# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 68, номер 4, 2022**


## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

К дифракции точечного источника звука на бесконечном клине
*М. А. Сумбатян, Т. С. Мартынова, Н. К. Мусатова* 351

Об интегральных представлениях импульсного сигнала в волноводе
*А. В. Шанин, А. И. Корольков, К. С. Князева* 361

## НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

Особенности нестационарного и нелинейного рассеяния звука на пузырьках и возможности их спектроскопии
*В. А. Буланов, Е. В. Соседко* 373

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

Резонатор с управляемой прозрачностью границ
*О. А. Савицкий* 385

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Акустическая диагностика внутренних волн на шельфе черного моря по данным томографического эксперимента
*В. В. Гончаров, Б. Ф. Курьянов, А. Н. Серебряный* 391

Использование линейных приемных антенн для наблюдения горизонтальной рефракции низкочастотного звука в мелком море с сильно неоднородным водоподобным дном
*А. А. Луньков, В. Г. Петников, Д. Д. Сидоров* 400

Определение дисперсионных зависимостей волноводных мод на основе измерения шумов судна с помощью двух синхронизированных антенн
*М. В. Ярина, А. А. Луньков, О. А. Годин, Б. Г. Кацнельсон* 409

## АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

Азимутальная декомпозиция шума струи, истекающей из двухконтурного сопла
*О. П. Бычков, В. Ф. Копьев, Г. А. Фараносов* 415

## ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пространственная обработка акустических сигналов в каналах мелкого моря в условиях априорной неопределенности: оценки потерь эффективности
*А. И. Малеханов, И. П. Смирнов* 427

Итерационная схема коррекции изображений в оптоакустической томографии
*А. Г. Рудницкий* 440

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Оптимизация затухания звука в прямоугольном канале с импедансными стенками
*Н. Г. Канев* 449

Лазерный оптико-акустический метод для обнаружения нарушений периодичности структуры углепластиков
*Ю. Г. Соколовская, Н. Б. Подымова, А. А. Карабутов* 454

## ИНФОРМАЦИЯ

Памяти Виктора Анатольевича Акуличева (31.01.1939–26.02.2022) 462

**EDN:** KRXVIZ
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 351–360*

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

*УДК 534.23; 534.26*

# К ДИФРАКЦИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА НА БЕСКОНЕЧНОМ КЛИНЕ


**М. А. Сумбатян[a, *, **], Т. С. Мартынова[a], Н. К. Мусатова[a]**

[a]*Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича, ул. Мильчакова 8а, Ростов-на-Дону, 344090 Россия*

**e-mail: masumbatyan@sfedu.ru*

***e-mail: sumbatma@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.09.2021 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принята к публикации 25.01.2022 г.

Рассматривается двумерная задача дифракции гармонической звуковой волны, исходящей из точечного источника звука, который расположен вблизи острого угла бесконечного клина несимметрично относительно его граней. Граница считается акустически жесткой. В рамках метода граничных интегральных уравнений при несимметричном расположении источника звука задача сводится к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поведение решения при приближении к окрестности угловой точки определяется условием Мейкснера. В явном виде находится значение давления на конце клина в вершине угла. Производится асимптотическая оценка поведения функции давления на бесконечности. Дискретизация сводит систему основных граничных интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений. Предлагается “улучшенная” схема дискретизации с тремя интервалами различной плотности на каждой грани. Построено давление в рассеянном поле.

*Ключевые слова:* звуковое поле, метод граничных интегральных уравнений, уравнение Фредгольма, функция Грина

**DOI:** 10.31857/S0320791922030145

## ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции акустических волн на твердом бесконечном клине является классической [1]. По-видимому, Зоммерфельд, создавая свою теорию дифракции, впервые применил к этой задаче строгие математические методы [2]. Геометрическая теория дифракции Келлера [3] также эффективна в применении к рассматриваемой задаче. Что касается численных методов, то их приложение к дифракции на клине изложено в работах [4–6], где также приводится много других полезных ссылок. Общий подробный обзор известных методов дан в работе [7]. В работах [8–10] также рассматриваются задачи дифракции, однако в качестве областей взяты замкнутые контуры в виде тел вращения. В недавней работе [11] авторами рассмотрен частный случай задачи, когда точечный источник звука расположен симметрично относительно граней клина. Главной целью настоящей работы является обобщение результатов работы [11] на случай произвольного несимметричного расположения источника.

Заметим, что эффективные численные методы на основе граничных элементов для дифракции на телах с углами с успехом развивались ранее [12, 13], однако они применимы лишь к выпуклым препятствиям.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную задачу дифракции гармонической звуковой волны, исходящей из точечного источника звука с координатами $(x_0, y_0)$, который расположен вблизи острого угла бесконечного клина с углом раствора $2\theta$, как показано на рис. 1. Считаем границу акустически жесткой (однородное граничное условие Неймана) и состоящей из двух частей – верхней $l_1$ и нижней $l_2$.

В рамках метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [14] при несимметричном расположении источника звука задача дифракции сводится к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

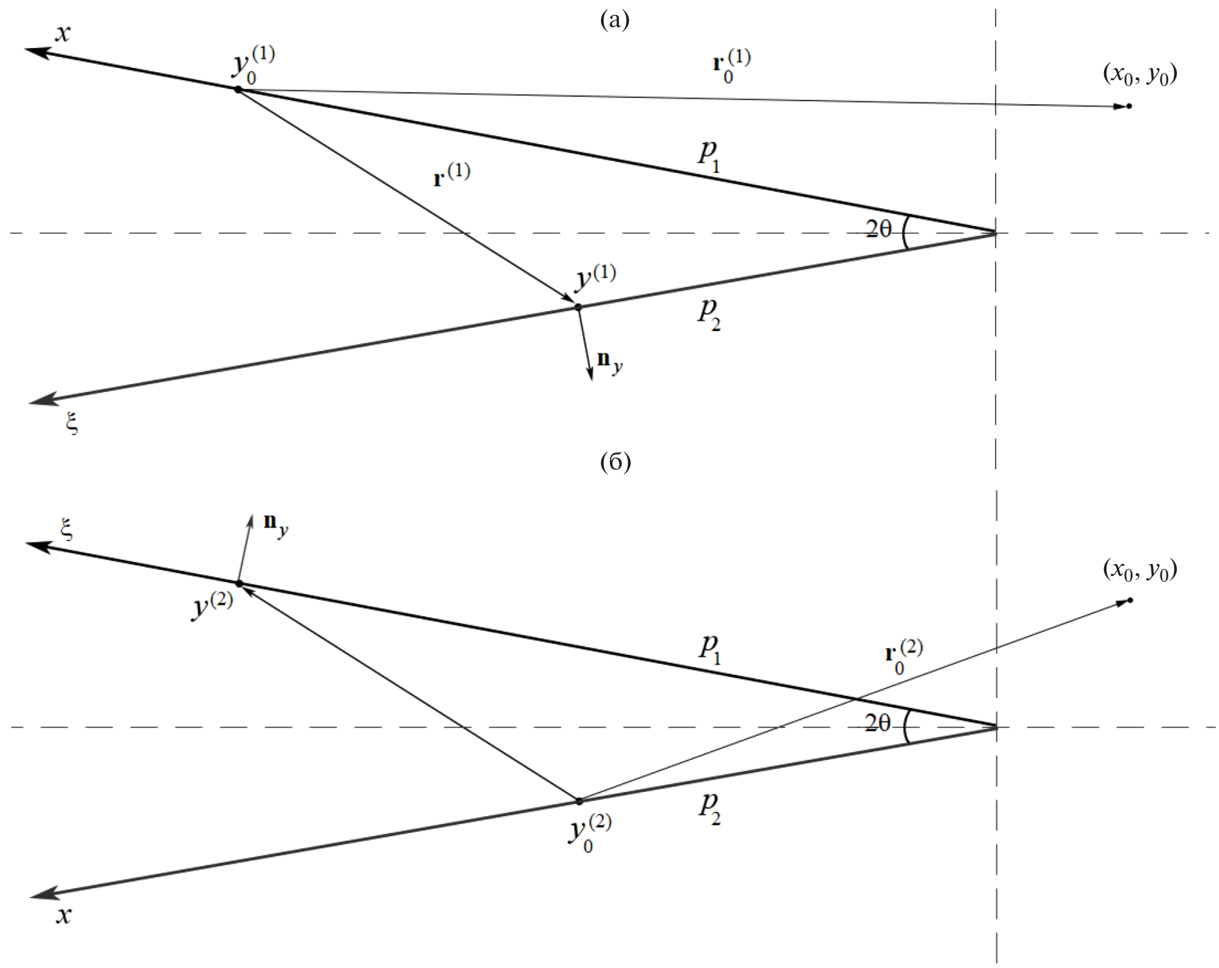



**Рис. 1.** Дифракция звуковой волны, излучаемой точечным источником, вблизи бесконечного клина, соответствующая (а) – первому ($y_0 \in l_1, y \in l_2$) и (б) – второму ($y_0 \in l_2, y \in l_1$) уравнениям.

$$\begin{cases} p_1\left(y_0^{(1)}\right) - 2\int\limits_{l_2} \dfrac{\partial G\left(y^{(2)}, y_0^{(1)}\right)}{\partial n_y^{(2)}} p_2\left(y^{(2)}\right) dl_y^{(2)} = \\ = 2p_1^{\text{inc}}\left(y_0^{(1)}\right), \quad y_0^{(1)} \in l_1, \\ -2\int\limits_{l_1} \dfrac{\partial G\left(y^{(1)}, y_0^{(2)}\right)}{\partial n_y^{(1)}} p_1\left(y^{(1)}\right) dl_y^{(1)} + p_2\left(y_0^{(2)}\right) = \\ = 2p_2^{\text{inc}}\left(y_0^{(2)}\right), \quad y_0^{(2)} \in l_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_1(y)$ и $p_2(y)$ – полное акустическое давление на верхней и нижней гранях соответственно; $p^{\text{inc}}$ – акустическое давление в падающей волне; $G = (i/4)H_0^{(1)}(kr)$ – функция Грина; $n_y^{(1)}$, $n_y^{(2)}$ – единичная нормаль к граничному контуру в точках $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$соответственно; $dl_y^{(1)}$, $dl_y^{(2)}$ – элементарная длина граничной кривой в точках $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$соответственно; $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. “Внутренние” $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ и “внешние” $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$ точки – двумерные точки на границе, т.е. точки, имеющие две декартовые координаты в плоскости рис. 1. В этих формулах опущен временной множитель $\exp(-i\omega t)$, где $\omega$ – круговая частота гармонических колебаний.

В системе (1) учтено, что в случае, когда точки $y^{(1)}$ и $y_0^{(1)}$ (или $y^{(2)}$ и $y_0^{(2)}$) лежат на одной стороне клина, вклад соответствующей части интегрального оператора равен нулю, так как в этом случае

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n_y}, \ \frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_y)}{|\mathbf{r}|} = 0, \ \mathbf{r} = y - y_0,$$

поскольку вектор расстояния $\mathbf{r}$ ортогонален вектору нормали.

Поведение решения при приближении к окрестности угловой точки определяется условием Мейкснера (см., например, [7]). Оно гласит, что для того, чтобы физическая энергия сохранялась конечной в любой окрестности угла клина, решение должно удовлетворять следующему условию при $r \to 0$:

$$p(y) \sim D + O(r^{\delta}), \quad \delta = \min\left(\frac{\pi}{2(\pi-\theta)}, 2\right),$$

где $r$ – расстояние между текущей точкой и углом клина, $D$ – некоторая константа. Поскольку параметр $\delta$ всегда положительный, сингулярности решения в окрестности угла нет. Поэтому вклад малой окрестности угла в интеграл является малым, следовательно, нет необходимости помещать внешние точки $y_0^{(1)}$ и $y_0^{(2)}$ точно в угол. Именно по этой причине коэффициент перед интегральными операторами в системе ГИУ (1) равен двойке. В противном случае пришлось бы применять коэффициент, зависящий от угла раствора клина.

Выпишем декартовы координаты точек и нормалей, входящих в первое уравнение системы (1). Для этого в первом уравнении направим ось $x$ по верхней грани клина от угла влево, а ось $\xi$ аналогично по нижней грани. Соответственно, во втором уравнении ось $x$ направим по нижней грани клина от угла влево, а ось $\xi$ аналогично по верхней грани. Тогда в системе координат, связанной естественным образом с горизонтальной и вертикальной осью, имеем

$$y^{(2)} = (-\xi\cos\theta, -\xi\sin\theta), \quad y_0^{(1)} = (-x\cos\theta, x\sin\theta),$$
$$n_y^{(2)} = (\sin\theta, -\cos\theta).$$

Вектор расстояния между точками $y^{(2)}$ и $y_0^{(1)}$ равен

$$\left(y^{(2)} - y_0^{(1)}\right) = ((x-\xi)\cos\theta, -(x+\xi)\sin\theta),$$
$$\left|y^{(2)} - y_0^{(1)}\right| = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos 2\theta},$$

а вектор расстояния между точкой $y_0^{(1)}$ и источником звука $S = \left(x^0, y^0\right)$

$$\mathbf{r}_0^{(1)} = \left(S - y_0^{(1)}\right) = \left(x^0 + x\cos\theta, y^0 - x\sin\theta\right),$$
$$r_0^{(1)} = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + x^2 + 2x\left(x^0\cos\theta - y^0\sin\theta\right)}.$$

Для второго уравнения имеем

$$y^{(1)} = (-\xi\cos\theta, \xi\sin\theta), \quad y_0^{(2)} = (-x\cos\theta, -x\sin\theta),$$
$$n_y^{(1)} = (\sin\theta, \cos\theta),$$

поэтому

$$\left(y^{(1)} - y_0^{(2)}\right) = ((x-\xi)\cos\theta, (x+\xi)\sin\theta),$$
$$\left|y^{(1)} - y_0^{(2)}\right| = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos 2\theta}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{r}_0^{(2)} = \left(S - y_0^{(2)}\right) = \left(x^0 + x\cos\theta, y^0 + x\sin\theta\right),$$
$$r_0^{(2)} = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + x^2 + 2x\left(x^0\cos\theta + y^0\sin\theta\right)}.$$

Заметим, что модуль расстояния между “внутренней” и “внешней” точками для двух уравнений имеет один и тот же вид:

$$\left|y^{(2)} - y_0^{(1)}\right| = \left|y^{(1)} - y_0^{(2)}\right| =$$
$$= r = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos 2\theta}.$$

Помимо этого легко видеть, что один и тот же вид имеют скалярные произведения вектора расстояния на нормаль в обоих уравнениях. Следовательно, производная функции Грина по нормали вычисляется одинаковым образом для обоих уравнений:

$$G = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr), \ \frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n_y},$$
$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{ik}{4}H_1^{(1)}(kr), \tag{2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{(rn_y)}{r} =$$
$$= \frac{(x-\xi)\cos\theta\sin\theta + (x+\xi)\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}} = \tag{3}$$
$$= \frac{x\sin 2\theta}{\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{ikx\sin 2\theta}{4\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}}H_1^{(1)}(kr). \tag{4}$$

Собирая вместе формулы (2)–(4), преобразуем систему ГИУ (1) к следующему виду

$$\begin{cases} p_1(x) + \dfrac{ikx\sin 2\theta}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}p_2(\xi)\,d\xi = \\ = 2p_1^{\text{inc}}(x), \ \ x \in (0,\infty), \\ \dfrac{ikx\sin 2\theta}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}p_1(\xi)\,d\xi + p_2(x) = \\ = 2p_2^{\text{inc}}(x), \ \ x \in (0,\infty). \end{cases} \tag{5}$$

При этом давление в падающем поле в первом уравнении равно $p_1^{\text{inc}}(x) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(kr_0^{(1)}\right)$, а во втором $p_2^{\text{inc}}(x) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(kr_0^{(2)}\right)$.

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В УГЛЕ

В статье авторов [11] найдено точное значение решения в угле в случае источника, расположенного симметрично относительно граней клина. Найдем значение давления на конце клина в явном виде в рассматриваемом несимметричном случае. Для этого к системе (5) применим замену переменной $\xi = tx$. Тогда интегральный член в первом уравнении примет вид

$$\int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}\left(kx\sqrt{1-2t\cos 2\theta + t^2}\right)}{\sqrt{1-2t\cos 2\theta + t^2}} p_2(tx)\,dt. \tag{6}$$

Устремим $x \to 0$ в (6) и вынесем значение $p_2(0)$ за знак интеграла. Принимаем во внимание асимптотическое разложение функции Ханкеля для малого аргумента [15]

$$H_1^{(1)}(\eta) \sim \frac{2}{\pi i \eta}, \quad \eta \to 0.$$

В итоге в (6) возникает интеграл, который вычисляется в явном виде [16]

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1-2t\cos 2\theta + t^2} = \frac{\pi - 2\theta}{x \sin 2\theta}.$$

После подстановки всех полученных выражений система ГИУ (5) приводит к следующему соотношению

$$\begin{cases} p_1(0) + p_2(0)\dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} = 2p_1^{\text{inc}}(0), \\ p_2(0) + p_1(0)\dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} = 2p_2^{\text{inc}}(0). \end{cases}$$

Поскольку, как легко видеть, $p_1^{\text{inc}}(0) = p_2^{\text{inc}}(0)$, то точное решение в угле имеет простой вид:

$$p_1(0) = p_2(0) = \frac{\pi}{\pi - \theta} p^{\text{inc}}(0), \tag{7}$$

что совпадает с точным значением в симметричном случае [11]. Формула (7) также подтверждает, что решение в угле действительно непрерывно.

## ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Перейдем к безразмерным переменным $z = kx$, $t = k\xi$, в результате система (5) преобразуется к следующему виду

$$\begin{cases} P_1(z) + \dfrac{iz\sin 2\theta}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(r(t,z))}{r(t,z)} P_2(t)\,dt = 2p_1^{\text{inc}}(z), \\ \dfrac{iz\sin 2\theta}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(r(t,z))}{r(t,z)} P_1(t)\,dt + P_2(z) = 2p_2^{\text{inc}}(z), \end{cases}$$
$$r(t,z) = \sqrt{z^2 + t^2 - 2zt\cos 2\theta}, \quad P(z) = p\left(\frac{z}{k}\right), \tag{8}$$
$$p_{1,2}^{\text{inc}}(z) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\sqrt{(kx_0)^2 + (ky_0)^2 + z^2 + 2z(kx_0\cos\theta \mp ky_0\sin\theta)}\right).$$

Важно отметить, что в (8) ядро интегрального оператора в левых частях обоих уравнений системы не зависит от волнового числа $k$, а единственная зависимость от данного параметра находится в правых частях. При переходе к дискретной форме матрица соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) также не содержит волновое число $k$.

В дальнейшем все величины, связанные с линейными размерами, будем выражать в безразмерном виде. В частности, далее величины $kx_0$ и $ky_0$ будем обозначать просто $x_0$ и $y_0$ соответственно.

Ключевым моментом является оценка того, на какой интервал конечной длины $0 < z < L$ следует заменить полубесконечный интервал интегрирования, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений при численных расчетах. Для прояснения этого момента проведем асимптотическую оценку функции $P(z)$ при $z \to \infty$. Применим стандартное асимптотическое разложение функций $r$ и $r_0$:

$$r = z - t\cos 2\theta + O\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$r_0^{(1,2)} = z + (x_0\cos\theta \mp y_0\sin\theta) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty.$$

Примем во внимание асимптотическое поведение функции Ханкеля [15]

$$H_n^{(1)}(\eta) = \left(\frac{2}{\pi\eta}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\eta - \pi n/2 - \pi/4\right)\right],$$
$$\eta \to \infty.$$

В силу того, что различия двух уравнений системы локализуются только в правых частях уравнений и не влияют на общий ход рассуждений, объединим эти два случая вместе:

$$P_{1,2}(z) = \frac{i}{2}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(z + (x_0\cos\theta \mp y_0\sin\theta) - \pi/4\right)\right] -$$
$$- \frac{iz\sin 2\theta}{2}\int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{\exp\left[i\left(z - t\cos 2\theta - 3\pi/4\right)\right]}{z} P_{1,2}(t)\,dt = \tag{9}$$
$$= \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\left(\frac{\exp(\pi i/4)\exp\left[i\left(x_0\cos\theta \mp y_0\sin\theta\right)\right]}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\exp(-3\pi/4)\sin 2\theta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp(-it\cos 2\theta)P_{1,2}(t)\,dt\right) \sim A_\pm \frac{\exp(iz)}{\sqrt{z}},$$

где $A_\pm$ – некоторая константа. Далее можно показать, что с учетом оценки (9) вклад интегралов по отрезку $(L,\infty)$ имеет порядок $O(1/L^2)$. Таким образом, при применении численных методов следует брать достаточно большую величину $L$. Эта оценка может быть заметно улучшена введением так называемого "нейтрализатора" Ван дер Корпута [11], который дает экспоненциальное убывание отбрасываемого полубесконечного интеграла.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ ГИУ

Для удобства дальнейшей дискретизации перепишем (8) в виде

$$\begin{cases} P_1(z) + \int_0^L K(t,z)P_2(t)\,dt = 2p_1^{\mathrm{inc}}(z), & 0 < z < L, \\ \int_0^L K(t,z)P_1(t)\,dt + P_2(z) = 2p_2^{\mathrm{inc}}(z), & 0 < z < L, \end{cases} \tag{10}$$
$$K(t,z) = \frac{iz\sin 2\theta H_1^{(1)}(r(t,z))}{2r(t,z)}.$$

Разобьем интервал $0 < z < L$ на $N$ малых интервалов равной длины, и выберем в центре каждого из них соответствующий узел сетки:

$$z_m = (m - 1/2)h, \quad m = 1,\ldots,N,$$

где $h = L/N$ – шаг дискретизации. Тогда справедливо соотношение

$$\int_0^L K(t,z_m)P_{1,2}(t)\,dt = \sum_{j=1}^N \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} K(t,z_m)P_{1,2}(t)\,dt.$$

Теперь интегрирование по каждому малому интервалу проведем, используя квадратурную формулу Симпсона [17]. С этой целью введем на интервале $t \in (z_j - h/2, z_j + h/2)$ три точки начала, конца и середины: $t_1^j = z_j - h/2$, $t_2^j = z_j + h/2$, $t_0^j = z_j$. Формула Симпсона дает [17]:

$$b_{mj} = \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} K(t,z_m)dt \approx$$
$$\approx \frac{h}{6}\left[K\left(t_1^j,z_m\right) + 4K\left(t_0^j,z_m\right) + K\left(t_2^j,z_m\right)\right].$$

Применяемая дискретизация сводит систему (10) к СЛАУ размером $2N \times 2N$ относительно вектора $P = \{P_j\}$:

$$AP = f. \tag{11}$$

В матричном виде система (11) записывается так:

$$\begin{pmatrix} \delta_{mj} & b_{mj} \\ b_{mj} & \delta_{mj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1^j \\ P_2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^m \\ f_2^m \end{pmatrix}, \quad m, j = 1,\ldots,N,$$

где $\delta_{mj}$ – символ Кронекера, а элементы вектора правой части имеют вид:

$$f_1^m = \frac{i}{2}H_0^{(1)}\left(r_0^{(1)}\right),\ f_2^m = \frac{i}{2}H_0^{(1)}\left(r_0^{(2)}\right), \quad j = 1,\ldots,N.$$

Однако наилучшего соотношения точности к количеству узлов удалось достичь при следующей схеме дискретизации. Каждая грань клина разбивается на три интервала $(0,L_1),(L_1,L_2),(L_2,L_3)$ с различными, но равномерными шагами $N_1, N_2, N_3$ соответственно. При этом, чем ближе интервал к вершине угла, тем он меньше по длине и тем большая у него плотность узлов, например

$$L_1 = 0.01, \quad N_1 = 1500,$$
$$L_2 = 0.05, \quad N_2 = 500,$$
$$L_3 = 50, \quad N_3 = 300$$

при длине грани, равной $L = L_3$ и общем количестве узлов $N = N_1 + N_2 + N_3$. Тестирование такой сетки показало, что удается значительно повысить точность решения в окрестности вершины угла, при меньшей общей размерности сетки. Заметим также, что примененный нами подход для уточнения решения в угле лучше, чем неравномерная сетка, сгущающаяся к узлу, т.к. для последней применение квадратурной формулы Симпсона крайне затруднительно. При этом известное точное решение в угле дает надежный метод контроля точности построенного численного решения.

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Заметим, что для четырех частных углов раствора клина задача дифракции имеет точное решение методом мнимых источников [11]. Это дает хорошую возможность для проверки точности используемого численного метода. Одним из таких углов является случай $\theta = 3\pi/4$, для которого полный угол раствора является тупым: $2\theta = 270°$. В этом случае в дополнение к одному реальному источнику звука $X_0$ в результате множественных переотражений возникает еще 3 мнимых $X_1, X_2, X_3$, расположенных симметрично относительно граней клина. В естественной декартовой системе координаты этих точек в безразмерном виде равны $X_0 = (x_0, y_0)$, $X_1 = (y_0, x_0)$, $X_2 = (-x_0, -y_0)$, $X_3 = (-y_0, -x_0)$. Текущая точка на верхней грани имеет координаты $\bar{X} = (z, z)/\sqrt{2}$, если считать, что $z$ — это переменная на положительной полупрямой. Тогда расстояния записываются в виде

$$
\begin{aligned}
r_1^0 &= |\bar{X} - \bar{X}_0| = \sqrt{\left(z/\sqrt{2} - x_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} - y_0\right)^2},\\
r_1^1 &= |\bar{X} - \bar{X}_1| = \sqrt{\left(z/\sqrt{2} - y_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} - x_0\right)^2},\\
r_1^2 &= |\bar{X} - \bar{X}_2| = \sqrt{\left(z/\sqrt{2} + x_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + y_0\right)^2},\\
r_1^3 &= |\bar{X} - \bar{X}_3| = \sqrt{\left(z/\sqrt{2} + y_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + x_0\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Если текущая точка располагается на нижней грани $\bar{X} = (z, -z)/\sqrt{2}$, расстояния равны

$$
\begin{aligned}
r_2^0 &= \sqrt{\left(z/\sqrt{2} - x_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + y_0\right)^2},\\
r_2^1 &= \sqrt{\left(z/\sqrt{2} - y_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + x_0\right)^2},\\
r_2^2 &= \sqrt{\left(z/\sqrt{2} + x_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + y_0\right)^2},\\
r_2^3 &= \sqrt{\left(z/\sqrt{2} + y_0\right)^2 + \left(z/\sqrt{2} + x_0\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, явное аналитическое решение в этом частном случае имеет вид

$$
\begin{cases}
p_1(x) = p^{\mathrm{inc}}\left(r_1^0\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_1^1\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_1^2\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_1^3\right),\\
p_2(x) = p^{\mathrm{inc}}\left(r_2^0\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_2^1\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_2^2\right) + p^{\mathrm{inc}}\left(r_2^3\right),
\end{cases}
$$

где $p^{\mathrm{inc}}(r) = \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(r)$. Самым критичным при сравнении численного решения с точным является поведение в окрестности угла.

Сравнивая численное решение, построенное методом ГИУ, и аналитическое, построенное методом мнимых источников, можно сказать, что как мнимая, так и вещественная части давления визуально совпадают вдоль всего интервала $0 < z < L$ при общем количестве узлов сетки $N = 2100$, что соответствует трем верным значащим цифрам в числовых значениях. Пример для угла $\theta = 3\pi/4$ (рис. 2, 3) показывает, что разбиение граней на 3 равномерных интервала с более густой сеткой в окрестности угла сводит влияние этой окрестности на численное решение к минимуму.

## ДАВЛЕНИЕ В РАССЕЯННОМ ВОЛНОВОМ ПОЛЕ

После решения системы ГИУ (5) можно рассчитать давление в рассеянном поле в любой точке акустической среды. Пусть точка $x(x_1, x_2)$ — произвольная точка в естественной декартовой системе координат, связанной с горизонтальным и вертикальным направлениями. Рассеянное давление в ней описывается формулой

$$
\begin{aligned}
p^{\mathrm{sc}}(x) &= \int_l p(y) \frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y} dl_y = \\
&= \int_{l_1} p_1(y^{(1)}) \frac{\partial G(y^{(1)}, x)}{\partial n_y^{(1)}} dl_y^1 + \int_{l_2} p_2(y^{(2)}) \frac{\partial G(y^{(2)}, x)}{\partial n_y^{(2)}} dl_y^2.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь $p_1(y^{(1)})$, $p_2(y^{(2)})$ — полное акустическое давление на границах $l_1$ и $l_2$, полученное при решении системы ГИУ. Производная функции Грина вычисляется аналогично вычисленной для ядра интегральных операторов выше. Случай $l_1$:

$$
\frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y^{(1)}} = \frac{\partial G}{\partial r_{xy}^{(1)}} \frac{\partial r_{xy}^{(1)}}{\partial n_y^{(1)}} = -\frac{i}{4} H_1^{(1)}\left(r_{xy}^{(1)}\right) \frac{\left(\mathbf{r}_{xy}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_y^{(1)}\right)}{\left|\mathbf{r}_{xy}^{(1)}\right|}. \tag{13}
$$

Для кривой $l_2$ в формуле (13) верхний индекс (1) заменится на (2).

Координаты точек и вектора нормали для кривой $l_1$:

$$
\begin{gathered}
y^{(1)} = (-\xi\cos\theta, \xi\sin\theta), \quad n_y^{(1)} = (\sin\theta, \cos\theta),\\
r_{xy}^{(1)} = (-\xi\cos\theta - x_1, \xi\sin\theta - x_2),\\
r_{xy}^{(1)} = \sqrt{(\xi\cos\theta + x_1)^2 + (\xi\sin\theta - x_2)^2}.
\end{gathered}
$$

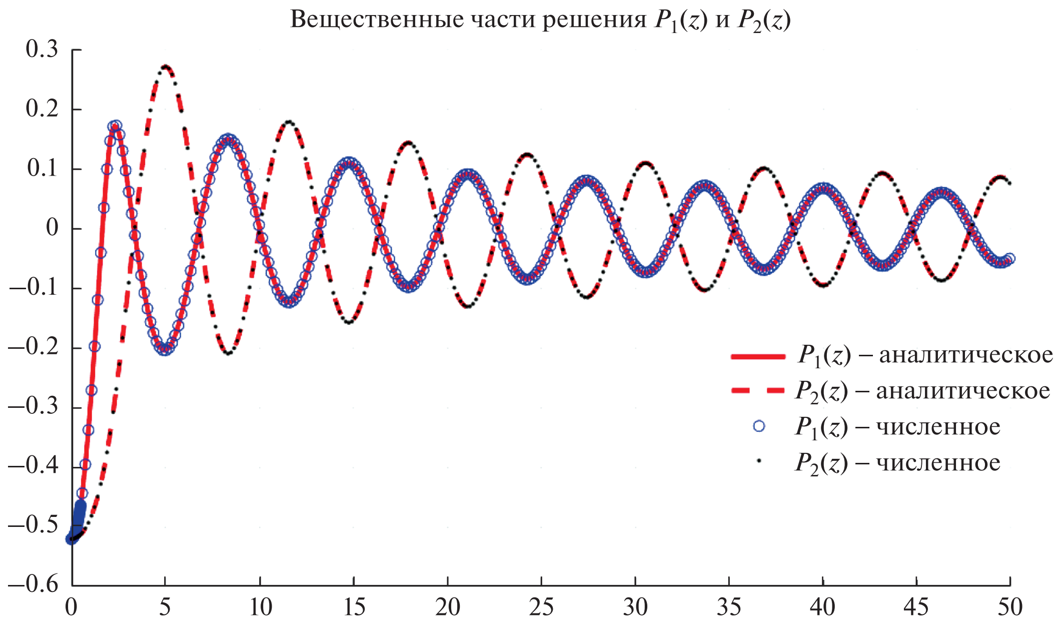



**Рис. 2.** Вещественные части акустического давления на верхней и нижней гранях: $\theta = 3\pi/4$, $X_0 = (2,1)$, $L_1 = 0.01$, $N_1 = 1500$, $L_2 = 0.5$, $N_2 = 300$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$.

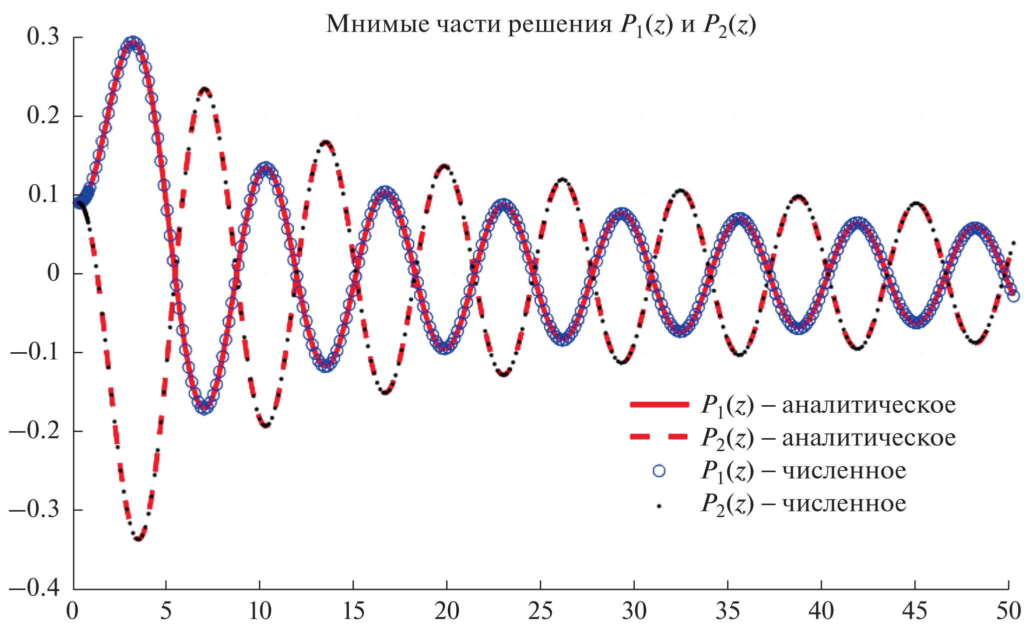



**Рис. 3.** Мнимые части акустического давления на верхней и нижней гранях: $\theta = 3\pi/4$, $X_0 = (2,1)$, $L_1 = 0.01$, $N_1 = 1500$, $L_2 = 0.5$, $N_2 = 300$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$.

Аналогичные величины для кривой $l_2$:

$$y^{(2)} = (-\xi\cos\theta, -\xi\sin\theta), \quad n_y^{(2)} = (\sin\theta, -\cos\theta),$$
$$r_{xy}^{(2)} = (-\xi\cos\theta - x_1, -\xi\sin\theta - x_2),$$
$$r_{xy}^{(2)} = \sqrt{(\xi\cos\theta + x_1)^2 + (\xi\sin\theta + x_2)^2}.$$

В итоге выражение (12) принимает вид:

$$p^{sc}(x) = \frac{i}{4}\int_0^\infty \left[ p_1(\xi) H_1^{(1)}\left(r_{xy}^{(1)}\right) \frac{x_1\sin\theta + x_2\cos\theta}{r_{xy}^{(1)}} + \right. \left. + \; p_2(\xi) H_1^{(1)}\left(r_{xy}^{(2)}\right) \frac{x_1\sin\theta - x_2\cos\theta}{r_{xy}^{(2)}} \right] d\xi. \tag{14}$$

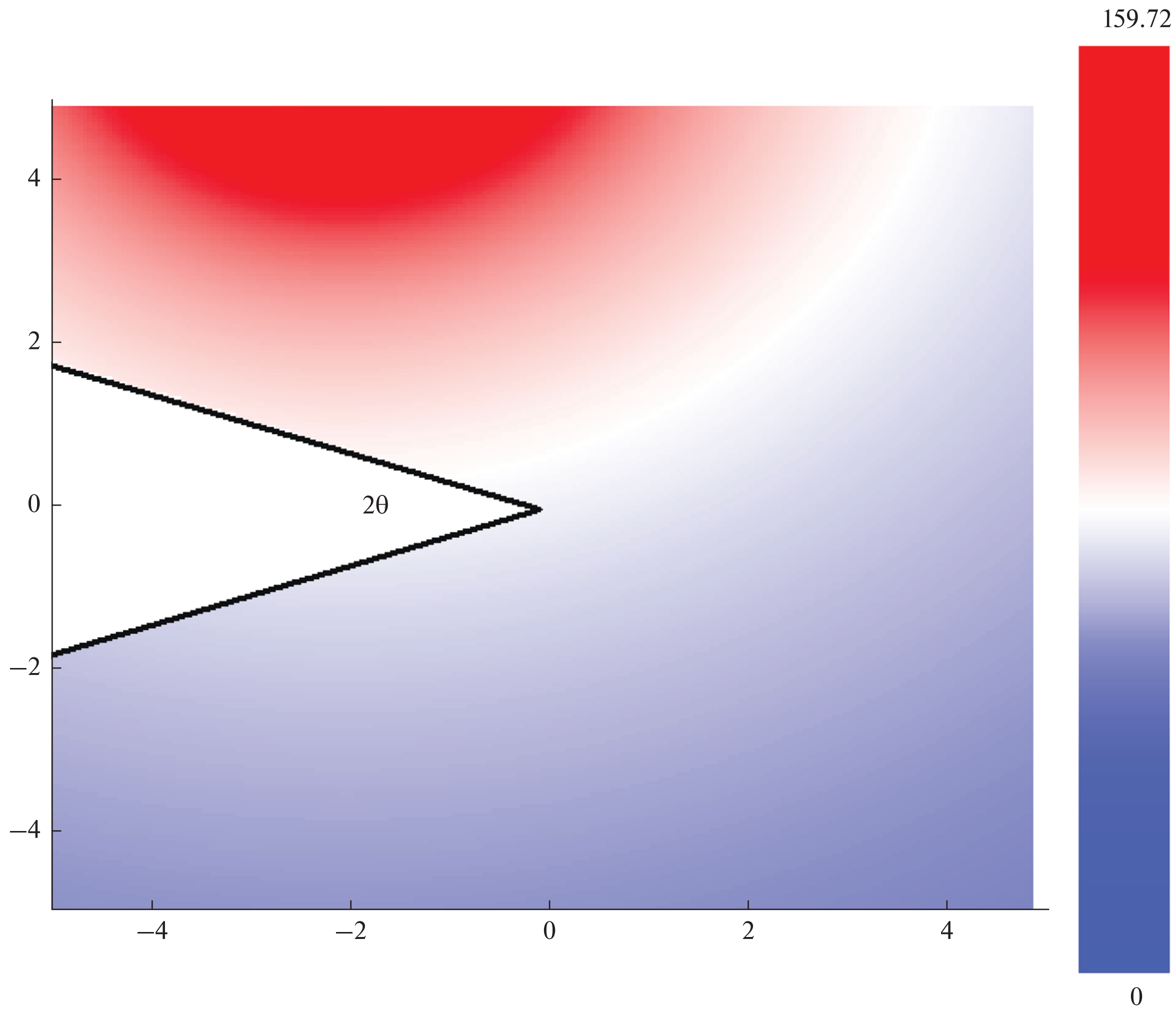



**Рис. 4.** Амплитуда полного акустического поля в среде вокруг бесконечного клина: $\theta = \pi/9$ (полный угол раствора клина $\theta = 40°$), $X_0 = (-2, 6.5)$, $L_1 = 0.1$, $N_1 = 1000$, $L_2 = 5$, $N_2 = 500$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 1800$.

Таким образом, имея численные значения акустического давления на граничной кривой, по формуле (14) находится структура дифрагированной звуковой волны в произвольной точке акустической среды.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложенный метод позволяет распространить результаты предыдущей работы авторов [11] на случай произвольного несимметричного расположения источника звука относительно граней клина. При этом как частный случай получается решение симметричной задачи. Оказалось, что такие результаты как точное значение давления в угле, асимптотическая оценка на бесконечности (9) и аналитическое решение задачи для некоторого ограниченного числа углов могут быть также перенесены с симметричного случая на несимметричный.

2. В качестве метода решения выбран полуаналитический метод ГИУ, который позволил получить важные аналитические результаты и, кроме того, построить устойчивую численную схему. Для дискретизации была выбрана сетка, состоящая из трех интервалов, равномерно разбитых на узлы. Самая плотная сетка располагается в небольшой окрестности угла. Такой способ задания сетки доказывает свою эффективность в многочисленных тестах. Квадратурная формула Симпсона при дискретизации свела ГИУ к СЛАУ, для решения которой использовался метод наименьших квадратов LSQR Пейджа и Сондерса. Тестирование численных результатов по методу ГИУ на задаче, имеющей точное решение методом мнимых источников, показало хорошую точность на всем интервале, в том числе в небольшой окрестности угла.

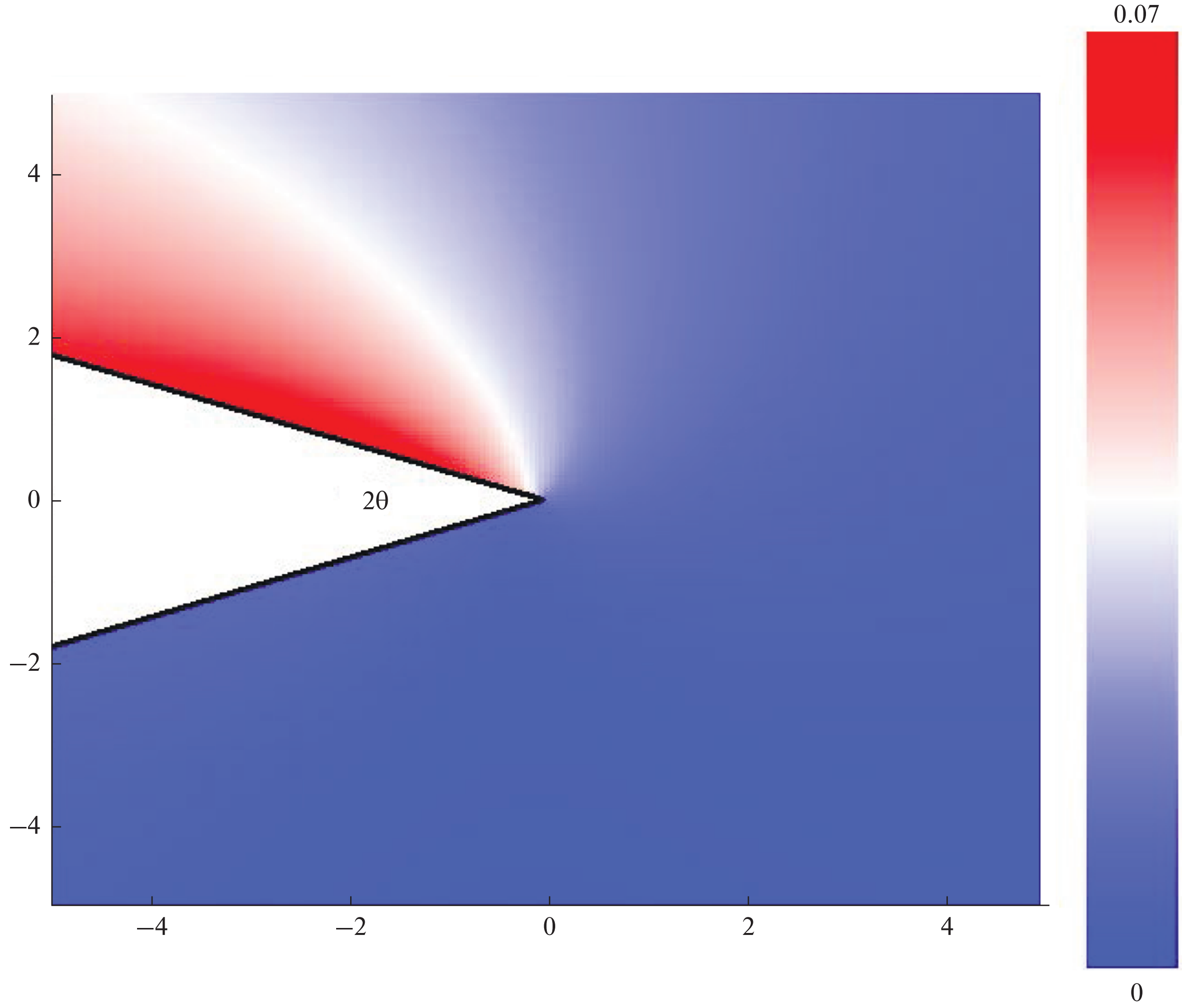



**Рис. 5.** Амплитуда рассеянного акустического поля в среде вокруг бесконечного клина: $\theta = \pi/9$ (полный угол раствора клина $\theta = 40°$), $X_0 = (2{,}1)$, $L_1 = 0.1$, $N_1 = 1000$, $L_2 = 5$, $N_2 = 500$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 1800$.

Заметим, что детальный обзор, посвященный численным методам с адаптивными сетками, представлен в [18].

3. После того, как система ГИУ решена предложенным численным методом, волновое поле в произвольной точке акустической среды определяется в виде некоторых интегралов, выражающихся через найденные граничные значения на гранях клина.

Пример расчета амплитуды полного давления для акустического поля приведен на рис. 4, где источник находится сверху вне изображенной области. На рисунке видно, что волна от источника, распространяясь вправо и вниз, где нет препятствия, практически сохраняет свою круговую форму. В то же время, распространяясь влево и вниз, она взаимодействует с верхней гранью клина, существенно искажаясь. При этом хорошо видна зона тени снизу от клина, причем тень становится все заметнее, если двигаться вблизи нижней грани с удалением от угла.

На рис. 5 показана амплитуда рассеянного полного поля от источника, расположенного вблизи верхней грани. Любопытна структура рассеянного волнового поля сверху от клина. В первом приближении волновое поле здесь формируется путем взаимодействия падающих звуковых лучей и лучей, отразившихся от верхней грани. Структура звукового поля при этом довольно сложная. Волновое поле совсем не похоже на то круговое, которое было бы в волне от источника.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант № 19-29-06013.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.

2. *Sommerfeld A.* Mathematical Theory of Diffraction. Boston: Birkhauser, 2004. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8196-8_2
3. *Keller J.B.* Geometrical Theory of Diffraction // J. Opt. Soc. Amer. 1962. P. 116–130. https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000116
4. *Hacivelioglu F., Sevgi L., Ufimtsev P.Ya.* Numerical evaluations of diffraction formulas for the canonical wedge-scattering problem.// IEEE Antennas Propag. Mag. 2013. V. 55. P. 257–272. https://doi.org/10.1109/MAP.2013.6735531
5. *Apaydin G., Sevgi L.*A novel wedge diffraction modeling using method of moments (MoM) // Appl. Comput. Electromagn. Soc. J. 2015. V. 30. P. 1053–1059. https://doi.org/10.1109/TAP.2014.2323414
6. *Lu B., Darmon M., Fradkin L., Potel C.* Numerical comparison of acoustic wedge models, with application to ultrasonic telemetry // Ultrasonics. 2016. V. 65. P. 5–9. https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.10.009
7. *Nethercote M.A., Assier R.C., Abrahams I.D.* Analytical methods for perfect wedge diffraction: A review // Wave Motion. 2020. 102479. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102479
8. *Корольков А.И., Шанин А.В., Белоус А.А.* Дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными границами. Метод граничного параболического уравнения // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 440–447. https://doi.org/10.1134/S0320791919040063
9. *Кюркчан А.Г., Маненков С.А.* Дифракция поля точечного источника на компактном препятствии в непрерывно-слоистом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 526–533. https://doi.org/10.1134/S0320791918050052
10. *Андронов И.В.* Высокочастотная дифракция на узком гиперболоиде вращения // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 129–136. https://doi.org/10.7868/S0320791917010014
11. *Sumbatyan M.A., Martynova T.S., Musatova N.K.* Boundary element methods in diffraction of a point-source acoustic wave by a rigid infinite wedge // Enging Anal. Boundary Elem. 2021. V. 125. P. 157–167. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.01.017
12. *Dominguez V., Graham I.G., Smyshlyaev V.P.* A hybrid numerical-asymptotic boundary integral method for high-frequency acoustic scattering // Numer. Math. 2007. V. 106. P. 471–510. https://doi.org/10.1007/s00211-007-0071-4
13. *Arden S., Chandler-Wilde S.N., Longdon S.A.* A collocation method for high-frequency scattering by convex polygons // J. Comp. Appl. Math. 2007. V. 204. P. 334–343. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.028
14. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
15. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
17. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1989.
18. *Feischl M., Fuhrer Th., Heuer N., Karkulik M., Praetorius D.* Adaptive boundary element methods // Archives Comp. Meth. Enging. 2015. V. 22. P. 309–389. https://doi.org/10.1007/s11831-014-9114-z

**EDN:** ВХННКА
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 361–372*

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

*УДК 519.958:531.33:517.956.8*

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В ВОЛНОВОДЕ


**А. В. Шанин[a, b], А. И. Корольков[a, b], К. С. Князева[a, b, *]**

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия*

[b] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия*

**e-mail: knyazevaks05@gmail.com*

Поступила в редакцию 01.03.2022 г.
После доработки 01.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Рассматривается задача импульсного возбуждения акустического волновода постоянного сечения. Поглощение не учитывается. В качестве наиболее общей модели такого волновода рассматривается матричное уравнение Клейна–Гордона (волноводный метод конечных элементов). Для волновода, описываемого такой моделью, строятся несколько представлений поля: в виде двойного интеграла по $\omega$ и $k$, в виде суммы интегралов по $k$ и в виде суммы интегралов по $\omega$. Вводятся римановы поверхности комплексных многозначных функций $k(\omega)$ и $\omega(k)$, заданных неявно с помощью дисперсионного уравнения. Интегрирование в представлениях поля в виде контурных интегралов происходит по листам этих римановых поверхностей. С помощью деформации контуров интегрирования доказывается эквивалентность указанных представлений.

*Ключевые слова:* матричное уравнение Клейна–Гордона, волноводный метод конечных элементов, waveguide FEM, комплексная дисперсионная диаграмма, деформация контуров интегрирования на дисперсионной диаграмме, задача импульсного возбуждения волновода

**DOI:** 10.31857/S0320791922040116

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача возбуждения импульсов в многослойном волноводе с компактным постоянным сечением. Поглощения/притока энергии в волноводе не происходит. В качестве наиболее общей приближенной модели волновода рассматривается *матричное уравнение Клейна–Гордона*. Отметим, что матричное уравнение Клейна–Гордона в литературе иногда называется волноводным методом конечных элементов (Waveguide Finite Element Method [1], waveguide FEM [2]), а также GDSA [3] (Global Discretization, Semi-Analytical formulation). Данное уравнение возникает, например, при дискретизации сечения волновода; продольная координата, как и время, при этом остается непрерывной.

Впервые идея дискретизовать сечение волновода, сохранив при этом непрерывность вдоль волновода и во времени, встречается в работе [4], где показано, что подобная идея может быть использована для расчета дисперсионных диаграмм упругих волноводов произвольного сечения. Более явно матричное уравнение Клейна–Гордона выписано в [5]. В работах [1, 6] уравнение выведено с помощью метода Лагранжа. В работе [3] соответствующее уравнение выводится из модового разложения поля. Кроме того, в [1, 3] получена формула для групповой скорости моды.

Метод матричного уравнения Клейна–Гордона конкурирует с методом групповой импедансной матрицы [7], где дискретизуются как поперечные, так и продольные координаты. Представляет потенциальный интерес построение перехода между этими двумя методами и перенос ряда формул из [7] в контекст матричного импедансного уравнения.

Сформулируем постановку задачи. Пусть направление, в котором волновод бесконечен, совпадает с координатой осью $x$. Пусть $\mathbf{U}(t, x)$ – вектор размерности $N \times 1$ ($N$ – целое число, возможно большое). Вектор $\mathbf{U}$ описывает состояние сечения волновода. Например, если рассматривается упругий волновод, вектор $\mathbf{U}$ может состоять из смещений узлов сетки, аппроксимирующей поперечное сечение волновода. Если волновод жидкий, это могут быть значения акустического потенциала в узлах сетки. Вектор $\mathbf{U}$ также может представлять собой амплитуды приближенных

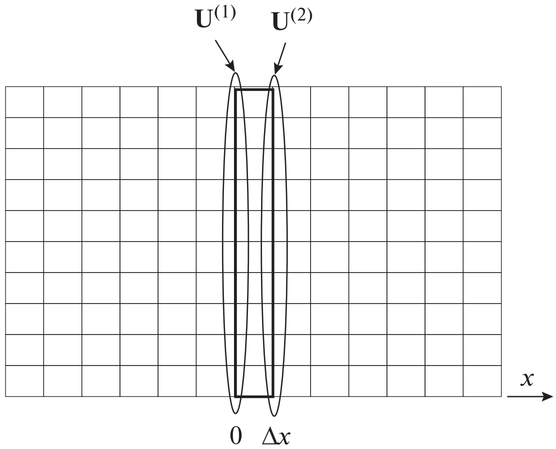



**Рис. 1.** Срез волновода.

нормальных колебаний сечения волновода. Во всех этих случаях матричное уравнение Клейна–Гордона имеет общий вид

$$\left[D_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial}{\partial x}+D_0-M\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{U}(t,x)= \\ =\mathbf{F}\delta(x)\delta(t), \tag{1}$$

где $D_2, D_1, D_0, M$ – некоторые постоянные матрицы размерности $N\times N$, $\mathbf{F}$ – постоянный вектор $N\times 1$, описывающий поперечный профиль возмущения.

Мы полагаем, что матрицы, стоящие в (1), действительны и имеют следующие свойства [1]:

$$M^T=M,\quad D_0^T=D_0,\quad D_1^T=-D_1,\quad D_2^T=D, \tag{2}$$

где $\cdot^T$ обозначает транспонирование. Кроме того, мы считаем, что матрицы $M$ и $D_2$ положительно определены, $D_0$ – отрицательно определена. Эти условия необходимы, чтобы потенциальная и кинетическая энергии были неотрицательны. Матрица $M$ отвечает за инерционные свойства волновода (массу), $D_2$ отвечает за продольную жесткость, $D_0$ – за поперечную жесткость, а $D_1$ – за свойства, не сохраняющиеся при симметрии $x\to -x$.

Структура статьи следующая. В разделе 2 обсуждается физический смысл матриц, входящих в (1). В разделах 3 и 4 выводятся несколько представлений поля $\mathbf{U}(t,x)$, определяемого уравнением (1). В результате ставится вопрос об эквивалентности этих представлений. Чтобы показать, что полученные представления тождественны в определенных областях, необходимо рассмотреть все (включая комплексные) решения дисперсионного уравнения. В разделе 5 интегральные представления для полей предлагается трактовать как контурные интегралы на комплексном многообразии, представляющем собой дисперсионную диаграмму волновода. В разделе 6 доказываются некоторые полезные свойства дисперсионного уравнения. В разделе 7 показана тождественность различных представлений решения (1).

## 2. ВЫВОД МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

В качестве пояснения к матричному уравнению Клейна–Гордона покажем, что оно легко выводится из более привычного метода конечных элементов. Чтобы построить конечно-элементную модель волновода, необходимо описать поведение некоторого тонкого среза волновода по продольной координате (пусть этот срез соответствует области $0\le x\le \Delta x$), а затем “склеить” бесконечную последовательность таких срезов. Пусть $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)}$ – векторы узловых значений в сечениях $x=0$ и $x=\Delta x$, соответственно (см. рис. 1). Будем считать, что других узловых значений для приближенного описания среза не требуется. Пусть элементы вектора $\mathbf{U}^{(1)}$ соответствуют элементам $\mathbf{U}^{(2)}$ при трансляции $x\to x+\Delta x$. Размерность векторов $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)}$ есть $N\times 1$. Весь срез описывается блочным вектором

$$\mathbf{U}^{\text{бл}}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}^{(1)}\\ \mathbf{U}^{(2)}\end{pmatrix}.$$

Пусть матрицы жесткости и массы для этого слоя записаны в блочной форме:

$$K^{\text{бл}}=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix},\quad M^{\text{бл}}=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где все блоки имеют размер $N\times N$.

Перейдем к рассмотрению целого волновода. Пусть состояние волновода описывается векторной функцией $\hat{\mathbf{U}}_m(t)$, где $m$ – номер сечения $x=m\Delta x$. Пусть в сечении $m=0$ прикладывается сила с временным профилем $f(t)$. В этом случае поле в волноводе описывается уравнением:

$$\left(K_{21}\hat{\mathbf{U}}_{m-1}+K_{12}\hat{\mathbf{U}}_{m+1}+(K_{11}+K_{22})\hat{\mathbf{U}}_m\right)+ \\ +\left(M_{21}\partial_t^2\hat{\mathbf{U}}_{m-1}+M_{12}\partial_t^2\hat{\mathbf{U}}_{m+1}+\right. \\ \left.+(M_{11}+M_{22})\partial_t^2\hat{\mathbf{U}}_m\right)=-\delta_{m,0}f(t)\mathbf{F}, \tag{4}$$

где $\mathbf{F}$ – вектор, описывающий пространственный профиль возмущения в сечении волновода.

Сделаем два упрощения. Во-первых, положим, что матрица массы диагонализована. Из этого следует, что

$$M_{12}=M_{21}=0,\quad M_{11}+M_{22}\equiv M^d. \tag{5}$$

Во-вторых, будем рассматривать $\hat{\mathbf{U}}_m(t)$ как дискретизацию непрерывной по $x$ функции $\mathbf{U}(t,x)$:

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{U}}_m(t) = \mathbf{U}(t, m\Delta x),\\ \hat{\mathbf{U}}_{m\pm1}(t) \approx \mathbf{U}(t,x) \pm \Delta x\, \partial_x \mathbf{U}(t,x) + \\ + \frac{(\Delta x)^2}{2}\partial_x^2 \mathbf{U}(t,x).\end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), мы получаем уравнение (1), в котором

$$D_0 = -(K_{11} + K_{22} + K_{12} + K_{21}), \tag{7}$$

$$D_1 = -\Delta x\,(K_{12} - K_{21}), \tag{8}$$

$$D_2 = -\frac{(\Delta x)^2}{2}(K_{12} + K_{21}). \tag{9}$$

Поясним роль различных матриц-коэффициентов в уравнении. Рассмотрим сетку, изображенную на рис. 2. Пусть черные точки обозначают массы; они способны двигаться только перпендикулярно плоскости рисунка. Линиями на рисунке показаны натянутые пружины. Пусть натяжение вертикальных пружин есть $a_1$, горизонтальных $a_2$, а диагональных $a_3$. Пусть $\Delta x = \Delta y = 1$.

Это простейший волновод из сосредоточенных элементов. Построим его матричное описание. Возьмем элементарный срез, состоящий из двух сечений волновода (чтобы этот срез был периодом системы, узлы разделяются надвое). Матрица массы $M^d$ для такого среза диагональная:

$$M^d = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $a_0$ – масса одного узла. Пусть блоки $K_{ml}$, из которых составлена матрица жесткости, выражены в виде суммы:

$$K_{ml} = \hat{K}_{ml} + \tilde{K}_{ml}, \tag{11}$$

где $\hat{\ }$ означает то, что величины относятся к вертикальным и горизонтальным связям, $\tilde{\ }$ означает, что величины относятся к диагональным связям. Соответственно,

$$D_j = \hat{D}_j + \tilde{D}_j, \quad j = 0,1,2. \tag{12}$$

Матрицы $\hat{K}_{ml}$ выписаны ниже:

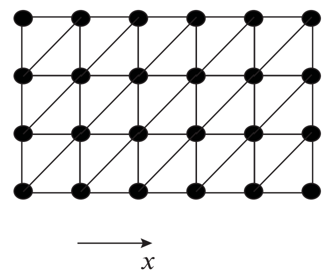



**Рис. 2.** Простейшая модель сетки с диагональными связями.

$$\begin{gathered}\hat{K}_{11} + \hat{K}_{22} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \\ + \ a_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = -a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Следовательно, применяя (7)–(9), можно получить

$$\begin{gathered}\hat{D}_0 = a_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\\ \hat{D}_1 = 0, \quad \hat{D}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{15}$$

Можно заметить, что с точностью до постоянного множителя $\hat{D}_0$ – это численная аппроксимация оператора $\partial_y^2$, а $\hat{D}_2$ – это единичная матрица.

Теперь рассмотрим диагональные связи. Соответствующие блоки матрицы жесткости имеют вид:

$$\tilde{K}_{11} + \tilde{K}_{22} = a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\tilde{K}_{12} = -a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_{21} = -a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\tilde{D}_0 = a_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\tilde{D}_1 = a_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Как видно из представленных формул, диагональные связи делают матрицу $D_1$ ненулевой. Можно прийти к выводу о том, что вертикальные пружины (поперечная упругость) участвуют в формировании матрицы $D_0$, горизонтальные пружины (продольная упругость) в формировании матрицы $D_2$, а диагональные пружины в формировании всех трех матриц упругости. Очевидно, диагональные пружины нарушают симметрию $x \to -x$.

## 3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА В ВИДЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Для того чтобы получить решение матричного уравнения Клейна–Гордона (1), необходимо сделать преобразование Фурье по $x$ и преобразование Лапласа по $t$, решить получившееся алгебраическое уравнение относительно образа векторной функции $\mathbf{U}(t,x)$ и сделать обратные преобразования Фурье и Лапласа. В результате получается *решение в виде двойного интеграла*:

$$\mathbf{U}(t,x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} B^{-1}\mathbf{F}\, e^{ikx-i\omega t} dk\, d\omega, \quad (20)$$

где

$$B = -k^2 D_2 + ikD_1 + D_0 + \omega^2 M. \quad (21)$$

Произвольное положительное значение $\varepsilon$ появляется при выполнении преобразования Меллина (обратного преобразования Лапласа). Оно обеспечивает причинность решения.

Применяя формулу для вычисления обратной матрицы, (20) можно переписать так:

$$\mathbf{U}(t,x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{D(\omega,k)} e^{ikx-i\omega t} dk\, d\omega, \quad (22)$$

где $A(\omega,k)$ – матрица алгебраических дополнений $B$, $D(\omega,k)$ – определитель $B$, или *дисперсионная функция* волновода:

$$D(\omega,k) = \det\left[-k^2 D_2 + ikD_1 + D_0 - \omega^2 M\right]. \quad (23)$$

Заметим, что по построению матрица $A(\omega,k)$ и функция $D(\omega,k)$ – полиномы переменных $(\omega,k)$. Возможно, степень этих полиномов весьма велика.

Для волноводов, описываемых матричным уравнением Клейна–Гордона, верны следующие утверждения. Во-первых, функция

$$\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{D(\omega,k)}$$

растет как степенная функция $\omega$ для фиксированного $k$, и как степенная функция от $k$ для фиксированного $\omega$. Таким образом, рост или убывание подынтегральной функции (20) на бесконечности определяется экспоненциальным множителем. Во-вторых, функции $A$ и $D$ не имеют ни точек ветвления, ни полюсов, а только, возможно, нули.

Вопрос, насколько данные свойства сужают класс волноводов, к которым применимы описываемые методы, остается открытым. Так, например, в [8] написано следующее: “Является общепринятым считать, что для закрытых структур, таких как слой (возможно, с некоторыми бесконечностями), функция $L(s,y)$ есть мероморфная функция, а для открытых структур, таких как полуплоскость, $L(s,y)$ имеет точки ветвления. Мы не знаем, было ли это утверждение строго доказано где-либо, но нам не известны примеры, которые бы опровергали данное утверждение”. Функция $L(s,y)$ в [8] есть $A(\omega,k)/D(\omega,k)$.

Особые точки подынтегрального выражения определяются *дисперсионным уравнением*:

$$D(\omega,k) = 0. \quad (24)$$

Эти особые точки являются полюсами (в общем случае первого порядка). Как известно, если $\omega$ и $k$ являются решениями дисперсионного уравнения (24), в волноводе может свободно распространяться мода вида $We^{-i\omega t+ikx}$, где $W$ – поле в волноводе в сечении $x=0$ при $t=0$. В случае дискретизованного сечения волновода $W$ представляет собой вектор. Решения дисперсионного уравнения, такие что $\omega, k \in \mathbb{R}$, соответствуют “обычным” распространяющимся волнам, а решения, такие что $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}[k] = 0$, $\mathrm{Im}[k] \neq 0$ – затухающим волнам. Далее мы рассматриваем также моды, у которых оба значения $\omega, k$ комплексные.

Определить положение корней дисперсионного уравнения относительно контура интегрирования в плоскости переменной $k$ помогает следующее утверждение. Пусть матрицы $M$, $D_2$, $D_1$, $D_0$ действительны и подчиняются свойствам (2). Пусть также матрица $M$ положительно определена. Тогда при действительных $k$ уравнение (24), рассматриваемое как уравнение относительно $\omega$, имеет только действительные корни.

Данное утверждение было доказано в [1]. В дальнейшем мы будем называть его *соотношением действительности*. Тот факт, что в волноводах без поглощения или притока энергии (при этом в качестве модели волновода не обязательно должно рассматриваться матричное уравнение Клейна–Гордона) действительным $k$ соответствуют действительные решения дисперсионного уравнения $\omega$, является довольно известным. В ряде статей он приводится как очевидный и не требующий доказательства (например, в [9]). Мы, однако, поясним неформальным образом, почему это утверждение верно.

Введем для действительного $k$ "длину волны" $\Lambda = 2\pi/k$. "Вырежем" фрагмент волновода $0 \le x \le \Lambda$ и наложим периодические граничные условия, соединив тем самым концы $x = 0$ и $x = \Lambda$. В результате, мы получим физически реализуемый резонатор. Если эта система является консервативной, то ее собственные частоты $\omega$ должны быть действительными. Так как для нормальных волн волновода с длиной волны $\Lambda$ и волновым числом $k$ решения дисперсионного уравнения (частоты) являются частотами соответствующего резонатора, то они также являются действительными.

В нашем случае соотношение действительности является важным, поскольку гарантирует, что интеграл (22) определен корректно: плоскость интегрирования не пересекает особенности подынтегрального выражения.

## 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ СУММ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть $x > 0$. Для вычисления интеграла (20) можно воспользоваться леммой Жордана и замкнуть контур интегрирования в верхней части комплексной плоскости переменной $k$, как показано на рис. 3. Затем, согласно теореме вычетов, внутренний интеграл может быть представлен (с точностью до коэффициента $2\pi i$) как сумма вычетов в полюсах, попавших внутрь замкнутого контура.

