочной способности химико-термически упрочненных зубчатых передач с локальным контактом зубьев // Вестник машиностроения. 2020. № 8. С. 34.

5. *Roda-Casanova V., Sanchez-Marin F., Iserte J.L.* An approach for solving the contact problem in spur gear transmissions considering gear misalignments // В сборнике: Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference. Сер. “ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2015”, 2015.

6. *Нахатакян Ф.Г.* Контактные напряжения и деформации цилиндров при перекосе // Вестник машиностроения. 2011. № 10. С. 45.

7. *Korotkin V.I.* Increasing the useful life and load-bearing capacity of the drives of oil pumping units // Chemical and Petroleum Engineering. 2018. Т. 54. № 3–4. P. 165.

8. *Korotkin V.I., Kolosova E.M.* Modification of gearing for improving technical and economic characteristics of drive gearboxes in oil pumping units // Chemical and Petroleum Engineering. 2021. Т. 57. № 3–4. P. 231.

9. *Proskokov A.V., Yanyushkin A.S.* Calculation of stress-strain state and contact stresses in the process of chip formation // Solid State Phenomena. 2021. Т. 313. P. 59.

10. *Liu P., Zhao H., Huang K., Chen Q., Xiong Y.* Research on normal contact stiffness of micro-segments gear based on improved fractal model // Jixie Gongcheng Xuebao. 2018. Т. 54. № 7. P. 114.

11. *Zelený V., Sýkora J., Skalník P., Linkeová I.* Mathematical approach to evaluate involute gear profile and helix deviations without using special gear software // Mechanism and Machine Theory. 2019. Т. 135. P. 150.

12. *Дорофеев В.Л., Голованов В.В., Гукасян С.Г., Дорофеев Д.В.* Отображение погрешностей и контактных напряжений в зубчатых передачах многозначными и многолистными функциями // Современное машиностроение. Наука и образование. 2016. № 5. С. 402.

13. *Попов В.В.* Определение нормального контактного смещения прямозубой эвольвентной зубчатой передачи при моделировании движения зубчатых механизмов // В сборнике: XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2016). Сборник трудов конференции. 2017. С. 85.

14. *Нахатакян Ф.Г., Нахатакян Д.Ф.* Распределение контактной нагрузки вдоль цилиндров при перекосе // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2018. № 2. С. 51.

15. *Yu L., Wang G., Zou S.* The calculation of meshing efficiency of a new type of conical involute gear // Strojniski Vestnik. 2017. Т. 63. № 5. P. 320.

16. *Гоман А.М., Ишин Н.Н., Скороходов А.С., Старжинский В.Е.* Расчет предельного угла перекоса цилиндрических зубчатых колес // Известия тульского государственного университета. Технические науки. 2011. № 5-2. С.176.

17. *Иванов С.Л., Кузькин А.Ю., Скутельник В.В.* Допустимый угол перекоса осей зубчатых передач механических трансмиссий машин // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. № 9. С. 210.

18. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 2 / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 463 с.

19. *Нахатакян Ф.Г.* Решение плоской контактной задачи теории упругости с помощью модели упругого полупространства // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 63.

20. ГОСТ 21354-87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. М.: Изд-во стандартов. 1988. 127 с.

EDN: WPDYHS
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 50–62**

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 534.26

ВТОРИЧНОЕ ПОЛЕ КОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

© 2022 г. О. И. Косарев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

e-mail: kosarevoi@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.
Принята к публикации 20.10.2021 г.

Предложен новый метод решения задачи вторичного гидроакустического поля конечной упругой цилиндрической оболочки в дальней зоне. Метод включает: определение корней дисперсионного уравнения собственных колебаний оболочки в жидкости, расчет вынужденных колебаний составной оболочечной конструкции под действием падающего поля, использование точного импеданса излучения конечной оболочки в жидкости, расчет вторичного поля, включающего поле, рассеянное на упругой оболочке, и поле, отраженное от абсолютно твердой оболочки.

Ключевые слова: точное решение, излучение, звуковое давление, импеданс, цилиндрическая оболочка, волновое уравнение, волновое число

DOI: 10.31857/S0235711922030087

Статья посвящена методу расчета вторичного гидроакустического поля конечной упругой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, в дальней зоне. Первичное поле это звуковое поле, излучаемое колеблющейся оболочкой под действием внутренних источников возбуждения, дискретных сил приложенных к оболочке. Вторичное поле (дифрагированное) это поле, которое возникает в результате действия на оболочку внешнего падающего звукового поля, создаваемого зондирующим источником. В результате этого возбуждаются вынужденные колебания оболочки, и возникает излученное рассеянное (дифрагированное) гидроакустическое поле. Рассеянное поле включает две составляющие: 1) поле излученное, создаваемое вынужденными колебаниями оболочки; 2) поле, отраженное от оболочки, как от абсолютно твердого тела. Процессы излучения и дифракции могут рассматриваться как в ближнем, так и в дальнем поле. Рассматривается конечная оболочка со свободными концами.

Исследованиям колебаний, излучения и дифракции цилиндрических оболочек посвящено большое количество работ [1–20]. Эти работы регулярно появляются, начиная с середины прошлого века, что свидетельствует о незавершенности и, следовательно, актуальности исследований. Импеданс излучения цилиндрической оболочки используется при расчетах вынужденных колебаний и излучения оболочек в ближнем и дальнем поле.

Проведем анализ современного состояния решения задач, связанных с импедансом, колебаниями и вторичным полем конечных упругих цилиндрических оболочек на основе наиболее известных работ.

В широко известной книге [1] приведено решение волнового уравнения для расходящейся цилиндрической волны в виде

$$p = A_0 H_n^{(1)}(rk)\, e^{ik_z z} \cos(n\varphi) e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

где $H_n^{(1)}(arg)$ – функция Ганкеля; $k = \omega/c$ – волновое число; $\omega = 2\pi f$ – частота колебаний; c – скорость звука в среде (жидкости); k_z – осевое волновое число; n – окружная гармоника по углу φ; t – время; r – радиальная координата.

Решение (1) не верное, т.к. в вместо k должно быть k_r, и частота ω

$$\omega = kc = c\sqrt{k^2 + k_z^2}.$$

При $k_z \neq 0$ определена не верно. В [1] рассматривалась только плоская задача.

В работе [2] со ссылкой на [1] приведено решение задачи излучения колеблющейся бесконечной цилиндрической оболочки, на поверхности которой задана деформация в виде

$$w(z) = w_0 \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right), \tag{2}$$

где λ – длина волны деформации; m – продольная гармоника; z – осевая координата. Формула звукового давления в ближнем поле приведена в виде

$$p = \frac{i\rho\omega H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right) w(z)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\, H_n^{(2)\prime}\left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}, \tag{3}$$

где ρ – плотность среды. В формуле (3) принято $k_z = 2\pi m/\lambda$. Но в формуле (3) k_z должно быть осевым волновым числом звуковой волны, распространяющееся в жидкости, а не изгибной формой колебаний (деформаций) оболочки – $2\pi m/\lambda$ (2). Эти параметры являются разнородными по физической природе и, следовательно, не могут быть взаимозаменяемыми. Поэтому формулу (3) нельзя признать обоснованной.

Задачи дифракции звука на упругих цилиндрических оболочках в ближнем поле впервые были рассмотрены в работах [3, 4]. Работа [3] посвящена дифракции на ограниченной оболочке с граничными условиями Навье. В работе [4] рассмотрена дифракция на бесконечной оболочке. Уравнения колебаний оболочки в перемещениях взяты из [5]. Звуковое давление на поверхности оболочек, обусловленное деформацией ограниченной и бесконечной оболочек, представлено формулой, в которой осевое волновое число k_z является неизвестной переменной интегрирования в пределах $(-\infty, \infty)$. Формула звукового давления такая же, как (5), о которой сказано ниже. В работах [6, 7] рассмотрены задачи дифракции звука на бесконечном абсолютно твердом цилиндре.

В фундаментальной монографии по акустике [8] приведена формула импеданса излучения колеблющейся цилиндрической оболочки (по мнению многих авторов бесконечной оболочки)

$$\frac{p}{w} = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_z^2}\, H_n^{(2)\prime}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}, \quad k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}. \tag{4}$$

Недостатком формулы (4) является то, что она не доведена до конца, т.к. в ней осевое волновое число k_z не определено, не указано как его определять.

О волновом числе k_z из [8] известно следующее: 1) дана ссылка на [2], где $k_z = 2\pi m/\lambda$; 2) в результате некорректного определения скорости фронта бегущей волны постоянной фазы получено $k_z/k_r = \mathrm{tg}\theta$. На основе этого принято $k_z = k\sin\theta$, где θ угол распространения волны, который якобы зависит от частоты (от k). При высоких частотах, таких, что $k^2 \gg k_z^2$, излучаемые волны распространяются перпендикулярно к поверхности цилиндра, по мере уменьшения частоты (k) угол θ увеличивается и при $k = k_z$ происходит акустическое короткое замыкание; 3) в случае $k < k_z$ и $k_r^2 = k^2 - k_z^2 < 0$, когда величина k_r становится мнимой, рекомендуется функцию Ганкеля заменять на функцию Макдональда. Возможность превышения $k_z > k$ допускали многие авторы [3, 4, 8, 9, 12]. В итоге, ссылаясь на значения $k_z = 2\pi m/\lambda$, не критикуя возможность изменения k_z – как переменной интегрирования в пределах $-\infty < k_z < \infty$ [3, 4] и признавая возможность $k_z > k$, автор [8] не смог дать формулу определения осевого волнового числа k_z.

В работе [9] для конечной упругой цилиндрической оболочки виброперемещение представлено в виде интеграла Фурье, а решение волнового уравнения принято в виде

$$p^*(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) e^{ik_z z} dk_z.$$

Излучаемое ближнее поле, вызванное вибрациями конечной упругой оболочки, представлено (без суммирования гармоник) в виде

$$p_{sw} = \frac{i\rho\omega}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) w(z') e^{i\xi(z-z')}}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n'\left(\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)} dz' dk_z. \tag{5}$$

Формулы звукового давления излучаемого ближнего поля, вызванного вибрациями оболочек, в работах [3, 4, 9] (при интегрировании в пределах $-\infty < k_z < \infty$), совпадают, но из-за их необоснованности доверия не вызывают.

Например, в [9] при рассмотрении излучения пульсирующего цилиндра при интегрировании по k_z в пределах $(-\infty < k_z < \infty)$ выполнялась замена переменных $k_z = k\sin(\alpha_1 + i\alpha_2)$ с последующим определением α_1 и α_2.

В работах [4, 9] также решалась задача дифракции звука на бесконечной импедансной оболочке в ближнем поле. Без обоснования принято $k_z = k\sin\psi$, где ψ – угол падения звуковой волны.

В работе [10] впервые решена задача излучения колеблющейся конечной цилиндрической оболочки в дальнем поле с использованием формулы Кирхгофа. Задача вынужденных колебаний оболочки не решалась. Перемещения задавались в виде гармонической функции. В качестве импеданса использован импеданс излучения бесконечной цилиндрической оболочки (3), в котором параметр $2\pi/\lambda$ без обоснований заменен на $\xi = -k\cos\theta$. Замена объяснена тем, что в формулу Кирхгофа входят интегралы с экспонентами $\exp(ikz\cos\theta)$ (12). Эти интегралы необоснованно названы преобразованиями Фурье и их отношение гипотетически принято в качестве импеданса излучения конечной оболочки. Такой выбор импеданса нельзя признать теоретически обоснованным.

Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки приведен в [11]. Колебательная скорость оболочки задана в таком же виде, как (2) только $\lambda = L$, где L – длина оболочки. Авторы представили давление излучаемого поля в виде

$$p = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1 e^{i(z-\xi)\gamma} d\gamma, \tag{6}$$

где в качестве Z_1 взяли формулу для бесконечной цилиндрической оболочки (4). Импеданс излучения ограниченной оболочки в конечном виде можно представить формулой

$$Z_3 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}\right)}{\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}\right)}. \tag{7}$$

Формула (7) точно такая же, как (3), с учетом $\lambda = L$. Отметим, что ссылка на [2] отсутствует. Замечания, высказанные по поводу (3), относятся и к данному случаю. Здесь причиной получения ошибочного результата является формула (6). В [11] ошибочно сказано, что при стремлении $L \to \infty$ импеданс ограниченной оболочки стремится к импедансу бесконечной оболочки.

В работе [12] рассмотрена задача дифракции звука на конечном абсолютно твердом цилиндре в дальнем поле с использованием формулы Кирхгофа

$$P_{\text{rad}} = P_0\frac{e^{ikR}i}{R\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos n\varphi\int_{-L}^{L}\frac{J_n'(ak\sin\psi)}{H_n'(ak\sin\psi)}dz, \tag{8}$$

где ψ – угол падения звуковой волны. В формуле Кирхгофа в качестве импеданса взят импеданс для бесконечного цилиндра. Вместо полного давления взято только давление рассеянного поля и производная полного давления, вопреки граничному условию, не приравнена к нулю. В результате формула (8) ошибочная.

Задача дифракции звука на твердом цилиндре, ограниченном по торцам полусферами, рассмотрена в [13] в дальнем поле. В ней также как в [12] в формуле Кирхгофа вместо суммарного полного поля ошибочно взята только часть его, т.е. рассеянное поле.

В ряде работ предложены численные методы расчета [8, 14, 15], но они по сложности и трудоемкости значительно превосходят аналитические методы. Современным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ) на базе программного комплекса ANSYS. В работе [15] проведено моделирование рассеянного поля методом МКЭ на модели цилиндрической оболочки длиной 10 м и диаметром 0.9 м. В этой же работе сказано о невозможности расчета дальнего гидроакустического поля реальных подводных объектов методом МКЭ, поскольку количество элементов расчетной модели возрастает пропорционально кубу дистанции. В принятой модели оболочка была представлена 20000, а жидкость – 180000 элементами.

Проведенный анализ показал, что рассматриваемая задача до сих пор полностью не решена, аналитические формулы, позволяющие рассчитать суммарное вторичное поле конечной цилиндрической оболочки в дальней зоне при произвольных углах падения и наблюдения, отсутствуют.

Сказанное является обоснованием актуальности рассматриваемой задачи.

Настоящая статья является продолжением и развитием работы [16], в которой приведено решение задачи дифракции звука на конечной абсолютно твердой цилиндрической оболочке в дальнем поле.

Целью исследований является разработка теоретических основ аналитического метода расчета полного дифрагированного поля конечной упругой цилиндрической оболочки в дальней зоне при произвольных углах наблюдения. Новизна заключается в том, что предложенный метод является полным, т.е. включает расчет вынужденных колебаний цилиндрической оболочки, возбуждаемых падающим полем, и рассеяние на оболочке как упругого, так и твердого тела. Метод предложен впервые. В расчеты вынужденных колебаний оболочки и вторичного поля входит импеданс излучения цилиндрической оболочки, который по-разному проявляется в дисперсионном уравнении и в формуле Кирхгофа. Впервые в дисперсионном уравнении и в расчете звукового давления вторичного поля использован точный импеданс излучения, в котором осевое волновое число k_z, определено на основе решения волнового уравнения.

Полезность метода заключается в том, что его можно использовать при решении различных прикладных задач гидроакустики, в том числе при акустическом проектировании оболочечных конструкций.

Рассматривается задача дифракции звука на конечной упругой цилиндрической оболочке, погруженной в жидкость, в дальнем поле. Рассеяние звуковых волн рассматривается на цилиндрической поверхности оболочки без учета концевых заглушек (сферических и др.). В ряде прикладных задач заглушки отсутствуют, и учитывать их не требуется. При необходимости рассеяние на заглушках можно рассматривать отдельно [8, 12]. Оно имеет смысл при малых углах падения ($\psi \approx 0°$–$5°$) и учете продольных колебаний цилиндрической оболочки.

Обозначения параметров оболочки: a – радиус; L – длина; h – толщина. Источником излучения звука является монополь с объемной скоростью V, находящийся на большом расстоянии H от оболочки. Вынужденные колебания оболочки возбуждаются падающим на поверхность оболочки звуковым полем.

Звуковое давление поля, падающего на оболочку под углом ψ к оси z оболочки [16]

$$p_0 = A_0 e^{ikz\cos\psi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr\sin\psi)\cos n\varphi, \quad A_0 = \frac{i\rho\omega V e^{-ikH}}{4\pi H}. \tag{9}$$

Излучаемое поле, определяемое решением волнового уравнения в цилиндрических координатах (без суммирования гармоник), представим в виде

$$p_s = B_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) e^{ik_z z}\cos n\varphi, \tag{10}$$

где B_n – искомая функция, определяемая из граничных условий; $H_n^{(2)}(arg)$ – функция Ганкеля второго рода (далее индекс (2) опускаем); k_z – искомый коэффициент. Этот коэффициент определим из решения волнового уравнения, которое можно представить в виде $k^2 = k_r^2 + k_z^2$. Математическим решением этого уравнения является $k_r\, k\sin\theta$, $k_z = k\cos\theta$. Физический смысл угла θ – это угол между направлением распространения излучаемой цилиндрической волны с волновым числом k и осью z в цилиндрической системе координат. Новизна этого решения заключается в определении осевого волнового числа k_z в явном виде. Полезность заключается в однозначном определении импеданса излучения цилиндрической оболочки (4), безотносительно к ее длине, т.е. конечной или бесконечной. Формула импеданса (4) с $k_z = k\cos\theta$ устраняет имевшиеся разногласия и различные ее трактовки и становится основой для решения всех задач гидроакустики любых цилиндрических оболочек в жидкости.

С использованием граничных условий на поверхности цилиндрической оболочки $\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right| = \rho\omega^2 w(z)\cos n\varphi$, найдем функцию B_n

$$B_n = \frac{\rho\omega^2 w(z) - k\sin A_0 e^{ikz\cos\psi}\varepsilon_n i^n J_n'(ak\sin\psi)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n'\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) e^{i\gamma z}}.$$

Давление звукового поля, рассеянного вблизи оболочки

$$p_s = \left[\frac{\rho\omega^2 w(z) - k\sin A_0 e^{ikz\cos\psi}\varepsilon_n i^n J_n'(ak\sin\psi)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n'\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}\right] H_n\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)\cos n\varphi. \tag{11}$$

Рассеянное звуковое поле в дальней зоне определим с использованием формулы Кирхгофа [10]

$$p_N = \frac{1}{4\pi}\iint\left[p\frac{\partial G(N,A)}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n}G(N,A)\right]ds,$$

$$G(N,A) = \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1}, \quad R_1 = |N,A|.$$

В результате проведенных преобразований этого выражения, для краткости опущенных, формула рассеянного поля в дальней зоне имеет вид

$$P_N = -\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\frac{e^{\frac{i\pi n}{2}}}{2}\left[-\mu J_n'(\mu)\int_0^L pe^{ikz\cos\theta}dz + aJ_n(\mu)\int_0^L \frac{\partial p}{\partial r}e^{ikz\cos\theta}dz\right], \tag{12}$$

где $\mu = ak\sin\theta$. Следует отметить, что формула (12) является развитием формулы, приведенной в [10]. Отметим, что полный вывод формулы в [10] не был приведен и в окончательной формуле и в промежуточных выкладках имелись описки и ошибки, которые здесь исправлены.

Полное поле на поверхности оболочки $p = p_0 + p_s$. Подставим в (12) выражения p_0 (9) и p_s (11), заменим $\exp(i\pi n/2) = i^n$ и получим давление вторичного поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой в дальней зоне

$$p_N = -E\frac{i^n}{2}\left\{-\mu J_n'(\mu)\left[A_0\varepsilon_n i^n T_n\int_0^L e^{ik\beta z}dz + \int_0^L \frac{a\rho\omega^2 H_n(\mu^*)\,w(z)e^{ikz\cos\theta}}{\mu^* H_n'(\mu^*)}dz\right] + Y_n\right\},$$

$$T_n = J_n(\eta) - \frac{\eta J_n'(\eta)\,H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)}, \quad Y_n = aJ_n(\mu)\int_0^L \rho\omega^2 w(z)e^{ikz\cos\theta}dz,$$

где $\mu^* = a\sqrt{k^2 - k_z^2}$; $\eta = ak\sin\psi$; $E = \dfrac{e^{-ikR}}{R}$; $\beta = \cos\psi + \cos\theta$.

Полное дальнее поле p_N состоит из суммы двух частей, одна из которых p_t соответствует отраженному полю как от абсолютно твердого тела, и вторая p_w — вызванная вибрациями упругой оболочки $p_N = p_t + p_w$.

С учетом суммирования гармоник дальнее поле, отраженное абсолютно твердой цилиндрической оболочкой имеет вид

$$p_t = \frac{e^{-ikR}}{R}\frac{A_0\mu}{2\mu^*}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n i^{2n} J_n'(\mu)}{H_n'(\mu^*)}[T_\eta]\int_0^L e^{ikz\beta}dz, \tag{13}$$

где $T_\eta = \mu^* H_n'(\mu^*)\,J_n(\eta) - \eta J_n'(\eta)\,H_n(\mu^*)$, $\beta = \cos\psi + \cos\theta$.

Рассеянное дальнее поле, вызванное вибрациями упругой цилиндрической оболочкой

$$p_w = -\frac{e^{-ikR}a\rho\omega^2}{2R}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left[J_n(\mu) - \frac{\mu J_n'(\mu)\,H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)}\right]\int_0^L w(z)e^{ikz\cos\theta}dz. \tag{14}$$

Для расчета диаграммы направленности в дальнем поле в общем случае нужны обе формулы (13) и (14). Формулы можно упростить, если ограничиться определением давления только в направлениях зеркального отражения $\theta_1 = \pi - \psi$ и теневого луча $\theta_2 = \pi + \psi$.

Для расчета по формуле (14) нужно знать деформации $w(z)$ оболочки, которые должны определяться из расчета вынужденных колебаний оболочки в жидкости, возбуждаемых падающим полем. Считаем, что внешнее звуковое давление на оболочку, возбуждающее ее колебания, происходит в радиальном направлении по координате w [17–20].

Для каждой окружной гармоники n с учетом опущенной временной зависимости $e^{i\omega t}$ уравнение вынужденных колебаний оболочки в жидкости можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} L_{11}+\omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22}+\omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33}+\omega_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + p_s \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Полное решение уравнения (15) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения, содержащего восемь постоянных, и частного решения вынужденных колебаний, возбуждаемых суммарным давлением $p = p_0 + p_s$

$$\begin{gathered} u = U\cos(n\varphi) + u_p, \quad v = V\sin(n\varphi) + v_p, \quad w = W\cos(n\varphi) + w_p, \\ U = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad V = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad W = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{gathered} \tag{16}$$

где n – окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, α_{jn} – корни дисперсионного уравнения, $j = 1–8$ – порядковые номера корней; C_{jn} – искомые коэффициенты; Δ_{jn} – миноры матрицы уравнения колебаний оболочки (15); $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний; f – частота колебаний; $\xi = z/a$. В решение (16) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn}. Для получения дисперсионного уравнения решение (16) представим в виде

$$u = Ue^{i\alpha\xi}\cos n\varphi; \quad v = Ve^{i\alpha\xi}\sin n\varphi; \quad w = We^{i\alpha\xi}\cos n\varphi; \quad \xi = z/a.$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (15) при $p_0 = 0$ получим уравнение свободных колебаний оболочки

$$\begin{bmatrix} L_{11}+\omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22}+\omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33}+\omega_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{s0} \end{Bmatrix}, \tag{17}$$

где p_{s0} – звуковое давление в жидкости, вызываемое свободными колебаниями оболочки, учитывающее влияние присоединенной массы жидкости. Считая, что излучение происходит в радиальном направлении по координате w, т.е. нормально к поверхности оболочки, принимаем $r = a$, $\theta = 90°$ и, следовательно, в (4) получаем $k_z = 0$

$$p_{s0} = \frac{\rho_0\omega^2 w H_n^{(2)}(ak)}{kH_n^{(2)'}(ak)}.$$

Входящие в решение показатели экспонент α являются корнями дисперсионного уравнения свободных колебаний. После соответствующих преобразований дисперсионное уравнение колебаний цилиндрической оболочки в жидкости получим в виде [21]

$$\frac{\Delta_0(\alpha)}{\Delta^1(\alpha)} - \frac{\rho_0\omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{qkH_n^{(2)'}(ka)} = 0. \tag{18}$$

Однако отличие полученного результата заключается в том, что ранее в [21] это уравнение было получено не обосновано, исходя из ошибочных предпосылок определения p_{s0} [9]. Определение корней проводится так же, как в [21].