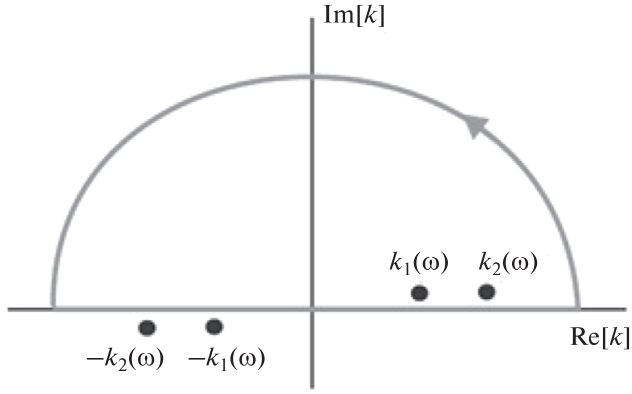



**Рис. 3.** Замыкание контура в $k$-плоскости при фиксированном $\omega$.

Зафиксируем значение $\omega = \omega' + i\varepsilon$, $\omega' \in \mathbb{R}$. Тогда решения $k_j$ дисперсионного уравнения (24) могут быть разложены в ряд Тейлора:

$$k_j(\omega' + i\varepsilon) \approx k_j(\omega') + i\varepsilon \left.\frac{dk_j}{d\omega}\right|_{\omega'}. \tag{25}$$

Согласно соотношению действительности, $k_j(\omega') \in \mathbb{R}$. Очевидно также, что значение производной $\left.\frac{dk_j}{d\omega}\right|_{\omega'}$ является действительным. Следовательно, значения $k_j(\omega' + i\varepsilon)$ слегка сдвинуты от действительной оси в комплексную область на величину:

$$\mathrm{Im}[k_j(\omega' + i\varepsilon)] = \varepsilon \left.\frac{dk_j}{d\omega}\right|_{\omega'}. \tag{26}$$

Заметим, что производная в правой части (26) – величина, обратная групповой скорости моды.

Можно показать, что дисперсионная функция $D$, определенная в (23), зависит только от четных степеней $k$ (см. раздел 6). Отсюда следует, что все корни дисперсионного уравнения можно разделить на пары $k_j(\omega)$ и $-k_j(\omega)$. Следовательно, половина корней сдвинута в верхнюю полуплоскость, а другая половина – в нижнюю. Будем считать, что значение $k_j(\omega)$ имеет положительную мнимую часть.

Таким образом, внутрь замкнутого контура интегрирования попадает только половина корней дисперсионного уравнения (все корни с $\mathrm{Im}[k] > 0$, см. рис. 3). Взяв вычеты в этих точках, можно получить следующее *представление* поля *в виде суммы интегралов по* $\omega$:

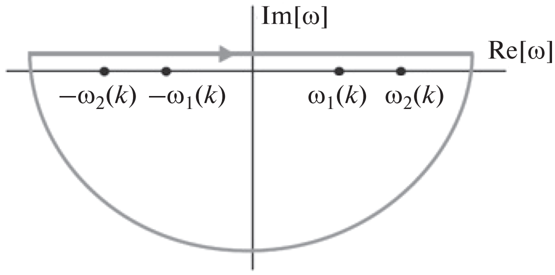



**Рис. 4.** Замыкание контура в ω-плоскости для фиксированного $k$.

$$\mathbf{U}(t,x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{A(\omega,k_j(\omega))\mathbf{F}}{\partial_k D(\omega,k_j(\omega))}\times \times \exp(ik_j(\omega)x - i\omega t)\,d\omega, \tag{27}$$

где $N$ – размерность задачи.

При $t > 0$ и произвольном $x$ можно получить еще одно представление поля в волноводе, поменяв порядок интегрирования в (22):

$$\mathbf{U}(t,x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{D(\omega,k)}e^{ikx-i\omega t}d\omega\, dk. \tag{28}$$

После замыкания контура интегрирования в нижней части комплексной плоскости ω (см. рис. 4) внутрь контура попадают все корни $\omega_j(k)$ дисперсионного уравнения, так как, согласно соотношению действительности, все корни лежат на действительной оси. С учетом того, что дисперсионная функция (23) зависит только от четных степеней ω, все корни дисперсионного уравнения можно разделить на пары $\omega_j(k)$ и $-\omega_j(k)$. Применяя теорему вычетов, получаем представление поля *в виде суммы интегралов по* $k$:

$$\mathbf{U}(t,x) = -\frac{i}{2\pi}\times \times\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega_j(k),k)\mathbf{F}}{\partial_\omega D(\omega_j(k),k)}\exp(ikx - i\omega_j(k)t)\,dk + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(-\omega_j(k),k)\mathbf{F}}{\partial_\omega D(-\omega_j(k),k)}\exp(ikx + +i\omega_j(k)t)\,dk\right). \tag{29}$$

Отметим, что если интересоваться полем при $t < 0$, то контур интегрирования внутреннего интеграла в (28) следует замыкать в верхней полуплоскости. Подынтегральная функция в области, которую замыкает такой контур, является аналитичной, следовательно, интеграл равен нулю. Таким образом, решение (28) и в самом деле обладает причинностью.

Отметим также, что вычеты внутреннего интеграла в (28) можно представить в следующей форме:

$$\mathrm{Res}\left[B^{-1},\ \pm\omega_j(k)\right] = \pm\frac{\mathbf{U}_j\mathbf{V}_j}{2\omega_j\mathbf{V}_jM\mathbf{U}_j}, \tag{30}$$

где $\mathbf{U}_j$ – собственный вектор правой обобщенной задачи на собственные значения:

$$-\left[-k^2D_2 + ikD_1 + D_0\right]\mathbf{U} = \omega^2 M\mathbf{U}, \tag{31}$$

где $\mathbf{U}_j$ – вектор-столбец, соответствующий собственному значению $\omega_j^2$, а вектор $\mathbf{V}_j$ – собственный вектор левой обобщенной задачи на собственные значения:

$$-\mathbf{V}\left[-k^2D_2 + ikD_1 + D_0\right] = \omega^2\mathbf{V}M, \tag{32}$$

где $\mathbf{V}_j$ – вектор-строка, соответствующий тому же собственному значению $\omega_j^2$. Нетрудно показать, что для действительных $k$ векторы $\mathbf{V}_j$ эрмитово сопряжены соответствующим векторам $\mathbf{U}_j$. Воспользовавшись (30), выражение (28) можно переписать так:

$$\mathbf{U}(t,x) = -\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{U}_j(k)\mathbf{V}_j(k)\mathbf{F}}{2\omega_j(k)\mathbf{V}_j(k)M\mathbf{U}_j(k)}\times \times\left(\exp(ikx - i\omega_j(k)t) - \exp(ikx + i\omega_j(k)t)\right)dk. \tag{33}$$

Это одно из стандартных представлений поля в волноводе в виде ряда по модам. Аналогичное представление можно записать и для (20), но при этом надо вводить более сложную (квадратичную) задачу на собственные значения [7], что выходит за рамки данной статьи.

Таким образом, существует три известных представления поля в волноводе: в виде двойного интеграла (22) или (28), в виде суммы интегралов по ω (27), а также в виде суммы интегралов по $k$ (29) (или (33)). Эти представления не эквивалентны. Представление в виде двойного интеграла справедливо для любых $t$ и $x$, оно обладает причинностью. Представление (27) выведено с учетом $x > 0$, оно описывает только волны, распространяющиеся в положительном направлении оси $x$. Представление (29), в свою очередь, справедливо только для $t > 0$. Однако, если рассматривать поле только при $t > 0$ и $x > 0$, то все три представления должны давать один и тот же результат. Следовательно, (27) должно преобразовываться в (29), и обратно. Показать, что (27) и (29) выводятся друг из друга – основная цель данной статьи.

## 5. ДИСПЕРСИОННАЯ ДИАГРАММА ВОЛНОВОДА КАК КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Чтобы показать связь между (27) и (29), необходимо изучить строение *дисперсионной диаграммы*.

Как известно, множество точек $(\omega, k)$, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (24), образуют дисперсионную диаграмму. Уже в 1952 г. Миндлин [10], изучая волны Лэмба, показал, что не только действительные, но и комплексные решения дисперсионного уравнения могут представлять интерес. Также позднее в работах [9, 11] были отмечены некоторые закономерности в поведении ветвей дисперсионной диаграммы твердотельного волновода для действительных и комплексных $k$. В работах [12–14] также изучалось аналитическое продолжение дисперсионной диаграммы в область комплексных $\omega$ и $k$.

Рассмотрим дисперсионное уравнение (24) как уравнение относительно комплексных $k$ (считая фиксированным произвольное комплексное $\omega$). Это уравнение, как уже указывалось, имеет $2N$ решений $k_j(\omega)$. Первая из ключевых идей, используемых в настоящей работе, заключается в том, чтобы рассматривать значения $k_j(\omega)$ как значения одной многозначной (многолистной) комплекснозначной функции $k(\omega)$. У этой функции есть некоторая риманова поверхность, которая имеет $2N$ листов. Эта поверхность может быть связна или состоять из нескольких компонент. Назовем эту риманову поверхность $R$.

Таким образом, каждое из решений $k_j(\omega)$ лежит на своем листе поверхности $R$ многозначной комплексной функции $k(\omega)$. Структура подынтегрального выражения в (27) такова, что оно имеет ту же риманову поверхность. Это значит, что в (27) суммируются интегралы не от $N$ разных функций, а от одной многозначной функции, взятые по $N$ различным контурам, проведенным на ее римановой поверхности. Эти контуры представляют собой $N$ (из $2N$) прообразов прямой $\mathrm{Im}[\omega] = \varepsilon$.

Аналогично, корни $\omega_j$ дисперсионного уравнения при фиксированном $k$ являются листами римановой поверхности $R'$ многозначной комплексной функции $\omega(k)$. Заметим, что формула (29) содержит интегрирование по всем $2N$ листам римановой поверхности $R'$ вдоль прообразов действительной оси $k$-плоскости. Действительно, $N$ собственных значений $\omega_j^2$ порождают $2N$ листов $\pm\omega_j$, и нетрудно проверить, что все они участвуют в (29) одинаковым образом.

Согласно теореме Коши, контур интегрирования можно деформировать в областях аналитичности подынтегральной функции. Именно этот инструмент позволит нам показать тождественность (27) и (29) для $t > 0$, $x > 0$. Чтобы деформировать контуры интегрирования на $R$ и $R'$, необходимо изучить строение этих поверхностей.

Очевидно, подынтегральные выражения в (27) и (29), рассматриваемые как функции $\omega$ и $k$, имеют точки ветвления. Несколько более тонкое рассуждение показывает, что в общем случае они не имеют полюсов.

Вторая математическая идея, используемая в данной работе, заключается в том, что римановы поверхности $R$ и $R'$ связаны друг с другом. А именно, рассмотрим множество $H$ точек $(\omega, k)$ в двумерном комплексном пространстве, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (24). Это множество двумерно, т.е. представляет собой поверхность в четырехмерном пространстве. Римановы поверхности $R$ и $R'$ есть в определенном смысле проекции одной и той же поверхности $H$ на координатные плоскости (комплексные прямые) $\omega$ и $k$, соответственно.

На поверхности $H$ можно ввести комплексную структуру, превратив ее в *комплексное многообразие*. Как известно [15, 16], комплексное многообразие — это поверхность, в окрестности каждой точки которой можно ввести локальную комплексную координату таким образом, чтобы преобразования координат между пересекающимися окрестностями были биголоморфными в области пересечения. Приведем пример таких координат. Везде, кроме прообразов точек ветвления поверхности $R$, вводится локальная координата $\omega$, а в окрестностях прообразов точек ветвления $R$ вводится локальная координата $k$.

В то время как римановы поверхности $R$ и $R'$ имеют точки ветвления, многообразие $H$ в общем случае *не имеет особых точек*, т.е. является регулярным везде. Особые точки $R$ и $R'$ появляются как “складки”, возникающие при проектировании $H$ на координаты $\omega$ и $k$. Разумеется, регулярность многообразия $H$ не делает его топологически простым. Топология у него такая же, как у $R$ и $R'$, т.е. оно может иметь “шейки”, “ручки” и т.д.

Наличие комплексной структуры на дисперсионной диаграмме $H$ позволяет ввести на ней контурное интегрирование, оснащенное теоремой Коши, т.е. с возможностью деформации контуров интегрирования. Интегрирование вводится обычным образом в окрестности каждой точки с помощью локальной комплексной координаты, а затем доказывается независимость интеграла от способа введения локальной координаты. Подынтегральными выражениями являются *аналитические дифференциальные 1-формы*.

Таким образом, появляется возможность рассматривать (27) и (29) как контурные интегралы непосредственно на дисперсионной диаграмме

$H$. Подынтегральными выражениями для аналогов (27) и (29) являются ограничения форм

$$\frac{i}{2\pi}\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{\partial_k D(\omega,k)}\exp(ikx - i\omega t)\ d\omega$$

и

$$-\frac{i}{2\pi}\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{\partial_\omega D(\omega,k)}\exp(ikx - i\omega t)\ dk$$

на $H$. Сами эти формы различны, но их ограничения на $H$ одинаковы. Действительно, по теореме о неявной функции на $H$ выполняется

$$\frac{dk}{d\omega} = -\frac{\partial_\omega D(\omega,k)}{\partial_k D(\omega,k)}, \tag{34}$$

из которого и следует равенство ограничений форм.

Таким образом, (27) и (29) могут быть переписаны как контурные интегралы на одном и том же комплексном многообразии $H$ от одной и той же формы на $H$. При этом контуры интегрирования для (27) и (29) разные (и даже число контуров различно). Поэтому доказательство эквивалентности представлений (27) и (29) сводится к доказательству возможности деформировать одно семейство контуров в другое.

Мы находим идею записывать волновые поля в виде контурных интегралов на дисперсионной диаграмме очень полезной. В частности, эта идея оказалась продуктивна при описании полей на дискретных периодических сетках [17, 18].

Разумеется, комплексный анализ на многообразиях является достаточно экзотической областью для специалистов по акустике, поэтому, имея в виду все сказанное, мы далее попытаемся построить наше рассуждение в терминах обычных функций одной комплексной переменной и их римановых поверхностей. В частности, тождество

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{\partial_k D(\omega,k)}\exp(ikx - i\omega t)d\omega = \\ = -\frac{i}{2\pi}\frac{A(\omega,k)\mathbf{F}}{\partial_\omega D(\omega,k)}\exp(ikx - i\omega t)dk\end{aligned} \tag{35}$$

можно трактовать как замену переменной в подынтегральной функции при $\omega = \omega(k)$.

## 6. СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

**1.** Покажем, что дисперсионная функция (23) является полиномом не только от $W = \omega^2$, но и от $K = k^2$, т.е. не содержит нечетных степеней $\omega$ и $k$:

$$D(\omega,k) = \tilde{D}(W,K).$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}D(\omega,k) = \det B = \det B^T = \\ = \det\left[\omega^2 M - k^2 D_2 - ikD_1 + D_0\right] = D(\omega,-k).\end{aligned}$$

Здесь мы использовали свойства (2). Следовательно, $D$ не может содержать слагаемых, содержащих нечетные степени $k$.

**2.** В общем случае функция $k(\omega)$ является голоморфной в областях с $\dfrac{\partial D}{\partial k} \neq 0$. Это следует из теоремы о неявной функции. Оговоримся, что мы не рассматриваем точки, где одновременно выполняются условия $\dfrac{\partial D}{\partial \omega} = 0$, $\dfrac{\partial D}{\partial k} = 0$, а также (24), поскольку это накладывает три комплексных ограничения на функции двух комплексных переменных. В общем случае таких точек нет.

Заметим, что точки, в которых $\dfrac{\partial D}{\partial \omega} = 0$, $\dfrac{\partial D}{\partial k} = 0$, называются *точками Шестопалова* [19]. В общем случае они не принадлежат дисперсионной диаграмме, а находятся рядом с ней.

**3.** В общем случае точки ветвления $R$ имеют второй порядок. Система уравнений

$$\begin{cases} D(\omega,k) = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial k} = 0 \end{cases} \tag{36}$$

определяет положение точек ветвления $R$. Разложим $D(\omega,k)$ вблизи точки ветвления $\omega_0$ и ветвящегося значения $k_0$ функции $k(\omega)$:

$$\begin{aligned}D(\omega,k) \approx D(\omega_0,k_0) + \left.\frac{\partial D}{\partial \omega}\right|_{(\omega_0,k_0)}(\omega - \omega_0) + \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 D}{\partial k^2}\right|_{(\omega_0,k_0)}(k - k_0)^2.\end{aligned} \tag{37}$$

Решение дисперсионного уравнения выглядит так:

$$k(\omega) \approx k_0 \pm \sqrt{-\frac{a}{b}(\omega - \omega_0)}, \tag{38}$$

где

$$a = \left.\frac{\partial D}{\partial \omega}\right|_{(\omega_0,k_0)},\quad b = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 D}{\partial k^2}\right|_{(\omega_0,k_0)}.$$

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то из (38) следует, что точки ветвления поверхности $R$ имеют второй порядок. Аналогичное утверждение верно для $R'$.

**4.** Все точки ветвления $R$ можно разделить на два типа: *частоты отсечки* и *обменные точки* *ветвления*. Частоты отсечки $\omega_{co}$ определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} D(\omega_{co}, k) = 0, \\ k(\omega_{co}) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Вблизи каждой из таких точек

$$k(\omega) \approx \pm\sqrt{-\frac{a}{b}(\omega - \omega_{co})}. \tag{40}$$

Из этого соотношения следует, что $\omega_{co}$ соединяет листы римановой поверхности $R$ с противоположными по знаку значениями ($k_j(\omega)$ с $-k_j(\omega)$). Кроме того, согласно соотношению действительности, все $\omega_{co}$ принадлежат действительной оси. Заметим, что контур интегрирования в (27) сдвинут с действительной оси, на которой есть точки ветвления. Поэтому выражение (27) корректно.

Точки ветвления поверхности $R$ второго типа соответствуют $k \neq 0$. Эти точки ветвления лежат не на действительной оси $\omega$. Существование обменных точек ветвления определяет, в частности, "расталкивание" ветвей дисперсионной диаграммы волноводов (это явление известно как *avoiding crossing*). Подробнее об этом написано в [13, 14, 20]. Обменные точки ветвления связывают между собой листы, соответствующие различным модам.

**5.** Аналогично, если мы рассматриваем функцию $\omega(k)$, заданную неявно с помощью (24), то риманова поверхность $R'$ этой функции также имеет точки ветвления, положение которых определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} D(\omega, k) = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial \omega} = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Точки ветвления $R'$, аналогично точкам ветвления $R$, также делятся на два типа. "Частоты отсечки" $k_{co}$ определяются соотношением:

$$\omega(k_{co}) = 0. \tag{42}$$

Точки ветвления $R'$ второго типа, также как и обменные точки ветвления $R$, лежат в комплексной области $k$-плоскости и влияют на поведение ветвей дисперсионной диаграммы.

**6.** Сделаем ряд утверждений о поведении функций $k(\omega)$ и $\omega(k)$ при $|\omega| \to \infty$ и $|k| \to \infty$ (мы предполагаем, что на $H$ большие $|\omega|$ соответствуют большим $|k|$). При больших значениях $|\omega|$ и $|k|$ дисперсионное уравнение для матричного уравнения Клейна–Гордона приближенно выглядит так:

$$\det\left[k^2 D_2 - \omega^2 M\right] = 0. \tag{43}$$

Введем обозначение:

$$\lambda = \frac{\omega^2}{k^2}. \tag{44}$$

Тогда (43) преобразуется в

$$\det[D_2 - \lambda M] = 0. \tag{45}$$

Это характеристическое уравнение для следующей обобщенной задачи на собственные значения:

$$D_2\mathbf{U} = \lambda M\mathbf{U}. \tag{46}$$

Так как матрицы $D_2$ и $M$ действительные, симметричные, положительно определенные, то все собственные значения $\lambda$ задачи (46) являются действительными положительными. Следовательно, при больших значениях $|\omega|$ и $|k|$ для $\omega(k)$

$$\omega_j(k) \approx \pm\sqrt{\lambda_j}\, k, \tag{47}$$

или для $k(\omega)$

$$k_j(\omega) \approx \pm\frac{\omega}{\sqrt{\lambda_j}}. \tag{48}$$

Из последних равенств следует ряд утверждений:

1. Все ветви на бесконечности могут быть разделены на пары мод, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении.

2. Если все значения $\lambda_j$ различны (это общий случай), то бесконечность не является точкой ветвления $R$ ($R'$). Это может быть важным при замыкании контуров на бесконечности в области экспоненциального затухания подынтегрального выражения.

## 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛЯ (27) И (29)

Сформулируем следующий план доказательства тождественности представлений (27) и (29) при $t > 0$, $x > 0$:

1. В представлении (27) сдвигаем контуры интегрирования по $R$ в область больших $|\omega|$ и $|k|$.

2. В представлении (29) сдвигаем контуры интегрирования по $R'$ в область больших $|\omega|$ и $|k|$.

3. Пользуясь (47), показываем, что интегралы вдоль сдвинутых контуров на $R$ и $R'$ равны.

В статье [13] было показано, что в случае двухслойного волновода все контуры интегрирования в представлении поля в виде суммы интегралов по $\omega$ можно сдвинуть сколь угодно далеко в верхнюю полуплоскость $\omega$-плоскости так, что значение суммы интегралов при этом не меняется. Это нетривиальное утверждение, поскольку при деформации контуры могут задевать точки ветвления римановой поверхности $R$. Такая деформа-

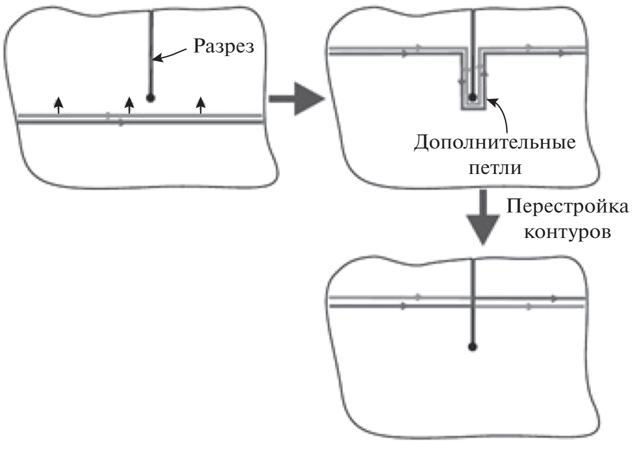



**Рис. 5.** Два контура проходят точку ветвления на римановой поверхности $R$ функции $k(\omega)$.

ция может быть невозможна для одного контура, но она оказывается возможна для “пачки” контуров. Контуры при этом перестраиваются определенным образом. На рис. 5 сверху показаны два контура интегрирования, расположенные на двух листах, соединенных общей обменной точкой ветвления (жирная черная точка на рисунке). Проведем разрез так, как показано на рис. 5 черной линией. Согласно теореме Коши, мы можем сдвигать контуры интегрирования в области аналитичности функции, не меняя значение интеграла. Будем смещать оба контура вверх. Контуры при этом будут огибать разрезы, образуя дополнительные петли. В результате появляются пары идущих вдоль разреза, противоположно направленных участков контуров. Интеграл вдоль таких пар в сумме дает ноль. Следовательно, эти участки можно удалить. Таким образом, изначальные контуры интегрирования можно заменить на те, которые изображены на рис. 5 внизу.

Эти же идеи применимы и к (27). Напомним, что интегрирование в представлении (27) происходит только по тем листам, для которых выполняется условие $\mathrm{Im}[k] > 0$ на прямой $\mathrm{Im}[\omega] = \varepsilon$. Так как все частоты отсечки $\omega_{co}$ лежат на действительной оси $\omega$, то при смещении контуров интегрирования в верхнюю полуплоскость необходимо пройти только обменные точки ветвления. Чтобы показать, что все эти точки ветвления можно пройти имеющимися контурами интегрирования, необходимо показать, что эти точки ветвления попарно связывают именно те листы поверхности $R$, по которым идет изначально интегрирование. Заметим, что в процессе непрерывной деформации контуров интегрирования в верхнюю полуплоскость $\omega$-плоскости знак $\mathrm{Im}[k]$ не может измениться, что следует из соотношения действительности. Значит, точки ветвления, которые мы проходим, соответствуют также $\mathrm{Im}[k] > 0$ и соединяют попарно листы $R$, для которых $\mathrm{Im}[k] > 0$ при $\mathrm{Im}[\omega] > 0$, это именно те листы, по которым изначально идет интегрирование в (27). А значит, мы можем сдвинуть все $N$ контуров интегрирования в верхнюю полуплоскость, пройдя все точки ветвления. Деформированные контуры интегрирования обозначены $\gamma$ на рис. 6а.

Так как интегрирование в (29) происходит вдоль всех листов $R'$, а все точки ветвления (обоих типов) имеют второй порядок, то интегрирование сводится к интегрированию вдоль контуров

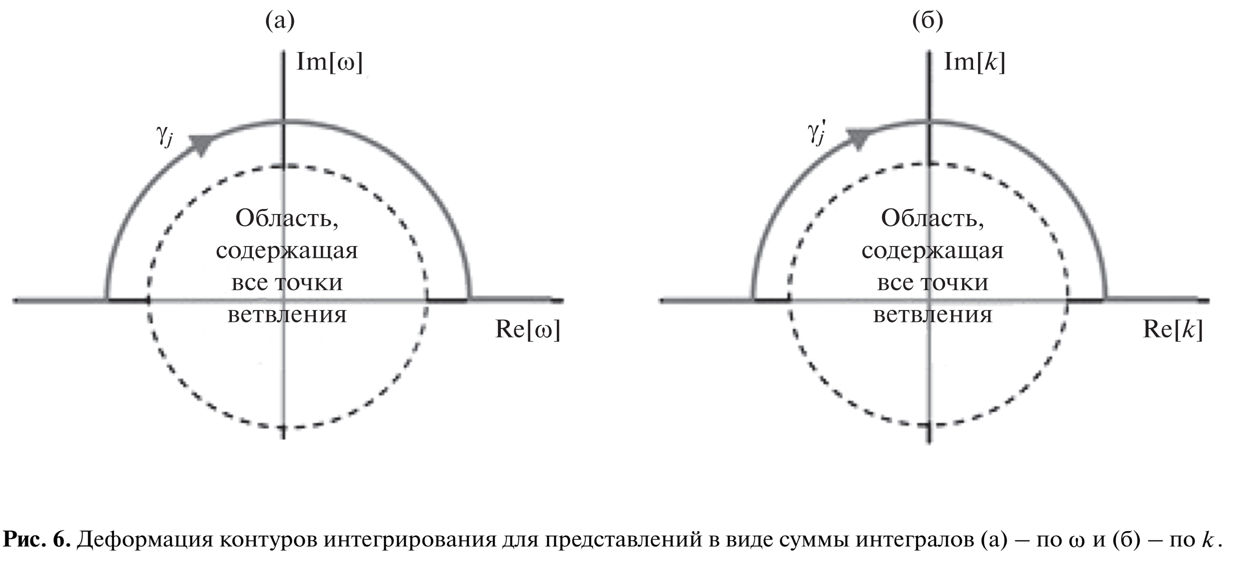



**Рис. 6.** Деформация контуров интегрирования для представлений в виде суммы интегралов (а) – по $\omega$ и (б) – по $k$.

$\gamma_j'$ (рис. 6б), расположенных на всех $2N$ листах поверхности $R'$.

Рассмотрим поведение экспоненциального множителя в (29) при $|k| \to \infty$. Применяя (47), получаем

$$e^{ikx-i\omega t} \to e^{ik\left(x\pm t\sqrt{\lambda_j}\right)}, \quad |k| \to \infty. \tag{49}$$

Положим $\sqrt{\lambda_j} > 0$. Тогда для действительных положительных $x$, $t$ и $\sqrt{\lambda_j}$ и $k \in \gamma_j'$ все интегралы с экспоненциальным множителем

$$e^{ik\left(x+t\sqrt{\lambda_j}\right)}$$

равны нулю в соответствии с леммой Жордана. Тогда среди $2N$ контуров $\gamma_j'$ остаются только $N$ контуров с экспоненциальным множителем

$$e^{ik\left(x-t\sqrt{\lambda_j}\right)}.$$

Рассмотрим отображение $k \to \omega$ (образованное функцией $\omega(k)$) для $k$, движущемуся вдоль некоторого из оставшихся контуров $\gamma_j'$. На этом контуре

$$\omega \approx k\sqrt{\lambda_j}.$$

Из этой формулы следует, что если контур, вдоль которого изменяется $k$, представляет собой полуокружность на $k$-плоскости, то соответствующие $\omega$ также образуют полуокружность в $\omega$-плоскости (радиус которой в $\sqrt{\lambda_j}$ раз больше). Очевидно, последние полуокружности можно деформировать в контуры $\gamma_j$, изображенные на рис. 6а.

Используя равенство для подынтегральных функций, полученное ранее, получаем, что выражения (27) и (29) равны при $x > 0$ и $t > 0$.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Волновод достаточно произвольной природы приближенно описывается матричным уравнение Клейна–Гордона, т.е. считается, что его поперечное сечение дискретизовано. Кроме того, предполагается, что сечение волновода компактно и отсутствует приток/отток энергии.

Выписываются интегральные представления поля в волноводе (27) и (29), а также дисперсионное уравнение (24). Интегральные представления поля интерпретированы как контурные интегралы от многозначных функций по соответствующим римановым поверхностям, а также как контурные интегралы непосредственно по дисперсионной диаграмме волновода. Выведены некоторые свойства дисперсионного уравнения. Показано, что представления (27) и (29) могут быть преобразованы одно в другое путем особой деформации пачки контуров.

Предполагается, что результаты работы могут быть распространены на волноводы с континуальным описанием, но этот вопрос требует дополнительного исследования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-29-06048.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Finnveden S.* Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method // J. Sound Vib. 2004. V. 273. № 1–2. P. 51–75.
2. *Duhamel D., Mace B.R., Brennan M.J.* Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures // J. Sound Vibr. 2006. V. 294. № 1–2. P. 205–220.
3. *Zhang S., Fan W.* An efficient semi-analytical formulation for the Lamb-like waves in layered waveguides based on global discretization // Computers and Structures. 2021. V. 249. P. 106514.
4. *Aalami B.* Waves in prismatic guides of arbitrary cross section // J. Appl. Mech. 1973. V. 40. № 4. P. 1067–1072.
5. *Sabiniarz P. and Kropp W.* A waveguide finite element aided analysis of the wave field on a stationary tyre, not in contact with the ground // J. Sound Vibr. 2010. V. 329. № 15. P. 3041–3064.
6. *Finnveden S., Fraggstedt M.* Wavegudie finite elements for curved structures // J. Sound Vibr. 2008. V. 312. № 4–5. P. 644–671.
7. *Bobrovnitsky Y.I.* Impedance theory of wave propagation on infinite periodic structures // J. Sound Vibr. 2022. V. 525. P. 116801.
8. *Sumbatyan M.A., Scalia A.* Equations of mathematical diffraction theory. CRC Press, 2004.
9. *Вовк А.Е.,Гудков В.В.* К вопросу о нормальных волнах в плоском твердом слое // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 1. С. 23–30.
10. *Mindlin R.D.* 11th Annual Symposium on Frequency Control. Mathematical theory of vibrations of elastic plates, 1957.
11. *Вовк А.Е., Гудков В.В., Левченкова Т.В., Тютекин В.В.* Нормальные волны твердого прямоугольного волновода // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 3. С. 356–363.
12. *Randles P.W., Mlklowitz J.* Modal representation for the high-frequency response of elastic plates // Int. J. Solids Structures. 1971. V. 7. № 8. P. 1031–1055.
13. *Shanin A.V.* Precursor wave in a layered wavegudie // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. № 1. P. 346–356.
14. *Shanin A.V., Knyazeva K.S., Korolkov A.I.* Riemann surface of dispersion diagram of a multilayer acoustical waveguide // Wave Motion. 2018. V. 83. P. 148–172.

15. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Т. 2. 4-е изд. СПб: Лань, 2004.

16. *Pham F.* Singularities of integrals. Homology, hyperfunctions and microlocal analysis. Springer Science & Business Media, 2011.

17. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Sommerfeld-type integrals for discrete diffraction problems // Wave Motion. 2020. V. 97. P. 102606.

18. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction by a Dirichlet right angle on a discrete planar lattice // Quarterly of Applied Mathematics. 2022. V. 80. № 2. P. 277–315.

19. *Shestopalov V.P., Shestopalov Y.V.* Spectral theory and excitation of open structures. The Institution of Electrical Engineers, 1996.

20. *Korolkov A.I., Shanin A.V., Kniazeva K.S.* Asymptotical study of two layered discrete waveguide with a weak coupling // Proc. INTERNOISE 2020. — 2020.

**EDN:** YESDBC
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 373–384*

## НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

*УДК 534.222.2;551.463.2*

# ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА ПУЗЫРЬКАХ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ СПЕКТРОСКОПИИ


**В. А. Буланов[a], *, Е. В. Соседко[a], ****
*[a]Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия*
**e-mail: bulanov@poi.dvo.ru*
***e-mail: s_kat@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2022 г.
После доработки 25.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Показана возможность использования нестационарного и нелинейного рассеяния звука для диагностики пузырьков в жидкости. Нестационарное рассеяние звука возникает вследствие переходных процессов раскачки пузырьков под действием акустических импульсов. Ранее оно использовалось для спектроскопии пузырьков в морской воде с применением параметрических излучателей. Переходные процессы являются основой когерентной раскачки собственных колебаний пузырьков высокочастотными фазоманипулированными импульсами, которая реализуется при определенных соотношениях между величинами высокой и низкой, резонансной для пузырька, частоты, задаваемой фазовой манипуляцией в импульсе. Показано, что нелинейное рассеяние высокочастотных импульсов на разностных частотах при монотонной функции распределения пузырьков по размерам $g(R)$ определяется в основном пузырьками, резонансными на накачке, а не на разностной частоте, вне зависимости от длительности импульса. Применение нестационарного нелинейного рассеяния оправдано в случае немонотонного распределения пузырьков по размерам. Нестационарная нелинейная спектроскопия пузырьков возможна при условии, что частота накачки соответствует пузырькам на ниспадающей ветви $g(R)$ при малых размерах, а разностная частота соответствует большим пузырькам по другую сторону от максимума функции $g(R)$. Показано, что применение нелинейного нестационарного рассеяния на встречных пучках позволит проводить дистанционную спектроскопию пузырьков в жидкости, образующихся в природных и технологических процессах, и проводить корректные оценки газосодержания в пузырьковых структурах.

*Ключевые слова:* нелинейное, нестационарное, рассеяние звука, пузырьки
**DOI:** 10.31857/S0320791922040025

## 1. ВВЕДЕНИЕ

С пузырьками различного происхождения приходится сталкиваться в разных жидких средах и процессах: в технологических процессах, при утечке из подводных газопроводов, в охлаждающих жидкостях высокотемпературных установок, в подводных газовых выбросах из морского дна вблизи газогидратных месторождений и т.д. Во всех случаях актуальным является проведение спектроскопии пузырьков в жидкости [1–5], общего газосодержания в жидких средах [6, 7] и корректных оценок акустических характеристик пузырьковых структур [1, 2].

Акустическая диагностика пузырьков в жидкости возникла благодаря известному свойству пузырьков, обладающих резонансным характером рассеяния и поглощения звука. В этом направлении проводилось много работ в 1960–70-х гг. [3, 8–10]. Тем не менее, оставались вопросы разделения вклада пузырьков от вклада других неоднородностей.

Одна из первых работ [11], которую можно отнести к проблеме диагностики пузырьков, относилась к нелинейной генерации гармоник на пузырьке под воздействием внешнего акустического поля. Нелинейное рассеяние звука обусловлено высокой нелинейностью при монопольных колебаниях пузырьков в воде [1, 2]. Применение нелинейного рассеяния звука для задач диагностики пузырьков в жидкости было продемонстрировано еще в 1980-х гг. [12–15] и представлено в обобщающих монографиях [1, 2]. Были получены решения для стационарных нелинейных колебаний пузырьков и их излучения в воду [1, 2].

Особенностью цитированных работ является использование стационарного нелинейного рассеяния, которое дает информацию о наличии пузырьков, но при этом не всегда удается осуществить спектроскопию пузырьков в широком интервале размеров. Ниже рассмотрено проявление эффектов нестационарности при нелинейном рассеянии акустических импульсов, которое позволяет разделить вклады откликов пузырьков на различных комбинационных частотах.

Почти одновременно с исследованиями по нелинейной диагностике пузырьков начали развиваться работы по применению переходных процессов при линейном рассеянии акустических импульсов для задач разделения вклада пузырьков от вклада других неоднородностей [16]. Основные результаты такого метода представлены в работе [17]. Более сложные эффекты нестационарного рассеяния звука для задач диагностики пузырьков в морской воде обсуждены в монографии [18].

Решение проблемы диагностики пузырьковых структур в жидкости имеет важное практическое значение для океанологических исследований. В качестве примера можно привести новые объекты, открытые сравнительно недавно в океане, — подводные газовые факелы (ГФ), образованные газовыми пузырьками, выходящими из дна моря [6, 7, 19]. Такие объекты повсеместно встречаются в районах выброса газов как из толщи донных осадков в различных районах океана, так и в районах выгрузки газа при таянии вечной мерзлоты в арктических морях, и к ним проявляется все больше внимания [19]. Стандартное применение рассеяния звука позволяет обнаружить наличие ГФ в море, но не позволяет в полной мере корректно оценить функцию распределения пузырьков по размерам в факеле и поэтому возникают неопределенности с оценкой мощности выброса газов из моря. Применение нестационарного и нелинейного рассеяния звука для диагностики пузырьков в жидкости может быть использовано для получения информации о структуре и динамике подводных газовых факелов, образованных выходом газа из морского дна [6, 19, 20].

## 2. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЛИНЕЙНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА И ДИАГНОСТИКА ПУЗЫРЬКОВ

Вначале обсудим эффект нестационарности рассеяния звука в линейном случае. Впервые нестационарное рассеяние звука использовалось для изучения распределения пузырьков в приповерхностных слоях морской воды [16, 17]. Указанный эффект в случае пузырьков возникает вследствие переходных процессов раскачки радиально симметричных резонансных пульсаций пузырьков, происходящих под действием акустических импульсов. Суммарный коэффициент рассеяния звука от единицы объема среды $m_V$ при наличии резонансных пузырьков на данной частоте $m_V^{(b)}$ и других нерезонансных включений $m_V^{(s)}$ можно записать в виде

$$m_V = m_V^{(b)} + m_V^{(s)} = \int_{\{R\}} \left[ \left|f^{(b)}\right|^2 g^{(b)}(R) + \left|f^{(s)}\right|^2 g^{(s)}(R) \right] dR. \quad (1)$$

Здесь $f^{(b)}$ и $f^{(s)}$ — амплитуды монопольного (объемного) стационарного рассеяния звука на пузырьках и нерезонансных включениях, соответственно, $g(R)$ — функция распределения по размерам, $N = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} g(R)dR$ — количество включений в единице объема. Выражение для $f^{(b)}$ имеет следующий вид

$$f^{(b)} = R \Big/ \left\{ \left[ \left( R_\omega^2 / R^2 \right) - 1 \right]^2 + \delta^2 \right\}, \quad R_\omega = (1/\omega)\sqrt{3\gamma P_0/\rho}, \quad (2)$$

где $R_\omega$ — размер резонансного пузырька на циклической частоте $\omega = 2\pi f$, при этом резонансная циклическая частота пузырька радиуса $R$ равна $\omega_0 = (1/R)\sqrt{3\gamma P_0/\rho}$, $\delta$ — постоянная затухания колебаний пузырька радиуса $R$ на частоте $\omega$, $P_0$ — гидростатическое давление в жидкости, $\gamma$ — постоянная адиабаты газа в пузырьке, для воздуха $\gamma \approx 1.4$. Учет переходных процессов при раскачке пузырька на резонансе приводит к зависимости $m_V^{(b)}$ от длительности импульса $\tau$, которая имеет вид

$$m_V^{(b)}(\tau) = m_V^{(b)}(\infty) F(\tau/\tau_0), \quad m_V^{(b)}(\infty) = (\pi/2) R^3 g^{(b)}(R)/\delta(R), \quad (3)$$

$$F(\tau/\tau_0) = 1 - \left[1 - \exp(\tau/\tau_0)\right]/(\tau/\tau_0), \quad \tau_0 = 1/\omega\delta = Q/\omega. \quad (4)$$

Здесь $m_V^{(b)}(\infty)$ — коэффициент стационарного резонансного рассеяния на пузырьках. Функция $F(\tau/\tau_0)$ определяет эволюцию сечения нестационарного резонансного рассеяния, поэтому помогает на практике отделять резонансное рассеяние от нерезонансного фона, а также определять добротность пузырьков на различных частотах по формуле (4). Применение перестраиваемых по частоте направленных излучателей позволяет реализовать нестационарную акустическую спектроскопию пузырьков [18] в виде:

$$W^2(\tau) = \left(\pi c \theta^2/2\right)\left[m_V^{(b)}(\tau) + m_V^{(s)}\right], \quad W(\tau) = \left(1/\sqrt{\tau}\right)\left(P_s/P_i\right), \quad (5)$$

$$g^{(b)}(R) = 4\delta(R)\left[W^2(\infty) - W^2(0)\right] \Big/ \left(\pi^2 c \theta^2 R^3\right). \quad (6)$$

Здесь $P_i$ и $P_s$ — давление в падающей на пузырек и рассеянной волнах. Коэффициент рассеяния на остальных включениях можно определить по формуле:

$$m_V^{(s)} = 2W^2(0) \Big/ \left(\pi^2 c \theta^2 R^3\right). \quad (7)$$

Обозначения $W(\infty)$ и $W(0)$ отвечают условиям $\tau \gg \tau_0$ и $\tau \ll \tau_0$ соответственно. Таким образом,

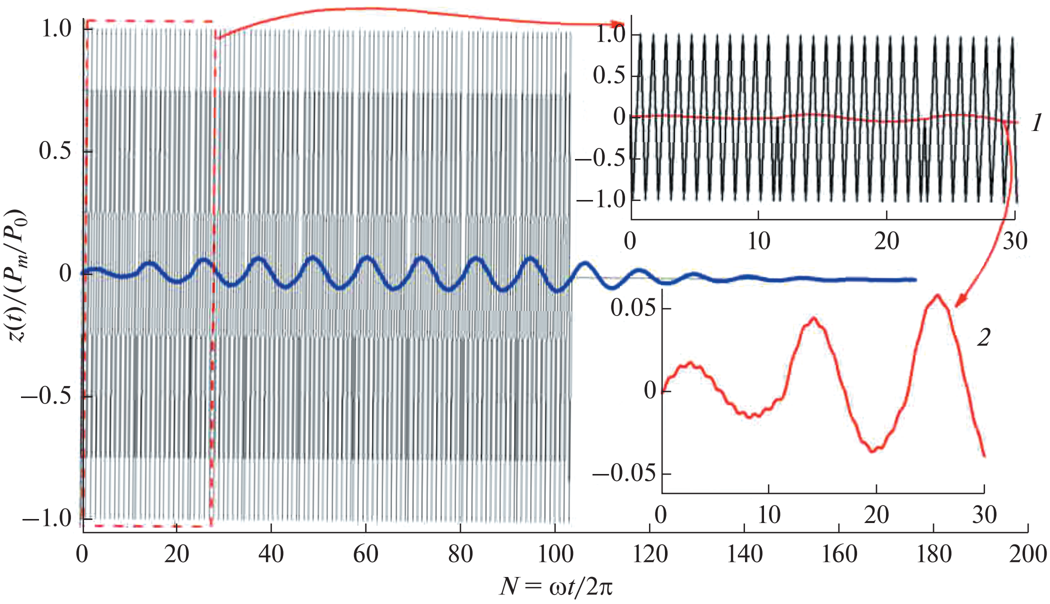



**Рис. 1.** Низкочастотные когерентные колебания при воздействии ВЧ ФМ накачкой ($f$ = 150 кГц): амплитуда пульсаций пузырьков, резонансных на частоте 13 кГц, $N = \omega t/2\pi$ – количество периодов на частоте накачки.

функция распределения пузырьков по размерам может быть определена по данным обратного линейного рассеяния акустических импульсов большой и малой длительности.

## 3. АКУСТИЧЕСКАЯ НИЗКОЧАСТОТНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Другим нестационарным механизмом генерации собственных колебаний пузырьков в переходных процессах является механизм раскачки таких колебаний высокочастотными (ВЧ) фазоманипулированными импульсами (ФМ). Суть механизма заключается в периодическом возбуждении ФМ импульсами осциллятора на собственной частоте $\omega_0$, причем период возбуждения должен быть меньше времени затухания собственных колебаний осциллятора на частоте $\omega_0$, которая определяется их добротностью. Здесь необходимым условием для поддержания низкочастотных (НЧ) колебаний ФМ внешней силой является: 1) кратность соотношений между частотами $\omega_0$ и $\omega$; 2) длительность интервала $T$ между последующими возбуждаемыми ФМ импульсами, определяющая НЧ колебания, не больше периода ВЧ, умноженного на величину добротности осциллятора [21]. Рассмотрим задачу подробнее.

Пусть пузырек подвержен действию ФМ импульсов, как показано на рис. 1, внешнее давление для которых можно записать в виде

$$P_i(t) = P_m \operatorname{Re}\left[iB(t,\tau)e^{-i\omega t}\right],$$
$$B(t,\tau) = \sum_{k=0}^{K_\tau} e^{i\pi k}[\theta(t-kT) - \theta(t-(k+1)T)], \tag{8}$$

где $T$ – период действия импульса давления с одинаковой фазой, $K_\tau = \tau/T$ – количество периодов смены фазы накачки за общую длительность импульса давления $\tau$.

Из уравнения Рэлея с учетом сжимаемости жидкости получаем в линейном приближении следующее уравнение для $z^{(1)}(t) = (R(t) - R_0)/R_0$:

$$\ddot{z}^{(1)} + 2\mu\dot{z}^{(1)} + \omega_0^2 z^{(1)} = F^{(1)}(t),$$
$$F^{(1)}(t) = -\omega_0^2\left(\tilde{P}(t) + R\dot{\tilde{P}}(t)/c\right), \tag{9}$$

где $\dot{z}^{(1)} = dz^{(1)}/dt$, $\dot{\tilde{P}} = d\tilde{P}/dt$. Для больших пузырьков с размерами $R > R_\sigma = 2\sigma/P_0$ имеем $\tilde{P}(t) \approx P_i(t)/3\gamma P_0$, $\sigma$ – коэффициент поверхностного натяжения, $c$ – скорость звука в жидкости, $\mu = 2\eta/\rho R_0^2 + \omega_0^2 R_0/c$ – декремент затухания, $\eta$ – коэффициент динамической вязкости. Рассмотрим решение задачи о линейных колебаниях пузырька с помощью Фурье разложения. Спектр Фурье внешней силы (9) имеет вид

$$f_p = \frac{f_m}{2\pi i(p-\omega)}\times$$
$$\times\sum_k e^{i(k-1/2)\pi}\left[e^{i(p-\omega)(k+1)T} - e^{i(p-\omega)kT}\right], \tag{10}$$
$$f_m = P_m\omega_0^2/3P_0\gamma = P_m/\rho R^2.$$

Тогда спектр колебаний амплитуды $z_p$ может быть записан в виде

$$z_p = \frac{f_m\left(1 - ik_pR\right)}{2\pi i\left(p-\omega\right)\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)} \times \\ \times \sum_k e^{i(k-1/2)\pi}\left[e^{i(p-\omega)T}-1\right]e^{i(p-\omega)kT}, \tag{11}$$

где полюсы $p_1 = \tilde{\omega}_0$ и $p_2 = -\tilde{\omega}_0^*$, $\tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 - i\delta)$. Выполнив обратное преобразование Фурье, находим $z(t)$ с разделением частот в виде

$$z(t) = z_\omega(t) + z_{\omega_0}(t), \tag{12}$$

$$z_\omega(t) = f_m \operatorname{Re}\left(i\frac{(1+ik_\omega R)}{q(\omega)}B(t,\tau)e^{-i\omega t}\right), \tag{13}$$

$$z_{\omega_0}(t) = \operatorname{Re}\left[A_{-\omega_0}e^{-i\omega_0 t}B_+(t,\tau) - A_{\omega_0}e^{i\omega_0 t}B_-(t,\tau)\right], \tag{14}$$

$$A_{-\omega_0}(t) = -i\frac{f_m}{2\omega_0}\frac{(1+ik_{\omega_0}R)}{\omega-\tilde{\omega}_0}, \\ A_{\omega_0}(t) = -i\frac{f_m}{2\omega_0}\frac{(1-ik_{\omega_0}R)}{\omega+\tilde{\omega}_0^*}, \tag{15}$$

$$B_\pm(t,\tau) = \sum_{k=0}^{K_\tau} e^{ik(\pi\pm\omega_0 T-\omega T)}e^{-\delta\omega_0(t-kT)} \times \\ \times\left[\theta(t-kT) - e^{\delta\omega_0 T}e^{\pm i\omega_0 T - i\omega T}\theta(t-(k+1)T)\right]. \tag{16}$$

Из формул (12)–(16) видно, что осциллятор раскачивается на частоте внешней силы $\omega$ и нестационарно возбуждается на собственной частоте $\omega_0$. Колебания на частоте внешней силы по существу являются стационарными колебаниями и отличаются от амплитуды внешней силы фактически лишь резонансным множителем $q(\omega) = (\omega - \tilde{\omega}_0)(\omega + \tilde{\omega}_0^*) = = \omega^2 - {\omega_0}^2 - i{\omega_0}^2\delta$. Совершенно иное положение имеется для колебаний с собственной частотой $\omega_0$. Здесь при произвольном соотношении между периодом накачки $2\pi/\omega_0$ и интервалом времени между последующими возбуждаемыми ФМ импульсами $T$ не происходит нарастания колебаний, а напротив, их амплитуда при суммировании колебаний со случайными фазами стремится к нулю. Однако при одновременном соблюдении условий

$$\omega_0/\omega = l/(2m+1+l),\quad \omega_0 = \pi l/T, \\ \omega = \pi(2m+1+l)/T, \tag{17}$$

которые при $l = 1$ имеют вид

$$\omega_0/\omega = 1/2(m+1),\quad \omega_0 = \pi/T, \\ \omega = 2\pi(m+1)/T = 2(m+1)\omega_0, \tag{18}$$

можно получить такие равенства: $\exp[i(\pi + \omega_0 T - \omega T)] = \exp[i(\pi - \omega_0 T - \omega T)] = 1$, $\exp[i(\omega_0 - \omega)T] = \exp[-i(\omega_0 + \omega)T] = -1$. В этом случае происходит суммирование колебаний в фазе и в итоге получаем нарастание колебаний на резонансных частотах.

Выражения существенно упрощаются в случае большого разнесения частот, $\omega \gg \omega_0$, что наиболее интересно для практических приложений, тогда для $z(t)$ получаем выражения вида [18]

$$z(t) = z_\omega(t) + z_{\omega_0}(t) = \frac{P_m}{3\gamma P_0}\times \\ \times\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 B(t,\tau)\sin(\omega t) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)B_0(t,\tau)\sin(\omega_0 t)\right], \tag{19}$$

$$B_0(t,\tau) = \sum_{k=0}^{K_\tau} e^{-\delta\omega_0(t-kT)}\times \\ \times\left[\theta(t-kT) + e^{\delta\omega_0 T}\theta(t-(k+1)T)\right], \tag{20}$$

из которых видно, что вынужденные ВЧ колебания $z_\omega(t)$ осуществляются синфазно с внешней силой, полностью повторяя ее фазовую модуляцию, но колебания на собственной НЧ частоте $z_{\omega_0}(t)$ имеют в $\omega/\omega_0$ раз большую амплитуду по сравнению с ВЧ колебаниями. Функцию $B_0(t,\tau)$ при замене суммы при больших $k$ интегралом можно приближенно оценить в виде

$$B_0(t,\tau) = -\frac{2}{\delta\omega_0 T}[\Phi(t) - \Phi(t-\tau)], \\ \Phi(t) = \theta(t)(1 - e^{-\omega_0\delta t}). \tag{21}$$

Окончательно $z_{\omega_0}(t)$ запишется в виде

$$z_{\omega_0}(t) = -\frac{P_m}{3\gamma P_0}\frac{2}{\delta\omega_0 T}\times \\ \times[\Phi(t) - \Phi(t-\tau)]\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sin(\omega_0 t). \tag{22}$$

Из (20)–(21) видно, что амплитуда колебаний на собственной частоте пузырька устанавливается в течение времени $\tau_0 = 1/\delta\omega_0$ и достигает стационарной амплитуды, при $l = 1$ равной $z_{m\omega_0} = (2/3\gamma\,\delta\pi)(\omega_0/\omega)(P_m/P_0)$.

Необходимо отметить, что при воздействии непрерывного НЧ резонансного воздействия без фазовой манипуляции амплитуда $z_{m0}$ была бы равна $z_{m0} = (1/3\gamma\delta)(P_m/P_0)$, т.е. амплитуда оказывается в $(\pi/2)(\omega/\omega_0)$ раз выше, чем при ФМ импульсном возбуждении. Вместе с тем здесь следует подчеркнуть практическую выгоду импульсного возбуждения осциллятора ВЧ накачкой, когда достаточно просто, изменяя интервалы времени между сменой фазы ФМ импульсов, можно получать весьма высокие амплитуды НЧ колебаний без изменения ВЧ.

На рис. 1 приведены зависимости $z(t)$ для газовых пузырьков в воде при воздействии импульсной накачки [21]. Из рис. 1 видно, что нарастание резонансных колебаний при включении поля и их спад после выключения поля происходит в течение промежутка времени, определяемого добротностью.

### *Рассеяние ФМ импульсов*

Рассмотрим рассеяние ФМ импульсной накачки на газовом пузырьке. Для Фурье-компонент можно написать выражение для давления на поверхности пузырька $P_{Rp} = -\rho R^2 p^2 z_p$, где $z_p$ — спектр колебаний радиуса пузырька, определяемый в виде (11). Взяв обратное Фурье-преобразование, при соблюдении условий когерентной раскачки колебаний (17) и (18) и в случае большого разнесения частот, $\omega \gg \omega_0$, получаем

$$P_R(t) = P_{R\omega}(t) + P_{R\omega_0}(t), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} P_R(t) = P_{R\omega}(t) + P_{R\omega_0}(t) = \\ = P_m\left[B(t,\tau)\sin(\omega t) + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)B_0(t,\tau)\sin(\omega_0 t)\right], \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} P_{R\omega_0}(t) = -P_m\frac{2}{\delta\omega_0 T}\times \\ \times[\Phi(t) - \Phi(t-\tau)]\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sin(\omega_0 t). \end{gathered} \tag{25}$$

Из (25) видно, что амплитуда $P_{R\omega_0}(t)$ рассеянного звука на собственной частоте пузырька устанавливается в течение времени $\tau_0 = 1/\delta\omega_0$ и достигает стационарной амплитуды, при условии $\omega_0 T = \pi$ равной $P_{R\omega_0 m} = P_m/[\delta\pi(m+1)]$.

Необходимо отметить, что при воздействии непрерывного НЧ резонансного воздействия без фазовой манипуляции амплитуда $z_{m0}$ была бы равна $z_{m0} = (1/3\gamma\delta)(P_m/P_0)$, т.е. амплитуда оказывается в $(\pi/2)(\omega/\omega_0)$ раз выше, чем при ФМ импульсном возбуждении. Вместе с тем здесь следует подчеркнуть практическую выгоду импульсного возбуждения осциллятора ВЧ накачкой, когда достаточно просто, изменяя соотношение между ВЧ и НЧ и интервалы времени между сменой фазы ФМ импульсов, можно получать весьма высокие амплитуды колебаний.

### *Акустическая спектроскопия с применением ФМ накачки*

Будем считать, что пузырек в жидкости облучается высоконаправленным ВЧ ФМ сигналом, имеющим угловую ширину характеристики направленности $\theta$. Рассматривая некогерентное сложение рассеянных сигналов от различных пузырьков и вводя функцию распределения пузырьков по размерам $g(R)$, можно определить суммарный квадрат звукового давления, рассеянного совокупностью пузырьков с преобразованием частоты, в виде

$$\begin{gathered} \left|P_{\Sigma\omega_0}(\mathbf{r},t)\right|^2 = \\ = \int d^3\mathbf{r}\int\limits_{R_{\min}}^{R_{\max}}\left|P_{R\omega_0}(t-r/c)\right|^2(R/r)^2 g(R)dR, \end{gathered} \tag{26}$$

где интегрирование осуществляется по “импульсному” объему $dV = \pi r^2\theta^2 c dt/2$. С целью улучшения отношения сигнал/шум на практике прием рассеянных сигналов обычно осуществляется в узкой полосе вблизи некоторой частоты $\omega_0$, что отвечает узкому интервалу резонансных радиусов пузырьков. Проведя интегрирование по указанному узкому интервалу радиусов и по времени, равному длительности импульса $\tau$, что по существу также учитывает усреднение по периоду ВЧ и НЧ поля, получаем следующее выражение для средней по периоду поля величины $\left|P_{\Sigma\omega_0}(\mathbf{r},t)\right|^2$ [18]:

$$\frac{\left\langle\left|P_{\Sigma\omega_0}(\mathbf{r},t)\right|^2\right\rangle}{\left\langle\left|P_i\right|^2\right\rangle} = \frac{\theta^2 c\tau}{2\delta\omega_0 T}g(R)RR_\omega^2 F(\tau/\tau_0), \tag{27}$$

где $F(\tau/\tau_0)$ определяется формулой (4), при этом $\tau_0 = 1/\omega_0\delta$. Из формулы (27) можно определить $g(R)$ в виде

$$\begin{gathered} g(R) = \frac{2\delta\omega_0 T}{\theta^2 c\tau RR_\omega^2 F(\tau/\tau_0)}\frac{\left\langle\left|P_{\Sigma\omega_0}\right|^2\right\rangle}{\left\langle\left|P_i\right|^2\right\rangle} \equiv \\ \equiv \frac{\pi\delta\omega_0 T}{RR_\omega^2 F(\tau/\tau_0)}m_{Vpm}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $R = R_\omega(2m+1)$, $m = 1, 2, \ldots$. Здесь через $m_{Vpm}$ обозначен коэффициент объемного рассеяния ФМ импульсов. В частном случае достаточно длинного импульса с $\tau > \tau_0 = 1/\omega_0\delta$, когда генерация НЧ импульсов достигает стационарного значения, получаем

$$g(R) = \frac{4\delta}{\pi\theta^2 c\tau RR_\omega^2}\frac{\left\langle\left|P_{\Sigma\omega_0\infty}\right|^2\right\rangle}{\left\langle\left|P_i\right|^2\right\rangle}, \quad R_\omega = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}}. \tag{29}$$

Из формул (28), (29) видно, что спектроскопия резонансных включений осуществляется дискретно по радиусам $R = R_\omega(2m+1)$, $m = 1, 2, \ldots$, где управляющим параметром является отношение преобразования частот $(2m+1)$, $m = 1, 2, \ldots$ [21].

В качестве иллюстрации представленных здесь вычислений на рис. 2 приведены наиболее типичные зависимости рассмотренных величин в случае когерентного рассеяния ФМ ВЧ импульсов с преобразованием частоты в НЧ область.

Таким образом, для акустической спектроскопии пузырьков возможно применение ФМ ВЧ импульсов. Преимуществом применения ФМ ВЧ импульсов является возможность весьма простой перестройки низкой частоты для реализации аку-

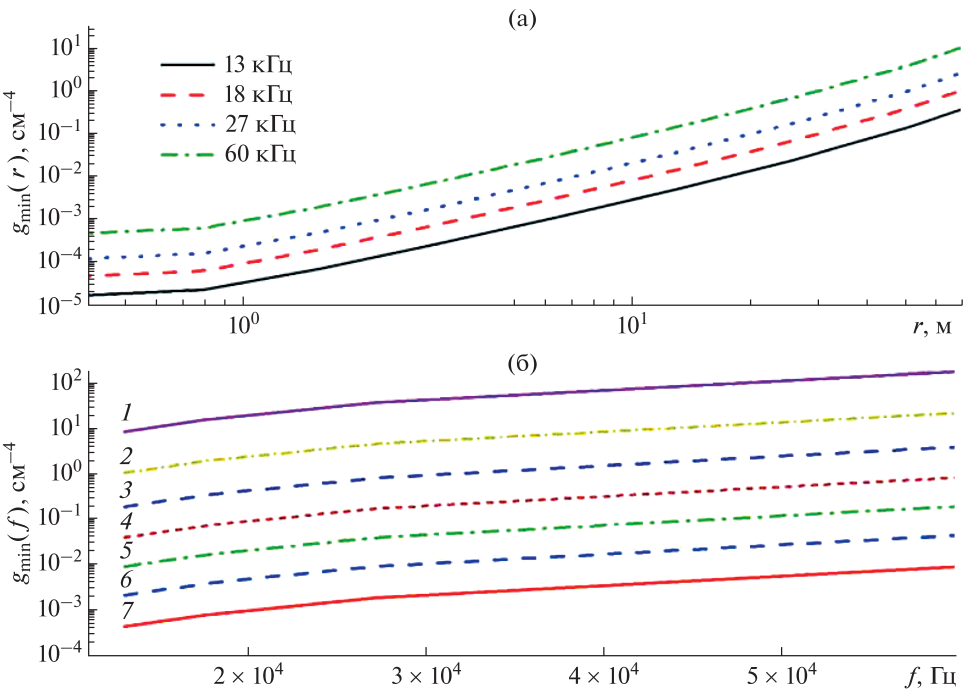



**Рис. 2.** Минимальные значения функции распределения пузырьков по размерам $g_{\min}$, при которых возможно их обнаружение по рассеянию ФМ ВЧ импульсов в зависимости (а) – от расстояния $r$ и (б) – от частоты $f$ на различных расстояниях: *1* – $r$ = 100 м, *2* – $r$ = 50 м, *3* – $r$ = 25 м, *4* – $r$ = 12 м, *5* – $r$ = 6 м, *6* – $r$ = 3 м, *7* – $r$ = 80 см. Частота накачки 150 кГц ($P_m = 10^5$ Па м).

стической спектроскопии при одновременном сохранении узкой характеристики направленности в широком диапазоне частот и сохранением достаточно высокого уровня сигнала на низкой частоте. Важным обстоятельством является повышенная помехозащищенность метода, поскольку излучение осуществляется на высокой частоте и на низкой частоте приема присутствует только полезный сигнал, возникающий на резонансных пузырьках при определенных соотношениях между частотами накачки и собственной частотой пузырьков.

## 4. НЕСТАЦИОНАРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА. КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Нестационарное нелинейное рассеяние звука также как и в линейном случае возникает вследствие переходных процессов раскачки пузырьков под действием акустических импульсов. Обычно рассматривают установившиеся колебания резонансных включений, совершаемые под действием внешнего звукового поля [1, 2, 11–15]. На практике же часто используют короткие акустические импульсы, когда стационарное рассеяние может не успевать устанавливаться. Задачу о нестационарном нелинейном рассеянии наиболее просто можно рассмотреть в квадратичном приближении, для которого удается получить аналитическое решение. Пусть на резонансное включение в жидкости падает акустический бигармонический импульс с давлением $P_a(t)$ вида:

$$P_i(t) = \mathrm{Re}[(P_1 e^{-i\omega_1 t} + P_2 e^{-i\omega_2 t})e^{-i\pi/2} H(t,\tau)],\quad H(t,\tau) = \theta(t) - \theta(t-\tau). \tag{30}$$

Радиус включения $R$ будем считать малым по сравнению с длиной волны звука на всех частотах, а изменения радиуса малыми по сравнению с равновесным радиусом $R_0$

$$R(t) = R_0(1 + z^{(1)} + z^{(2)}),\quad \left|z^{(1)}\right| \ll 1,\ \left|z^{(2)}\right| \ll 1, \tag{31}$$

где $z^{(1)}(t)$ и $z^{(2)}(t)$ описывают пульсации включения в первом и втором приближениях. Уравнение для $z^{(1)}(t)$ представлено выше уравнением (9). Уравнение для $z^{(2)}(t)$ получаем в квадратичном приближении из уравнения Рэлея с учетом сжимаемости жидкости [18]

$$\ddot{z}^{(2)} + 2\mu\dot{z}^{(2)} + \omega_0^2 z^{(2)} = F^{(2)}(t), \tag{32}$$

$$F^{(2)}(t) = -\left[\ddot{z}^{(1)}z^{(1)} + \frac{3}{2}\dot{z}^{(1)2} - 2\mu\dot{z}^{(1)}z^{(1)} - \omega_0^2\frac{3\gamma+1}{2}z^{(1)2}\right] + 2\frac{R_0}{c}\dot{z}^{(1)}\left[\dot{z}^{(1)} + \omega_0{}^2\frac{3\gamma+1}{2}z^{(1)}\right]. \tag{33}$$

Находим решения методом Фурье. Частотный спектр малых пульсаций пузырьков $z_q^{(1)}$ определяется следующей формулой

$$z_q^{(1)} = \frac{\omega_0{}^2\left(1 - ik_qR\right)}{Q_{\omega_0,q}}\tilde{P}_{1,2}D_{q,\omega},$$
$$D_{q,\omega}(\tau) = \frac{\exp\left[i\left(q-\omega\right)\tau\right]-1}{2\pi i\left(q-\omega\right)}, \tag{34}$$

где $\tilde{P}_{1,2} = P_{1,2}/(3\gamma P_0)$, резонансный коэффициент $Q_{\omega_0,q}$ записывается в виде $Q_{\omega_0,q} = \omega_0{}^2 - q^2 + 2i\mu q$. Спектр $z_q^{(2)}$ следует из (32) в виде $z_q^{(2)} = -F_q^{(2)}/Q_{\omega_0,q}$, в итоге имеем

$$z_q^{(2)} = \frac{\omega_0^4}{Q_{\omega_0,q}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[s^2 + \frac{3}{2}(q-s)s + \omega_0^2\frac{3\gamma+1}{2} - 2\mu is\right]\times$$
$$\times\frac{\left(1-ik_qR\right)}{Q_{\omega_0,q-s}Q_{\omega_0,s}}D_{q-s,\omega}D_{s,\omega}\tilde{P}_{1,2}^2ds. \tag{35}$$

Примем упрощающее условие, что линейные пульсации включения на высоких частотах накачки $\omega_1$ и $\omega_2$ в течение действия импульса длительности $\tau$ успевают установиться, т.е. положим $\omega_{1,2}\tau\delta > 1$. Спектральная линия на накачке будет узкой, поэтому получаем следующие выражения для $z^{(1)}(t)$:

$$z_{1,2}^{(1)}(t) = -\frac{\xi_{1,2}^2}{\xi_{1,2}^2 - 1 - i\delta}\left(\tilde{P}_1e^{-i\omega_1 t} + \tilde{P}_2e^{-i\omega_2 t}\right)H(t,\tau),$$
$$\xi_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2}. \tag{36}$$

Эффекты нестационарности окажутся выражены только на разностной частоте, близкой к собственной частоте пузырька. Обратное Фурье преобразование $z^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_q^{(2)}\exp(-iqt)dq$ при замене $D_{s,\omega} \to \delta(s-\omega)$, $\omega \leftrightarrow \omega_1, \omega_2$ в уравнении (35) позволяет получить общее выражение для $z^{(2)}(t)$, в том числе, и на разностной частоте $z_\Omega(t)$ в виде:

$$z_\Omega(t) = \mathrm{Re}\{[\Phi_\Omega(t) - e^{-i\Omega\tau}\Phi_\Omega(t-\tau)]B_1\tilde{P}_1\tilde{P}_2\}, \tag{37}$$

$$\Phi_\Omega(t) \approx \frac{\theta(t)}{q_\Omega}\left\{e^{-i\Omega t} - \frac{\Omega}{\omega_0}e^{-i(1-i\delta_\Omega)\omega_0 t}\right\},$$
$$q_\Omega = \xi^2 - \eta^2 - i\xi^2\delta_\Omega, \tag{38}$$

$$B_1 = \frac{[1+\eta-\xi^2(3\gamma+1)]\xi^4}{q_1q_2^*},$$
$$q_1 = \xi^2 - (1+2\eta) - i\delta,\quad q_2 = \xi^2 - 1 - i\delta, \tag{39}$$

где $\xi \approx \xi_2$, $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, $\eta = \Omega/\omega_2$.

При больших длительностях импульса $\tau > \tau_\Omega = 1/\Omega\delta_\Omega$, из (37)–(39) следует выражение для амплитуды пульсаций пузырьков различных радиусов на разностной частоте $\Omega$ в установившимся режиме:

$$z_\Omega = \frac{[1+\eta-\xi^2(3\gamma+1)]\xi^4}{q_1q_2^*q_\Omega}\tilde{P}_1\tilde{P}_2 \approx$$
$$\approx\begin{cases} -\dfrac{1}{3\gamma\delta^2}\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^2, & R = R_\omega,\ (\zeta = 1), \\ i\dfrac{\eta^2}{(3\gamma)^2\delta_\Omega}\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^2, & R = R_\Omega,\ (\zeta = \eta). \end{cases} \tag{40}$$

При малых длительностях импульса, $\tau \ll \tau_\Omega$, для частот $\Omega$, близких $\omega_0$, следует

$$z_\Omega(t) \propto \Phi_\Omega(t) \propto (1 - e^{-\delta_\Omega\Omega t}) \underset{t\to 0}{\to} 0, \tag{41}$$

что свидетельствует о малых амплитудах пульсаций пузырьков на частоте $\Omega$ при малых $\tau$.

Величину давления в акустической волне разностной частоты, генерируемой при нелинейном рассеянии звука на пузырьке, можно определить при $r \gg \lambda$ выражением $P_s(r,t) = -(\rho/4\pi r)\partial^2[V(t-r/c)]/\partial t^2$, которое в квадратичном приближении дает величину давления $P_s$ в виде

$$P_s(r,t) = \frac{\rho R^3}{r}\left[\ddot{z}^{(2)} + 2z^{(1)}\ddot{z}^{(1)} + 2(\dot{z}^{(1)})^2\right]_{|t-(r-R)/c}. \tag{42}$$

Ограничиваясь наиболее практически важным случаем рассеяния на разностной частоте $\Omega$ и на собственной частоте пузырька $\omega_0$, имеем следующий результат

$$P_s(r,t) = \frac{R}{r}P_R\left(t - \frac{r-R}{c}\right) = \frac{R}{r}\left(P_{R\Omega} + P_{R\omega_0}\right), \tag{43}$$

$$P_{R\Omega} = \mathrm{Re}\left[\rho R^2\Omega^2\xi^2(B_1(\xi)/q_\Omega)\tilde{P}^2e^{-i\Omega t}H(t,\tau)\right], \tag{44}$$

$$P_{R\omega_0} = \mathrm{Re}\left[\rho R^2\omega^2B_0(\xi)\tilde{P}^2e^{-i\omega_0(1-i\delta)t}\tilde{H}(t,\tau)\right], \tag{45}$$

$$B_0(\xi) = \frac{B_1(\xi)\xi(\xi^2 - 1 - i\delta)}{2(\xi-\eta-i\delta)(4\xi^2 - 1 + i\delta)}, \tag{46}$$

$$\tilde{H}(t,\tau) = \theta(t) - \theta(t-\tau)e^{-i\omega_0(1+i\delta)\tau}e^{-i\Omega t}. \tag{47}$$

В выражение (43) входит две составляющих давления $P_{R\Omega}$ и $P_{R\omega_0}$ соответственно на разностной частоте $\Omega$ и на частоте собственных колебаний пузырька $\omega_0$, возникающих за счет переходных процессов. Из (43)–(47) можно видеть, что при малых длительностях импульса $\tau < \tau_\Omega$ получаем аналогично выражению (41) малую величину амплитуды рассеянного поля $P_{R\Omega}$ на резонансе при $\Omega \approx \omega_0$:

$$P_{R\Omega}(t) \sim (1 - e^{-\delta\omega_0 t})e^{-i\Omega t} \xrightarrow[t \ll 1/\delta\omega_0]{} 0. \quad (48)$$

Таким образом, нелинейное рассеяние звука на резонансных включениях имеет нестационарный участок, который важен при использовании коротких импульсов с длительностями $\tau \ll \tau_\Omega \sim \tau_0 = 1/\delta\omega_0$. Для импульсов с $\tau \gg \tau_0$ получаем известное выражение для рассеянного поля на разностной частоте [1, 14, 18] в виде (44).

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА ДЛЯ СПЕКТРОСКОПИИ ПУЗЫРЬКОВ

Сечение нелинейного рассеяния на одиночном пузырьке $\sigma_{1\Omega}(R)$ (при генерации разностной частоты) можно определить из формулы $\sigma^{(2)}_{1\Omega}(R) = r^2 \left\langle \left|P_s^{(2)}\right|^2 / \left|P_i\right|^2 \right\rangle$, где $\langle ... \rangle$ означает усреднение по времени, а $P_s^{(2)}(\mathbf{r},t)$ определяется в виде (17). При рассеянии на совокупности пузырьков коэффициент нелинейного рассеяния звука единицей объема жидкости $m^{(2)}_{V\Omega} = \int \sigma^{(2)}_{1\Omega}(R) g(R) dR$ имеет вид

$$m^{(2)}_{V\Omega} = m^{(2)}_{V\Omega\omega} + m^{(2)}_{V\Omega\infty} F\left(\tau/\tau_\Omega\right), \quad (49)$$

$$m^{(2)}_{V\Omega\omega} = \frac{\pi^2 (3\gamma + 2)^2 R_\omega{}^3 g(R_\omega)}{2\delta_\omega \left(\delta_\omega{}^2 + \eta^2\right)} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^4 \frac{\left|KP_1\right|^2}{9}, \quad (50)$$

$$m^{(2)}_{V\Omega\infty} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^4 \frac{R^3_\Omega g(R_\Omega)}{\delta_\Omega} \frac{\left|KP_1\right|^2}{9}, \quad (51)$$

где $F\left(\tau/\tau_\Omega\right)$ имеет вид (4). Собственная сжимаемость газового пузырька $K$ в (50) и (51) в общем случае зависит от радиуса и эффектов установления теплового равновесия внутри пузырька, но при достаточно больших размерах пузырьков $K \approx 1/(\gamma P_0)$ [1, 2, 18]. Составляющие суммарного коэффициента рассеяния $m^{(2)}_{V\Omega\omega}$ и $m^{(2)}_{V\Omega\infty}$ имеют различное происхождение. Коэффициент $m^{(2)}_{V\Omega\omega}$ возникает за счет стационарного нелинейного рассеяния при взаимодействии на пузырьке достаточно близких по величине частот накачки $\omega_1$ и $\omega_2$, при этом $m^{(2)}_{V\Omega\omega}$ формируется за счет пузырьков, резонансных на накачке. Коэффициент $m^{(2)}_{V\Omega\infty}$ возникает за счет стационарного нелинейного рассеяния на пузырьках, резонансных на разностной частоте. Из (49)–(51) видно, что на длинных импульсах коэффициент нелинейного рассеяния определяется суммой $m^{(2)}_{V\Omega} = m^{(2)}_{V\Omega\omega} + m^{(2)}_{V\Omega\infty}$, а на коротких импульсах $m^{(2)}_{V\Omega} \approx m^{(2)}_{V\Omega\omega}$, т.е.

$$m^{(2)}_{V\Omega} = \begin{cases} m^{(2)}_{V\Omega\omega} + m^{(2)}_{V\Omega\infty}, \tau \gg \tau_\Omega, \\ m^{(2)}_{V\Omega\omega}, \tau \ll \tau_\Omega. \end{cases} \quad (52)$$

Рассмотрим относительный вклад коэффициентов рассеяния $\beta_\Omega = m^{(2)}_{V\Omega\omega} / m^{(2)}_{V\Omega\infty}$. Оказывается, что результат существенно зависит от вида функции распределения $g(R)$. В случае степенной функции $g(R) \sim R^{-n}$ [3–5, 8–10, 16] имеем $\beta_\Omega \propto (\omega/\Omega)^{n-3}$. В этом случае акустическая спектроскопия пузырьков в широком интервале размеров возможна при сканировании именно разностной частоты только при $n < 3$. Тогда функция распределения $g(R)$ может быть определена в виде

$$g(R_\Omega) = \frac{36\delta_\Omega}{\pi^2} \frac{m^{(2)}_{V\Omega\infty} - m^{(2)}_{V\Omega 0}}{R^3_\Omega (\Omega/\omega)^4} \frac{1}{\left|KP_1\right|^2}. \quad (53)$$

Вместе с тем, на практике наиболее часто встречаются функции распределения $g(R)$ с $n > 3$ [4, 5, 16], и тогда получается, что коэффициент нелинейного рассеяния на разностных частотах все равно определяется пузырьками, резонансными на накачке вне зависимости от длительности импульса, т.е. $m^{(2)}_{V\Omega} \approx m^{(2)}_{V\Omega\omega}$. Таким образом, при чисто степенной функции распределения пузырьков по размерам при условии $n > 3$ вклад нестационарного рассеяния в пелене пузырьков может оказаться незначительным. На разностную частоту будут в основном откликаться только пузырьки, резонансные на накачке, и для определения $g(R)$ потребуется изменение именно частоты накачки (а не разностной частоты) в широких пределах. В этих условиях для реализации спектроскопии нет никакой выгоды от применения коротких сигналов. В любом случае все размеры пузырьков и их концентрация будут определяться только частотой накачки, для которой рассеяние будет стационарным.

Возникает вопрос, в каких случаях тогда возможна спектроскопия пузырьков в широком интервале размеров при нелинейном рассеянии звука на разностных частотах? Для ответа приведем следующие соображения. В последнее время было установлено, что в приповерхностном слое моря функция $g(R)$ имеет максимум при малых $R = R_P$, при этом имеется естественный предел размеров пузырьков при больших $R = R_m$, так что функция $g(R)$ имеет следующий вид [18, 22]:

$$g(R) = A_g R^{-n} \exp\left[-n\left(\frac{R_p}{R} + \frac{R}{R_m}\right)\right]. \quad (54)$$

Здесь показатель степени $n$ и критические размеры $R_p$, $R_m$ являются естественными параметрами, которые следуют из теории Гаррета–Ли–Фармера [23] в инерционном интервале между размерами $R_p$, $R_m$, при этом величина $n \sim 3.3$, хотя на большом фактическом материале при умеренных состояниях моря оказывается $n \sim 3.5$–$3.8$ [17, 18, 24]. Обращаясь вновь к формуле (52), видим, что для случая функции распределения $g(R)$ согласно (54) с максимумом при $R = R_P$ можно получить обрат-

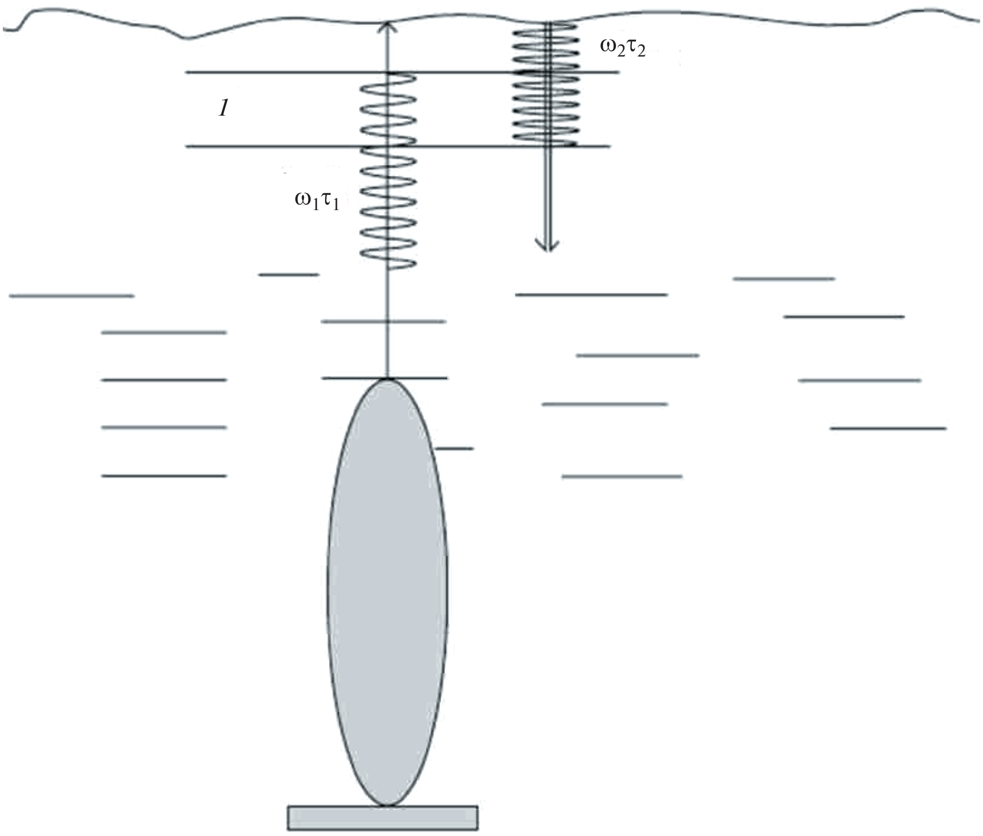



**Рис. 3.** Схема рассеяния звука вблизи поверхности моря на встречных пучках с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$ в области *1*.

ное неравенство, а именно: $m^{(2)}_{V\Omega\Omega\infty} \geqslant m^{(2)}_{V\Omega\omega}$. Оно будет иметь место при условии, что частота накачки соответствует пузырькам на ниспадающей ветви $g(R)$ при $R < R_P$. Именно в этом случае в основном следует учитывать эффекты нестационарного нелинейного рассеяния. По существу, наличие нестационарного нелинейного рассеяния свидетельствует об определенном устройстве функции распределения пузырьков по размерам $g(R)$ – наличии максимума при $R = R_P$ и его расположении между радиусом, резонансным на накачке $R_\omega$ и резонансным на разностной частоте $R_\Omega$, т.е. $R_\omega < R_P < R_\Omega$.

Таким образом, только в случае применения достаточно высокочастотной накачки $\omega > \omega_P$, где $\omega_P$ – резонансная частота пузырьков радиуса $R_P$, возможна акустическая спектроскопия пузырьков, при этом спектр размеров $R_\Omega$, доступный для регистрации, отвечает неравенству $R_\Omega > R_P$.

## 6. МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ

Метод нелинейного рассеяния звука был использован в натурных морских экспериментах с целью установления вида функции распределения пузырьков по размерам и ее зависимости от глубины, скорости ветра и т.п. Эксперимент проводился в заливе Петра Великого Японского моря с глубиной около 40 м. Частота накачки составляла 150 кГц, ширина характеристики направленности составляла около 5°, давление на резонансе составляло величину $P_m = 10^5$ Па м, добротность излучателя 9. Излучатель располагался на глубине 15 м, использовался режим бигармонической накачки, разностная частота составляла величину 16 кГц.

Поверхность моря использовалась для создания отраженного импульса длительности $\tau_1$ с частотой $\omega_1$, который мог бы, как показано на рис. 3, в заданном месте относительно этой поверхности взаимодействовать с прямым импульсом длительности $\tau_2$ с частотой $\omega_2$, излучающимся через определенное время $\Delta t$. При $\Delta t = 0$ взаимодействие между прямым и отраженным импульсами осуществляется на глубинах с $z_{\min} = c\tau_2/2$ до $z_{\max} = c\tau_1/2$. При $\Delta t \neq 0$ величина $z_{\min}$ изменяется и равна $z_{\min} = c(\Delta t + \tau_2)/2$. Таким образом, можно исследовать нелинейное взаимодействие на различных глубинах. Оказалось, что вплоть до размеров пузырьков $R_\omega \approx 20$ мкм, резонансных на частоте 150 кГц, функция $g(R)$ является монотонно

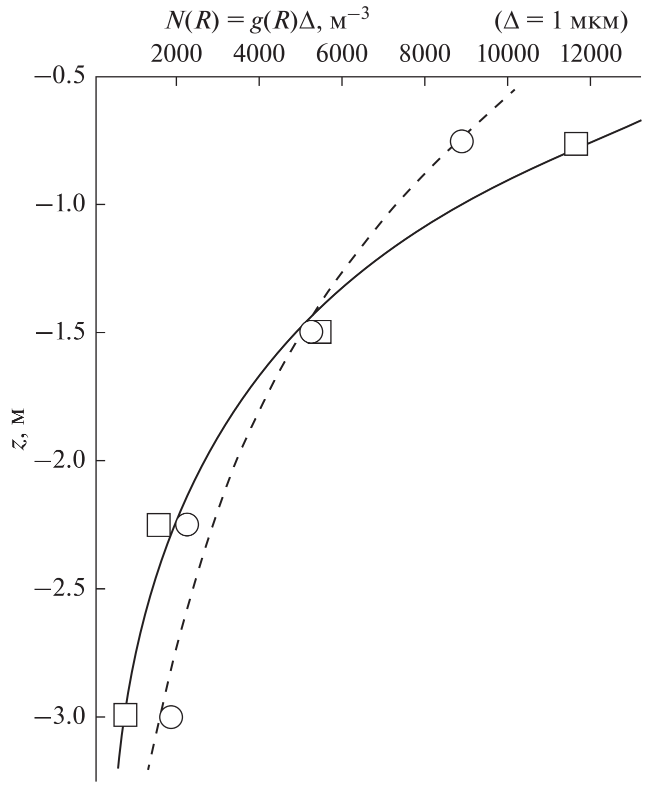



**Рис. 4.** Распределение пузырьков радиуса $R = 20$ мкм по глубине в приповерхностном слое море, полученное на встречных пучках.

возрастающей при уменьшении размеров $R$, что совпадает с результатами, полученными по другой методике с применением параметрических излучателей [16, 17]. На рис. 4 показано типичное распределение пузырьков по глубине, полученное указанным способом. Интервал по времени между измерениями 1 и 2 составлял около 1 часа. При этом было обнаружено экспоненциальное спадание концентрации пузырьков по формуле $N \sim N_0 \exp(-z/L)$. Характерное расстояние спада составляло для кривой 1 величину $L_1 = 0.8$ м, через час для кривой 2 величина спада увеличилась до $L_2 = 1.4$ м.

## 7. ПРИМЕНЕНИЕ РАССЕЯНИЯ НА ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ ВБЛИЗИ ДНА МОРЯ

На рис. 5 представлено 2D изображение функции $m_{V\omega}^{(1)}(r,z)$ мелководных ГФ на частоте 100 кГц и сила звукорассеивающего слоя $Ls(r) = \int_0^{h(r)} m_{V\omega}^{(1)}(r,z)dz$ ($h(r)$ – глубина вдоль трассы) в районе залива Пильтун (Охотское море, Восточное побережье о. Сахалин, район нефтяной платформы “Моликпак”). Из рис. 5 видно мощное рассеяние звука на частоте 100 кГц, но, к сожалению, по экспериментальным одночастотным данным трудно оценить $g(R)$ и интегральный поток газа [18].

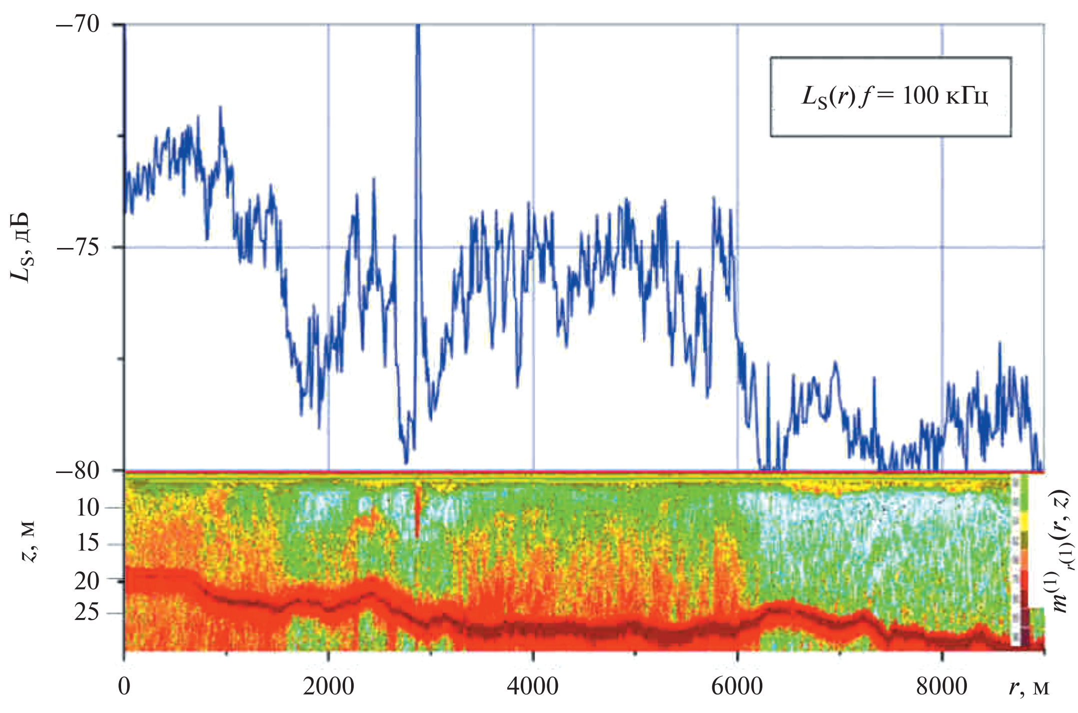



**Рис. 5.** Сила слоя $Ls(r)$ и 2D изображение функции $m_{V\omega}^{(1)}(r,z)$ мелководных ГФ на частоте 100 кГц.

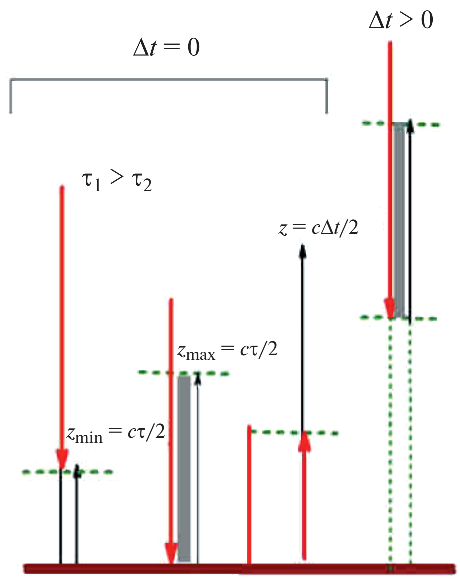



**Рис. 6.** Схема рассеяния звука вблизи дна моря на встречных пучках.

Метод нелинейного рассеяния звука на встречных пучках может быть использован для регистрации скопления пузырьков и измерения функции распределения пузырьков по размерам $g(R)$ вблизи дна моря. Следует применять акустическое излучение вертикально вниз с разнесением во времени зондирующих импульсов на задержку $\Delta t$, вариация которой позволит зондировать различные области газового факела. Дно моря используется для создания отраженного импульса длительности $\tau_1$ с частотой $\omega_1$, который мог бы, как показано на рис. 6, в заданном месте относительно этой поверхности взаимодействовать с прямым импульсом длительности $\tau_2$ с частотой $\omega_2$, излучающимся через определенное время $\Delta t$. Изменяя $\Delta t$, можно исследовать нелинейное взаимодействие на различных глубинах. Частоту звука в зондирующих импульсах следует подбирать так, чтобы разностная частота, генерируемая на пузырьках, соответствовала их резонансным размерам в газовом факеле. Важно также, чтобы частота накачки не перекрывалась с резонансными частотами пузырьков в факеле.

Таким образом, метод нелинейного нестационарного рассеяния звука на встречных пучках позволит определить функцию распределения пузырьков по размерам $g(R)$, которую можно вычислить с помощью формулы (29).

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждено нестационарное рассеяние звука, возникающее вследствие переходных процессов возбуждения собственных колебаний пузырьков под действием акустических импульсов. Показано, что эффективным механизмом генерации собственных колебаний пузырьков в переходных процессах является механизм раскачки таких колебаний ФМ ВЧ импульсами. Преимуществом применения ФМ ВЧ импульсов является возможность весьма простой генерации НЧ колебаний и перестройки их частоты при изменении соотношений между периодами ВЧ и НЧ колебаний при фазовой манипуляции в импульсе. Важно, что при этом сохраняется узкая характеристика направленности и достаточно высокий уровень сигнала на низкой частоте. Нам представляется, что использование когерентного ФМ импульсного рассеяния с преобразованием частоты позволяет упростить и существенно улучшить методику акустической спектроскопии жидкостей, что особенно важно в практических применениях.

Показано, что коэффициент нелинейного рассеяния бигармонических импульсов на разностных частотах при монотонной функции распределения пузырьков по размерам определяется в основном пузырьками, резонансными на накачке, а не на разностной частоте, вне зависимости от длительности импульса. В этих условиях для реализации спектроскопии нет никакой выгоды от применения коротких сигналов. Применение нестационарного нелинейного рассеяния оправдано в случае немонотонного распределения пузырьков по размерам. На практике функция $g(R)$ часто имеет максимум при $R = R_P$ и ниспадающую ветвь при малых размерах пузырьков. Нестационарная нелинейная спектроскопия пузырьков возможна при условии, что частота накачки соответствует пузырькам на ниспадающей ветви $g(R)$ при $R < R_P$, а разностная частота соответствует участку с $R > R_P$.

Показано, что применение нелинейного нестационарного рассеяния на встречных пучках позволит проводить дистанционную спектроскопию пузырьков в газовых факелах и проводить корректные оценки газосодержания в факелах.

Работа проведена при поддержке гранта РНФ №22-22-00499.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
2. *Leighton T.G.* The acoustic bubble. San-Diego: Academic, 1994. 613 p.
3. *Medwin H.* Acoustical determination of bubble size spectra // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 62. P. 1041–1044.
4. *Vagle S., Farmer D.* The measurement of bubble-size distributions by acoustical backscatter // J. Atmospheric and Oceanic Technology. 1992. V. 9. P. 630–664.
5. *Farmer D., Vagle S.* Wave induced bubble clouds in the upper ocean // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. C12054. 16 p.
6. *Leifer I., Patro R.K.* The bubble mechanism for methane transport from the shallow sea bed to the surface: a

review and sensitivity study // Cont. Shelf Res. 2002. V. 22. № 16. P. 2409–2428.

7. *Judd A., Hovland M.* Seabed fluid flow. The impact on geology, biology and the marine environment. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 2007. 475 p.
8. *Глотов В.П., Колобаев П.А., Нейумин Г.Г.* Исследования рассеяния звука пузырьками, создаваемыми искусственным ветром в морской воде, и статистического распределения размеров пузырьков // Акуст. журн. 1961. Т. 7. № 4. С. 421–427.
9. *Turner W.R.* Microbubble persistence in fresh water // J. Acoust. Soc. Am. 1961. V. 33. P. 1223–1233.
10. *Гаврилов Л.Р.* О распределении газовых пузырьков в воде по их размерам // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 25–27.
11. *Заболотская Е.А., Солуян С.И.* Излучение гармоник и комбинационных частот воздушными пузырьками // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 472–474.
12. *Сандлер Б.М., Селивановский Д.А., Соколов А.Ю.* Измерения концентрации газовых пузырьков в приповерхностном слое моря // Докл. Акад. наук СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1474–1476.
13. *Кобелев Ю.А., Сутин А.М.* Генерация звука разностной частоты в жидкости с пузырьками различных размеров // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 6. С. 860–865.
14. *Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // Phys. Earth and Planetary Inter. 1988. V. 34. P. 94–98.
15. *Shankar P.M., Chapelon J.Y., Newhous V.L.* Fluid pressure measurement using bubbles insonified by two frequencies // Ultrasonics. 1986. V. 24. P. 333–336.
16. *Акуличев В.А., Буланов В.А., Кленин С.А.* Акустическое зондирование газовых пузырьков в морской среде // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 289–295.
17. *Akulichev V.A., Bulanov V.A.* Measurements of bubbles in sea water by nonstationary sound scattering // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. P. 3438–3449. https://doi.org/10.1121/1.3636371
18. *Акуличев В.А., Буланов В.А.* Акустические исследования мелкомасштабных неоднородностей в морской среде. Владивосток: ТОИ ДВО РАН, 2017. 414 с. https://www.poi.dvo.ru/node/470
19. *Дмитриевский А.Н., Баланюк И.Е.* Газогидраты морей и океанов. М.: ИРЦ Газпром, 2009. 416 с.
20. *Саломатин А.С., Юсупов В.И., Верещагина О.Ф., Черных Д.В.* Акустическая оценка концентрации метана в водной толще в областях его пузырьковой разгрузки // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 6. С. 636–644.
21. *Буланов В.А.* Акустическая спектроскопия при нестационарном когерентном рассеянии фазоманипулированных импульсов // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 19. С. 84–88.
22. *Акуличев В.А., Буланов В.А.* О спектре пузырьков газа и возможностях акустической спектроскопии в приповерхностном слое океана // Докл. Акад. наук. 2012. Т. 446. № 2. С. 212–215.
23. *Garrett C., Li M., Farmer D.* The connection between bubble size spectra and energy dissipation rates in the upper ocean // J. Phys. Ocean. 2000. V. 30. P. 2163–2171.
24. *Vagle S., McNeil C., Steiner N.* Upper ocean bubble measurements from the NE Pacific and estimates of their role in air-sea gas transfer of the weakly soluble gases nitrogen and oxygen // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. C12054. https://doi.org/10.1029/2009JC005990

**EDN:** NMRLTJ
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 385–390*

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

*УДК 534.24*

# РЕЗОНАТОР С УПРАВЛЯЕМОЙ ПРОЗРАЧНОСТЬЮ ГРАНИЦ


**О. А. Савицкий***

*АО "Акустический институт им. Академика Н.Н. Андреева", ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия*
**e-mail: osav66@mail.ru*

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 28.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Рассматривается возможность управления акустической прозрачностью границ резонатора с использованием пьезоактивных материалов. Решена стационарная электроакустическая задача о колебаниях пьезоактивной структуры с граничными условиями специального вида в плосковолновом приближении. Рассмотрен переходной режим излучения резонатора с накачкой. Сформулированы предложения по применению резонаторов с управляемыми границами в гидроакустике и ультразвуковой эхоскопии.

*Ключевые слова:* акустический резонатор, уравнения пьезоэффекта, колебания пьезоактивной структуры, управление акустической прозрачностью

**DOI:** 10.31857/S0320791922040104

## ВВЕДЕНИЕ

Во многих практических акустических задачах находят применение резонаторы в виде плоскопараллельных слоев волновых размеров. В качестве примеров можно упомянуть задачи, связанные с созданием мощных источников когерентного излучения, локальных областей с высокими интенсивностями ультразвука для реализации технологических процессов и т.д.

Резонаторы, как известно, представляют собой колебательные системы, предназначенные для создания и накопления энергии колебаний за счет резонанса при совпадении частоты вынуждающей силы с одной из собственных частот резонатора. Важнейшей характеристикой резонатора является его добротность

$$Q = \frac{\pi f_0}{\alpha}, \tag{1}$$

или связанная с ней величина — декремент затухания $\delta = \frac{\pi}{Q}$ [1]. В формуле (1) $f_0$ — собственная частота резонатора, $\alpha$ — временной коэффициент затухания амплитуды колебаний.

Основными факторами, препятствующими достижению больших плотностей энергии в резонаторе, т.е. снижающими добротность, являются внутренние потери акустической энергии в рабочем теле резонатора, а также потери, связанные с переизлучением акустической энергии через границы резонатора.

В твердотельном резонаторе в виде плоскопараллельного слоя, окруженного с обоих сторон жидкой или газообразной средой, амплитудный коэффициент временного затухания находится из дисперсионного уравнения и равен [2]

$$\alpha = \frac{\omega c'}{c} + \frac{c}{l}\ln\frac{1}{|R|}, \tag{2}$$

где $\omega$ — частота колебаний, $c$ и $c'$ — реальная и мнимая части скорости звуковых волн в материале резонатора, $|R|$ — модуль коэффициента отражения от границ резонатора, $l$ — толщина резонатора. В (2) первое слагаемое представляет собой часть общего поглощения, связанную с превращением энергии колебаний в тепло в объеме резонатора, а второе — с переизлучением границ резонатора. При этом, как видно из (2), влияние второго фактора усиливается для резонаторов малых физических размеров $l$. Для резонаторов со свободными границами повышение их добротности связано с помещением в разреженные среды, однако при этом практически исключается возможность отвода тепла, выделяющегося за счет объемных потерь в материале резонатора, возникают технические проблемы при реализации крепления и т.д. Создание же твердотельных резонаторов высокой добротности с акустически жесткими границами для реальных материалов выглядит проблематичным. В приложениях важной может также оказаться возможность вывода накопленной в резонаторе колебательной энергии. Для резонаторов с акустически жесткими или мягкими границами это, очевидно, невоз-

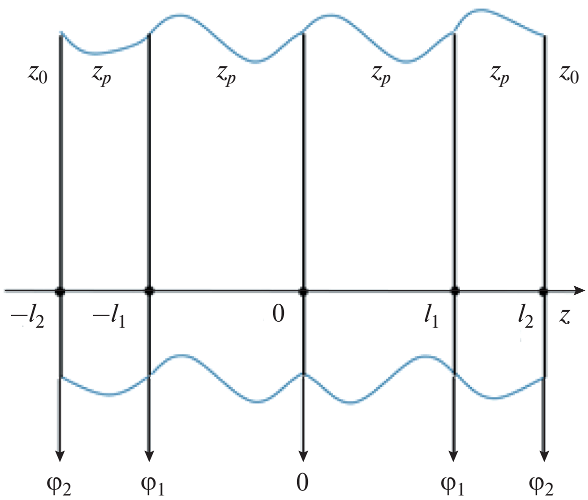



**Рис. 1.** Плоскослоистая пьезоактивная структура. Удельные волновые импедансы пьезоэлектрика $z_p$ и окружающей среды $z_0$.

можно. Таким образом, задача исследования возможности управления прозрачностью границ резонаторов является актуальной.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для управления прозрачностью границ резонатора можно использовать физические поля, например, электрическое. В такой постановке задача выглядит естественной для пьезоэлектриков, поскольку и сами колебания в пьезоэлектрических резонаторах возбуждаются электрическим полем. Возможности электрического управления параметрами пьезоизлучателей и волноводов, например, для излучения коротких акустических импульсов, рассматривались ранее в статьях [3–5].

Рассмотрим вначале установившиеся продольные колебания частоты ω в плоскослоистой структуре, показанной на рис. 1. Исследуемая электромеханическая система состоит из четырех слоев пьезоэлектрика и ограничена плоскостями $z = 0;\pm l_1;\pm l_2$. Удельный волновой импеданс слоев равен $z_p$. Направление вектора поляризации **P** пьезоэлектрика совпадает с осью $z$ для слоев, ограниченных плоскостями $z = 0; l_1; l_2$ и противоположно направлению оси $z$ для слоев, ограниченных плоскостями $z = 0;-l_1;-l_2$. Слева и справа рассматриваемая структура окружена упругой средой с удельным волновым импедансом продольных волн $z_0$. Возбуждение механических колебаний происходит за счет приложения электрических потенциалов $\varphi_1$ и $\varphi_2$ к электродам, расположенным на границах $z = 0;\pm l_1;\pm l_2$, как показано на рис. 1. Потенциал электрода, расположенного в сечении $z = 0$, принимается равным нулю.

В отсутствие потенциалов звукопрозрачность границ структуры $z = \pm l_2$ определяется только соотношением импедансов $z_p$ и $z_0$. В частном случае $z_p = z_0$ структура вообще не будет проявлять резонансных свойств.

Как указывалось выше, высокие значения добротности рассматриваемого резонатора могут быть достигнуты при акустически непрозрачных границах $C$. Учитывая, что в плоских бегущих волнах в средах, удовлетворяющих закону Гука, механические напряжения $T$ и колебательная скорость $\dot{\xi}$ связаны простой функциональной зависимостью $T = \pm z_p\dot{\xi}$, легко прийти к выводу, что для устранения оттока энергии из резонатора возможны три варианта граничных условий:

– акустически жесткие границы $\dot{\xi}\big|_c = 0$;

– свободные границы, где $T\big|_c = 0$;

– границы, на которых одновременно выполнены условия $\dot{\xi}\big|_c = 0$ и $T\big|_c = 0$.

Первые два варианта хорошо известны и обсуждались выше. Рассмотрим электромеханическую задачу о колебаниях в системе (рис. 1) с граничными условиями третьего типа. В этом случае решение задачи очевидно не будет зависеть от акустических свойств среды $z_0$, окружающей колебательную систему.

## 2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ РЕЗОНАТОРА

В силу симметрии механических и электрических свойств системы достаточно найти решение электромеханической задачи справа от плоскости $z = 0$, заменив влияние ее левой части условиями на акустически жесткой границе.

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dT^{(1,2)}}{dz} = -\rho\omega^2\xi^{(1,2)}, \\ E^{(1,2)} = -h_{33}\dfrac{d\xi^{(1,2)}}{dz} + \beta_{33}^s D^{(1,2)}, \\ T^{(1,2)} = c_{33}^D\dfrac{d\xi^{(1,2)}}{dz} - h_{33}D^{(1,2)}, \\ \dfrac{dD^{(1,2)}}{dz} = 0, \\ \xi^{(1)}(0) = 0, \\ \xi^{(2)}(l_2) = 0, \\ T^{(2)}(l_2) = 0, \\ \xi^{(1)}(l_1) = \xi^{(2)}(l_1), \\ T^{(1)}(l_1) = T^{(2)}(l_1), \end{cases} \tag{3}$$

где $T^{(1,2)}$, $\xi^{(1,2)}$ — комплексные амплитуды $z$-компонент тензора механических напряжений и смещений в первом $(0 < z < l_1)$ и втором $(l_1 < z < l_2)$ слоях пьезоэлектрика, соответственно; $E^{(1,2)} = -\frac{d\varphi}{dz}$ и $D^{(1,2)}$ — комплексные амплитуды $z$-компонент векторов напряженности и индукции электрического поля; $\rho$ — плотность пьезосреды; $\omega$ — круговая частота. В (3) свойства пьезосреды описываются соответствующими компонентами электроупругой матрицы материала, где $h_{33}$ — пьезоконстанта деформации; $\beta_{33}^S$ — диэлектрическая непроницаемость; $c_{33}^D$ — упругий модуль [6]. В (3) предполагается, что слои пьезоэлектрика имеют тождественные электроупругие матрицы и плотность.

Решение (3) удобно записывать в обезразмеренном виде, введя следующие обозначения: $a = \frac{l_2}{l_1}$; пространственная переменная $z_1 = \frac{z}{l_1}$; фазовая переменная $\varphi_1 = kl_1$; волновое число $k = \frac{\omega}{v_3^D}$; скорость продольных волн в пьезоэлектрике $v_3^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$; квадрат коэффициента электромеханической связи пьезоматериала $k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{\beta_{33}^S c_{33}^D}$; коэффициент электромеханической трансформации $N = \frac{h_{33}C_1^s}{S}$, где $S$ — площадь поперечного сечения структуры, $C_1^s$ — электрическая емкость между электродами в сечениях $z = 0$ и $z = l_1$.

Собственные частоты рассматриваемой электромеханической системы находятся из уравнения

$$\frac{\varphi_1}{k_t^2} = \frac{\sin\varphi_1 \cos\frac{\varphi_1(1-a)}{2}}{\cos\frac{\varphi_1(1+a)}{2}}. \tag{4}$$

Решение задачи (3) для полей $T$ и $\dot{\xi}$ представляет собой кусочно-непрерывные на отрезке $[0, a]$ функции вида

$$T(z_1) = \frac{NU_1}{1 - k_t^2 \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1} \frac{\sin[\varphi_1(1-a)]}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}} \times$$
$$\times \begin{cases} \frac{\sin[\varphi_1(1-a)]}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)} \cos(\varphi_1 z_1) - 1, & 0 < z_1 < 1, \\ \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)} [\cos[\varphi_1(z_1 - a)] - 1], & 1 < z_1 < a, \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{\xi}(z_1) = \frac{\frac{jNU_1}{z_p}}{1 - k_t^2 \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1} \frac{\sin[\varphi_1(1-a)]}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}} \times$$
$$\times \begin{cases} \frac{\sin[\varphi_1(1-a)]\sin(\varphi_1 z_1)}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)} - 1, & 0 < z_1 < 1, \\ \frac{\sin\varphi_1 \sin[\varphi_1(z_1 - a)]}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}, & 1 < z_1 < a. \end{cases} \tag{6}$$

Найденные решения (5) и (6), с учетом симметрии, могут быть продолжены на весь отрезок $[-a, a]$, занимаемый резонатором.

В решение задачи также входят выражения для отношений возбуждающих напряжений $U_1$, $U_2$ и токов $I_1$, $I_2$, протекающих через поперечные сечения $z = z_{1,2}$ $(0 < z_1 < l_1, l_1 < z_2 < l_2)$ структуры, при условии непроницаемости ее внешних границ

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}{a\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)} \times$$
$$\times \left(1 - k_t^2 \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1} \frac{\sin(\varphi_1(1-a))}{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}\right), \tag{7}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 a)}{\sin\varphi_1}. \tag{8}$$

Отношение токов возбуждения $I_{e1}$, $I_{e2}$ электродов $z = \pm l_1$ и $z = \pm l_2$ определяется из выражения

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sin(\varphi_1 a)}{\sin\varphi_1}. \tag{9}$$

Рассчитанные по формулам (5), (6) нормированные распределения амплитуд механических напряжений и скоростей смещений в рассматриваемой электромеханической системе на трех первых модах колебаний приведены на рис. 2а и 2б, соответственно. Расчеты выполнены для значений параметров системы $a = 1.6$ и пьезоэлектрика $k_t^2 = 0.42$.

Как видно из рис. 2, на границах исследуемой структуры условие акустической непроницаемости третьего типа левой и правой границ колебательной системы выполняется.

Накопленная в системе энергия может быть высвобождена после отключения электрического поля, обеспечивающего непроницаемость ее границ.

## 3. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Полученные результаты для установившихся колебаний рассматриваемой электромеханической системы могут быть использованы для расчета формы волн, переизлучаемых во внешнюю

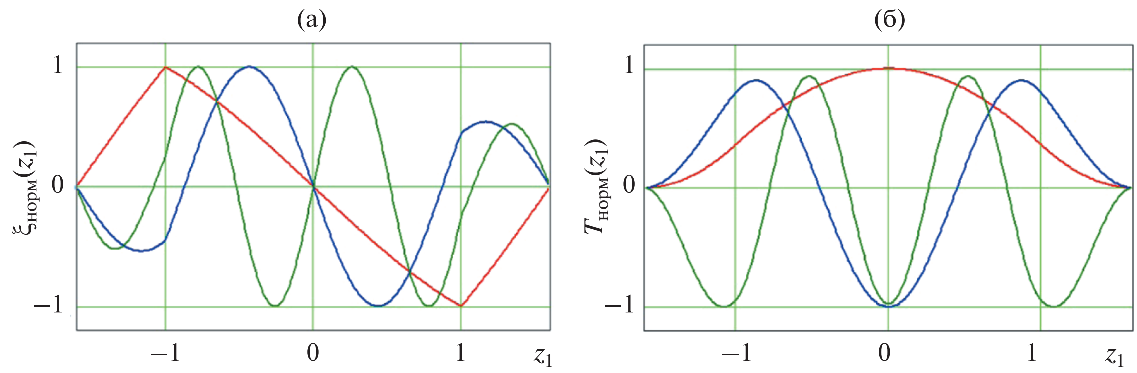



**Рис. 2.** Амплитуды (а) – колебательной скорости и (б) – механических напряжений на трех низших модах системы.

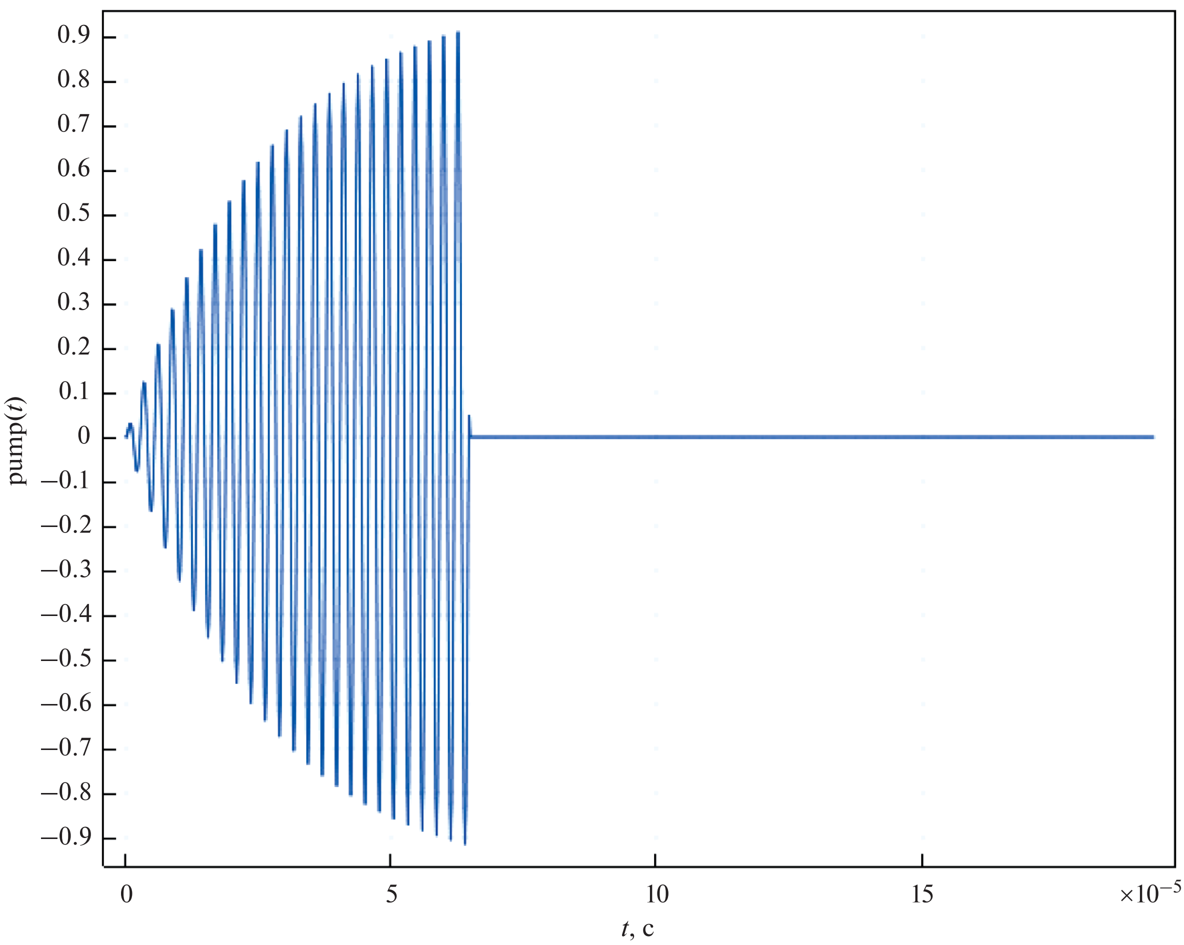



**Рис. 3.** Форма импульса возбуждения колебаний в пьезоэлектрической структуре.

среду после выключения электрического поля. В простейшем случае, когда импедансы пьезоэлектрика структуры и окружающей среды равны ($z_p = z_0$), форма профиля прямой $T_r(\zeta)$ и обратной $T_l(\eta)$ волн может быть легко определена по формулам

$$T_r(\zeta) = T(\zeta)\cos(\omega t_0) + z_p\dot{\xi}(\eta)\sin(\omega t_0), \quad (10)$$

$$T_l(\eta) = T(\eta)\cos(\omega t_0) - z_p\dot{\xi}(\eta)\sin(\omega t_0), \quad (11)$$

где $\zeta = t - \frac{z}{V_3^D}$, $\eta = t + \frac{z}{V_3^D}$, $t_0$ – момент выключения электрического поля.

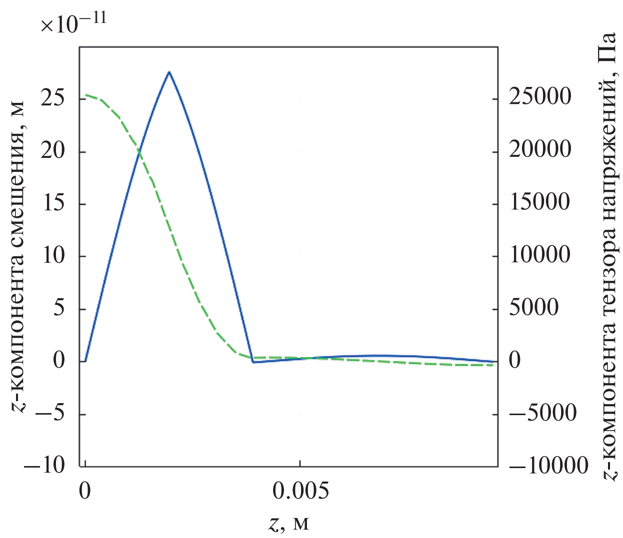



**Рис. 4.** $z$-компоненты механических смещений (сплошная линия) и тензора напряжений (пунктир) в момент перед выключением электрического поля. Электроды расположены в сечениях $z$ = 1.95 мм и $z$ = 2.90 мм.

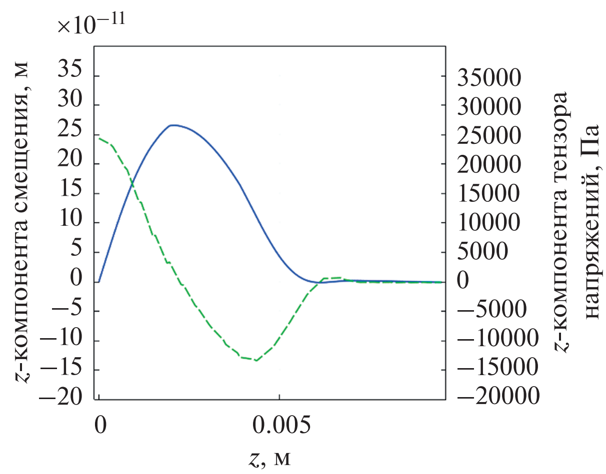



**Рис. 5.** $z$-компоненты механических смещений (сплошная линия) и тензора напряжений (пунктир) в момент после выключения электрического поля. Поле выключается при $t_0 = N/f_0$. Электроды расположены в сечениях $z$ = 1.95 мм и $z$ = 2.90 мм.

Как следует из (10) и (11), форма профиля волн, излучаемых из области резонатора после “открытия” его границ, зависит от возбуждаемой моды и момента выключения возбуждающего колебания электрического поля.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Нестационарные режимы работы пьезорезонатора с управляемой прозрачностью границ исследовались методами конечно-элементного анализа в среде Comsol multiphysics в одномерной постановке. Резонатор представлял собой равнотолщинную четырехслойную структуру $(a = 2)$ из пьезокерамики PZT-5A с толщиной слоя 1.95 мм. Ось $z$ нормальна к границам структуры. Левое и правое полупространства заполнялись средой, механические свойства которой совпадают со свойствами пьезокерамики PZT-5A. Таким образом, в отсутствие на электродах структуры электрических напряжений, среда представляет собой однородное упругое пространство. Гармонические колебания возбуждались подачей на электроды ($z$ = 1.95 мм, $z$ = 2.90 мм) импульсного сигнала с гармоническим заполнением частоты $f_0$ = 372 кГц и плавно нарастающей амплитудой (рис. 3).

Длительность импульса составляла $N$ = 24 полных периода несущей частоты. После достижения амплитуд возбуждающих электрических напряжений на электродах $U_1$ = 1 В и $U_2$ = 4.85 В, соответственно, электрическое поле выключалось. Точка наблюдения располагалась в правом полупространстве на расстоянии $z$ = 10 мм от начала координат.

На рис. 4 представлены пространственные распределения $z$-компоненты механических смещений и тензора напряжений в момент перед выключением электрического поля, когда они достигли наибольшей амплитуды. Видно, что за пределами резонатора амплитуда колебаний существенно меньше, чем внутри структуры.

В момент выключения поля граница резонатора $z$ = 2.90 мм становится прозрачной, и накоп-

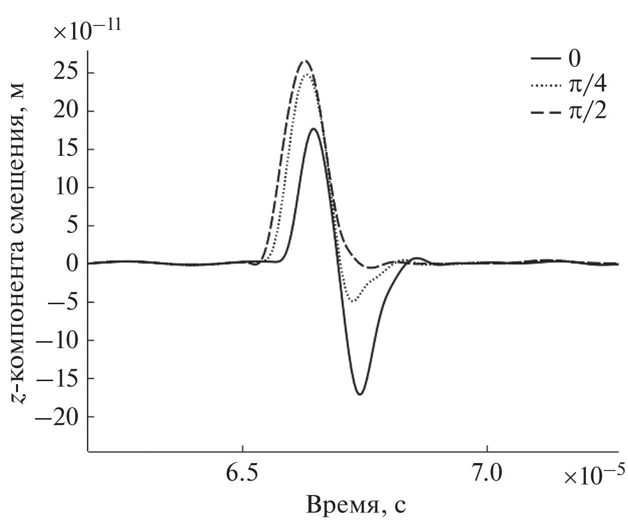



**Рис. 6.** $z$-компонента механических смещений в точке наблюдения при различных значениях фазы колебаний в резонаторе в момент выключения поля.

ленная колебательная энергия переизлучается в окружающее пространство в виде короткого акустического импульса (рис. 5).

Как указывалось выше (10), (11), форма акустического импульса, переизлучаемого структурой, зависит от фазы колебаний в момент выключения. На рис. 6 представлены формы волны смещений ($z$-компоненты) в точке наблюдения при различных значениях фазы колебаний $\omega t_0$ в момент выключения поля.

Как следует из рис. 6, подбирая момент выключения электрического поля, можно управлять формой излучаемого акустического импульса от однополярной обоих знаков до двуполярной, в виде одного периода колебания, близкого к синусоидальному.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана возможность управления акустической прозрачностью границ в пьезоэлектриках с использованием электрического поля. Электромеханические системы, подобные рассмотренной, могут быть использованы для создания источников мощных коротких акустических импульсов, а электрическое поле в них играет роль своеобразной накачки системы колебательной энергией. Рассмотренная задача может рассматриваться как один из подходов к созданию акустических лазеров.

Автор выражает благодарность М.А. Миронову за полезные рекомендации и обсуждение результатов работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелик Г.С.* Колебания и волны: Введение в акустику, радиофизику и оптику: Учебное пособие. Физматгиз, 1959.
2. *Исакович М.А.* Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
3. *Грищенко Е.К.* Акустический аналог электрооптического затвора // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 827–828.
4. *Грищенко Е.К.* Пьезоэлектрический поглотитель ультразвука пластинчатого типа // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 4. С. 486–488.
5. *Коновалов С.И., Кузьменко А.Г.* Демпфирование пьезопластины и использование электрической цепи на ее входе для получения короткого акустического импульса // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 6. С. 829–332.
6. Пьезокерамические преобразователи. Методы измерения и расчета параметров. Справочник / Под ред. Пугачева С.И. 1984.

**EDN:** EATKHG
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 391–399*

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

*УДК 551.466.8*

# АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ШЕЛЬФЕ ЧЕРНОГО МОРЯ ПО ДАННЫМ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА


**В. В. Гончаров[a], *, Б. Ф. Курьянов[a], А. Н. Серебряный[a, b], ****
[a]*Институт океанологии имени П.П. Ширшова РАН, Нахимовский пр. 36, Москва, 117997 Россия*
[b]*АО "Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева", ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия*
**e-mail: gvv@ocean.ru*
***e-mail: serebryany@hotmail.com*
Поступила в редакцию 05.03.2022 г.
После доработки 25.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

На северо-восточном шельфе Черного моря в 2010 г. был проведен томографический эксперимент по встречному распространению фазоманипулированных акустических сигналов. В течение суток велось измерение временных откликов среды при излучении и приеме высокочастотных сложных фазоманипулированных сигналов от трех донных приемно-излучающих преобразователей, расположенных в углах равностороннего треугольника со сторонами около 1100 м. Трансиверы находились на удалении более 2 км от Голубой бухты при глубине места около 40 м. Вблизи от них была установлена заякоренная гирлянда термодатчиков для регистрации внутренних волн. По данным о временной изменчивости откликов среды на акустические сигналы при помощи метода согласованных временных откликов была восстановлена информация о присутствовавших на акватории внутренних волнах. Была получена временная реализация вертикальных смещений термоклина, в которой обнаружены короткопериодные волны высотой 0.5–1 м и периодом от 5 до 15–20 мин. Сопоставление акустических измерений с независимыми контактными измерениями внутренних волн выявило их хорошее взаимное совпадение. В целом результаты проведенного акустического эксперимента показали возможность успешного использования метода акустической томографии для исследования динамики вод для условий мелкого моря.

*Ключевые слова:* акустическая томография, внутренние волны, шельф, Черное море
**DOI:** 10.31857/S0320791922040050

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Акустические методы служат важным инструментом для исследований динамики морской среды, и их возможности еще не до конца исчерпаны. Акустическим институтом и Институтом океанологии РАН в течение нескольких лет проводились эксперименты с организацией акустических трасс на северо-восточном шельфе Черного моря с целью исследований особенностей происходящих здесь гидрофизических процессов [1, 2]. В каждом эксперименте на открытом шельфе устанавливалась акустическая трасса длиной в несколько километров, ориентированная параллельно береговой черте в районе Геленджика напротив Голубой бухты. В 2010 г. здесь был проведен наиболее совершенный из проведенных ранее томографический эксперимент по встречному распространению фазоманипулированных акустических сигналов с использованием трех трасс, расположенных в виде равностороннего треугольника [3]. По данным о временной изменчивости откликов среды на акустические сигналы была восстановлена картина течений и скорости звука на акватории [3, 4]. В настоящей работе мы возвращаемся к данным этого эксперимента с новым подходом к обработке данных, который дает возможность извлечения информации о внутренних волнах, присутствовавших в то время на акватории.

## 2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперимент проводился в течение суток с 7 по 8 октября. В расстановке эксперимента были три донно-поверхностных буя, расположенных в углах равностороннего треугольника со сторонами около 1100 м. Они находились на удалении более 2 км от Голубой бухты, где глубина моря около 40 м (рис. 1а). Подробное описание буев дано в [3]. Буи содержали обратимые акустические преобразователи, излучающие и приемные усилите-

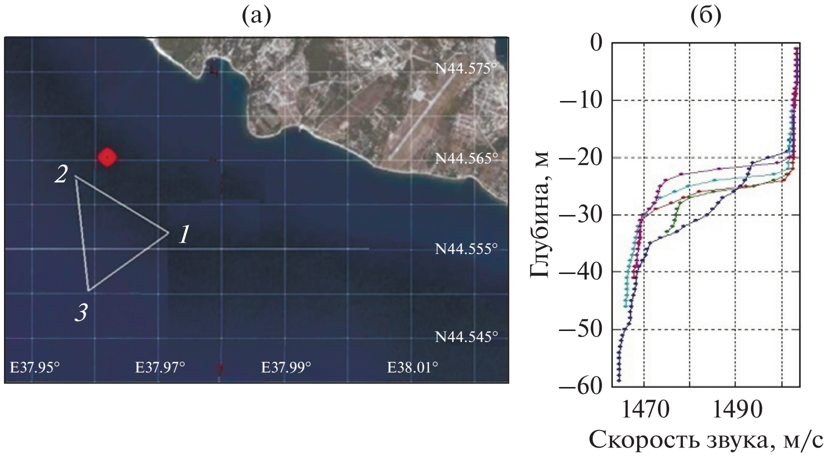



**Рис. 1.** (а) – Расположение трех акустических буев на шельфе вблизи Голубой бухты и гирлянды термодатчиков (красная точка); (б) – вертикальные профили скорости звука, измеренные вблизи буев в эксперименте.

ли сигналов, мало потребляющие компьютеры, управляющие проведением эксперимента, и системы точной временной синхронизации независимых буев с использованием спутниковой системы GPS. Все три независимых компьютера генерировали клиппированные широкополосные m-последовательности с коэффициентом сложности 2047, средней частотой 10 кГц, шириной полосы ~2–4 кГц и длительностью ~1 с, а также проводили запись сигналов от других буев с частотой выборок 100 кГц. Излучение сигналов для различных буев производилось последовательно через каждые 3 с, так что период повторения сеансов излучения составлял 9 с. Точность синхронизации излучения различных буев составляла ~10 мкс. Для получения временных откликов среды на различных трассах при обработке записанных сигналов проводилась полосовая фильтрация и вычисление функций корреляции принятых сигналов с копиями излученных. Таким образом, были получены функции откликов среды по трем трассам в прямых и обратных направлениях.

Во время работы треугольника акустических приемо-излучателей также проводились измерения фоновых гидрологических условий в море с помощью стандартных океанологических приборов. Эта информация была необходима для сопоставления с данными, полученными акустическим методом. Измерялись течения с помощью ADCP “Rio Grande 600 kHz” на разрезах акватории и на трассах распространения акустических сигналов. Велись также измерения вертикальной структуры скорости звука и температуры зондом miniSVP. Все работы проводились с малого моторного судна. Кроме того, еще до начала акустического эксперимента на глубине 34 м рядом с треугольником буев была установлена заякоренная гирлянда из 9 термодатчиков DTcenti для независимой регистрации внутренних волн. Датчики располагались на горизонтах 4.5, 8.5, 12.5, 16.5, 20.5, 24.5, 28.5, 32.5, 33.5 м. Дискретность их измерений – 30 с.

## 3. ИЗМЕНЧИВОСТЬ ФОНОВЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ВО ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Контрольные измерения за изменчивостью водной среды выявили характерные черты как в режиме прибрежных течений, так и в режиме вертикальных колебаний термоклина. По данным проведенных зондирований термоклин располагался ниже горизонта 20 м и был резким (рис. 1б). Температурная структура оказывает основное влияние на скорость звука, поскольку в прибрежной зоне Черного моря соленость мало изменяется с глубиной, имея характерную величину около 18‰.

Работа акустических буев началась 7 октября в 12 ч 39 мин и продолжалась в течение суток. Запись гирлянды термодатчиков охватывала более продолжительный период времени – она началась 2 октября и продолжалась около 12 сут (288 ч). На рис. 2 представлено изменение температурной структуры моря по данным термогирлянды за весь период ее работы. По данным термогирлянды был рассчитан спектр колебаний температуры на горизонте, который выявил выраженный пик на частоте, близкой к 0.06 ц/ч, что соответствует локальной инерционной частоте района. Внутренние инерционные волны с периодом 17 ч хорошо прослеживаются на записи термогирлянды. Их высоты достигают 15–20 м. Эти данные подтверждают факт, рассмотренный в работе [5], что на черноморском шельфе инерционные внутренние волны служат причиной значительной из-

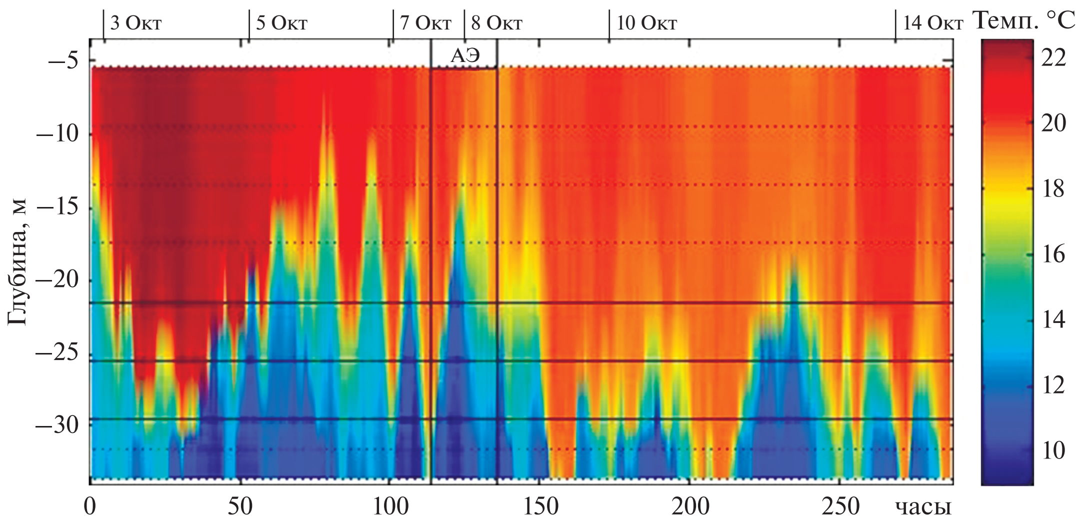



**Рис. 2.** Изменение температурной структуры водной толщи с 2 по 14 октября.

менчивости скорости звука, имеющей периодический характер.