Определим частное решение уравнения (15), приняв его в виде ($u_p \cos n\varphi$, $v_p \sin n\varphi$, $w_p \cos n\varphi) e^{i\gamma\xi}$, где $\gamma = k\alpha\cos\psi$ фаза падающего поля.

При подстановке решений в уравнение (17) элементами матрицы будут

$$L_{11} = \gamma^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 + b_1\gamma^2, \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2}\gamma n = -L_{21}, \quad L_{13} = \gamma\nu - \frac{z_1 b_1}{r}\gamma^3,$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2}\left(1 + 4\delta^2\right)\gamma^2 - n^2\left(1 + b_2 + 2\frac{z b_2}{p} + \delta^2 + \frac{a_2}{r^2}\right),$$

$$L_{23} = L_{32} = -n\left[1 + b_2 + \frac{z_2 b_2}{r} - (2-\nu)\delta^2\gamma^2 + n^2\left(\delta^2 + \frac{z_2 b_2}{r} + \frac{a_2}{r^2}\right)\right], \tag{19}$$

$$L_{31} = -L_{13}, \quad L_{33} = -1 - b_2 - n^4\frac{a_2}{r^2} - \delta^2\left(\gamma^2 - n^2\right)^2 - 2\frac{z_2 b_2}{r} - \gamma^4\frac{a_1}{r^2},$$

$$\delta^2 = \frac{h^2}{12a^2}, \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2 a^2 \rho_*\left(1-\nu^2\right)}{E}, \quad q = \frac{E_1 h}{\left(1-\nu^2\right)a}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где a_1, b_1 — параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 — параметры шпангоутов; $E_1 = E_0(1 + i\chi)$ — комплексный модуль упругости; χ — потери в материале оболочки; $r = a$; ν — коэффициент Пуассона; ρ_* — плотность материала оболочки.

Обозначив матрицу в (15)

$$L_{i,j} = \begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix},$$

определим вектор частного решения уравнения (15)

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \frac{a}{q}\left[L_{i,j}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + p_s \end{Bmatrix}. \tag{20}$$

Из (20) получим радиальное перемещение

$$w_p = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} a\left(p_0 + p_s\right), \tag{21}$$

где Δ_1 — минор и Δ_0 — определитель матрицы $L_{i,j}$, с учетом (19)

$$\Delta_1 = \left(L_{11} + \omega_*^2\right)\left(L_{22} + \omega_*^2\right) + L_{12}^2,$$

$$\Delta_0 = \left(L_{11} + \omega_*^2\right)\left(L_{22} + \omega_*^2\right)\left(L_{33} + \omega_*^2\right) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} +$$
$$+ L_{13}\left(L_{22} + \omega_*^2\right)L_{13} - \left(L_{11} + \omega_*^2\right)L_{23}^2 + L_{12}^2 L_{33}.$$

После подстановки выражений давления падающего поля p_0 и рассеянного поля p_s в формулу (21) и проведения соответствующих преобразований получим

$$w_p = \frac{A_0\varepsilon_n i^n\left[J_n(\eta) - \dfrac{\eta J_n'(\eta) H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)}\right]e^{ikz\cos\psi}}{\dfrac{q}{a}Z_{\text{м}} - \dfrac{a\rho\omega^2 H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)}}, \tag{22}$$

где $Z_{\text{м}} = \Delta_0/\Delta_1$ – механический импеданс оболочки. Подставим $w(z) = w_p$ из (22) в (14) и с учетом (13) и (14), определим окончательное выражение $p_{N.}$

Методика составления уравнений вынужденных колебаний для составной оболочечной конструкции, включающей набор цилиндрических оболочек, соединенных между собой кольцами, для вторичного поля аналогична методике, изложенной в [21] для первичного поля, но отличается от нее выражениями правых частей уравнений вынужденных колебаний, обусловленных падающим полем.

В результате получается система матричных уравнений вынужденных колебаний относительно перемещений колец z_k

$$\begin{gathered}
\left[M_0 - H_0^4 G_1^1(0)\ C_1^1 H_0^2\right]z_0 - H_0^4 G_1^1(0) C_1^2 H_1^1 z_1 = \\
= H_0^4 \sum_{s=1}^{s_v}\left\{\Phi_{s1}F_{s1} - G_1^1(0)\left[C_1^1 f_{s1} + C_1^2 f_{s1} e^{i\theta_{sk}\ell_k}\right]\right\}, \\
H_k^3 G_k^1(\ell_k) C_k^1 H_{k-1}^2 z_{k-1} + \\
+\left[M_k + H_k^3 G_k^1(\ell_k) C_k^2 H_k^1 - H_k^4 G_{k+1}^1(0) C_{k+1}^1 H_k^2\right]z_k - H_k^4 G_{k+1}^1(0) C_{k+1}^2 H_{k+1}^1 z_{k+1} = \\
= \sum_{s=1}^{s_v}\left\{H_k^4 \Phi_{s,k+1}F_{s,k+1} - H_k^3 \Phi_{sk}F_{sk}e^{i\theta_{sk}\ell_k} + H_k^3 G_k^1(\ell_k)\left[C_k^1 f_{sk} + C_k^2 f_{sk} e^{i\theta_{sk}\ell_k}\right] -\right. \\
\left. - H_k^4 G_{k+1}^1(0)\left[C_{k+1}^1 f_{s,k+1} + C_{k+1}^2 f_{s,k+1} e^{i\theta_{sk}\ell_k}\right]\right\}, \\
k = 1, 2 \ldots n-1; \\
H_n^3 G_n^1(\ell_n) C_n^1 H_{n-1}^2 z_{n-1} + \left[M_n + H_n^3 G_n^1(\ell_n)\ C_n^2 H_n^1\right]z_n = \\
= H_n^3 \sum_{s=1}^{s_v}\left\{\Phi_{sn}F_{sn}e^{i\theta_{sn}\ell_n} - G_n^1(\ell_n)\left[C_n^1 f_{sn} + C_n^2 f_{sn} e^{i\theta_{sn}\ell_n}\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Общее матричное уравнение для оболочечной конструкции, состоящей из набора отсеков и колец, имеет ленточную диагональную структуру расположения блок-матриц размером 4 × 4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются искомые векторы перемещений колец z_q.

После определения векторов перемещений z_q на кольцах q из уравнения (23) можно построить АЧХ колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом.

Форма колебаний для каждой оболочки определяется выражением [21]

$$\zeta_q(y) = G_q^1(y)\left[C_q^1\left(H_{q-1}^2 Z_{q-1}\right) + C_q^2\left(H_q^1 Z_q\right)\right] + W_p, \quad 0 \le y \le \ell_q.$$

Формулы (13), (14), (22), (23) и метод в целом по сути новые, не имеют аналогов. Метод точный, т.к. основан на точной теории. Никаких допущений, предположений

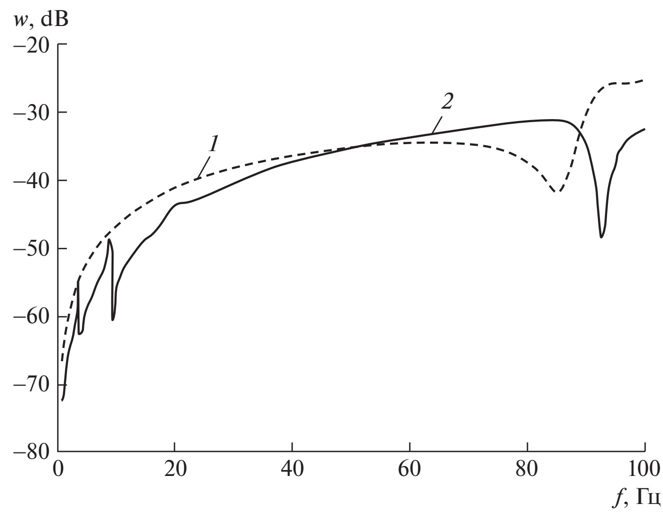


Рис. 1. АЧХ колебаний оболочки: *1* – $\psi = 80°$; *2* – $\psi = 30°$.

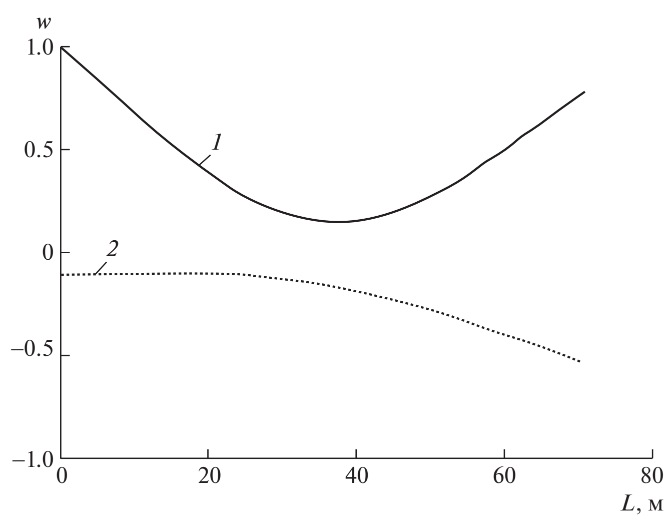


Рис. 2. Форма колебаний оболочки.

и условий, ограничивающих точность решения, принято не было. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы на *Fortran*. По ним проведены расчеты.

На рис. 1 в качестве примера показана АЧХ изгибных колебаний цилиндрической оболочки при двух углах падения для $n = 1$. Параметры оболочки: $a = 4$ м, $L = 70$ м, $h =$ $= 0.04$ м. Шаг вычисления по частоте 0.25 Гц. По осям координат отложены радиальные ускорения w в dB и частота в Гц.

Сравнивая АЧХ на рис. 1 с аналогичными АЧХ, полученными при возбуждении колебаний оболочки дискретными силами [21 видим, что резонансные пики маловыра-

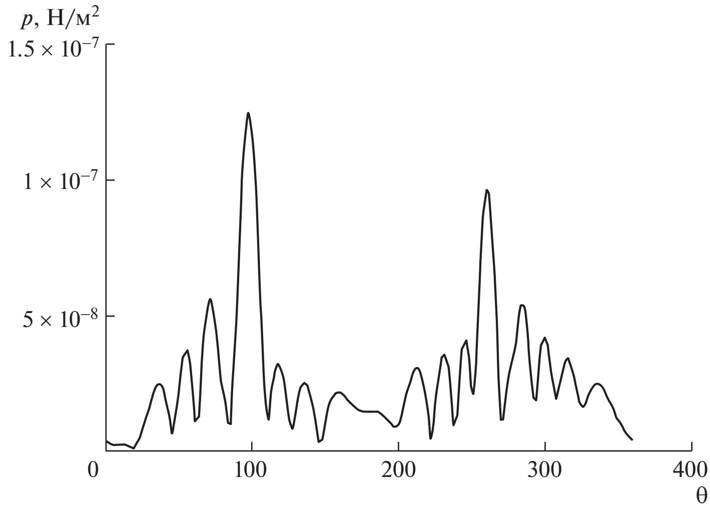


Рис. 3. Диаграмма направленности.

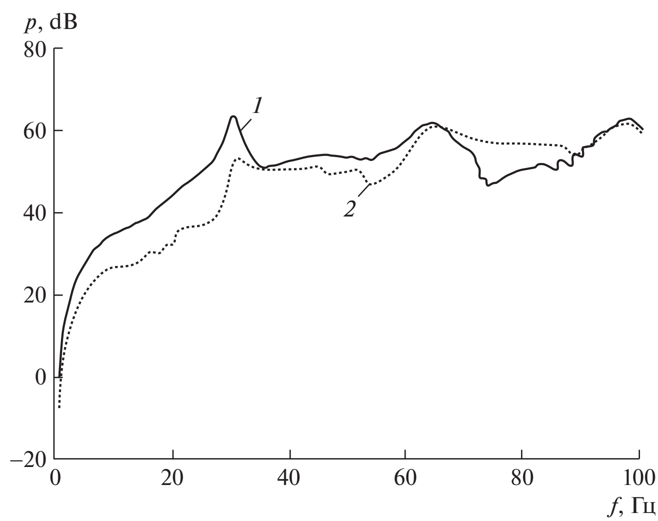


Рис. 4. АЧХ максимального звукового давления: *1* – $\psi = 30°$; *2* – $\psi = 80°$.

зительны, и при больших углах падения ψ вовсе пропадают, т.е. вид АЧХ зависит от угла падения.

На рис. 2 показана форма изгибных колебаний оболочки в области первого резонанса изгибных колебаний $f = 3.75$ Гц при $n = 1$, $\psi = 30°$, сплошная линия – мнимая (*Im*) и пунктирная линия действительная (*Re*) – составляющие.

На рис. 3 показана диаграмма направленности вторичного поля при угле падения $\psi = 80°$ на частоте $f = 100$ Гц. По осям отложены приведенное звуковое давление в долях 10^5 в размерности Н/м^2 и угол наблюдения ψ в градусах. На рис. 4 показано изменение максимального давления диаграммы направленности по частоте колебаний при двух углах падения по сумме восьми гармоник $n = 0–7$.

Таким образом, получено новое аналитическое решение задачи дифракции, позволяющее определить полное вторичное (дифрагированное) дальнее поле конечной упругой цилиндрической оболочки в жидкости.

Полученное решение является строго теоретически обоснованным (основанном на теории колебаний оболочек, волновом уравнении, формуле Кирхгофа), полученном без каких-либо допущений, ограничений и условий. Метод является теоретической основой практических расчетов при акустическом проектировании оболочечных конструкций в жидкости.

Новизна решения определяется следующим. При расчете колебаний и вторичного поля использован теоретически обоснованный точный импеданс излучения конечной цилиндрической оболочки в жидкости. Определены корни дисперсионного уравнения колебаний оболочки в жидкости. Определены АЧХ и формы вынужденных колебаний конечной упругой цилиндрической оболочки в жидкости, возбуждаемые падающим полем. Аналогов у предложенного метода нет. Экспериментальная проверка метода является самостоятельной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морз Ф.* Колебания и звук. М. -Л.: ГИТТЛ, 1946. 497 с.
2. *Miguel C. Junger.* The physical interpretation of the expression for an outgoing wave in cylindrical coordinates // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1953. № 1. P. 40.
3. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке. Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271.
4. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 2. С. 161.
5. *Kennard E.H.* A new approach in theory of shells // J. Appl. Mech. 1953. V. 20. P. 33.
6. *Winner F.M.* Sound diffraction by rigid spheres and circular cylinders // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1947. V. 19. P. 444.
7. *Хенл Х., Мауэ А., Вестифаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с. (Skudrzyk E. The foundations of acoustics. Springer-Verlag. Wien, New York. 1971).
9. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
10. *Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
11. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки // Акустический журнал. 1990. № 5. С. 898.
12. *Музыченко В.В.* Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. 336 с.
13. *Ильменков С.Л., Клещев А.А., Клименков А.С., Легуша Ф.Ф., Майоров В.С., Чижов В.Ю., Чижов Г.В.* Метод функций Грина в задаче дифракции звука на телах неаналитической формы // XXVII сессия РАО. СПб. 2014. С. 1.
14. *Williams W.E.* Diffraction by a cylinder of finite length. Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V. 52. P. 322.
15. *Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С.* Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов / Сб. трудов. XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС, 2008. С. 169.
16. *Косарев О.И.* К расчету вторичного поля конечной твердой цилиндрической оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. С. 98.

17. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литер., 1961. С. 222.
18. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник / Под ред. И. А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. С. 423.
19. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. С. 260.
20. *Love A.E.H.* A Treatise on the mathematical theory of elasticity / Ляв. А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. Изд. НКТП СССР. М.-Л. 1935. 674 с.
21. *Косарев О.И., Пузакина А.К., Нахатакян Д.Ф.* Вынужденные колебания конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 16.

EDN: ATNLXJ
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 63–71**

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.0

МЕТОДИКА ВЫБОРА СПОСОБОВ ГАЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАНЕСЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ГРУППЫ ДЕТАЛЕЙ В МЕЛКОСЕРИЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

А. С. Краско[1,2,*]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[2] *Российский технологический университет МИРЭА, Москва, Россия*
**e-mail: krasko_as@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.07.2021 г.
После доработки 11.11.2021 г.
Принята к публикации 20.12.2021 г.

В статье рассматривается проблема повышения эффективности конструкторско-технологических решений при изготовлении деталей мелкосерийного производства, характеризующихся различными конструктивными и технологическими признаками, а также малыми размерами партий. Предлагается методика выбора способов газотермического нанесения функциональных покрытий с учетом особенностей изготовления деталей в условиях мелкосерийного производства, обеспечивающих наибольшую экономическую эффективность.

Ключевые слова: газотермические способы нанесения покрытий, мелкосерийное производство, ответственные изделия, прочность сцепления, затраты на напыление

DOI: 10.31857/S0235711922020079

Повышение требований к эксплуатационным свойствам ответственных изделий машиностроения приводит к необходимости применения упрочняющих технологических методов, целенаправленно изменяющих физико-механическое состояние поверхностного слоя деталей машин и обеспечивающих необходимые значения показателей качества [1–3].

Эксплуатационные свойства можно разделить на три группы, каждой из которых соответствует группа методов упрочнения [4] (табл. 1).

Ответственные детали авиа- и двигателестроения, работающие в условиях различных многофакторных воздействий, изнашиваются за счет газоэрозионного, абразивного воздействия, а также высокотемпературной коррозии и т.п.

По указанным в работе [3] граничным условиям были проанализированы методы упрочнения рабочих поверхностей деталей машин и сделан вывод о том, что в условиях современного мелкосерийного производства наиболее рациональным является применение способов газотермического напыления покрытий (табл. 2). Однако, отсутствие достоверных данных по характеристикам указанных способов [5–16] не позволяет однозначно определять наиболее эффективный вариант, т.е. такой вариант, который, согласно ISO 9000: 2015 имеет наилучший результат при минимальных ресурсах.

В связи с этим, актуальной задачей является разработка методики выбора способа газотермического напыления покрытий, обладающего наибольшей эффективностью в условиях мелкосерийного производства.

Таблица 1. Взаимосвязь эксплуатационных свойств и методов упрочнения [4]

№	Группа методов упрочнения	Эксплуатационные свойства
1	Силовое и тепловое воздействие (ППД, ТО, ХТО, ТМО)	Усталостная прочность (стойкость к циклическим нагрузкам)
2	Нанесение покрытий (ГТН, наплавка, электролитические и химические покрытия, покрытия полимерами)	Износостойкость различных видов
3	Комбинированное воздействие (одновременное применение методов I и II групп, например, нанесение покрытий наплавкой с последующим ППД)	Стойкость к сложным условиям циклических нагрузок с одновременным изнашиванием

Примечание: ППД – поверхностно-пластическое деформирование; ТО – термическая обработка; ХТО – химико-термическая обработка; ТМО – термомеханическая обработка; ГТН – газотермическое напыление покрытий.

Таблица 2. Основные способы газотермического напыления покрытий

Наименование способа	Обозначение
Электродуговая металлизация (ЭДМ)	I
Газопламенное напыление на дозвуковых скоростях (ГН)	II
Высокоскоростное (сверхзвуковое) газопламенное напыление проволокой (ВСН, проволока)	III
Высокоскоростное (сверхзвуковое) газопламенное напыление порошком (ВСН, порошок)	IV
Детонационное напыление (ДН)	V
Атмосферное плазменное напыление ($Ar–N_2$)	VI
Атмосферное плазменное напыление (воздух)	VII

При выборе способа газотермического напыления исходными данными являются номенклатура деталей, подвергаемых операции нанесения покрытия $\{P\}$ и параметры p-й детали номенклатуры (1)

$$\begin{gathered}\{P\} = \{p = 1,\dots,P\},\\ p = \left(K_1, K_2, K_3, h, \{PF\}, N\right),\end{gathered} \tag{1}$$

где P – количество наименований деталей в номенклатуре, шт.; K_1 – материал основы детали; K_2 – материал напыляемого покрытия; K_3 – геометрическая и размерная характеристика напыляемой поверхности; h – толщина напыляемого покрытия, мкм; $\{PF\}$ – совокупность заданных параметров качества покрытия; N – объем выпуска, шт./год.

Выбор способа газотермического напыления предлагается проводить в три этапа: 1) отсеивание способов напыления (вариантов) по ограничениям для каждой детали; 2) ранжирование вариантов по критериям эффективности для каждой детали; 3) выбор наиболее рационального варианта с учетом всей номенклатуры деталей.

Отсеивание вариантов осуществляется с целью определения множества способов напыления способных обеспечить заданные параметры качества для каждой детали номенклатуры ($\{S\}_p$).

В работе [3] предлагаются ограничения для отсеивания методов упрочнения: технологическая возможность обеспечения заданных параметров качества; универсальность; гибкость; производительность и возможность встраиваться в технологические комплексы (системы) механической обработки.

Применительно к газотермическим способам напыления первое ограничение следует уточнить, разбив его на три условия: 1) материал и толщина покрытия. Отсеивание способов напыления по возможности нанесения заданного материала и заданной толщины; 2) геометрическая характеристика обрабатываемой поверхности. Отсеивание вариантов по возможности напыления на поверхность с заданной геометрией и размерными характеристиками; 3) параметры качества. Отсеивание вариантов по возможности обеспечения заданных параметров качества. Условие применяется в случае, когда такие параметры качества как прочность сцепления или пористость заданы изначально.

Ограничение по гибкости не следует учитывать, в связи с тем, что все рассматриваемые способы имеют примерно одинаковые затраты на смену наладки средств технологического оснащения. Ограничение по универсальности способа, когда выбираемый вариант должен охватывать как можно большее число деталей из номенклатуры, является одним из основных критериев эффективности в случае сравнения газотермических способов в условиях мелкосерийного производства и подробно будет рассмотрен ниже. Все рассматриваемые способы имеют значительно отличающуюся производительность напыления, в связи с чем, этот параметр следует учесть при оценке экономической эффективности.

На этапе ранжирования определяется величина эффективности вариантов для каждой детали номенклатуры. В качестве критерия эффективности при сравнении способов газотермического напыления наиболее часто используют либо один из показателей качества (прочность сцепления или пористость), либо экономический критерий — величина затрат на напыление с учетом или без учета капитальных вложений [17—20]. Подобные подходы дают оценку без учета затрат, либо ранжируют способы по затратам без учета условий производства, получая абсолютные значения, не изменяющиеся в различных условиях производства.

Для выбора рационального способа газотермического напыления необходимо учитывать как достигаемые показатели качества покрытия, так и затраты на их нанесение. Помимо этого, важно учитывать условия (серийность) конкретного производства, которые в наибольшей степени определяют эффективность того или иного способа напыления в зависимости от номенклатуры и объемов выпуска изделий.

В связи с тем, что для выбора рационального способа напыления необходимо учитывать параметры, которые не могут быть сведены к единому критерию, в разрабатываемой методике предлагается использовать балльно-рейтинговую оценку. Для каждого варианта определяется суммарный балл, складывающийся из баллов по каждому критерию эффективности, при этом, способ напыления с наибольшим суммарным баллом будет являться наиболее эффективным для отдельной детали.