На изменчивость температурной структуры помимо инерционных внутренних волн накладывали свой отпечаток еще два важных фактора. Один из них – это метеорологические условия. 3 и 4 октября дул сильный северо-восточный ветер, действие которого привело к заглублению термоклина на горизонт 30 м. 5 и 6 октября ветер ослабел и термоклин вернулся в свое исходное положение. На нем опять были замечены инерционные волны. 7 и 8 октября море было спокойным, что позволило осуществить постановку акустических буев и провести эксперимент. 9 октября подул сильный южный ветер, что привело к полному перемешиванию воды в прибрежной зоне. На следующий день термоклин появился, но находился в придонном положении. До конца работы термогирлянды временами усиливавшееся ветровое воздействие прижимало термоклин ко дну, что препятствовало появлению инерционных внутренних волн в прибрежной зоне.

Второй фактор был связан с прохождением на акватории во время акустического эксперимента антициклонического субмезомасштабного вихря – явления, характерного для шельфовой зоны Черного моря, в том числе для данного района [6]. Вихрь был обнаружен 7 октября во время разреза с ADCP. На его присутствие указывало юго-восточное течение силой 20 см/с, которое охватывало всю акваторию эксперимента. Радиус вихря был около 4 км. 8 октября течение изменилось на противоположное северо-западное, что означало, что вихрь прошел. Результаты работы [3] продемонстрировали эффективность проведенного томографического эксперимента для определения течений в морской среде на шельфе. В ней для простых моделей среды (2 или 3 однородных слоя), используя экспериментально полученную картину временного хода откликов среды, была восстановлена регулярная временная изменчивость вектора скорости течения и скоростей звука и показана резкая изменчивость течения, вызванная проходящим в акватории вихрем.

## 4. МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

При обработке использовалась полученная в ходе эксперимента функция откликов среды для звуковой трассы между буями *1* и *2* (представлена на рис. 3), которая располагалась параллельно береговой черте (см. рис. 2). Эта трасса наиболее чувствительна к воздействию внутренних волн, поскольку она совпадает с преобладающей ориентацией фронтов внутренних волн, распространяющихся в этом районе [7–10]. На картине временного хода откликов среды в первые начальные часы эксперимента ($t_{\text{exp}}$) достаточно четко выделяются четыре импульса, отмеченные на рисунке цифрами. В ходе эксперимента (с ростом $t_{\text{exp}}$) амплитуда этих импульсов существенно менялась вплоть до уровня шумов (исчезновение импульса). Поэтому для анализа использовались усредненные по различным интервалам времени эксперимента ($\Delta t_{\text{exp}}$) данные. Это позволило получить данные об изменении (в ходе эксперимента) времен прихода ($T_{ek}$, $k = 1, 2, 3, 4$) отдельных импульсов. В работах [3, 4] эти данные для легко разделяющихся импульсов *1* и *4* на рис. 3 были использованы для восстановления регулярной временной изменчивости параметров сравнительно простых (усредненных) моделей среды. В настоящей работе предпринята попытка связать вариации времен прихода отдельных импульсов с возможным прохождением внутренней

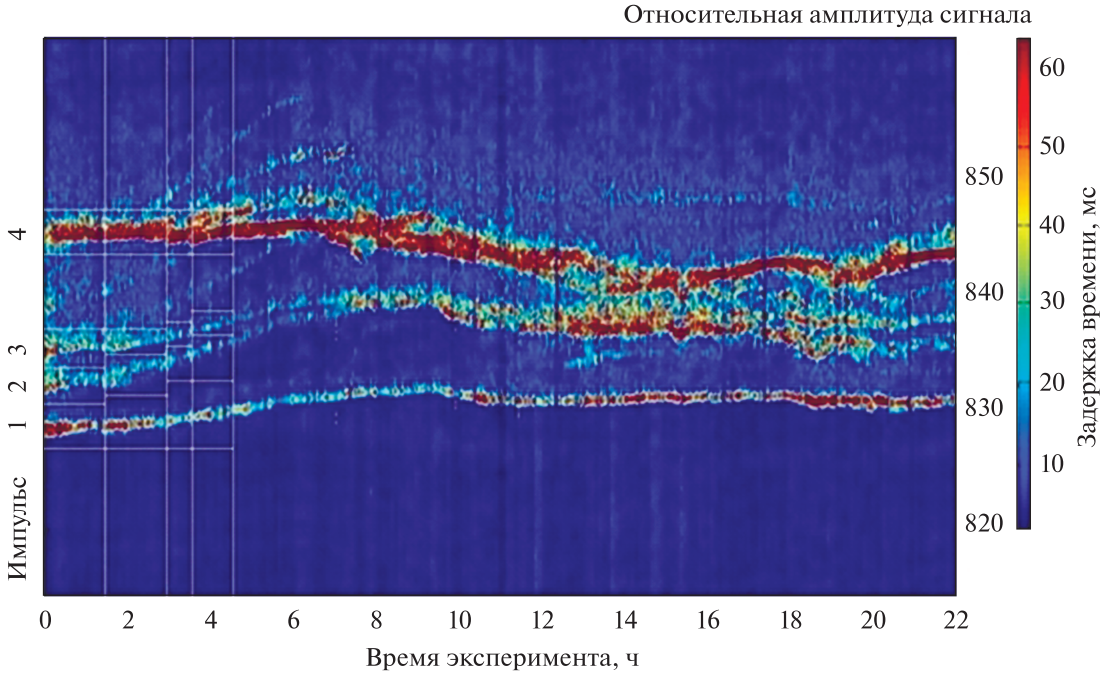



**Рис. 3.** Изменение времен пробега для четырех групп сигналов на трассе *1–2*.

волны через звуковую трассу между буем *1* и *2*. В первую очередь были выделены такие интервалы времен эксперимента, на которых отдельные импульсы *1–4* можно было бы отделить друг от друга. Эти интервалы и соответствующие им интервалы времен задержек отдельных импульсов показаны на рис. 3 белыми линиями. Легко видеть, что с ростом $t_{exp}$ импульсы *2* и *3* сближаются, и их разделение при $t_{exp} > 270$ мин (4.5 ч) становится все более затруднительным.

Для первых 270 мин эксперимента результаты расчета времен прихода $T_{ek}(t_{exp})$ представлены на рис. 4. Здесь красные линии ($\Delta t_{exp} = 20$ мин) соответствуют регулярным изменениям параметров среды, связанным в основном с понижением ее температуры (средней скорости звука). Синие линии ($\Delta t_{exp} = 2$ мин), описывающие вариации времен прихода отдельных импульсов относительно их регулярного хода, по-видимому, обусловлены влиянием внутренних волн на время распространения звуковых сигналов.

Для восстановления параметров среды в основном использовался так называемый метод согласованных временных откликов (method of matched temporal responses), описанный в [11] и заключающийся в поиске наилучшего соответствия (наибольшей корреляции) между экспериментальным и рассчитанным для различных параметров среды импульсами. Результат такой процедуры для одного из экспериментальных импульсов в первые 90 мин эксперимента представлен на рис. 5а. Здесь черными точечными линиями показан ряд импульсных откликов, включающих наиболее быстрые и наиболее медленные импульсы *1–4*, в первые 90 мин эксперимента. Вертикальные штриховые линии на этом рисунке определяют временные интервалы возможного расположения отдельных импульсов (интервалы расчета корреляции импульсов). Соответственно черной сплошной линией показан выбранный для сравнения экспериментальный импульс. Красной штриховой линией на этом же рисунке изображен наиболее близкий к экспериментальному отклик (корреляция = 0.94), рассчитанный по 2D лучевой программе. Цветные вертикальные линии (синяя, зеленая, красная и малиновая) отвечают временам прихода лучей, формирующих импульсы *1–4* соответственно. Расчет проводился для горизонтально однородной модели среды с 10-ти точечным по глубине профилем скорости звука (ПСЗ) $c(z_n)$ ($n = 1 : 10$), исходным для которого был взят усредненный по трем профилям скорости звука, измеренным в течении 5-го часа эксперимента вблизи точек постановки автономных донных станций. Этот профиль $c_o(z_n)$ показан на рис. 5б точечной маркированной “o” линией. Варьировались как значения $c(z_n) = c_o(z_n) + \Delta c(z_n)$, так и обусловленные внутренней волной (ВВ) глубины $z_n + \Delta z_n$, где $\Delta z_n = A_{inw}\,\varphi(z_n)$, $A_{inw}$ – амплитуда первой моды внутренней волны, $\varphi(z_n)$ – ее профиль, который в силу условий мелкого моря практически оставался неизменным в широком диапазоне частот внутренних волн. Этот профиль моды (схематично) пока-

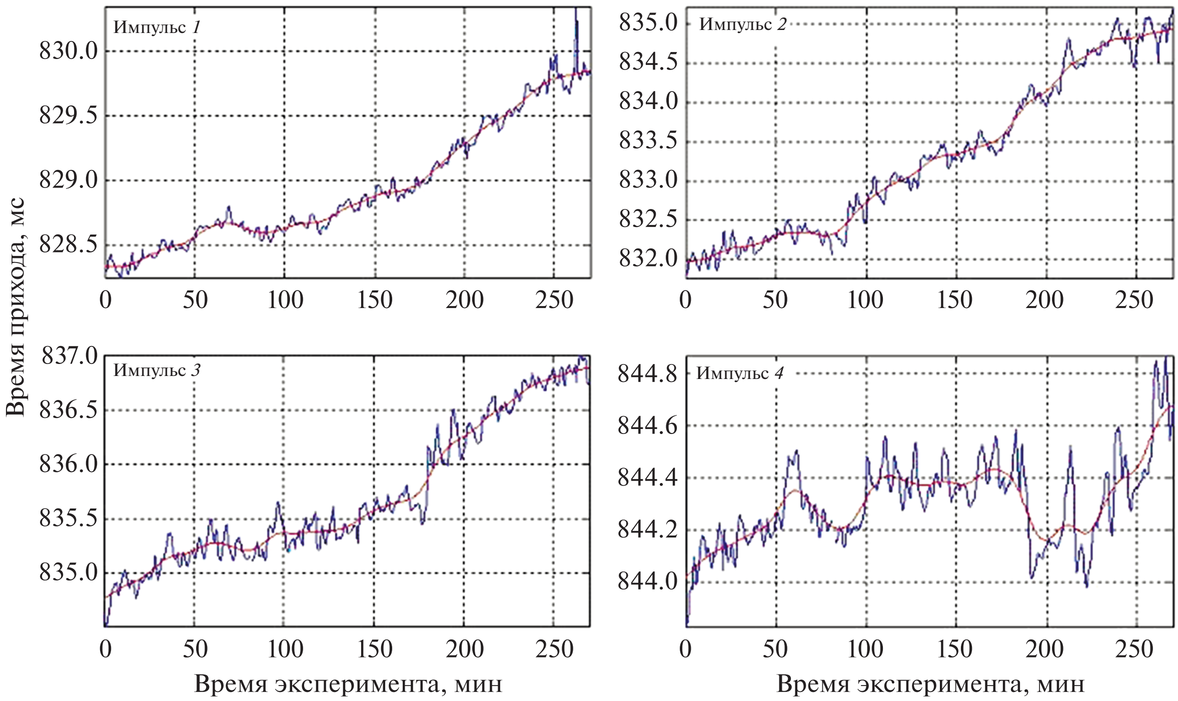



**Рис. 4.** Результаты расчетов времен прихода для четырех групп сигналов на трассе *1–2*.

зан на рисунке штриховой линией с точками. Представленный на верхнем рис. 5а расчетный импульс соответствует профилю скорости звука, показанному красной линией на рис. 5б.

Траектории собственных лучей (СЛ), соединяющих источник и приемник и формирующих расчетный импульс, представлены на рис. 5в тем же цветом, что и времена прихода на рис. 5а (вертикальные линии). Отсюда следует, что импульс *1* отвечает в основном однократно отразившимся от поверхности лучам и, возможно (как в данном примере), лучам с точкой заворота в приповерхностных слоях воды, где СЗ близка к максимальной. Импульс *3* связан с двукратно отраженными от поверхности лучами, а импульс *4* – с лучами в придонном слое, точки заворота которых могут быть и в термоклине. И наконец, весьма узкий (по углам выхода) пучок лучей с точками заворота вблизи верхней границы термоклина содержит СЛ, формирующие импульс *2*. Следует отметить, что интервал времен прихода всех СЛ из этого пучка весьма широк и соответствует (в зависимости от числа их отражений от дна) как лучам импульса *2* (чаще всего), так и лучам, близким к формирующим импульс *4*. В рассмотренном случае наблюдались слабые по амплитуде лучи с тремя дополнительными отражениями от дна (бирюзовые линии на рис. 5в и точки на рис. 5а). По-видимому, именно таким лучам соответствуют слабые отклики между экспериментальными импульсами *2* и *4* на рис. 3.

Можно ожидать, что именно импульс *2* наиболее подвержен влиянию ВВ, поскольку соответствующие ему СЛ большую часть времени своего распространения проводят в области термоклина – наибольшего смещения слоев воды под действием ВВ. Поэтому особое внимание при восстановлении ВВ обращалось на согласование экспериментального и лучевого импульсов именно этого номера. В качестве исходного ПСЗ выбирался профиль, близкий к оптимальному на рис. 5б (красная линия). Затем для всех экспериментальных импульсов $P_{ek}(t, t_{\exp})$ и лучевых $P_{rk}(t, \Delta c, A_{\text{inw}})$ рассчитывалась их корреляция:

$$C_k(t_{\exp}, \Delta c, A_{\text{inw}}) = \int P_{ek}(t, t_{\exp}) P_{rk}(t, \Delta c, A_{\text{inw}}) dt,$$
$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь все импульсы предполагались нормированными, так что интегрирование по времени $t$ для каждого $k$-го импульса проводится по соответствующему ему интервалу (см. рис. 5а), аргумент $\Delta c$ отвечает средней по глубине вариации ПСЗ. На рис. 6 представлен вид функции корреляции $C_{2n}(t_{\exp}, A_{\text{inw}})$ для импульса *2* и пяти значений вариаций $\Delta c_n = (-0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5)$ м/с. Легко видеть, что все эти зависимости подобны друг другу и с ростом $\Delta c_n$ смещаются (как целое) в направлении больших $A_{\text{inw}}$. Такой ход корреляционных функций $C_k(t_{\exp}, \Delta_{cn}, A_{\text{inw}})$ объясняется тем фактом, что смещение термоклина к поверхности

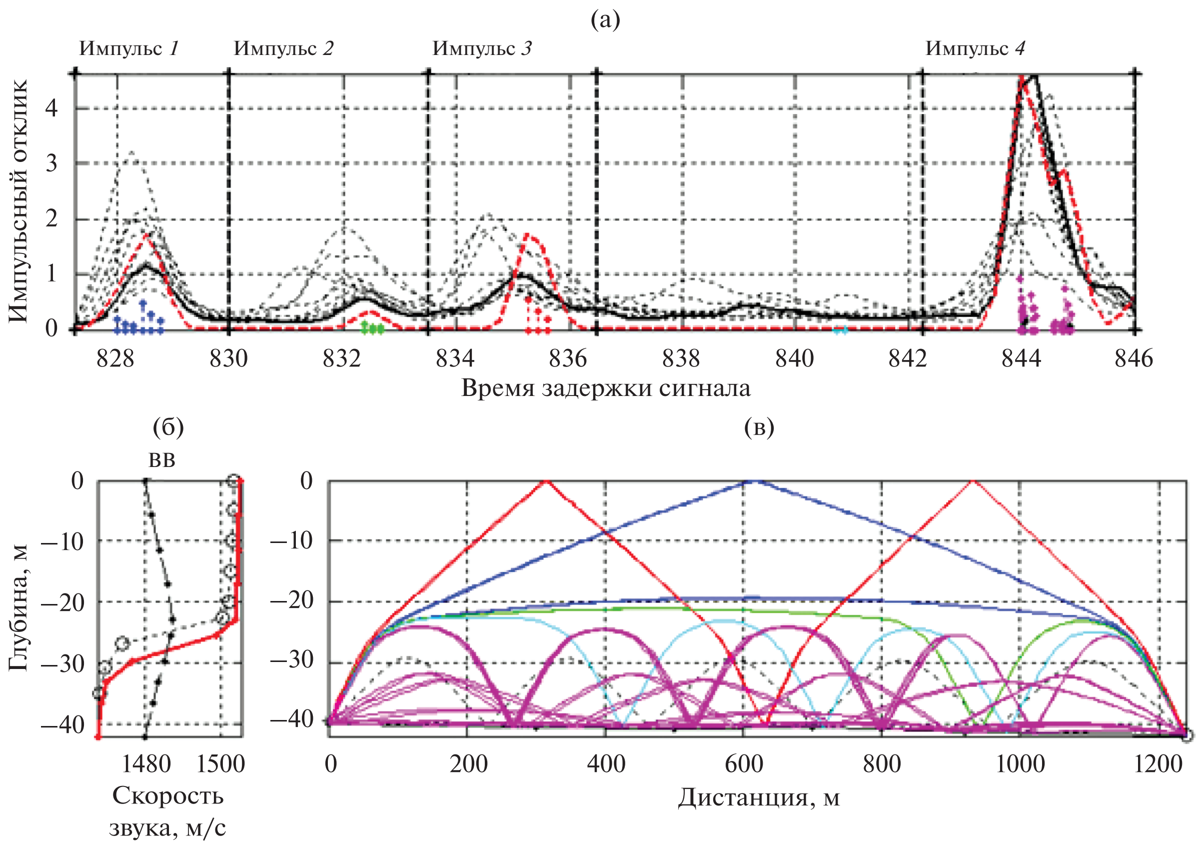



**Рис. 5.** (а) – Звуковые сигналы в первые 90 мин эксперимента. Сплошная линия и точки – эксперимент; штриховая – лучевой расчет, вертикальные линии соответствуют временам прихода лучей. (б) – Профили СЗ и восстановленной (точки) ВВ (схематично). (в) – Траектории собственных лучей.

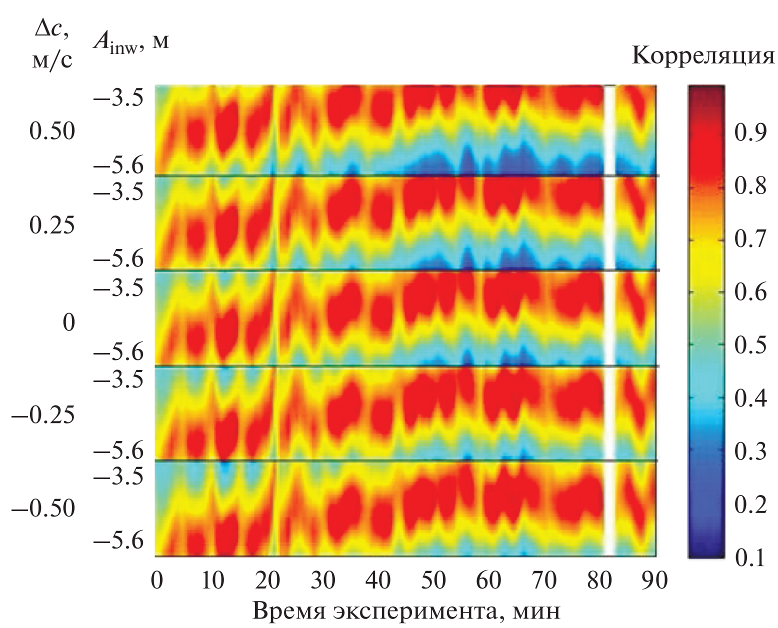



**Рис. 6.** Функции корреляции между экспериментальными и расчетными импульсами *2*.

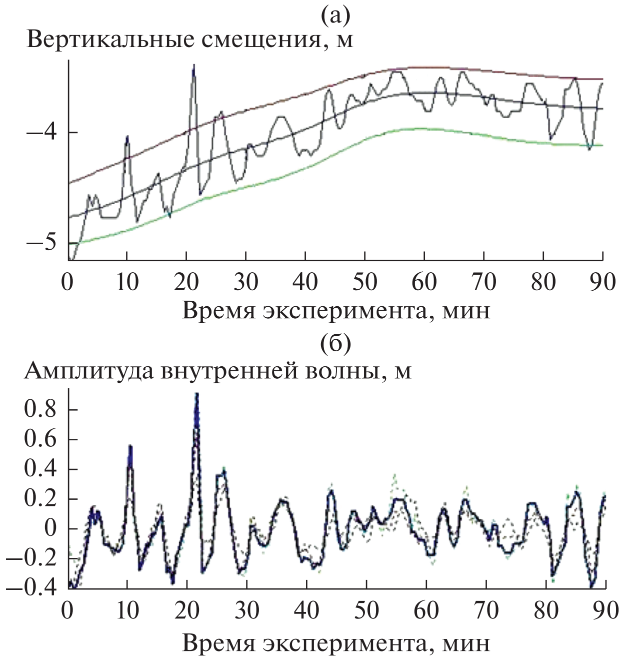



**Рис. 7.** Зависимости амплитуды ВВ от времени эксперимента.

(увеличение $A_{inw}$) уменьшает среднее значение скорости звука в водном слое (см рис. 5б).

Однако при этом вариации максимума функции корреляции относительно ее регулярного изменения в ходе эксперимента остаются практически неизменными. Подтверждение этого факта иллюстрируется на рис. 7. Зависимость показана на рис. 7а осциллирующей синей линией, сглаженные линии на этом рисунке отвечают усредненным по 20 минутному интервалу значениям функций $\langle A_{mn}(t_{exp})\rangle$ для $\Delta c_n$(м/с) = –0.5 (зеленая линия), 0 (синяя), 0.5 (красная). На рис. 7б тем же цветом представлены разности $\Delta A_{mn}(t_{exp}) = A_{mn}(t_{exp}) - \langle A_{mn}(t_{exp})\rangle$, которые весьма близки друг к другу. Практически к такой же зависимости приводит и другой метод восстановления амплитуды ВВ, основанный на схеме линейной лучевой томографии Манка [12] и показанный на рис. 7б черной точечной линией. Именно эту величину $\Delta A_{mn}(t_{exp})$ можно считать полученной оценкой амплитуды внутренней волны.

Такие же зависимости, как и представленные на рис. 6–7, были получены и для других интервалов времени эксперимента, отмеченных на рис. 3. В результате была восстановлена амплитуда ВВ на всем анализируемом интервале 0 мин < $t_{exp}$ < 270 мин.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Восстановленная реализация внутренних волн на отрезке 270 мин и ее частотный спектр показа-

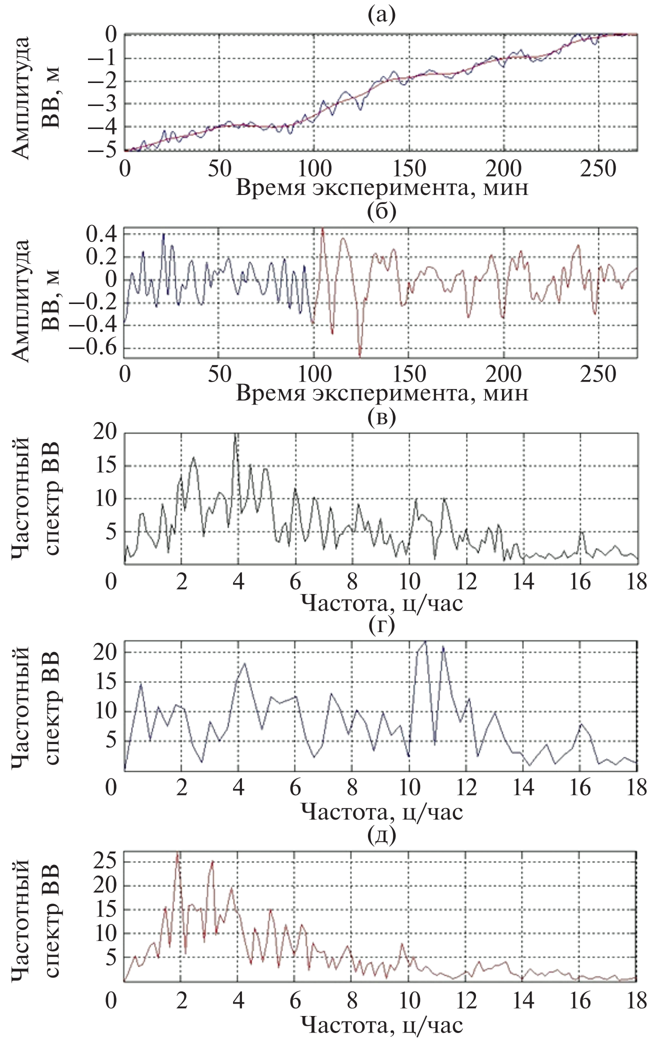



**Рис. 8.** (а) – Реализация внутренних волн, восстановленная по акустическим данным; (б) – короткопериодные внутренние волны; (в) – частотный спектр внутренних волн, рассчитанный для всего анализируемого времени акустического эксперимента (0–270) мин; (г) – спектр 1-го участка: (0–100) мин (синяя линия на рис. 8б); (д) – спектр 2-го участка: (100–270) мин (красная линия на рис. 8б).

ны на рис. 8. Причем на рис. 8а приведена реализация внутренних волн (синяя линия) вместе с ее усредненной по 20-минутному интервалу версией (сиреневая линия). Их разность показана на рис. 8б. Это запись внутренних волн с убранным трендом. Обращают на себя внимание пики спектра на частотах 2.5 и 4 ц/ч, а также в диапазонах 6–8 и 10–12 ц/ч (рис. 8в). Обратившись к исходной реализации можно заметить, что в первый час наблюдений проходили короткопериодные волны с периодами около 5 мин, а затем вместе с начавшимся постепенным уходом термоклина вверх стали преобладать волны больших периодов (15–20 мин). Высоты волн лежали в пределах

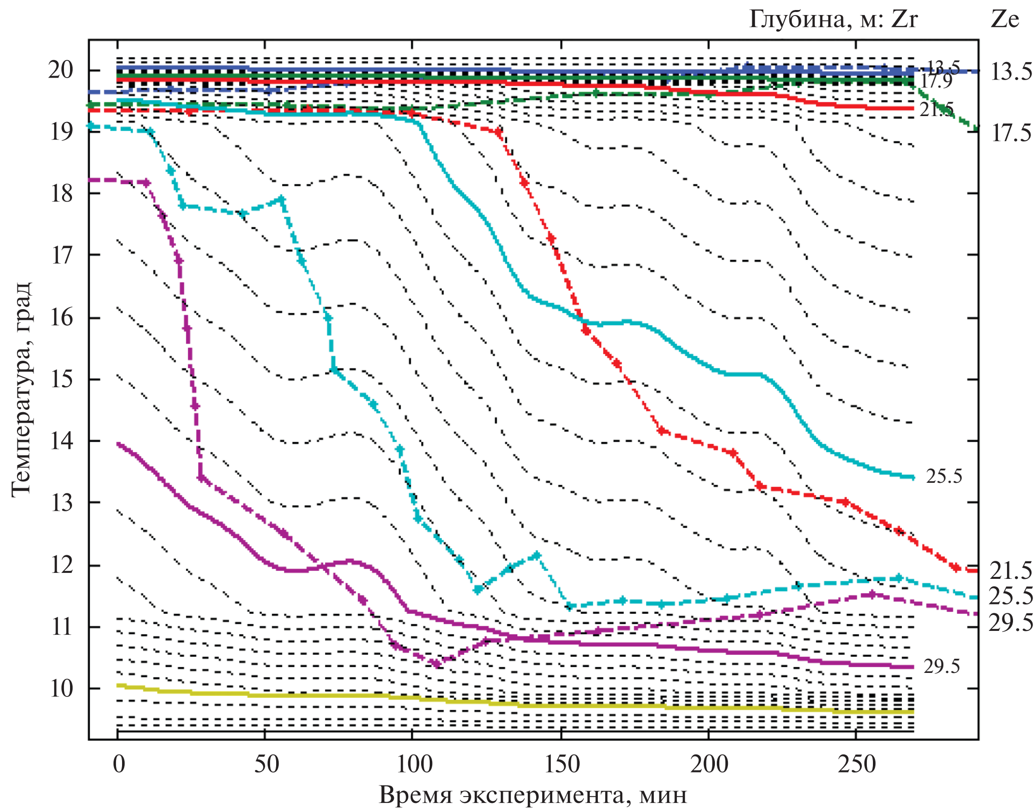



**Рис. 9.** Изменение температуры воды на различных глубинах в ходе эксперимента: измеренное термисторами — штриховые линии, рассчитанное по восстановленным амплитудам ВВ — сплошные и точечные линии.

от 0.5 до 1 м. Отмеченный тренд термоклина, продолжавшийся 3 ч, составил 4 м.

Полученные данные о внутренних волнах из акустического эксперимента подтверждаются записями термогирлянды. В результате получается следующая картина. Во время акустического эксперимента по шельфу в направлении берега распространялись интенсивные инерционные внутренние волны с периодом около 17 ч, что является характерной чертой для внутриволнового поля Черного моря [13, 14]. Обработанная реализация относилась ко времени прохождения через акваторию эксперимента подошвы инерционной внутренней волны, после чего пошел передний фронт волны. В это время термоклин перемещался из придонного положения вверх. Этим объясняется появление на реализации тренда, а в записях гирлянды этому соответствовало похолодание водной толщи. На рис. 9 штриховыми линиями показан ход температуры на указанных цифрами глубинах *Ze* (в м) во время акустического эксперимента (0–270 мин), измеренный заякоренной цепочкой термисторов. Здесь же точечными линиями представлено рассчитанное по восстановленным амплитудам ВВ изменение в ходе эксперимента температуры воды с шагом 0.5 м на глубинах *Zr* = (14–35) м. Сплошные цветные линии соответствуют глубинам термисторов. Можно отметить достаточно хорошее качественное соответствие восстановленных колебаний термоклина с результатами независимых измерений с учетом того, что последние были проведены в более мелководном (34 м) месте на удалении около 1 км от АДС.

На переднем фронте длинной внутренней волны присутствовали короткопериодные внутренние волны. Сначала это были 5-минутные волны небольших амплитуд (до 0.5 м), а затем, по мере укручения фронта длинной волны, амплитуды короткопериодных волн возросли до 1 м, а периоды увеличились до 15–20 мин. Возрастание амплитуд короткопериодных внутренних волн, вероятно, было вызвано возникновением сдвиговой неустойчивости течений на переднем фронте инерционной внутренней волны. Необходимо подчеркнуть высокую точность представленного акустического метода измерения внутренних волн: с его помощью удалось надежно зарегистрировать волны таких малых амплитуд, регистрация которых контактными методами бывает затруднительна. Сопоставляя данные, полученные в данном эксперименте, с тем, что известно о внутренних волнах Черного моря, можно сделать выводы, что нами наблюдались помимо внутренних инерционных волн так называемые фоновые внутренние волны высокочастотного диапазона. Вследствие отсутствия в Черном море приливов короткопериодные волны здесь по амплитудам существенно меньше своих аналогов из открытых морей или океана, что было показано в [15]. В то же время другие природные источники генерации, связанные с атмосферным воздействием, могут приводить и приводят к возникновению на черноморском шельфе интенсивных солитоноподобных внутренних волн высотой в несколько метров [16, 17]. Подобные волны даже могут достигать высоты 15 м (это случай зарегистрированных рекордных внутренних волн на Черном море) [8, 9], но для выявления таких случаев надо проводить длительные наблюдения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все характеристики внутренних волн, полученные в акустическом томографическом эксперименте, типичны для внутриволнового поля черноморских шельфов, и они подтверждены одновременными контактными измерениями, осуществленными с помощью термогирлянды. В результате можно сделать вывод о применимости предложенного в данной работе метода акустической томографии мелкого моря для исследований не только течений и структуры скорости звука на шельфе, что было продемонстрировано в работе [3], но также и внутренних волн всех диапазонов (от инерционных до короткопериодных волн).

Обработка результатов эксперимента выполнена в рамках темы госзадания Минобрнауки РФ № FMWE-2021-0010 и при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-55-S52005.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурдуев А.В.* Акустический мониторинг изменчивости подводной среды (экспериментальная проверка новых методов) // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 422–430.
2. *Kuryanov B., Serebryany A.* Acoustic monitoring of environmental variability induced by storm on shelf of the Black Sea: internal bore observation // 19th International congress on acoustics. ICA 2007 Madrid. Special Issue of the journal Revista de Acustica. 2007. V. 38. № 3–4.
3. *Гончаров В.В., Иванов В.Н., Кочетов О.Ю., Курьянов Б.Ф., Серебряный А.Н.* Акустическая томография на шельфе Черного моря // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 614–622.
4. *Goncharov V., Kuryanov B., Serebryany A.* Local acoustic tomography on shelf of the Black Sea // Hydroacoustics. 2013. V. 16. P. 67–76.
5. *Серебряный А.Н., Химченко Е.Е.* Сильная изменчивость скорости звука в шельфовой зоне Черного моря, вызванная инерционными внутренними волнами // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 580–590. https://doi.org/10.1134/S032079191805009X
6. *Серебряный А.Н., Лаврова О.Ю.* Антициклонический вихрь на шельфе северо-восточной части Черного моря: совместный анализ космических снимков и данных акустического зондирования толщи моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2008. Т. 5. № 2. С. 206–215.
7. *Лаврова О.Ю., Митягина М.И., Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* Изучение гидродинамических процессов в шельфовой зоне на основе спутниковой информации и данных подспутниковых измерений // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2015. Т. 12. № 5. С. 98–129.
8. *Бондур В.Г., Серебряный А.Н., Замшин В.В., Тарасов Л.Л., Химченко Е.Е.* Интенсивные внутренние волны аномальных высот на шельфе Черного моря // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 1. С. 119–128.
9. *Бондур В.Г., Серебряный А.Н., Замшин В.В.* Аномальный цуг внутренних волн рекордных высот на шельфе Черного моря, генерируемый атмосферным фронтом // Доклады Акад. наук. 2018. Т. 483. № 4. С. 431–436.
10. *Очередник В.В., Зацепин А.Г., Куклев С.Б., Баранов В.И., Машура В.В.* Примеры подходов к исследованию температурной изменчивости вод шельфа Черного моря при помощи кластера термокос // Океанология. 2020. Т. 60. № 2. С. 173–185.
11. *Гончаров В.В.* Метод согласованных временных откликов в акустической томографии океана // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 5. С. 622–629.
12. *Munk W.U., Vorchester P., Wunsh C.* Ocean acoustic tomography // Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. 423 p.
13. *Химченко Е.Е., Серебряный А.Н.* Внутренние волны на кавказском и крымском шельфах Черного моря (по летне-осенним наблюдениям 2011–2016 гг.) // Океанологические исследования. 2018. Т. 46. № 2. С. 69–87. https://doi.org/10.29006/2587-9634.JOR-2018.46(2).7
14. *Serebryany A., Khimchenko E., Popov O., Denisov D., Kenigsberger G.* Internal Waves Study on a Narrow Steep Shelf of the Black Sea Using the Spatial Antenna of Line Temperature Sensors // J. Marine Science and Engineering. 2020. V. 8. P. 833. https://doi.org/10.3390/jmse8110833
15. *Иванов В.А., Серебряный А.Н.* Частотные спектры короткопериодных внутренних волн в бесприливном море // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 6. С. 683–685.
16. *Иванов В.А., Серебряный А.Н.* Внутренние волны на мелководном шельфе бесприливного моря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19. № 6. С. 661–665.
17. *Иванов В.А., Серебряный А.Н.* Короткопериодные внутренние волны в прибрежной зоне бесприливного моря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 6. С. 648–656.

**EDN:** YTWZAU
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 400–408*

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

*УДК 534.231*

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРИЕМНЫХ АНТЕНН ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЗВУКА В МЕЛКОМ МОРЕ С СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМ ВОДОПОДОБНЫМ ДНОМ


**А. А. Луньков[a, b], *, В. Г. Петников[a], **, Д. Д. Сидоров[a, b], *****

[a] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия*

[b] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская 5, Москва, 105005 Россия*

**e-mail: lunkov@kapella.gpi.ru*

***e-mail: petniko@kapella.gpi.ru*

****e-mail: sidorov.dan.dmit@gmail.com*

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 22.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

В рамках численного моделирования исследованы особенности формирования низкочастотного (55 и 137 Гц) акустического поля и его регистрации с помощью линейных горизонтальных и вертикальных антенн в мелководном волноводе глубиной ≈30 м с неоднородным дном. Рассматривается область, где скорость звука в дне близка к скорости звука в воде. Для проведения расчетов использовано пространственное распределение скорости звука в дне Карского моря, полученное при инженерной сейсморазведке, а также данные пробного бурения. Продемонстрировано, что неоднородное дно не только влияет на средние по глубине потери при распространении звука, которые можно зарегистрировать вертикальной антенной, но и приводит к горизонтальной рефракции акустических волн, которая проявляется при сканировании диаграммы направленности протяженной горизонтальной антенны. Максимальные эффекты наблюдаются для низкой частоты (55 Гц): снижение потерь при распространении достигает 5 дБ, а смещение максимума отклика антенны – 3.4°.

*Ключевые слова:* акустика мелкого моря, распространение звука на арктическом шельфе, акустика морских осадков

**DOI:** 10.31857/S0320791922040074

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что различные неоднородности в мелком море существенным образом влияют на дальнее распространение низкочастотного звука [1]. К таким неоднородностям, в частности, относятся: неровности рельефа дна [2, 3], цуги интенсивных внутренних волн [4], температурные фронты [5]. В случае, когда неоднородности приводят к изменениям параметров акустического волновода в поперечном относительно трассы направлении распространения звука, они вызывают горизонтальную рефракцию акустических волн. Рефракция проявляется в виде искривления звуковых лучей (и соответственно фазового фронта волны) в горизонтальной плоскости, а также она приводит к изменениям потерь при распространении. В зависимости от физической природы неоднородностей рефракция отличается как по величине угла отклонения лучей, так и по своим проявлениям в пространственном распределении амплитуды звукового поля [2–5]. Так, например, за счет горизонтальной рефракции возможна фокусировка или дефокусировка звука в горизонтальной плоскости [4].

В то же время в мелководном волноводе существует еще один вид неоднородностей, который отличается по своей физической природе от неоднородностей, указанных выше. Это неоднородность верхнего слоя донных осадочных пород [6], которая также может приводить к горизонтальной рефракции [7]. По-видимому, впервые на это было обращено внимание в статье [8]. Однако в этой работе одновременно рассматривались две причины, приводящие к рефракции. Это неровности рельефа и неоднородности осадочных пород. Показано, что первая причина для исследованного мелководного района (Атлантический шельф США) является определяющей для горизонтальной рефракции. Уточним, что это связано не только с топографией морского дна в месте проведения экспериментальных исследований [8], но и с тем, что скорость звука в дне в районе работ в среднем заметно превышала скорость звука в водном слое. Соответственно звуковое поле при дальнем распространении на Атлантическом шельфе в основном сосредоточено в придонном акустическом волноводе и слабо проникает в толщу донных осадочных пород. Однако так бывает не всегда. В частности, на Арктическом шельфе России, например, в Карском море [6], существуют районы с постоянной глубиной и сильно неоднородной донной структурой. В этих районах донные осадки часто не консолидированы и скорость звука в них близка к скорости звука в воде (водоподобное дно).

Целью настоящей работы является изучение в рамках численного моделирования возможности наблюдения горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородной структурой донных осадков при водоподобном дне. Предполагается, что для указанной структуры характерен достаточно большой горизонтальный градиент поля скорости звука в дне, в среднем направленный перпендикулярно направлению трассы распространения звука в водном слое. При этом основное внимание уделяется оценкам возможностей регистрации в эксперименте возмущений звукового поля, связанных с рефракцией, при помощи линейных горизонтальных и вертикальных приемных антенн.

## 2. АКУСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЛКОВОДНОГО ВОЛНОВОДА С НЕОДНОРОДНЫМ ДНОМ

Для анализа звукового поля с учетом горизонтальной рефракции использовались методика и параметры численного моделирования, представленные нами ранее [7]. В качестве исходных данных для моделирования брались результаты измерений поля скорости звука $c_b(X,Y,Z)$ в дне Карского моря, полученные при инженерной сейсморазведке (см. рис. 1а). Здесь $(X,Y,Z)$ – декартова система координат с осью $Z$, направленной вниз. Для анализа выбиралась область акватории, которая соответствует водоподобному дну. Она обведена штриховым овалом на рис. 1а и показана отдельно на рис. 1б. Для этой области введена локальная система координат $(x,y,z)$. Начало координат находится на плоскости поверхности моря. В отличие от работы [7], в настоящем исследовании при моделировании звукового поля мы выбирали разные местоположения источника звука, и в том числе местоположение, отмеченное пятиконечной звездой на рис. 1б. Как показали расчеты, именно для этого положения горизонтальная рефракция при дальнем распространении звука проявляется в наибольшей степени. При моделировании выбирались следующие параметры акустического волновода. Глубина волновода считалась постоянной и равной $H = 32$ м. Скорость звука в воде предполагалась постоянной и равной $c = 1460$ м/с. Дно считалось водоподобной средой с неоднородной структурой поля скорости звука. Сдвиговые волны не учитывались. Плотность осадочных пород полагалась неизменной и равной $\rho_1 = 1.85$ г/см$^3$, что соответствовало измерениям плотности при малоглубинном бурении. Коэффициент затухания звука в дне выбирался равным $\beta_{1f} = 1.07 \times 10^{-4} f^{1.6}$ [дБ/км/Гц]. Для моделирования использовалось модовое описание звукового поля, а для учета рефракции – модовое параболическое уравнение [9]. Частота тональных акустических сигналов предполагалась равной $f = 55$ и 137 Гц.

Основными результатами моделирования являлись средние по толщине водного слоя потери при распространении $TL(x,y)$:

$$TL(x,y) = -10\lg \frac{\int_0^H |P(x,y,z)|^2 dz}{\int_0^H |P(x_1,y_1,z)|^2 dz}, \quad (1)$$

которые вычислялись, начиная с расстояния от источника $r_0 = 3H$ $\left(r_0 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)$. Здесь $P(x,y,z)$ – комплексная амплитуда звукового поля в декартовой системе координат, показанной на рис. 1б. При модовом описании эта амплитуда представлялась в виде

$$P(x,y,z) = \sum_{m=1}^{M} A_m(x,y)\psi_m(x,y,z), \quad (2)$$

где $A_m(x,y)$ – комплексная амплитуда моды, $\psi_m(x,y,z)$ – профиль моды с номером $m$. Для вычисления величины $A_m(x,y)$ использовалось так называемое модовое параболическое уравнение [9]. Методика решения такого типа уравнений подробно изложена в работе [10]. Потери при распространении для отдельных мод определялись следующим приближенным соотношением:

$$TL_m(x,y) \approx -20\lg \frac{|A_m(x,y)|}{|A_m(x_1,y_1)|}. \quad (3)$$

Помимо указанных величин также вычислялись разности потерь при распространении без учета и с учетом горизонтальной рефракции $\Delta TL = TL|_{N\times 2D} - TL|_{3D}$ и $\Delta TL_m = TL_m|_{N\times 2D} - TL_m|_{3D}$

для полного поля и отдельных мод, соответственно.

## 3. О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ

Горизонтальная рефракция проявляется в виде:

1. Отклонения от прямолинейного распространения акустических волн.

2. Изменения потерь при распространении, наблюдаемых как для звукового поля в целом $\Delta TL$, так и для отдельных мод $\Delta TL_m$.

Однако наблюдение или учет указанных эффектов в натурном эксперименте сопряжен с определенными трудностями. Численные эксперименты показали, что угол рефракции в исследуемом районе зависит от местоположения излучателя и приемной антенны и составляет единицы градусов. Для регистрации угла прихода рефрагированного луча необходимо использовать фазированную горизонтальную линейную антенну достаточно большой длины, обеспечивающую угловое разрешение, сравнимое с углом рефракции. Отклик такой антенны $S(\varphi)$ на тональный сигнал определялся следующим выражением:

$$S(\varphi) = \left| \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^{Q} P_q W_q \exp\left(j\xi_1 d\,(q-\hat{q})\sin\varphi\right) \right|, \qquad (4)$$

где $\varphi$ – угол компенсации антенны (отсчитывается от нормали к антенне), $Q$ – количество гидрофонов в линейной антенне (для частоты источника звука 137 Гц – $Q$ = 201 и для 55 Гц – $Q$ = 77), $P_q$ – амплитуда звукового поля в волноводе на гидрофоне с номером $q$, $W_q$ – чувствительность гидрофона, определяемая выбранным окном аподизации, $d$ – расстояние между гидрофонами (для частоты источника звука 137 Гц – $d$ = 5.0 м и для 55 Гц – $d$ = 13.0 м), $\xi_1$ – действительная часть собственного значения первой моды в точке расположения центрального гидрофона антенны, $\hat{q}$ – номер центрального гидрофона. При расчетах для подавления боковых лепестков применялось окно Хемминга вида:

$$W_q = 0.53836 - 0.46164\cos\left(\frac{2\pi(q-1)}{Q-1}\right). \qquad (5)$$

На рис. 2 показан нормированный отклик линейной антенны длиной $L \approx 1$ км, расположенной на глубине 32 м, в зависимости от угла компенсации $\varphi$, получаемый при учете горизонтальной рефракции и без такого учета (однородное дно) для частоты сигнала 55 Гц (рис. 2а) и 137 Гц (рис. 2б). (Параметры однородного дна соответствовали значениям в месте расположения источника звука.) На рис. 2а хорошо видно изменение угла компенсации на $\Delta\varphi = 3.4°$ при учете рефракции. Такое изменение имеет место при положении источника звука и центра приемной антенны, показанном на рис. 1б. Отметим, что при других взаимных расположениях источника звука и приемной антенны эффект рефракции проявляется в меньшей степени (см. табл. 1). Здесь же следует отметить, что угловая ширина отклика антенны на рис. 2 заметно превышает известное оценочное значение $\Delta\Theta \approx \lambda/L$, где $\lambda$ – длина акустической волны ($\Delta\Theta \approx 0.6°$ для $f$ = 137 Гц и $\Delta\Theta \approx 1.5°$ $f$ = 55 Гц). Расчеты показали, что это превышение связано как с искривлением фазового фронта падающей на антенну звуковой волны при расстоянии ≈10 км между излучателем и приемной антенной, так и с аподизацией.

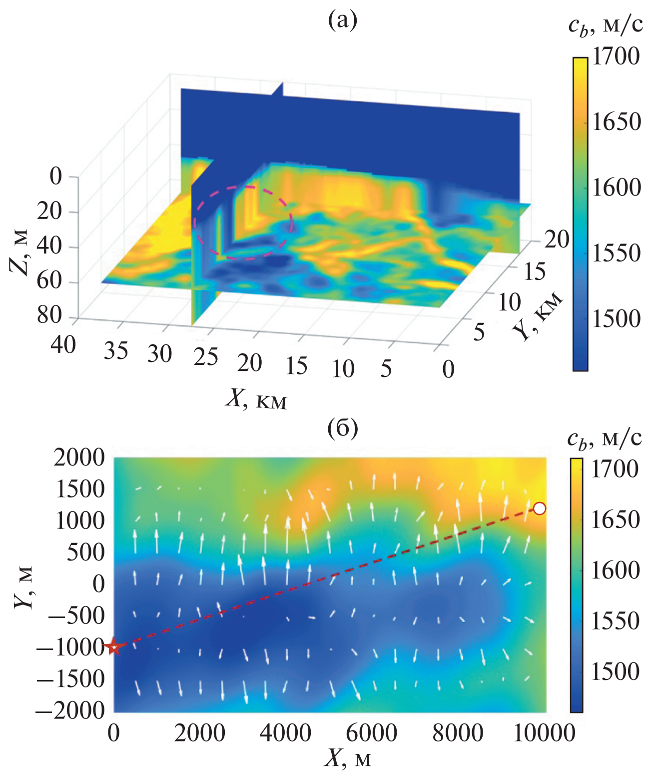



**Рис. 1.** (а) – Поле скорости звука в одном из районов Карского моря. Штриховой линией (эллипс) отмечен район, выбранный для моделирования; (б) – горизонтальный разрез поля скорости звука в этом районе на глубине $z$ = 41 м. Белыми векторами обозначено распределение $\mathbf{g}(x,y;z)$. Пятиконечной звездой отмечено положение источника звука в численном эксперименте, кружок соответствует положению центра линейной горизонтальной приемной антенны. Антенна ориентирована параллельно оси $y$. Пунктирной линией показана акустическая трасса между источником и центром антенны.

Для частоты сигнала 137 Гц угол рефракции $\Delta\varphi$ уменьшается. Это обусловлено тем, что звуковое поле, отвечающее волноводной моде с заданным

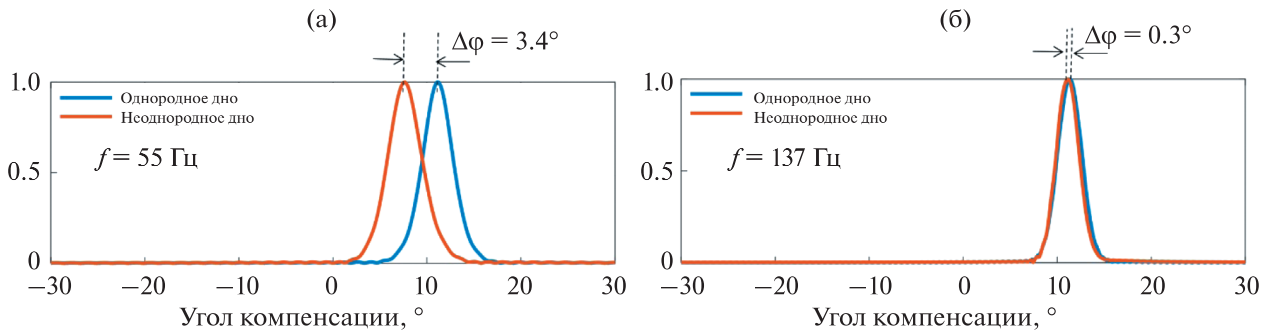



**Рис. 2.** Отклик горизонтальной антенны на частоте (а) – 55 Гц и (б) – 137 Гц. Красная линия – неоднородное дно с учетом эффекта рефракции. Синяя линия – однородное дно.

номером, с ростом частоты все меньше и меньше проникает в морское дно. Это хорошо видно на рис. 3, где показаны вертикальные профили первой моды (реальная часть) в точке расположения источника звука (рис. 3а) и центра приемной антенны (рис. 3б). Заметим, что глубина проникновения в дно зависит от скорости звука в морских осадках. На рис. 4 показаны вертикальные профили скорости звука для тех же точек.

Таким образом, для заметной горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородностями дна, необходимо соответствующее сочетание трех факторов:

1. Наличие выделенного направления для вектора $\mathbf{g}(x, y; z) = \nabla_{\perp} c_b(x, y; z)$, составляющего угол, близкий к 90° к волновому вектору акустических волн $\mathbf{k}$; $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y}$.

2. Достаточно большое значение модуля этого вектора, $|\mathbf{g}(x, y; z)|$;

3. Среднее значение скорости звука в дне, близкое к скорости звука в воде.

Все эти условия выполнялись в той или иной степени для одной из акустических трасс, выбранной нами для моделирования и показанной на рис. 1б.

**Таблица 1.** Смещение максимума отклика антенны вследствие неоднородной структуры дна при различных положениях центра антенны

| Положение центра $y_c$ | Частота $f$ | |
|---|---|---|
| | 55 Гц | 137 Гц |
| −1500 м | +1.6° | +0.2° |
| −1000 м | +2.5° | +0.1° |
| −500 м | +1.8° | −0.2° |
| 0 м | −0.5° | −0.3° |
| 500 м | −3.1° | +0.1° |
| 1000 м | −3.4° | −0.3° |
| 1500 м | −2.5° | −0.4° |

Потери при распространении $TL$ и $TL_m$, рассчитанные для поперечного сечения $x = 10$ км вдоль оси $y$ (линия, на которой расположена горизонтальная антенна), показаны на рис. 5. Такие потери можно регистрировать с помощью вертикальной приемной антенны. Здесь антенна используется как обычная вертикальная цепочка гидрофонов, т.е. без когерентного сложения комплексных амплитуд принимаемых гидрофонами сигналов. Длина антенны зависит от параметров задачи. Например, для частоты $f = 55$ Гц в рассматриваемом волноводе существует только одна энергонесущая мода. Соответственно потери при распространении (3) для этой моды примерно равны потерям при распространении для всего поля в целом (1). Средний коэффициент затухания для этой моды равен 0.9 дБ/км. Здесь имеется в виду усреднение по трассе, обозначенной пунктирной линией на рис. 1б. Для измерения потерь при распространении в этом случае достаточно иметь антенну, перегораживающую водный слой.

Для частоты $f = 137$ Гц энергонесущих мод три. Для этих мод средние коэффициенты затухания приведены в табл. 2. Как видно в таблице, для выбранной трассы имеет место значительная разница в коэффициентах затухания различных мод, что обусловлено различной глубиной проникновения волноводных мод в морское дно, которая в свою очередь зависит от скорости звука в дне. Для иллюстрации этого утверждения на рис. 6 показаны вертикальные профили первой, второй и третьей моды на частоте 137 Гц в начале и в конце трассы. Таким образом, на расстоянии в несколько километров от источника звука, где проявляется горизонтальная рефракция, наблюдаемые акустические эффекты связаны в основном с воздействием неоднородностей дна на первую волноводную моду. Это происходит даже в случае, когда в волноводе распространяется несколько волноводных мод, поскольку амплитуды

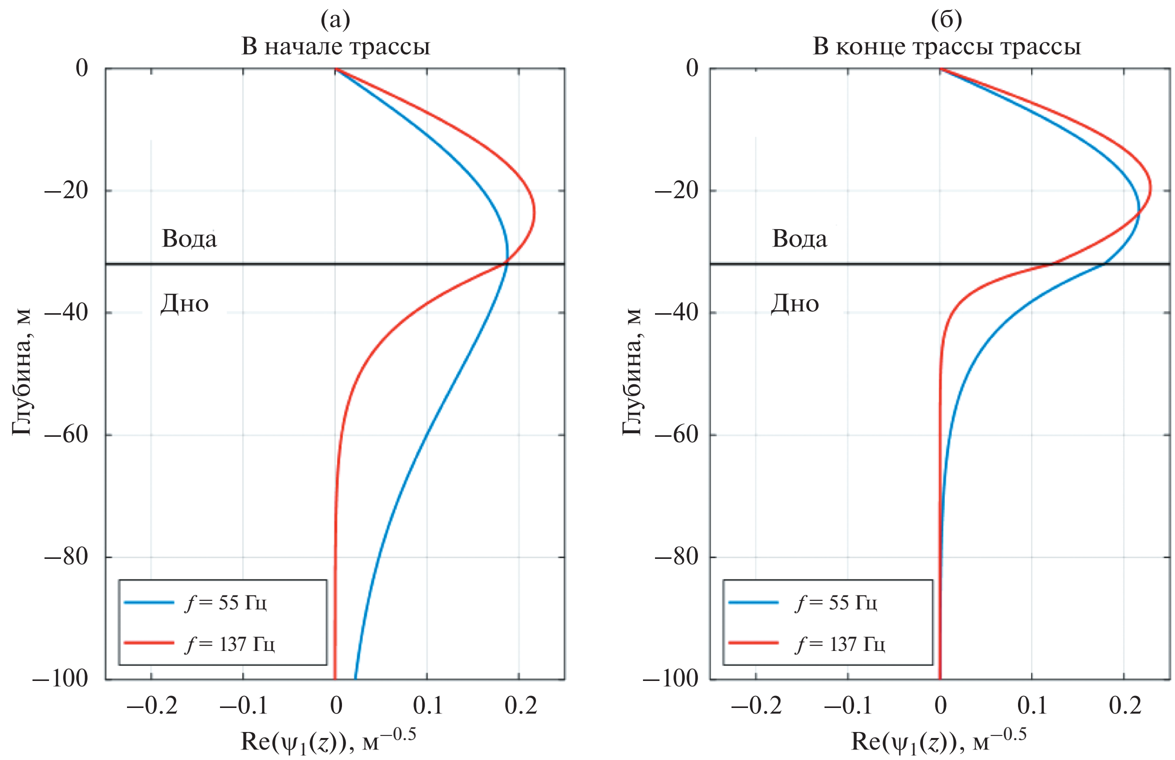



**Рис. 3.** Вертикальные профили первой моды для частоты 55 и 137 Гц (а) – в начале и (б) – в конце акустической трассы. Горизонтальной сплошной линией на рисунках отмечена граница вода–дно.

высших мод на указанных расстояниях в рассматриваемом волноводе значительно меньше амплитуды первой моды.

Заметим также, что известные алгоритмы модовой селекции, основанные на использовании вертикальной приемной антенны, перегораживающей весь водный слой (и даже закопанной в дно), в рассматриваемой ситуации оказываются неэффективными. Численные эксперименты показывают, что такие антенны, использующие условие ортогональности мод при их ограниченной длине, не позволят наблюдать потери при распространении высших мод, показанные на рис. 5 для частоты 137 Гц. Для иллюстрации этого утверждения сравним результаты вычисления средних по глубине потерь для звукового поля, состоящего только из второй моды в адиабатическом приближении без учета рефракции (здесь и далее в отличие от формулы (1) предполагается, что антенна не только перекрывает водный слой, но и погружена в дно на глубину $H_1$ ($H_1 > H$)),

$$\widetilde{TL}(x,y) = -10\lg \frac{\left|\int_0^{H_1} \tilde{P}(x,y,z)dz\right|^2}{\left|\int_0^{H_1} \tilde{P}(x_1,y_1,z)dz\right|^2}, \qquad (6)$$

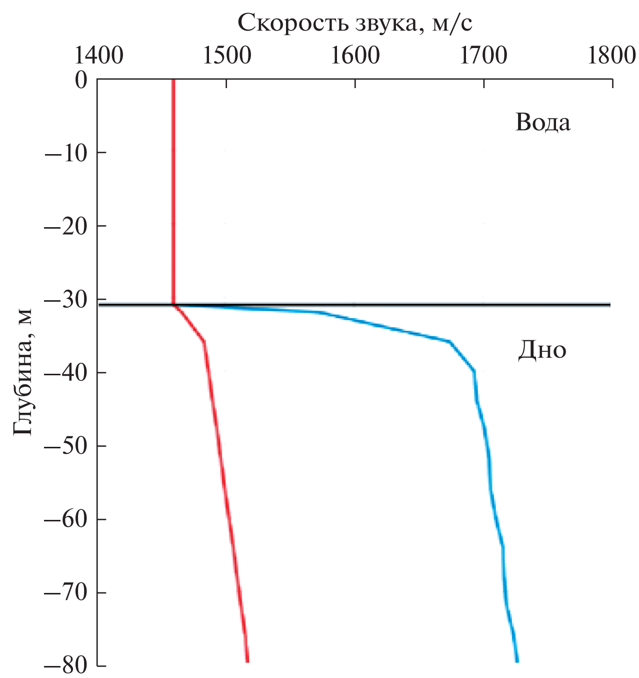



**Рис. 4.** Вертикальный профиль скорости звука в точке излучения (красная линия) и в точке расположения центрального гидрофона антенны (синяя линия). В воде синяя и красная кривые совпадают. Горизонтальной сплошной линией на рисунках отмечена граница вода–дно.

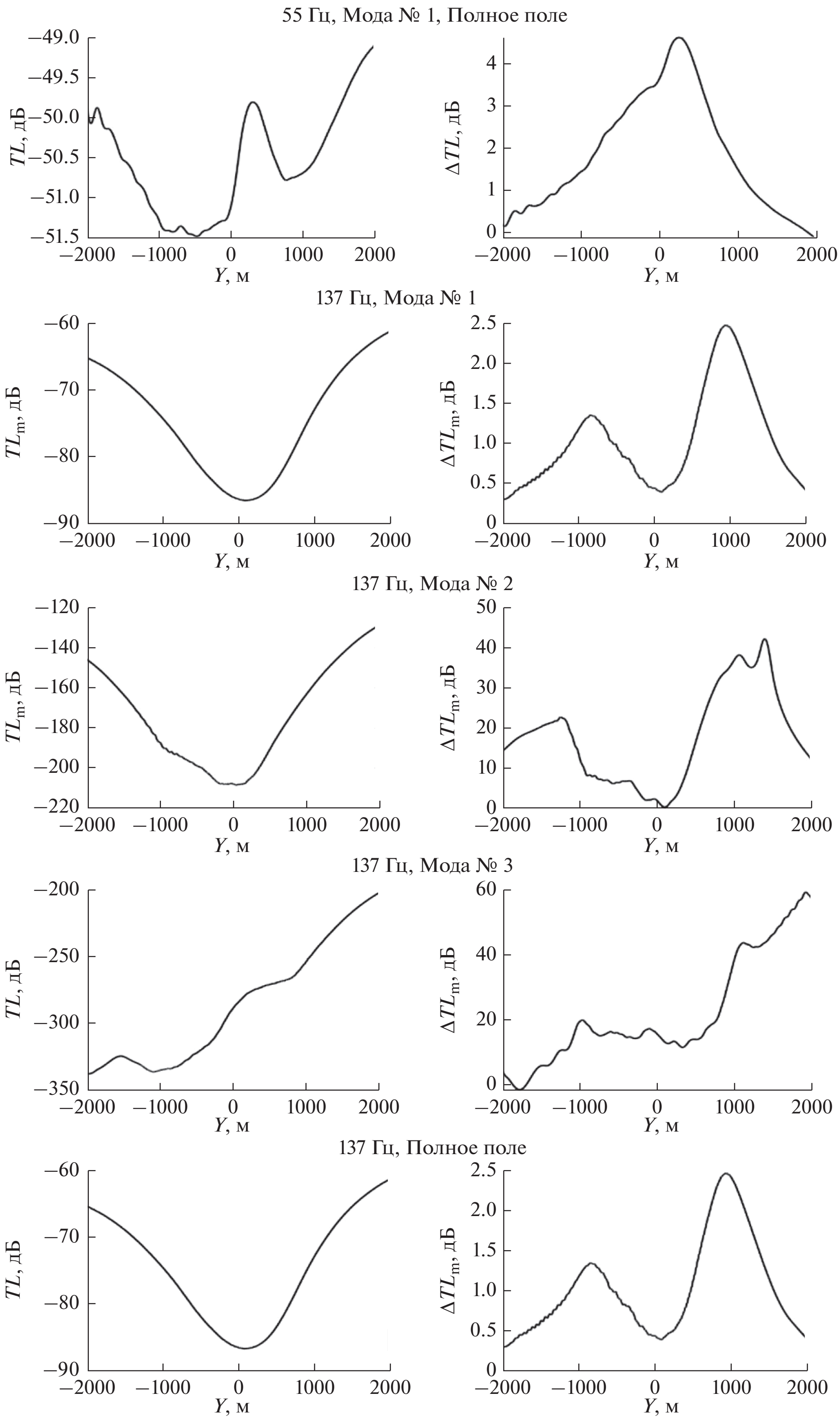



**Рис. 5.** Потери при распространении на расстоянии ≅10 км от источника на линии расположения антенны при учете горизонтальной рефракции и разность потерь при распространении, полученных без учета и с учетом горизонтальной рефракции (верхние два рисунка относятся к частоте 55 Гц, остальные – к частоте 137 Гц). В левой колонке с рисунками показаны величины $TL$ для полного поля и $TL_m$ для отдельных мод, соответственно. В правой колонке – величины $\Delta TL$ для полного поля и $\Delta TL_m$ для отдельных мод, соответственно.