В качестве первого критерия эффективности предлагается использовать показатель качества — прочность сцепления покрытия с основным материалом σ_s. Использование данного показателя качества позволяет учесть вероятность изготовления деталей с минимальным процентом брака в условиях недостатка времени на отработку технологии напыления в связи с часто меняющейся широкой номенклатуры деталей.

Вторым критерием эффективности являются затраты на напыление покрытия, приходящиеся на одну деталь или поверхность (2)

$$\left(E_p\right)_i = \left(A_p\right)_i + B_i/\left(N_p T_i\right), \tag{2}$$

где $(A_p)_i$ — переменные затраты, приходящиеся на напыление p-й детали или поверхности i-м способом, руб; B_i — единовременные капитальные затраты на внедрение i-го способа нанесения, руб; N_p — объем выпуска p-й детали, шт./год; T_i — период окупаемости капиталовложений для i-го способа, год.

Переменные затраты состоят из стоимости материала покрытия, суммарной заработной платы рабочих и эксплуатационных расходов. Для корректного сравнивания вариантов, необходимо учесть разницу в технологических особенностях способов напыления, основными из которых являются коэффициент использования материала и производительность напыления (3)

$$(A_p)_i = \frac{m_p e_p}{K_i} + r_i + \frac{R_i m_p}{Q_i (K_i)^2}, \tag{3}$$

где m_p – масса нанесенного покрытия на p-ю деталь или поверхность, кг; e_p – затраты на единицу массы покрытия, руб/кг; K_i – коэффициент использования материала i-го способа напыления; r_i – затраты на заработную плату рабочих, отнесенные ко времени обработки одной детали при напылении i-м способом, руб; R_i – эксплуатационные расходы работы оборудования i-го способа напыления, руб/час; Q_i – производительность i-го способа напыления, кг/час.

Таким образом, в формуле (3) первое слагаемое представляет собой стоимость материала с учетом его потерь при напылении, характерного для i-го способа. Третье слагаемое показывает затраты связанные с эксплуатацией оборудования (расход электроэнергии, сжатого воздуха, затраты на ремонт и техническое обслуживание и т.д.), приходящиеся на напыление одной детали или поверхности.

Массу нанесенного покрытия, приближенно, без учета изменения плотности в процессе образования покрытия, можно оценить по формуле (4)

$$m_p = fh\rho, \tag{4}$$

где f – площадь напыляемого покрытия, м^2; h – толщина покрытия, м; ρ – плотность напыляемого материала, кг/м^3.

Каждому варианту и критерию назначается определенный балл, который рассчитывается относительно максимального значения из массива данных. Для первого критерия используется формула (5)

$$\delta_{1i} = \frac{(\sigma_s)_i}{\max\left((\sigma_s)_i,\ i = 1,\dots,S\right)}, \tag{5}$$

где $(\delta_1)_i$ – значение балла по первому критерию для p-й детали и i-го способа напыления; $(\sigma_s)_i$ – прочность сцепления, достигаемая i-м способом напыления, МПа; S – число сравниваемых способов напыления (вариантов).

Например, если $(\delta_1)_i = 0.3$, это означает, что рассматриваемый вариант обеспечивает прочность сцепления, составляющую 30% от варианта, обеспечивающего максимальную величину σ_s.

Для расчета значения балла по второму критерию применяется следующее выражение (6)

$$(\delta_{2p})_i = 1 - \frac{(E_p)_i}{\max\left((E_p)_i,\ p = 1,\dots,P; i = 1,\dots,S\right)}, \tag{6}$$

где $(\delta_{2p})_i$ – значение балла по второму критерию для p-й детали и i-го способа напыления; P – количество наименований деталей, шт.

Полученные баллы суммируются и определяется наиболее эффективный вариант по соотношению достигаемого показателя качества и затрат на напыление i-м вариантом p-й детали (7)

$$(\delta_p)_i = [\delta_1 + \delta_{2p}]_i. \tag{7}$$

Таблица 3. Пример определения рейтинга для одной детали

№ варианта	K	Q, кг/час	R, руб/кг	B, тыс. руб	E, руб	δ_1	δ_2	δ
I	0.85	4.50	12	1305	17637	0.11	0.49	0.60
II	0.78	3.50	51	304	5214	0.19	0.85	1.04
III	0.80	3.50	203	1305	17706	1.00	0.48	1.48
IV	0.60	3.50	203	2610	34324	1.00	0.00	1.00
V	0.45	0.95	169	750	11606	0.97	0.66	1.63
VI	0.83	10	22	1522.5	20380	0.56	0.41	0.96
VII	0.83	14	8	1522.5	20375	0.64	0.41	1.05

В качестве примера рассмотрим выбор способа напыления покрытия на деталь массой m = 0.2 кг и стоимостью материала e = 3500 руб/кг, объем N = 20 шт. Заработная плата принята одинаковая для всех способов – r = 500 руб/дет. Остальные исходные данные являются усредненными значениями из источников [5–11] (табл. 3).

Графически выбор способа напыления можно представить как диаграмму на рис. 1. Как видно из примера наибольший балл имеет способ детонационного напыления, что объясняется его эффективностью при сочетании таких факторов как небольшие капитальные затраты и небольшой объем выпуска. Данный подход позволяет учитывать изменение эффективности вариантов при изменении объемов выпуска.

На рис. 2 для этого же примера построены кривые изменения суммарного балла для каждого варианта в диапазоне N = 10–1000 шт.

Вариант детонационного напыления (рис. 2, V) теряет свою эффективность на больших объемах выпуска, т.к. растет доля затрат на потери, связанные с низкой производительностью и низким коэффициентом использования материала. При N = 136 шт.

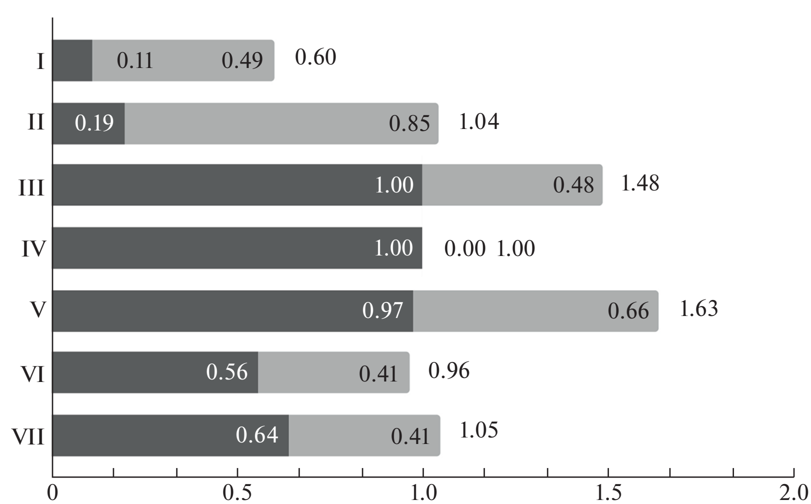


Рис. 1. Сравнение способов напыления для одной детали.

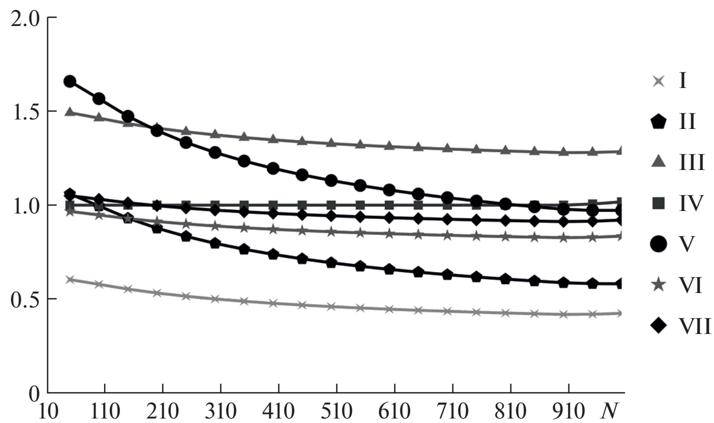


Рис. 2. Изменение баллов вариантов напыления от объема выпуска детали.

большую эффективность имеет вариант высокоскоростного газопламенного напыления прутком (рис. 2, III).

Характер изменения кривых, изображенных на рис. 2, зависит от значений параметров K, Q и R, которые характеризуют уровень освоения технологии нанесения газотермических покрытий на конкретном производстве.

В предыдущем примере рассматривалась только одна деталь, однако, из-за разницы в напыляемых материалах, толщинах покрытий и геометрических характеристик напыляемых поверхностей, различные детали будут иметь множество вариантов, успешно прошедших этап отсеивания. Поэтому еще одним критерием эффективности варианта напыления является его универсальность, т.е. при выборе способа напыления следует учесть его применение для большинства деталей рассматриваемой номенклатуры. Такой вариант будет являться рациональным.

Таким образом, для реализации такого подхода следует учитывать число наименований деталей, которые можно обработать каждым из способов (8)

$$\delta_{ri} = \frac{Z_i \sum_{p=1}^{P} (\delta_p)_i}{P}, \tag{8}$$

где δ_{ri} – рациональный балл (рейтинг) реализации i-го способа напыления; Z_i – число наименований деталей, обрабатываемых i-м способом.

При расчете баллов следует учитывать вес каждого наименования деталей в номенклатуре, который определяется отношением объема выпуска p-й детали к суммарному объему выпуска N_Σ. Тогда формулу (7) можно записать как (9)

$$(\delta_p)_i = \frac{N_p}{N_\Sigma}[\delta_1 + \delta_{2p}]_i. \tag{9}$$

Например, необходимо определить рациональный способ напыления для десяти различных деталей $P = 10$ шт. Исходные данные и суммарные баллы приведены в табл. 4. Пустые ячейки означают невозможность обеспечения заданных параметров качества для p-й детали i-м способом напыления, т.е. i-й способ не прошел этап отсеивания.

Простое суммирование баллов выделяет третий вариант (табл. 4) (высокоскоростное газопламенное напыление проволокой) как наиболее эффективный, однако, этот

Таблица 4. Пример выбора рационального способа напыления

P	N, шт.	m, кг	e, руб/кг	Рейтинг δ для варианта						
				I	II	III	IV	V	VI	VII
1	300	0.1	1500	–	0.0241	0.0385	0.0276	–	0.0246	0.0270
2	100	0.35	2000	–	–	–	–	0.0134	–	–
3	5500	0.05	1500	–	0.1927	0.5698	0.5064	0.4971	0.3429	0.3856
4	500	0.15	1000	0.0217	0.0362	0.0621	0.0460	0.0611	0.0397	0.0435
5	1500	0.25	3500	0.0669	0.0815	–	–	–	0.1250	0.1368
6	150	0.35	550	0.0077	0.0132	0.0198	0.0138	–	0.0128	0.0140
7	10	0.07	4500	–	–	0.0014	0.0009	–	0.0009	0.0010
8	250	0.15	2500	0.0118	0.0196	–	–	–	–	–
9	2500	0.30	2000	0.1140	–	0.3112	0.2686	0.2238	0.2118	0.2315
10	50	0.20	2000	–	0.0047	–	–	0.0074	0.0044	0.0048
N_Σ	10860									
Суммарный рейтинг, δ_Σ				0.22	0.37	1.00	0.86	0.80	0.76	0.84
Рациональный рейтинг, δ_r				0.11	0.26	0.60	0.52	0.40	0.61	0.68

вариант перекрывает только половину номенклатуры деталей, хотя для каждой из них имеет самый высокий балл. При этом, необходимо дополнительно закупать оборудование для второго и пятого способов газотермического напыления, чтобы упрочнить остальные детали.

С другой стороны, рациональный рейтинг выделяет седьмой вариант (атмосферное плазменное напыление, воздух) как наиболее эффективный, т.к. он позволяет нанести покрытия на 80% номенклатуры деталей, однако и здесь требуется рассмотреть необходимость закупки дополнительного оборудования или изменения исходных данных деталей.

На основе представленной методики разработан алгоритм выбор рационального способа нанесения покрытий на группу деталей, приведенный на рис. 3.

Блоки содержат следующие действия:

Блок 1. Ввод исходных данных.

Блок 2. Отсеивание способов газотермического напыления по материалу и толщине покрытия, геометрической и размерной характеристике поверхности напыления, а также по параметрам качества покрытия, если они заданы в исходных данных.

Блок 3. Выходные данные: совокупность способов газотермического напыления (вариантов), успешно прошедших этап отсеивания для p-й детали $\{S\}_p$.

Блок 4. Условие: “Вариантов больше или равно 1?”.

Блок 5. Условие: “Вариантов больше 1?”, если выполняется условие в блоке 4.

Блок 6. Ранжирование по суммарному баллу совокупности вариантов для p-й детали, если выполняется условие в блоке 5.

Блок 7. Выходные данные: суммарный рейтинг для напыления i-м способом покрытия на p-ю деталь.

Блоки с 1 по 7 повторяются для каждой детали.

Блок 8. Определение совокупности баллов с учетом универсальности для всех способов напыления по всей номенклатуре деталей.

Блок 9. Выходные данные: рациональный рейтинг вариантов с учетом универсальности способов напыления $\{\delta_{ri}\}$.

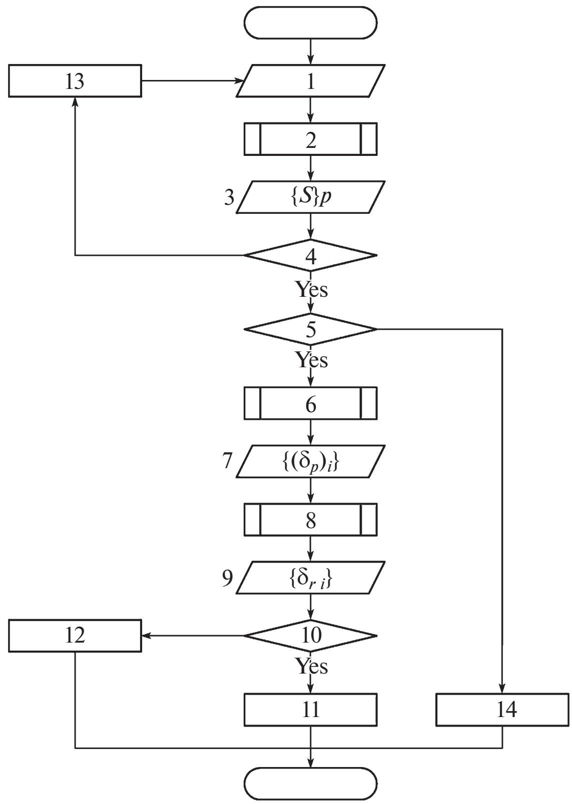


Рис. 3. Алгоритм выбора способа газотермического напыления.

Блок 10. Условие: “Вариант с наибольшим δ_r перекрывает всю номенклатуру деталей?”

Блок 11. Принять вариант с наибольшим δ_r, если выполняется условие 10.

Блок 12. Поиск альтернативного варианта с меньшим δ_r, но перекрывающим всю номенклатуру изделий или принятие большего числа вариантов с разделением деталей на группы по способу напыления покрытий.

Блок 13. Поиск решения: изменение исходных данных.

Блок 14. Принять единственный вариант.

Представленная методика выбора рационального способа газотермического напыления на группу деталей, учитывающая характеристики самих способов и условия конкретного производства, позволяет повысить эффективность конструкторско-технологических решений при упрочении ответственных деталей.

Методика позволяет проводить сравнение производств по уровню освоения технологии газотермического напыления покрытий на основании анализа коэффициента использования материала K, эксплуатационных затрат R и производительности напыления Q.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалев А.А., Краско А.С.* Перспективы сокращения трудоемкости изготовления деталей машин за счет применения функциональных покрытий // Материалы III международной

научно-практической конференции “Механика и машиностроение. Наука и практика”. Издательство: Индивидуальный предприниматель Жукова Елена Валерьевна. 2020. С. 27.

2. *Ковалев А.А., Краско А.С.* Перспективы и проблемы применения сверхзвукового плазменного напыления в условиях мелкосерийного производства // Сборник научных статей 10-й международной научно-практической конференции “Современные материалы, техника и технология”. Курск, Издательство: Юго-Западный государственный университет, 2020. С. 174.
3. *Албагачиев А.Ю., Ковалев А.А., Краско А.С.* Выбор метода упрочняющей обработки деталей машин в условиях автоматизированного мелкосерийного производства // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2021. № 2. С. 4.
4. *Осипов Ю.И., Ершов А.А., Осипов А.Ю.* Управление качеством в машиностроении. М.: Издательство “Наука”, 2009. 398 с.
5. *Кравченко И.Н., Карелина М.Ю., Зубрилина Е.М., Коломейченко А.А.* Ресурсосберегающие технологии получения функциональных наноструктурированных покрытий высокоскоростными методами нанесения // Вестник Донского государственного технического университета. 2015. № 3 (82). С. 19.
6. *Калита В.И., Комлев Д.И.* Плазменные покрытия с нанокристаллической и аморфной структурой. М.: “Лидер М”, 2008. 388 с.
7. *Кудинов В.В., Бобров Г.В.* Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование. Учебник для вузов. М.: Металлургия, 1992. 432 с.
8. *Бобров Г.В., Ильин А.А.* Нанесение неорганических покрытий. М.: “Интернет Инжиниринг”, 2004. 624 с.
9. *Пузряков А.Ф.* Теоретические основы технологии плазменного напыления: Учеб. пособие по курсу “Технология конструкционных материалов”. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 360 с.
10. Газотермическое напыление: учеб. пособие / Под ред. Л.Х. Балдаева. М.: Маркет ДС, 2007. 344 с.
11. *Ильюшенко А.Ф., Шевцов А.И., Оковитый В.А. и др.* Процессы формирования газотермических покрытий и их моделирование. Минск: Беларус. навука, 2011. 357 с.
12. *Meghwal A., Anupam A., Murty B.S., Berndt C.C., Kottada R.S., Andrew S.M.* Thermal spray high-entropy alloy coatings: a review // Journal of thermal spray technology. 2020. № 29. P. 857.
13. *Mauer G., Vaßen R., Stöver D.* Plasma and particle temperature measurements in thermal spray: approaches and applications // Journal of thermal spray technology. 2011. № 3 (20). P. 391.
14. *Cui Y., Guo M., Wang C., Tang Z.* Adhesion enhancement of a metallic al coating fabricated by detonation gun spray on a modified polymer matrix composite // Journal of thermal spray technology. 2019. № 28. P. 1730.
15. *Vignesh S., Shanmugam K., Balasubramanian V., Sridhar K.* Identifying the optimal HVOF spray parameters to attain minimum porosity and maximum hardness in iron based amorphous metallic coatings // Defence Technology. 2017. № 13. P. 101.
16. *Pulido-Gonzalez N., Garcia-Rodriguez S., Campo M., Rams J., Torres B.* Application of DOE and ANOVA in optimization of HVOF spraying parameters in the development of new Ti coatings // Journal of thermal spray technology. 2020. № 29. P. 384.
17. *Буткевич М.Н., Олейник А.В., Пузряков А.А.* Методика выбора оптимального метода нанесения покрытия // Теоретические и прикладные проблемы сервиса. 2005. № 4 (17). С. 17.
18. *Карцев С.В., Ширшов В.С.* Выбор материалов для нанесения покрытий плазменными методами // Технология машиностроения. 2012. № 6. С. 30.
19. *Амуи А.М., Мирхосейни Г.Р., Джафари А., Тарасов А.И.* Выбор метода нанесения защитного покрытия // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2016. № 225 (3). С. 5.
20. *Селиванов С.Г.* Применение средств искусственного интеллекта и методов нечеткой логики для выбора технологий нанесения покрытий // Сварочное производство. 2013. № 5. С. 30.

EDN: UHUFFS
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 72–82**

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62-82:681.518.5

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО СРОКА СЛУЖБЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

А. М. Гареев[1], Е. В. Шахматов[1], А. Б. Прокофьев[1], Д. М. Стадник[1,*]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева (Самарский университет), Самара, Россия

**e-mail: sdm-63@bk.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2021 г.
После доработки 09.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В настоящем исследовании предложен способ прогнозирования остаточного срока службы гидроцилиндра в составе следящего гидромеханического привода с применением искусственной нейронной сети прямого распространения, для обучения которой используются результаты моделирования, полученные в программе SimulationX в предположении, что развитие неисправности в системе происходит в соответствии с функцией распределения Вейбулла. Представлены результаты прогнозирования остаточного срока службы гидроцилиндра при различных диагностических признаках и способах задания управляющего воздействия в системе.

Ключевые слова: гидравлический привод, прогнозирование, остаточный срок службы, нейронная сеть, имитационная модель, распределение Вейбулла

DOI: 10.31857/S0235711922030051

Современные тенденции развития гидравлических машин сопровождаются ужесточением требований в отношении надежности их агрегатов и систем. Ввиду необходимости повышения безопасности и снижения производственных потерь оценка остаточного срока службы таких систем становится все более актуальной, а многие проблемы, связанные с оценкой остаточного срока службы отдельных узлов и агрегатов, остаются нерешенными. Отказы в гидравлических системах в первую очередь могут приводить к возникновению опасных условий для человека (оператора), а также сопровождаться производственными затратами. В настоящее время в большей степени распространено техническое обслуживание по наработке, зависящее от времени, при котором замена агрегатов системы осуществляется по четко определенному графику. Однако такое техническое обслуживание имеет ряд недостатков, среди которых главным является замена агрегатов при условии, что они все еще являются исправными. В связи с этим возникает необходимость в применении подходов к техническому обслуживанию, которые позволяют вовремя обнаруживать неисправности и сокращать экономические потери. В основе таких подходов должна лежать точная технология прогнозирования, способная оценивать будущее состояние ГС на основе объективных показателей возникающей неисправности [1].

В настоящее время прогнозирование остаточного срока службы системы осуществляется с применением статистических подходов, методов моделирования процессов износа и методов искусственного интеллекта. Статистические подходы основаны на моделях распределения вероятностей отказа, для формирования которых используются данные об отказах агрегатов за прошедшие периоды. Один из таких подходов основан на использовании динамической баейсовской модели, которая позволяет представить вероятностные взаимодействия между параметрами системы и спрогнозировать развитие в ней неисправности [2]. В случае кумулятивного (интегрального) ухудшения характеристик компонента системы, можно использовать экспоненциальную стохастическую модель деградации в сочетании с методом главных компонент для сокращения размерности данных и выявления диагностических признаков, по которым осуществляется прогнозирование состояния системы [3]. Недостатком статических методов является сложная практическая реализация и необходимость большого объема базы данных отказов исследуемых компонентов системы. Прогностические методы на основе моделирования связаны с математическим описанием процессов, характеризующих развитие отказа в системе и должны достаточно точно учитывать его механику в рассматриваемом узле ГС [4]. Основная трудность при использовании такого подхода заключается в выборе физической модели. В связи с интенсивным развитием компьютерных и информационных технологий все более широкое распространение получают методы искусственного интеллекта, которые применяются как мощный инструмент во многих областях, в том числе и при решении задач по прогностическому анализу состояния ГС. Например, в работе [5] представлены результаты прогнозирования остаточного срока службы шестеренного насоса общепромышленного назначения на основе байесовской нейронной сети с использованием данных, полученных в результате ускоренных ресурсных испытаний. Используемая нейронная сеть обучена на основе диагностических признаков, извлеченных из таких характеристик как объемный расход, вибрация, крутящий момент и частота вращения с применением факторного анализа. В результате показано, что относительная погрешность в прогнозировании остаточного срока службы насоса для используемого метода составляет 1.5%. В работе [6] рассматривается подход для прогнозирования остаточного срока службы гидравлического крана-манипулятора на основе нейронной сети прямого распространения. Изучается развитие неисправностей в насосе и пропорциональном распределителе. Для обучения нейросети используются данные, полученные с помощью имитационной модели при одном и том же управляющем воздействии, которое приводит к однотипному поведению объекта в период его эксплуатации. Представлены результаты прогнозирования остаточного срока службы системы при совокупном ухудшении характеристик рассматриваемых агрегатов.