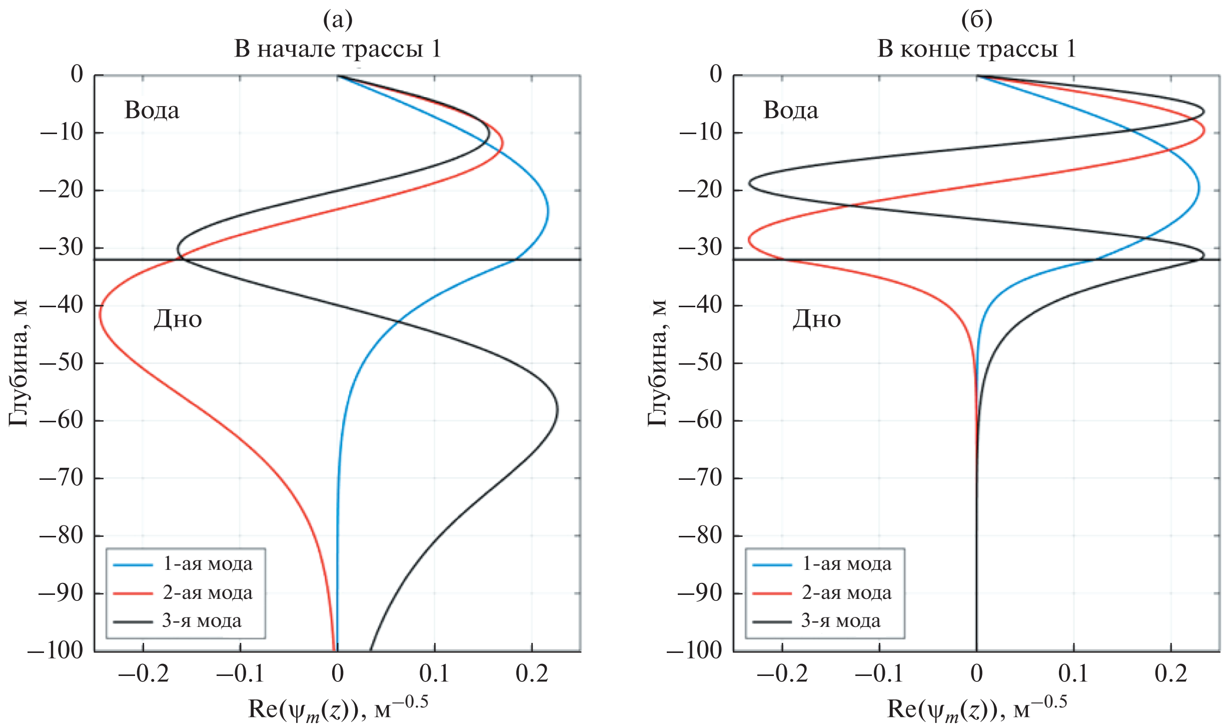



**Рис. 6.** Первая, вторая и третья волноводные моды (а) – в точке излучения и (б) – в точке приема. Черной горизонтальной линией показана глубина места.

$$\tilde{P}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\psi_2(x,y,z_0)\,\psi_2(x,y,z)\,\psi_2(x,y,z)}{\sqrt{\xi_2(x,y)\,r}}\exp\left(\int\limits_0^r \xi_2(r')\,dr'\right) & \text{при}\quad 0\le z\le H,\\ \dfrac{\psi_2(x,y,z_0)\,\psi_2(x,y,z)\,\psi_2(x,y,z)}{m_1\sqrt{\xi_2(x,y)\,r}}\exp\left(\int\limits_0^r \xi_2(r')\,dr'\right) & \text{при}\ H\le z\le H_1,\end{cases}$$

с потерями, полученными после выделения второй моды из полного поля с помощью вертикальной антенны:

$$\widehat{TL}(x,y)=-10\lg\frac{\left|\int\limits_0^{H_1}\hat{P}(x,y,z)dz\right|^2}{\left|\int\limits_0^{H_1}\hat{P}(x_1,y_1,z)dz\right|^2}. \qquad (7)$$

Здесь

$$\hat{P}(x,y,z)=$$
$$=\begin{cases}P(x,y,z)\,\psi_2(x,y,z) & \text{при}\quad 0\le z\le H,\\ \dfrac{P(x,y,z)\,\psi_2(x,y,z)}{m_1} & \text{при}\ H\le z\le H_1,\end{cases}$$

а величина $P(x,y,z)$ определяется формулой (2), где вместо $A_m(x,y,z)$ использовано выражение

$$A_m^0(x,y,z)=\frac{\psi_m(x,y,z_0)}{\sqrt{\xi_m(x,y)\,r}}\exp\left(\int\limits_0^r \xi_m(r')\,dr'\right),$$

$$m_1=\frac{\rho_1}{\rho},$$

$\rho$ – плотность воды, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Заметим, что формулы (6) и (7) в отличие от (1) и (3) записаны с учетом селекции мод, использующей условие их ортогональности:

**Таблица 2.** Средний коэффициент затухания $\beta_m$ 1-ой, 2-ой и 3-ей моды на частоте 137 Гц вдоль акустической трассы, показанной на рис. 1б пунктирной линией

| Номер моды | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Коэффициент затухания, дБ/км | 2.2 | 10.7 | 20.7 |

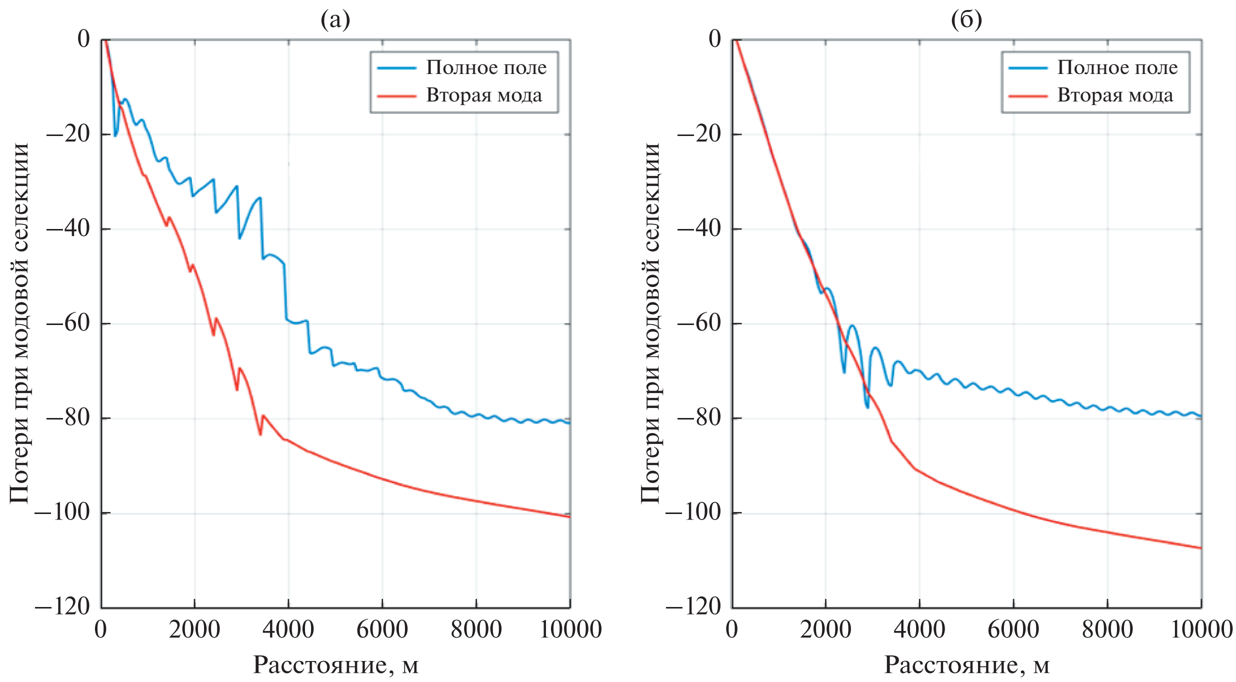



**Рис. 7.** Зависимость потерь при распространении $\widehat{TL}$ (полное поле) и $\widetilde{TL}$ (только вторая мода) при использовании вертикальной антенны, перегораживающей весь водный слой и частично закопанной в дно на глубину (а) – 11 м (длина волны на частоте 137 Гц) и (б) – 68 м.

$$\int_0^H \psi_m(x,y,z)\,\psi_n(x,y,z)\,dz + \\ + \frac{1}{m_1}\int_H^\infty \psi_m(x,y,z)\,\psi_n(x,y,z)\,dz = \\ = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases} \quad (8)$$

На рис. 7 показаны результаты расчетов (зависимости $\widehat{TL}(x,y)$ и $\widetilde{TL}(x,y)$) вдоль акустической трассы, показанной на рис. 1б пунктирной линией. Рис. 7 демонстрирует, что при водоподобном дне не удается отделить вторую моду от первой уже на расстоянии свыше 2 км. (Начиная с этого расстояния зависимости $\widehat{TL}(x,y)$ и $\widetilde{TL}(x,y)$ перестают совпадать в силу ограниченной длины антенны.) Это не удается сделать даже при вертикальной антенне, не только перекрывающей весь водный слой, но и закопанной в дно на глубину около шести длин волн. Причиной этому является значительная разница в коэффициентах затухания волноводных мод (см. табл. 2).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из приведенных результатов, реальные неоднородности морского дна могут вызвать рефракцию низкочастотных акустических волн при распространении в мелководном волноводе арктического типа. Рефракция особенно заметна при одномодовом распространении звука и при водоподобном дне со скоростью в верхнем донном слое, близкой к скорости звука в воде. Еще одним условием рефракции является наличие преимущественного направления вектора $\mathbf{g}(x,y;z)$, составляющего угол, близкий к 90° с направлением акустической трассы. При этом величина $|\mathbf{g}(x,y;z)|$ должна быть достаточно большой (в нашем случае величина $|\mathbf{g}(x,y;z)|$ примерно составляет 0.002 (м/с)/м), что является типичным значением для тех акваторий Арктического бассейна, пример которых рассмотрен в работе (см. рис. 1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of Shallow Water Acoustics. Springer: New York, Dordrecht, Heildelberg, London, 2012.
2. *Doolittle R., Tolstoy A., Buckingham M.* Experimental confirmation of horizontal refraction of cw acoustic radiation from a point source in a wedge-shaped ocean environment // J. Acoust. Soc. Am. 1988. T. 83. № 6. P. 2117–2125.
3. *Petrov P.S., Petrova T.N.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // J. Acoust. Soc. Am. 2014. T. 136. № 4. P. EL281– EL287.

4. *Badiey M., Katsnelson B., Lynch J., Pereselkov S., Siegmann W.L.* Measurement and modeling of three-dimensional sound intensity variations due to shallow-water internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2005. T. 117. № 2. P. 613–625.
5. *Кацнельсон Б.Г., Lynch J., Цхоидзе А.В.* Пространственно-частотное распределение интенсивности звукового поля в окрестности температурного фронта в мелком море // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 695–702.
6. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е.* Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 342– 358.
7. *Lunkov A., Sidorov D., Petnikov V.* Horizontal refraction of acoustic waves in shallow-water waveguides due to an inhomogeneous bottom structure // J. Marine Science and Engineering. 2021. V. 9. № 11. P. 1269.
8. *Ballard M.S., Lin Y.-T., Lynch J.F.* Horizontal refraction of propagating sound due to seafloor scours over a range-dependent layered bottom on the New Jersey shelf // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131 № 4. P. 2587–2598.
9. *Collins M.D.* The adiabatic mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. № 4. P. 2269–2278.
10. *Collins M.* Generalization of the split-step Padé solution // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 4. P. 382.

**EDN:** SOXKRY
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 409–414*

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

*УДК 534.231*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ВОЛНОВОДНЫХ МОД НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЯ ШУМОВ СУДНА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ АНТЕНН


**М. В. Ярина[a], *, А. А. Луньков[b], **, О. А. Годин[c], ***, Б. Г. Кацнельсон[a], ******
[a] *L.Charney School of Marine Sciences, University of Haifa, 199 Aba Khoushy Ave, Haifa, 3498838 Israel*
[b] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия*
[c] *Physics Department, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 93943 USA*
**e-mail: myarina@campus.haifa.ac.il*
***e-mail: lunkov@kapella.gpi.ru*
****e-mail: oagodin@nps.edu*
*****e-mail: bkatsnels@univ.haifa.ac.il*
Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 16.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Предложен подход к оценке дисперсионных характеристик волноводных мод на основе анализа шума корабля, зарегистрированного двумя близкорасположенными и синхронизированными вертикальными антеннами. С помощью предложенного подхода осуществлено экспериментальное исследование модовой структуры низкочастотного звукового поля в мелководном волноводе с газонасыщенным дном в широкой полосе частот (от 20 до 250 Гц). Эксперимент был проведен в озере Кинерет (Израиль), известном высоким содержанием метановых пузырьков в осадочном слое (~1%) и, следовательно, низкой скоростью звука в этом слое (~100 м/с). Максимальная глубина в области проведения эксперимента – 40.4 м. Приемной системой являлись две 27-метровые вертикальные антенны, расположенные на расстоянии 40 м друг от друга и перекрывающие часть волновода ниже термоклина. Источник шума – исследовательское судно “Хермона” – двигалось вдоль прямой линии, соединяющей антенны, на расстояниях до 1 км от них. Предложенный подход позволил выделить частотные зависимости фазовых скоростей для первых 12 мод, причем эти зависимости оказались близки аналогичным зависимостям для волновода с абсолютно мягким дном за исключением области частот, находящейся вблизи частоты отсечки. Обсуждаются ограничения и возможное развитие предложенной методики.

*Ключевые слова:* акустика мелкого моря, вертикальные приемные антенны, шум корабля, газонасыщенные осадки
**DOI:** 10.31857/S0320791922040141

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование шумов корабля в океане на разных расстояниях от него, а также использование этих шумов для решения обратной задачи привлекает в последнее время внимание по нескольким причинам:

– Активное судоходство и постоянное присутствие интенсивного шума под водой.

– Большая часть энергии шума находится в низкочастотной области: типичный спектр корабельного шума является нерегулярным с набором дискретных составляющих и находится в основном в области частот от 20 до 200–300 Гц. Это, во-первых, обеспечивает достаточно дальнее распространение звука и его проникновение в дно, что может быть использовано при решении обратных задач, а во-вторых, позволяет минимизировать использование массивных низкочастотных излучателей звука.

Среди исследований возможности применения шумов корабля для определения характеристик подводной среды и дна можно выделить следующие работы. В работе [1] исследуется выделение антропогенных и естественных компонентов шума в океане, в работе [2] рассматривается возможность использования шумящей линии (трассы судоходства) как нелокального источника шума для пассивной диагностики температурного фронта в районе Ушант. В статье [3] для записи шума использовалась буксируемая горизонтальная антенна, с дальнейшим решением обратной задачи. Источником шума являлось само судно-

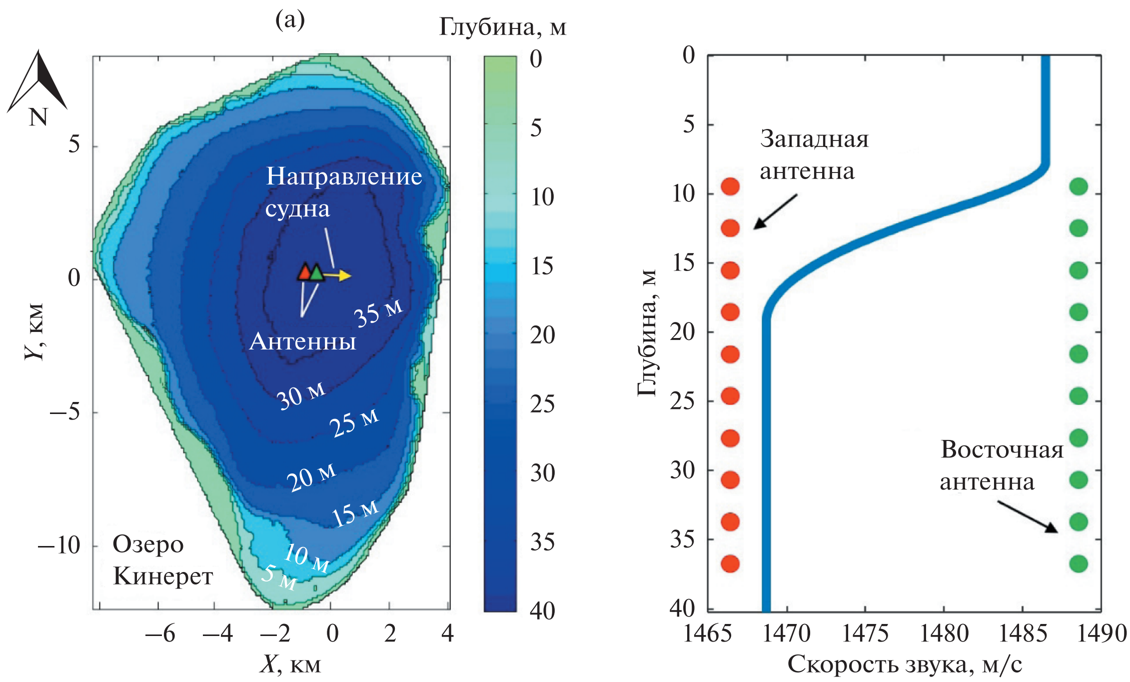



**Рис. 1.** (а) – Батиметрическая карта озера с указанием мест расположения антенн и траектория движения судна; (б) – вертикальный профиль скорости звука в водном слое и глубины расположения гидрофонов на антеннах.

буксировщик. В работе [4] запись шума движущегося корабля производилась на вертикальную антенну с последующим выделением волноводных мод, определением их коэффициентов затухания и оценкой скорости звука в дне на основе этих коэффициентов. В работе [5] запись шума корабля производилась с помощью автономного необитаемого подводного аппарата в очень мелкой воде, с дальнейшей оценкой скорости продольных волн в дне. Обратная задача по определению параметров дна решалась также на основе данных эксперимента Shallow Water 2006 [6], используя запись шума корабля на L-образной антенне.

В отличие от приведенных выше работ, в настоящей работе анализ шума движущегося судна осуществляется сразу на двух синхронизированных близкорасположенных вертикальных цепочках гидрофонов (антенн), перекрывающих большую часть волновода по глубине, с когерентной обработкой сигналов одновременно с двух этих цепочек. Исследования проводятся в мелководном волноводе с газонасыщенным верхним слоем донных осадков (озеро Кинерет, Израиль).

## 2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема натурного эксперимента показана на рис. 1 и 2. Эксперимент проводился в озере Кинерет в его центральной части, где глубина составляет примерно 40.4 м, а профиль скорости звука $c(z)$ характеризуется заметным скачком на глубине 10–15 м (рис. 1б). Дно акватории покрыто газонасыщенными осадками, концентрация газа в которых максимальна именно в центре озера [7]. Приемная система представляла собой две вертикальные синхронизированные цепочки гидрофонов (рис. 1б и 2), закрепленные на дне около заякоренной платформы, на расстоянии примерно $\Delta r = 40$ м друг от друга, одну из которых будем условно называть западной (W), а другую – восточной (E). Каждая из цепочек состояла из $N = 10$ гидрофонов, расположенных с шагом $\Delta z = 3$ м, и перекрывала диапазон глубин от 10 до 37 м.

На схеме эксперимента на рис. 2 показано движение источника шумового сигнала – НИС "Хермона" – вдоль прямой линии, проходящей через обе антенны, причем восточная цепочка всегда была ближайшей к судну. В работе рассматривается промежуток времени ~5 мин, в течение которых судно двигалось со скоростью 4 м/с в направлении от антенн на максимальное удаление 1000 м. Пример спектра шумового сигнала, принятого на разных гидрофонах западной антенны, приведен на рис. 3а, а усредненные по гидрофонам спектры на двух антеннах показаны на рис. 3б. Как видно, спектр шума корабля имеет заметные максимумы в области 20–30 и 80–100 Гц. В то же время на более высоких частотах спектр является достаточно равномерным.

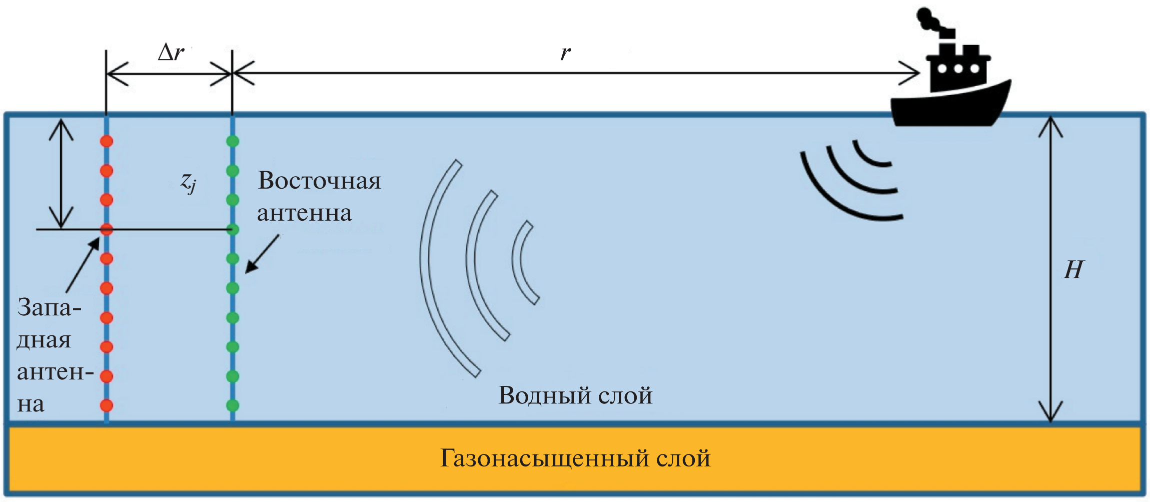



**Рис. 2.** Общая схема проведения эксперимента.

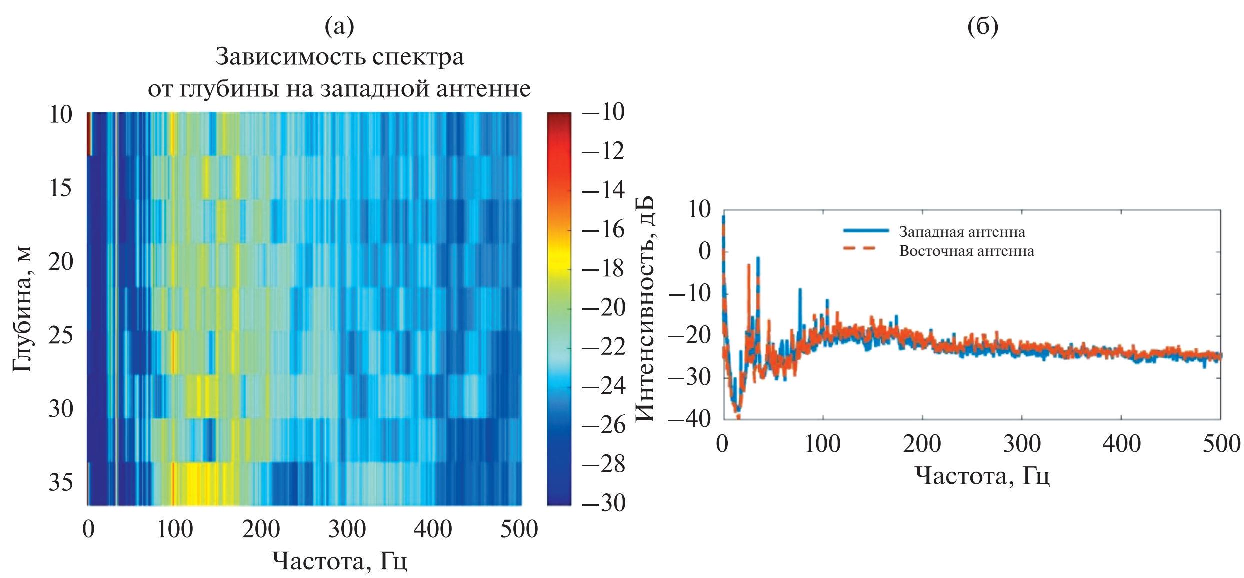



**Рис. 3.** (а) – Пример спектра сигнала, принятого на гидрофоны западной антенны; (б) – усредненные по элементам антенны спектры принятого сигнала на восточной и западной антеннах. Спектры нормированы на максимальное значение в диапазоне 20–500 Гц.

## 3. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим поле от шумового источника, записанное на двух антеннах (восточной – E, западной – W), а именно временную зависимость звукового давления на различных гидрофонах $P^{\mathrm{E}}(t,z_j)$ и $P^{\mathrm{W}}(t,z_j)$, где $z_j$ – глубина гидрофона, $t$ – "быстрое" время во временном интервале движения судна. После вычисления спектрограмм как функций частоты $\omega = 2\pi f$ и "медленного" времени $T$ в промежутке от 0 до 5 мин, мы получим функции $P^{\mathrm{E}}(\omega,T,z_j)$ и $P^{\mathrm{W}}(\omega,T,z_j)$, соответственно. Примеры спектрограмм шума корабля приведены на рис. 4 для центральных гидрофонов обоих антенн. При взятии спектрограммы ширина окна выбиралась равной 1 с, соседние окна не перекрывались.

В предположении о регулярном волноводе с постоянной глубиной $H$ на участке движения корабля и известном профиле скорости звука в водном слое $c(z)$, определим волноводные моды $\psi_m(z,\omega)$ как решения задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения:

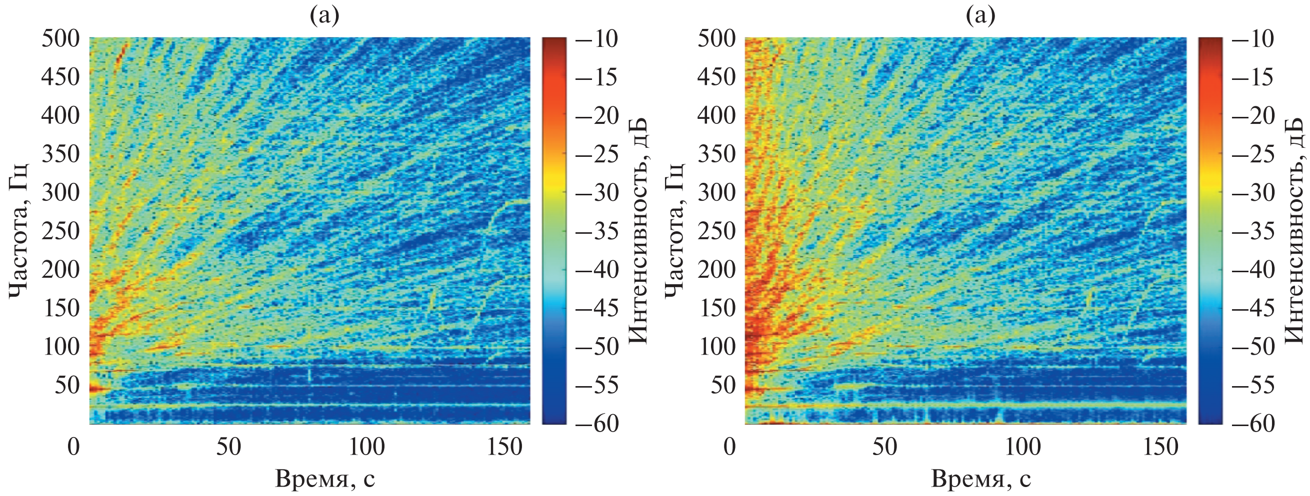



**Рис. 4.** Спектрограммы шума корабля, зарегистрированного на центральных гидрофонах (а) – западной и (б) – восточной приемных антенн.

$$\frac{d^2\psi_m(z,\omega)}{dz^2} + \left(\omega^2/c^2(z) - \xi_m^2\right)\psi_m(z,\omega) = 0 \qquad (1)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности ($\psi_m(0,\omega) = 0$) и дне (непрерывность $\psi$ и отношения $\frac{1}{\rho\psi}\frac{d\psi}{dz}$ при $z = H$, где $\rho$ – плотность среды), $\xi_m = q_m + i\gamma_m/2$ – комплексные собственные значения.

Особенность данной задачи состоит в том, что свойства дна нам не известны, и мы не можем использовать граничные условия при $z = H$. Однако в нашем распоряжении имеются записи звукового поля на двух антеннах. Представим далее схему нахождения собственных функций и собственных значений с использованием шума судна и двух синхронизированных антенн.

Построим решение уравнения

$$\frac{d^2\psi(z,\omega,q)}{dz^2} + \left(\omega^2/c^2(z) - q^2\right)\psi(z,\omega,q) = 0 \qquad (2)$$

с граничным условием $\psi(\omega,q,0) = 0$, с непрерывным изменением параметра $q$. Найдем далее коэффициенты разложения спектрограмм, где вместо непрерывной величины $z$ используются дискретные значения глубины (глубины 10 гидрофонов $z_j$), эти коэффициенты являются функциями параметра $q$, частоты $\omega$ и медленного времени $T$:

$$A^E(\omega,T,q) = \sum_{j=1}^{N} P^{\mathrm{E}}(\omega,T,z_j)\,\psi(z_j,\omega,q)\,\Delta z, \qquad (3)$$

$$A^W(\omega,T,q) = \sum_{j=1}^{N} P^{\mathrm{W}}(\omega,T,z_j)\,\psi(z_j,\omega,q)\,\Delta z. \qquad (4)$$

Далее запишем отношение амплитуд $A^{\mathrm{E}}$ и $A^{\mathrm{W}}$ с учетом компенсации фазового сдвига на расстоянии $\Delta r$ между антеннами, возьмем действительную часть и усредним по медленному времени (или по расстоянию от антенн до корабля), что даст:

$$R(\omega,q) = \left\langle \mathrm{Re}\left(\frac{A^{\mathrm{E}}(\omega,T,q)}{A^{\mathrm{W}}(\omega,T,q)}\exp(iq\Delta r)\right)\right\rangle_T. \qquad (5)$$

При обработке экспериментальных данных нами бралось медианное среднее. Построим далее функцию $R$ в координатах $(\omega, v_{\mathrm{ph}})$, где $v_{\mathrm{ph}} = \omega/q$ – фазовая скорость. Результат построения показан на рис. 5 в обычном (рис. 5а) и укрупненном (рис. 5б) масштабах. Наблюдаемые на этой плоскости области максимумов в виде гипербол соответствуют дисперсионным зависимостям – зависимости фазовой скорости волноводной моды $v_{\mathrm{ph},m}$ от частоты $\omega$ – для 12 мод. На этих рисунках белым цветом показаны также дисперсионные кривые мод для волновода с абсолютно мягким дном и постоянной скоростью звука в водном слое $c_0 = \min_z(c(z))$: $v^0_{\mathrm{ph},m}(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi m}{H}\right)^2}}$, где $m$ – номер моды. Экспериментальные зависимости $v_{\mathrm{ph},m}(\omega)$ оказались близки аналогичным зависимостям для волновода с абсолютно мягким дном $v^0_{\mathrm{ph},m}(\omega)$ за исключением области частот, находящейся вблизи частоты отсечки (см. рис. 5а).

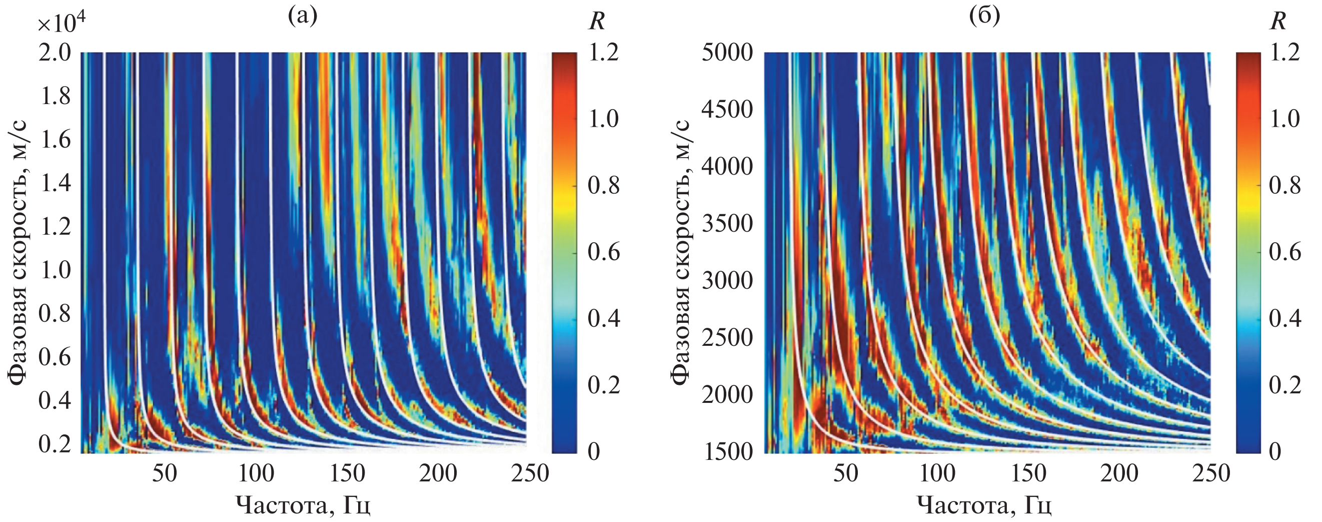



**Рис. 5.** (а) – Распределение величины $R$ в координатах $(\omega, V_{\mathrm{ph}})$ – частота звука и фазовая скорость моды; (б) – укрупненное изображение этого же распределения. Белыми гиперболами показаны дисперсионные кривые для мод в волноводе с абсолютно мягким дном.

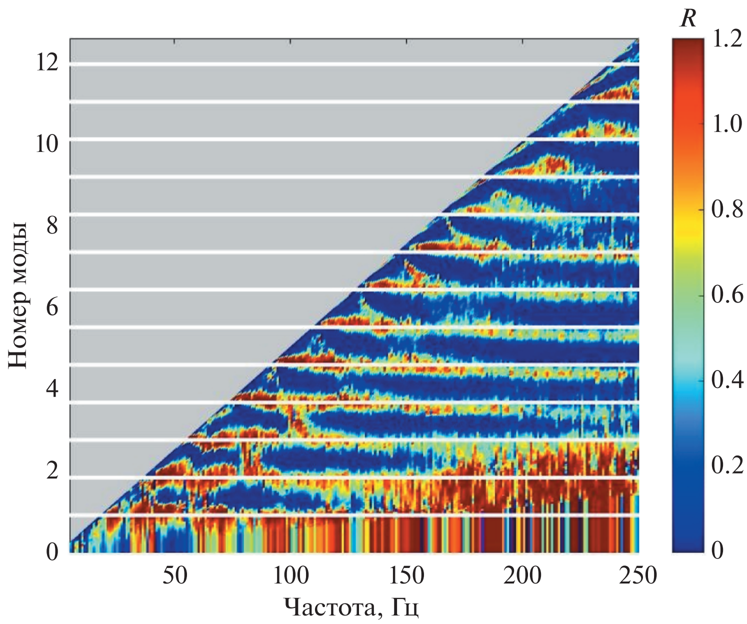



**Рис. 6.** Распределение величины $R$ в координатах $(\omega, m^*)$ – частота звука и "номер" моды. Белые горизонтальные прямые проведены для целочисленных значений номера моды: $m^* = 1, 2, 3, \ldots$. Серая треугольная область соответствует частотам ниже частоты отсечки для волновода с абсолютно мягким дном.

Представляет интерес изобразить рис. 5а в координатах $(\omega, m^*)$, где

$$m^*(\omega) = \frac{H\sigma_m(\omega)}{\pi} = \frac{\omega H}{\pi} \max_z \left( \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{v_{\mathrm{ph},m}^2(\omega)}} \right)$$

– "номер" моды в предположении абсолютной мягкости дна. (Нетрудно показать, что эти зависимости описывают также дисперсионные кривые "вытекающих" мод в однородном водном слое над жидким полупространством, где скорость звука много меньше скорости звука в воде.) Результат такого построения показан на рис. 6. Незакрашенная область соответствует частотам ниже частоты отсечки для идеального волновода, т.е. когда подкоренное выражение отрицательно.

Белыми прямыми на этом же рисунке отмечены целочисленные значения номеров мод. Как видно, наблюдаемые максимумы $R(\omega, m^*)$ в большинстве случаев хорошо ложатся на теоретические прямые.

Помимо этого, на основе полученных $v_{\text{ph}}^{m}(\omega)$ можно найти собственные значения, точнее их вещественные части, как функцию частоты $q_m(\omega)$. Зная собственные значения, соответствующие модальные амплитуды на антеннах можно записать как $A_m^{\text{E}}(\omega, T) \equiv A^{\text{E}}(\omega, T, q_m(\omega))$ и $A_m^{\text{W}}(\omega, T) \equiv A^{\text{W}}(\omega, T, q_m(\omega))$, а их отношение в виде $R_m(\omega, T) = A_m^{\text{E}}(\omega, T) / A_m^{\text{W}}(\omega, T)$. Сравнение амплитуд мод на двух антеннах позволяет оценить модальные коэффициенты затухания на разных частотах:

$$R_m(\omega) = \left\langle \mathrm{Re}\left( \frac{A_m^{\text{E}}(T)}{A_m^{\text{W}}(T)} \exp\left(iq_m(\omega)\Delta r\right) \right) \right\rangle_T \approx \approx \exp\left( \frac{\gamma_m(\omega)}{2} \Delta r \right). \quad (6)$$

Отсюда коэффициент потерь моды

$$\gamma_m(\omega) = \frac{2 \ln R_m(\omega)}{\Delta r}. \quad (7)$$

Применение такой обработки к имеющимся экспериментальным данным выходит за рамки настоящей работы и будет рассмотрено отдельно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый подход к разделению нормальных мод и оценке их параметров с помощью анализа шума корабля, регистрируемого двумя синхронизированными близкорасположенными антеннами. Преимуществом данного подхода является отсутствие необходимости знать точные координаты и скорость движения корабля – достаточно знать только то, что он движется по прямой, проходящей через обе антенны. Предложенный подход позволяет оценивать дисперсионные характеристики мод, что было продемонстрировано при обработке натурных данных, а также, в теории, определять частотную зависимость модальных коэффициентов затухания.

Отметим, что описанный выше эксперимент в озере Кинерет представляет собой первую попытку использования предложенного подхода. Тот же метод, по-видимому, можно применить в мелком море при произвольной траектории шумящего судна, если эта траектория известна. Благодаря характеру обработки сигналов, высокая степень точности описания траектории судна не требуется. Данный подход продемонстрировал устойчивость к наблюдавшимся сильным псевдоакустическим шумам. Тем не менее, точность извлечения дисперсионных кривых повысится, если конструкция антенн будет способствовать подавлению собственных шумов, связанных с обтеканием антенн и их механическими колебаниями, в используемой полосе шумов судна. Дополнительные исследования требуются для определения оптимального для решения обратных задач расстояния между вертикальными антеннами.

Работа поддержана РФФИ, проект 20-05-00119.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mustonen M., Klauson A., Folégot T., Clorennec D.* Natural sound estimation in shallow water near shipping lanes // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. P. EL177-EL183. https://doi.org/10.1121/10.0000749
2. *Chailloux C., Kinda B., Bonnel J., Gervaise C., Stephan Y., Mars J., Hermand J.* Modelling of ambient noise created by a shipping lane to prepare passive inversion: Application to Ushant // Proc. of the 4th Underwater Acoustics Measurements Conference (UAM). 2011. V. 26.
3. *Battle D.J., Gerstoft P., Kuperman W.A., Hodgkiss W.S., Siderius M.* Geoacoustic inversion of tow-ship noise via near-field-matched-field processing // IEEE J. Oceanic Eng. 2003. V. 28(3). P. 454–467.
4. *Lunkov A., Katsnelson B.* Using discrete low-frequency components of shipping noise for gassy sediment characterization in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147(5). P. EL428–EL433.
5. *Crocker S.E., Nielsen P.L., Miller J.H., Siderius M.* Geoacoustic inversion of ship radiated noise in shallow water using data from a single hydrophone // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136(5). P. EL362–EL368.
6. *Stotts S.A., Koch R.A., Joshi S.M., Nguyen V.T., Ferreri V.W., Knobles D.P.* Geoacoustic inversions of horizontal and vertical line array acoustic data from a surface ship source of opportunity // IEEE J. Ocean. Eng. 2010. V. 35(1). P. 79–102.
7. *Katsnelson B., Katsman R., Lunkov A., Ostrovsky I.* Acoustical methodology for determination of gas content in aquatic sediments, with application to Lake Kinneret, Israel, as a case study // Limnology and oceanography: methods. 2017. V. 15(6). P. 531–541.

**EDN:** EFZXOC
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 415–426*

**АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА**

*УДК 532.59,534.23,534.6*

# АЗИМУТАЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ШУМА СТРУИ, ИСТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ДВУХКОНТУРНОГО СОПЛА

**© 2022 г. О. П. Бычков[a], В. Ф. Копьев[a], Г. А. Фараносов[a, *]**
[a]*ФГУП ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия*
**e-mail: georgefalt@rambler.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
После доработки 10.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

С помощью метода азимутальной декомпозиции исследован азимутальный состав шума струи, истекающей из двухконтурного сопла с раздельным смешением потоков внешнего и внутреннего контуров. Рассмотрены различные сочетания скоростей истечения внутренней и внешней струй. Проанализированы особенности, наблюдаемые в спектральных характеристиках и в формах направленностей отдельных азимутальных мод, в частности, превышение шума соосной струи над шумом эквивалентной полностью перемешанной струи при существенном различии скоростей в каналах внешнего и внутреннего контуров. Показано также, что различие между ними имеет место во всех трех азимутальных модах, а главную проблему для моделирования шума составляет переходная область соосной струи.

*Ключевые слова:* турбулентная струя, волны неустойчивости, активное управление, управление шумом
**DOI:** 10.31857/S0320791922040037

## ВВЕДЕНИЕ

На протяжении уже около 70 лет шум, создаваемый реактивными струями, является значимой составляющей шума гражданских самолетов [1, 2]. Относительный вклад шума струи в общий уровень шума самолета за эти годы удалось существенно снизить благодаря внедрению двухконтурных реактивных двигателей с возрастающей степенью двухконтурности $n$. Именно снижение скорости струи при росте параметра $n$ было основной причиной уменьшения создаваемого ею шума, поскольку излучаемая турбулентной струей звуковая мощность, как известно, пропорциональна восьмой степени скорости [3].

В виду того, что ресурс увеличения степени двухконтурности, а значит, диаметра силовой установки, в силу различных причин ограничен, не теряют актуальности задачи разработки методов снижения шума струи без глобального изменения геометрии сопла. Среди них можно выделить пассивные методы, связанные с модификациями формы сопла вблизи его кромки [4–7], а также активные методы, заключающиеся в воздействии на течение струи с помощью различного рода актуаторов [8–11]. Нужно отметить, что эффективность таких методов зачастую относительно невелика, и часто снижение шума в области максимума шума струи сопровождается увеличением шума в области высоких частот, что делает неочевидным эффективность такого снижения при переходе к метрике EPNL, используемой для количественной оценки сертификационных уровней шума на местности. Основной проблемой, стоящей на пути разработки эффективных методов снижения шума струи, является недостаточное понимание физических механизмов его возникновения в свободном турбулентном потоке. Несмотря на 70-летнюю историю вопроса, до сих пор нет общепринятой теории генерации шума турбулентными струями. В различных работах излучение шума струей связывают с мелкомасштабной турбулентностью [3, 12–14], линейными волнами неустойчивости [15–18], крупными вихрями в слое смешения [14, 19, 20], нестационарным движением во внешней области струи [21].

В вопросе построения соответствующих физических моделей шума струи решающую роль играет эксперимент. Ценность экспериментальных результатов тем выше, чем более нетривиальную информацию они содержат о тех или иных особенностях и характеристиках источников шума. Существенное продвижение в понимании природы излучения шума простейшими струями, истекающими из круглых одноконтурных сопел, было достигнуто благодаря переходу от изучения спектров и направленности суммарного шума к анализу соответствующих характеристик для его азимутальных гармоник [17–20, 22, 23]. В работах

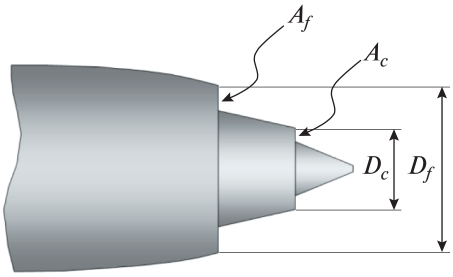



**Рис. 1.** Схема исследуемого сопла (вид сбоку).

[19, 23–25] был систематически изложен метод азимутальной декомпозиции (МАД) звукового поля струи и было наглядно показано, что специфические направленности азимутальных мод могут быть объяснены квадрупольной природой источников шума, предсказанной еще Лайтхиллом [3]. На основании этого факта была построена полуэмпирическая корреляционная теория источников шума [14, 26, 27], учитывающая их квадрупольный характер. На настоящий момент данная теория является единственной, позволяющей для дозвуковых струй в широком диапазоне скоростей и частот с высокой точностью моделировать не только суммарные спектры и направленность излучаемого шума, но и соответствующие нетривиальные характеристики для его азимутальных компонент. Таким образом, МАД является мощным инструментом исследования, позволяющим получать “тонкие” характеристики звукового поля, что способствует более глубокому пониманию физических механизмов, ответственных за генерацию шума турбулентными потоками.

Указанные выше результаты применялись к простейшим струям, истекающим из круглых одноконтурных сопел. С практической точки зрения значительный интерес представляют соосные струи, истекающие из двухконтурных сопел, соответствующих тем, которые используются в современных авиационных двигателях. До настоящего времени, насколько известно авторам, исследования азимутального состава звукового поля таких струй не проводились, несмотря на внушительный список публикаций, посвященных их шуму (см., например, [28–32]). Настоящая работа призвана частично восполнить этот пробел. Второй задачей является анализ известного предположения о представлении шума соосной струи в виде совокупности эквивалентных в некотором смысле одноконтурных струй, широко применяемого при оценках шума двухконтурной струи, и границы его применимости, которые могут быть получены из анализа азимутальных характеристик шума соосного сопла, в зависимости от соотношения скоростей в каналах

В работе исследуется типовое двухконтурное сопло с центральным телом и внешним смешением потоков. Ниже представлено описание экспериментальной установки и метода измерений, приведены результаты измерений спектров и направленностей азимутальных мод в дальнем поле для различных режимов истечения струй из внутреннего и внешнего контуров, проведен анализ полученных результатов. В заключении сформулированы основные выводы работы.

## 1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперименты проводились в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ. В измерениях использовалась маломасштабное двухконтурное сопло с раздельным смешением потоков внешнего и внутреннего контуров и центральным телом. Схема сопла приведена на рис. 1. Диаметр внешнего контура сопла составлял $D_f = 80$ мм, внутреннего – $D_c = 57$ мм, отношение площади $A_f$ сопла внешнего контура к площади $A_c$ сопла внутреннего контура составляло $A_f/A_c \approx 4.3$.

Для измерения пульсаций давления в дальнем поле и их последующего разложения на азимутальные моды использовалась стандартная микрофонная решетка радиуса $R = 0.85$ м, снабженная шестью ½" микрофонами Bruel&Kjaer (тип 4189) с предусилителями модели 2669 (частотный диапазон 6.3 Гц–20 кГц, чувствительность 50 мВ/Па). Микрофоны в решетке распределены по азимутальному углу $\varphi$ с шагом 60° (рис. 2). С помощью траверсной системы FESTO решетка микрофонов перемещалась вдоль оси струи $x$ в диапазоне $x = -0.4...2.6$ м, где $x = 0$ соответствует положению решетки, при котором микрофоны находятся в плоскости среза сопла внешнего контура.

Таким образом, в эксперименте в соответствии с методом азимутальной декомпозиции (МАД) измерялись временные истории звукового давления $p(x,r,\varphi,t)$ на цилиндрической поверхности, окружающей струю. В дальнем поле анализировались как суммарные спектры сигналов для каждого положения решетки, так и отдельные азимутальные компоненты звукового поля [23].

Использование 6-микрофонной решетки позволяет получать для данного сечения $x$ разложение исходного сигнала $p(x,r,\varphi,t)$ для трех азимутальных мод $m = 0, 1, 2$ и одной компоненты 4-й азимутальной моды, что достаточно для реализации МАД в области низких и средних частот:

$$p(x,R,\varphi,t) \approx A_0(x,R,t) + \\ + \sum_{m=1}^{2}\left(A_m(x,R,t)\cos m\varphi + B_m(x,R,t)\sin m\varphi\right) + \\ + A_3(x,R,t)\cos 3\varphi, \quad (1)$$

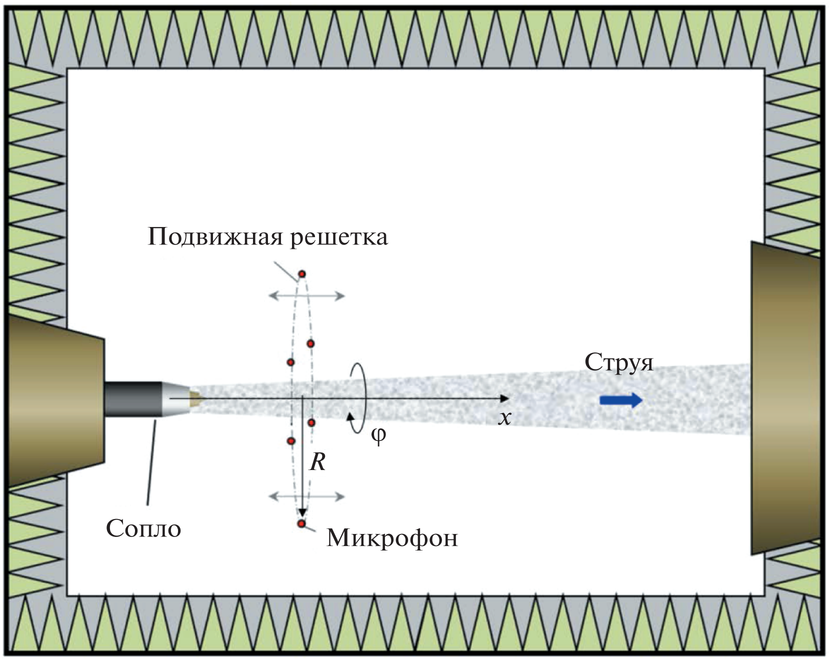



**Рис. 2.** Схема проведения эксперимента 6-микрофонной решеткой МАД.

где $(x, R, \varphi)$ – цилиндрическая система координат (рис. 2), $A_m(x,R,t)$ и $B_m(x,R,t)$ – соответственно косинус- и синус-моды порядка $m$. В дальнейшем осуществляется переход в частотную область и проводится анализ спектров азимутальных мод, характеризующих распределение интенсивности пульсаций по частотам $f$ для каждой моды, которые обозначим как $a_m^2(x,f)$ и $b_m^2(x,f)$, соответственно. Поскольку радиус решетки фиксирован, аргумент $R$ у функций $a_m^2$ и $b_m^2$ для краткости здесь и далее опущен. В силу аксиальной симметрии сопла, а значит, и звукового поля (в среднем), должно выполняться соотношение $a_m^2 = b_m^2$, $m > 0$. Более детальное описание МАД, а также особенности его реализации применительно к струям изложены в работе [33].

При обсуждении и анализе результатов далее используется число Струхаля $\mathrm{St} = f D_e/V_m$, посчитанное по эффективному диаметру сопла $D_e = 2\sqrt{(A_f + A_c)/\pi} \approx 62$ мм и скорости истечения полностью перемешанной струи $V_m$, выражение для которой имеет вид [29]

$$V_m \approx V_c \frac{1 + \lambda_V^2 \lambda_A \lambda_T}{1 + \lambda_V \lambda_A \lambda_T}, \qquad (2)$$

где $\lambda_V = V_f/V_c$ – отношение скоростей истечения внешней и внутренней струй, $\lambda_A = A_f/A_c$ – отношение площадей сопел, $\lambda_T = T_c/T_f$ – отношение статических температур внутренней и внешней струй.

Измерения проводились для двух пар режимов истечения, различающихся скоростью потока во внутреннем контуре и соотношением скоростей в каналах. Параметры исследованных режимов приведены в табл. 1.

Для удобства режимы маркированы двумя числами: первое обозначает номер пары, второе – номер режима в паре. В каждой паре режимов скорость полностью перемешанной струи была примерно одинакова. Кроме того, первому из режимов в каждой паре (режимы 11, 21) соответствовали одинаковые перепады давления в обоих каналах. В этом случае струя близка к одноконтурной, истекающей из сопла диаметром $D_e$, т.к. скорости истечения из сопел внешнего ($V_f$) и внутреннего ($V_c$) контура практически одинаковы. Такие режимы удобны для сопоставления с известными данными МАД, полученными ранее для одноконтурных струй. В остальных режимах реализовывались такие скорости истечения из сопел, что всегда выполнялось неравенство $V_c > V_f$, как это обычно имеет место в реальных двигателях. При противоположном условии возникает так называемый “перевернутый” профиль скорости, исследованный, например, в [28]. В первой паре для режима 12 скорость внутренней струи не очень сильно превосходила скорость внешней струи: $V_c/V_f = 1.3$. Во второй паре для режима 22 скорость внутренней струи существен-

**Таблица 1.** Режимы истечения струи (числа Маха посчитаны по скорости звука в окружающей среде)

| Режим | 11 | 12 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| $\pi_f$ — степень понижения давления в сопле внешнего контура | 1.45 | 1.33 | 1.33 | 1.15 |
| $\pi_c$ — степень понижения давления в сопле внутреннего контура | 1.45 | 1.65 | 1.33 | 1.8 |
| $M_f$ — акустическое число Маха внешней струи | 0.72 | 0.63 | 0.63 | 0.45 |
| $M_c$ — акустическое число Маха внутренней струи | 0.72 | 0.82 | 0.63 | 0.89 |
| $V_c/V_f$ — отношение скоростей истечения струй | 1.0 | 1.3 | 1.0 | 2.0 |
| $V_m$ — скорость полностью перемешанной струи, м/с | 243 | 231 | 214 | 203 |

но превосходила скорость внешней струи: $V_c/V_f = 2.0$, что характерно для струй реальных двигателей на режиме взлета и набора высоты. Отметим, что в реальных силовых установках внутренняя струя является горячей и имеет на взлетных режимах достаточно большую скорость истечения (350–450 м/с, что в 1.5–2 раза выше скорости внешней струи), и может оставаться дозвуковой при достаточно высокой температуре. Поскольку система подачи воздуха в камере АК-2 позволяет исследовать только холодные струи (температура торможения для всех случаев составляла около 290 K), соответствующая максимальная скорость истечения, при которой не возникает сверхзвукового режима истечения, составляет около $V_{\max} \approx 300$ м/с, что соответствует степени понижения давления около 1.8. Исходя из этого ограничения на максимальную скорость струи во внутреннем контуре, степень понижения давления в сопле внешнего контура была выбрана 1.15, чтобы обеспечить $V_c/V_f = 2.0$. Таким образом, режим 22 является “холодной” моделью (в терминах параметра $V_c/V_f$) струи реального двигателя.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ АНАЛИЗ

### *Анализ суммарных спектров шума*

Прежде чем анализировать характеристики отдельных азимутальных гармоник шума исследуемых струй, рассмотрим суммарные спектры (без разложения на азимутальные моды). Множество работ за прошедшие десятилетия было посвящено разработке полуэмпирических моделей шума двухконтурных струй [28–32]. Общий подход при этом заключается в представлении шума двухконтурной струи $L$ в виде суперпозиции компонент, каждая из которых соответствует шуму некоторой эквивалентной одноконтурной струи в соответствии со схемой течения, представленной на рис. 3 [34]:

$$L \approx L_f + L_c + L_t + L_m, \qquad (3)$$

где $L_f$ — вклад внешнего слоя смешения (начальный участок), $L_c$ — вклад внутреннего слоя смешения (начальный участок), $L_t$ — вклад переходного участка (не учитывается в работах [28, 29]), $L_m$ — вклад полностью перемешанной струи. Каждая компонента вносит вклад в определенной области частот, которая подбирается эмпирически из условия совпадения результатов моделирования с экспериментом. Детальное описание каждого участка и необходимые соотношения для расчета параметров эквивалентных струй можно найти, например, в работе [32]. Отметим, что в случае равенства скоростей истечения (режим “одноконтурной” струи) формула (3) вырождается в $L \approx L_m$.

Рассматриваемое в данной работе сопло соответствует типичным соплам двигателей с большой степенью двухконтурности. Как известно [32], шум струй, истекающих из подобных сопел, в области спектрального максимума определяет-

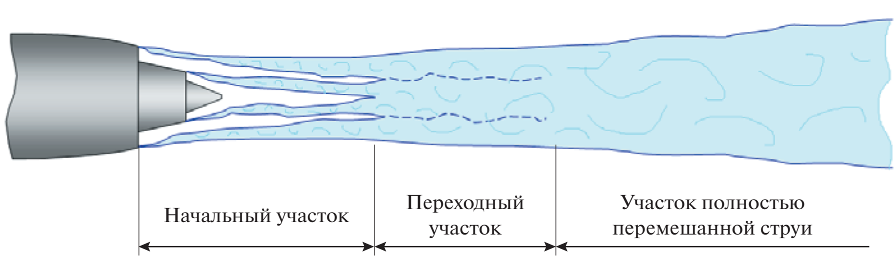



**Рис. 3.** Схематичное изображение характерных участков течения в струе, истекающей из двухконтурного сопла.

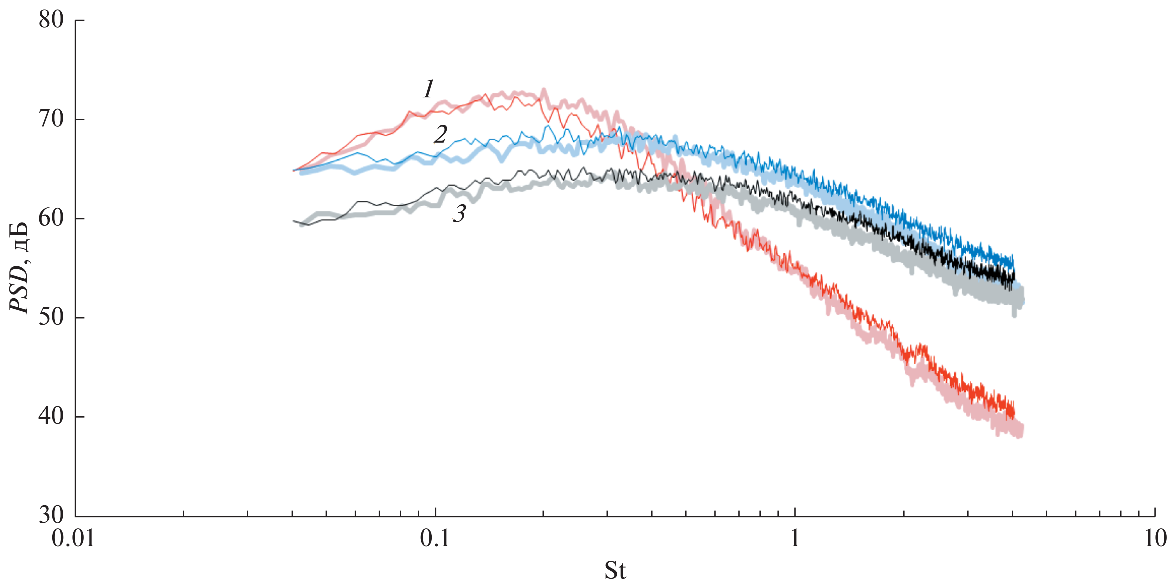



**Рис. 4.** Спектры шума для режима 11 (тонкие линии), соответствующего полностью перемешанной эквивалентной струе $L_m$, и режима 12 (жирные линии), когда скорость внутренней струи не очень сильно превосходит скорость внешней струи ($V_c/V_f = 1.3$), для различных направлений излучения: *1* – $x/D_e = 0$; *2* – $x/D_e = 10$; *3* – $x/D_e = 40$. Уровни шума приведены к значению $V_m = 243$ м/с.

ся в основном параметрами полностью перемешанной струи $L \approx L_m$, которые можно определить в одномерном приближении из условий сохранения массы, импульса и энергии до и после смешения внутренней и внешней струй. Скорость полностью перемешанной струи определяется в этом случае соотношением (2). В нашем случае рассматриваются холодные струи с $\lambda_T = 1$; соответствующие значения $V_m$ представлены в табл. 1. Спектры шума $L_m$ полностью перемешанной струи могут быть рассчитаны по известным полуэмпирическим методикам для одноконтурных струй (например, [35, 36]). Далее в настоящей работе мы будем называть эквивалентной именно такую струю.

Сравнение измеренных спектров шума и рассчитанных спектров шума $L_m$ эквивалентной струи, которые в данном случае аппроксимируются режимами 11 и 21, приведено на рис. 4 для режимов 11, 12 и на рис. 5 – для режимов 21, 22. Экспериментальные спектры получены с помощью измерений одним из микрофонов решетки для трех различных положений относительно среза сопла (рис. 2), соответствующих по направленности трем углам по отношению к оси струи. Поскольку в каждой паре исследованных режимов скорости полностью перемешанной струи немного различны (см. табл. 1), для удобства сравнения спектры шума на режиме 12 приводились к скорости $V_m = 243$ м/с режима 11, а спектры шума на режиме 22 – к скорости $V_m = 214$ м/с режима 21. Приведение спектров осуществлялось в соответствии с законом Лайтхилла [3], который для спектральной плотности излучения (*PSD*) выражается в ее зависимости от скорости в виде $PSD \sim V_m^7$. Итоговые поправки не превышали полутора дБ и были меньше, чем рассматриваемые ниже эффекты.

Из рис. 4 видно, что для струи с умеренным отношением скоростей истечения $V_c/V_f$ (режим 12) шум действительно оказывается очень близким к шуму $L_m$ эквивалентной одноконтурной струи (режим 11, с учетом приведения по скорости) для различных углов наблюдения. В то же время, для режима 22, которому соответствует значение $V_c/V_f = 2$, наблюдается существенное (до 10 дБ и выше) превышение измеренных спектров по сравнению с шумом эквивалентной одноконтурной струи (режим 21, с учетом приведения по скорости), которое наиболее выражено под малыми углами к оси струи (рис. 5). Данный эффект хорошо известен, и в модели [31] этот "избыточный" шум на средних частотах и малых углах наблюдения авторы связывают с вкладом $L_t$ переходного участка, для которого эквивалентная одноконтурная струя имеет скорость $V_c$, диаметр $D_t = D_c(1 + \lambda_V^2\lambda_A\lambda_T)$, определяемый из условия сохранения тяги, а уровень шума существенно ниже уровня соответствующей одноконтурной струи, что должно, по мнению авторов, моделировать ослабление интенсивности источников

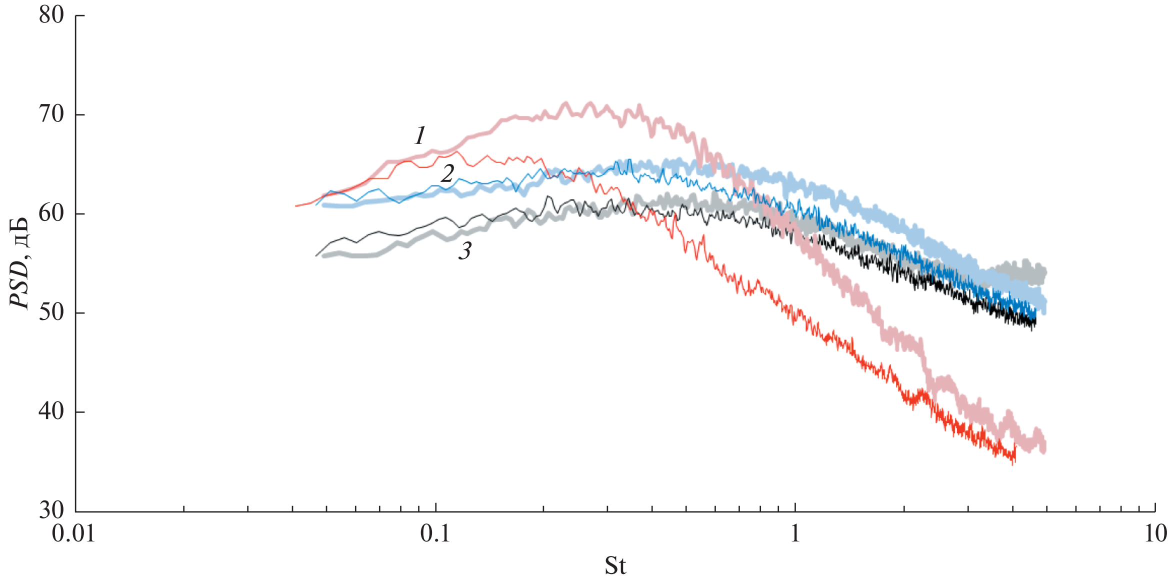



**Рис. 5.** Спектры шума для режима 21 (тонкие линии), соответствующего полностью перемешанной эквивалентной струе $L_m$, и режима 22 (жирные линии), когда скорость внутренней струи существенно превосходит скорость внешней струи ($V_c/V_f = 2.0$), для различных направлений излучения: *1* – $x/D_e = 0$; *2* – $x/D_e = 10$; *3* – $x/D_e = 40$. Уровни шума приведены к значению $V_m = 214$ м/с.

внутренней струи за счет эффекта спутного потока, обеспечиваемого внешней струей. Такой выбор параметров дополнительной эквивалентной струи, состоящий в выборе скорости струи, равной скорости истечения из внутреннего контура, с несколько увеличенным диаметром и сниженной интенсивностью шума, не опирается на сколько-нибудь строгие соображения, а скорее основан на чисто эмпирической методологии, имеющей целью подогнать под результаты эксперимента.

### *Анализ азимутальных компонент шума*

Азимутальные компоненты шума, полученные при измерении шума решеткой МАД, анализируются в частотных полосах шириной 200 Гц в виде распределений спектральной плотности шума каждой гармоники по цилиндрической поверхности, заметаемой микрофонной решеткой при ее движении вниз по потоку. Представлены данные для частотных полос с центральными частотами, соответствующими числам Струхаля от 0.1 до 0.7. Таким образом, исследуется диапазон частот в области максимума спектров излучения струй на всех режимах из табл. 1 (рис. 4–5). Распределения интенсивности азимутальных мод шума по цилиндрической поверхности, которые далее мы будем называть направленностями, представлены на рис. 6–9 для первых трех мод $m = 0, 1, 2$, вносящих основной вклад в сигнал для данной области частот. Эти данные для соосных струй получены впервые. В силу осевой симметрии сопла и выполнения (с экспериментальной точностью) соотношений $a_1^2 = b_1^2$ и $a_2^2 = b_2^2$ показаны только распределения косинус-мод $a_m^2$.

Из приведенных графиков видно, что для всех режимов истечения струи имеется качественное подобие в направленности различных азимутальных компонент шума. Наблюдаемая картина аналогична той, что характерна для струй, истекающих из одноконтурных сопел, и указывает на квадрупольный характер излучения шума [23–27]. Для малых углов наблюдения в шуме доминирует осесимметричная мода, для боковых направлений вклады всех трех азимутальных мод имеют один порядок. Каждая мода в рассмотренных полосах частот обладает характерной формой направленности излучения, качественно сохраняющей свою идентичность для различных условий истечения струи. По характерным особенностям направленностей азимутальных мод видна тенденция смещения источников шума вниз по потоку при уменьшении частоты.

На рис. 10 и 11 показано прямое сравнение направленностей излучения отдельных азимутальных мод шума для режимов 11 и 12, 21 и 22 соответственно. Уровни шума в каждой паре, также как и на рис. 4–5, приведены к одной скорости $V_m$. Хорошо видно (рис. 10), что направленности мод для струи с умеренным отношением скоростей истечения $V_c/V_f = 1.3$ (режим 12) практиче-

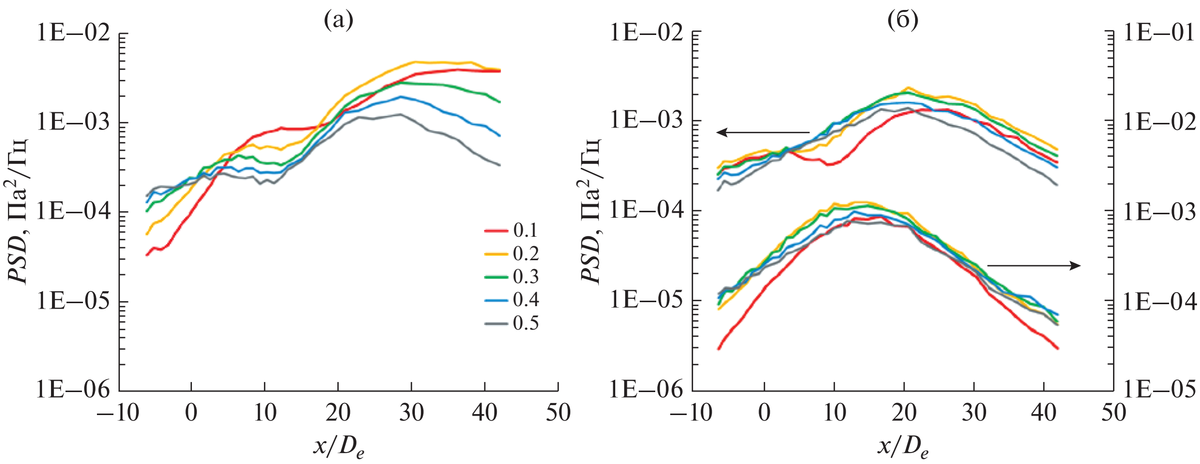



**Рис. 6.** Направленности азимутальных мод шума соосной струи для различных частот (режим 11): (а) – осесимметричная мода $a_0^2$; (б) – моды $a_1^2$ (сверху, левая шкала) и $a_2^2$ (снизу, правая шкала). Число Струхаля, характеризующее частотную полосу для каждой кривой, выделенной цветом, указано в легенде к рис. 6а.