Стоит отметить, что в настоящем исследовании предлагается способ прогнозирования остаточного срока службы гидромеханического следящего привода, который находит широкое применение в дорожной и строительной технике. Главной особенностью рассматриваемой системы является наличие автомата разгрузки, обеспечивающего уменьшение потребляемой энергии насосом за счет соединения его со сливом, в то время как питание гидроусилителя (ГУ) осуществляется от пневмогидравлических аккумуляторов (ПГА). Переключения автомата разгрузки приводят к цикличности работы системы и сопровождаются колебаниями расхода и давления в диапазоне, соответствующем его настройке. Это характерное свойство в сочетании с потенциальными рисками возникновения неисправностей требует проведения подробных исследований рассматриваемой системы, которые можно выполнить на основе ее имитационного моделирования.

Расчетная модель. На рис. 1 представлена принципиальная схема следящего гидравлического привода общего промышленного назначения.

При воздействии на командный золотник *11* происходит соединение линии высокого давления *P* с полостью *A* или *B* в зависимости от направления его перемещения. В результате шток *9*, преодолевая внешнюю нагрузку, начинает движение вместе с корпусом и гильзой командного золотника в том же направлении, что и последний.

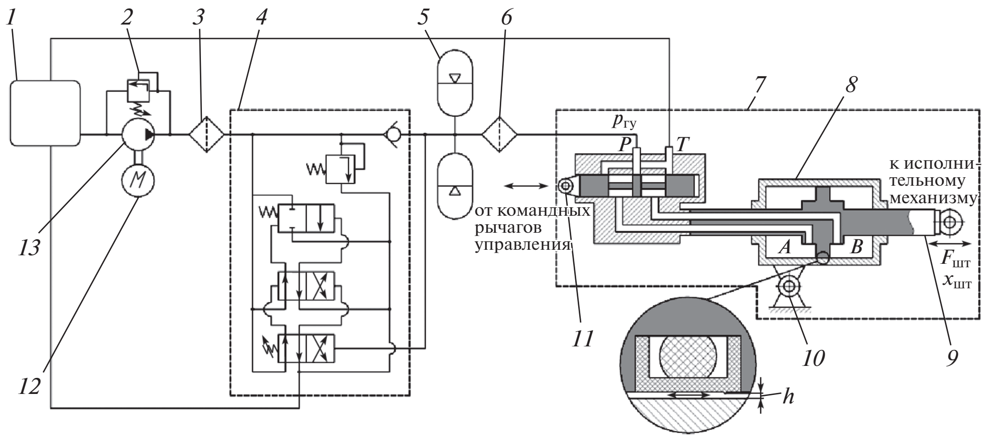


Рис. 1. Принципиальная схема следящего гидравлического привода: *1* – бак; *2* – предохранительный клапан; *3*, *6* – фильтр; *4* – автомат разгрузки насоса; *5* – ПГА; *7* – ГУ; *8* – гидроцилиндр; *9* – шток; *10* – крепление корпуса; *11* – командный золотник; *12* – привод насоса; *13* – насос.

Перемещение штока не прекращается, пока не остановится командный золотник и не будет перекрыта линия *P*. Автомат разгрузки необходим для обеспечения холостого режима работы насоса при повышении давления выше настроечного в линии за ним. ПГА используются для питания ГУ в периоды, когда насос разгружен на бак. На шток гидроцилиндра (ГЦ) действует усилие, передаваемое на него от какого-либо исполнительного механизма.

Наиболее частой причиной снятия приводов с эксплуатации является нарушение герметичности полостей ГЦ [7]. Появление утечки рабочей жидкости между полостями ГЦ вследствие износа уплотнительного элемента поршня может приводить к падению эффективности его работы, снижению скорости и развиваемого усилия. Для исследования процессов в рассматриваемой системе и выявления диагностических признаков, характеризующих увеличение внутренней утечки в ГЦ, используется имитационная модель, разработанная авторами настоящего исследования и описанная в [8]. Основные данные для расчета системы приведены в табл. 1.

Утечка между полостями ГЦ определяется на основе выражения, описывающего ламинарное течение рабочей жидкости в кольцевом зазоре с учетом относительного движения стенок [9]. Основным параметром, влияющим на величину утечки, является зазор h между внешней поверхностью уплотнения и внутренней поверхностью ГЦ. На рис. 2 представлен график переходных процессов в системе при изменении вели-

Таблица 1. Исходные данные и конструктивно-настроечные параметры системы

Наименование	Символ	Значение
Рабочее давление в системе	p	4.5–6.5 МПа
Производительность насоса при 2500 об/мин и давлении 6.5 МПа	$Q_{\text{н}}$	30 л/мин
Ход штока ГЦ (от среднего положения)	$x_{\text{шт}}$	±35 мм
Внешняя нагрузка, действующая на шток ГЦ	$\text{F}_{\text{шт}}$	±15000 Н
Рабочая жидкость	–	АМГ-10

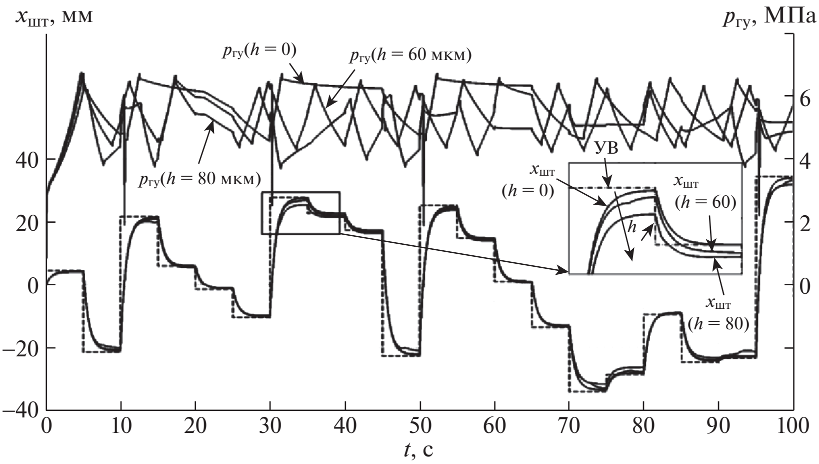


Рис. 2. Переходный процесс изменения положения штока ГЦ ($x_{шт}$) и давления на входе в ГУ ($p_{гу}$) при различных зазорах в уплотнительном элементе поршня.

чины зазора в уплотнительном элементе поршня ГЦ. Для имитации воздействия оператора на командный золотник ГУ используется ступенчатый сигнал с величиной "ступеньки", задаваемой случайным образом в диапазоне от –35 до +35 мм (что соответствует рабочей величине хода штока ГЦ) с шагом в 5 с. Такое управляющее воздействие позволяет оценить работоспособность системы и выявить ее особенности.

Наблюдаемые циклические колебания давления на входе в гидроусилитель характерны для рассматриваемой системы, которая включает автомат разгрузки и ПГА. Диапазон изменения давления составляет 3.8–6.5 МПа: участки с возрастающим давлением соответствуют периодам зарядки ПГА, когда насос через автомат разгрузки соединен с системой; участки с падающим давлением соответствуют периодам разрядки ПГА, которые питают ГУ, в то время как насос через автомат разгрузки соединен с баком. Случайное управляющее воздействие приводит к разному расходу рабочей жидкости, которую потребляет ГУ, вследствие чего частота колебаний давления во время переходного процесса меняется, а переключения автомата разгрузки происходят нерегулярно. Провалы по давлению (например, в моменты времени 10.5, 30, 50 и 95 с) связаны с действием на шток ГЦ попутной нагрузки в моменты резких переходов по управляющему воздействию. Анализируя влияние зазора в уплотнительном элементе поршня, можно отметить, что его увеличение приводит к более частым переключениям автомата разгрузки, т.к. давление из-за наличия утечки падает быстрее по сравнению с исправной системой. Также можно отметить уменьшение средней составляющей сигнала давления. Перемещение штока ГЦ в меньшей степени подвержено влиянию утечки по сравнению с давлением. Это можно объяснить наличием переразмеренных источников расхода рабочей жидкости в рассматриваемой системе (насос и ПГА), обеспечивающих питание ГУ с большим запасом. Тем не менее, изменение зазора сказывается и на положении штока в моменты его остановки. Это можно объяснить следующим образом. С остановкой командного золотника шток также прекращает движение, но не достигает заданной величины из-за уменьшения давления в полости ГЦ: утечка приводит к падению давления, следовательно, усилие, развиваемое ГЦ, становится меньше. Из условия баланса сил – меньшему усилию со стороны ГЦ соответствует меньшая внешняя сила. Так как в качестве внешнего воздействия рассматривается сила пружины, то при своей постоянной жесткости упругая

Таблица 2. Значения коэффициентов уравнения (2), используемые для расчета точек кривых на рис. 3

№ кривой	X	λ	k	№ кривой	X	λ	k
1	0.5	1400	5.0	*6*	0.55	1350	4.8
2	0.5	1300	5.0	*7*	0.69	1460	5.2
3	0.4	1400	5.0	*8*	2	1460	5.2
4	0.5	1300	5.2	*9*	0.2	1460	5.2
5	0.6	1300	4.9	*10*	0.08	1800	5.5

сила может уменьшиться только в случае уменьшения ее деформации. В связи с этим можно отметить, что с увеличением величины зазора возрастает статическая ошибка регулирования положения штока ГЦ.

Из анализа полученных результатов следует, что давление в системе и перемещение штока ГУ не только адекватно и однозначно характеризуют свойства исследуемой системы, но и могут быть легко измерены в реальной установке. В связи с этим целесообразно выбрать диагностические признаки рассматриваемой неисправности с использованием измеренных параметров. Таким образом, для прогнозирования развития внутренней утечки в ГЦ в качестве диагностических признаков можно принять среднее квадратичное перемещения штока и среднее значение давления на входе в ГУ.

Закон развития неисправности в системе. Типичную деградацию агрегата можно описать кривой, имеющей два участка: первый – в котором состояние агрегата практически не изменяется; второй – после появления неисправности происходит резкое ухудшение состояния агрегата [10]. Как отмечено в работах [11, 12] распределение Вейбулла можно рассматривать не только для оценки вероятности наступления случайных событий, но и для описания развития неисправности в системе. Согласно работе [13] функция распределения Вейбулла является наиболее “гибкой” для описания процесса деградации агрегатов ГС. На основе формулы, определяющей интенсивность отказов в соответствии с функцией распределения Вейбулла, можно записать обобщенную или универсальную функцию интенсивности отказов, используемую для аппроксимации экспериментальных данных, описывающих деградацию элементов системы [6]

$$Z = Y + X\frac{k}{\lambda^k}t^{k-1}, \tag{2}$$

где t – наработка до отказа (фактический срок службы); λ – коэффициент масштаба; k – коэффициент формы; Y – параметр смещения, характеризующий начальное состояние изделия; X – параметр для изменения масштаба.

Изменяя значения параметров Y, X, λ и k, представляется возможным аппроксимировать экспериментальные данные, получаемые из исследуемой системы с учетом различных условий эксплуатации. На рис. 3 представлен график с зависимостями изменения величины зазора в уплотнительном элементе поршня ГЦ, рассчитанными по формуле (2) с шагом наработки t = 100 ч при изменении параметров Y, X, λ и k (табл. 2).

Приведенные параметры могут характеризовать изменение зазора в зависимости от наработки ГЦ при различных условиях эксплуатации, например, при изменении температуры жидкости или при наличии загрязненной жидкости в системе.

В связи с этим кривые отличаются скоростью роста и временем начала деградации. Учитывая, что реальные экспериментальные данные могут содержать различного рода

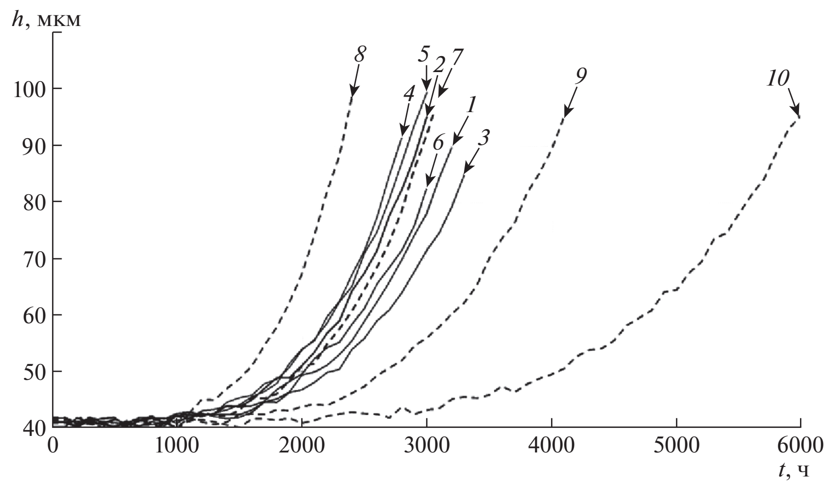


Рис. 3. Кривые изменения средней высоты зазора между уплотнением поршня и внутренней поверхностью ГЦ в зависимости от его наработки: *1–10* – номера кривых, рассчитанных в соответствии с параметрами в табл. 2.

погрешности, в результаты расчетов дополнительно включена шумовая составляющая.

Исправное состояние ГЦ характеризуется значениями среднего зазора, находящихся в диапазоне от 40 до 43 мкм ($h_{\min} = Y$). После начала эксплуатации износ в уплотнительных элементах ГЦ происходит по различным сценариям. Процесс износа продолжается до момента времени, когда величина зазора становится равной 100 мкм ($h_{\max}$), что соответствует состоянию отказа ГЦ в рассматриваемой системе. Исходя из этого, можно вывести формулу для оценки остаточного срока службы в зависимости от величины среднего зазора в процентах

$$RUL = 100\left(1 - \frac{h(t) - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}\right). \quad (3)$$

Несмотря на то, что полученное выражение представляет собой прямую зависимость RUL от зазора, состояние гидроцилиндра меняется не линейно, а в соответствии с одной из кривых Вейбулла. Таким образом, рассчитанные кривые представляют собой совокупность значений зазора, которые можно подставить в имитационную модель для получения обучающих выборок. То есть каждая точка кривой представляет собой частный расчетный случай, в результате которого определяются значения диагностических признаков, используемых в качестве обучающих данных для нейронной сети.

Настройка нейронной сети и генерация обучающих выборок. Принимая во внимание нелинейность решаемой задачи, в качестве инструмента для прогнозирования остаточного срока службы ГЦ в рассматриваемой системе используется искусственная двухслойная нейронная сеть прямого распространения с сигмоидальной функцией активации нейронов скрытого слоя и линейной функцией активации нейронов выходного слоя. Выходным сигналом нейронной сети является значение остаточного срока службы ГЦ, а входным – набор данных, включающих рассмотренные ранее диагностические признаки. Реальные данные для обучения НС можно получить как при выполнении тестовых манипуляций, так и собрать непосредственно в процессе экс-

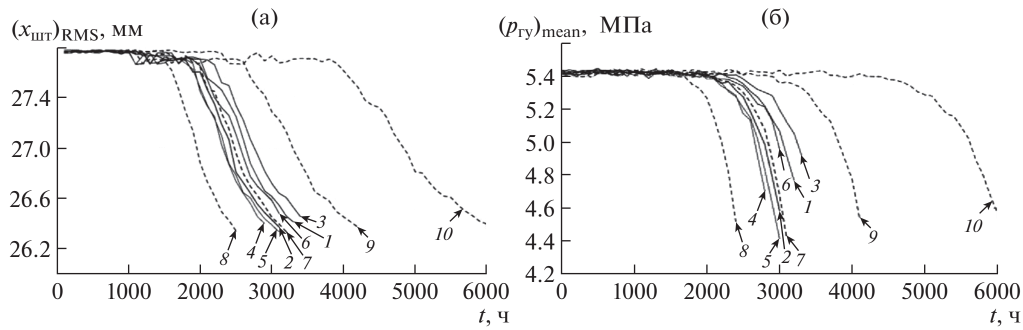


Рис. 4. Кривые изменения средних квадратичных значений перемещения штока ГЦ (а) и средних значений давления на входе в ГУ (б): *1–10* – номера кривых, полученных при изменении зазора в соответствии с зависимостями на рис. 3.

плуатации. В связи с этим в качестве входной информации для нейронной сети предлагается использовать два независимых набора данных.

Для получения первого набора данных в качестве управляющего воздействия рассматривается трапециевидный сигнал с постоянной амплитудой, соответствующей максимальному ходу штока ГЦ. Данный сигнал является относительно простым по форме, и легко реализуем на практике. В реальных условиях этот сигнал можно получить при выполнении тестовых манипуляций оператора, когда последний воздействует на органы управления, добиваясь однотипных движений исполнительного механизма. Так как в настоящем исследовании для обучения и тестирования нейронной сети предполагается использовать данные имитационного моделирования, описанный выше сигнал УВ используется в каждой симуляции (расчетном случае) при изменении величины зазора в уплотнительном элементе в соответствии с кривыми Вейбулла. В качестве диагностического признака в данном случае принимается среднее квадратичное значение перемещения штока за время интегрирования, которое в каждом расчетном случае составляет 120 с.

В реальных условиях эксплуатации рассматриваемой системы, воздействия оператора на командный золотник ГУ являются трудно прогнозируемыми и в какой-то степени их можно описать как случайный процесс. В связи с этим для формирования второго набора данных в качестве управляющего воздействия можно использовать случайный ступенчатый сигнал с величиной "ступеньки", лежащей в диапазоне от −35 мм до +35 мм. При этом сигнал для каждого расчетного случая не повторяется в отличие от первого набора данных (рис. 2). В качестве диагностического признака в данном случае принимается среднее значение давления на входе в ГУ за время интегрирования, которое в каждом расчетном случае составляет 2000 с. Время интегрирования для получения второго набора данных значительно больше, чем в первом случае, т.к. используется более сложный сигнал.

На рис. 4 представлены графики изменения средних квадратичных значений перемещения штока ГЦ и средних значений давления на входе в ГУ, полученных при одних и тех же эволюциях неисправности в соответствии с кривыми Вейбулла, но при различных способах задания управляющего воздействия.

Из анализа полученных графиков следует, что диагностические признаки практически не изменяются с наработкой, пока зазор в уплотнительном элементе сохраняется постоянным. После появления неисправности, рассматриваемые значения начинают уменьшаться, достигая критических значений, соответствующих полному отказу.

Также с увеличением зазора в уплотнительном элементе ГЦ среднее давление уменьшается, и эта тенденция сохраняется, несмотря на случайный способ задания управляющего воздействия.

Полученные графики представляют собой количественные характеристики диагностических признаков и используются в качестве информации, подаваемой на вход нейросети. При этом необходимо создать и обучить две независимые нейронные сети в соответствии с первым и вторым набором данных. Разработанные сети в обоих случаях имеют одинаковый выход, т.е. предсказывают RUL. В качестве входа для обеих сетей используются значения наработки и соответствующего диагностического признака. Для того чтобы ввести динамическую составляющую в данные сети и тем самым улучшить их способность к прогнозированию, на вход необходимо подавать как текущие значения параметров, так и значения с предыдущего шага [6]. Шаг наработки, с которым подаются данные для обучения, проверки и тестирования нейронной сети, как и в случае моделирования, составляет 100 ч. Таким образом, входом каждой сети является матрица размерностью $[4 \times N]$, а выходом $[1 \times N]$, где N – общее количество точек обучающей выборки (samples). В качестве обучающего набора данных используются значения кривых (рис. 4), обозначенные на графиках сплошными линиями, и целевые значения остаточного срока службы, рассчитываемые по формуле (3).

Обучение нейронной сети и результаты прогнозирования. Для обучения НС используется метод обратного распространения ошибки, которая минимизируется на основе алгоритма градиентного спуска. Исходный обучающий набор данных разделяется на выборки для обучения, проверки (валидации) и тестирования в соотношении 70%, 15% и 15% соответственно. Количество нейронов для скрытого слоя подбирается опытным путем на основе анализа показателей качества обучаемой нейронной сети, к которым относятся среднеквадратичная ошибка и гистограмма распределения ошибок.

При обучении нейронной сети на первом наборе данных, полученных при тестовых воздействиях, среднеквадратичная ошибка составляет 0.25, а максимальная разница между истинными значениями *RUL* и предсказанными составляет 3%. При обучении нейронной сети на втором наборе данных, полученных для управляющего воздействия в виде случайного ступенчатого сигнала, среднеквадратичная ошибка составляет 4.38, а максимальная разница между истинными значениями *RUL* и предсказанными составляет 4.2%. Полученные результаты указывают на лучшую способность НС к обучению на данных, полученных при управляющих воздействиях в виде трапециевидного сигнала.

Для тестирования обученных нейронных сетей используются данные, соответствующие кривым *7*, *8*, *9* и *10* (рис. 4). На рис. 5 представлены графики изменения предсказанных и истинных значений остаточного срока службы ГЦ при его наработке на тестовых данных.

Из анализа полученных результатов следует, что наибольшие абсолютные отклонения предсказанных значений *RUL* от истинных наблюдаются в часы наработки, которые соответствуют возникновению неисправности в ГЦ, когда значения диагностических признаков начинают уменьшаться быстрее. Ошибка может быть связана с резким изменением производной диагностического признака, как функции по наработке. Результаты тестирования нейросети, обученной по набору данных в виде средних значений давления на входе в ГУ $(p_{\text{гу}})_{MEAN}$, имеют более существенные расхождения между прогнозируемыми и истинными значениями *RUL* по сравнению с результатами тестирования нейронной сети, обучаемой на основе средних квадратичных значений перемещения штока ГЦ $(x_{\text{шт}})_{RMS}$. Причиной является способ задания управляющего воздействия, который используется для генерации данных. Случайный ступенчатый сигнал создает более сложные условия для нейронной сети при обобще-

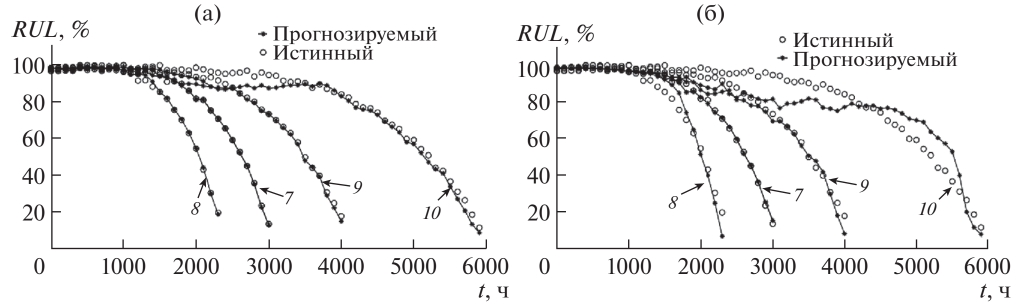


Рис. 5. График изменения предсказанных и истинных значений *RUL* для НС, обученной на основе средних квадратичных значений перемещений штока ГЦ $(x_{\text{шт}})_{RMS}$ (а) и для НС, обученной на основе средних значений давления на входе в ГУ $(p_{\text{гу}})_{MEAN}$ (б): *8–10* – номера кривых, соответствующих зависимостям *8–10* на рис. 4.