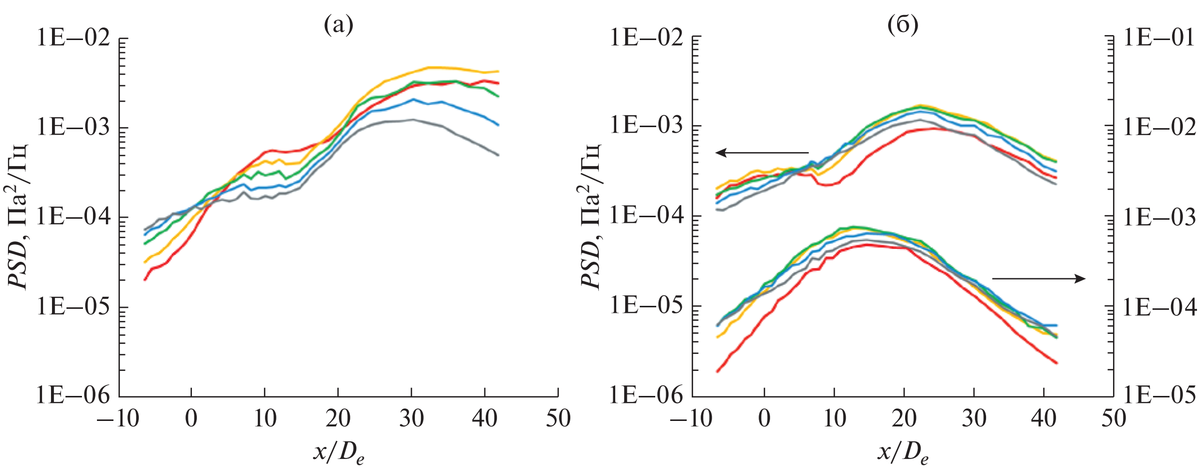



**Рис. 7.** Направленности азимутальных мод шума соосной струи для различных частот (режим 12): (а) – осесимметричная мода $a_0^2$; (б) – моды $a_1^2$ (сверху, левая шкала) и $a_2^2$ (снизу, правая шкала). Обозначения кривых см. на рис. 6.

ски совпадают с соответствующими направленностями эквивалентной одноконтурной струи (режим 11). Наблюдается незначительное усиление шума под малыми углами к оси струи для средних частот (вблизи St = 0.5), которое в основном “локализовано” в осесимметричной компоненте.

Для режима 22 (рис. 11) такое усиление шума под малыми углами оказывается существенно более значительным, что соответствует картине суммарных спектров излучения, описанной выше (рис. 5). Анализ азимутальных компонент показывает, что для малых углов наблюдения усиливается излучение всех азимутальных гармоник, но основной эффект связан с осесимметричной компонентой: ее излучение по сравнению с излучением эквивалентной одноконтурной струи усиливается на порядок (около 10 дБ).

Логично предположить, что данный “избыточный” шум (по сравнению с эквивалентной одноконтурной струей) связан с высокоскоростной струей, истекающей из сопла внутреннего контура. Отметим, что при $V_c/V_f = 2$ интенсивности турбулентных пульсаций в слоях смешения внутренней и внешней струй приблизительно равны, т.к. разность скоростей по обе стороны от слоев смешения одинакова для обеих струй, поэтому интенсивность квадрупольных источников шума в этих слоях смешения также должна быть примерно одинакова. При этом она меньше, чем в случае полностью перемешанной струи, для ко-

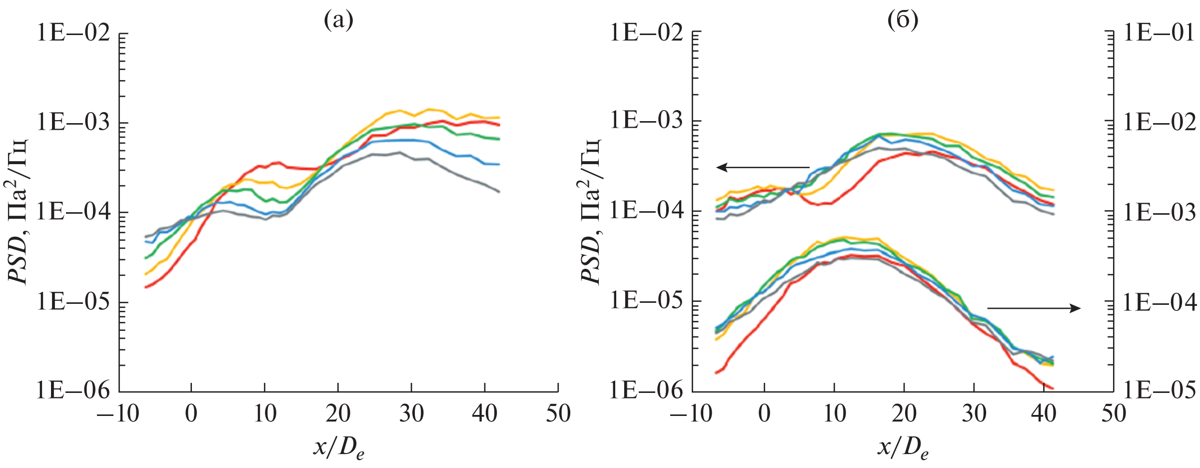



**Рис. 8.** Направленности азимутальных мод шума соосной струи для различных частот (режим 21): (а) – осесимметричная мода $a_0^2$; (б) – моды $a_1^2$ (сверху, левая шкала) и $a_2^2$ (снизу, правая шкала). Обозначения кривых см. на рис. 6.

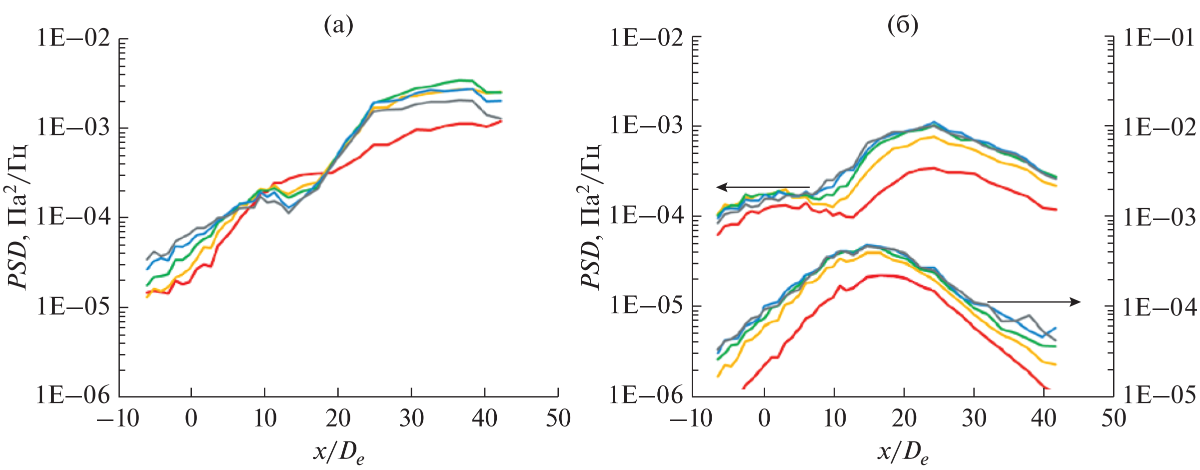



**Рис. 9.** Направленности азимутальных мод шума соосной струи для различных частот (режим 22): (а) – осесимметричная мода $a_0^2$; (б) – моды $a_1^2$ (сверху, левая шкала) и $a_2^2$ (снизу, правая шкала). Обозначения кривых см. на рис. 6.

торой турбулентные пульсации в (единственном) слое смешения и в переходном участке более интенсивны. Такое предположение подтверждается и графиками, приведенными на рис. 11, из которых видно, что в боковом направлении ($x/D \sim 0$), в котором не проявляются эффекты конвекции и рефракции, интенсивность излучения для обоих режимов истечения изменяется достаточно слабо: она увеличивается менее чем вдвое (не более чем на 3 дБ). Это обстоятельство как раз и соответствует появлению дополнительного источника с интенсивностью, которая меньше или сравнима с исходной. Отметим, что для малых чисел Струхаля (рис. 11а) направленности суммарной струи и эквивалентной струи с равными скоростями в обоих контурах, совпадают. Это означает, что для таких частот (длин волн) источники существенно сдвинуты вниз по потоку и находятся в зоне перемешанной струи. При увеличении частоты различие направленностей намного более значительно, что говорит о важности внутренней быстрой струи в процессе шумообразования.

Для более наглядной демонстрации указанных соображений на рис. 12 для числа Струхаля 0.5 приведены разности направленностей соответствующих азимутальных мод струй, соответствующих режимам 21, 22, показанных на рис. 11. Для удобства анализа данные аппроксимированы гладкими кривыми на основе формул для квадрупольных источников [27]. Такие разности направленностей характеризуют дополнительный источник, появляющийся в струях с большим параметром $V_c/V_f$. Из рис. 12 видно, что дополни-

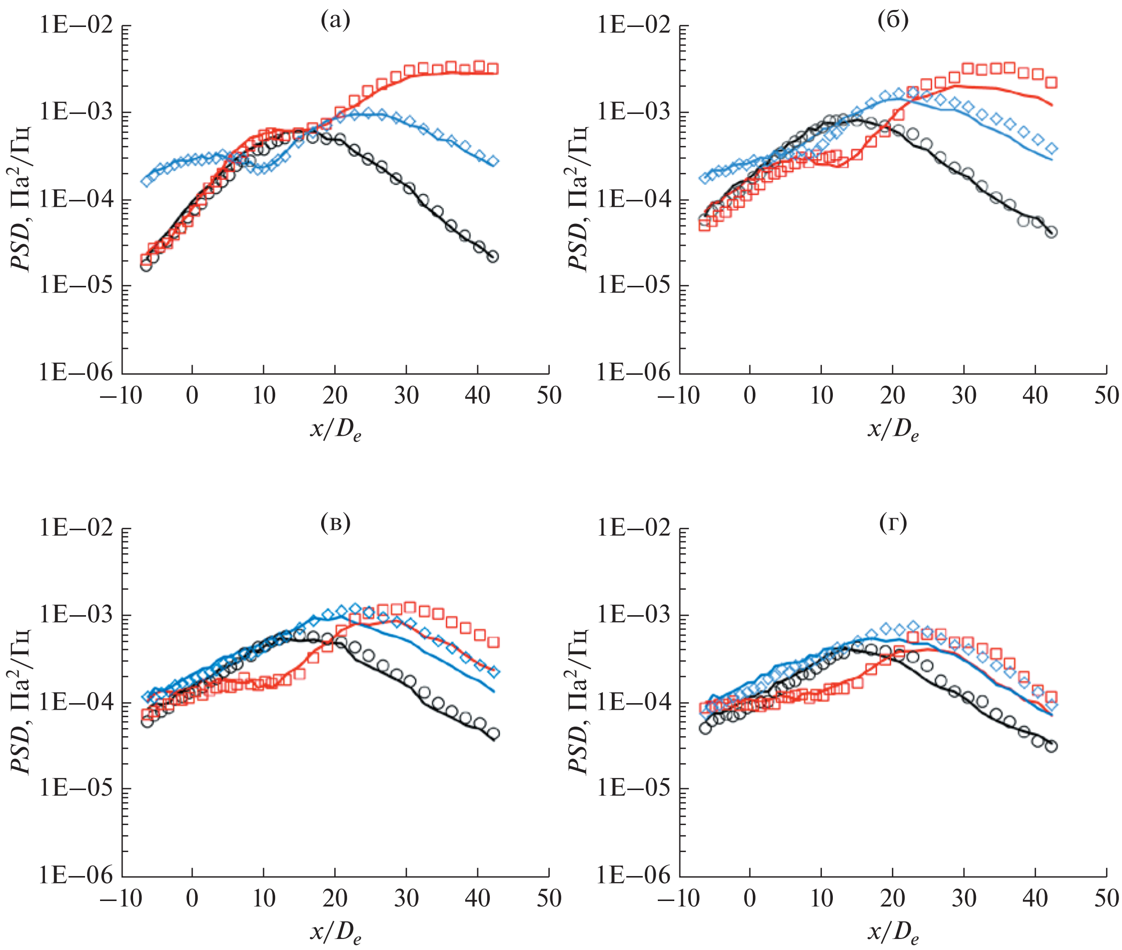



**Рис. 10.** Сравнение направленностей азимутальных мод шума соосной струи для режимов истечения 11 (линии) и 12 (символы) для различных чисел Струхаля: (а) – St = 0.1; (б) – 0.3; (в) – 0.5; (г) – 0.7. Красный – осесимметричная мода $a_0^2$; синий – мода $a_1^2$; черный – мода $a_2^2$. Уровни шума приведены к значению $V_m$ = 243 м/с.

тельный источник действительно имеет интенсивность шума, не превышающую интенсивность шума источника в полностью перемешанной струе (уровни шума в направлении поперек потока), но при этом в направлении вниз по потоку его излучение существенно усиливается так, что в итоге он оказывается доминирующим. Этот эффект заметен для всех трех азимутальных мод, однако для осесимметричной моды он наиболее выражен, т.к. базисный осесимметричный квадруполь имеет максимум направленности вдоль оси струи, в отличие от азимутальных мод более высокого порядка, излучение которых вдоль оси струи равно нулю [23], и поэтому совокупное влияние конвекции и рефракции для излучения осесимметричной моды выражено более сильно [26, 27]. Таким образом, именно разность (в полосах частот) направленностей соосной струи и эквивалентной струи является объектом моделирования при разработке моделей шума для данного участка соосной струи. Такие модели могут быть основаны как на упрощенном подходе с использованием одноконтурной струи со специально подобранной (сниженной) интенсивностью шума и диаметром сопла (аналогично [31]), так и на подходе, в котором физическая картина особенностей течения начального и переходного участков соосной струи, включая среднее поле скорости, интенсивности источников, скорости их конвекции, масштабы корреляции и т.д., моделируется более корректно с учетом вкладов потоков внутреннего и внешнего контуров.

Нужно отметить, что упрощенный подход, основанный на представлении шума сложной струи в виде линейной суперпозиции вкладов от более простых источников, имеет ограниченную область применимости, однако можно полагать, что в главном приближении он позволяет сделать адекватные выводы о физических особенностях исследуемого эффекта. Правильное представле-

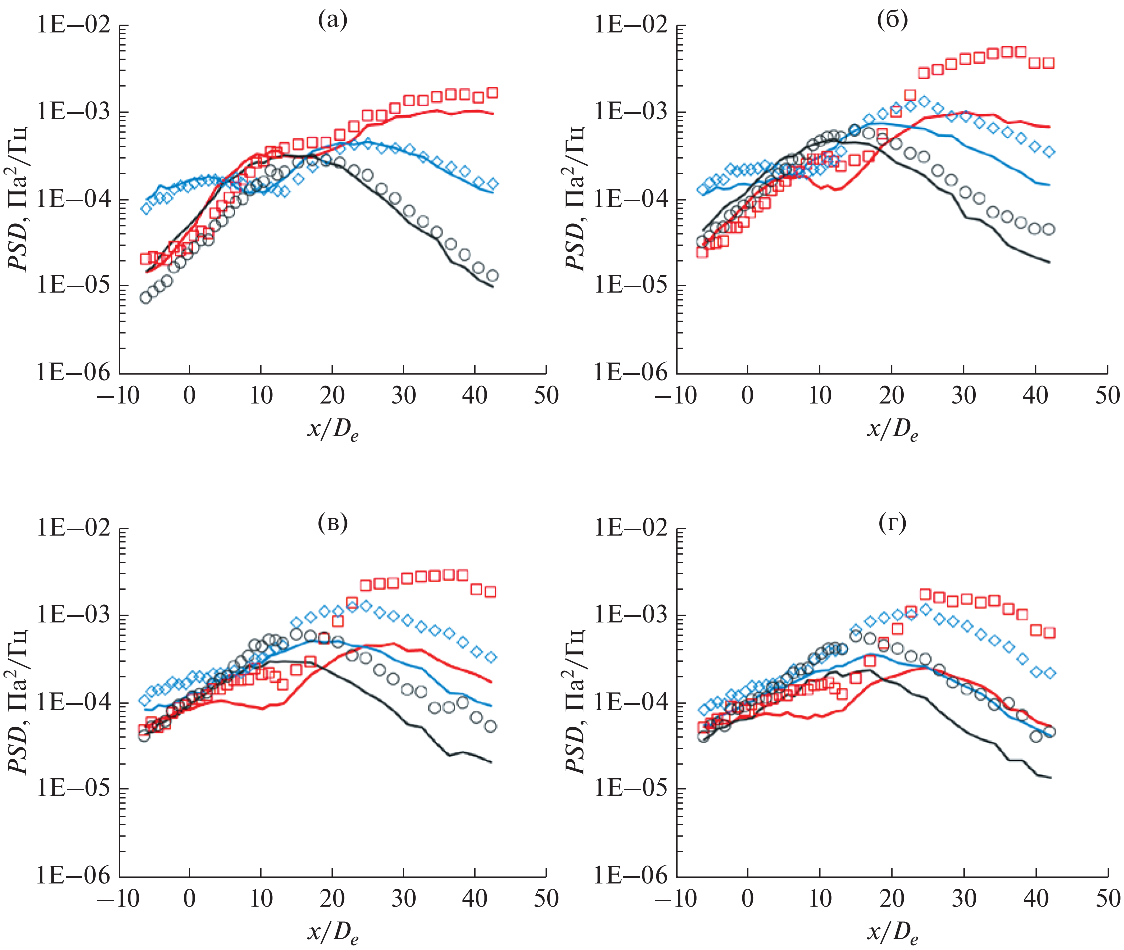



**Рис. 11.** Сравнение направленностей азимутальных мод шума соосной струи для режимов истечения 21 (линии) и 22 (символы) для различных чисел Струхаля: (а) – St = 0.1; (б) – 0.3; (в) – 0.5; (г) – 0.7. Красный – осесимметричная мода $a_0^2$; синий – мода $a_1^2$; черный – мода $a_2^2$. Уровни шума приведены к значению $V_m = 214$ м/с.

ние направленности и спектра шума соосной струи в широком диапазоне частот и углов наблюдения следует ожидать от использования низкоуровневых моделей, построенных на корреляционной теории [26, 27]. Для более детального количественного анализа эффекта шума соосных струй необходима модификация корреляционной модели шума на случай течения, характерного для двухконтурной струи, однако данная задача выходит за рамки настоящего исследования.

Таким образом, анализ экспериментальных данных позволяет предположить, что усиление излучения для режима с высокоскоростной внутренней струей связано с эффектами среднего потока: конвекцией источников шума и рефракцией их излучения на среднем поле скорости. Эти эффекты подробно изучены для одноконтурных струй в рамках корреляционной теории [26, 27]. Одним из основных параметров, от которого зависит степень усиления шума в направлении вниз по потоку, является конвективный фактор $(1 - V_s/c\cos\theta)^{-1}$, где $V_s$ – скорость конвекции источников, $c$ – скорость звука в окружающей среде, $\theta$ – угол наблюдения относительно оси струи. Структура этого множителя такова, что он приводит к ослаблению шума в направлении вверх по потоку и к усилению – в направлении вниз по потоку. В одноконтурных струях скорость конвекции источников лежит обычно в диапазоне $V_{sm} \approx (0.5...0.6)V_m$, и корреляционная теория позволяет с высокой точностью смоделировать направленности не только суммарного шума, но и его азимутальных компонент в широком диапазоне частот, углов наблюдения и скоростей истечения струи [26, 27].

В соосной струе источники, связанные с внутренним слоем смешения, будут обладать скоростью конвекции, превышающей, вследствие высокой скорости внутренней струи, типичное значение $V_{sm}$.

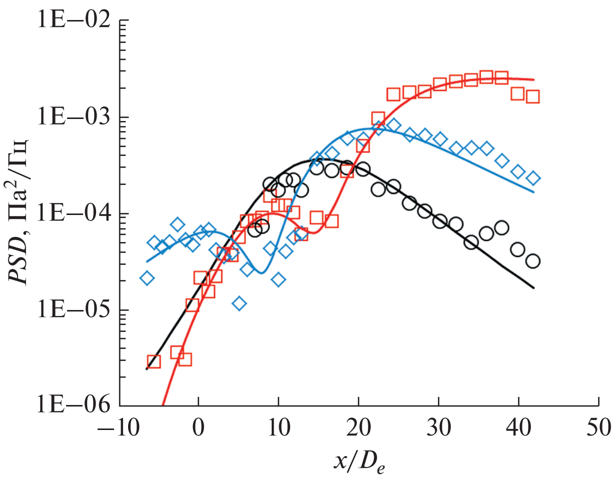



**Рис. 12.** Разностные направленности азимутальных мод шума соосной струи для режимов истечения 21 и 22 (символы) для числа Струхаля 0.5. Красный – осесимметричная мода $a_0^2$; синий – мода $a_1^2$; черный – мода $a_2^2$. Уровни шума приведены к значению $V_m$ = = 214 м/с. Линии – аппроксимация данных модельными квадрупольными источниками [27].

Так, для рассматриваемой струи (режим 22) скорость конвекции внутренних источников можно оценить как $V_s \approx 0.5(V_c + V_f) \approx 0.75V_m$. Это, в свою очередь, приведет к более выраженному эффекту усиления шума вниз по потоку. Простейшая оценка усиления шума для осесимметричной моды в области низких частот в приближении одноконтурной струи [25] показывает, что при увеличении скорости конвекции источников от $0.55V_m$ до $0.75V_m$ дополнительное усиление шума составит около

$$60\lg\left((1-0.55V_m/c\cos\theta)/(1-0.75V_m/c\cos\theta)\right),$$

что для угла $\theta = 20°$ ($x/D_e = 35$) составит около 13 дБ, что соответствует данным рис. 12.

Таким образом, анализ азимутальной структуры звукового поля соосной струи показывает, что естественным объектом для объяснения и моделирования "избыточного" шума под малыми углами к оси струи являются быстрые квадрупольные источники, образующиеся во внутреннем слое смешения, причем осесимметричные возмущения с увеличением скорости внутренней струи оказываются существенно более эффективными излучателями, чем первая и вторая моды (рис. 11–12).

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода азимутальной декомпозиции в заглушенной камере АК-2 впервые проведены измерения азимутального состава шума холодных струй, истекающих из двухконтурного сопла с внешним смешением с различными сочетаниями скоростей потоков внутреннего и внешнего контуров.

Показано, что в целом структура азимутальных мод шума двухконтурных струй соответствует структуре, наблюдаемой для одноконтурных струй: для области низких и средних частот в шуме доминируют лишь первые три азимутальные моды с номерами $m = 0, 1, 2$, причем под малыми углами к оси струи основной вклад в шум вносит осесимметричная мода. Специфическая направленность азимутальных мод указывает на квадрупольную природу излучения.

Показано, что для струи с параметром $V_c/V_f$, достаточно близким к 1, уровни шума и формы направленностей отдельных азимутальных мод в области низких и средних частот практически идентичны таковым для эквивалентной одноконтурной (полностью перемешанной) струи.

Для струи, характеризующейся достаточно большой скоростью внутреннего потока ($V_c/V_f = 2$), показано, что за дополнительный (к шуму полностью перемешанной струи) шум, наблюдаемый под малыми углами к оси струи, отвечает, главным образом, осесимметричная компонента излучения, что обусловлено спецификой направленности соответствующего базисного квадруполя. На основании данных измерений азимутального состава шума показано, что этот дополнительный шум связан с источниками, рождающимися во внутреннем слое смешения и характеризующимися высокой скоростью конвекции. Поиск наиболее подходящего представления для моделирования таких источников может опираться на полученные в работе разностные направленности соответствующих азимутальных компонент эквивалентной и соосной струй (рис. 12). Для более детального количественного анализа данного эффекта в будущем полезно модифицировать корреляционную модель на случай профиля скорости, характерного для двухконтурной струи. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения эмпирических моделей излучения шума соосными струями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-71-10064). Работа выполнена на базе УНУ "Заглушенная камера с потоком АК-2" ФГУП "ЦАГИ", модернизируемой при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-11-2021-066.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Peak N.* Modern challenges facing turbomachinery aeroacoustics // Ann. Rev. Fluid Mech. 2012. V. 44. P. 227–248.
2. *Кузнецов В.М.* Проблемы снижения шума пассажирских самолетов // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 293–317.
3. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically: I. general theory // Proc. Royal Soc. Series A. 1952. V. 211. P. 564–581.
4. *Gliebe P.R. et al.* Jet Noise Suppression. Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and practice // Ed. by *Hubbard H.* NASA Langley Research Center. 1991. V. 2. P. 207–270.
5. *Zaman K., Bridges J.E., Huff D.L.* Evolution from "tabs" to "chevron technology" – a review // Int. J. Aeroacoustics. 2011. V. 10. № 5–6. P. 685–709.
6. *Кузнецов В.М.* Эффективность методов снижения шума реактивных струй двигателей пассажирских самолетов // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 91–102.
7. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Остриков Н.Н.* Снижение шума дозвуковой струи за счет гофрированной формы сопла // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 232–234.
8. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Kopiev V.A., Belyaev I.V., Faranosov G.A.* Instability wave control by plasma actuators: problems and prospects // AIAA Paper. 2011. AIAA-2011-973.
9. *Kearney-Fischer M., Kim J.H., Samimy M.* Noise control of a high Reynolds number high speed heated jet using plasma actuators // Int. J. Aeroacoustics. 2011. V. 10. № 5–6. P. 635–658.
10. *Копьев В.Ф., Битюрин В.А., Беляев И.В., Годин С.М., Зайцев М.Ю., Климов А.И., Копьев В.А., Моралев И.А., Остриков Н.Н.* Управление шумом струи с помощью плазменных актуаторов диэлектрического барьерного разряда // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 473–482.
11. *Kœnig M., Sasaki K., Cavalieri A.V.G., Jordan P., Gervais Y.* Jet-noise control by fluidic injection from a rotating plug: linear and nonlinear sound-source // J. Fluid Mech. 2016. V. 788. P. 358–380.
12. *Tam C., Aurialt L.* Jet mixing noise from fine-scale turbulence // AIAA J. 1999. V. 37. № 2. P. 145–153.
13. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // AIAA Paper. 2007. AIAA-2007-3506.
14. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источник шума в струях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 482–497.
15. *Седельников Т.Х.* О частотном спектре шума сверхзвуковой струи. Физика аэродинамических шумов. М.: Наука, 1967. 83.
16. *Tam C.K.W., Burton D.E.* Sound generated by instability waves of supersonic flows: Part 2. Axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1984. V. 138. P. 273–295.
17. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A., Zaitsev M.Yu., Kuznetsov V.M.* Experimental validation of instability wave theory for round supersonic jet // AIAA Paper. 2006. AIAA-2006-2595.
18. *Jordan P., Colonius T.* Wave packets and turbulent jet noise // Annual Review of Fluid Mechanics. 2013. V. 45. P. 173–195.
19. *Kopiev V., Zaitsev M., Chernyshev S., Ostrikov N.* Vortex ring input in subsonic jet noise // Int. J. Aeroacoustics. 2007. V. 6. № 4. P. 375–405.
20. *Kopiev V., Faranosov G.* Localization of sound sources by means of ADT data interpretation improved by refraction effect consideration // AIAA Paper. 2009. AIAA-2009-3215.
21. *Бендерский Л.А., Крашенинников С.Ю.* Исследование шумообразования в турбулентных струях на основе вычислительного моделирования нестационарного течения в слое смешения // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 149–162.
22. *Juve D., Sunyach M., Comte-Bellot G.* filtered azimuthal correlations in the acoustic far field of a subsonic jet // AIAA J. 1979. V. 17. № 1. P. 112–114.
23. *Kopiev V.* Azimuthal decomposition of turbulent jet noise and its role for diagnostic of noise sources // VKI Lecture Series 2003–04 "Advances in Aeroacoustics and Applications". 2003.
24. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu. Chernyshev S.A., Kotova A.N.* The role of large-scale vortex in a turbulent jet noise // AIAA Paper. 1999. AIAA-1999-1839.
25. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Velichko S.A., Kotova A.N., Belyaev I.V.* Cross-correlations of far field azimuthal modes in subsonic jet noise // AIAA Paper. 2008. AIAA-2008-2887.
26. *Kopiev V., Chernyshev S.* Refraction effect in correlation model of quadrupole noise sources in turbulent jet // AIAA Paper. 2015. AIAA-2015-3130.
27. *Kopiev V., Chernyshev S.* Low-frequency correlation theory of noise sources in subsonic turbulent jet // AIAA Paper. 2019. AIAA-2019-2568.
28. *Кузнецов В.М., Мунин А.Г.* Шум соосных струй. Изотермические струи // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 6. С. 878–886.
29. *Самохин В.Ф.* Параметрическое исследование мощности акустического излучения соосных струй // Уч. Зап. ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 1. С. 55–64.
30. *Strange P., Podmore G., Fisher M., Tester B.* Coaxial jet noise source distributions // AIAA Paper. 1984. AIAA-1984-2361.
31. *Fisher M.J., Preston G.A., Bryce W.D.* A modelling of the noise from simple coaxial jets, Part I: With unheated primary flow // J. Sound Vibr. 1998. V. 209. № 3. P. 385–403.
32. *Khavaran A., Bridges J.* Jet noise scaling in dual stream nozzles // AIAA Paper. 2010. AIAA-2010-3968.
33. *Faranosov G., Belyaev I., Kopiev V., Zaytsev M., Aleksentsev A., Bersenev Y., Chursin V., Viskova T.* Adaptation of the Azimuthal Decomposition Technique to Jet Noise Measurements in Full-Scale Tests // AIAA J. 2017. V. 55. № 2. P. 572–584.
34. *Ko N.W.M., Kwan S.H.* The initial region of subsonic coaxial jets // J. Fluid Mechanics. 1976. V. 73. № 2. P. 305–332.
35. *Дмитриев В.Г., Самохин В.Ф.* Комплекс алгоритмов и программ для расчета шума самолетов на местности // Уч. Зап. ЦАГИ. 2014. Т. 45. № 2. С. 136–152.
36. *Bridges J., Khavaran A., Hunter C.* Assessment of current jet noise prediction capabilities // AIAA Paper. 2008. AIAA-2008-2933.
37. *Lush P.A.* Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory // J. Fluid Mechanics. 1971. V. 46. № 3. P. 477–500.

**EDN:** QMXAYH
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 427–439*

## ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*УДК 534.87;551.463.2*

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ МЕЛКОГО МОРЯ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ: ОЦЕНКИ ПОТЕРЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ


**А. И. Малеханов**[a, b], *, **И. П. Смирнов**[a, b]

[a]*Федеральный исследовательский центр "Институт прикладной физики Российской академии наук" (ИПФ РАН), ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603155 Россия*

[b]*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ), просп. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603950 Россия*

**e-mail: almal@appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 28.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Цель работы – сравнительный анализ эффективности методов согласованной и оптимальной пространственной обработки сигналов в звуковом канале мелкого моря в условиях неточного знания его параметров. Предполагается, что сигнал удаленного локализованного источника принимается вертикальной антенной решеткой (АР) на фоне интенсивной помехи, также создаваемой локализованным источником, при этом вертикальный профиль скорости звука и глубина канала, скорость звука в донных породах и их плотность известны с произвольными отклонениями от реальных значений в пределах заданных интервалов. Эффективность обработки характеризуется коэффициентом усиления АР по величине отношения сигнал/(шум + помеха), нормированным на число элементов АР. Методом стохастического моделирования показано, что с ростом априорной неопределенности в оценке указанных параметров потери эффективности для этих двух методов обработки имеют не только существенно различные величины, но могут обнаруживать немонотонный характер соответствующих зависимостей. Определены допустимые уровни ошибок в оценке параметров канала, при которых потери усиления не превышают заданный уровень (3 дБ) для каждого из методов. Результаты представляются важными с точки зрения количественной оценки требований к средствам оперативной океанографии, обеспечивающих функционирование приемных антенных систем в реальных морских условиях.

*Ключевые слова:* звуковой канал мелкого моря, вертикальная антенная решетка, многомодовый сигнал, пространственная обработка сигналов, коэффициент усиления (выигрыш) антенной решетки, рассогласование модели канала

**DOI:** 10.31857/S0320791922040086

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в последние несколько десятилетий в исследовании и практическом применении различных методов пространственной обработки акустических сигналов в океанических волноводах, в явном виде учитывающих характерные физические особенности формирования сигналов удаленных источников на входе приемной антенной решетки (АР) (например, [1–3]), остаются вопросы, которые все еще требуют своего углубленного рассмотрения. В целом, такие методы обработки часто трактуются как методы, "согласованные со средой", при этом многими отечественными авторами проводится параллель с теми методами, которые в англоязычной литературе получили название "согласованной с полем" обработки (matched-field processing) [4, 5].

Отметим в этой связи некоторые принципиальные аспекты, касающиеся, в том числе, терминологии. Сам этот термин – "согласование с полем" – и его трактовка возникли как обобщение хорошо известной в теории обнаружения согласованной (корреляционной) обработки в контексте существенно более сложного формирования сигнального поля удаленного локализованного источника на входе приемной АР при ее размещении в реальном океане. Вместо одной сигнальной волны, принимаемой элементами АР от отдельного удаленного источника в свободном пространстве (в простейшем случае – плоской волны), в океаническом волноводе необходимо учитывать целый набор пространственных гармоник (нормальных волн или лучей), т.е. осуществлять согласование с полем сигнала в значительно более сложной постановке. Однако, принципиальный смысл самой операции согласованной обработки как обработки, обращенной (в смысле комплексного сопряжения) по отношению к амплитудно-фазовому распределению (АФР) сигнального поля на входе АР, остается при этом тем же. Условия ее приближения к оптимальной обработке также хорошо известны — детерминированный (полностью когерентный в пределах АР) сигнал и пространственно-белый аддитивный шум. Если же АФР сигнала в результате распространения в случайно-неоднородном канале становится случайным, т.е. частично-когерентным, и (или) прием сигнала осуществляется на фоне сильно анизотропных помех, также содержащих, как и сигнал, некоторый набор пространственных гармоник, то процедура согласования с сигнальным полем заведомо не обеспечивает высокой эффективности в сравнении с оптимальной обработкой. При этом относительные потери ее эффективности ожидаемо оказываются тем сильнее, чем более выражены указанные факторы — чем меньше масштаб когерентности полезного сигнала в сравнении с размером АР и (или) интенсивнее помеховые сигналы, занимающие "свою" область пространственного (модового, углового) спектра.

Что же касается термина "согласование обработки со средой", то его естественно трактовать как значительно более общий, не ограничиваясь при этом указанным выше контекстом. Основной его смысл тогда заключается, по существу, в необходимости учета корректной информации относительно физических свойств и параметров канала распространения сигналов, которые могут быть не только априори плохо известными, но и нестационарными. Сам же метод пространственной обработки при этом может быть, вообще говоря, любой, и совсем не обязательно согласованный с полем полезного сигнала. В такой трактовке "центр тяжести" вопроса об эффективности обработки переносится на оценку качества тех моделей сигнала и помех, которые используются при ее построении, или, другими словами, на оценку влияния рассогласования этих моделей с принимаемыми (реальными) сигналами в целях поиска оптимальных решений для самой обработки в частично-определенных и нестационарных условиях. В натурных морских экспериментах обеспечить достаточно точное согласование расчетной модели с волноводом реального океана практически невозможно (или возможно, но только на достаточно коротких временах наблюдения и коротких трассах распространения). Это обстоятельство и привело, по всей видимости, к определенному скепсису относительно практической значимости согласованной обработки, принципиально основанной на использовании некоторой *заданной* многопараметрической модели океанической среды [3, 6]. Подчеркнем, однако, что сами условия существенной априорной неопределенности среды стимулируют привлечение к пространственной обработке сигналов других подходов, а именно, на основе адаптивных алгоритмов, которые позволяют преодолеть частично эту проблему. За исключением небольшого числа работ (например, [2, 7, 8]), такие алгоритмы еще не нашли широкого применения в области низкочастотной гидроакустики.

Вместе с тем, если учитывать априорную неопределенность модели среды, то отмеченный выше вопрос о соотношении методов согласованной и оптимальной обработки становится не столь очевидным. Интуитивно можно ожидать, что согласованная обработка, в явном виде отличная от оптимальной и проигрывающая ей в условиях полной априорной определенности (точного согласования со средой), окажется при определенных условиях более устойчивой к рассогласованию и, следовательно, более эффективной (фактически, квазиоптимальной). В каких именно условиях, какие уровни рассогласования и по каким именно параметрам модели могут оцениваться как критические с точки зрения ослабления эффективности конкретного метода обработки сигналов? Попытке осветить эти вопросы применительно к работе вертикальной приемной АР в типичном канале мелкого моря посвящена данная работа.

Эффективность обработки сигналов мы определяем величиной коэффициента усиления (выигрыша) АР к отдельному ее элементу по величине отношения сигнал/(шум + помеха) (ОСШП). Эта величина стандартно характеризует эффективность АР как пространственного фильтра полезного сигнала, принимаемого на фоне шумов и помех, и его выигрыш в сравнении с одиночным элементом с точки зрения повышения вероятностных характеристик обнаружения/оценки параметров сигнала в результате повышения величины ОСШП на выходе сумматора АР. Сравнительный анализ методов оптимальной и согласованной обработки (таковыми они являются, строго говоря, только при точном знании параметров канала) проводится нами путем построения зависимостей выигрыша АР от интервала случайных ошибок (уровня неопределенности) в оценке того или иного параметра подводного канала. Такого типа зависимости позволяют дать количественный прогноз потерь эффективности обработки в условиях частичной априорной определенности, т.е. ответить на поставленные выше вопросы. Заранее можно ожидать, что методы обработки обладают существенно различной "чувствительностью" к объему и качеству априорной информации относительно параметров среды, и что результирующая "иерархия" методов обработки в условиях рассогласования есть, физически, отражение различной степени учета этой информации в их реализации. Следовательно, критерии “согласования со средой” и оценки допустимых (критически значимых) уровней рассогласования тоже должны быть существенно различными для разных методов обработки сигналов, что будет показано в работе.

Отметим, что в контексте анализа обсуждаемых эффектов рассогласования ряд авторов разделяют влияние параметров, различных по своей природе: детерминированных (таких, например, как параметры дна) и случайно флуктуирующих (таких, как скорость звука в водной толще или положение АР в случае ее свободного подвеса или буксировки) (см. [3] и цитированную там литературу). Такое разделение имеет определенный смысл с точки зрения классификации возможных эффектов, однако, для оценки конечного результата рассогласования оно представляется не столь важным. Более важно то, что обработка принимаемых сигналов заведомо осуществляется в условиях априорной неопределенности относительно ключевых параметров среды распространения, и допустимый уровень этой неопределенности на практике может быть сильно различным для разных параметров. Поэтому мы не делаем особых различий между параметрами канала по признаку их детерминированности либо случайности и исследуем эффекты рассогласования в рамках единого подхода на основе стохастического моделирования, исходя из того, что априорная неопределенность модели канала есть, по сути, заранее неизвестные и произвольные (в этом смысле – случайные) вариации значений ее параметров.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Итак, мы рассматриваем вопрос об эффективности пространственной обработки многомодовых сигналов в канале мелкого моря в предположении, что полезный сигнал и помеха на входе АР создаются удаленными точечными источниками (их координаты задаются в качестве параметров задачи), при этом помеха предполагается значительно более интенсивной. Параметры канала, позволяющие рассчитать реализации полей на входе АР заданной геометрии, предполагаются известными с некоторыми ошибками, величины которых априори неизвестны и могут принимать любые значения в заданных интервалах. Такими “рассогласованными” параметрами являются именно те, значения которых в натурных условиях, как правило, являются известными наименее точно: значения скорости звука на отдельных горизонтах водного слоя, скорость звука и плотность пород в подстилающем дне (дно моделируется однородным жидким полупространством), глубина водного слоя.

Модельный расчет звуковых полей выполняется нами в рамках модового формализма, известные условия применимости которого [9, 10] предполагаются выполненными (задаваемые глубина канала, частотный диапазон и расстояния до источников им не противоречат). Канал предполагается горизонтально-однородным вдоль трасс распространения сигнала и помехи, взаимодействие мод не учитывается. Статистические эффекты распространения звука в данной работе также не учитываются, т.е. мы рассматриваем сценарий приема полностью когерентных (пространственно-коррелированных в пределах АР) сигналов и используем известные для такого сценария выражения для АФР (весового вектора) АР, соответствующие указанным двум методам обработки. Физически, это означает ограничение сверху на расстояния до соответствующих источников – например, не более нескольких десятков километров для диапазона низких частот (первые сотни Гц), который предполагается рабочим. Именно в таких детерминированных, в смысле условий распространения, постановках проблема рассогласования рассматривалась ранее большинством авторов [3, 5].

Приемная АР предполагается прямолинейной и вертикальной, с точно известными и стационарными координатами элементов. Положение АР, как и другие указанные ниже параметры моделирования – глубина канала, профиль скорости звука, рабочая частота, характерные расстояния до источников – отвечают условиям одного из натурных экспериментов, ранее выполненного сотрудниками ИПФ РАН в Баренцевом море [11].

Таким образом, при моделировании мы задаем:

1) вертикальный профиль скорости звука в мелководном канале глубиной $H = 160$ м на основе линейной интерполяции данных измерений скорости в 32 точках, который показан на рис. 1 (типичный профиль для мелкого моря в северных широтах, обладающий выраженным сезонным термоклином в летний период [10]);

2) параметры подстилающего дна в виде жидкого полупространства: плотность $\rho_b = 1.8$ г/см$^3$, скорость звука $c_b = 1750$ м/с, декремент затухания звука 0.07 дБ/км Гц;

3) положение АР: число элементов $N = 13$, расположены эквидистантно через 8.5 м в интервале глубин от 44.5 до 146.5 м (положение АР показано на рис. 1);

4) рабочую частоту источников полезного сигнала и помехи: 240 Гц; на данной частоте полное число мод дискретного спектра в канале с указанными параметрами равно 28;

5) координаты источников: глубина источника сигнала – 80 м, глубина источника помехи – 10 м, расстояния от АР до источников выборочно меняются в интервале от 10 до 30 км;

6) аддитивный фоновый шум: пространственно-белый, единичной мощности на каждом элементе АР (входные мощности обоих источников нормированы на мощность шума);

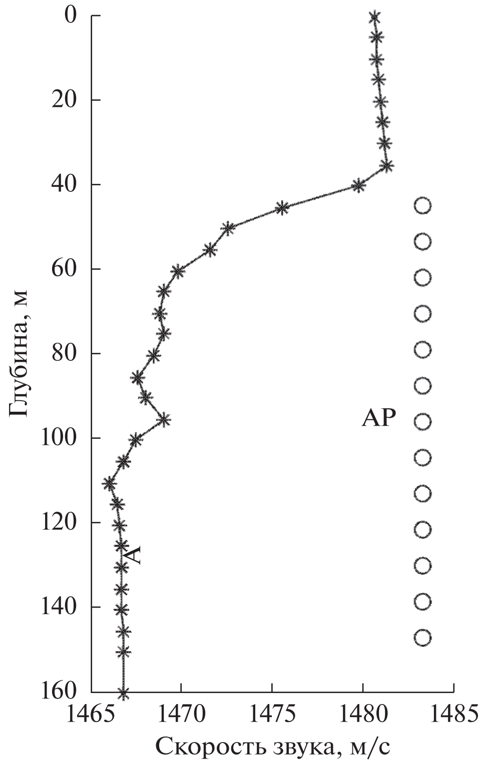



**Рис. 1.** Опорный профиль скорости звука (32 точки измерения скорости отмечены звездочками) и положение приемной АР в канале мелкого моря (условия эксперимента [11]).

7) априори неизвестные (случайные) отклонения скорости звука в водном слое от измеренных значений:

$$c_i = (c_0)_i + \mathrm{var}(c)\xi_i, \quad i = 1,\ldots,32,$$

где $c_i$ – случайные реализации скорости звука на каждом $i$-м горизонте измерения, $(c_0)_i$ – измеренное значение (см. рис. 1), $\xi_i$ – статистически независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-1, 1]$ (число их реализаций выбирается достаточно большим для последующего усреднения по ансамблю), $\mathrm{var}(c)$ – амплитуда отклонений, которая задается в качестве переменной величины в интервале значений от 0 м/с (отсутствие отклонений) до 3 м/с;

8) аналогично, априори неизвестные отклонения от указанных выше значений скорости звука в дне ($\Delta c_b$), плотности дна ($\Delta\rho_b$), глубины канала ($\Delta H$); максимальные интервалы относительных отклонений составляют для них 15, 45 и 3%, соответственно.

Расчетные выражения для интересующих нас характеристик АР имеют вид:

1) входное ОСШП:

$$SNR_{\mathrm{in}} = \frac{\sigma_S^2}{N + \sigma_N^2}, \tag{1}$$

где $\sigma_S^2, \sigma_N^2$ – суммарные по элементам АР интенсивности сигнала и помехи, соответственно, которые также являются параметрами моделирования (фактически, при этом моделируются различные уровни излучения самих источников);

2) выходное ОСШП для АР с некоторым заданным АФР (весовым вектором) $\mathbf{w}$:

$$SNR_{\mathrm{out}} = \frac{\mathbf{w}^+ R_S \mathbf{w}}{\mathbf{w}^+ (R_N + E)\mathbf{w}}, \tag{2}$$
$$R_S = \sigma_S^2 \mathbf{s}^* \mathbf{s}^{\mathrm{T}}, \quad R_N = \sigma_N^2 \mathbf{n}^* \mathbf{n}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ – нормированные векторы–столбцы реплик полезного сигнала и помехи на входе АР, соответственно (используется нормировка вида $|\mathbf{s}|^2 = 1, |\mathbf{n}|^2 = 1$); $R_S$, $R_N$ – соответствующие матрицы пространственных корреляций (когерентности), имеющие диадную форму в случае предполагаемой нами полной когерентности принимаемых сигналов; $E$ – единичная матрица когерентности фонового шума; верхние индексы $^*$, $^{\mathrm{T}}$, $^+$ – знаки комплексного сопряжения, транспонирования и эрмитова сопряжения матриц;

3) весовые векторы АР, которые определяются выбором метода обработки сигналов и в нашем случае имеют хорошо известный вид (например, [12]):

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}^*, \tag{3}$$

$$\mathbf{w} = (R_N + E)^{-1}\mathbf{s}^* \tag{4}$$

для согласованной обработки (в точном значении этого термина) и для оптимальной обработки, соответственно (имеется в виду оптимизация по критерию максимума выходного ОСШП (2));

4) коэффициент усиления (выигрыш) АР и нормированный на число элементов АР выигрыш:

$$G = \frac{SNR_{\mathrm{out}}}{SNR_{\mathrm{in}}}, \quad g = \frac{G}{N}. \tag{5}$$

Вторая из этих двух характеристик АР с обработкой сигналов удобна именно тем, что в явном виде показывает отличие эффективности метода обработки в произвольной (по сигналу и помехам) ситуации от точно согласованной обработки в ситуации приема полностью когерентного сигнала на фоне пространственно-белого шума, когда выполняются равенства $G = N$, $g = 1$. Используя такие же характеристики, в ряде работ был проведен сравнительный анализ различных методов пространственной обработки в условиях ослабления когерентности многомодового сигнала при дальнем распространении звука в случайно-неоднородном океаническом волноводе [13–17]. В таком контексте величина $g$ имеет очевидный смысл потерь усиления АР, обусловленных частичной когерентностью полезного сигнала на входе АР (при этом $g < 1$). Однако, при приеме сигнала (даже частично-когерентного) на фоне интенсивных анизотропных помех величина нормированного выигрыша может быть значительной ($g \gg 1$) для тех методов обработки, которые обеспечивают их подавление, хотя бы частичное [13, 15]. Отметим в этой связи, что в многомодовом канале распространения возможность достижения такого "усиленного" выигрыша зависит одновременно от двух независимых условий: от того, насколько сильно модовый состав сигнала отличен от модового состава помехи, и есть ли у АР достаточный "ресурс" разрешающей способности для селекции сигнальных и помеховых мод. Последний фактор, в свою очередь, полностью определяется степенью ортогональности этих двух групп мод волновода на входе АР, что критически зависит как от числа ее элементов, так и положения их по глубине [18].

Таким образом, интересующие нас эффекты априорной неопределенности модели океанической среды моделируются следующим образом. На основе условий 7) и 8) формируется статистический ансамбль реализаций модели канала в заданных интервалах отклонений ее параметров от точных (опорных) значений. Определение "точные" в данной постановке означает, что именно эти значения параметров используются для расчета весовых векторов (3)–(4), т.е. для "настройки" методов обработки на основе опорной модели канала. Ансамбль реализаций сигнального и помехового полей на входе АР, отвечающий ансамблю реализаций "рассогласованной" (по тому или иному параметру) модели канала при заданных положениях обоих источников, формирует ансамбли величин (1), (2), (5). Последующее их усреднение дает те величины, которые естественно назвать "реальными" значениями ОСШП и коэффициента усиления АР для конкретного метода обработки. Такой расчет выполняется последовательно для каждого значения интервала отклонений и в итоге строятся зависимости нормированного выигрыша АР от этой величины, что дает возможность количественно оценить влияние рассогласования модели на эффективность рассматриваемых методов обработки сигналов.

Прежде чем переходить к результатам такого моделирования, отметим дополнительно ряд важных аспектов постановки задачи.

В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением методов пространственной обработки принимаемых акустических сигналов, относящихся к некоторой заданной их частоте. Временные параметры сигналов и, соответственно, дополнительные возможности пространственно-временной обработки здесь не учитываются, поскольку наш интерес связан с анализом эффективности приемной АР именно как пространственного фильтра многомодовых сигналов в условиях априорной неопределенности модели среды распространения. Важно, что схема обработки сигналов в каналах АР для обоих рассматриваемых методов является единой – это стандартная схема линейной пространственной обработки, когда сигнал на выходе сумматора АР (выходной сигнал) есть результат линейного преобразования реплик входных сигналов путем их скалярного умножения на весовой вектор $\mathbf{w}$. Известно [1–3, 12], что в случае приема когерентного полезного сигнала (вне зависимости от когерентных свойств внешних шумов и помех) такая схема обеспечивает оптимизацию пространственной обработки по критерию максимума выходного ОСШП при соответствующем выборе весового вектора. Сценарий приема слабого сигнала (интенсивной помехи) интересен нам не только в силу своей практической значимости, но и потому, что он в наибольшей степени подчеркивает отличия методов оптимальной и согласованной обработки, что и будет показано ниже.

Несмотря на то, что динамические шумы моря в диапазоне низких частот обладают, как правило, характерной анизотропией в вертикальной плоскости канала (например, [19, 20]), мы ограничиваемся здесь случаем пространственно-белого шума, на фоне которого предполагается прием сигналов удаленных источников полезного сигнала и помехи. Фактически, это означает, что в качестве шума рассматриваются только собственные (взаимно-некоррелированные и равномерные по интенсивности) шумы в каналах АР. Такое весьма сильное упрощение постановки влияет, конечно, на количественные результаты моделирования, однако, не ограничивает возможности их корректных обобщений для более реалистичных ситуаций, в которых необходимо учитывать модовый состав анизотропных морских шумов (вернемся к этому вопросу ниже).

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Здесь мы ограничимся несколькими характерными иллюстрациями, наглядно демонстрирующими интересующие нас эффекты в отношении влияния априори неизвестных отклонений скорости звука в водной толще, скорости звука в дне и плотности дна от их точных значений. Усреднения расчетных величин $SNR_{\text{out}}$ (2), $G$ и $g$ (5) выполнены по ансамблю 300 (для рис. 6 – 200) случайных реализаций соответствующих параметров для каждого значения интервала отклонений в указанных выше пределах. Особое внимание мы уделяем моделированию практически интересной ситуации, когда относительно мощный подповерхностный источник (например, движущееся судно) "маскирует" своим излучением слабый сигнал подводного объекта. Расстояния до источников выбраны либо равными друг другу (15 км),

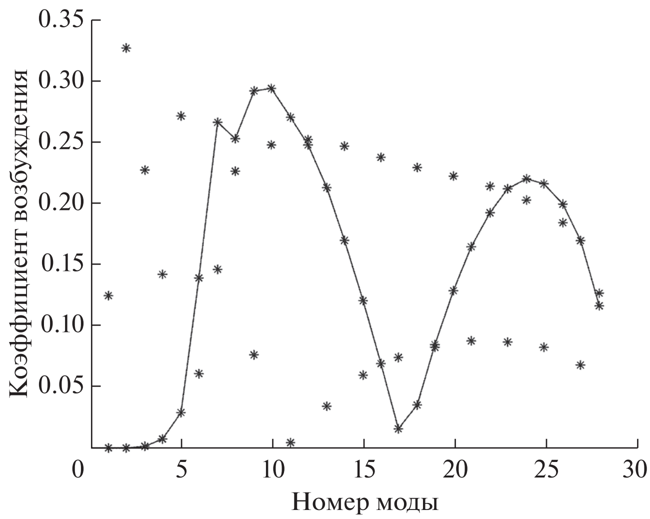



**Рис. 2.** Нормированные коэффициенты возбуждения мод в поле полезного сигнала (отдельные звездочки) и помехи (сплошная кривая) на входе АР при равном удалении обоих источников на 15 км.

либо существенно различными (10 и 30 км). Угловые координаты источников в горизонтальной плоскости канала не играют роли в случае линейной вертикальной АР и могут быть произвольными (возможно, одинаковыми).

Для физической интерпретации последующих результатов необходимо иметь, прежде всего, представления относительно модового состава принимаемых реплик сигнального и помехового полей. Модовый состав сигнала на входе АР, возбуждаемого произвольным удаленным источником, определяется в рамках нашей модели горизонтально-однородного канала двумя основными факторами – начальными коэффициентами возбуждения мод (они зависят только от глубины источника, если он точечный) и неравномерным затуханием мод по трассе распространения (зависит от дистанции). На рис. 2 показаны результирующие коэффициенты возбуждения мод на входе АР для случая равноудаленных источников. Для удобства сравнения коэффициенты нормированы одинаковым образом по сумме квадратов их значений, но в действительности входное отношение сигнал/помеха (ОСП) выбирается малым (–10 или –20 дБ) с учетом нашего интереса к такой постановке. Хорошо видно, что модовый состав (амплитудный модовый спектр) полезного сигнала сильно “изрезан”, что характерно для положения источника в средней части канала, в то время как спектр помехи является более плавным, но тоже существенно неравномерным, имеет при этом два выраженных максимума в области средних (номера мод $m \approx 10$) и высоких ($m \approx 25$) мод. В результате только несколько мод сигнального поля имеют относительно высокие значения модовых $(\text{ОСП})_m$ и оказываются практически “свободными” от помехи: это низкие моды с номерами 1–5 и две средние моды с номерами 16, 18, т.е. не более четверти от полного количества мод. Фильтрация именно этих мод обеспечивает оптимизацию обработки, в то время как согласованной обработке отвечает фильтрация заметно большего (примерно в два раза) количества мод сигнального поля, что приводит к пропусканию на выход АР некоторой части интенсивных помеховых мод с низкими значениями $(\text{ОСП})_m$. Ожидаемым следствием этого является заметный проигрыш в эффективности, что будет показано на следующих рисунках.

На рис. 3 иллюстрируется влияние априорной неопределенности модели канала по профилю скорости звука в водном слое. Видно, что согласованная обработка в случае более мощной помехи (правый график) намного менее эффективна, чем оптимальная обработка, что объясняется не только низким значением входного ОСШП (в данном примере, –20 дБ), но и отмеченным выше заметным “перекрытием” модовых спектров сигнала и помехи на входе АР (рис. 2). В случае большего их разделения, дополнительный выигрыш оптимальной обработки над согласованной становится менее значительным (согласованная обработка – более эффективной), хотя часть помеховых мод может “проникать” на выход АР в результате слабой ортогональности части сигнальных и помеховых мод, если такое условие отвечает положению АР в канале [18]. Отметим, что потенциально наиболее “выигрышный” сценарий приема отвечает здесь случаю, когда сигнал и интенсивная помеха сосредоточены в разных группах мод, и эти две группы мод достаточно хорошо ортогональны. Наглядной аналогией такого сценария при работе АР в свободном пространстве является прием сигнала и помехи по существенно разным направлениям прихода, угловое расстояние между которыми много больше ширины главного лепестка диаграммы направленности. При точном фазировании АР в направлении на источник сигнала, что отвечает согласованной его обработке вида (3), помеха оказывается в области слабых боковых лепестков диаграммы (т.е. почти ортогональна весовому вектору АР), что уже обеспечивает высокие значения антенного выигрыша. Дополнительное формирование нуля диаграммы в направлении на источник помехи, что отвечает оптимизации обработки вида (4), приводит к полной ортогонализации весового вектора волновому фронту помехи и повышению выигрыша до максимального значения.

Видно, вместе с тем, что согласованная обработка является заметно более устойчивой к рассогласованию и, более того, может демонстрировать немонотонную зависимость от интервала “расстройки” профиля скорости звука. Такая особенность также объясняется присутствием мощной помехи – “разумное” рассогласование

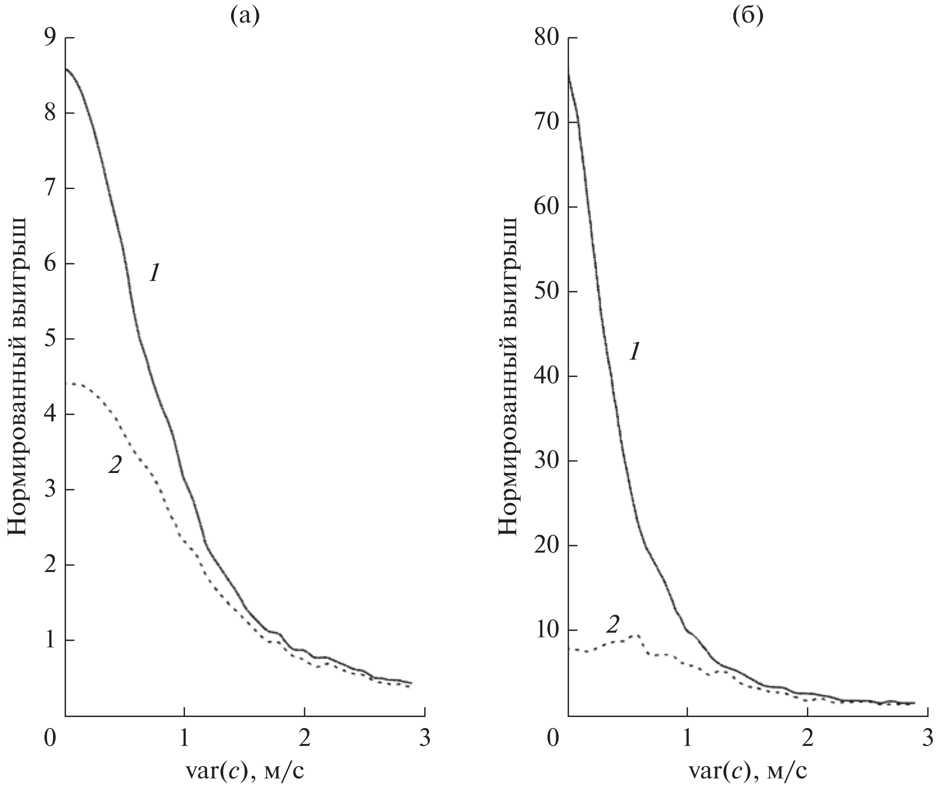



**Рис. 3.** Нормированный выигрыш $g$ (3) АР для оптимальной обработки (сплошные кривые *1*) и согласованной обработки (точечные кривые *2*) в зависимости от интервала вариаций профиля скорости звука в водном слое. Расстояния до источников: 15 км (как на рис. 2), входные интенсивности сигналов относительно белого шума: (а) – $\sigma_S^2 : \sigma_N^2 = 10 : 100$ и (б) – 10 : 1000.

весового вектора АР с репликами полезного сигнала, отвечающими изменчивости гидрологии, действительно может приводить к некоторому повышению помехоустойчивости, но только в том случае, если при этом достигается более эффективное подавление помехи. Видно, что при отклонениях скорости звука на величину ~1 м/с оба метода показывают уже практически одинаковую эффективность, при этом потери усиления оптимальной обработки составляют значительную величину (до ~10 дБ), в то время как для согласованной обработки – не более 1–2 дБ. Фактически, оптимальная обработка быстро деградирует до уровня согласованной обработки и при таком уровне рассогласования по данному параметру уже не имеет какого-либо преимущества. Соответственно, уровни допустимых отклонений реального профиля скорости от точного (для определенности, по уменьшению выигрыша АР в два раза) так же различны и зависят при этом от величины входного ОСП. Например, для правого графика (ОСП = –20 дБ) мы можем оценить эти уровни величинами 0.3 и 1.5 м/с для методов оптимальной и согласованной обработки, соответственно. При менее интенсивной помехе (ОСП = = –10 дБ, левый график) отличия в эффективности двух методов ожидаемо становятся менее существенными: согласованная обработка не имеет здесь отмеченного смещения максимума достигаемого выигрыша, допустимые уровни отклонений примерно равны и составляют величину ~1 м/с.

Характеризуя влияние рассогласования модели канала по профилю скорости звука, подчеркнем, что предполагаемый нами разброс его случайных отклонений от опорного профиля (не более 3 м/с на каждом горизонте) составляет реально малую величину в сравнении с той вертикальной изменчивостью профиля, которая приводит к формированию канала придонного типа (до 20 м/с, см. рис. 1). Следовательно, речь в данном случае не идет о какой-либо существенной трансформации канала, характерной для сезонной изменчивости гидрологии в мелком море [10], но об относительно малых вариациях, оценка которых отвечает назначению оперативной океанографии.

Возвращаясь к используемой нами простейшей модели фоновых шумов отметим, что учет анизотропного модового шума приведет, очевидно, к соответствующим поправкам в распределении по модам величин $(\text{ОСП})_m$ – оно будет определяться модовым составом всей совокупности источников шума и помех. В этом случае для оценки группы мод, наиболее "полезных" для оптимизации обработки, необходимо построить зависимости того же вида, что и на рис. 2, но с учетом модового шума и его входной интенсивности относительно внешнего источника помехи. Например, с учетом характерных для натурных условий шумов моря, возбуждаемых в приповерхностной области канала и имеющих при этом максимум интенсивности в области высоких номеров мод, такие поправки приведут к дополнительному "зашумлению" именно высоких мод полезного сигнала. Эту ситуацию мы можем качественно проиллюстрировать в рамках нашей модели, варьируя расстояния до источников.

На рис. 4 демонстрируется существенное различие модовых спектров полезного сигнала и помехи в области высоких мод и, следовательно, величин $(\text{ОСП})_m$ в двух противоположных ситуациях: слева – относительно близкий источник сигнала (10 км) и далекий источник помехи (30 км), справа – обратное соотношение дистанций. Вертикальным пунктиром отмечена та группа высоких мод ($m \geq 20$), для которых величины $(\text{ОСП})_m$ изменились при такой перестановке источников наиболее заметно. Ожидаемо сильно меняется выигрыш согласованной обработки, что иллюстрируется на рис. 5 – в первом случае он заметно выше, поскольку высокие моды в составе помехи значительно подавлены затуханием по дистанции, и поэтому согласованная фильтрация сигнала в этой области спектра в меньшей степени подвержена воздействию помехи. Напротив, с приближением источника помехи (удалением источника сигнала) часть интенсивных сигнальных мод "накрывается" помехой, что приводит к увеличению мощности помехи на выходе согласованного фильтра, уменьшению величин выходного ОСШП и выигрыша АР. Например, значения $(\text{ОСП})_m$ для моды с номером 24, которой отвечает второй максимум модового спектра помехи, меняются фактически на порядок: $(\text{ОСП})_{24} \approx 0.2$, $(\text{ОСП})_{24} \approx 0.1$, $(\text{ОСП})_{24} \approx 0.04$ для расстояний 10 и 30 км, 15 и 15 км, 30 и 10 км, соответственно (при оценке $(\text{ОСП})_m$ на основе рис. 4 необходимо учитывать уровень входного ОСП, который составляет здесь –10 дБ).

Из рис. 5 видно также, что оптимальная обработка, напротив, показывает слабую чувствительность к изменению интенсивностей сигнала и помехи в области высоких номеров мод. Это объясняется тем, что оптимальный модовый фильтр является пространственным фильтром небольшой группы мод указанных выше номеров, но высокие моды в эту группу не входят в силу присутствия в них второго максимума спектра помехи (несмотря на то, что он меняется по величине).

Таким образом, соотношения расстояний до источников полезного сигнала и помех оказывают весьма сильное влияние на "иерархию" методов пространственной обработки. Физической причиной этого является характерный для мелкого моря эффект неравномерного модового затухания, и если источники расположены на существенно разных расстояниях, то эффект "обеднения" модового состава звукового поля с дистанцией в области высоких номеров мод заметно влияет на результат обработки.

На рис. 6 показан другой сценарий априорной неопределенности модели – по параметру скорости звука в жидком полупространстве, моделирующем подстилающее дно. Вид зависимостей здесь заметно другой, но максимум выигрыша согласованной обработки также имеет некоторое смещение по величине интервала вариаций этого параметра. В этом случае появляются характерные "боковые лепестки" зависимости для обоих методов, хотя для оптимальной обработки они практически не существенны. Допустимые (в том же смысле) уровни отклонений по данному параметру модели оцениваются величиной на уровне ~1% для оптимальной обработки и ~5% для согласованной обработки, т.е. они оказываются существенно различными и в этом сценарии рассогласования.

На рис. 7 показано влияние рассогласования модели по параметру плотности донных пород. Эффект смещения максимума выигрыша согласованной обработки здесь оказывается еще более выраженным, и он достигается, как видно, при весьма значительной ошибке в оценке плотности: на ~10% в сторону увеличения (рис. 7а) и на ~30% в сторону уменьшения (рис. 7б). Видно также, что допустимая ошибка в оценке плотности для оптимальной обработки составляет, соответственно, ~20 и ~10%, т.е. по этому параметру она оказывается заметно более устойчивой. Поскольку плотность донных пород является, как правило, весьма "ненадежным" параметром модели в смысле своей неопределенности и возможной пространственной изменчивости по дистанции, подобный вывод и тот факт, что максимумы показанных зависимостей являются достаточно плавными, можно оценивать как позитивные.

Опуская графики для зависимостей выигрыша АР от интервала рассогласования модели по параметру глубины канала, отметим только, что эти зависимости ожидаемо оказались наиболее слабыми в сравнении с предыдущими. Весьма значительные ошибки в оценке глубины водного слоя (до 5 м) не оказывают существенного влияния на выигрыш АР даже для более "чувствительной" оптимальной обработки – относительное уменьшение нормированного выигрыша не превосходит ~30% для тех же вариантов по расстояниям до источников и уровням их интенсивностей.

Наконец, приведем пример расчета совместного влияния рассогласования по нескольким параметрам. Интуитивно ясно, что такое влияние будет значительно более сильным, чем в показан-

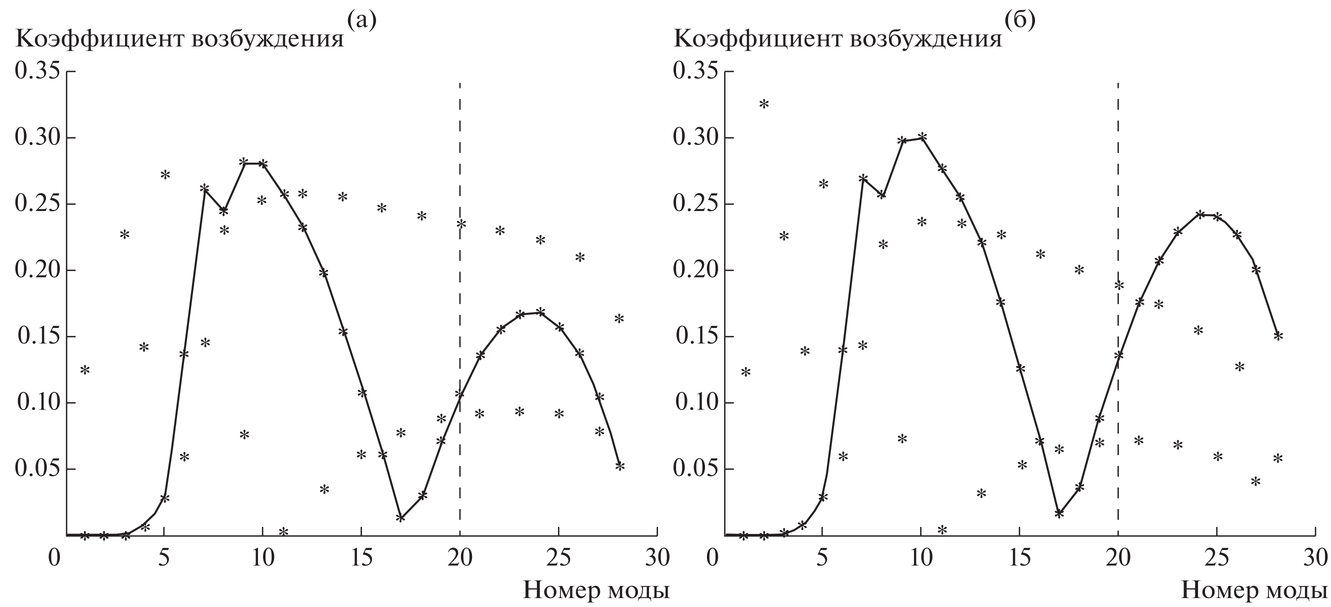



**Рис. 4.** Нормированные коэффициенты возбуждения мод в поле полезного сигнала (отдельные звездочки) и помехи (сплошная кривая) на входе АР при расстояниях до источников сигнала и помехи, соответственно: (а) – 10 и 30 км, (б) – 30 и 10 км.

ных выше случаях. На рис. 8 показаны зависимости нормированного выигрыша АР от интервала вариаций профиля скорости звука в тех же пределах, что и на рис. 3 и 5, но при существенном дополнительном условии, что другие два параметра – скорость звука и плотность в донных породах – также имеют некоторый заданный интервал отклонений (1 и 5%). Видно, что рассогласование модели сразу по нескольким параметрам приводит к тому, что достижение потенциально высоких величин выигрыша, кратно превосходящих число элементов АР, становится практически невозможным. В наибольшей степени, как и следовало ожидать, этот вывод относится к оптимальной обработке: на рис. 8б видно, что она не обеспечивает какого-либо выигрыша в сравнении с согласованной обработкой, потери ее эффективности теперь превышают ~13 дБ в сравнении с теми значениями, которые показаны на рис. 3а в области малых вариаций профиля скорости, но и уменьшение выигрыша с ростом аргумента уже не такое резкое.

Завершая представление результатов моделирования, подчеркнем, что приведенные зависимости относятся именно к нормированному коэффициенту усиления АР согласно определениям (5). Несмотря на показанное значительное уменьшение его величины с ростом априорной неопределенности модели, сам коэффициент усиления может сохранять достаточно большие значения, $G \sim N$, в условиях рассогласования. Например, на рис. 3 и 5 видно, что при отклонениях профиля скорости звука в интервале до ~2 м/с, антенный выигрыш все еще достаточно велик, хотя и ослабление его величины от начального уровня также значительно. Отсюда можно сделать общий и вполне очевидный вывод, что сложный многопараметрический канал распространения сигналов лучше знать не точно и даже плохо, чем никак, и хотя бы приблизительные (достаточно грубые) оценки его параметров являются необходимыми для реалистичных оценок эффективности методов пространственной обработки сигналов.

Представленные результаты моделирования получены, согласно постановке задачи, для заданной частоты звуковых сигналов. Естественно ожидать, что в реальных ситуациях приема широкополосных сигналов частотная зависимость показанных эффектов рассогласования будет играть существенную роль. Качественно, однако, эту роль можно оценить уже на основе выполненных расчетов, исходя из того соображения, что если ширина диапазона достаточно велика, то на разных частотах модовый состав принимаемых сигналов, как и общее число мод дискретного спектра, будет различным (по сути, это и есть физический критерий широкой полосы в данной постановке). Поскольку оценки модовых спектров принимаемых сигналов (аналогично рис. 2 и 4) лежат в основе априорной оценки потенциальных возможностей пространственной обработки, то в случае широкополосных сигналов необходимо, прежде всего, учитывать частотную зависимость модовых коэффициентов возбуждения при размещении источников в выбранном интервале глубин и частотно-зависимые эффекты модового затухания по трассам распространения.

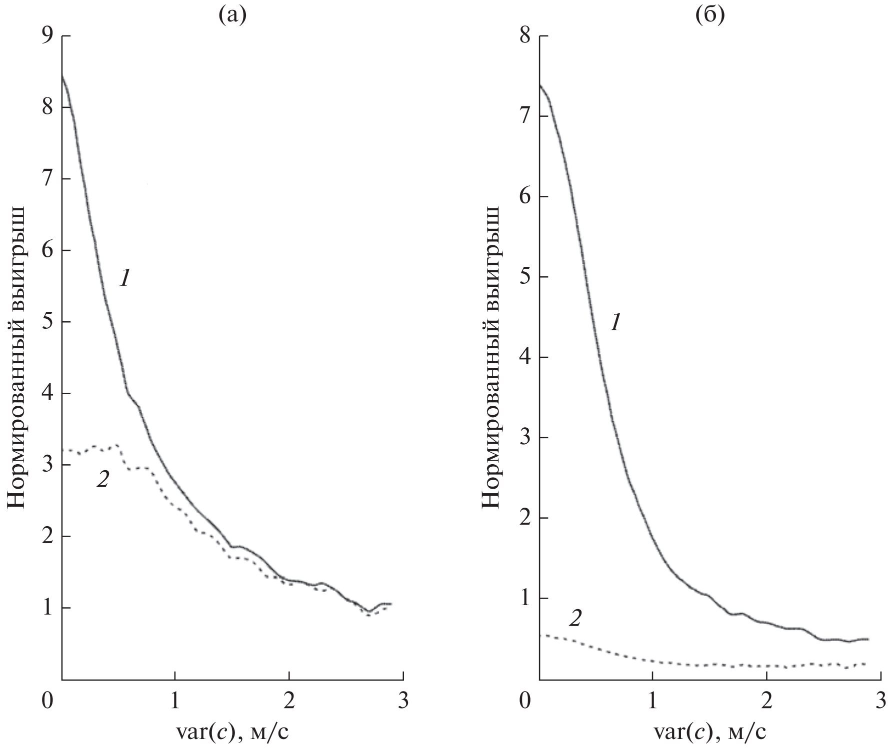



**Рис. 5.** Аналогичные рис. 3 зависимости нормированного выигрыша АР для расстояний до источников, отвечающих рис. 4, при $\sigma_S^2 : \sigma_N^2 = 10 : 100$ в обоих случаях.

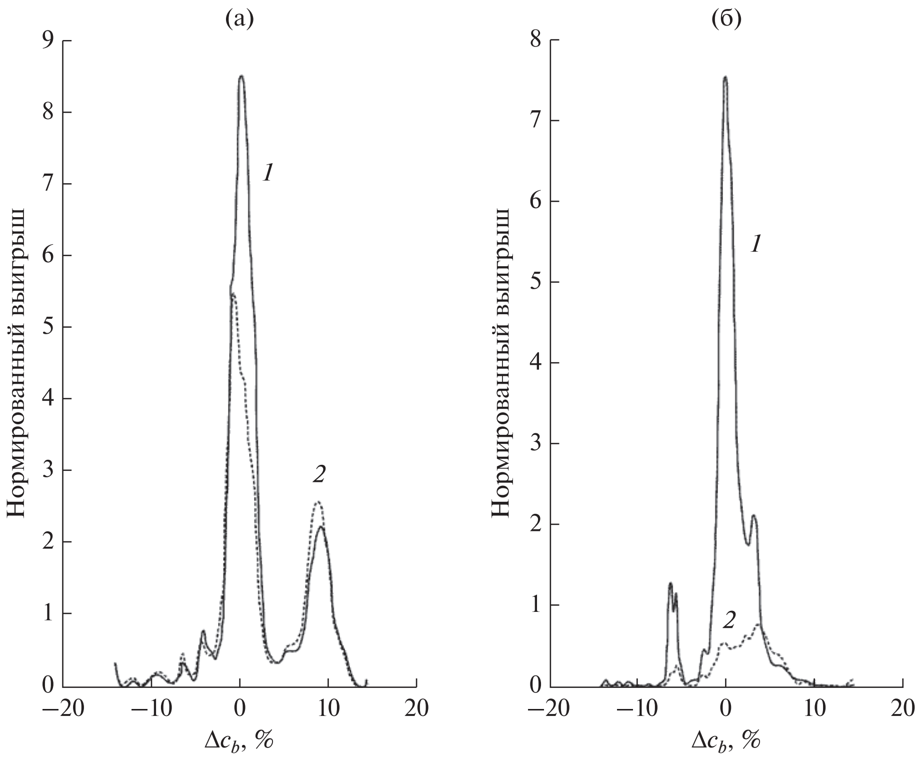



**Рис. 6.** Зависимости нормированного выигрыша АР от интервала вариаций скорости звука в дне. Расстояния до источников сигнала и помехи, соответственно: (а) – 15 км; (б) – 30 и 10 км; $\sigma_S^2 : \sigma_N^2 = 10 : 100$ в обоих случаях.

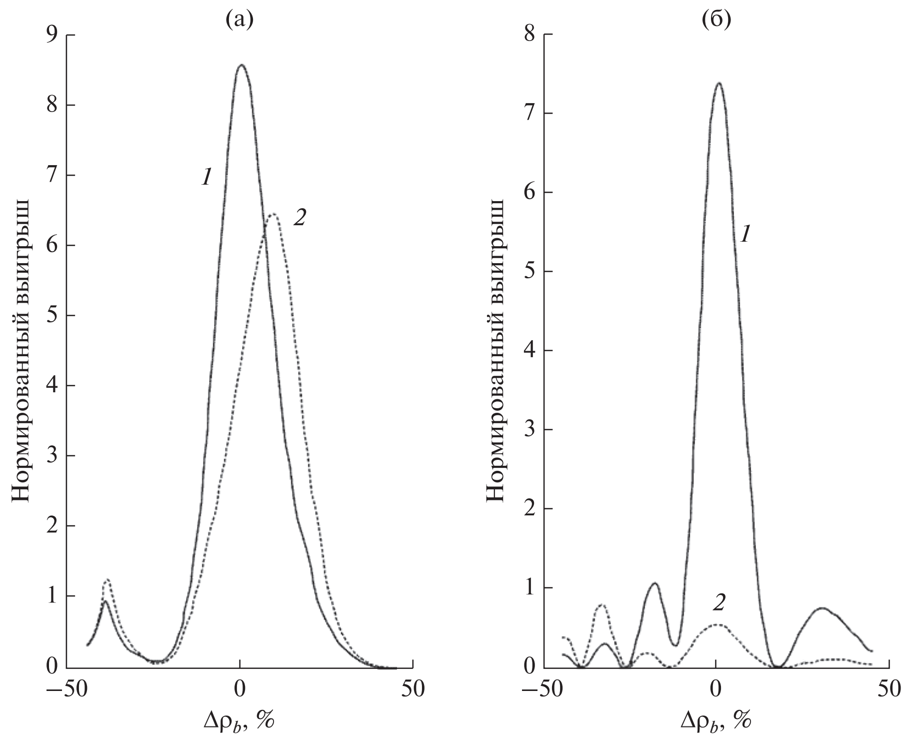



**Рис. 7.** Зависимости нормированного выигрыша АР от интервала вариаций плотности дна при тех же параметрах источников, как на рис. 6.

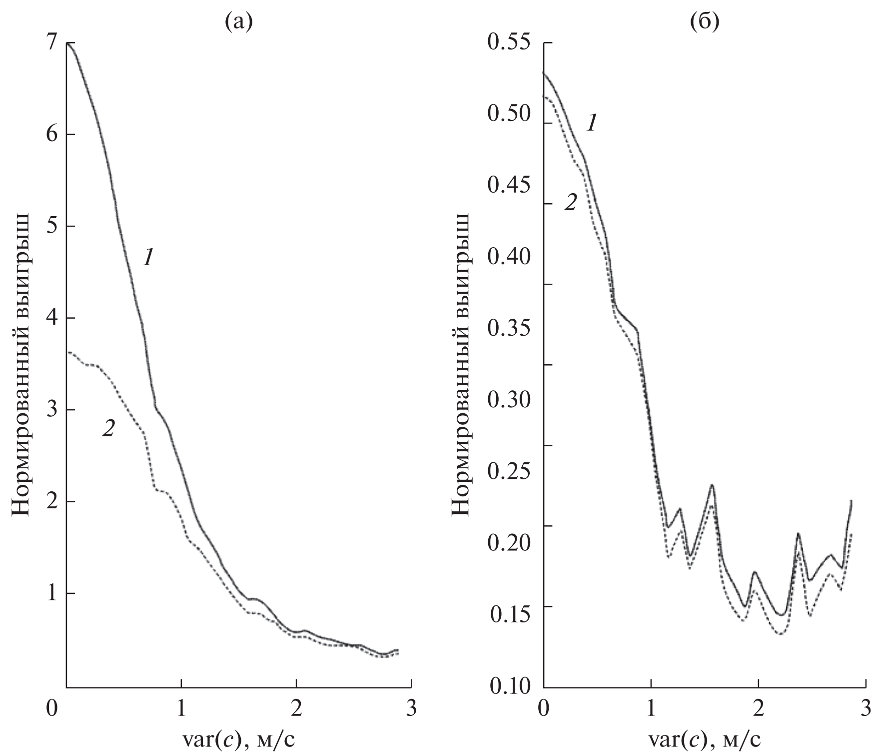



**Рис. 8.** Зависимости нормированного выигрыша АР от интервала вариаций профиля скорости звука в водном слое при условии, что скорость звука в дне и его плотность варьируют в пределах (а) — 1 и (б) — 5% относительно своих точных значений. Расстояния до источников 15 км, отношение интенсивностей $\sigma_S^2 : \sigma_N^2 = 10 : 100$ в обоих случаях (аналогично рис. 3а).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итог выполненному моделированию поставленной задачи, отметив наиболее важные качественные выводы.

1. Потери усиления АР как пространственного фильтра многомодовых сигналов в условиях априорной неопределенности относительно параметров канала сильно зависят не только от уровня этой неопределенности, но и от того, оценка какого именно параметра имеет отклонения от истинного значения. Такое “селективное” влияние параметров модели обусловлено тем, что они оказывают существенно различное влияние на формирование многомодового поля принимаемых сигналов, включая влияние на продольные волновые числа мод. Последние определяют фазовые соотношения мод на входе АР при заданном расстоянии до источника, а рассогласование по фазам сигналов, как правило, приводит к наиболее сильному эффекту потерь по величинам выходного ОСШП и коэффициента усиления АР (как и любого другого приемника, работающего с когерентными сигналами). Исходя из этого общего соображения, отмеченная выше относительно низкая чувствительность выигрыша АР к рассогласованию модели по плотности донных пород и глубине канала представляется ясной, поскольку эти параметры являются относительно “грубыми” в смысле влияния на формирование звукового поля в подводном канале. Напротив, рассогласование по скорости звука в водном слое и в донных породах оказывается фактором, наиболее сильно влияющим на результирующую эффективность выбранного метода пространственной обработки через влияние на волновые числа распространяющихся мод.

2. Значительный выигрыш оптимальной обработки над согласованной обработкой в случае достаточно хорошего (практически точного) знания параметров канала распространения обусловлен подавлением помехи и прямо пропорционален ее интенсивности. Следовательно, в условиях мощных помех (судоходство, динамический модовый шум океана, любые другие возможные источники) проблема “согласованной со средой обработки” значительно шире, чем согласование с полем полезного сигнала сложного пространственного (модового) спектра, и с необходимостью должна учитывать фактор помех, если они имеют, как и сигнал, некоторый характерный модовый состав на входе приемной АР.

3. Оптимальная обработка является значительно более чувствительной к рассогласованию (наименее робастной), поскольку потери усиления для нее определяются суммарным негативным эффектом – потерями в накоплении по элементам АР полезного выходного сигнала и потерями в подавлении интенсивной помехи. Менее очевидно, но характерно, что согласованная обработка может демонстрировать заметное смещение максимума своей эффективности – немонотонную и даже осциллирующую зависимость потерь усиления от величины рассогласования по отдельным параметрам. Более того, в отдельных случаях (как на рис. 6, 7, к примеру) “рассогласованная” согласованная обработка может оказаться даже более эффективной, чем “рассогласованная” оптимальная обработка, т.е. термин “оптимальная обработка” теряет свой первоначальный смысл в таких условиях. Такой неоднозначный эффект рассогласования обусловлен в первую очередь присутствием интенсивной помехи, модовый состав которой частично “закрывает” моды сигнального поля. В подобных ситуациях некоторый проигрыш эффективности в накоплении сигнала (уменьшение числителя в выходном ОСШП) при согласованной обработке может быть компенсирован и даже превзойден более значительным выигрышем в подавлении помехи (более резким уменьшением знаменателя).

4. Сильное влияние точности оценки параметров дна, прежде всего, скорости звука, на величину достигаемого выигрыша АР указывает на то, что учет “донного фактора” критически важен для реализации высокой эффективности приемных антенных систем в условиях мелкого моря. С ростом рабочих дистанций обнаружения важность этого фактора и требования к качеству оценки донных параметров только растут, поскольку обсуждаемые эффекты рассогласования “накапливаются” с расстоянием. Последнее замечание справедливо, однако, до тех пор, пока в спектре принимаемых сигналов остается достаточно большое число мод, и сама постановка задачи обработки многомодовых сигналов сохраняет свой физический смысл. На больших дистанциях, когда модовый состав сигналов сильно сокращается и группируется в области низких мод, можно ожидать существенно более высокой устойчивости методов обработки к обсуждаемым эффектам. Соответствующие оценки интервала дистанций определяются типом подводного канала и заданным частотным диапазоном работы АР.

5. Моделирование в подобных постановках расчетной задачи позволяет:

– дать реалистичный прогноз эффективности вертикальной АР как пространственного фильтра многомодовых сигналов в условиях априорной неопределенности в оценке основных физических параметров звукового канала мелкого моря;

– количественно оценить уровень априорной неопределенности этих параметров, при котором потери усиления для конкретных методов обработки сигналов (не только рассмотренных, но и возможных других) в сравнении с потенциально достижимой величиной выигрыша АР не превышают заданной величины;

– на этой основе, обосновать количественные требования к средствам оперативной океанографии в заданной акватории в части контроля временной изменчивости гидрологии канала (погодной, суточной, сезонной) и точности оценки геоакустических параметров дна с учетом возможной их пространственной изменчивости вдоль трасс распространения сигналов.

Сделанные выводы представляются достаточно общими, поскольку они не связаны с выбором конкретных значений параметров расчетной модели. Очевидно, в других гидрологических условиях или при других положениях АР и самих источников по глубине аналогичные зависимости и количественные оценки допустимых отклонений параметров будут отличными от тех, которые приведены выше. Полученные численные результаты рассматриваются нами скорее как наглядная демонстрация обсуждаемых эффектов и самого подхода к их исследованию применительно к выбранному варианту постановки задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-19-00383).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ильичев В.И., Калюжный А.Я., Красный Л.Г., Лапий В.Ю.* Статистическая теория обнаружения гидроакустических сигналов. М.: Наука, 1992. 415 с.
2. *Малышкин Г.С., Сидельников Г.Б.* Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 526–545.
3. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
4. *Bucker H.P.* Use of calculated sound fields and matched field detection to locate sound sources in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 59. № 2. P. 368–373.
5. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Mikhalevsky P.N.* An overview of matched field methods in ocean acoustics // IEEE J. Oceanic Eng. 1993. V. 18. № 4. P. 401–423.
6. *Baggeroer A.B.* Why did applications of MFP fail, or did we not understand how to apply MFP? // Proc. 1st Int. Conf. and Exhib. on Underwater Acoustics / Eds. by Papadakis J.S. & Bjørnø L. Corfu Island, Greece. 2013. P. 41–49.
7. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в акустическом волноводе с неточно известными параметрами с использованием согласованной обработки в модовом пространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. С. 540–550.
8. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в случайно-неоднородном канале с использованием многорангового алгоритма Кейпона // Акуст. журн. 2021. Т. 67. С. 659–667.
9. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
10. *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997. 189 с.
11. *Вдовичева Н.К., Матвеев А.Л., Сазонтов А.Г.* Экспериментальное и теоретическое исследование вертикальной когерентности звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 3. С. 309–313.
12. *Монзинго Р.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
13. *Малеханов А.И.* Некогерентная пространственная фильтрация мод в случайно-неоднородном океане // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 898–904.
14. *Городецкая Е.Ю., Малеханов А.И., Сазонтов А.Г., Фарфель В.А.* Влияние эффектов дальнего распространения звука в случайно-неоднородном океане на потери усиления горизонтальной антенной решетки // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 615–621.
15. *Вдовичева Н.К., Городецкая Е.Ю., Малеханов А.И., Сазонтов А.Г.* Коэффициент усиления вертикальной антенны в случайно-неоднородном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1997. V. 43. № 6. С. 769–776.
16. *Завольский Н.А., Малеханов А.И., Раевский М.А.* Сравнительный анализ методов пространственной обработки сигналов, принимаемых горизонтальной антенной решеткой в канале мелкого моря со взволнованной поверхностью // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 608–618.
17. *Бурдуковская В.Г., Малеханов А.И., Раевский М.А.* Влияние анизотропного ветрового волнения на эффективность пространственной обработки акустических сигналов в мелком море // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 617–625.
18. *Smirnov A.V., Malekhanov A.I., Labutina M.S.* Vertical array gain in a randomly inhomogeneous underwater sound channel: Effect of the array arrangement // Proc. Mtgs. Acoust. (POMA). 2021. V. 44. № 055005. P. 1–12.
19. *Kuperman W.A., Ingenito F.* Spatial correlation of surface generated noise in a stratified ocean // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 6. P. 1988–1996.
20. *Аредов А.А., Охрименко Н.Н., Фурдуев А.В.* Анизотропия шумового поля в океане (эксперимент и расчет) // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 215–221.

**EDN:** ADJHJW
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 440–448*

## ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*УДК 534.2,517.9*

# ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА КОРРЕКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ОПТОАКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ



**А. Г. Рудницкий***
*Институт гидромеханики НАНУ, ул. Капнис 8/4, Киев, 03680 Украина*
**e-mail: rudnitskii@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.01.2022 г.
После доработки 01.01.2022 г.
Принята к публикации 03.02.2022 г.

Предлагается итеративный алгоритм улучшения качества оптоакустических изображений, основанный на теореме Банаха о неподвижной точке. Проведено численное моделирование распространения волн ультразвукового диапазона и восстановления изображений в средах, приближенных к мягким биологическим тканям. Проблема устранения искажений и артефактов на оптоакустических изображениях промоделирована для четырех итеративных схем. Показана эффективность подхода уже при использовании незначительного количества итераций.

*Ключевые слова:* оптоакустика, численное моделирование, *k*-Wave toolbox

**DOI:** 10.31857/S0320791922040098

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в научных исследованиях и в клинической практике широко применяются такие методы неинвазивной неповреждающей диагностики, как магнитно-резонансная и компьютерная томография. Огромное значение этих методов было оценено мировым научным сообществом присуждением их авторам Нобелевских премий по физиологии и медицине. К сожалению, использование в этих методах потенциально опасных для здоровья человека жестких полей и излучений накладывает серьезные ограничения на их применение. Значительным потенциалом, с точки зрения безопасности и получения надежной диагностически значимой информации, обладают оптическая когерентная и оптическая диффузионная томография. Однако из-за сильного поглощения и рассеивания световых волн в биологических тканях чисто оптические методы способны эффективно визуализировать структуры лишь в приповерхностных областях. В этой связи одним из самых перспективных и безопасных направлений медицинской диагностики считается подход, основанный на оптоакустическом (ОА) эффекте.

Оптоакустическая визуализация основана на явлении, при котором поглощение оптического излучения неоднородностями биоткани вызывает их нагрев с последующим тепловым расширением. Следствием теплового расширения оптических поглотителей является генерация ультразвуковых колебаний, которые регистрируются антенной, расположенной на поверхности исследуемого объекта. Поскольку распространение и формирование ОА-сигналов зависит от теплофизических, акустических и оптических свойств среды, то взаимосвязь между этими факторами позволяет использовать зарегистрированные ультразвуковые сигналы для количественной оценки свойств среды, путем решения обратной задачи оптоакустики.

Помимо биомедицинской безопасности важным преимуществом ОА-визуализации является то, что этот подход объединяет возможности высококонтрастного оптического поглощения и глубокого ультразвукового проникновения. При этом качество изображения, восстановленного по зарегистрированным на поверхности ткани ультразвуковым сигналам, в значительной степени определяется алгоритмом оптоакустической реконструкции. Искажения и артефакты в реконструированном изображении могут появиться как из-за специфики метода реконструкции, так и вследствие неизбежных в реальных исследованиях препятствий и шумов различной природы. Обычно ОА-изображения содержат интенсивный нестационарный фон с артефактами, структурно подобными сигналам, отношение сигнал/фон как правило невелико, а цифровое изображение имеет невысокое качество, малое число уровней квантования, пятенный характер и нечеткие границы. Поэтому задача устранения искажений и артефактов при восстановлении оптоакустических изображений весьма актуальна для эффек-

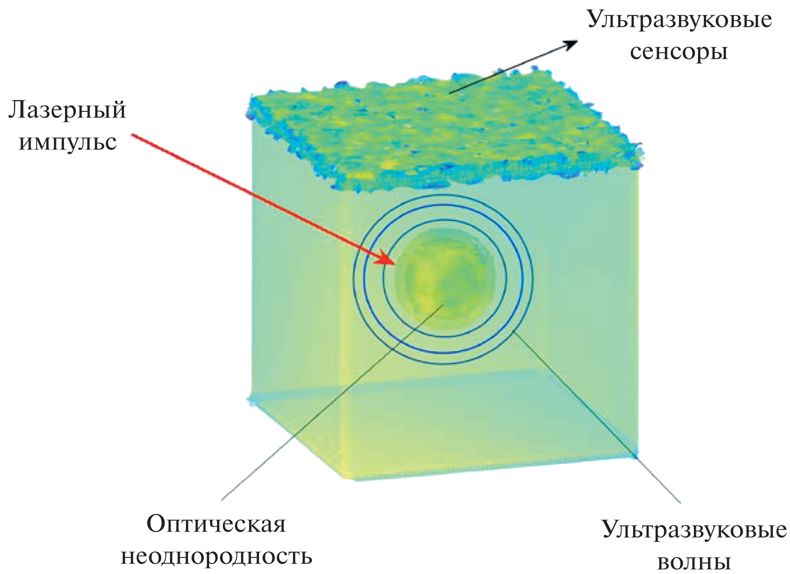



**Рис. 1.** Схема оптоакустического зондирования.

тивного использования метода в клинической практике и научных исследованиях [1].

Цель настоящей работы заключается в разработке и тестировании *in silico* алгоритмов удаления искажений и артефактов из реконструированных двумерных и трехмерных оптоакустических изображений. Вначале дается описание прямой и обратной задач оптоакустики, а также описание предложенного итеративного алгоритма коррекции восстановленных ОА-изображений. В следующем разделе подробнее описан алгоритм, числовой эксперимент и результаты моделирования реконструкции ОА-изображений для двумерного и трехмерного случаев. В Заключении приведены выводы и перспективы разработанного алгоритма.

## 2. ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОПТОАКУСТИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Оптоакустическая визуализация основана на эффекте термоупругости, когда при поглощении неоднородностями среды оптического излучения происходит превращение оптической энергии в тепловую. При умеренной плотности выделившейся энергии в области поглощения не происходит фазовых превращений и следствием теплового оптического поглощения является генерация звуковых волн.

Прямая задача ОА-томографии заключается в том, чтобы определить поле давления $p(\mathbf{r}, t)$ по известному распределению тепловых источников $H(\mathbf{r}, t)$ (здесь $\mathbf{r}$ – пространственная координата точки, $t$ – время), возбужденных кратковременным световым (лазерным) импульсом (рис. 1).

В акустически однородной бесконечной среде искомая пространственно-временна́я зависимость $p(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением [2]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] p(r,t) = -\frac{\beta}{c_p}\frac{\partial}{\partial t}H(r,t), \qquad (1)$$

где $c$ – скорость звука, $\beta$ – коэффициент изобарического расширения, $c_p$ – теплоемкость при постоянном давлении, приходящемся на единицу массы. Если тепловой источник $H(\mathbf{r}, t)$ представить в виде произведения поглощенной энергии и временно́й функции подсветки $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})I(t)$, то в случае короткого импульса $H(\mathbf{r},t) = Q(\mathbf{r})\delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Начальное акустическое давление, возникшее за счет поглощения импульсного излучения оптическими неоднородностями в момент времени $t = 0$, можно представить в виде $p_0(\mathbf{r}) = \Gamma Q(\mathbf{r})$, где $\Gamma$ – безразмерный коэффициент Грюнайзена, характеризующий эффективность ОА-превращения поглощаемого света в звук.

В этом случае решение прямой задачи задается выражением [2]:

$$p(r,t) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_{V'} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(p_0(r')\delta(t - |r - r'|/c)\right)}{|r - r'|} dV', \qquad (2)$$

где $V'$ – объем, в котором распределены ОА-источники.

Восстановление распределения начального акустического давления $p_0(\mathbf{r}, t = 0) = p_0(\mathbf{r})$ по сигналам давления $p_s(\mathbf{r}, t)$, зарегистрированным на поверхности $S$ объема $V'$, составляет суть обратной задачи оптоакустики [3].

Методы восстановления распределения источников в среде можно разделить на несколько категорий: алгоритм Фурье-реконструкции, алгоритм обращения во времени, метод обратных проекций [4, 5].

Метод обратных проекций [6] является классическим способом ОА-реконструкции. Он может реализовываться либо в пространственно-временно́й, либо в Фурье-области для нескольких конфигураций детектирования в плоской [6], цилиндрической [6] или в сферической геометрии [7]. При этом решения будут справедливы только для замкнутой идеальной поверхности (приемником является каждая точка поверхности). Кроме того, обычно считается, что целевой объект расположен в бесконечно-однородной среде без дисперсии с постоянными скоростью звука, коэффициентами поглощения и плотностью.

В реальных ситуациях эти условия не выполняются, что приводит к искажениям реконструируемых изображений. Специфика этих искажений различна при использовании разных методов реконструкции, разном расположении приемников и разной геометрии реконструируемого объекта.

Для компенсации искажений и преодоления сильной зависимости качества изображения от указанных факторов нами был разработан метод итеративного уменьшения искажений ОА-изображений, основанный на теореме Банаха о неподвижной точке.

Пусть

$$y = f(x), \quad x, y \in R^d, \tag{3}$$

где $x$ – неизвестный входной образ, а $f(\cdot)$ – отображение (оператор), переводящее входное изображение $x$ в результат решения обратной задачи оптоакустики $y$. При этом оператор $f(\cdot)$ представляет себой результат последовательного применения операторов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$: $f(\cdot) = f_2(f_1(\cdot))$, где $f_1(\cdot)$ – оператор, определяющий решение прямой задачи оптоакустики (уравнение (2)), а $f_2(\cdot)$ – оператор, задающий решение обратной задачи.

По теореме Банаха о неподвижной точке известно, что если $f$ – сжимающее отображение множества $F \subset (M, \rho)$ самого в себя, $(M, \rho)$ – полное метрическое пространство, а $F$ – замкнутое множество, то тогда существует, и притом ровно одна, неподвижная точка $x^* \in F$ отображения $f$ (если точка неподвижная, то $f(x^*) = x^*$).

При этом под сжимающим отображением понимают такое отображение $f$: $F \to F \subset (M, \rho)$, что $\exists \alpha \in [0,1)$: $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$, $\forall x, y \in F$.

В соответствии с этим определением для поставленной задачи реконструкции $F = R^{m\times n}$ представляет себой цифровое изображение, состоящее из $m \times n$ пикселей (для двумерного случая), а $\rho(x, y) = \|x–y\|$ – евклидово расстояние. Можно показать, что $F \subset (M,\rho)$ является полным метрическим пространством, для которого справедлива теореме Банаха о неподвижной точке [8]. В этом случае неподвижная точка $x^* \in F$ может быть найдена методом последовательных приближений $x_n = f(x_{n-1})$, где нулевое приближение $x_0 \in F$ – произвольная точка метрического пространства.

Таким образом, уточненное решение обратной задачи оптоакустики можно получить, сформировав последовательность изображений $\{I_q\}$ такую, что $I_q = \Re(I_{q-1})$, где $\Re(\cdot)$ – оператор, задаваемый отображениями $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ и переводящий начальное распределение давления $p_0(\mathbf{r})$ в его нулевое приближение $p_0^{(0)}(\mathbf{r}) = I_0$. Другими словами, в качестве нулевого приближения принимается решение обратной задачи оптоакустики $p_0(\mathbf{r})$, а возникшие при этом искажения удаляются в ходе итеративного процесса.

В предлагаемом подходе проверялись два алгоритма последовательных приближений: алгоритм, основанный на теореме Пикара [9], и метод, предложенный в работе [10] (соответственно формулы (4) и (5)):

$$I_q = \Re_1(I_{q-1}) \equiv I_{q-1} + H_{q-1}, \quad H_{q-1} = y - f(I_{n-1}), \\ I_0 = y; \tag{4}$$

$$I_q = \Re_2(I_{q-1}) \equiv I_{q-1} + \\ + \frac{\|H_{q-1}\|}{\|f(I_{q-1} + H_{q-1}) - f(I_{q-1})\|} H_{q-1}, \\ H_{q-1} = y - f(I_{n-1}), \quad I_0 = y. \tag{5}$$

Для количественной оценки качества восстановления образа использовались такие критерии, как отношение сигнал/шум $20\log_{10}\left(p_0 \Big/ \left(p_0 - p_0^{(q)}\right)\right)$, относительная ошибка $E = \left\|p_0 - p_0^{(q)}\right\| \Big/ \|p_0\|$ (здесь $p_0^{(q)}$ – $q$-я итерация алгоритма) и индекс структурного подобия *SSIM*, характеризующий близость изображений $X$ и $Y$ по яркости, контрасту и структуре. Индекс структурного подобия (*SSIM* от англ. *sructure similarity*) считается неофициальным стандартом для оценки качества изображений при наличии эталона. В общем случае значение $SSIM(X, Y)$ определяется по формуле:

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^{\alpha}[c(x, y)]^{\beta}[s(x, y)]^{\gamma},$$

**Таблица 1.** Индекс структурного подобия $SSIM(p_0, p_{(\cdot)}^{(\cdot)})$

| Объект | Итерации | | |
|---|---|---|---|
| | $p_0^{(0)}$ | $p_{\Re_2}^{(10)}$ | $p_{\Im_2}^{(10)}$ |
| 2D диск | 0.414 | **0.966** | 0.955 |
| 2D сосуды | 0.359 | **0.889** | 0.849 |
| 3D аорта | 0.771 | 0.967 | **0.971** |

где $x, y$ – координаты пикселя, $l(x, y) = \dfrac{2\mu_x\mu_x + c_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1}$ – функционал яркости, $c(x, y) = \dfrac{2\sigma_x\sigma_y + c_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2}$ – функционал контраста, $s(x, y) = \dfrac{\sigma_{xy} + c_3}{\sigma_x\sigma_y + c_3}$ – функционал структуры, а $\mu_x$, $\mu_y$, $\sigma_x$, $\sigma_y$, и $\sigma_{xy}$ – локальные средние значения, стандартные отклонения и перекрестная ковариация соответственно для соответствующих изображений. Критерий *SSIM* принимает значения от –1 до 1. Значение 1 получается в том случае, если сравниваемые изображения одинаковы [11].

Заметим, что реализация предложенной итеративной схемы возможна в двух вариантах. Первый вариант реализуется формулами (4) и (5). Во втором варианте последовательность изображений $\{I_q\}$ формируется итеративным процессом $I_q = \Im(I_{q-1})$, где $\Im(\cdot)$ – оператор, задаваемый теми же отображениями $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$, но действующими в другом порядке, т.е. $f(\cdot) = f_1(f_2(\cdot))$. В этом случае в качестве входного изображения используется не восстановленное в ходе решения обратной задачи распределение давления $p_0^{(0)}(\mathbf{r})$, а сигналы давления $p_s(\mathbf{r}, t)$, зарегистрированные на поверхности $S$ зондируемого объема $V'$, т.е. $I_0 = p_s(\mathbf{r}, t)$. При этом используются формулы аналогичные формулам (4) и (5), но для операторов $\Im_1(\cdot)$ и $\Im_2(\cdot)$ соответственно.

В следующем разделе будут приведены результаты тестирования обеих итерационных схем.

## 3. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для числового моделирования задачи о распространении акустических волн использовался программный пакет *k*-Wave – набор инструментов для среды МАТЛАБ. Его использование позволяет моделировать системы с акустическими источниками и приемниками произвольных форм и размеров. При этом числовая модель основывается на переходе в *k*-пространство. Пространственные градиенты в этом пространстве вычисляются с использованием схемы быстрого преобразования Фурье. При вычислении временны́х градиентов используется скорректированная *k*-пространственная разностная схема [12].

Задавалась числовая модель, близкая по своим характеристикам к мягким биологическим тканям: среда однородна с плотностью $\rho_0$ = 1020 кг/м$^3$ и скоростью звука $c_0$ = 1510 м/с. Задача решалась для двумерного и трехмерного случаев.

В качестве числовых фантомов (объектов для оптоакустической реконструкции) были выбраны диск и двумерная модель сосудистого дерева для 2D случая и трехмерная числовая модель аорты с аневризмой для 3D-пространства. Физический размер образца для двумерного случая составил 4.6 × 4.6 мм для двухмерного случая и 10.3 × 10.3 × 5.3 мм для трехмерного случая. В 2D случае датчики располагались линейно на верхней поверхности прямоугольного образца, в 3D-пространстве датчики были распределены на верхней плоскости параллелепипеда. Для реконструкции заданных объектов использовался метод обратных проекций с преобразованием Фурье.

На рис. 2а показаны ОА-источник $p_0(x, y)$ в виде кругового диска, а на рис. 2б – результат его реконструкции $p_0^{(0)}$, реализуемый *k*-Wave алгоритмом. Форма реконструируемого изображения отображается достаточно точно. Однако изображение отягощено артефактами в виде дуг, прикасающихся к реконструированному образу, интенсивность восстановленного образа значительно меньше, чем у исходного образца, а его кромки размыты. Особенно это заметно на рис. 2г, где заданный ОА-источник $p_0(x, y)$ представлен в изометрии (интенсивность источника отложена по оси аппликат). Результат реконструкции $p_0^{(0)}$ на рис. 2г представлен на переднем плане.

Два средних изображения на рис. 2г $p_{\Re_2}^{(4)}$ и $p_{\Im_2}^{(4)}$ представляют 4-ю итерацию схемы $I_q = \Re_2(I_{q-1})$ и 4-ю итерацию схемы $I_q = \Im_2(I_{q-1})$, соответственно.

Более детально результаты работы алгоритма можно рассмотреть на рис. 3. Здесь представлены линейные профили реконструированных изображений $p_0^{(0)}$ и $p_{\Re_2}^{(4)}$ и оригинального изображения $p_0(x, y)$.

На рис. 3а изображено нулевое приближение $p_0^{(0)}$ кругового диска $p_0$. Стрелками обозначены положение и ориентация вертикального и горизонтального сечений реконструированного образа. Полученные в результате линейные профили исходного объекта $p_0$ (черная жирная линия) и его реконструкций изображены на рис. 3б и рис. 3в. Из рисунка видно, что в результате работы алгоритма кромки восстановленного и откорректиро-

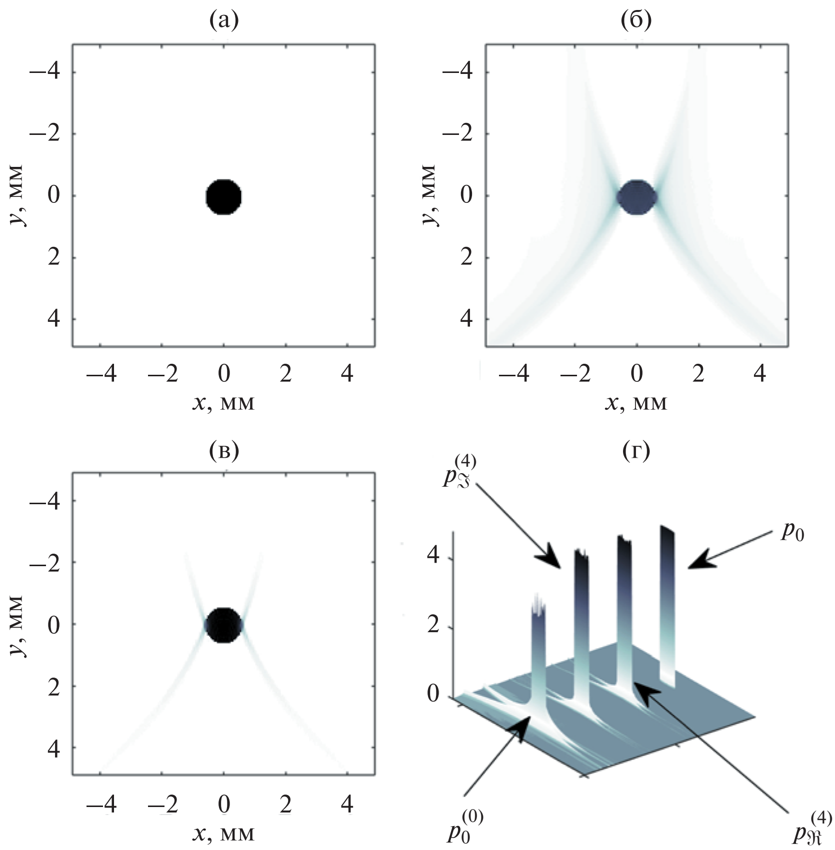



**Рис. 2.** Результаты реконструкции кругового диска $p_0$.

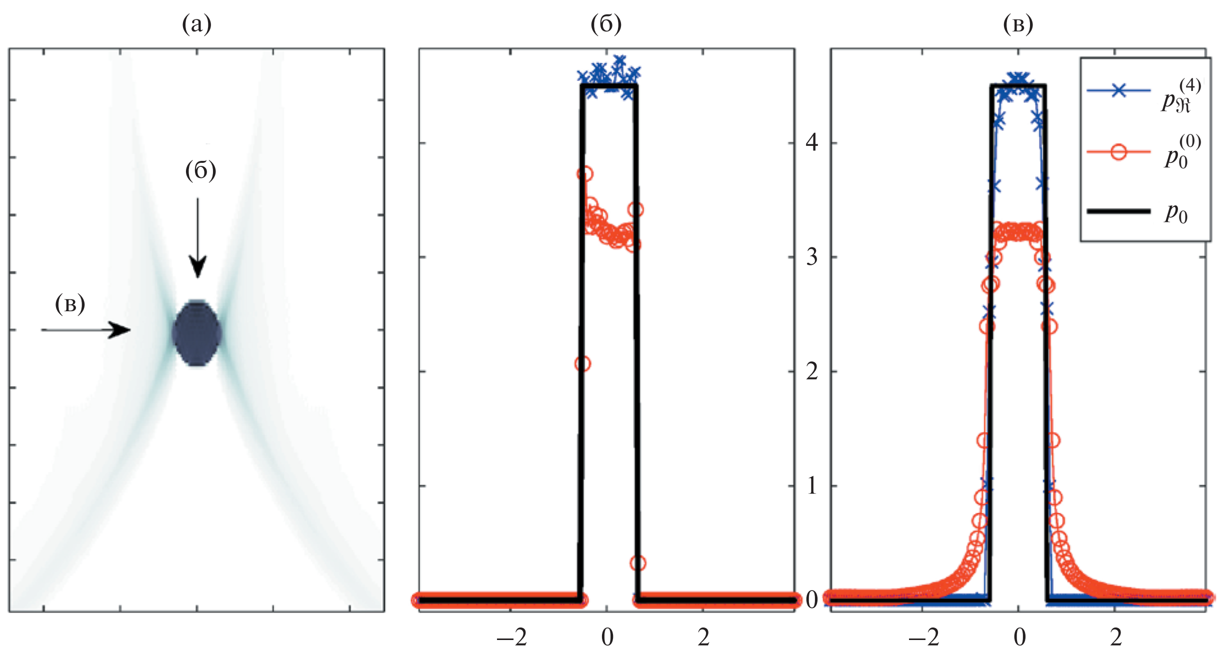



**Рис. 3.** (а) – Нулевая итерация $p_0^{(0)}$ изображения диска; (б)–(в) – линейные профили реконструированных изображений $p_0^{(0)}$, $p_{\mathfrak{R}_2}^{(4)}$ и оригинального изображения $p_0$.

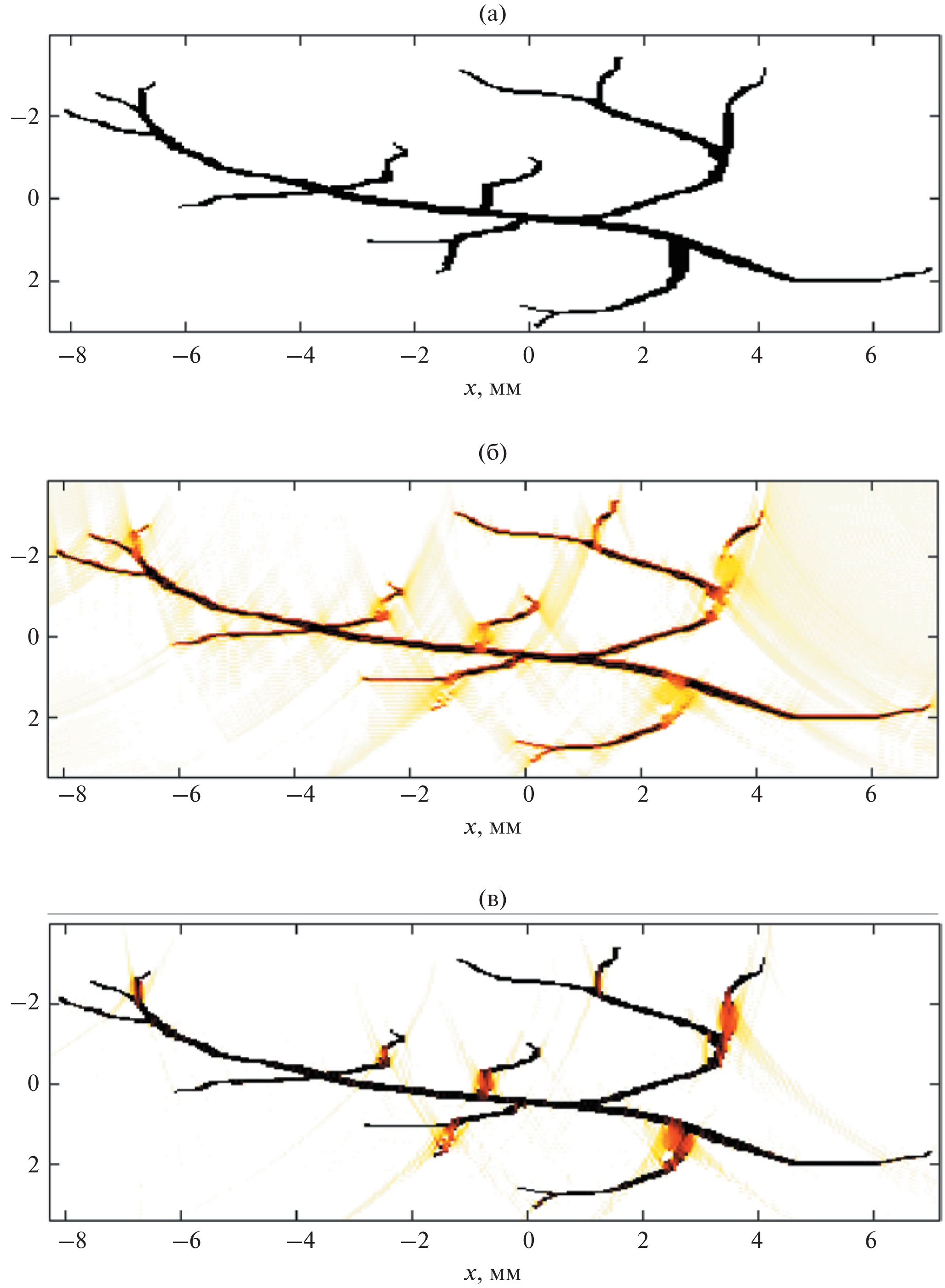



**Рис. 4.** (а) – Оригинальное изображение $p_0$; (б) – восстановленное изображение $p_0^{(0)}$; (в) – откорректированное изображение $p_{\mathfrak{R}_2}^{(4)}$.

ванного изображения $p_{\mathfrak{R}_2}^{(4)}$ становятся более четкими, его интенсивность практически совпадает с оригиналом, а ошибки и артефакты реконструкции, имеющиеся в нулевом приближении $p_0^{(0)}$, удаляются, что приводит к существенному улучшению отношения сигнал/помеха. Аналогичные результаты получены и для более сложных 2D и 3D объектов.

На рис. 4 представлены результаты работы алгоритма для двумерного фантома сосудистого де-

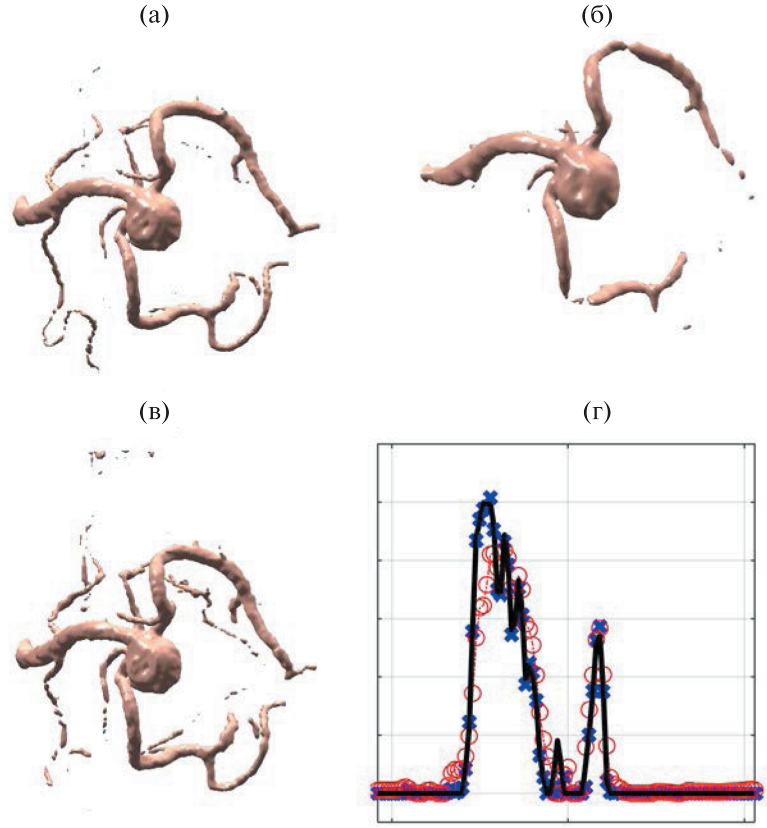



**Рис. 5.** Реконструкция 3D-фантома аорты с аневризмой: (а) – оригинальное изображение $p_0$; (б) – восстановленное изображение $p_0^{(0)}$; (в) – откорректированное изображение $p_{\Re_2}^{(4)}$; (г) – линейные профили образов в центральном $x$–$z$ сечении 3D-фантома. Обозначения линий аналогичны рис. 3.

рева. Здесь особо следует подчеркнуть, что предлагаемый алгоритм итеративной коррекции эффективно работает как для горизонтальных, так и для вертикальных линейных структур, которые особенно плохо реконструируются при ограниченном обзоре и линейном расположении датчиков только на верхней поверхности образца (см. например, вертикальные сегменты ветвей на рис. 4б).

Аналогичный результат получается и при 3D-моделировании, когда в качестве исходного объекта, который необходимо реконструировать, была использована числовая трехмерная модель аорты с аневризмой (рис. 5).

Здесь на рис. 5а представлено оригинальное изображение аорты, на рис. 5б – результат $k$-Wave реконструкции (в наших обозначениях – $p_0^{(0)}$), а на рис. 5в – откорректированная версия восстановленного изображения $p_{\Re_2}^{(4)}$. Более подробно отличия восстановленных изображений можно видеть на рис. 5г, где представлены результаты реконструкции в центральном $x$–$z$ сечении смоделированного трехмерного сосудистого дерева (обозначения линий такие же, как на рис. 3). Как и в двумерном случае, алгоритм существенно улучшает качество восстановленного объекта и гораздо точнее воспроизводит его границы, кромки и интенсивность.

Количественные оценки качества реконструкции в терминах индекса структурного подобия *SSIM* для описанных восстановленных объектов сведены в таблице. Очевидно, что предложенный алгоритм значительно улучшает качество реконструкции ОА-изображений, как в двумерном, так и в трехмерном случае (полужирным шрифтом выделены лучшие показатели).

О скорости сходимости предложенных итеративных схем можно судить по результатам, представленным на рис. 6. Как отмечалось ранее, в качестве критериев эффективности коррекции изображений использовались такие характеристики, как индекс структурного подобия *SSIM* и относительная ошибка $E$. Из рисунков видно, что обе предложенные итеративные схемы – $I_q = \Re(I_{q-1})$ и $I_q = \Im(I_{q-1})$ – дают устойчивое улучшение качества изображения как в терминах *SSIM*, так и $E$ с ростом номера итераций $q$.

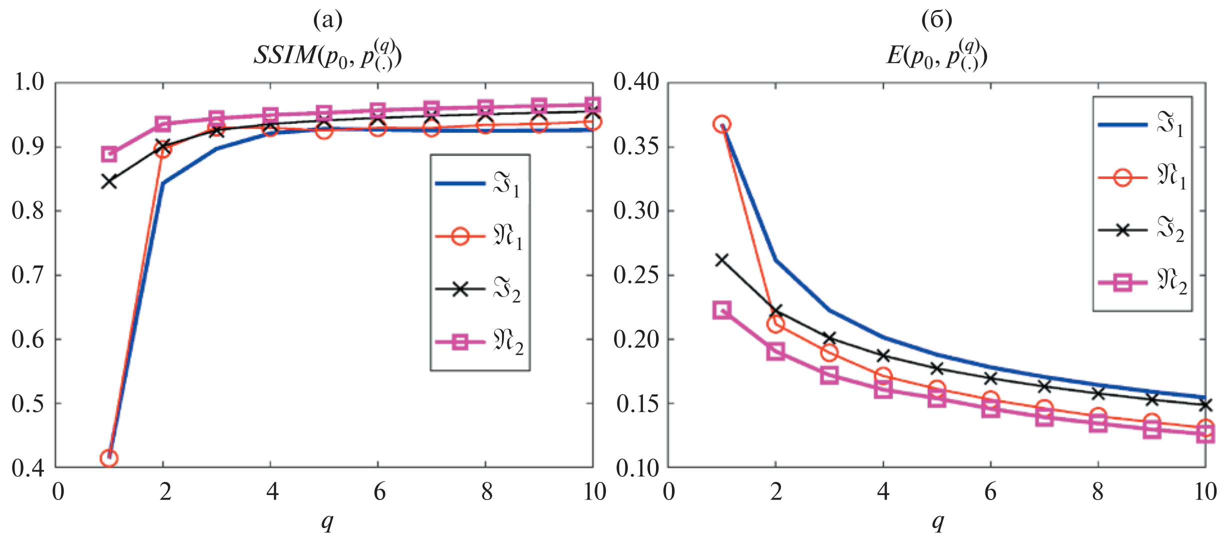



**Рис. 6.** Зависимости критериев качества коррекции ОА-образов от номера итераций $q$ для различных итерационных схем при реконструкции плоского кругового диска.

В обоих случаях более быструю сходимость обеспечивают алгоритмы $I_q = \mathfrak{R}_2(I_{q-1})$ и $I_q = \mathfrak{I}_2(I_{q-1})$. На рисунке представлены зависимости для различных итерационных схем при реконструкции плоского кругового диска. Аналогичные закономерности наблюдались и при реконструкции других модельных ситуаций.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью работы была разработка и исследование числового алгоритма, предназначенного для коррекции артефактов и искажений, возникающих в результате восстановления ОА-образов. Ставилась задача разработки алгоритма, способного компенсировать особенности конкретного метода реконструкции. Предложенная итеративная схема корректировки ОА-изображений основана на теореме Банаха о неподвижной точке.

Для исследования эффективности предложенного алгоритма была построена числовая модель оптоакустического эксперимента, имитирующая биологическую среду с встроенным в нее объектом, подлежащим реконструкции. Рассматривались случаи приемной линейной (2D случай) или плоской (3D случай) акустических антенн, расположенных на поверхности исследуемых образцов.

Для решения обратной задачи – восстановления исходных оптоакустических источников – использовался программный пакет *k*-Wave Matlab toolbox. Пакет позволяет моделировать среду распространения звуковых волн с помощью таких параметров, как плотность и скорость звука. Решение обратной задачи оптоакустики, полученное с помощью алгоритмов *k*-Wave Matlab toolbox, корректировалось итеративным алгоритмом, основанным на теореме Банаха о неподвижной точке. Были предложены четыре итеративные схемы коррекции реконструированного изображения.

Качество реконструкции определялось путем как количественной, так и визуальной оценки полученных результатов. Для количественной оценки эффективности итеративного алгоритма улучшения качества реконструкции использовались индекс структурного сходства *SSIM* и относительная ошибка реконструкции *E*. Показано, что алгоритм демонстрирует существенное улучшение качества изображения по сравнению с исходной ОА-реконструкцией.

Полученные в данной работе результаты могут быть важны с точки зрения перспектив их дальнейшего практического применения в задачах биомедицинской визуализации. Окончательные выводы об эффективности предлагаемого в данной работе подхода можно будет сделать после его тестирования на массивах реальных экспериментальных данных.

Работа выполнена при поддержке Volkswagen Foundation project “Modeling, Analysis and Approximation Theory toward Applications in Tomography and Inverse Problems”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sandbichler M., Krahmer F., Berer T., Burgholzer P., Haltmeier M.* A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography // SIAM J. Appl. Math. 2015. V. 75. № 6. P. 2475–2494.
2. *Гусев В.Е., Карабутов А.А.* Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991. 304 с.

3. *Хохлова Т.Д., Пеливанов И.М., Карабутов А.А* Методы оптико-акустической диагностики биотканей // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 672–683.
4. *Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D.* Acoustic inversion in optoacoustic tomography: A review // Current medical imaging reviews. 2013. V. 9. № 4. P. 318–336.
5. *Kuchment P., Kunyansky L.* Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography // Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer. 2011. P. 817–865.
6. *Kuchment P., Kunyansky L.* Mathematics of thermoacoustic tomography // European J. Applied Mathematics. 2008. V. 19. № 2. P. 191–224.
7. *Xu M., Wang L.V.* Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography // Biomedical Optics 2005 Intern. Society for Optics and Photonics. 2005. P. 251–254.
8. *Lam R.B., Kruger R.A., Reinecke D.R., DelRio S.P., Thornton M.M., Picot P.A., Morgan T.G.* Dynamic optical angiography of mouse anatomy using radial projections // BiOS Intern. Society for Optics and Photonics. 2010. P. 756405–756405-7.
9. *Ege O., Karaca I.* Banach fixed point theorem for digital images // J. Nonlinear Sci. Appl. 2015. V. 8. P. 237–245.
10. *Berinde V.* Iterative approximation of fixed points // Lecture Notes in Mathematics. Springer. 2007. V. 1912.
11. *Steffensen J.* Remarks on iteration // Skand. Aktuarietidskr. 1933. V. 16. P. 64–72.
12. *Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P.* Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity // IEEE Transactions on Image Processing. 2004. V. 13. № 4. P. 600–612.
13. *Treeby B.E.* Modeling nonlinear wave propagation on nonuniform grids using a mapped k-space pseudospectral method // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. 2013. № 10. P. 2208–2213.

**EDN:** VNNEUL
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 449–453*

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

*УДК 534.26*

# ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТУХАНИЯ ЗВУКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ



**Н. Г. Канев**[a, b, *]

[a]*Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия*
[b]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: nikolay.kanev@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.09.2021 г.
После доработки 11.01.2022 г.
Принята к публикации 25.01.2022 г.

Приведено решение задачи об оптимальном импедансе стенок бесконечного канала прямоугольного сечения, при котором затухание некоторой моды является максимальным. Показано, что при соответствующем подборе импеданса четыре простые моды сливаются, образуя четверную моду, имеющую наибольшее затухание. Найдены импедансы, при которых достигается оптимум затухания, в зависимости от номера моды и размеров сечения канала. Для этого стенки канала неквадратного сечения должны иметь разные импедансы.

*Ключевые слова:* импеданс, волновод, канал, поглощение звука, звуковые моды, оптимальное затухание

**DOI:** 10.31857/S0320791922030042

Распространение звука в волноводах с податливыми стенками изучается теоретически и экспериментально уже много десятилетий [1–5]. Во многих практических задачах требуется снизить звук в канале. Для этого используют локальные препятствия, например, резонаторы, расширительные камеры и т.п., или системы таких препятствий, а также специальные – импедансные – покрытия стенок каналов. В последнем случае известно два механизма, влияющих на распространение звука. Первый связан с поглощением: звуковая энергия диссипируется стенками, если действительная часть их импеданса ненулевая. Реактивный импеданс стенок может обеспечивать запирание канала, например, волноводный изолятор [6] в узкой трубе имеет массовый импеданс в некоторой полосе частот, тогда энергия звука не поглощается, но в канале существуют только неоднородные моды, экспоненциально затухающие вдоль его оси. В общем случае, когда действительная и мнимая части импеданса ненулевые, имеет место комбинация двух механизмов, и рассматривается их совместный эффект, называемый затуханием звука.

Задача оптимизации затухания звука формулируется следующим образом: необходимо подобрать такой импеданс стенок, чтобы постоянная распространения некоторой собственной моды имела максимальное значение. Если в канале возбуждается несколько мод, то, как правило, оптимизируется затухание наименее затухающей моды. Впервые решение задачи оптимизации получено Кремером [3] для плоского канала, одна из стенок которого импедансная, а другая – жесткая. Им найдено значение импеданса, при котором нулевая мода имеет наибольшее затухание. Это значение стали называть импедансом Кремера, а сам подход – методом Кремера. Оптимальный импеданс для всех мод позже найден Тестером [4]. Один из ключевых результатов заключается в том, что оптимальное затухание связано с появлением двойных мод, образованных слиянием двух простых мод при соответствующем подборе импеданса. Затухание двойной моды соответствует максимуму затухания одной из простых мод и локальному минимуму затухания второй моды. Таким образом, суммарное затухание звука оказывается максимальным, хотя затухание второй моды является наиболее неоптимальным. Аналогичные результаты получаются в задачах взаимодействия точечных поглотителей с модами помещений [7, 8] и, по-видимому, имеют общий характер для мультимодальных систем, демпфирование которых осуществляется настройкой собственных мод.

Импеданс Кремера для каналов с потоком существенно зависит от его скорости. Оптимальные импедансы для плоского канала с потоком найдены в [9], для цилиндрического и кольцевого в [10]. В некоторых случаях влияние потока таково [11, 12], что действительная часть оптимального значения импеданса на низких частотах стенок становится отрицательной.