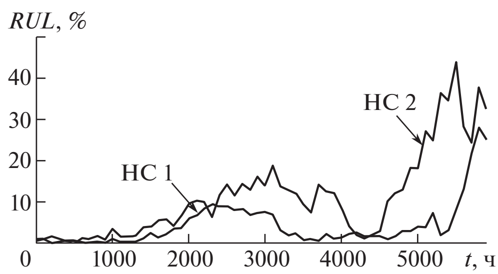


Рис. 6. График изменения относительной погрешности прогнозирования *RUL* по тестовому набору 10 для обученных НС: НС 1 – на основе средних квадратичных значений перемещения штока ГЦ; НС 2 – на основе средних значений давления на входе в ГУ.

нии данных по сравнению с управляющим воздействием в виде трапециевидного сигнала с постоянной амплитудой. При этом в обоих случаях максимальные расхождения получены для кривой *10*, наиболее удаленной от ансамбля кривых, используемых в обучении. На рис. 6 представлен график изменения относительной погрешности прогнозирования *RUL* (ΔRUL) в соответствии с набором данных, относящихся к кривой *10*.

Как видно из графика, для большей части срока эксплуатации, максимальное значение относительной погрешности прогнозирования *RUL* с использованием нейронной сети, обученной на основе диагностического признака $(x_{\text{шт}})_{RMS}$, не превышает 10%, а для нейронной сети, обученной на основе диагностического признака $(p_{\text{гу}})_{MEAN}$, – 20%. Возрастание относительной погрешности в конце срока службы для обеих нейронных сетей может указывать на недостаточное количество данных (точек), собираемых для этого периода, характеризующих наступление полного отказа ГЦ.

Полученные результаты указывают на то, что обучение НС на данных, которые можно собрать непосредственно в условиях эксплуатации, когда имеет место неопределенное (случайное) воздействие на систему, в целом является выполнимой задачей при условии выбора подходящего диагностического признака. Нейросеть, обученная на основе данных, полученных путем тестовых манипуляций, дает меньшую ошибку в прогнозировании ввиду относительно простого вида управляющего воздействия. Использование в качестве обучающих выборок непосредственно временных сигналов протекающих в системе процессов (а не извлеченных из них интегральных характеристик) может значительно повысить точность прогнозирования, но требует использования нейронных сетей более сложной структуры.

Заключение. В настоящей статье продемонстрирована возможность применения технологий машинного обучения для диагностирования сложных технических систем на примере прогнозирования остаточного срока службы ГЦ в составе гидравлического следящего привода. Как показывают результаты теоретических исследований, диагностические признаки на основе сигналов перемещения штока ГЦ и давления на входе в ГУ однозначно характеризуют процесс развития внутренней утечки в ГЦ и их можно использовать при обучении нейронной сети с целью прогнозирования остаточного срока службы системы. Диагностические признаки в виде уменьшения средних значений давления на входе в ГУ проявляются при управляющем воздействии в виде случайного ступенчатого сигнала, в связи с чем могут быть использованы для обучения нейронной сети на основе данных, собираемых непосредственно в процессе эксплуатации системы. Предложенный подход можно применять при проектировании систем прогностического анализа гидравлических приводов, используемых в транспортных и технологических машинах.

Дальнейшие исследования будут направлены на определение подходящей модели нейронной сети с целью прогнозирования остаточного срока службы системы при одновременном возникновении сразу нескольких неисправностей.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты исследования были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (Проект № 0777-2020-0015).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jardine A.K.S., Lin D., Banjevic D.* A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. V. 20 (7). P. 1483.
2. *Xu B., Li H., Pang W., Chen D., Tian Y., Lei X., Gao X., Wu C., Patelli E.* Bayesian network approach to fault diagnosis of a hydroelectric generation system // Energy Science and Engineering. 2019. V. 7 (5). P. 1669.
3. *Anis M.D.* Towards Remaining Useful Life Prediction in Rotating Machine Fault Prognosis: An Exponential Degradation Model // Condition Monitoring and Diagnosis, CMD 2018. https://doi.org/10.1109/CMD.2018.8535765
4. *Zhao F., Tian Z., Liang X., Xie M.* An Integrated Prognostics Method for Failure Time Prediction of Gears Subject to the Surface Wear Failure Mode // IEEE Transactions on Reliability. 2018. V. 67 (1). P. 316.
5. *Guo R., Li Y., Zhao L., Zhao J., Gao D.* Remaining Useful Life Prediction Based on the Bayesian Regularized Radial Basis Function Neural Network for an External Gear Pump // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 107498.
6. *Ghini Y., Vacca A.* A method to perform prognostics in electro-hydraulic machines: the case of an independent metering controlled hydraulic crane // Int. J. Hydromechatronics. 2018. V. 1 (2). P. 197.
7. *Алексеева Т.В., Бабанская В.Д., Башта Т.М. и др.* Техническая диагностика гидравлических приводов / Под общей ред. Т.М. Башты. Москва: “Машиностроение”, 1989. 264 с.

8. *Гареев А.М., Гимадиев А.Г., Стадник Д.М., Попельнюк И.А.* Определение динамической погрешности измерения параметров электрогидромеханических систем с учётом быстродействия датчиков // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2020. Т. 19. № 2. С. 85.
9. *Башта Т.М.* Машиностроительная гидравлика. Москва: “Машиностроение”, 1971. 672 с.
10. *Moubray J.* Reliability-centered maintenance, 2nd ed. Oxford 1997: Butterworth Heinemann. Oxford.
11. *Kuhlhoff R., Orth A., De Negri V., Moreno U.A.* Application of Weibull reliability model for functional safety of electro-hydraulic system // IFK2018, Aachen, March. 2018.
12. *Lorenzoni A., Kempf M.* Degradation processes modelled with dynamic Bayesian networks // IEEE 13th International Conference on Industrial Informatics (INDIN), IEEE. 2015. P. 1694.
13. *Kuhlhoff I.R.* Method for application of Weibull distribution to the reliability calculation of functional safety for industrial machinery // Engineering. 2014. https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/132745

EDN: RVOKBP
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 3, с. 83–94

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.01

АССИСТИРУЮЩИЕ РОБОТОХИРУРГИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ ДЛЯ МАЛОИНВАЗИВНЫХ ОПЕРАЦИЙ

© 2022 г. **Е. И. Велиев[1], Р. Ф. Ганиев[2], В. А. Глазунов[2], Г. С. Филиппов[2,*], С. А. Скворцов[2]**

[1]*Российская медицинская академия непрерывного профессионального образования, Москва, Россия*
[2]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: filippov.gleb@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 11.02.2022 г.
Принята к публикации 21.02.2022 г.

В статье рассматривается современное состояние роботизированных ассистирующих комплексов в малоинвазивной хирургии. Предложены три различных манипулятора для роботизированной хирургии, отличающихся от известных зарубежных аналогов рядом преимуществ, а также задающее устройство. Приведены прототипы роботов, решение обратной задачи о положениях, а также задачи динамики. В качестве приводов предлагается использовать электродвигатели постоянного тока.

Ключевые слова: хирургические роботы, параллельная структура, роботизированное хирургическое устройство, электродвигатели постоянного тока

DOI: 10.31857/S0235711922030129

Исследования в области медицинской робототехники идут нарастающим темпом [1]. Имеют место различные направления использования роботизированных систем в медицине: малоинвазивная полостная хирургия (урология, проктология, гинекология, кардиохирургия, эндокринология и др.) [2], хирургические лазеры [3], хирургия в области позвоночника [4]. В большинстве случаев использование ассистирующих роботохирургических комплексов для малоинвазивных операций позволяет значительно снизить кровопотери и реабилитационный период, увидеть недоступные для зрения зоны, убрать тремор рук хирурга и ошибочные движения скальпелем или другим инструментом [5].

Первые робототехнические системы в медицине появились в 1970-е годы для различных целей, прежде всего в качестве вспомогательных устройств и поддерживающих манипуляторов [6]. Концепция телероботики для хирургии появилась в начале 1970-х годов по инициативе Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства (NASA) [7].

Первоначальной задачей проекта было обеспечение возможности оказания медицинской помощи астронавтам во время космического полета. Предполагалось использовать хирургические роботы, дистанционно управляемые с Земли [8].

Однако данный проект не получил соответствующего финансирования и развития. Примерно через 15 лет начали появляться первые прототипы хирургических роботов, при разработке которых стала очевидна сложность задачи управления телехирургическими роботами в космосе из-за эффекта задержки во времени передачи управляющих команд с Земли, вызванного большими расстояниями [9].

В этой связи фокус развития роботизированной хирургии сместился на создание хирургических роботов для проведения операций в земных условиях, что привело к появлению первых коммерчески ориентированных хирургических роботов на рынке к концу 1980-х гг.

Активное развитие робототехники для применения в области хирургии начиналось с 90-х гг. прошлого века. Так, в 1996 году была успешно проведена телехирургическая лапароскопическая операция по удалению желчного пузыря (холецистэктомия) у свиньи с использованием роботизированного комплекса ARTEMIS (Advanced Robotics and TElemanipulator System for Minimally Invasive Surgery). Особенностью комплекса ARTEMIS является открытая консоль и три руки-манипулятора [6].

Примечателен проект ZEUS (Computer Motion Inc. (США). В конце 90-х гг. с помощью этой системы была проведена трансатлантическая лапароскопическая холецистэктомия, а также несколько урологических операций на человеке.

Самой распространенной роботизированной хирургической системой в мире на сегодняшний день является платформа DaVinci Intuitive Surgical System, которая применяется в урологии, проктологии, гинекологии, кардиохирургии, эндокринологии и других медицинских специализациях [7–9]. Различные модификации платформы DaVinci Intuitive Surgical System начали широко применять в практической хирургии на людях с начала 2000-х в разных странах. Следует отметить, что руки-манипуляторы этого робота, расположенные на общем основании, имеют последовательную структуру.

Бурное развитие технологий, в том числе в области компьютеризированной телемедицины, высокая надежность и эффективность ассистирующих систем привели к росту доверия к ним со стороны профессионального сообщества медиков и значительному росту рынка роботизированной хирургии. За последнее десятилетие возникло множество проектов новых роботизированных ассистирующих систем. Среди них стоит отметить Telelap ALF-X (Италия) [10], Medtronic (немецкий аэрокосмический центр, Германия) [11, 12], Avatera (Германия, Швейцария), REVO-I (Южная Корея) [13, 14], Medicaroid (Япония) [15], SurgiBot [16] и др. При этом, несмотря на имеющиеся существенные различия и особенности перечисленных систем, схемы механизмов большинства манипуляторов имеют подобную DaVinci последовательную структуру и внешне сильно похожи (рис. 1).

Например, медицинская компания Sofar (Милан, Италия) разработала роботизированную систему Telelap ALF-X, включающую в себя пульт дистанционного управления и три руки-манипулятора последовательной структуры, установленные на трех отдельных основаниях. Два манипулятора, похожие на лапароскопы, управляют инструментами с четырьмя и шестью степенями свободы [17, 18].

Система Medtronic разработана компанией MiroSurge (немецкий аэрокосмический центр, Оберпфаффенхофен, Германия) [19]. Конструкция первого прототипа Medtronic представляла собой механизмы последовательной структуры из трех легких манипуляторов, установленных на операционном столе, и открытой консоли с хирургом, сидящим перед автофокусирующим монитором. Роботизированные руки-манипуляторы состоят из семи последовательно расположенных кинематических пар. Предусмотрена возможность обеспечения тактильной обратной связи с помощью потенциометров.

В 2010-х компания Avateramedical (Йена, Германия) совместно с Force Dimension (Ньон, Швейцария) приступила к созданию роботизированного хирургического робота Avatera. Он оснащен закрытой консолью со встроенным сиденьем с использованием соответствующей технологии получения 3D-изображения с высоким разрешением. На общем основании расположены четыре манипулятора последовательной структуры, каждый из которых может обеспечивать выходному звену шесть степеней свободы.

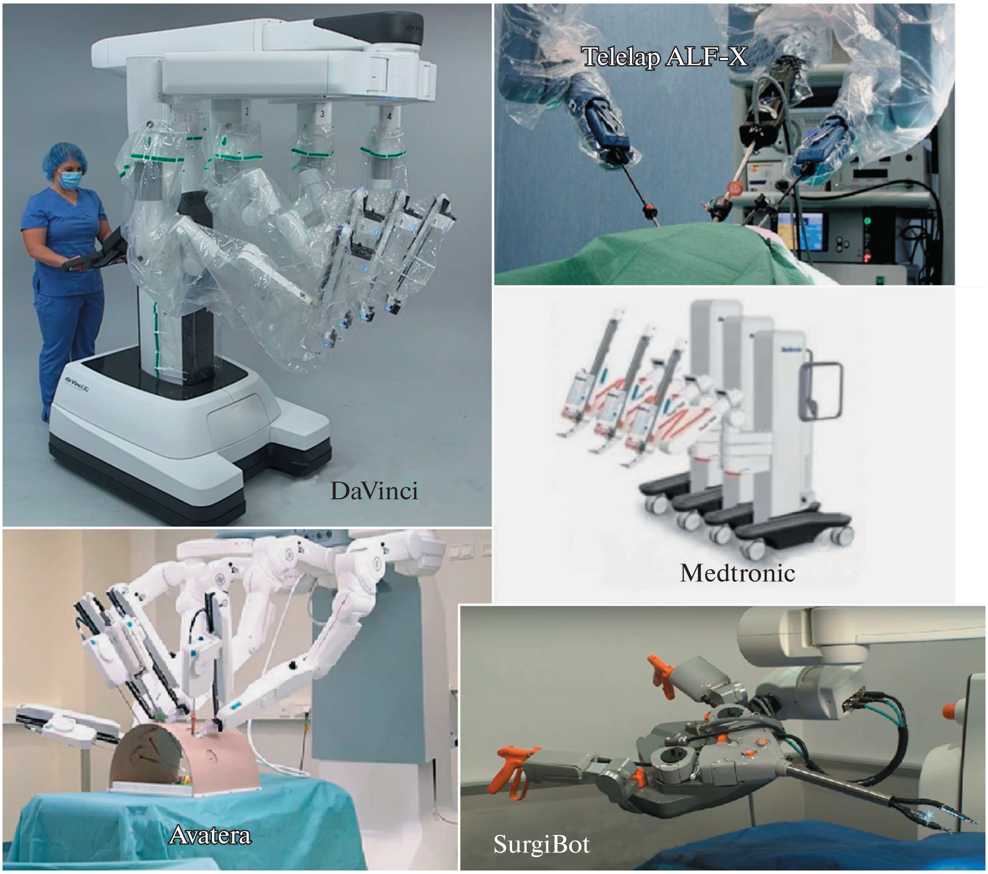


Рис. 1. Некоторые роботизированные ассистирующие системы.

Достаточно перспективная робототехническая система The Spider System (TransEnterix) представляет собой платформу, разработанную для лапароэндоскопической одномоментной хирургии (LESS), основанную на использовании трубок, в которых можно манипулировать гибкими инструментами [20]. Ранее обращение с инструментами было затруднено, особенно при работе с эндоскопическими швами. TransEnterix значительно улучшил систему, предоставив роботизированную руку SurgiBot.

В работе [21] проводился кинематический анализ робота daVinci и было установлено, что применение последовательной схемы повлекло добавление двух дополнительных кинематических цепей с приводами. Таким образом было показано, что последовательная схема механизмов, лежащая в основе конструкции большинства рук-манипуляторов хирургических роботов, приводит к схожим недостаткам: увеличению общей длины манипулятора и веса компонентов одной "руки" ~80 кг (при весе самого инструмента, размещенного на ее конце, ~20 г), что приводит к снижению позиционной точности [22]. При этом применение механизмов параллельной или параллельно-последовательной структуры может значительно повысить функциональные возможности.

Различные варианты устройств управления у предлагаемых на рынке и разрабатываемых роботизированных систем имеют конструкции, отличные от стандартных ла-

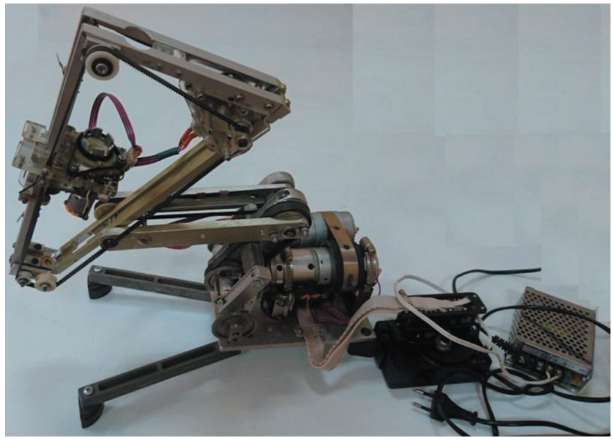


Рис. 2. Механизм для выполнения высокопрецизионных медицинских операций с ременными передачами.

пароскопических инструментов. Это приводит к необходимости специального процесса обучения персонала, может вызвать сложности переучивания при использовании различных роботизированных комплексов и классического подхода к проведению малоинвазивных хирургических операций.

Предложенные ранее авторами настоящей статьи механизмы имеют параллельно-последовательную структуру и не требуют избыточных приводов, а разрабатываемая система управления приближена к стандартному лапароскопическому инструменту [21–23].

Один их механизмов, разрабатываемый авторами, имеет массу ~10 кг за счет использования немассивных звеньев (рис. 2). Достаточно большая рабочая область, постоянство точки ввода, четыре степени свободы, повышение технической и эксплуатационной эффективности устройства манипулирования достигается за счет использования паралелльно-последовательной структуры.

Другой вариант механизма, предложенный в настоящей статье, имеет основание, на котором располагаются два дугообразных звена (рис. 3). В изменяемой точке соприкосновения этих звеньев расположена подвижная платформа, на которой последовательно размещены поступательный и вращательный приводы, перемещающие выходное звено по вылету и вращающие его вокруг своей оси.

Имеет место еще один вариант механизма, включающего в себя три параллельно соединенные кинематические цепи. Эти кинематические цепи содержат приводные каретки, расположенные на круглом основании-направляющей, причем оси всех вращательных пар пересекаются в одной точке (эта точка является точкой ввода инструмента). Также имеется подвижная платформа с установленным на ней электродвигателем, обеспечивающим поступательное перемещение центральной штанги, ось которой проходит через неподвижную точку ввода инструмента.

Во всех перечисленных механизмах отличительными особенностями является то, что для обеспечения требуемого размера рабочей зоны, числа степеней свободы, обеспечения постоянства точки ввода инструмента не используются дополнительные приводы. При этом часть приводов можно расположить на основании, таким образом, чтобы остальная часть механизма стала менее массивной. Это обеспечивает снижение массы всего механизма, облегчает его управление, уменьшает габариты.

Рис. 3. Механизм с дугообразными звеньями, обеспечивающий постоянную точку ввода.

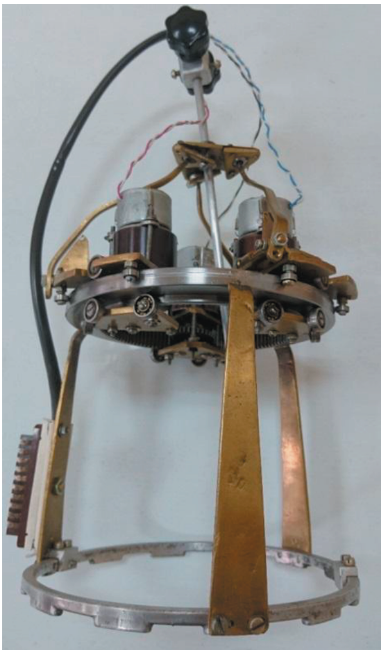


Рис. 4. Механизм с круговой направляющей для лапароскопических операций.

Важной особенностью механизмов параллельной и параллельно-последовательной структуры являются возможные особые положения, которые могут привести к потере управляемости, а также к потере одной или нескольких степеней свободы в определенных точках расположения узлов механизма. Ранее рассмотрены задачи анализа механизмов с круговой направляющей [21, 22, 24].

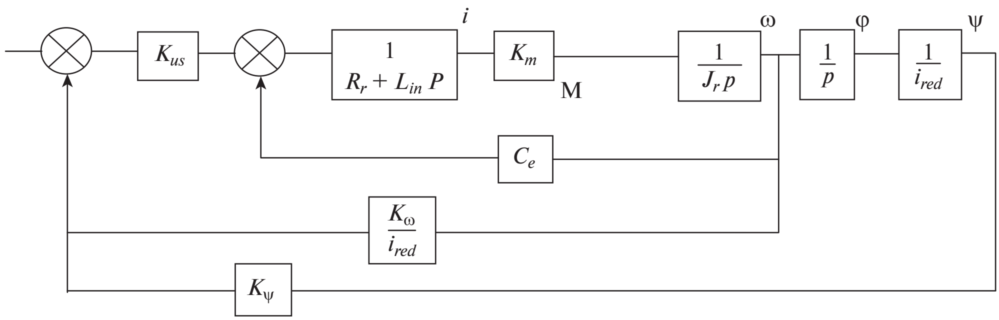


Рис. 5. Схема системы управления.

Рассмотрим возможное применение электродвигателя постоянного тока для механизмов подобного рода. В данном случае появляется возможность расположить двигатели ближе к основанию, чем в других манипуляционных устройствах. При этом можно предусмотреть значительный запас по мощности двигателей.

Двигатели, установленные на основании, не требуют весьма строгих ограничений по массогабаритным показателям. Будем считать динамическое взаимовлияние между приводами незначительным. При этом можно регулировать уровень ошибки – разницы между реальными и требуемыми значениями координат, скоростей и ускорений для достижения необходимой динамической точности движения инструмента.

При рассмотрении применяемости указанных двигателей допустим, что отсутствуют трение, люфты и ограничения по току.

Запишем уравнение электрической цепи

$$u - iR_я - L_я \frac{di}{dt} - c_e\omega = 0,$$

где u – напряжение; i – сила тока; $R_я$ – активное сопротивление якоря двигателя; $L_я$ – индуктивность; c_e – коэффициент, определяющий противоэлектродвижущую силу (противо-ЭДС); ω – угловая скорость вращения вала двигателя; $c_e\omega$ – противо-ЭДС.

Исходя из этого, а также учитывая взаимосвязь между моментом и силой тока, можно записать

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - iR_я - c_e\omega}{L_я};$$

$$J_r \frac{d\omega}{dt} = M = iK_m,$$

где K_m – постоянный коэффициент, связывающий момент и силу тока; J_r – момент инерции ротора (в нашем случае с учетом соответствующих перемещаемых звеньев).

Вал двигателя связан с редуктором с передаточным отношением i_{red}. Таким образом, угол на выходе механизма равен $\psi = \varphi \cdot i_{\text{red}}$.

Приведем схему системы управления, соответствующую написанным выше уравнениям.

На рис. 5 K_ψ – коэффициент обратной связи по положению; i_{red} – передаточное отношение редуктора; K_ω – коэффициент обратной связи по скорости; K_{us} – коэффициент усиления.

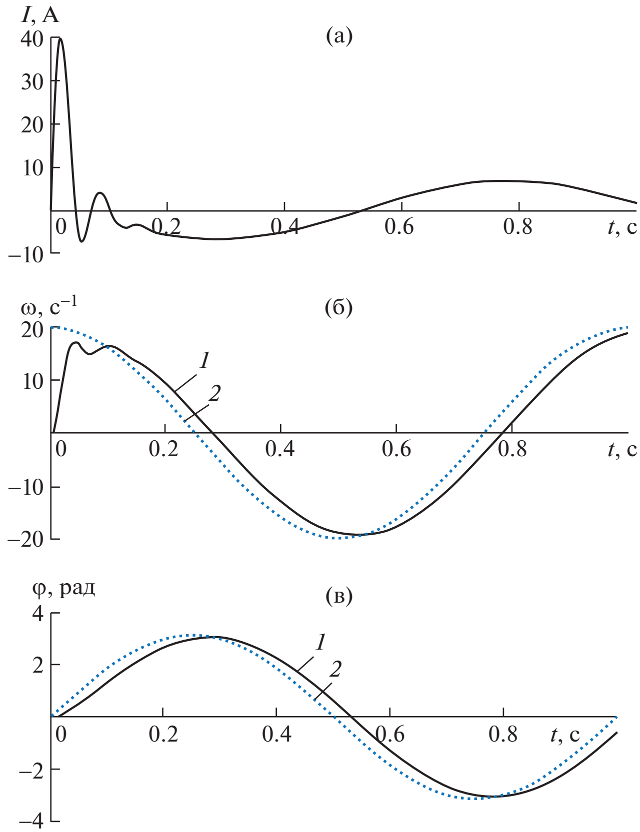


Рис. 6. Графики изменения тока, скорости и положения: (а) – изменение силы тока со временем; (б) – изменение скорости со временем, где *1* – реальное движение, *2* – желаемое; (в) – изменение положения со временем, где *1* – реальное движение, *2* – требуемое.

На входе усилителя имеем разность между задаваемым и реальным положениями, а также задаваемой и реальной скоростями.

Согласно теории автоматического регулирования передаточная функция системы без обратной связи по положению равна

$$W_\omega = \frac{K_m K_{us}}{R_r J_r p + J_r L_{in} p^2 + K_m C_e + K_m K_{us} \dfrac{K_\omega}{i_{red}}}.$$

Здесь p – оператор Лапласа.

Для определения устойчивости системы используем критерий Найквиста. Согласно этому критерию, годограф вектора амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы не должен охватывать точку (–1, 0), в противном случае система неустойчива.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_\psi = \frac{K_m K_{us} K_\psi}{J_r L_{in} p^3 i_{red} + R_r J_r p^2 i_{red} + (C_e i_{red} + K_{us} K_\omega) K_m p}.$$

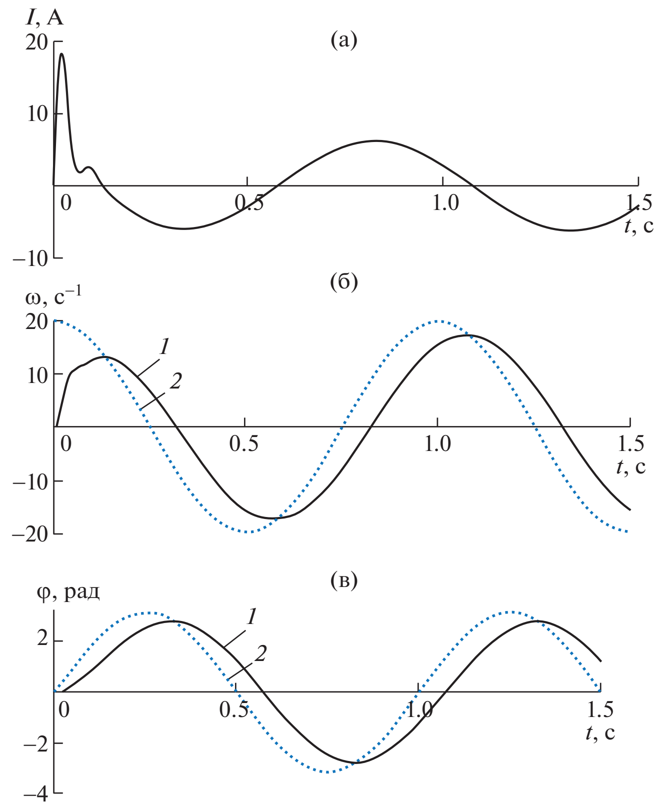


Рис. 7. Графики изменения тока, скорости и угла при уменьшении коэффициента усиления: (а) – изменение силы тока со временем; (б) – изменение скорости со временем, где *1* – реальное движение, *2* – желаемое; (в) – изменение положения со временем, где *1* – реальное движение, *2* – требуемое.

Для построения АФЧХ необходимо оператор p заменить на $j\omega$, где j – мнимая единица.

$$W_{j\omega} = \frac{K_m K_{us} K_\psi \left[\left(C_e i_{red} + K_{us} K_\omega \right) K_m j - J_r L_{in} i_{red} j\omega^2 + R_r J_r i_{red}\omega \right]}{-\left[\left(C_e i_{red} + K_{us} K_\omega \right) K_m - J_r L_{in} i_{red}\omega^2 \right]^2 - \left(R_r J_r i_{red}\omega \right)^2}.$$

Мнимая часть равна нулю при значении угловой скорости $\omega_\pi = \sqrt{\dfrac{\left(C_e i_{red} + K_{us} K_\omega \right) K_m}{J_r L_{in} i_{red}}}$.

Это значение надо подставить в выражение для действительной части. Результат должен быть больше -1. Рассмотрим конкретные примеры функционирования системы управления.

Для массогабаритных параметров механизма с постоянной точкой ввода инструмента (рис. 2) рассматривались несколько двигателей. Приведем параметры одного из них, обеспечивающих требуемые законы управления: номинальная угловая скорость вращения вала двигателя $\omega = 314.2$ рад/с; номинальная сила тока $i_н = 5.5$; номинальный момент, создаваемый двигателем, $M_н = 0.2160$ Н м; активное сопротивление яко-

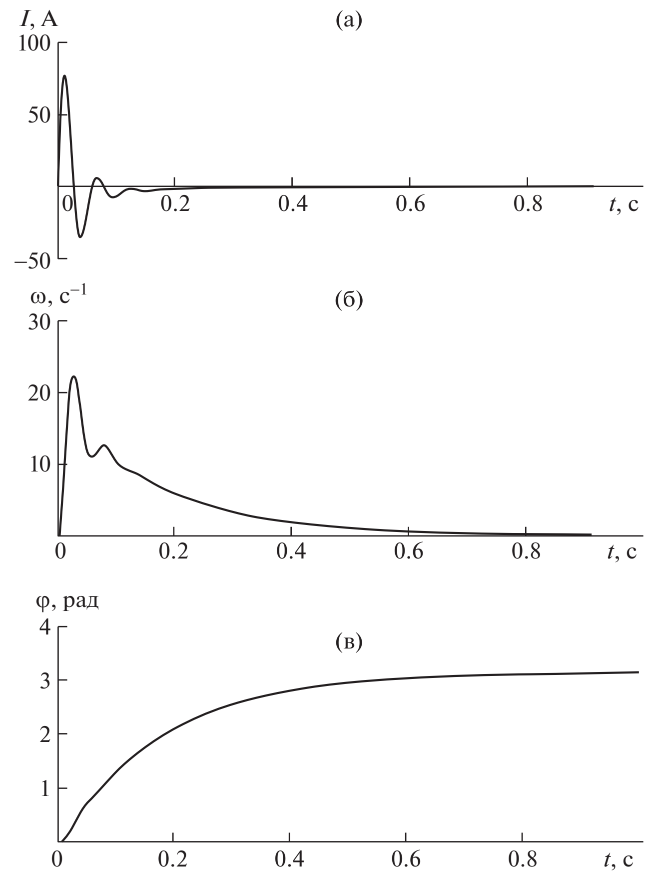


Рис. 8. График тока, скорости и угла при ступенчатой подаче напряжения: (а) – изменение силы тока со временем; (б) – изменение скорости со временем; (в) – изменение положения со временем.

ря двигателя $R_r = 0.869$ Ом; момент инерции ротора с учетом соответствующих перемещаемых звеньев $J_r = 0.1142$ кг м^2; постоянный коэффициент, связывающий момент и ток $K_m = 0.039$; номинальное напряжение $u_{\text{н}} = 127$ В; коэффициент, определяющий противо-ЭДС $c_e = 0.404$; коэффициент усиления $K_{\text{us}} = 50$; передаточное отношение редуктора $i_{\text{red}} = 20$; расчетное время 1 с. Требуемый закон движения (это тестовый закон, соответствующий максимальной угловой скорости движения руки человека) $\psi_d = \pi \sin(2\pi t)$; дополнительный коэффициент обратной связи по положению $K_\psi = 5$; коэффициент обратной связи по скорости $K_\omega = 0.1$.

Начальные условия по току, скорости и положения равны нулю. В этом случае имеем графики силы тока, скорости и угла поворота (рис. 6). При этом требуемый закон по скорости и току показан пунктиром.

Из графиков видно, что ток достигает значения в 40 А. Для уменьшения максимального тока примем $K_{\text{us}} = 20$. Требуемый закон движения аналогичен предыдущему случаю. В результате численного эксперимента получаем график изменения тока, скорости и угла (рис. 7).

(а) (б)

Рис. 9. Задающее устройство манипуляторов для роботизированной хирургии: (а) — общий вид задающего устройства; (б) — основной узел задающего устройства.

Можно видеть, что максимальный ток уменьшил свое значение.

Рассматриваемый двигатель с достаточной динамической точностью обрабатывает тестовые движения.

Для оценки устойчивости системы подадим на вход ступенчатое напряжение, соответствующее повороту на 180°.

Из графиков тока, скорости и угла видно, что ток имеет довольно большое максимальное значение, процесс проходит примерно за 0.6 с (рис. 8).

Исходя из передаточной функции системы управления найдем угловую частоту, при которой мнимая часть равна нулю и годограф вектора АФЧХ разомкнутой системы поворачивается на 180°. Значение угловой частоты $\omega_\pi = 2.834$ рад/с. При этом значение действительной части равно -0.698, следовательно, система устойчива.

Приведем краткое описание задающего устройства для разрабатываемых в ИМАШ РАН манипуляторов для роботизированной хирургии (рис. 9).

Задающее устройство включает в себя рукоятку управления, датчики поворотов и линейных перемещений, дугообразные звенья, карданный шарнир. Задающее устройство (рис. 9) обеспечивает управление по четырем степеням свободы, кроме того, предусмотрено управление схватом. Предлагаемая конструкция устройства позволяет обеспечить движения выходного звена и инструмента, расположенного на нем максимально похожими на движения стандартного хирургического лапароскопа. Задающее устройство вместе с роботизированным механизмом можно адаптировать для манипулирования камерой, расположенной в качестве выходного звена.

Приведенный в настоящей статье расчет является первым шагом в построении системы управления. В дальнейших работах авторы ставят перед собой задачи учета нелинейностей в модели двигателя постоянного тока, в частности, трение в кинематических парах, а также учета других подходов к построению системы управления, в частности, концепцию подчиненного регулирования.

Таким образом, разработанные механизмы и изготовленные прототипы обладают важными для малоинвазивных хирургических систем достоинствами по сравнению с уже признанными в мире, невысокими массогабаритными характеристиками при сохранении нагрузочной способности конструкции и динамической точности движений. При этом разработаны подходы к решению проблем, возникающих при использовании предлагаемых устройств, в частности речь идет о проведении кинематического и динамического анализа, об учете особых положений. Проведенные и дальнейшие исследования можно практически использовать при развитии отечественной роботизированной малоинвазивной хирургии.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Minimally invasive surgery market—Global industry analysis, size, share, growth, trends & forecast, 2013–2019 // Transparency Market Research. Albany. N.Y. USA. Tech. Rep. 2014.
2. *Heikkinen T., Msika S., Desvignes G., Schwandner O., Schiedeck T.H., Shekarriz H., Bloechle C.H., Baca I., Weiss O., Morino M., Giraudo G., Bonjer H.J.* Laparoscopic surgery versus open surgery for colon cancer: Short-term outcomes of a randomised trial // Lancet Oncol. 2005. V. 6. № 7. P. 477.
3. *Велиев Е.И., Голубцова Е.Н., Томилов А.А.* Возможности малоинвазивной коррекции недержания мочи после радикального лечения рака предстательной железы // Онкоурология. 2013. № 4. С. 37.
4. *Rosen J., Hannaford B., Satava R.M.* Surgical Robotics. Systems Applications and Visions Springer // Science+Business Media. LLC, 2011. 843 p.
5. *Ficarra V., Novara G., Fracalanza S.* A prospective, non-randomized trial comparing robot-assisted laparoscopic and retropubic radical prostatectomy in one European institution // BJU Int. 2009. V. 104 (4). P. 534.
6. *Corker K., Lyman J.H., Sheredos S.* A preliminary evaluation of remote medical manipulators // Bull Prosthet Res. 1979. V. 2. Iss. 16. P. 107.
7. *Alexander A.D.* Impacts of Telemation on Modern Society // On Theory and Practice of Robots and Manipulators. Berlin, Heidelberg: Springer, 1972. P. 121.
8. *Alexander A.D.* Impacts of telemation on modern society, Jan. 1973.
9. *Takacs A., Nagy D.A., Rudas I.J., Haidegger T.* Origins of Surgical Robotics: From Space to the Operating Room // Acta Polytechnica Hungarica. 2016. V. 13. № 1. P. 13.
10. *Kwoh Y.S., Hou J., Jonckheere E.A., Hayati S.* A robot with improved absolute positioning accuracy for CT guided stereotactic brain surgery // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1988. V. 35 (2). P. 153.
11. *Sooriakumaran P., Srivastava A., Shariat S.F.* A Multinational, Multiinstitutional Study Comparing Positive Surgical Margin Rates Among 22393 Open, Laparoscopic, and Robot-assisted Radical Prostatectomy Patients // Eur. Uro. 2014. V. 66 (3). P. 450.
12. *Lee D.* Perioperative outcomes of robot-assisted radical prostatectomy compared with open radical prostatectomy: results from the nationwide inpatient sample // Journal of Endourology. 2012. 26 (8). P. 951.
13. *Rassweiler J.J., Autorino R., Klein J., Mottrie A., Goezen A.S., Stolzenburg J.-U., Rha K.H., Schurr M., Kaouk J., Patel V., Dasgupta P., Liatsikos E.* Future of robotic surgery in urology // Robotics and Laparoscopy BJU Int. 2017. V. 120. P. 822.
14. *Gidaro S., Buscarini M., Ruzi E. et al.* Telelap Alf-X: a novel telesurgical system for the 21st century // Surg. Technol. Int. 2012. V. 22. P. 20–5.
15. *Hagn U., Konietschke R., Tobergte A. et al.* DLR MiroSurge: a versatile system for research in endoscopic telesurgery // Int. J. Comput. Assist. Radiol. Surg. 2010. V. 5. P. 183–9.

16. *Thielmann S., Seibold U., Haslinger R. et al.* MICA – a new generation of versatile instruments in robotic surgery // Proc. Int. Conference Intelligent Robots and Systems. Taipeh. 2010.
17. *Rossitto C., Gueli Alletti S., Romano F., Fiore A., Coretti S., Oradei M., Ruggeri M., Cicchetti A., Marchetti M., Fanfani F., Scambia G.* Use of robot-specific resources and operating room times: the case of Telelap Alf-X robotic hysterectomy // Int. J. Med. Robot. 2016. V. 12: 613–9.
18. *Fanfani F., Restaino S., Rossitto C. et al.* Total laparoscopic (S-LPS) versus TELELAP ALF-X robotic-assisted hysterectomy: a case control study // J. Minim. Invasive Gynecol. 2016. V. 23: 933–8.
19. *Hagn U., Konietschke R., Tobergte A. et al.* DLR MiroSurge: a versatile system for research in endoscopic telesurgery // Int. J. Comput. Assist. Radiol. Surg. 2010. V. 5: 183–9.
20. *Haber G.P., Autorino R., Laydner Y. et al.* Spider surgical system for urologic procedures with laparoendoscopic single-site surgery from initial laboratory experience to first clinical application // Eur. Urol. 2012. V. 61: 415–22.
21. *Veliev E.I., Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Parallel and Sequential Structures of Manipulators in Robotic Surgery // Doklady Physics. 2019. T. 64. № 3. P. 106.
22. *Veliev E.I., Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Promising Minimally Invasive Robotic Surgical Complexes with Parallel Structure // Doklady Physics. 2020. V. 65. № 11. P. 409.
23. *Ganiev R.F., Ganiev S.R., Kasilov V.P., Pustovgar A.P.* Wave technology in mechanical engineering // Co-published by JohnWiley & Sons Inc. Hoboken, New Jersey, and Scrivener Publishing LLC Salem Massachusetts. USA. Published simultaneously in Canada, 2015.
24. *Глазунов В.А.* Механизмы параллельной структуры и их применение: робототехнические, технологические, медицинские, обучающие системы. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2018. 1036 с.

EDN: YCICDE
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 95–101**

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 631.348

ИССЛЕДОВАНИЕ ЩЕЛЕВЫХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСПЫЛИТЕЛЕЙ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ МЕТОДАМИ 3D-ПЕЧАТИ

© 2022 г. В. А. Денисов[1], В. Э. Славкина[1,*], А. С. Свиридов[1], Ю. А. Гончарова[1]

[1]Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Россия
**e-mail: vicktoria.slavkina@yandex.ru*

Поступила в редакцию 14.10.2021 г.
После доработки 07.02.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В настоящей статье представлены результаты исследований распылителей сельскохозяйственных опрыскивателей, изготовленных методами аддитивных технологий. Исследуемые образцы изготавливались при помощи SLA- и SLS-печати. Для 3D-печатных распылителей и эталонных из полиацеталя определялись расход рабочей жидкости, изменение формы сопла распылителя, угол распыла, изменение массы в результате испытаний. Был сделан вывод о возможности применения распылителей, изготовленных методом 3D-печати, вместо изготавливаемых серийно полимерных распылителей.

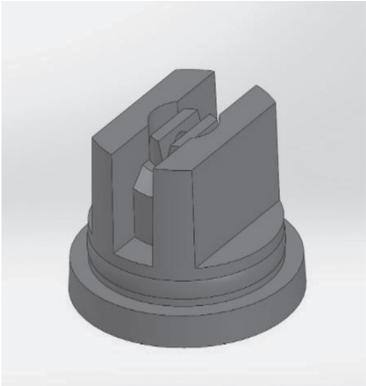
Ключевые слова: щелевой распылитель, опрыскивание, аддитивные технологии, 3D-печать, испытательный стенд, расход рабочей жидкости, угол распыла, диаметр сопла, полимер

DOI: 10.31857/S0235711922030038

В технологической системе возделывания сельскохозяйственных культур химическая защита растений от сорняков, вредителей и болезней имеет приоритетное значение. В структуре комплексной системы защиты растений особое место занимает по праву химический метод, и в частности, опрыскивание. Эффективность работы опрыскивателей в первую очередь определяется качеством используемых распылителей, регулирующих дисперсность и количество распыляемой жидкости [1–3]. Наиболее часто применяют распылители, изготовленные из полимерных материалов, благодаря их высокой химической стойкости, большему сроку жизни и низкой цене [4].

В настоящее время одним из перспективных направлений производства различных деталей из полимерных материалов является применение аддитивных технологий. Внедрение технологий трехмерной печати (3D-печать) обеспечивает возможность создания детали машины или изделия в целом на основе разработанной 3D-модели в кратчайшие сроки и с минимальными потерями материалов [5–8]. Полимерные распылители сельскохозяйственных опрыскивателей также могли бы изготавливаться методами 3D-печати, что позволило бы существенно сократить затраты на их изготовление при разработке и испытаниях новых образцов распылителей или при срочном ремонте опрыскивателей [9]. Однако номенклатура материалов, применяемых для 3D-печати, ограничена. Имеются также ограничения по точности изготовления моделей и качеству их поверхности. Таким образом, возникает опасение, что 3D-печатные распылители не будут повторять характеристики их аналогов, изготовленных традиционным методом литья под давлением [10–13]. Цель статьи – сравнение функцио-

(а) (б)



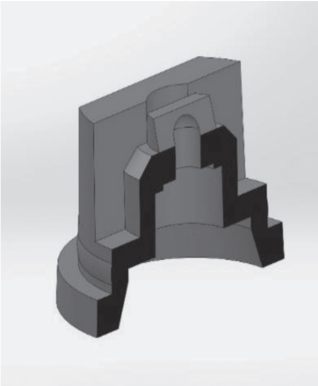


Рис. 1. Трехмерная модель распылителя: (а) – общий вид; (б) – в разрезе.

нальных характеристик 3D-печатных щелевых распылителей с их серийно изготавливаемым аналогом и оценке возможностей их применения.

Материалы и методы. Для изготовления образцов применялась технология 3D-печати. Для этого в начале в программе SolidWorks строилась трехмерная модель образца (рис. 1).

Для 3D-печати распылителей были выбраны технологии SLA и SLS, поскольку они обеспечивают более высокую точность и качество поверхности изделий по сравнению с имеющимися аналогами. Для изготовления образцов методом SLA-технологии используется фотополимерная смола, которая заливается в бак, после чего лазерный луч обводит контур детали и таким образом формируется деталь под действием ультрафиолетового света [14, 15]. Технология SLS-печати имеет похожий принцип действия и позволяет получать изделия из мелких кусочков пластика, керамических или стеклянных порошков [16, 17]. Схемы работы принтеров, работающих по SLS- и SLA-технологии представлены на рис. 2.

Распылители, исследуемые в настоящей статье, были изготовлены из различных материалов. В качестве эталонного образца использовался распылитель, изготовленный из термопласта – полиформальдегид (POM). Данный образец принадлежит компании TeeJet, изготовленный методом литья под давлением. При изготовлении образцов, полученных методом SLA-печати, применялась фотополимерная смола FormLabs Durable Resin. Образцы, полученные методом SLS-печати, изготавливались из полиамида 12 (PA 12) (рис. 2).

Для оценки функциональных характеристик, полученных щелевых распылителей использовали испытательный стенд (рис. 3), состоящий из бака для воды с насосом-фильтром, корпуса, распределителя, манометра, напорного шланга и штанги с распылителями.

Эксперимент проводился следующим образом: одновременно испытывался эталонный образец из термопласта и исследуемый образец. Распылитель крепился на кронштейне, плоскостью веера распыла поперек стола. Бак опрыскивателя заполняли водой, и насосом в нем создавалось давление. Из распылителя вода попадала на стол, стекала по наклонной поверхности в лоток, а затем в емкость под ним. Испытания распылителей на стенде проводилось при различном давлении: минимальное – 1 Па, промежуточное – 2.5 Па, максимальное 4 Па. После установки требуемого давления устанавливали мерный стакан объемом 200 мл и включали секундомер. Испытания

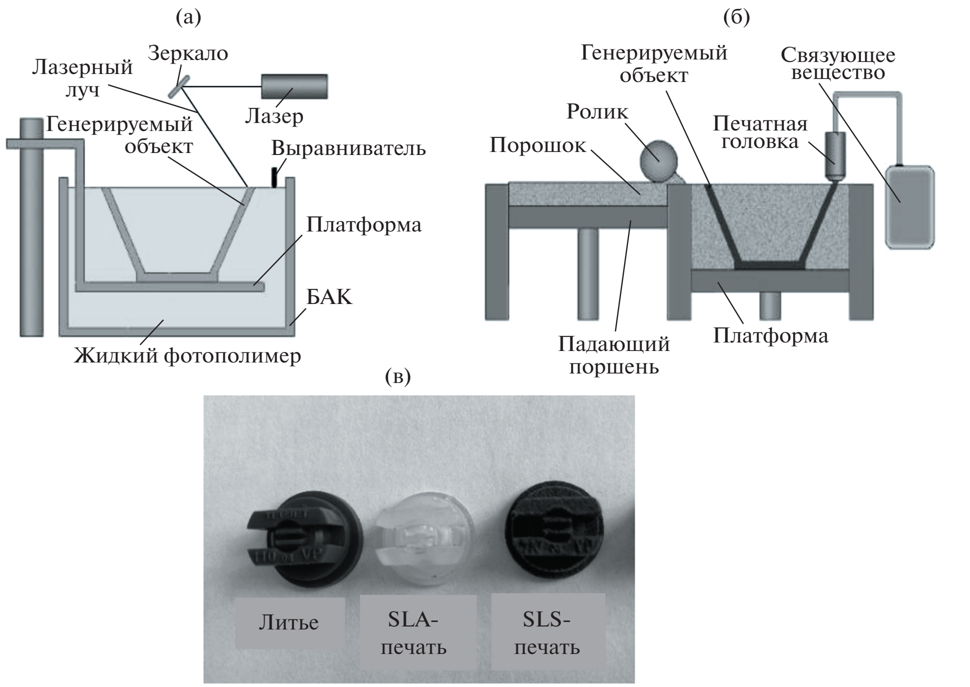


Рис. 2. Схема работы 3D-принтера и образцы для испытаний: (а) – схема работы 3D-принтера, работающего по SLA-технологии; (б) – схема работы 3D-принтера, работающего по SLS-технологии; (в) – образцы для испытаний.

Рис. 3. Испытательный стенд для исследования распылителей.

проводили в течение 3 с, после чего закрывали кран и измеряли количество жидкости в мерном стакане по достигнутой метке.

Также в процессе испытаний проводили измерение угла распыла. Для этого процесс распыления записывали на камеру. Из полученных видео формировали стоп-

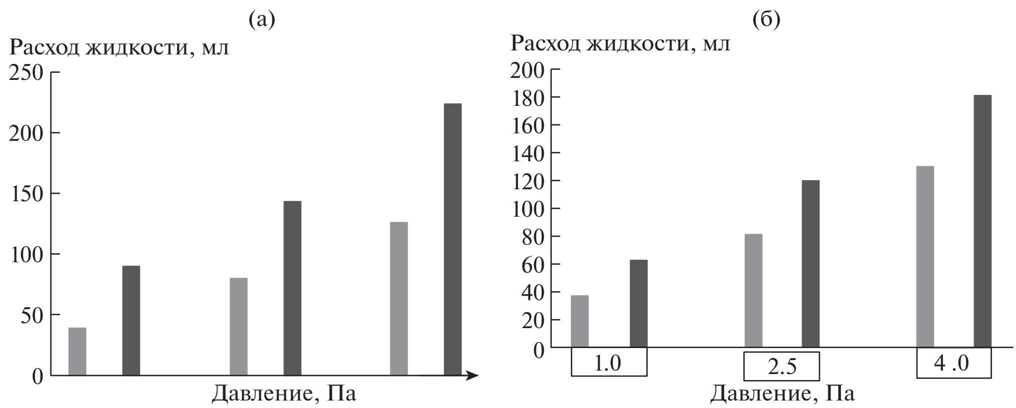


Рис. 4. Гистограмма сравнения расхода рабочей жидкости: (а) – SLA-печать; (б) – SLS-печать: ■ – эталон; ■ – образец.

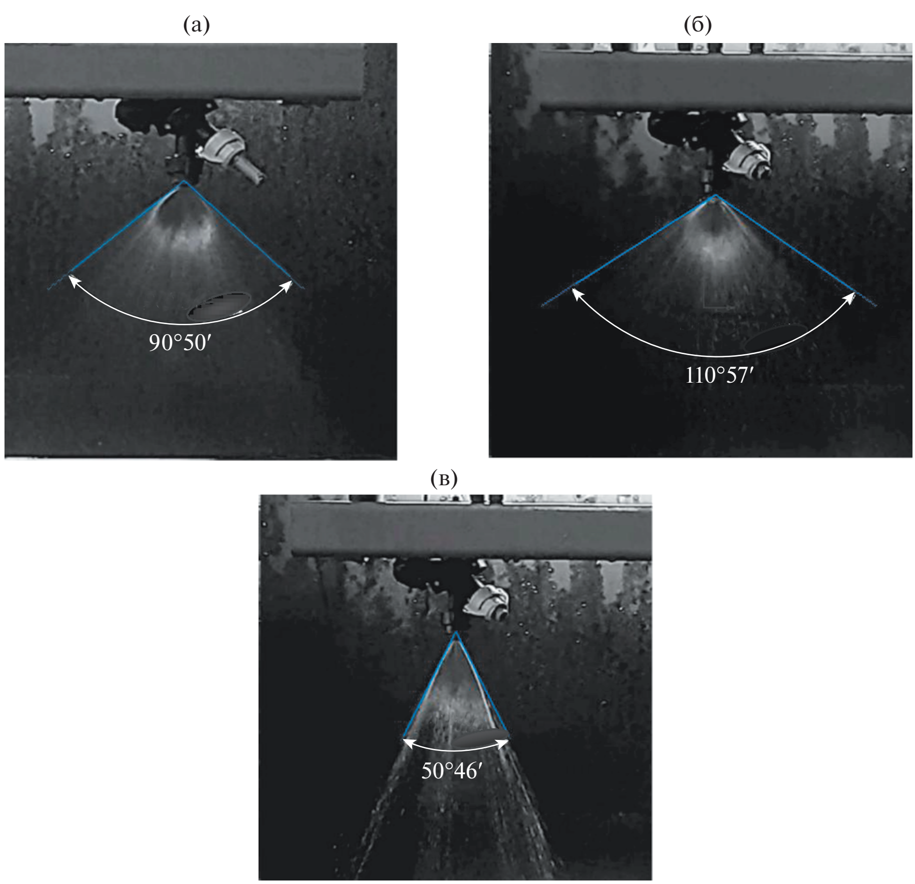


Рис. 5. Угол факела распыла: (а) – эталонный образец; (б) –SLA-печать; (в) – SLS-печать.

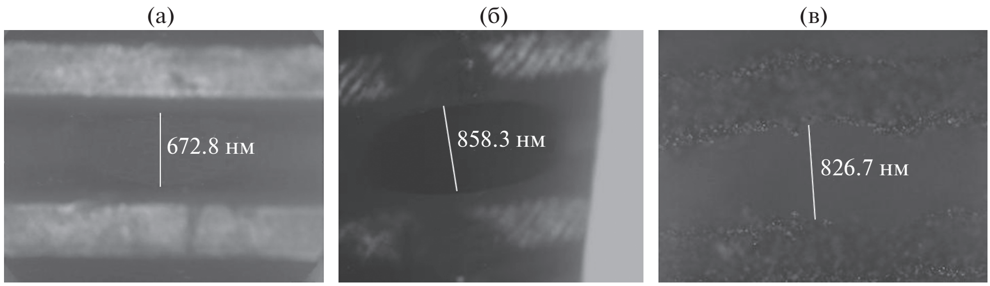


Рис. 6. Диаметр образцов, измеряемый при помощи микроскопа: (а) – эталонный образец; (б) – SLA-печать; (в) – SLS-печать.

кадры. После эти изображения обрабатывались в программе КОМПАС-3D: на изображении строились две линии, касательные к формируемому факелу распыла жидкости, и измерялся угол между ними.

Дополнительно проводилось исследование изменения диаметра распылителя после испытаний, которое осуществлялось при помощи оптического микроскопа GX53. Также при помощи аналитических весов измерялась масса исследуемых образцов распылителей до и после проведения испытаний.

Результаты и обсуждение. Средний расход рабочей жидкости для распылителей, изготовленных различными методами, представлен на рис. 4.

Образцы, изготовленные с помощью 3D-печати, имеют больший расход воды по сравнению с эталоном. В среднем для распылителей, изготовленных методом SLA-печати, происходит увеличение расхода жидкости на 44–49%, для распылителей, изготовленных SLS-печатью, на 58–66%.

Внешний вид факелов распыла исследуемых распылителей при одинаковом давлении (2.5 Па) показан на рис. 5. Полученные данные, анализировались при помощи фото- и видеоматериалов, снятых в ходе эксперимента.

Согласно данным рис. 5 видно, что самым большим размером капель обладают образцы, изготовленные методом SLS-печати, можно заметить ярко выраженные струи воды. При испытании образцов, изготовленных SLA-печатью, также можно заметить крупные капли. Значения угла распыла образцов представлены в табл. 1.

Также в ходе исследования проводилось измерение диаметра сопла образцов до и после проведения испытаний с помощью электронного микроскопа. Примеры полученных изображений представлены на рис. 6. Данные измерений представлены в табл. 2. Как видно наибольшее увеличение диаметра произошло у порошковых образцов, изготовленных методом SLS-печати. В среднем увеличение диаметра распылителей, изготовленных при помощи SLS-технологии, составило порядка 10%.

Таблица 1. Углы распыла распылителей при 2.5 Па

Образец	Угол, °С
Эталон	95.50
SLA-печать	110.51
SLS-печать	50.46

Таблица 2. Изменение диаметра образцов

Материал	Образец №	Изменение диаметра, мкм	Среднее значение диаметра, мкм
SLS-технология	1	31.5	88.8
	2	92.0	
	3	142.8	
SLA-технология	1	12.5	7.5
	2	8.4	
	3	1.5	
Литье	1	4.0	4.0

Таблица 3. Значение массы образцов

Материал	Образец №	Изменение массы, мг	Среднее значение изменения массы, мг
SLA-технология	1	+1.42	+2.03
	2	+4.32	
	3	+0.34	
SLS-технология	1	+2.38	+2.46
	2	+2.58	
	3	+2.42	
Литье	1	–0.58	–0.58

Следовательно, такой метод не подходит для создания распылителей опрыскивателя, т.к. происходит быстрый износ распылителя, что ведет к изменению угла факела распыла и большему расходу рабочей жидкости. Изменение диаметра образцов из фотополимерной смолы составило 1%.

Далее измерялась масса образцов до и после испытаний. Полученные данные представлены в табл. 3.

Как видно из полученных данных масса исследуемых распылителей незначительно увеличилась после испытаний, что может свидетельствовать о поглощении воды данными материалами. Эталонный образец, напротив стал весить меньше из-за износа распылителя.

Выводы. В результате проведенной работы было установлено, что изготовленные образцы имеют более чем на 50% увеличенный расход воды по сравнению с эталонным. Также по сравнению с образцом из термопласта, образцы, изготовленные методом SLA- и SLS-печати подвержены большему износу и увеличению диаметра сопла. У образцов, полученных порошковой печатью увеличение диаметра сопла составляет 10%. Также, полученные образцы, обладают способностью поглощать воду, о чем свидетельствует увеличение массы образцов после проведения испытаний. Также данные образцы распыляют довольно крупные капли и струи воды видные даже невооруженным глазом.

Несмотря на близкое к эталону значение угла распыла у образцов из фотополимерной смолы Durable 110.5°C, данный вид распылителей не может быть полноценно использован вместо эталонного образца из-за всех вышеперечисленных недостатков.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасименко И.В.* К вопросу повышения эффективности и эксплуатационной надежности опрыскивателей сельскохозяйственных культур // Статья в сборнике трудов конференции: Современные тенденции в науке, технике, образовании, Смоленск, Россия, 2018. С. 26.
2. *Борисенко И.Б., Мезникова М.В., Улыбина Е.И.* Технологические особенности полосовой химической обработки пропашных культур // Фермер, Поволжье. 2019. № 2 (79). С. 74.
3. *Омаров А.Н., Бекешеев М.И.* Экспериментальные исследования установки распылителей при обработке пропашных культур // Статья в сборнике трудов конференции: Интеллектуальные технологии и техника в АПК, Мичуринск, Россия, 2016. С. 320.
4. *Лысыч М.Н., Шабанов М.Л., Качурин А.А.* Обзор современных технологий 3D печати // Modern High Technologies. 2015. V. 6. P. 26.
5. *Свиридов А.С., Катаев Ю.В., Загоруйко М.Г.* Анализ типов распылителей сельскохозяйственных опрыскивателей // Аграрный научный журнал. 2021. № 6. С. 96.
6. *Baila D.-I., Lazar L.-V.* Economically evelopment of 3D-printing technology in Romania // In: 29th International Business Information Management Association Conference, Vienna, Austria, 2017. P. 3735.
7. *Славкина В.Э., Мирзаев М.А., Лопатина Ю.А.* Возможности применения технологии 3D-печати для оптимизации ремонта зубчатых передач // Технический сервис машин. 2020. № 1. С. 54.
8. *Дорохов А.С., Свиридов А.С.* () Применение аддитивных технологий при техническом сервисе садовой техники // Агроинженерия. 2020. № 6 (100). С. 39.
9. *Ерохин М.Н., Казанцев С.П., Дорохов А.С.* Компьютерные технологии проектирования в учебном процессе агроинженерных вузов // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина”. 2010. № 4 (43). С. 82.
10. *Потемкин Р.А., Свиридов А.С.* Особенности испытаний распылителей сельскохозяйственных опрыскивателей // Технический сервис машин. 2020. № 4 (141). С. 47.
11. *Hazrat A.M., Batsai S., Sarbassov D.* 3D printing: a critical review of current development and future prospects // Rapid Prototyping Journal. 2019. № 25 (6). P. 1108.
12. *Saini J.S., Dowling L., Kennedy J., Trimble D.* Investigation of the mechanical properties on different print orientations in SLA 3D printed resin // Journal of Mechanical Engineering Science. 2020. № 234 (11). P. 2279.
13. *Дорохов А.С.* Перспективы технического обеспечения входного контроля качества // Тракторы и сельхозмашины. 2010. № 8. С. 46.
14. *Полушкин Д.П.* 3D-печать методом SLA // Инновационное развитие. 2018. № 1 (18). С. 24.
15. *Дубинкин Д.М., Исмаилова Ш.Я., Искандарова Е.И., Усаченко О.И.* Современное состояние, пути развития, области применения селективного лазерного спекания (SLS) // Статья в сборнике конференции: Инновации в информационных технологиях, машиностроении и автотранспорте, Кемерово, Россия, 2019. С. 174.
16. *Poljak S., Madaj R., Podhora P.* Verification of construction properties materials for rapid prototyping using SLS technology // In: 58th International Conference of Machinery Design Departments, Czech Republic, 2017. P. 306.
17. *Султанова Ф.Р., Нам И.Э., Мирзахакимов С.Б.* Технология селективного спекания (SLS) // Инновационная наука. 2016. № 10. P. 119.

EDN: DZBZZJ
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 3, с. 102–112**

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 620.171.34

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМАЦИИ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ НА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИСПЫТАТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

П. А. Петров[1,*], В. Н. Фам[1], И. А. Бурлаков[1], А. Г. Матвеев[1], Б. Ю. Сапрыкин[1], М. А. Петров[1], У. Ш. Диксит[2]

[1]*Московский политехнический университет, Москва, Россия*
[2]*Индийский институт технологии Гувахати, Гувахати, Индия*
**e-mail: petrov_p@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.08.2021 г.
После доработки 02.11.2021 г.
Принята к публикации 20.12.2021 г.

В статье рассматривается методика подготовки лабораторного испытания на сжатие, направленного на сбор данных для построения изотермической кривой текучести деформируемого материала. Особенность методики – определение значения скорости деформации с учетом особенностей испытательной машины. В качестве объекта исследования рассматривается цилиндрический образец с определенным соотношением H_0/D_0 алюминиевого сплава АМг6. Получены данные о бочкообразности; о выборе соотношения размеров исходного образца H_0/D_0, обеспечивающих постоянную скорость деформации и формоизменение без разрушения. Полученные данные учитываются при определении технологических свойств деформируемых материалов, применяемых при разработке и исследовании малоизученных технологий обработки давлением – технологии изотермической штамповки и технологии штамповки кручением алюминиевых сплавов.

Ключевые слова: испытание на сжатие, управление скоростью перемещения траверсы испытательной машины, соотношение размеров исходного образца, алюминиевый сплав, напряжение текучести, сопротивление деформации, кривая текучести, программа нагружения, универсальная испытательная машина

DOI: 10.31857/S0235711922020110

Для сбора данных о сопротивлении деформации конструкционных материалов, подвергаемых пластической деформации, необходимо проведение лабораторных испытаний [1, 2]. Например, в качестве лабораторного испытания металлических материалов можно применить испытания на сжатие, методы проведения которых, в целом, описаны в ГОСТ 25.503-97.

Важными этапами проведения испытания является: 1) выбор размеров исходного образца исследуемого материала, в частности соотношения его высоты к диаметру (H_0/D_0); 2) выбор испытательной машины, обеспечивающей достижения требуемых значений скорости деформации ($\dot{\varepsilon}_i$) и температуры (T_i); 3) выбор способа сбора экспериментальных данных об испытании и способа их обработки для получения достоверных исходных данных для обработки и построения экспериментальных кривых текучести материала для исследуемых температурно-скоростных условий деформации.

В области обработки давлением знания о технологических свойствах деформируемого материала имеют огромное значение для получения достоверных результатов решения краевой задачи обработки металлов давлением (ОМД), т.к. лежат в основе модели сопротивления деформации (материала). Модель материала является необходимой при решении краевой задачи ОМД вне зависимости от того, какой метод решения задачи выбран: аналитический, численный или инженерный. При компьютерном имитационном моделировании операций ОМД, реализуемом на основе численного(ых) метода(ов), точность моделирования во много определяется качеством и точностью исходных данных о сопротивлении деформации материала. В обобщенном виде взаимосвязь между экспериментом, по результатам которого обеспечивается получение данных для построения модели материала, и вычислительными ресурсами (САЕ-системой), применяемыми для выполнения компьютерного имитационного моделирования, можно представить так: база данных материалов, в которую вводится информация о модели материала – численный(е) метод(ы), применяемые для решения задачи ОМД (САЕ-система) – вычислительный "эксперимент", направленный на моделирование задачи ОМД.

На вход САЕ-системы загружается модель материала, описывающая его поведение в данных температурно-скоростных условиях деформирования. Чем больше факторов, влияющих на сопротивление деформации материала, учитывает его модель, тем полнее описывает его поведение при деформировании, что в современных условиях является весьма актуальным направлением исследований.

Цель настоящей статьи заключается в анализе влияния соотношения размеров исходного образца (H_0/D_0) на результаты испытаний на сжатие образцов сплава АМг6, выполненных с постоянной скоростью деформации разного значения. Соотношение H_0/D_0 определяет предел возможного изменения скорости деформирования в процессе нагружения образца, выполняемого на универсальной испытательной машине, выбранной для проведения эксперимента.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи: 1) разработать методику проведения испытания на сжатия цилиндрических образцов с разным соотношением H_0/D_0; 2) выбрать размеры образцов и скоростные условия проведения экспериментальных исследований, позволяющих реализовать разрабатываемую методику; 3) исследовать влияние соотношение размеров на характер кривых текучести при проведении испытаний на универсальной испытательной машине с возможностью управления программой нагружения.

Основная особенность испытаний на сжатие заключается в создании однородного напряженного состояния по всей высоте образца [3]. При неудачном выборе формы и размеров исходного образцов, полученные результаты сопротивления деформации несут в себе не только данные о поведении материала как такового, но и влияние на него вторичных факторов, связанных с неидеальными условиями проведения эксперимента.

Материалы и оборудование для проведения испытания. Испытания на сжатие выполнены на универсальной испытательной машине, имеющей числовое программное управление, а также систему подготовки, контроля и сбора данных об испытании. Характеристики испытательной машины (LFM-250, Walter+Bai AG, Швейцария) представлены в табл. 1.

Выделим полезные особенности универсальной машины: наличие автоматизированной системы контроля и сбора данных об испытании; наличие программного обеспечения, обеспечивающего двустороннюю связь с данной системой; наличие возможности управления программой нагружения, учитывая особенности проводимых испытаний.

Исследуемый материал – сплав АМг6, относящийся к категории деформируемых алюминиевых сплавов системы Al–Mg. Сплав АМг6 является термически неупрочненным, при этом обладает повышенной устойчивостью к коррозийным изменениям [4].

Таблица 1. Характеристики испытательной машины

Параметр	Показатель
Максимальная нагрузка	250 кН
Минимальная нагрузка	1.25 кН
Максимальная скорость испытания	500 мм/мин
Ход траверсы	до 1000 мм
Тип привода	Электромеханический
Пределы допускаемой относительной погрешности:	
силоизмерителя	0.5%
измерения перемещения подвижной траверсы	±1.0%
задания скорости перемещения подвижной траверсы без нагрузки	±1.0%

Химический состав сплава, из которого были изготовлены образцы для исследования (% мас.): Al – 93.27; Mg – 5.835; Mn – 0.565; Fe – 0.26; Si – 0.13.

Из прессованного прутка исследуемого сплава АМг6 были изготовлены цилиндрические образцы с разным соотношением H_0/D_0: 1) диаметр 11.8 мм, высота 18 мм, соотношение $H_0/D_0 = 1.5$; 2) диаметр 11.8 мм, высота 11.8 мм, соотношение $H_0/D_0 = 1.0$; 3) диаметр 10.0 мм, высота 10.0 мм, соотношение $H_0/D_0 = 1.0$.

Образцы для испытания получены точением с последующим шлифованием торцевых поверхностей. Температура во всех экспериментах составляла 20°C и испытания проводили при различных значениях скорости деформации: 0.001 c^{-1}; 0.01 c^{-1}; 0.10 c^{-1}; 0.22 c^{-1}, 0.40 c^{-1}. Деформирование образца выполнялось без смазки.

Методика испытания на сжатие образцов материалов с разным соотношением H_0/D_0. В некоторых работах [5–7] показано на примере осадки цилиндрических образцов при комнатной и повышенной температуре, что при деформации до 50% у образцов отсутствует заметная бочкообразность боковой поверхности, т.е. деформацию можно считать однородной, а напряженное состояние – линейным и интенсивность напряжения определяется выражением

$$\sigma_i = \frac{P_i}{F_i}, \tag{1}$$

где P_i – текущее (измеренное) значение силы деформирования; F_i – значение площади поперечного сечения образца, соответствующее значению P_i и текущей высоте деформируемого образца H_i.

При этом перед началом испытаний на сжатие на торцовую поверхность образцов наносится смазка. При таком подходе очень сложно контролировать в процессе испытания истинную температуру деформируемого материала и материала инструмента, если проводится испытание материала при повышенных температурах, т.к. при нанесении смазки, нагретый образец контактирует с окружающей средой и его температура, как и температура материала инструмента, уменьшается. В этом случае, полученные экспериментальные кривые текучести не будут соответствовать температуре испытания, заданной при подготовке. С другой стороны, если рассматривать испытания на сжатие при комнатной температуре, то вышеназванная проблема изменения температуры отсутствует. Однако, влияние контактного трения на форму боковой поверхности, остается и оно тем меньше, чем более эффективная смазка применяется.

Можно также провести аналогию с испытанием на растяжение: образец растягивается и до начала формирования шейки напряженное состояние считается линейным, а начиная с момента формирования шейки – объемным. Для компенсации объемного напряженного состояния (НС) вводится поправочный коэффициент k, например поправочный коэффициент П. Бриджмена или поправочный коэффициент Давиденкова–Спиридоновой. Тогда, формула для расчета интенсивности напряжения (σ_i^k) по результатам испытания на растяжения записывается в виде

$$\sigma_i^k = k\sigma_i, \tag{2}$$

где σ_i^k – интенсивность напряжения при линейном НС; k – поправочный коэффициент, учитывающий объемное состояние в шейке; σ_i – интенсивность напряжения, определяемая по формуле (1).

В работах [8, 9] исследователи применяют подобный подход (2) для компенсации объемного НС, формируемого за счет бочкообразности боковой поверхности образца при проведении испытания на сжатие.

Еще один современный подход к обработке данных испытаний на сжатие и учету бочкообразности описан в работе профессора Петржика и его коллег [2]. Он связан с применением метода постановки обратной задачи, которая предполагает проведение двух экспериментов: натурного и вычислительного. При этом вычислительный эксперимент позволяет определить оптимальное сочетание исходных данных, обеспечивающих минимальное отклонение от данных натурного эксперимента. В этом случае применение смазки либо ее отсутствие становятся второстепенным параметром для испытания на сжатие.

Учитывая, что в эксперименте сжатие образцов проводилось без смазки, на этапе обработки результатов использовали методику, подробно описанную в работе [10] и основанную на методе постановки обратной задачи [2]. Несмотря на выбранный подход, для испытания на сжатие остается важным выбор соотношения размеров исходного образца по двум причинам: 1) отсутствие в эксперименте продольной устойчивости образца; 2) возможность проведения эксперимента с максимальным изменением скорости деформирования в процессе нагружения образца при фиксированной (ограниченной конструкцией машины) скорости перемещения траверсы испытательной машины.

Подбор соотношение высоты (H_0) исходного образца к его диаметру (D_0) принято выполнять в диапазоне от 1 до 2.5. При значении отношения H_0/D_0 равном или более 1.0, считается, что влияние трения существенно меньше; при осадке высоких размеров ($H_0/D_0 \geq 2.5$) – происходит потеря устойчивости образца, трудно избежать его продольного изгиба и результаты натурного эксперимента не могут быть обработаны.

На рис. 1 приведены диаграммы, полученные при испытании на сжатие цилиндрических образцов из среднеуглеродистой стали одинакового диаметра D_0, но с различным начальным отношением H_0/D_0 [11]. При переходе от относительно длинных образцов с начальным отношением $H_0/D_0 = 2$ к коротким образцам ($H_0/D_0 = 0.5$) сопротивление пластическому деформированию возрастает ~1.3 раза в области значений деформаций от 1.0 до 1.4. В области значений деформаций от 0 до ~0.6 (рис. 1) влияние значения соотношения H_0/D_0 на сопротивление деформации практически минимальное. То есть значение истинной деформации в эксперименте не должно превышать 0.6, что соответствует примерно осадке образца на 50% его исходной высоты H_0.

В работе [12] представлены диаграммы сжатия образцов алюминиевого сплава A6061-T651 (рис. 2), имеющие характер влияния значения H_0/D_0 на сопротивления деформации аналогичный тому, что представлен на рис. 1.

Для повышения надежности метода испытания на сжатие при комнатной и, особенно, при повышенной температуре, в работе [8] представлена методика компенса-

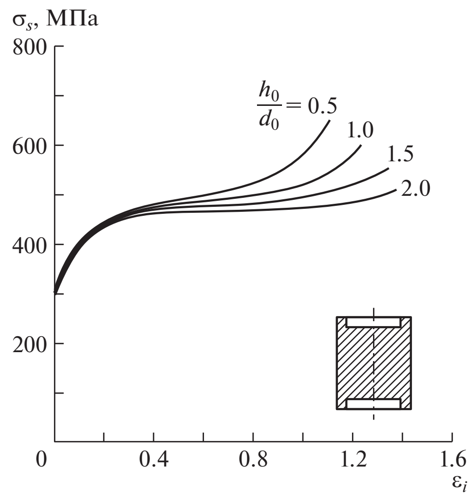


Рис. 1. Диаграммы сжатия цилиндрических образцов из стали 45 [11]: ε_i – истинная деформация.

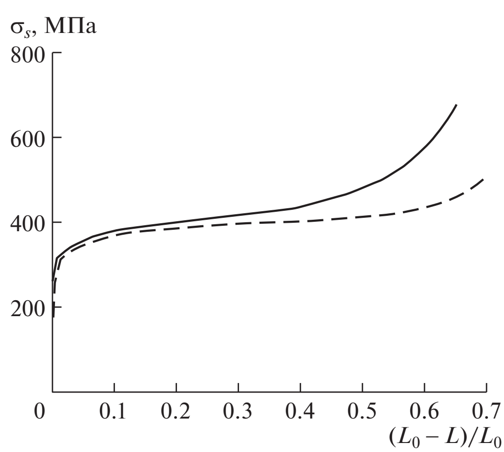


Рис. 2. Диаграммы сжатия цилиндрических образцов из алюминиевого сплава A6061 термически обработанного по режиму T651 (российский аналог – сплав АД33): $H_0/D_0 = 1$ – сплошная линия; $H_0/D_0 = 2$ – штриховая линия [12].

ции влияния контактного трения на сопротивления деформации – значение коэффициента k в формуле (2) определено следующим образом:

$$k = \frac{1}{A}, \quad A = 1 + \frac{2m}{3\sqrt{3}}\frac{R_0}{H_0}\exp\left(-\frac{3\varepsilon_i}{2}\right), \tag{3}$$

где H_0, R_0 – высота и радиус исходного (недеформированного) образца; m – показатель (фактор) трения; ε_i – истинная (накопленная) деформация.

Проверка справедливости формулы (3) выполнена по результатам испытаний на сжатие цилиндрических образцов ($H_0/D_0 = 1.55$) с плоскими торцами без проточек со

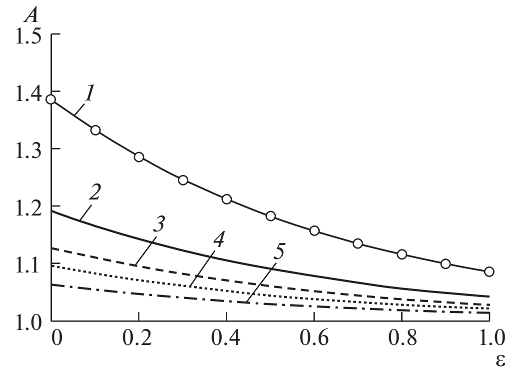


Рис. 3. Влияние соотношения H_0/D_0 на значение коэффициента A: *1* – $H_0/D_0 = 0.5$; *2* – $H_0/D_0 = 1.0$; *3* – $H_0/D_0 = 1.5$; *4* – $H_0/D_0 = 2.0$; *5* – $H_0/D_0 = 3.0$.

смазкой [8]. Материал образцов – алюминиевый сплав A2024 (российский аналог – сплав Д16) в отожженном состоянии и термообработанные по режиму T351 [11].

На рис. 3 представлены результаты расчета коэффициента A формулы (3) при соотношении H_0/D_0 от 0.5 до 3.

Значение A в формуле (3) зависит от значения истинной деформации, показателя трения и соотношения H_0/D_0. Принимая, что показатель трения $m = 1$ (сжатие образца без смазки), значение A определяется только размерами образца. Чем меньше отношение высоты образца к его диаметру, тем больше значение A и, соответственно, меньше значение k в формуле (3), меньше значение напряжения текучести (2) после его корректировки.

Основываясь на рассмотренных результатах других исследователей, в настоящей статье принята следующая методика проведения испытания на сжатие и последующей обработки его результатов: 1) расчет программы нагружения, обеспечивающей постоянную скорость деформации в процессе нагружения образца – 0.001 с$^{-1}$; 0.01 с$^{-1}$; 0.1 с$^{-1}$; 0.22 с$^{-1}$, 0.40 с$^{-1}$; 2) сжатие цилиндрических образцов с плоскими торцами с соотношением $H_0/D_0 = 1$ и 1.5 (абсолютные размеры представлены выше) без смазки; 3) обработка результатов испытания в соответствии с методикой, подробно изложенной в работах [10, 13], основываясь на методе постановки обратной задачи; 4) оценка влияния соотношения H_0/D_0 на получаемую кривую текучести сплава АМг6.

На рис. 4 представлены примеры программ нагружения (зависимость “время t, с”– “высота образца h, мм”), обеспечивающие постоянную скорость деформации на протяжении всего рабочего хода испытательной машины.

Программа нагружения зависит от размеров исходного образца H_0 и D_0 (рис. 4). Уменьшение высоты H_0 позволяет получать программу нагружения, обеспечивающую большую постоянную скорость деформации. При этом следует учитывать допустимое соотношение H_0/D_0 и максимальную скорость деформации выбранной испытательной машины. Так, например, для испытательной машины (табл. 1) максимальная скорость перемещения траверсы 250 мм/мин и при высоте образца $H_0 = 10$ мм ($H_0/D_0 = 1.0$) возможно выполнить нагружения с постоянной скоростью деформации ~0.4 с$^{-1}$.

Это значение скорости деформации является максимально возможным для выбранной испытательной машины. Если увеличить соотношение H_0/D_0 до 1.5, то мак-

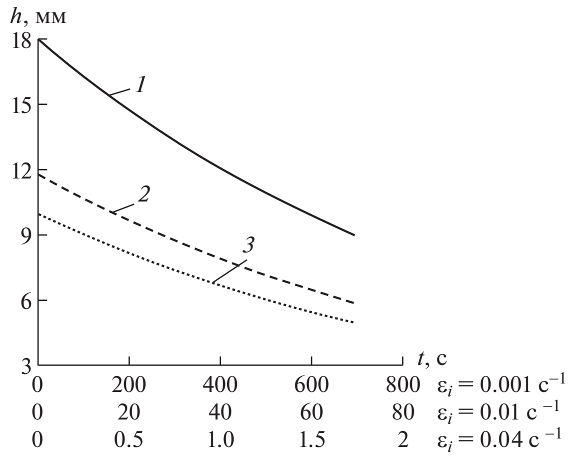


Рис. 4. Программы нагружения при постоянной скорости деформации и различных размерах исходного образца: *1* – высота 18 мм, диаметр 11.8 мм; *2* – высота 11.8 мм, диаметр 11.8 мм; *3* – высота 10 мм, диаметр 10 мм.

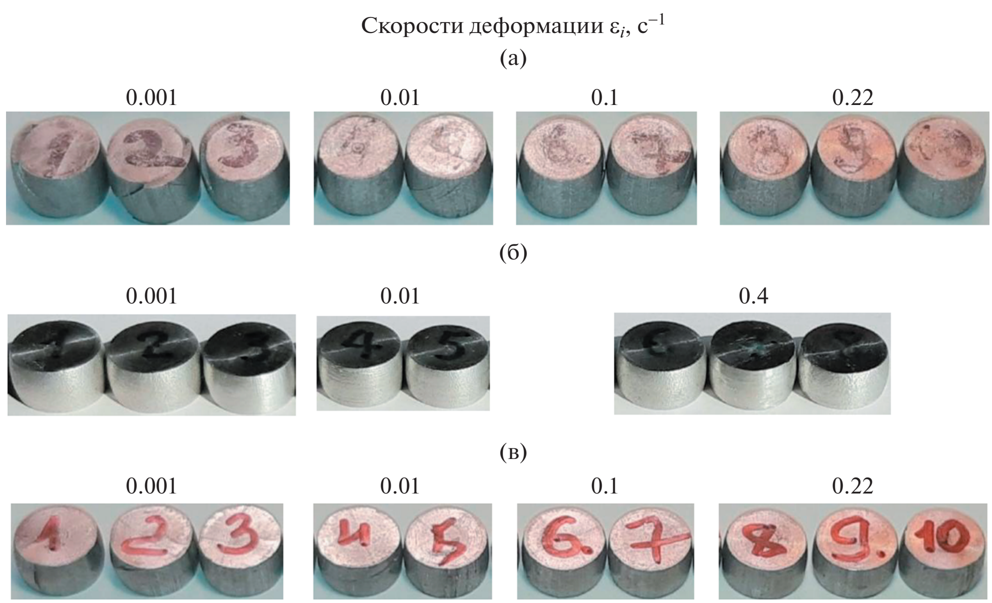


Рис. 5. Образцы сплава АМг6 после осадки: (а) – соотношение $H_0/D_0 = 1.5$; (б) – соотношение $H_0/D_0 = 1$ ($H_0 = 10$ мм, $D_0 = 10$ мм); (в) – соотношение $H_0/D_0 = 1$ ($H_0 = 11.8$ мм, $D_0 = 11.8$ мм).

симально возможная для данной испытательной машины скорость деформации составит ~0.28 с$^{-1}$.

Результаты исследования и их обсуждение. На рис. 5 представлены цилиндрические образцы после проведения испытания на сжатие без смазки, направленные на изучение влияния соотношения размеров образца на кривые текучести материала.

Таблица 2. Высота образца после проведения сжатия: эксперимент и расчет

	$H_0/D_0 = 1$ (11.8/11.8)				$H_0/D_0 = 1.5$				$H_0/D_0 = 1$ (10/10)		
$\dot{\varepsilon}$, c^{-1}	0.001	0.01	0.1	0.22	0.001	0.01	0.1	0.22	0.001	0.01	0.4
$h_м$, мм	6.7	6.4	6.4	6.5	9.4	9.4	9.3	9.3	5.7	5.6	5.6
$h_ф$, мм	8.1	7.9	7.8	7.9	11.3	11.1	11.2	11.1	6.7	6.8	6.6
δh, %	20.9	23.4	21.9	21.5	20.2	18.1	20.4	19.4	17.5	21.4	17.9

Проанализируем полученные результаты, учитывая наиболее важные аспекты испытаний: 1) характер изменения формы образца с разным значением соотношения H_0/D_0; 2) сопоставление кривых текучести, полученных для образцов с разным соотношением H_0/D_0.

В табл. 2 представлены результаты, иллюстрирующие сравнение высоты $h_м$ осаженного образца (в конце рабочего хода машины), полученной в эксперименте, с конечной высотой $h_ф$ образца, рассчитанной по значению перемещения траверсы испытательной машины, записанному ее процессором в протокол испытания. Наблюдаемая относительная погрешность δh может говорить о наличии в эксперименте факторов, влияющих на значение $h_ф$ и не учитываемых при формировании протокола испытания. Например, жесткость машины, выборка зазоров в инструменте для проведения сжатия, избыточный холостой ход траверсы и т.п. Это отклонение компенсируется на этапе обработки результатов экспериментов в соответствии с методикой, описанной в работе [10].

По результатам проведения испытаний выполняется расчет значения напряжения текучести (интенсивности напряжения) и интенсивности (накопленной) деформации. На рис. 6 показаны результаты испытаний образцов с разным исходным соотношением H_0/D_0.

Кривые текучести (рис. 6), полученные в результате сжатия образцов с разным исходным соотношением H_0/D_0 при разных скоростях деформации, практически не отличаются друг от друга по уровню напряжения текучести и характеру его изменения. Имеющиеся отличия (рис. 6б) связаны с появлением трещины на поверхности образца при деформации ~0.5. Трещина вышла на поверхности в случае сжатия образца при скорости деформации 0.001 c^{-1}. Причина возникновения трещины, по всей видимости, связана с проявлением эффекта Портевена–Ле Шателье, характерным для сплавов системы Al-Mg при их холодной деформации. С этим же эффектом может быть связана аномалия в изменении напряжения текучести при нагружении образцов с разной скоростью деформации. Однако более углубленное исследование такой аномалии требует отдельного исследования. Подобного рода исследования, например, проведены и опубликованы в работе [14]. Характер распространения трещины по боковой поверхности образца после сжатия примерно соответствует углу 45° к оси образца.

Падение напряжения текучести (рис. 6; образец с $H_0/D_0 = 1.5$) обусловлено выходом трещины на боковую поверхность и продолжающимся рабочим ходом машины. Рабочий ход машины продолжается в соответствии с заданной программой нагружения до достижения конечной высоты; после раскрытия трещины (~ с деформации 0.51) верхняя часть образца скользит относительно нижней по плоскости трещины, что не требует преодоления сопротивления материала деформации, а только свободного сдвига одного твердого тела относительно другого в условиях отсутствия трения в плоскости трещины.

При сжатии образцов с соотношением $H_0/D_0 = 1$ разрушения не наблюдается.

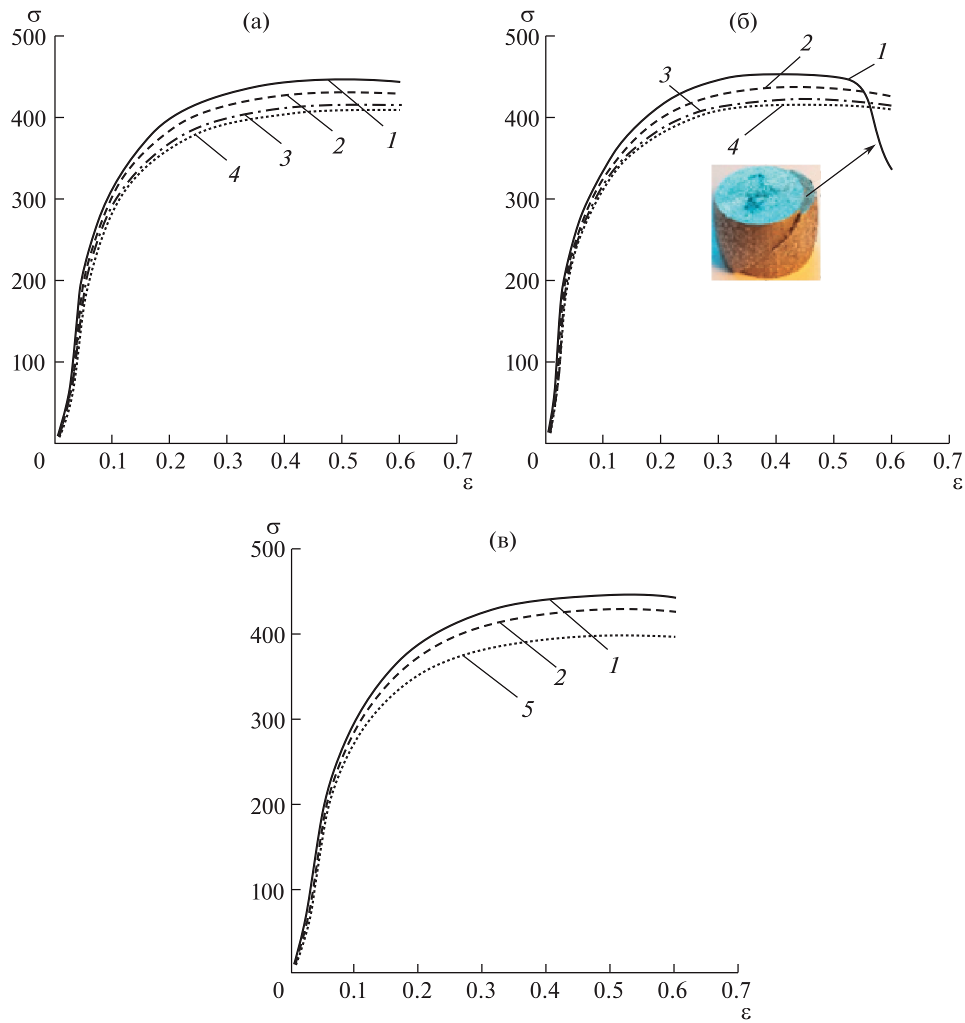


Рис. 6. Кривые текучести (экспериментальные) сплава АМг6 для образцов с разным значением H_0/D_0 при скорости деформации: (а) – соотношение $H_0/D_0 = 1.0$ (H_0 = 11.8 мм, D_0 = 11.8 мм); (б) – соотношение $H_0/D_0 = 1/5$ (H_0 = 10 мм, D_0 = 10 мм); (в) – соотношение $H_0/D_0 = 1.0$ (H_0 = 10.0 мм, D_0 = 10.0 мм). *1* – 0.001 $с^{-1}$; *2* – 0.01 $с^{-1}$; *3* – 0.1 $с^{-1}$; *4* – 0.22 $с^{-1}$; *5* – 0.4 $с^{-1}$.

Заключение и выводы. Проведенное экспериментальное исследование позволяет сделать следующие основные выводы: **1.** В случае сжатия цилиндрических образцов с соотношением $H_0/D_0 = 1.5$ при деформировании со скоростью 0.001 $с^{-1}$ наблюдается появление трещины на боковой поверхности образца, что не позволяет довести испытание до конечной высоты, соответствующей сжатию на 50% от исходной высоты образца, заданной при расчете программы нагружения. **2.** Выявлено аномальное изменение напряжения текучести при увеличении скорости деформации, что, по всей видимости, связано с проявлением эффекта Портевена–Ле Шателье [14], требующее проведения детального металлографического исследования. **3.** Соотношение исходных размеров (H_0/D_0) не оказывает влияние на характер кривых текучести при комнатной температуре и скоростях деформации 0.001 c^{-1}; 0.01 c^{-1}; 0.1 c^{-1}; 0.22 c^{-1}; 0.4 c^{-1}. **4.** Для обеспечения постоянной скорости деформации возможно применение методики [13], обеспечивающей расчет программы нагружения для современной универсальной испытательной машины. **5.** Учитывая характеристики испытательной машины, в том числе максимальную скорость перемещения траверсы, возможен выбор соотношения H_0/D_0, обеспечивающего максимальную скорость деформации и соблюдение условия, накладываемого на выбор значения исходной высоты (H_0) и диаметра (D_0) образца. **6.** Результаты проведенных испытаний и их анализ показывают, что для построения кривых текучести могут быть использованы цилиндрические образцы с соотношением $H_0/D_0 = 1$ (10/10 мм), при условии, что расчет программы нагружения и обработка результатов испытаний проводится по методикам, описанным в работах [10, 13].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа является частью совместного российско-индийского проекта “Экспериментальные и численные исследования контактного трения в процессе пластической деформации сжатием с кручением”. Работа финансируется Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Департаментом науки и технологии (ДНТ) Правительства Индии по исследовательскому проекту № 19-58-45020\20 и гранту INT/RUS/RFBR/388.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voce E.* The relationship between stress and strain for homogeneous deformation // J. Inst. Met. 1948. V. 74. P. 537.
2. *Szeliga D., Gawad J., Pietrzyk M.* Inverse analysis for identification of rheological and friction models in metal forming // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2006. V. 195. P. 6778.
3. *Komurlu E.* Loading rate conditions and specimen size effect on strength and deformability of rock materials under uniaxial compression // International Journal of Geo-Engineering. 2018. V. 9. Article number: 17.
4. *Skripnyak N.V.* The Features of Fracture Behavior of an Aluminum-Magnesium Alloy AMg6 Under High-Rate Straining // Russian Physics Journal. 2015. V. 58. P. 691.
5. *Hung J.C., Lin C.C.* Investigations on the material property changes of ultrasonic-vibration assisted aluminum alloy upsetting // Materials & Design. 2013. V. 45. P. 412.
6. *Efremov D.V., Uvarov S.V., Spivak L.V., Naimark O.B.* Statistical patterns of deformation localization during plastic flow in the AMg6 alloy // Lett. Mater. 2020. V. 10 (1). P. 38.
7. *Razali M.K., Joun M.S.* A new approach of predicting dynamic recrystallization using directly a flow stress model and its application to medium Mn steel // Journal of Materials Research and Technology. 2021. V. 11. P. 1881.
8. *Charpentier P.L., Stone B.C., Ernst S.C., Thomas J.R.* Characterization and Modelling of High Temperature Flow Behavior of Aluminum Alloy 2024 // Met. Trans. A. 1986. V. 17. P. 2227.
9. *Ebrahimi R., Najafizadeh A.* A new method for evaluation of friction in bulk metal forming // J. Mater Process Technol. 2004. V. 152 (2). P. 136.
10. *Петров П.А., Матвеев А.Г., Сапрыкин Б.Ю., Петров М.А., Бурлаков И.А., Диксит У.Ш.* Повышение надежности технологического процесса штамповки с кручением изделий из алюминиевого сплава // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 4. С. 3.
11. *Багмутов В.П., Водопьянов В.И., Кондратьев О.В., Коробов А.В.* Испытания на сжатие: метод. указ. к лабораторной работе. Волгоград: ВолгГТУ, 2015. 16 с.

12. *Papirno R., Mescall J.F., Hansen A.M.* Fracture in Axial Compression Tests of Cylinders. Compression Testing of Homogeneous Materials and Composities, ASTM STP 808, Richard Chait and Ralph Papirno, Eds., American Society for Testing and Materials, 1983. P. 40.
13. *Петров П.А., Фам В.Н., Сапрыкин Б.Ю., Диксит У.Ш.* Моделирование программ монотонного нагружения с постоянной скоростью деформации на современной универсальной испытательной машине // Технология легких сплавов. 2021. № 3. С. 45.
14. *Mogucheva A., Saenko M., Kaibyshev R.* The Portevin–Le Chatelier effect in an Al-Mg alloy. AIP Conference Proceedings 1783, 2016. 020156.