Двойные моды связаны с кратными корнями характеристического уравнения для определения постоянной распространения звуковых волн в каналах [13, 14]. В плоских каналах кратность корня не превышает третьего порядка [15], а в круглых и кольцевых каналах, вообще говоря, может произойти слияние большего числа простых корней и образование мод более высокого порядка [10]. Подобную ситуацию можно ожидать в канале произвольного сечения конечных размеров. В настоящей работе исследуется один из простейших случаев — канал с прямоугольным сечением. Известно [16], что решение волнового уравнения для такого волновода является произведением трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты, что позволяет применить известное решение для плоского канала с импедансными стенками. При этом кратность корней характеристического уравнения для канала с одинаковыми стенками не превышает двух, но наличие двух характеристических уравнений для направлений, перпендикулярных оси волновода, дает возможность слияния более чем двух простых мод и нахождения оптимального импеданса стенок для этого случая.

Рассмотрим канал прямоугольного сечения. Ось $z$ декартовой системы координат совпадает с осью канала, оси $x$ и $y$ перпендикулярны его стенкам. Вдоль осей $x$ и $y$ размеры сечения составляют $h$ и $d = \gamma h$, для определенности примем $\gamma \le 1$. Акустические характеристики стенок зададим локально реагирующим импедансом $Z$, нормированным на волновое сопротивление среды $\rho c$, где $\rho, c$ — плотность среды и скорость звука в ней.

Согласно [17] поле звукового давления в канале может быть представлено в виде суперпозиции волновых мод, распространяющихся вдоль оси $z$,

$$p_{nm} = \varphi_n\left(\frac{\xi_n}{h}x\right)\varphi_m\left(\frac{\kappa_m}{d}y\right)e^{ik\tau_{nm}z}, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$, $\omega$ — круговая частота, $\varphi_n(x) = \mathrm{ch}x$ при $n = 0,2,4,\ldots$, $\varphi_n(x) = \mathrm{sh}x$ при $n = 1,3,5,\ldots$,

$$\tau_{nm} = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_m}{kd}\right)^2}, \quad \mathrm{Re}\tau_{nm} \ge 0, \ \ \mathrm{Im}\tau_{nm} \ge 0. \quad (2)$$

Временной множитель $e^{-i\omega t}$, $t$ — время, здесь и далее опускаем. При $n = 0,2,4,\ldots$ значения $\xi_n$ и $\kappa_n$ являются корнями уравнений

$$\xi\mathrm{th}\frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}, \quad \kappa\mathrm{th}\frac{\kappa}{2} = \frac{ikd}{Z}, \quad (3)$$

а при $n = 1,3,5,\ldots$ корнями уравнений

$$\xi\mathrm{cth}\frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}, \quad \kappa\mathrm{cth}\frac{\kappa}{2} = \frac{ikd}{Z}. \quad (4)$$

Задача оптимизации затухания некоторой моды $(n,m)$ заключается в поиске такого импеданса стенок канала $Z$, чтобы коэффициент затухания моды $\delta_{nm} = \mathrm{Im}\,\tau_{nm}$ был максимальным. Это происходит, когда уравнения (3) и (4) имеют двойные корни [3]. Появление таких корней рассмотрим на примере функций, очевидным образом связанных с уравнениями (3) и (4),

$$f(\alpha,a) = \alpha\mathrm{th}\frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}, \quad g(\alpha,a) = \alpha\mathrm{cth}\frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}. \quad (5)$$

Пусть $\alpha_n$ — корень уравнения $f(\alpha,a) = 0$, если $n = 0,2,4,\ldots$, и корень уравнения $g(\alpha,a) = 0$, если $n = 1,3,4,\ldots$ При некотором значении $a$ два корня $\alpha_n$ и $\alpha_{n'}$, $n \ne n'$, могут иметь одинаковые значения, для этого производные функций (5) по $\alpha$ должны обращаться в нуль, т.е.

$$f_\alpha = \alpha + \mathrm{sh}\alpha = 0, \quad g_\alpha = \alpha - \mathrm{sh}\alpha = 0, \quad \mathrm{Re}\,\alpha \ge 0, \ \ \mathrm{Im}\,\alpha \ge 0. \quad (6)$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}_n$ корни уравнений (6) и пронумеруем их, начиная с $n = 0$ в порядке возрастания действительной части. Двойные корни $\tilde{\alpha}_n$ и соответствующие значения параметра $a_n$ могут быть найдены численным способом. Приведем значения для двух первых корней

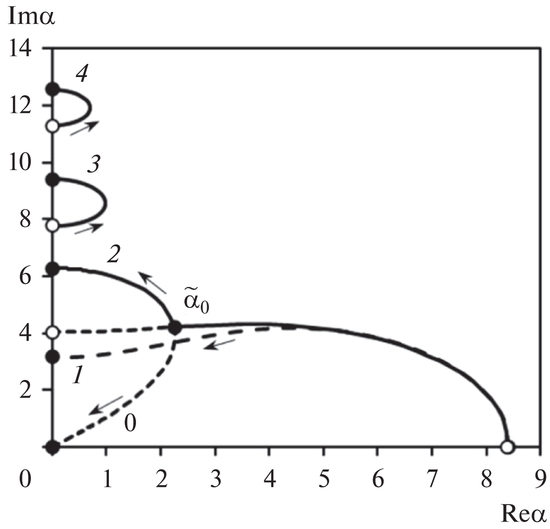
$$\tilde{\alpha}_0 = 2.251 + 4.212i, \quad a_0 = 0.148 + 0.118i,$$

$$\tilde{\alpha}_1 = 2.769 + 7.498i, \quad a_1 = 0.107 + 0.054i.$$

Далее значения $\tilde{\alpha}_n$ и $a_n$ полагаем известными.

На рис. 1 представлен расчет первых пяти корней $\alpha_n$ в зависимости от параметра $a = a' + ia''$. При этом $a'$ изменяется от нуля до бесконечности, а мнимая часть параметра остается неизменной и равной $a'' = \mathrm{Im}\,a_0$ на рис. 1а и $a'' = \mathrm{Im}\,a_1$ на рис. 1б. Проколотые точки указывают начало ветвей $\alpha_n$, стрелки — направление движения корня $\alpha_n$ по кривой с увеличением $a'$, сплошные точки соответствуют пределу $a' \to \infty$, т.е. предельному переходу к каналу с абсолютно жесткими стенками. В этому случае $\alpha_n \to i\pi n$, поэтому нумерация корней $\alpha_n$, а также корней $\xi_n$ и $\kappa_n$ при решении (3) и (4), производится в порядке возрастания абсолютных значений корней, получаемых при предельном переходе $a' \to \infty$ или $Z \to \infty$.

Ветви $\alpha_0$ и $\alpha_2$ имеют общую точку $\tilde{\alpha}_0$ при $a = a_0$ (рис. 1а), соответствующие им моды называют двойными. Ветви $\alpha_1$ и $\alpha_3$ также имеют общую точку $\tilde{\alpha}_1$ при $a = a_1$ (рис. 1б). Уравнение (5) соответствует плоскому каналу шириной $h$ и импедансом



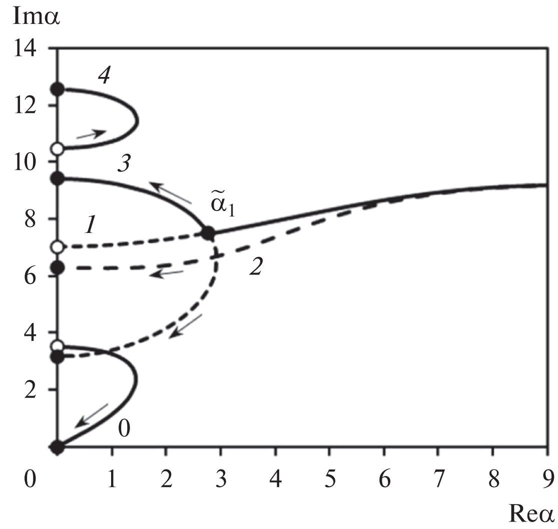




**Рис. 1.** Корни $\alpha_n$ уравнений (5) при изменении Re $a$ от нуля до бесконечности при (а) Im $a$ = 0.118 и (б) Im $a$ = 0.054. Числа указывают номер корня $n$, стрелки – направление движения корней при увеличении Re $a$.

стенок $Z$, при этом $a = Z/kh$. Из (6) следует, что двойными могут быть ближайшие симметричные ($n = 0, 2, 4, \ldots$) или антисиметричные ($n = 1, 3, 5, \ldots$) моды, т.е. при оптимальном подборе импеданса

$$Z = a_n kh \tag{6}$$

моды $n$ и $n+2$ имеют максимально возможный коэффициент затухания. Отметим, что в плоском канале, одна стенка которого является импедансной, а другая – жесткой, справедливо только уравнение $f(\alpha, a) = 0$, поэтому двойными являются соседние моды $n$ и $n+1$ [4].

В прямоугольном канале значения параметров $\xi_n$ и $\kappa_n$ определяются независимо друг от друга по уравнениям (3) и (4), поэтому результаты, полученные при исследовании уравнений (5), можно сразу применить для $\xi_n$ и $\kappa_n$. Двойные корни равны $\tilde{\xi}_n = \tilde{\kappa}_n = \tilde{\alpha}_n$, при этом корень $\tilde{\xi}_n$ имеет место при импедансе $Z_n = a_n kh$, а корень $\tilde{\kappa}_n$ – при импедансе $Z_n = a_n kd$. Очевидно, что два некоторых двойных корня $\tilde{\xi}_n$ и $\tilde{\kappa}_m$ могут быть равны, если стенки канала имеют разный импеданс. Пусть импеданс стенок, перпендикулярных оси $x$, равен $X$, а импеданс стенок, перпендикулярных оси $y$, равен $Y$. Тогда, заменив $Z$ в уравнениях (3) и (4) на $X$ и $Y$, находим оптимальные импедансы стенок

$$X = a_n kh, \quad Y = a_m kd, \tag{7}$$

при которых $\tilde{\xi}_n = \tilde{\kappa}_m$. В этом случае четыре корня уравнений (3) и (4) оказываются равными $\xi_n = \xi_{n+2} = \kappa_m = \kappa_{m+2}$, поэтому согласно (2) постоянные распространения вдоль канала $\tau_{nm}$ четырех мод $(n, m)$, $(n+2, m)$, $(n+2, m)$, $(n+2, m+2)$ также равны между собой. Более того, эти моды имеют одинаковое распределение звукового давления (1) в канале, поэтому неотличимы друг от друга. Таким образом, при оптимальном подборе импедансов (7) для максимального затухания некоторой моды $(n, m)$ образуется четверная мода, коэффициент затухания которой равен

$$\tilde{\delta}_{nm} = \mathrm{Im}\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что с увеличением номера моды максимальный коэффициент затухания (8) увеличивается, поэтому, как правило, наименее затухающей является нулевая мода $(0, 0)$. На рис. 2 приведены коэффициенты затухания четверных мод $(0, 0)$ и $(1, 1)$ в зависимости от ширины канала $kh$ и соотношения сторон $\gamma = d/h$, где видно, что с уменьшением одного из поперечных размеров канала коэффициент затухания увеличивается. Это также следует из (8): если $d \ll h$, то значение $\tilde{\delta}_{nm}$ определяется, главным образом, третьим слагаемым в подкоренном выражении, составляет $\tilde{\delta}_{nm} \approx \mathrm{Im}\tilde{\alpha}_m/kd$ и зависит только от меньшего размера.

Последний вывод позволяет найти оптимальный импеданс для моды $(n, m)$ в канале, все стенки которого имеют одинаковый импеданс. В этом случае импеданс подбирается так, чтобы корень $\kappa_m$, определяемый меньшим поперечным размером канала $d$, был двойным, что приводит к появлению двойной моды $(n, m)$ и $(n, m+2)$. При опти-

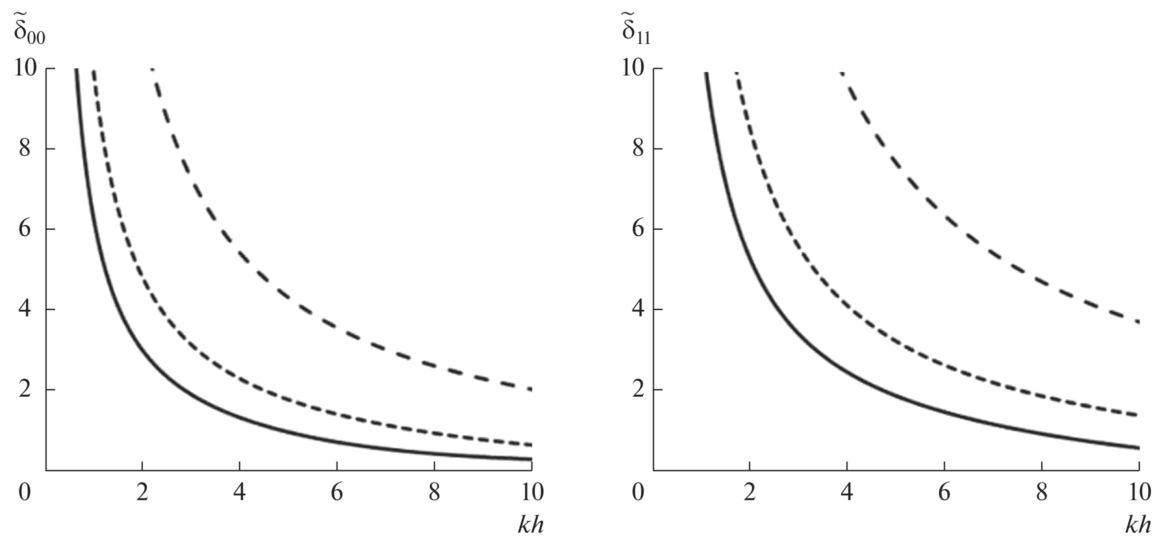



**Рис. 2.** Оптимальный коэффициент затухания мод $(0,0)$ и $(1,1)$ для разных соотношений сторон канала $\gamma = 1$ (—— ), 0.5 (- - -), 0.2 (— — —).

мальном импедансе $Z = a_m kd$ коэффициент затухания имеет вид

$$\tilde{\delta}_{nm} = \mathrm{Im}\sqrt{1+\left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2+\left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}, \qquad (9)$$

где значение $\xi_n$ находится из уравнений (3) и (4).

Рассмотрим коэффициенты затухания мод при неоптимальном импедансе стенок. Из (7) следует, что для оптимизации затухания нулевой моды импедансы стенок должны быть равны $\tilde{X} = a_0 kh,\ \tilde{Y} = a_0 kd$. Полагая мнимые части $X$ и $Y$ неизменными, введем параметр $\varepsilon$, характеризующий отличие действительных частей $X$ и $Y$ от оптимальных значений

$$X = \varepsilon \mathrm{Re}\tilde{X} + i\mathrm{Im}\tilde{X}, \quad Y = \varepsilon \mathrm{Re}\tilde{Y} + i\mathrm{Im}\tilde{Y}. \qquad (10)$$

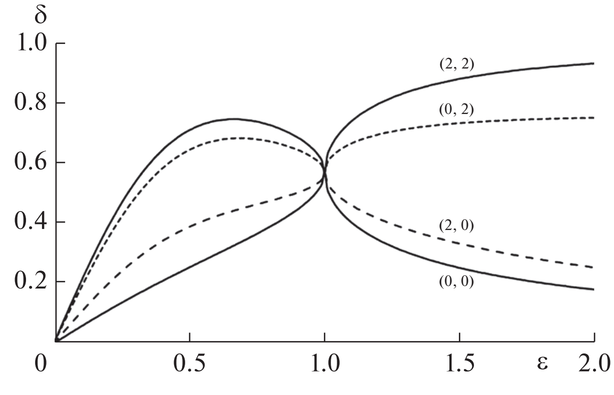



**Рис. 3.** Коэффициент затухания четырех мод в канале с размерами $kh = 10$ и $\gamma = 0.5$ в зависимости от действительной части импеданса стенок.

На рис. 3 приведены коэффициенты затухания мод $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ для канала с размерами $kh = 10$, $\gamma = 0.5$ в зависимости от $\varepsilon$. Нулевая мода имеет наименьший коэффициент затухания при любом значении импедансов (10) за исключением оптимального. При $\varepsilon = 1$ образуется четверная мода, при этом коэффициент затухания мод $(0,0)$ и $(2,0)$ достигает максимального значения.

Аналогичный расчет приведен на рис. 4 для канала квадратного сечения $\gamma = 1$. В этом случае оптимальные импедансы всех стенок одинаковы $\tilde{X} = \tilde{Y}$, поэтому моды $(2,0)$ и $(0,2)$ оказываются двойными при любом импедансе стенок, хотя это не приводит к оптимизации затухания, поскольку нулевая мода остается наименее затухающей. Коэффициент затухания только нулевой моды достигает максимума при оптимальном импедансе. Отметим, что при определенных размерах канала некоторые моды могут иметь меньший коэффициент затухания, чем коэффициент затухания нулевой моды при оптимальном подборе импедансов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ [4].

Таким образом, для оптимизации затухания моды $(n,m)$ в канале прямоугольного сечения необходимо подобрать импеданс его стенок в соответствии с (7), при этом происходит слияние четырех мод. Затухание четверной моды оказывается равным максимальному затуханию менее ослабляемой из четырех простых мод. Если сечение канала вытянутое, то оптимальной импеданс и максимальное затухание определяются меньшим поперечным размером сечения. В этом случае достаточно оптимизировать импеданс только широких

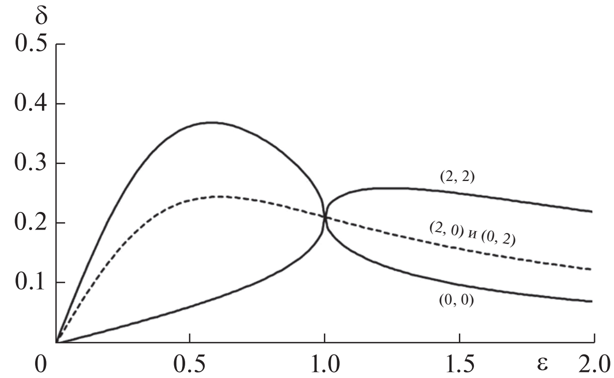



**Рис. 4.** Коэффициент затухания четырех мод в канале квадратного сечения со стороной $kh = 10$ в зависимости от действительной части импеданса стенок.

стенок, а максимальное затухание будет таким же как в плоском канале [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Андреев Н.Н.* О скольжении звука вдоль поглощающих границ // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1936. № 5. С. 625–632.
2. *Beranek L.L.* Sound absorption in rectangular ducts // J. Acoust. Soc. Am. 1940. V. 12. P. 228–231.
3. *Cremer L.* Theory regarding the attenuation of sound transmitted by air in a rectangular duct with an absorbing wall, and the maximum attenuation constant produced during this process // Acustica. 1953. V. 3. P. 249–263.
4. *Tester B.J.* The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // J. Sound Vib. 1973. V. 27. P. 477–513.
5. *Лапин А.Д.* Звукоизоляция в волноводах // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 3. С. 337-350.
6. *Исакович М.А.* Теория волноводной изоляции волн в длинных линиях // Труды Всесоюзной конференции “Распространение и дифракция волн”. Ереван. 1973. Т. 60. № 2. С. 145–151.
7. *Канев Н.Г.* О максимальном поглощении звука резонатором Гельмгольца в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 752–755.
8. *Канев Н.Г.* Максимальное поглощение звука монополем в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 3. С. 327–331.
9. *Tester B.J.* The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform of “plug” flow // J. Sound Vib. 1973. V. 28. № 2. P. 151–203.
10. *Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А.* О распространении звука в каналах с импедансными стенками при наличии воздушного потолка. Ч. II. Оптимизация затухания звука в каналах // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. XIII. № 3. С. 61–68.
11. *Kabral R., Du L., Åbom M.* Optimum sound attenuation in flow ducts based on the “exact” Cremer impedance // Acta Acust. united with Acust. 2016. V. 102. P. 851–860.
12. *Zhang Z., Boden H., Åbom M.* The Cremer impedance: An investigation of the low frequency behavior // J. Sound Vib. 2019. V. 459. 114844.
13. *Шендеров Е.Л.* О собственных функциях плоского волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 661–669.
14. *Шендеров Е.Л.* О решениях уравнения Гельмгольца, соответствующих кратным корням дисперсионного уравнения для волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 417–423.
15. *Perrey-Debain E., Nennig B., Lawrie J.B.* Mode coalescence and the Green’s function in a two-dimensional waveguide with arbitrary admittance boundary conditions // J. Sound Vib. 2022. V. 516. 116510.
16. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
17. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.–Л., ГИТТЛ. 1949.

**EDN:** GJDBIO
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 454–461*

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

*УДК 534.08*

# ЛАЗЕРНЫЙ ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ НАРУШЕНИЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ СТРУКТУРЫ УГЛЕПЛАСТИКОВ



**Ю. Г. Соколовская[a], *, Н. Б. Подымова[a], А. А. Карабутов[a, b]**
*[a]МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, ГСП-1, Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия*
*[b]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия*
**e-mail: yu.sokolovskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 26.03.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2022 г.

Продемонстрировано использование широкополосной акустической спектроскопии с лазерным источником зондирующих импульсов для обнаружения нарушения периодичности структуры углепластиков, вызванного зазорами между волокнами в слоях углеродной ткани. Получены частотные зависимости коэффициента затухания продольных акустических волн в диапазоне 1–11 МГц для участка углепластиковой стрингерной панели. Показано, что в областях с нарушением периодичности структуры наблюдается локальный минимум внутри резонансного максимума коэффициента затухания. Получены ультразвуковые изображения зазоров.

*Ключевые слова:* оптико-акустический метод, широкополосная акустическая спектроскопия, коэффициент затухания, углепластики, слоистая структура, периодическая структура

**DOI:** 10.31857/S0320791922040128

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальной задачей является разработка методов неразрушающего контроля структуры полимерных композиционных материалов, в том числе углепластиков. Углепластики представляют собой периодическую структуру, образованную последовательностью чередующихся слоев углеродной ткани и полимерной матрицы, и находят применение во многих отраслях промышленности [1–4]. Однако нарушения структуры, возникающие в углепластиках как на этапе производства, так и в процессе эксплуатации, могут ухудшать их прочность [2, 5]. В авиации, космической промышленности и судостроении для изготовления углепластиковых изделий широко применяются методы автоматизированной выкладки углеродных лент [6, 7]. При наличии преимуществ в виде сокращения времени изготовления крупногабаритных конструкций, эти методы, однако, не позволяют в полной мере избавиться от возникновения производственных дефектов структуры материала. Примерами таких дефектов являются зазоры, возникающие в слоях углеродной ткани между соседними лентами углеродных волокон из-за неточности их выкладки [6–9]. Типичные размеры зазоров составляют порядка миллиметра в направлении, перпендикулярном волокнам, и порядка нескольких сантиметров в направлении, параллельном волокнам. Их присутствие может приводить к значительному снижению прочности композитной конструкции. Так, например, в [10] проводилось численное моделирование поведения углепластика при прочностных испытаниях методом конечных элементов и было показано снижение прочности при наличии зазоров в слоях углеродной ткани. Проведенные в работах [7, 8] испытания также подтверждают уменьшение прочности на сжатие и сдвиг для углепластика с зазорами. Таким образом, необходима разработка методов неразрушающего контроля, позволяющих выявить данные нарушения структуры.

Так как при пропитке материала эти зазоры заполняются полимерной матрицей, то в местах их нахождения возникает нарушение чередования слоев углеродная ткань-полимерная матрица-углеродная ткань, и данный дефект можно рассматривать как локальное нарушение периодичности материала. Известно, что параметры слоистой периодической структуры (толщины слоев и их акустические импедансы) оказывают влияние на частотную зависимость коэффициентов пропускания и коэффициентов затухания продольных акустических волн в исследуемом материале (см., напр., [11–13]). При этом в спектрах пропускания акустических волн такими структурами будут наблюдаться полосы прозрачности и непрозрачности, и вблизи полос непрозрачности величина коэффициента затухания ультразвука резко возрастает [13, 14]. В работах [13–15] существование подобных полос прозрачности и непрозрачности в спектре пропускания периодической структуры было показано как теоретически, так и экспериментально на примерах модельных структур из чередующихся слоев стеклянных пластин и слоев воды, в [16] – на примере волокна из плавленого кварца с микропериодичностью структуры, искусственно созданной с помощью лазерного нагрева, а в [11] – для структур из чередующихся металлических пластин с различным акустическим импедансом. Наличие дефекта, нарушающего периодичность структуры, ведет к появлению локальных экстремумов – пиков пропускания внутри полос непрозрачности [11, 13, 14].

Для обнаружения зазоров в слоях углеродной ткани в настоящей работе предлагается использовать метод широкополосной акустической спектроскопии, основанный на лазерном возбуждении зондирующих импульсов продольных акустических волн (см., напр., [17]). Основными достоинствами лазерных источников ультразвука являются большая амплитуда и малая длительность ультразвуковых зондирующих сигналов, что делает его удобным для исследования сильно поглощающих и рассеивающих ультразвук композитных материалов [14, 17]. Данный метод позволяет получать зависимости коэффициента затухания продольных акустических волн $\alpha(f)$ в широком частотном диапазоне от долей до десятков мегагерц. При этом подбор свойств оптико-акустического источника и параметров лазерного излучения позволяет создавать зондирующие импульсы с заданной полосой частот, необходимой для конкретной задачи.

Итак, целью данной работы является демонстрация возможности обнаружения зазоров между лентами углеродной ткани в углепластиках с помощью широкополосной акустической спектроскопии с лазерным источником. Основная идея заключается в том, что характер частотных зависимостей коэффициента затухания в диапазоне 1–11 МГц несет в себе информацию об особенностях структуры исследуемого композита, в том числе о нарушении ее периодичности.

## ИССЛЕДУЕМЫЙ ОБЪЕКТ

На рис. 1а представлено схематическое изображение структуры углепластика. Исследуемым в данной работе объектом являлась углепластиковая конструкция – стрингерная панель. Схема панели показана на рис. 1б, пунктиром выделена плоскопараллельная область, выбранная для исследования. Данная область состояла из 32 слоев углеродной ткани, толщина области составляла 6 мм. Слои углеродной ткани в данной панели были уложены под углами 0°, ±45°, 90° (перекрестное армирование). Типичный внешний вид зазоров, возникающих в слоях углеродной ткани (на примере полуфабриката препрега из нескольких слоев), представлен на рис. 1в. После отверждения материала на местах таких зазоров присутствуют каналы, заполненные полимерной матрицей. Размер данных каналов для исследуемого материала составлял от 0.5 до 1.5 мм в направлении, перпендикулярном волокнам. В направлении вдоль волокон размер каналов может составлять до нескольких сантиметров или десятков сантиметров в зависимости от степени отклонения волоконной ленты от заданного положения при укладке материала и от размера конструкции. Следует также отметить, что в углепластиках с перекрестным армированием данный дефект наблюдается чаще, чем в однонаправленных образцах.

## ИДЕЯ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема использованной в работе экспериментальной установки приведена на рис. 2. Для возбуждения оптико-акустических (ОА) зондирующих импульсов использовался Nd:YAG лазер с диодной накачкой и модуляцией добротности, длина волны 1064 нм, длительность импульса составляла 10 нс, энергия в импульсе 300 мкДж, частота следования импульсов 500 Гц. Излучение лазера доставлялось в ОА-преобразователь с помощью оптического волокна, схема преобразователя также показана на рис. 2. ОА-источник представляет собой плоскопараллельную пластину из черного пластика, прозрачная призма находится в акустическом контакте с ОА-источником и также является звукопроводом широкополосного пьезоэлектрического приемника. При поглощении лазерного излучения в ОА-источнике происходит неоднородный нестационарный нагрев его приповерхностного слоя. Последующее тепловое расширение этого слоя приводит к возникновению в нем механического напряжения, формирующего два импульса продольных акустических волн на границе раздела между призмой и ОА-источником. Один из них сразу проходит через призму на приемник (зондирующий сигнал, показан на рис. 2 цифрой *8*), другой проходит через слой ОА-источника и частично отражается на границах раздела источник–вода и вода–образец из-за рассогласования величин их акустических импедансов (показан цифрой *9*). Оставшаяся часть этого импульса проходит через толщину исследуемого образца, отражается от его тыльной стороны и регистрируется пьезоприемником с временной задержкой относительно импульсов 1 и 2, зависящей от скорости звука и толщины образца (показан цифрой *10*).

На рис. 3 представлены временная форма и амплитудный спектр зондирующего акустиче-

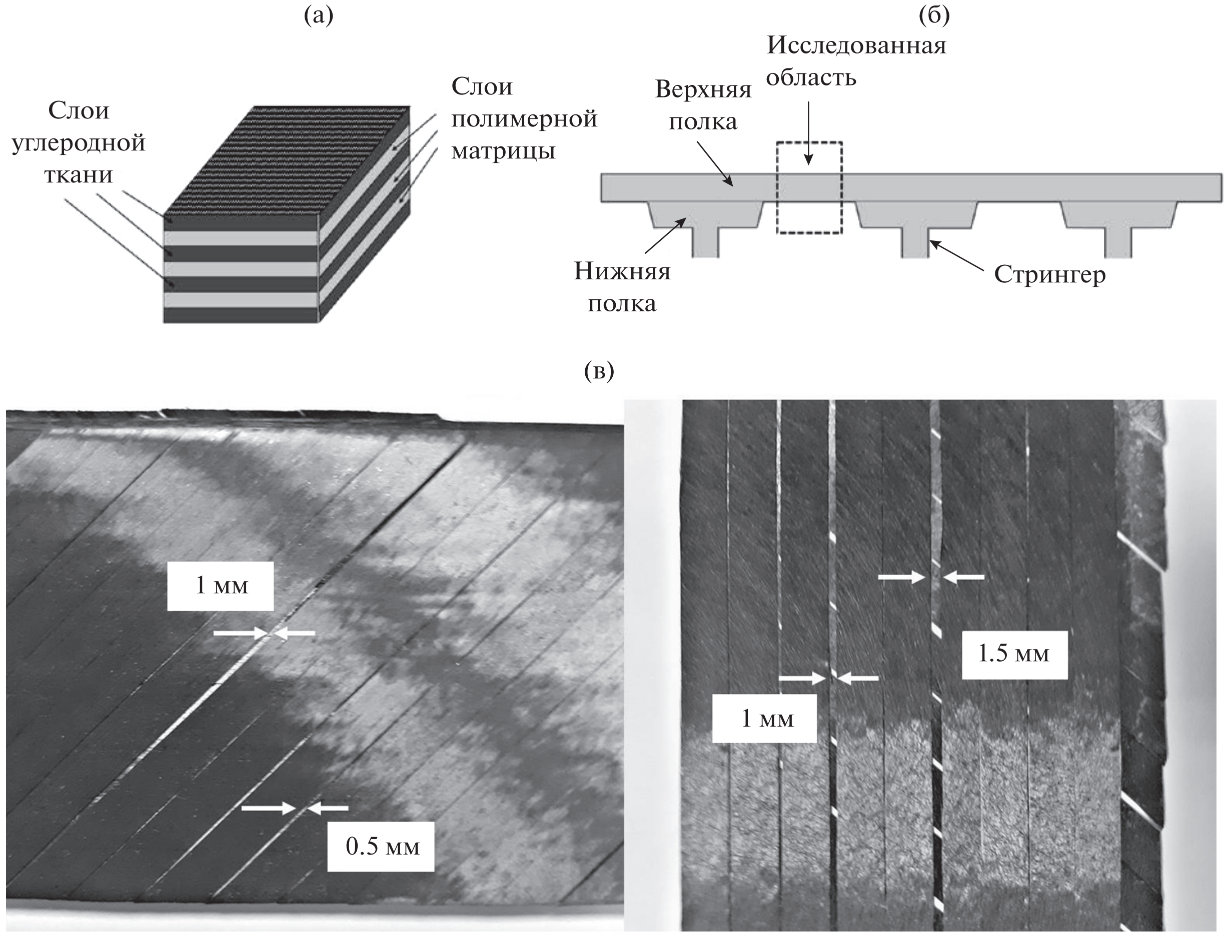



**Рис. 1.** (а) – Схема структуры углепластика, (б) – схема исследованной стрингерной панели и (в) – фото зазоров в слоях углеродной ткани.

ского импульса, а также полный трек сигнала, регистрируемого приемником при прохождении зондирующего импульса через образец слоистого композита. На полном сигнале от композита цифра *1* соответствует зондирующему импульсу, возбуждаемому в источнике (соответствует импульсу *8* на рис. 2). Цифрой *2* обозначена суперпозиция импульсов, отраженных от границ раздела ОА-источник–вода и вода–композит. Наблюдаемая форма этих импульсов вызвана тем, что из-за шероховатости поверхности композитного образца и некоторой неравномерности его толщины слой воды между образцом и ОА-источником не будет идеально равномерным и тонким. Так как величина акустического импеданса воды меньше импеданса источника, то импульс от границы источник–вода будет приходить в противофазе относительно зондирующего. Импеданс образца, напротив, больше импеданса воды, и импульс от границы вода–образец приходит уже в фазе с зондирующим. Далее цифрой *3* обозначена совокупность импульсов, отраженных от периодически чередующихся слоев полимерной матрицы и углеродной ткани, также имеющих различные импедансы. Наконец, цифрой *4* показан импульс, отраженный от тыльной поверхности образца и дважды прошедший его толщину. Этот импульс несет информацию о затухании и скорости звука в исследуемом образце.

Спектр акустического импульса $S(f)$, дважды прошедшего через композит известной толщины $h$ (при косвенной схеме измерений), определяется как [17, 18]:

$$\begin{aligned} S(f) &= S_0(f)T_1T_2\exp\left[-\alpha(f)2H\right] = \\ &= S_0(f)T_{\text{trans}}\exp\left[-\alpha(f)2H\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где $S_0(f)$ – амплитудный спектр зондирующего сигнала, $\alpha(f)$ – коэффициент затухания ультразвуковых волн, $T_1 = 2Z_s/(Z_s + Z_{\text{liq}})$, $T_2 = 2Z_{\text{liq}}/(Z_{\text{liq}} + Z_c)$ – амплитудные коэффициенты прохождения волны из ОА-источника в иммерсионную жидкость и из иммерсионной жидкости в образец композита соответственно, $Z_s$, $Z_{\text{liq}}$ и $Z_c$ – значения акустического импеданса ОА-источника, иммерсионной жидкости и углепластика. Отсюда можно

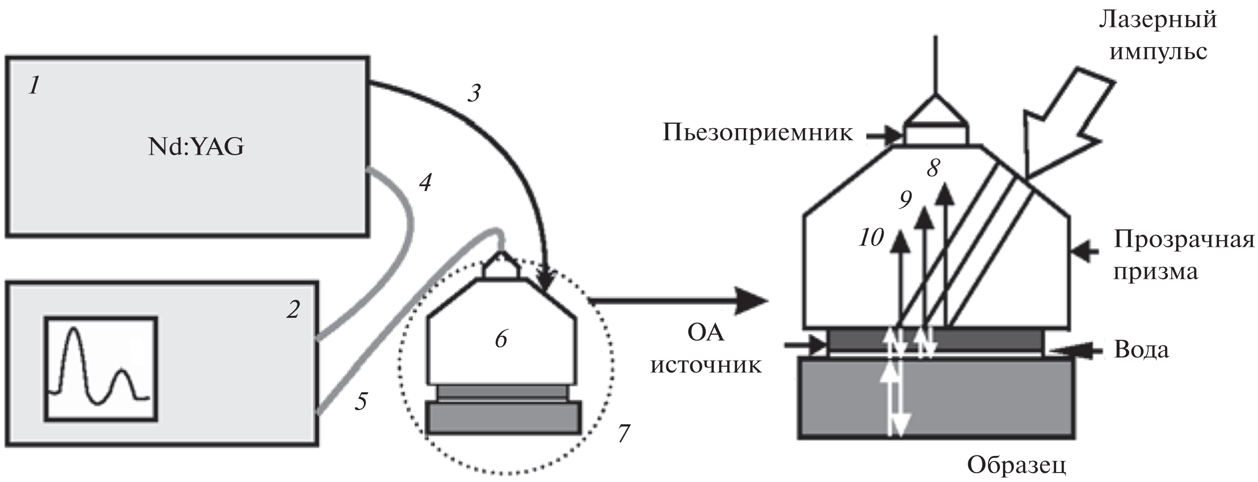



**Рис. 2.** Схема экспериментальной установки (*1* – Nd:YAG лазер, *2* – осциллограф, *3* – оптоволоконный кабель, *4*, *5* – соединительные кабели для передачи сигнала с пьезоприемника и синхронизации, *6* – ОА-преобразователь, *7* – образец и оптико-акустический преобразователь в увеличенном масштабе; *8*, *9*, *10* – отраженные сигналы.

определить коэффициент затухания продольных акустических волн в материале:

$$\alpha(f) = \frac{1}{2H}\ln\frac{S_0(f)}{S(f)} + \frac{1}{2H}\ln T_{\text{trans}}. \qquad (2)$$

Локальность тестирования материала составляла 1.5–2 мм и определялась диаметром ультразвукового зондирующего пучка, который, в свою очередь, определялся диаметром лазерного пучка, попадающего на поверхность ОА-источника.

Если при проведении эксперимента (с прямой или косвенной схемой регистрации импульсов) исследуемый углепластиковый композитный образец располагается так, что зондирующий акустический импульс будет распространяться перпендикулярно слоям углеродной ткани (направлению выкладки лент углеродных волокон), то можно считать, что импульс распространяется в плоскости изотропии исследуемого материала. В такой конфигурации рассматриваемый образец можно рассматривать как одномерную периодическую структуру, и в спектре ультразвукового импульса, прошедшего через углепластик, должны существовать полосы прозрачности и непрозрачности. Пространственный период композита и соотношение акустических импедансов слоев полимерной матрицы и углеродной ткани будут определять значение частоты, соответствующей центру полосы непрозрачности. Следует отметить, что влияние на затухание ультразвука в углепластиках также может оказывать и пористость материала. Однако в данной панели пористость составляла менее 0.1%, что подтверждается результатами рентгеновской томографии. Поэтому ее влияние на затухание можно не учитывать.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Примеры нормированных амплитудных спектров сигналов $S(f)$, зарегистрированных в участках конструкции с наличием и отсутствием дефектов (зазоров), приведены на рис. 4. Видно, что в области 7–9 МГц характер этих зависимостей несколько отличается. Подобное отличие характерно и для частотной зависимости коэффициента затухания $\alpha(f)$.

На рис. 5а приведен пример коэффициентов затухания, экспериментально полученных с использованием формулы (2), для двух участков с нарушениями периодичности (зазорами) и одного участка без нарушения периодичности. Из рисунка видно, что для бездефектной области зависимость коэффициента затухания от частоты $\alpha(f)$ имеет экстремум (максимум), координата и амплитуда которого зависит от толщины слоев углеродного волокна и полимерной матрицы, а также от соотношения их акустических импедансов. Таким образом, наблюдается одиночный резонансный пик затухания. Отметим, что в случае очень близких импедансов слоев и высокой адгезии выраженного максимума может и не быть. Возрастание $\alpha(f)$ на частотах $f_{\text{res}}$ соответствует так называемому “толщинному” резонансу затухания на периодической структуре слоев углеродных волокон. Значение максимума коэффициента затухания зависит от пространственного периода слоистой структуры и соотношения величин акустических импедансов чередующихся слоев. Значение $f_{\text{res}} \approx 8$ МГц для бездефектной области и скорости звука на данной частоте $C(f_{\text{res}}) = 3015 \pm 10$ м/с при известном периоде слоев $h_0 \approx 190$ мкм дают соотношение $h_0 = C(f_{\text{res}})/2f_{\text{res}}$. Это означает, что на частоте $f_{\text{res}}$ длина волны ультразвука будет

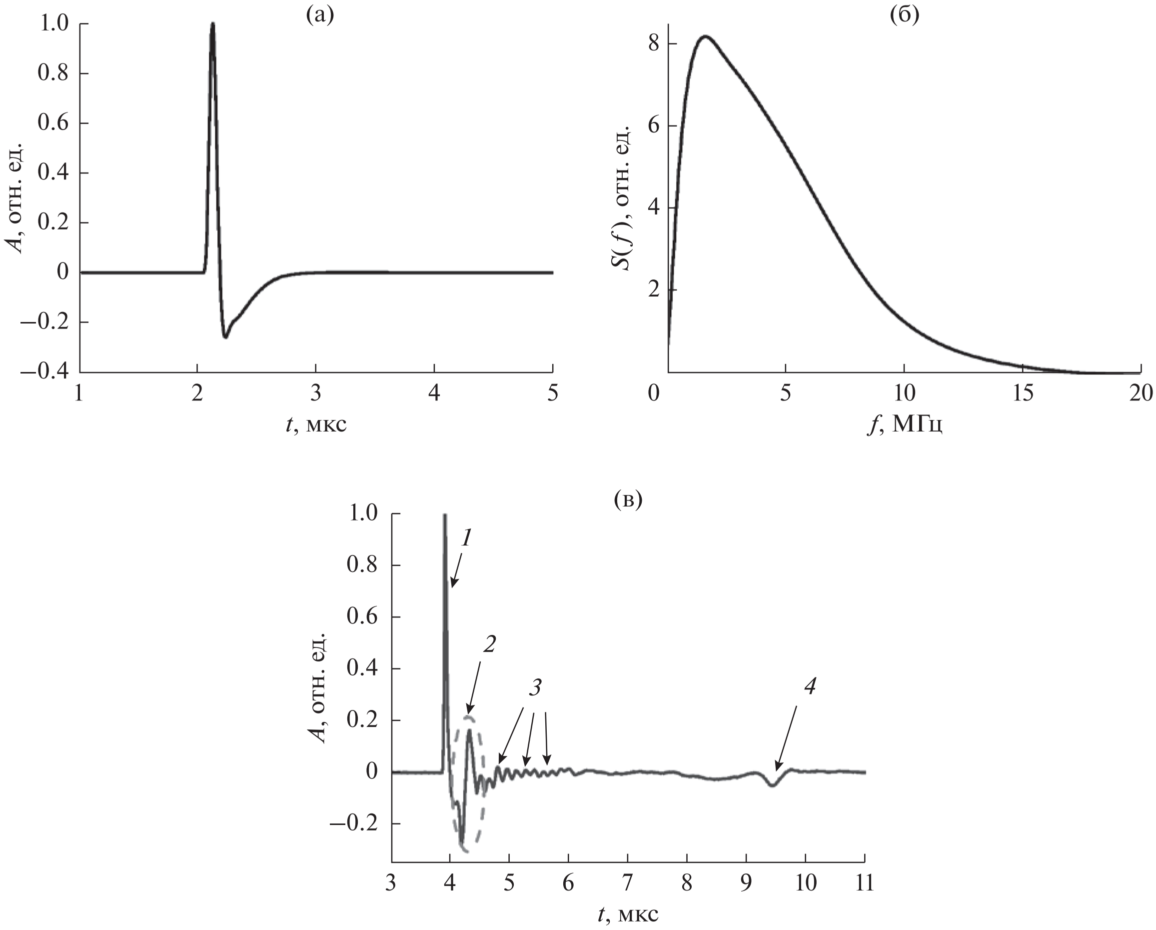



**Рис. 3.** (а) – Временная форма и (б) – амплитудный спектр зондирующего импульса, (в) – полный трек зарегистрированного сигнала.

соответствовать удвоенному периоду слоев композита. Это может быть использовано для вычисления величины периода $h_0$ по измеренным значениям $C(f_{res})$ и $f_{res}$.

Из рис. 5а также следует, что в областях, содержащих зазоры, возникает локальный минимум внутри резонансного пика $\alpha(f)$ на частоте $f_{res} \approx 8$ МГц, вызванный нарушением периодичности материала. Резонансный пик в данном случае содержит два локальных максимума (на частотах $f_1 \approx 7.2$ МГц и $f_2 \approx 8.8$ МГц) и один локальный минимум, и, следовательно, частотная зависимость коэффициента затухания продольных акустических волн в исследуемом углепластике действительно несет информацию о наличии или отсутствии заполненных связующим материалом зазоров в слоях углеродной ткани.

Теоретическая частотная зависимость для коэффициента затухания продольных акустических волн в углепластике может быть получена с помощью моделирования распространения звука в многослойной структуре известным методом передаточных матриц [11, 19–21]. Данный метод основан на системе линейных уравнений для комплексных амплитуд давления акустических волн в каждом слое периодической структуры, которая

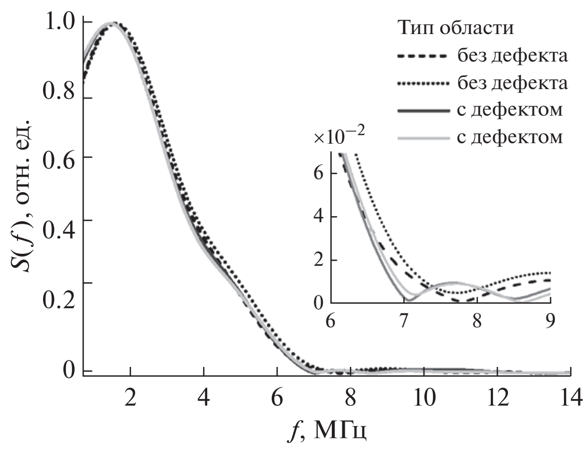



**Рис. 4.** Примеры амплитудных спектров сигналов для областей с наличием и отсутствием нарушения периодичности.

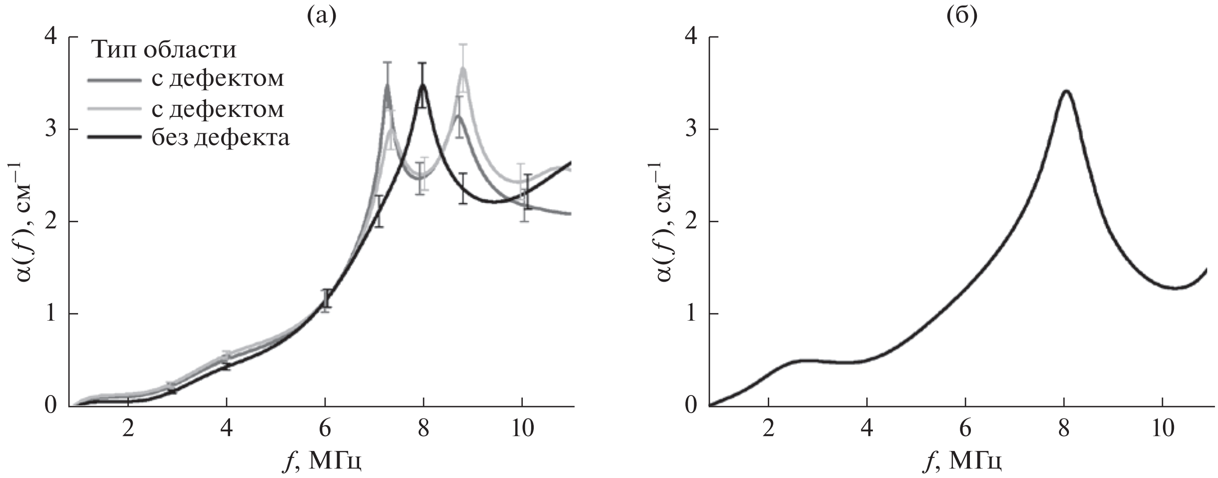



**Рис. 5.** (а) – Экспериментально измеренная частотная зависимость коэффициента затухания ультразвука в углепластиковой панели и (б) – теоретический расчет.

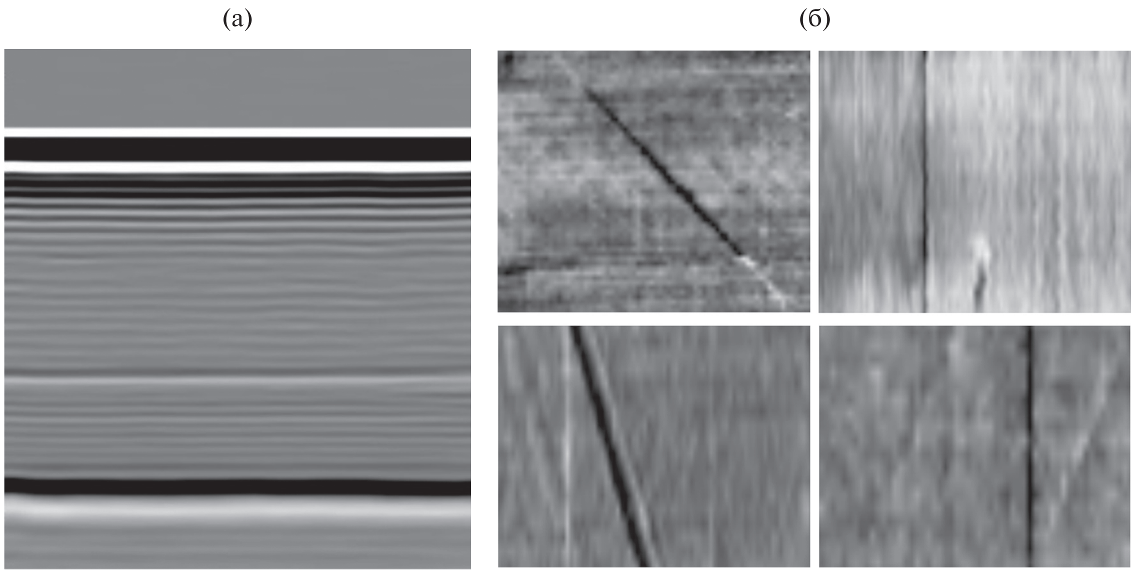



**Рис. 6.** (а) – Ультразвуковое изображение слоев углепластиковой панели и (б) – зазоров в углеродной ткани.

приводит к связи амплитуд волн в двух соседних слоях структуры через матрицу (элементы которой зависят от акустического импеданса слоя, скорости звука и его толщины). Расчет произведения матриц для системы из необходимого числа слоев позволяет получить частотные зависимости коэффициента затухания акустической волны (подробнее см., напр., в [20, 21]). Расчетная частотная зависимость $\alpha(f)$ для исследуемого углепластика для спектрального диапазона 1–11 МГц приведена на рис. 5б.

На рис. 6а показано ультразвуковое изображение слоев стрингерной панели (соответствующее плоскости, перпендикулярной слоям углеродной ткани), полученное с помощью автоматизированного сканирования ОА-преобразователем. Данное изображение формируется т.н. *A*-сканами, представляющими собой треки сигналов в каждом исследованном участке композита (рис. 3в), цвет изображения соответствует амплитуде сигнала в данной точке. Первой светлой полосой представлен зондирующий сигнал, возбуждающийся в приповерхностном слое оптико-акустического источника. Следующая за ним темная полоса – сигнал от слоя воды, так как акустический импеданс воды меньше акустического импеданса источника, и отражение от этого слоя происходит в противофазе. Поверхность образца представлена светлой линией, так как импеданс верхнего слоя углеткани (и всей панели) больше импеданса воды. Далее под поверхностью материала видно чередование слоев углеродного волокна (более светлые слои) и слоев матрицы (темные слои). На рис. 6б показаны изображения-срезы в плоскости укладки углеродной ткани, на которых наблюдаются темные полосы, направление которых совпадает с направлением укладки наполнителя в данном слое композита (0° и 45°). Эти темные полосы и представляют собой искомые зазоры между уложенными лентами углеткани, которые заполняются эпоксидной смолой, чей акустический импеданс ниже, чем импеданс волокна. Переход темной полосы в светлую на изображении обусловлен небольшой неравномерностью толщины слоя. Путем такого сканирования было выявлено полное соответствие между участками, в которых наличие зазоров было выявлено на ультразвуковом изображении, и участками, в которых изменяется характерная частотная зависимость коэффициента затухания. Таким образом, частотная зависимость коэффициента затухания продольных акустических волн в исследуемом углепластике действительно несет информацию о наличии или отсутствии заполненных связующим материалом зазоров в слоях углеродной ткани.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продемонстрировано использование лазерно-ультразвукового метода для обнаружения нарушений периодичности структуры углепластика. Искомые нарушения периодичности были вызваны неточностями укладки лент из углеродных волокон, что вызывает появление заполненных связующим материалом зазоров. Получены частотные зависимости коэффициента затухания продольных акустических волн в диапазоне 1–11 МГц для различных областей исследуемой углепластиковой конструкции. Показано совпадение частотной зависимости коэффициента затухания бездефектной области с расчетом, выполненным методом передаточных матриц. Показано, что в данной конструкции существуют области, в которых наблюдаемый резонансный максимум коэффициента затухания ультразвука имеет внутри себя локальный минимум, вызванный дефектом структуры материала. Получены ультразвуковые изображения зазоров между лентами волокон в слоях углеродной ткани и выявлено совпадение их расположения с областями, в которых наблюдается локальный минимум внутри резонансного максимума затухания. Таким образом, по изменению структуры резонансного пика затухания можно судить о наличии нарушения укладки углеродной ткани в исследуемой области. Данный метод может быть использован как для контроля тестовых образцов углепластиков с целью усовершенствования метода производства, так и для исследования реальных композитных конструкций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // Progress in Aerospace Sciences. 2005. V. 41. P. 143–151.
2. *Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А.* Пространственно-армированные композиционные материалы. Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
3. *Зверев А.Я., Черных В.В.* Экспериментальное определение акустических и виброакустических характеристик многослойных композитных панелей // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 727–736.
4. *Соколовская Ю.Г., Подымова Н.Б., Карабутов А.А.* Лазерный оптико-акустический метод количественной оценки пористости углепластиков на основе измерения их акустического импеданса // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 86–94.
5. *Петронюк Ю.С., Мороков Е.С., Левин В.М., Рыжова Т.Б., Шаныгин А.Н.* Исследование деградации композитных материалов ультразвуковыми методами высокого разрешения // Изв. РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82. № 5. С. 560–564.
6. *Тимошков П.Н., Гончаров В.А., Усачева М.Н., Хрульков А.В.* Влияние зазоров и нахлестов при выкладке препрегов на механические свойства углепластиков (обзор) // Электронный научный журнал “Труды ВИАМ”. 2018. № 12(72). С. 71–78.
7. *Croft K., Lessard L., Pasini D., Hojjati M., Chen J., Yousefpour A.* Experimental study of the effect of automated fiber placement induced defects on performance of composite laminates // Comp. Part A. 2011. V. 42. P. 484–491.
8. *Cartié D., Lan M., Davies P., Baley C.* Influence of embedded gap and overlap fiber placement defects on interlaminar properties of high performance composites // Materials. 2021. V. 14. P. 5332.
9. *Мурашов В.В., Румянцев А.Ф.* Дефекты монолитных деталей и многослойных конструкций из полимерных композиционных материалов и методы их выявления. Часть 1. Дефекты монолитных деталей и многослойных конструкций из полимерных композиционных материалов // Контроль. Диагностика. 2007. № 4. С. 23–32.
10. *Li X., Hallett S.R., Wisnom M.R.* Modelling the effect of gaps and overlaps in automated fibre placement (AFP) manufactured laminates // Science and Engineering of Composite Materials. 2015. V. 22. № 2. P. 115–129.
11. *Zhang V.Y., Lefebvre J.E., Gryba T.* Resonant transmission in stop bands of acoustic waves in periodic structures // Ultrasonics. 2006. V. 44. P. 899–904.
12. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Беляев И.О.* Исследование влияния пористости на затухание ультразвука в углепластиковых композитах методом лазерно-ультразвуковой спектроскопии // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 714–721.

13. *James R., Woodley S.M., Dyer C.M., Humphrey V.F.* Sonic bands, bandgaps, and defect states in layered structures – theory and experiment // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. № 4. P. 2041–2047.

14. *Карабутов А.А., Кожушко В.В., Пеливанов И.М., Подымова Н.Б.* Исследование оптико-акустическим методом прохождения широкополосных ультразвуковых сигналов через периодические одномерные структуры // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 4. С. 509–514.

15. *Scott W.R., Gordon P.F.* Ultrasonic spectrum analysis for nondestructive testing of layered composite materials // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 62. № 1. P. 108–116.

16. *Diez A., Kakarantzas G., Birks T.A., Russell P.St.J.* Acoustic stop-bands in periodically microtapered optical fibers // Appl. Phys. Lett. 2000. V. 76. P. 3481–3483.

17. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Соколовская Ю.Г.* Локальные соотношения Крамерса-Кронига для коэффициента затухания и фазовой скорости продольных ультразвуковых волн в полимерных композитах // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 182–189.

18. *Fitting D.W., Adler L.* Ultrasonic spectral analysis for nondestructive evaluation. New York: Plenum Press, 1981. 354 p.

19. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

20. *Карабутов А.А. (мл.), Косевич Ю.А., Сапожников О.А.* Осцилляции Блоха акустического поля в слоистой структуре // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 158–169.

21. *Пономарев А.Е., Булатицкий С.И., Сапожников О.А.* Компрессия и усиление ультразвукового импульса, отраженного от одномерной слоистой структуры // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 2. С. 157–167.

**EDN:** HFWGKP
*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 4, с. 462–464*

**ИНФОРМАЦИЯ**

# ПАМЯТИ ВИКТОРА АНАТОЛЬЕВИЧА АКУЛИЧЕВА (31.01.1939–26.02.2022)

**DOI:** 10.31857/S0320791922040013

**ПАМЯТИ ВИКТОРА АНАТОЛЬЕВИЧА АКУЛИЧЕВА**

**(31.01.1939 – 26.02.2022)**

26 февраля 2022 г. ушел из жизни Виктор Анатольевич Акуличев, академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, научный руководитель ТОИ ДВО РАН.

Виктор Анатольевич Акуличев родился 31 января 1939 г. в г. Шпола (Киевская область, Украина). В 1956 г. окончил среднюю школу с золотой медалью в г. Оргееве (Молдавия). В 1961 г. с отличием окончил Киевский политехнический институт по специальности “электроакустика”, после чего по распределению приехал в Сухумскую научную морскую станцию Акустического института АН СССР.

Первые научные работы В.А. Акуличева, выполненные под руководством Виктора Ивановича Ильичева (впоследствии ставшего директором Тихоокеанского океанологического института), лежали в области нелинейной акустики и были посвящены кавитации. В 1964 г. В.А. Акуличев поступил в аспирантуру Акустического института в отдел ультразвука к профессору Л.Д. Розенбергу, где защитил кандидатскую диссертацию до истечения отведенных на ее подготовку трех лет. Уже тогда уровень его работ был настолько высок, что явился основой для солидного раздела “Пульсации кавитационных полостей” фундаментальной монографии “Мощные ультразвуковые поля”, изданной под редакцией Л.Д. Розенберга в 1968 г. Монография была переведена на иностранные языки и издана в США и во Франции. Она и по сей день является настольной книгой специалистов в области физической акустики.

После защиты диссертации Виктор Анатольевич работал по разным направлениям физической акустики. Например, ему удалось провести исследования в Арктике на дрейфующей станции СП-18 в 1969 г. Измерения кавитационной прочности морской воды, выполненные им в Северном ледовитом океане, являются уникальными. В дальнейшем Виктору Анатольевичу удалось провести измерения кавитационной прочности морской воды во всех океанах, что выявило ярко выраженный широтный эффект, интерес к которому сохраняется и поныне.

В конце 1960-х гг. Виктор Анатольевич меняет научное направление и выбирает предметом исследований область низких температур, при которых (вблизи нуля градусов Кельвина) только криогенные жидкости, такие как азот, водород и гелий, могут оставаться в жидком состоянии. Такая резкая смена направления была обусловлена практической целесообразностью создания ультразвуковой пузырьковой камеры. Для улучшения качества ядерно-физических экспериментов была поставлена задача замены громоздких медленных систем расширения традиционных пузырьковых камер для регистрации частиц высоких энергий быстрыми акустическими системами. Для решения этой задачи требовалось создать ультразвуковую пузырьковую камеру. Трудность реализации такой камеры заключалась в создании управляемого роста пузырьков из зародышей до различимых размеров за счет ультразвука. Требовалось дополнительное изучение термодинамики и кинетики фазовых превращений, создание теоретических основ фазовых превращений в акустическом поле. Исследования в этом направлении проводились совместно с группой д.ф.-м.н. Г.И. Селиванова под руководством академика Б.М. Понтекорво из Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ в Дубне, где и проходили основные эксперименты. Эти усилия завершились регистрацией треков частиц высоких энергий в ультразвуковой жидководородной камере (Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 486–493; Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1977. Т. 8. № 3. С. 580–630).

В это же время В.А. Акуличева привлекают фундаментальные задачи образования в жидкости зародышей кавитации во внешних полях. Была создана теория кавитационной прочности жидкостей с зародышами новой фазы, основанная на механизмах термических и квантовых гетерофазных флуктуаций, которым в свое время уделили большое внимание такие корифеи науки, как Я.И. Френкель, Я.Б. Зельдович, И.М. Лифшиц, Ю.М. Каган. Виктора Анатольевича занимала проблема объяснения аномально малой кавитационной прочности жидкого гелия, особенно его необыкновенной фазы – сверхтекучего гелия He II. Им было введено в физику понятие квантовая кавитация. Это явление наблюдается только вблизи абсолютного нуля, когда термические гетерофазные флуктуации замирают и определяющими становятся квантовые гетерофазные флуктуации. Виктор Анатольевич предсказал ограничение прочности на разрыв жидкого гелия именно механизмом квантовых флуктуаций. Интересно, что экспериментально удалось проверить эти теоретические предсказания только в середине 1990-х годов в США (H. Maris) и в начале 2000 г. во Франции (S. Balibar). Одновременно Виктором Анатольевичем решалась другая задача – описание динамики пузырька в знакопеременном поле ультразвука. Нелинейные эффекты выпрямленного тепло- и массопереноса, лежащие в основе механизма воздействия ультразвука на рост паровых пузырьков, оказались настолько универсальным, что в дальнейшем полученные решения применялись также к проблеме управления кристаллизацией жидкостей в ультразвуковом поле.

В 1975 г. по результатам исследований акустической кавитации в криогенных и кипящих жидкостях Виктор Анатольевич защитил диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук, а затем по материалам диссертации опубликовал монографию “Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях”, вышедшую в издательстве “Наука” в 1978 г.

В 1978 г. Виктор Анатольевич уезжает на Дальний восток в Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН (ТОИ), где к тому времени уже несколько лет был директором его первый научный руководитель, Виктор Иванович Ильичев. Наиболее значимыми становятся работы В.А. Акуличева в области акустики океана: экспериментальные исследования распространения звука в океане через крупные мезомасштабные неоднородности, фронтальные разделы и вихри, постановка задач по численному моделированию распространения звука вдоль протяженных акустических трасс в неоднородном океане, а также исследования по определению концентрации и размеров различных неоднородностей водной среды в океане на основе решения обратных задач при рассеянии акустических сигналов.

Для проведения работ по распространению звука на большие дистанции институт остро нуждался в новой излучающей акустической технике. Под влиянием идей В.А. Акуличева и под его непосредственным руководством были разработаны мощные глубоководные низкочастотные акустические излучатели, основанные на принципах возбуждения звука в заполненных жидкостью резонансных трубах и резонаторах. Излучатели были созданы в ТОИ и использованы в дальнейшем для исследования океана на трассах протяженностью более 2000 км.

В.А. Акуличев участвовал во многих океанских экспедициях, многие из них он лично возглавлял. Эти экспедиции отличались не только научными открытиями, но и интересными вечерами отдыха коллектива. Виктор Анатольевич великолепно играл на гитаре, пел бардовские песни, участвовал в спортивных состязаниях, особенное внимание он уделял волейболу, в котором он был очень силен, всегда был душой коллектива.

В 1990 г. В.А. Акуличев стал членом-корреспондентом АН СССР и в 2000 г. он был избран действительным членом Российской академии наук. С 1985 г. Виктор Анатольевич является профессором по специальности гидрофизика. Кафедра гидрофизики, которую он много лет возглавлял на физическом факультете в Дальневосточном государственном университете, была одной из самых престижных и через нее прошло много студентов, с успехом закончивших университет. В.А. Акуличев создал научную школу по акустике океана и гидрофизике на Дальнем Востоке. Под его руководством было защищено 12 кандидатских диссертаций, 5 докторов наук считают его своим учителем.

В 1995 г. В.А. Акуличев возглавил ТОИ ДВО РАН и на посту директора находился до 2015 г. С 2015 г. до последнего времени В.А. Акуличев являлся научным руководителем этого института.

В.А. Акуличев был авторитетным ученым в таких областях, как океанология, гидрофизика и акустика, он являлся автором или соавтором более 250 научных работ, в том числе 5 монографий: “Мощные ультразвуковые поля” (1968), “Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях” (1978), “Периодические фазовые превращения в жидкостях” (1986), “Волновые энергетические станции в океане" (1989), "Акустические исследования мелкомасштабных неоднородностей в морской среде" (2017). Под его общей редакцией опубликованы фундаментальные научные издания: в 4-х книгах "Дальневосточные моря России" (2007) и в 2-х книгах "Океанологические исследования дальневосточных морей и северо-западной части Тихого океана" (2013).

Следует отметить и большую научно-организационную работу, которую вел В.А. Акуличев в 2000-х гг. Он являлся национальным координатором Российской Федерации по подкомиссии WESTPAC Межправительственной океанографической комиссии ЮНЕСКО. В 2004 г. он был избран вице-президентом Международного научного комитета по океаническим исследованиям SCOR. С 2008 по 2019 гг. В.А. Акуличев возглавлял Российское акустическое общество, на всех сессиях которого, вплоть до последней XXXIV сессии с 14 по 18 февраля 2022 г., он был председателем или сопредседателем. Он являлся действительным членом Американского акустического общества (с 1989 г.), членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом Межведомственной национальной океанографической комиссии Российской Федерации, членом ряда специализированных, научных и ученых советов. Авторитет В.А. Акуличева способствовал развитию Акустического журнала РАН, в составе Редакционного совета которого он состоял в последние годы.

За большие заслуги В.А. Акуличев был удостоен высоких наград, среди которых орден "Знак Почета" (1986), медаль "300 лет Российскому флоту" (1996), медаль Министерства обороны РФ "Адмирал Горшков" (2006), медаль к 100-летию подводного флота "Создателю атомной техники" (2006), он лауреат премии имени академика В. И. Ильичева.

В памяти коллег и друзей Виктор Анатольевич останется не только настоящим ученым, но и жизнерадостным и отзывчивым человеком, всегда готовым прийти на помощь в решении как научных, так и житейских проблем. Память о Викторе Анатольевиче Акуличеве, замечательном руководителе, ученом, педагоге и прекрасном человеке навсегда сохранится в сердцах его друзей, соратников и коллег.

*Коллектив Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН*