

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

Разработка и исследование механизмов с постоянной точкой ввода инструмента в рабочую область, предназначенных для хирургических операций и исследования свойств плазмы	
<i>Е. И. Велиев, Р. Ф. Ганиев, В. А. Глазунов, С. А. Скворцов, Р. А. Чернецов</i>	3
Численный метод определения рабочей области робота с механизмами относительного манипулирования	
<i>Е. В. Гапоненко, Л. А. Рыбак, Д. И. Малышев</i>	16
Моделирование взаимодействия оператора и экзоскелета	
<i>С. Ф. Яцун, А. С. Яцун, Е. В. Савельева, А. Е. Карлов</i>	35
О самосинхронизации колебаний вибрационной шековой дробилки при учете взаимодействия с обрабатываемой средой	
<i>А. Е. Шохин</i>	48

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

Влияние дисперсного состава SiC на физико-механические свойства реакционно-спеченного карбида кремния	
<i>С. Н. Перевислов, М. В. Томкович, М. А. Марков, И. Н. Кравченко, Ю. А. Кузнецов, М. Н. Ерофеев</i>	61
Расчет эллиптической цилиндрической оболочки за пределами упругости на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений	
<i>А. Ш. Джабраилов, А. П. Николаев, Ю. В. Ключков, Н. А. Гуреева, Т. Р. Ищанов</i>	69
Влияние химического состава и структурных характеристик триботехнических материалов на основе вермикулита на эксплуатационные свойства формируемых покрытий	
<i>Л. Б. Леонтьев, Н. П. Шапкин, А. Л. Леонтьев</i>	82
О возможности использования технической керамики в гибких рукавах кроссхеликальной структуры	
<i>А. В. Березин, В. Ю. Жиркевич</i>	94

---

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

Модификация подшипниковых сопряжений турбокомпрессора ТКР 7С-6	
<i>А. Г. Ипатов, Е. В. Харанжевский, А. Г. Иванов</i>	101
Влияние параметров окружающей среды на неразрушающий контроль металлических деталей машин методом контактной разности потенциалов	
<i>В. С. Олешко</i>	107

---

---



---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.01

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ С ПОСТОЯННОЙ ТОЧКОЙ  
ВВОДА ИНСТРУМЕНТА В РАБОЧУЮ ОБЛАСТЬ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ  
ДЛЯ ХИРУРГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ**

© 2020 г. **Е. И. Велиев<sup>1</sup>, Р. Ф. Ганиев<sup>2</sup>, В. А. Глазунов<sup>2,\*</sup>,  
С. А. Скворцов<sup>2,\*\*</sup>, Р. А. Чернецов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Российская медицинская академия непрерывного профессионального образования, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: gribodova04@mail.ru*

*\*\*e-mail: 1691skvorcov@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.05.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

В настоящей статье рассмотрены механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. Эти устройства получены на основе использования конических зубчатых или ременных передач. Представлено решение задачи о положениях и скоростях, а также задачи динамического анализа, представлена конструкция действующей модели.

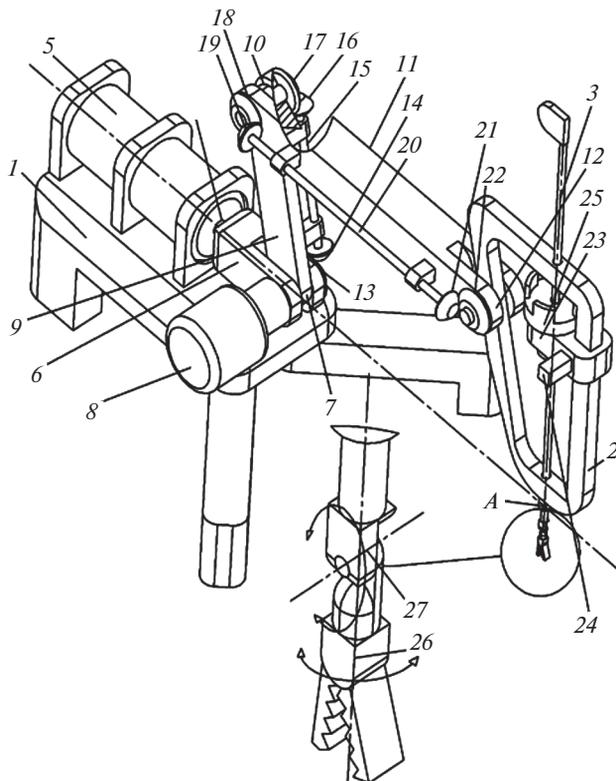
*Ключевые слова:* коническая передача, ременная передача, задача о положениях, динамический анализ, экспериментальная модель

**DOI:** 10.31857/S0235711920060103

Перед отечественным машиностроением стоят серьезные проблемы, связанные с принятой Стратегией научно-технологического развития Российской Федерации [1, 2]. Для многих задач современной техники необходимы устройства, в которых должно быть обеспечено постоянство точки ввода инструмента в рабочее пространство. Речь идет, в частности, об измерительных устройствах, используемых для исследования свойств плазмы [3], указанное условие необходимо обеспечить также при разработке робототехнических комплексов, предназначенных для хирургических операций [4].

Одним из решений данной проблемы является механизм, основанный на применении шарнирных параллелограммов [5, 6]. За счет наличия этих элементов угол поворота входного звена равен углу поворота выходного звена. В дальнейшем были предложены другие механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента основанные на использовании передач с гибкой связью, а также конических передач. Было определено число степеней свободы этих устройств, описан принцип их работы [7].

Построение механизмов с постоянной точкой ввода инструмента может быть основано не только на таких принципах, как шарнирные параллелограммы, передача с гибкой связью, конические передачи, но и на принципах параллельной структуры [8–11]. В частности, это может быть механизм, содержащий круговую направляющую, по которой перемещаются три приводные каретки [8–11]. Применение такого устройства позволяет примерно на порядок уменьшить габариты и вес робототехнической системы Da Vinci при сохранении функциональных возможностей. С целью упрощения



**Рис. 1.** Механизм, обеспечивающий постоянство точки ввода инструмента за счет наличия двух конических передач.

конструкции может быть целесообразна разработка и исследование механизмов, рассматриваемых в данной статье.

Синтез всех указанных механизмов разного типа должен основываться на всестороннем учете функциональных и технических требований, определяемых условиями проведения тех или иных хирургических операций в разных областях медицины, а также особенностями экспериментальных исследований свойств плазмы [12–15].

В настоящей статье представлены результаты исследований, связанные с разработкой механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента и основанных на применении конических или ременных передач. Приводится решение задач о положениях и скоростях, задач динамического анализа с учетом закона управления, описаны параметры действующей модели механизма, что дает возможность оценки функциональных особенностей этих устройств.

Рассмотрим механизм, обеспечивающий постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону за счет наличия в нем двух конических передач (рис. 1).

Данный механизм состоит из основания 1, выходного звена 2, рабочего органа 3, поворотной платформы 6, которая приводится во вращение двигателем 5 через вращательную кинематическую пару 4. С поворотной платформой 6 через кинематическую пару 7, приводимую в движение двигателем 8, связано начальное звено 9, которое через вращательную кинематическую пару 10 связано с промежуточным звеном 11. Данное звено сопряжено через кинематическую пару 12 с выходным звеном 2. Для того,

чтобы обеспечить постоянство передаточного отношения между двигателем 8 и выходным звеном 2, механизм снабжен двумя коническими передачами. При этом коническое колесо 13 жестко связано с начальным звеном 9. Конические колеса 14 и 16 расположены на одном валу 15. При этом колесо 16 сопряжено с коническим колесом 17, жестко связанным с промежуточным звеном 11. Также с указанным звеном 11 жестко связано коническое колесо 18, сопряженное с коническим колесом 19, которое расположено на валу 20 вместе с коническим колесом 21. Указанное колесо 21 сопряжено с коническим колесом 22, жестко связанным с выходным звеном 2. Наличие конических передач обеспечивает равные углы поворота начального звена 9 и выходного звена 2. Рабочий орган 3 относительно выходного звена 2 может вращаться под действием вращательного двигателя 23 и перемещаться поступательно под действием линейного двигателя 24. Ось рабочего органа 3 пересекает продолжение оси двигателя 5 в точке А, положение которой неизменно. С рабочим органом 3 сопряжено устройство фиксации 25, обеспечивающее быструю смену инструмента, который через вращательные кинематические пары 26 и 27 связан с рабочим органом 3.

При определении числа степеней свободы имеем в виду, что данное устройство включает следующие кинематические пары и звенья. Между основанием 1 с вращательным двигателем 5, поворачивающим подвижную платформу 6, расположена вращательная кинематическая пара пятого класса 4. Двигатель 8 связан с одним концом звена 9 и поворачивает входное звено вокруг своей оси, образуя вторую кинематическую пару пятого класса. Конические колеса 13 и 17, сопряженные с коническими колесами 14 и 16, установленными соосно на валу 15, образуют первую и вторую пару первого класса. Звенья 9 и 11 образуют третью кинематическую пару пятого класса. На противоположном от двигателя 8 конце звена 9 жестко закреплено коническое зубчатое колесо 18, образующее вместе с коническим зубчатым колесом 19 третью кинематическую пару первого класса. Колесо 19 установлено соосно на одном валу 20 с коническим зубчатым колесом 21, сопряженным с коническим зубчатым колесом 22, установленным на выходном звене 2. Между зубчатыми колесами 21 и 22 расположена четвертая кинематическая пара первого класса. Звено 11 и выходное звено 2 образуют четвертую пару пятого класса. Рабочий орган 3 связан с выходным звеном 2 посредством двухподвижной кинематической пары четвертого класса, образуемой двигателями 23 и 24. Пятая и шестая вращательные кинематические пары пятого класса — это элементы 26 и 27. Кроме того, нужно учесть еще две вращательные кинематические пары, сопрягающие звенья 9 и 11 соответственно со звеньями 15 и 20.

Таким образом, механизм содержит восемь кинематических пар пятого класса, одну кинематическую пару четвертого класса и четыре кинематические пары первого класса.

Как известно, в теории механизмов и машин звеном считается совокупность элементов, движущихся как твердое тело. В соответствии с этим элементы 1, 2, 3, 6, 9, 11, 15, 20, а кроме того элемент, расположенный между кинематическими парами 26 и 27 и инструмент, являются звеньями данного механизма. Таким образом, механизм содержит девять подвижных звеньев.

Определим число степеней свободы механизма по формуле Сомова–Малышева

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1,$$

где  $n$  — количество подвижных звеньев,  $P_5, P_4, \dots, P_1$  — количество одно-, двух-, ..., пятиподвижных кинематических пар.

Для данного случая  $P_5 = 8; P_4 = 2; P_1 = 4; n = 9$ . Используя приведенную структурную формулу, получаем:

$$W = 6 \times 9 - 5 \times 8 - 4 \times 1 - 4 = 54 - 40 - 4 - 4 = 6.$$

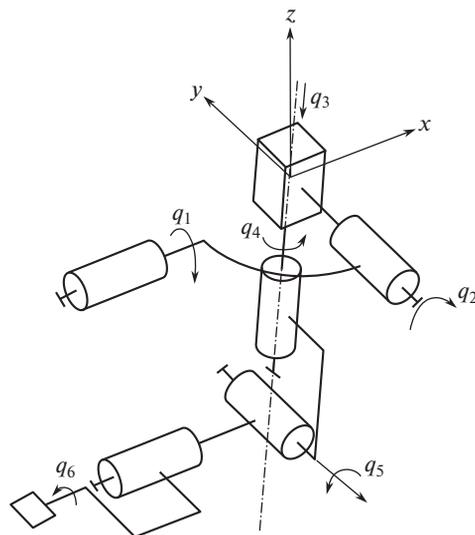


Рис. 2. Вспомогательная схема для решения задачи о положениях.

Таким образом, число степеней свободы равно шести. В случае, когда отсутствуют кинематические пары пятого класса 26 и 27, соответственно на два уменьшается и количество звеньев. При этом имеем

$$W = 6 \times 7 - 5 \times 6 - 4 \times 1 - 4 = 42 - 30 - 4 - 4 = 4.$$

Таким образом, число степеней свободы в данном случае равно четырем. Подобный расчет справедлив также для механизма, содержащего не конические, а ременные передачи. Это исследование показывает, что с точки зрения числа степеней свободы, данный механизм вполне работоспособен.

Рассмотрим решение обратной задачи о положениях для механизмов с постоянной точкой ввода инструмента. При этом будем использовать вспомогательную схему (рис. 2).

За начало координат принята точка ввода, при этом, механизм имеет шесть степеней свободы, три из которых доставляют инструмент в нужное положение и три определяют ориентацию инструмента.

Положения инструмента по шести абсолютным координатам определяется матрицей Денавита–Хартенберга  $A_b$ , которую можно получить перемножением четырех матриц, три из которых определяют ориентацию инструмента, и одна матрица определяет положение центра координат подвижной системы, связанной с инструментом

$$A_b = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\beta) \cos(\gamma), & x_2 &= \cos(\gamma) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma), \\ z_2 &= \cos(\beta) \sin(\alpha), & z_3 &= \cos(\alpha) \cos(\beta). \end{aligned}$$

Остальные элементы выражаются аналогично. Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы ориентации инструмента,  $x, y, z$  – положение центра системы координат, связанной с инструментом.

С другой стороны, мы имеем матрицу  $A_p$ , которая получается путем перемножения шести матриц, выражающих перемещение (угловые и линейные), определяемые обобщенными координатами  $q, \dots, q_6$

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{x1} & A_{x2} & A_{x3} & x_p \\ A_{y1} & A_{y2} & A_{y3} & y_p \\ A_{z1} & A_{z2} & A_{z3} & z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы имеют вид

$$A_{x1} = -(\cos(q_6)(\sin(q_2)\sin(q_5) - \cos(q_2)\cos(q_4)\cos(q_5)) - \cos(q_2)\sin(q_4)\sin(q_6)),$$

$$x_p = q_3 \sin(q_2),$$

$$A_{y2} = \cos(q_6)(\cos(q_1)\cos(q_4) - \sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_4)) -$$

$$- \sin(q_6)(\cos(q_5)(\cos(q_1)\sin(q_4) + \cos(q_4)\sin(q_1)\sin(q_2)) + \cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_5)),$$

$$y_p = -(q_3 \cos(q_2)\sin(q_1)),$$

$$z_p = q_3 \cos(q_1)\cos(q_2).$$

Остальные элементы выражаются аналогично. Здесь  $q_1, \dots, q_6$  – обобщенные координаты. Координата  $q_3$  характеризует продвижение рабочего органа и вместе с ним инструмента вдоль оси выходного звена и определяет координаты центра координатной системы, связанной с инструментом

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вторая обобщенная координата  $q_2$  определяется поворотом второго привода и характеризуется смещением центра координат инструмента по оси  $x$

$$q_2 = \arcsin\left(\frac{x}{q_3}\right).$$

Первая обобщенная координата также зависит от смещения центра координатной системы инструмента

$$q_1 = \arcsin\left(\frac{-y}{q_3 \cos(q_2)}\right).$$

Направление оси выходного звена характеризуется единичным вектором, определяемым через координаты  $x, y, z$ . Направление оси инструмента характеризуется элементами третьего столбца матрицы  $A_p$ . Скалярное произведение единичных векторов указанных двух осей характеризует значение обобщенной координаты  $q_5$ .

Для того чтобы найти обобщенную координату  $q_6$ , нужно знать единичный вектор оси кинематической пары, соответствующей обобщенной координате  $q_5$ . Для его определения находим векторное произведение единичных векторов оси инструмента (третий столбец матрицы  $A_p$ ) и оси выходного звена.

Затем нужно найти арккосинус скалярного произведения единичного вектора оси  $y$  системы координат инструмента и найденного единичного вектора оси кинематической пары, соответствующей координате  $q_5$ , таким образом, получаем обобщенную координату  $q_6$ .

Чтобы определить обобщенную координату  $q_4$ , сначала находим скалярное произведение единичных векторов осей кинематических пар, соответствующих обобщенным координатам  $q_2$  и  $q_5$ , а затем вычисляем арккосинус получившегося выражения. Таким образом, определяем все обобщенные координаты.

Рассмотрим пример, в котором зададим значения абсолютных координат, а потом определим значения обобщенных координат. Пусть матрица  $A_b$  имеет вид

$$A_b = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.433 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ -0.433 & 0.25 & 0.866 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе изложенного подхода можно найти:  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0.01$  м,  $q_4 = 0$ ,  $q_5 = \arccos(0.866) = 0.524$  рад,  $q_6 = 0.524$  рад.

Таким образом, обратную задачу о положениях можно считать решенной.

Рассмотрим решение задачи о скоростях механизма с постоянной точкой ввода инструмента на основе дифференцирования уравнения связей. Ранее были получены решения задач о положениях. Считаем известными абсолютные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а также обобщенные координаты  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$ ,  $q_6$ .

Выразим положения центра системы координат, связанной с инструментом, через обобщенные координаты

$$x = q_3 \sin(q_2), \quad y = -(q_3 \sin(q_1) \cos(q_2)), \quad z = q_3 \cos(q_1) \cos(q_2).$$

Продифференцируем данные соотношения по времени, при этом получим скорость изменения координат центра инструмента

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dq_2}{dt} q_3 \cos(q_2) + \frac{dq_3}{dt} \sin(q_2), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dq_1}{dt} q_3 \cos(q_1) \cos(q_2) + \frac{dq_2}{dt} q_3 \sin(q_1) \sin(q_2) - \frac{dq_3}{dt} \sin(q_1) \cos(q_2), \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{dq_1}{dt} q_3 \sin(q_1) \cos(q_2) - \frac{dq_2}{dt} q_3 \cos(q_1) \sin(q_2) + \frac{dq_3}{dt} \cos(q_1) \cos(q_2). \end{aligned}$$

Здесь все обозначения соответствуют использованным выше. Найдем вторую производную по времени, при этом получим ускорения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2q_2}{dt^2} q_3 \cos(q_2) + \frac{d^2q_3}{dt^2} \sin(q_2) - \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 q_3 \sin(q_2) + 2 \frac{dq_2}{dt} \frac{dq_3}{dt} \cos(q_2).$$

Для остальных производных выражения схожи, хотя несколько сложнее. Пусть известны обобщенные и абсолютные координаты, а также абсолютные скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad y = 0; \quad z = -0.1 \text{ м}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0; \quad \frac{dx}{dt} = 1 \text{ м/с}; \quad \frac{dy}{dt} = 1 \text{ м/с}; \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ м/с}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \\ = 0.2 \text{ м/с}^2; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.2 \text{ м/с}^2; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.2 \text{ м/с}^2; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2; \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2; \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

В этом случае  $q_1 = q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$ ;  $q_3 = -0.1$  м. Найдем первые три обобщенные

скорости и ускорения  $\frac{dq_1}{dt} = 10$  рад/с,  $\frac{dq_2}{dt} = -10$  рад/с,  $\frac{dq_3}{dt} = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ,  $\frac{d^2q_1}{dt^2} = 410$  рад/с<sup>2</sup>,

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} = -210 \text{ рад/с}^2, \quad \frac{d^2q_3}{dt^2} = -19 \text{ рад/с}^2.$$

Перейдем к определению остальных обобщенных скоростей и ускорений. Имеем два векторных уравнения

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{dq_1}{dt} \bar{e}_1 + \frac{dq_2}{dt} \bar{e}_2 + \frac{dq_3}{dt} \bar{e}_3 + \frac{dq_4}{dt} \bar{e}_4 + \frac{dq_5}{dt} \bar{e}_5 + \frac{dq_6}{dt} \bar{e}_6, \\ \bar{\omega} &= \frac{d\alpha}{dt} \bar{e}_\alpha + \frac{d\beta}{dt} \bar{e}_\beta + \frac{d\gamma}{dt} \bar{e}_\gamma.\end{aligned}$$

Здесь  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_\gamma$  единичные векторы осей, соответствующих поворотам по обобщенным и абсолютным координатам. Исходя из структуры механизма:  $\bar{e}_\alpha = \bar{e}_1, \bar{e}_\beta = \bar{e}_2, \bar{e}_\gamma = \bar{e}_4$ . Остальные обозначения соответствуют использованным выше.

Разложим указанные векторные уравнения по координатам

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt} e_{\alpha x} + \frac{d\beta}{dt} e_{\beta x} + \frac{d\gamma}{dt} e_{\gamma x} = \frac{d\alpha}{dt} e_{1x} + \frac{d\beta}{dt} e_{2x} + \frac{d\gamma}{dt} e_{4x}.$$

Остальные уравнения аналогичны. Выразим их через единичные векторы осей кинематических пар

$$\omega_x = \frac{dq_1}{dt} e_{1x} + \frac{dq_2}{dt} e_{2x} + \frac{dq_4}{dt} e_{4x} + \frac{dq_5}{dt} e_{5x} + \frac{dq_6}{dt} e_{6x},$$

где векторы  $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$  определяются обобщенными координатами  $q_1 q_2 q_3$ , а векторы  $\bar{e}_4 \bar{e}_5 \bar{e}_6$  находим из перемножения соответствующих матриц.

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_4 = \begin{bmatrix} \sin(q_2) \\ -(\cos(q_2) \sin(q_1)) \\ \cos(q_1) \cos(q_2) \end{bmatrix}, \\ \bar{e}_5 &= \begin{bmatrix} -(\cos(q_2) \sin(q_4)) \\ \cos(q_1) \cos(q_4) - \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \\ \cos(q_4) \sin(q_1) - \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_6 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) \\ -\sin(\beta) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

При заданных выше величинах имеем значения угловых и обобщенных скоростей:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.52 \text{ рад/с}, \quad \frac{dq_4}{dt} = 0.52 \text{ рад/с}, \quad \frac{dq_5}{dt} = 10.52 \text{ рад/с}, \quad \frac{dq_6}{dt} = \frac{\Delta q_6}{\Delta} = -9.48 \text{ рад/с}.$$

Для определения угловых ускорений необходимо найти векторные произведения единичных векторов осей вращательных кинематических пар

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_1 \times \bar{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\cos(q_1) \cos(q_2)) \\ -(\cos(q_2) \sin(q_1)) \end{bmatrix}, \\ &\dots \\ \bar{e}_4 \times \bar{e}_6 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) \sin(\beta) \sin(q_1) - \cos(\beta) \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(\gamma) \\ \sin(\beta) \sin(q_1) + \cos(\beta) \cos(\gamma) \cos(q_1) \cos(q_2) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) \sin(q_2) + \cos(\beta) \cos(\gamma) \cos(q_2) \sin(q_1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Остальные векторные произведения определяются аналогично. Запишем уравнения для ускорений

$$\varepsilon_x = \frac{d^2 q_1}{dt^2} e_{1x} + \frac{d^2 q_2}{dt^2} e_{2x} + \frac{d^2 q_4}{dt^2} e_{4x} + \frac{d^2 q_5}{dt^2} e_{5x} + \frac{d^2 q_6}{dt^2} e_{6x} + \varepsilon_{1-6x}.$$

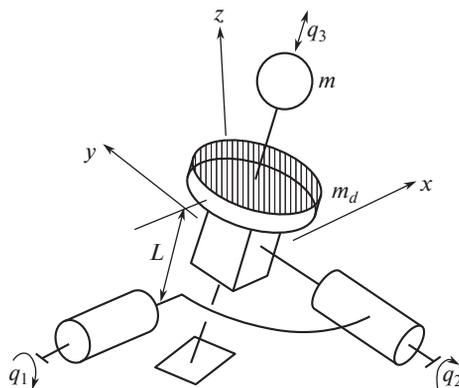


Рис. 3. Динамическая модель механизма.

Для остальных координат уравнения аналогичны. Здесь  $\varepsilon_{1-6x}$  — это проекция на ось  $x$  суммы всех векторных произведений угловых скоростей во всех вращательных кинематических парах. В частности для рассматриваемого примера  $\varepsilon_{1-6x} = -10.67$  рад/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{1-6y} = -10.13$  рад/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{1-6z} = 10.13$  рад/с<sup>2</sup>.

В соответствии с этим  $\frac{d^2 q_4}{dt^2} = 9.132$  рад/с<sup>2</sup>,  $\frac{d^2 q_5}{dt^2} = -200.87$  рад/с<sup>2</sup>,  $\frac{d^2 q_6}{dt^2} = 400.33$  рад/с<sup>2</sup>.

Таким образом, решены задачи о положениях, о скоростях и ускорениях. Эти результаты можно непосредственно использовать при управлении разрабатываемым механизмом, если движения относительно “медленные”. В тех случаях, когда имеют место существенные динамические нагрузки, нужно проводить динамический анализ, при котором будут применяться разработанные методики определения скоростей и ускорений.

Для динамического анализа механизмов с постоянной точкой ввода инструмента в рабочую зону представим модель (рис. 3), соответствующую основным динамическим свойствам этих устройств. В данном случае рассматриваем устройство с тремя степенями свободы.

Три первые степени свободы связаны с наиболее массивным звеньем механизма — коническими передачами, которые меняют конфигурацию механизма, а также двигателем, поворачивающим плоскость расположения начального, промежуточного и выходного звеньев.

Имеет место инструмент, перемещающийся вдоль оси выходного звена, при этом основная масса инструмента сосредоточена в верхней части механизма. Двигатели и звенья механизма составляют примерно 90% всей его массы.

Масса  $m$  (рис. 3) двигается подобно движению инструмента, т.е. при приближении центра координат инструмента к основанию масса  $m$  удаляется от указанного звена. Масса  $m_d$  определяется массой начального, промежуточного и конечного звеньев, а также элементов конических передач. Для определения массы  $m_d$  вычислим кинетическую энергию начального 9, выходного 2 и промежуточного 11 звеньев (рис. 1), которые сопряжены с соответствующими коническими передачами.

Энергия начального и конечного звеньев определяется вращением вокруг двух перпендикулярных осей, определяемых первой и второй обобщенными координатами. Для расчета кинетической энергии промежуточного звена будем считать, что вся масса сосредоточена на конце выходного звена 2 на расстоянии  $L$  от центра вращения.

Можно показать, что приведенная масса  $m_d$ , начального  $m_H$ , промежуточного  $m_\Pi$ , и выходного  $m_B$  звеньев равна

$$m_d = m_\Pi + \frac{m_H}{3} + \frac{m_B}{3}.$$

Составим уравнения динамики для эквивалентного механизма, соответствующие принципу Даламбера–Лагранжа. Согласно этому подходу, сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m_d \frac{d^2 x_d}{dt^2} \frac{\partial x_d}{\partial x} + m_d \frac{d^2 y_d}{dt^2} \frac{\partial y_d}{\partial x} + m_d \frac{d^2 z_d}{dt^2} \frac{\partial z_d}{\partial x} - Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} - Q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} - Q_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} = 0.$$

Здесь  $Q_1, Q_2, Q_3$  – обобщенные силы,  $x, x_d, \dots, z, z_d$  – координаты соответствующих элементов системы, масса которых  $m$  и  $m_d, q_1, q_2, q_3$  – обобщенные координаты. Для остальных координат уравнения аналогичны.

Учтем кинематические соотношения, обусловленные особенностями механизма:

$$x_d = x \frac{L}{q_3} \quad y_d = y \frac{L}{q_3} \quad z_d = z \frac{L}{q_3}.$$

Исходя из приведенных выражений, можно найти кинематические параметры движения механизма

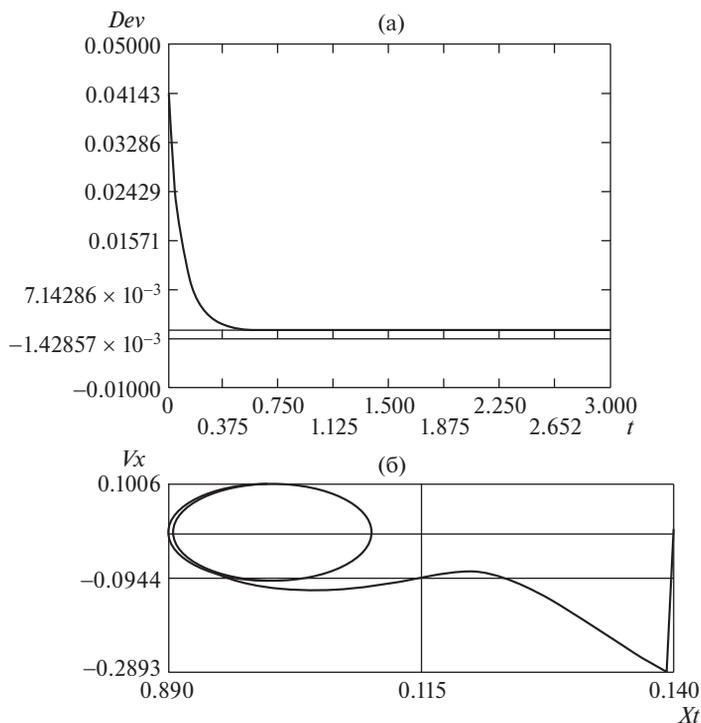
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt}, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{d^2 q_3}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_2}{dt} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_3} \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_3}{dt} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_3} \frac{dq_2}{dt} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} \left( \frac{dq_2}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_3^2} \left( \frac{dq_3}{dt} \right)^2, \\ \frac{dx_d}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{L}{q_3} - x \frac{L}{q_3^2} \frac{dq_3}{dt}, \quad \frac{d^2 x_d}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{L}{q_3} - 2 \frac{dx}{dt} \frac{L}{q_3^2} \frac{dq_3}{dt} + x \frac{2L}{q_3^3} \frac{d^2 q_3}{dt^2}. \end{aligned}$$

Эти соотношения выражают скорости и ускорения звеньев рассматриваемого механизма, входящие в уравнения динамики.

Рассмотрим пример движения данного механизма при наличии требуемого закона изменения координат:  $x_t = 0.1 + 0.01 \sin(\omega t)$ ,  $y_t = 0.1 + 0.01 \cos(\omega t)$ ,  $z_t = 0.1 + 0.01 \sin(\omega t)$ ,  $\omega = 10$  рад/сек. При этом искомые скорости равны  $v_{xt} = 0.01 \omega \cos(\omega t)$ ,  $v_{yt} = -0.01 \omega \sin(\omega t)$ ,  $v_{zt} = 0.01 \omega \cos(\omega t)$ , а ускорения –  $a_{xt} = -0.01 \omega^2 \sin(\omega t)$ ,  $a_{yt} = -0.01 \omega^2 \cos(\omega t)$ ,  $a_{zt} = -0.01 \omega^2 \sin(\omega t)$ . Параметры механизма следующие:  $m_d = 0.2$  кг,  $m = 0.4$  кг.

При определении обобщенных сил принимаем, что реальное ускорение должно быть равно сумме ошибки по положению выходного звена, умноженной на коэффициент  $K_n$ , и ошибки по скорости, умноженной на коэффициент  $K_c$ :  $a_x = K_n(x - x_t) + K_c(v_{xt} - v_x)$ ,  $a_y = K_n(y - y_t) + K_c(v_{yt} - v_y)$ ,  $a_z = K_n(z - z_t) + K_c(v_{zt} - v_z)$ . Здесь  $x, y, z$  – текущие значения координат массы  $m$ ,  $v_x, v_y, v_z$  – текущие значения скоростей,  $a_x, a_y, a_z$  – текущие значения ускорений. В данном случае коэффициенты приняты равными  $K_n = 720$ ;  $K_c = 12$ . Начальные условия таковы, что скорости равны нулю, а значения координат  $x_0 = 0.11$  м;  $y_0 = 0.12$  м;  $z_0 = 0.15$  м.

Из приведенных выше уравнений динамики вначале на каждом шаге находим обобщенные силы. Далее определяем реальные ускорения и проводим интегрирова-



**Рис. 4.** Результаты динамического анализа механизма: (а) – отклонение от требуемого закона движения по оси  $x$ ; (б) – фазовая траектория по оси  $x$ .

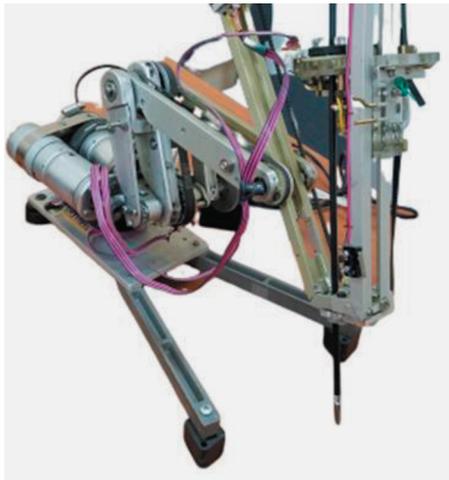
ние. Результаты работы программы (рис. 4) показывают, что система достаточно эффективно обрабатывает заданный закон движения. На рисунках все обозначения соответствуют примененным выше, обозначение  $Dev$  означает отклонение от требуемого закона движения по координате  $x$ .

Таким образом, проведен динамический анализ механизма, обеспечивающего постоянство точки ввода выходного звена, с учетом минимизации отклонений от требуемого закона движения выходного звена. Анализ показал, что использованный подход дает возможность управлять механизмом с минимальной динамической ошибкой.

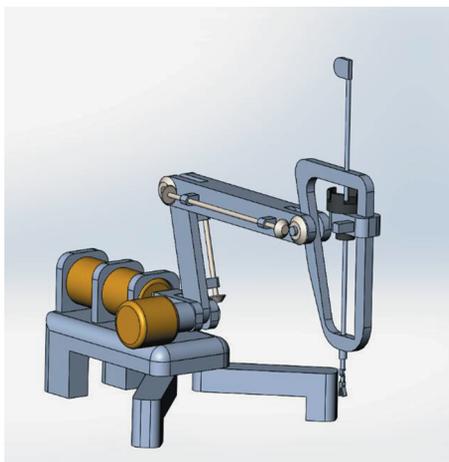
Один из вариантов рассматриваемых устройств, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, содержащий две ременные передачи, представлен на рис. 5.

В результате экспериментального исследования данного механизма, а также разработанной 3D-модели (рис. 6) установлено, что параметры рассматриваемых механизмов соответствуют разработанным ранее устройствам с круговой направляющей, которые при сохранении функциональных возможностей робота Da Vinci примерно на порядок уменьшают габариты и вес устройства, однако здесь не требуется круговая направляющая, что упрощает конструкцию.

Рабочая зона механизма имеет вид пространственной фигуры (рис. 7), ограниченной конической поверхностью (угол при основании конуса равен  $30^\circ$ ), а так же двумя секторами сфер (радиус меньшей сферы равен 0.05 м, радиус большей сферы равен 0.12 м). Такая рабочая зона вполне соответствует задачам, которые должен выполнять



**Рис. 5.** Общий вид макета механизма, обеспечивающего постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.



**Рис. 6.** 3D-модель механизма с коническими передачами.



**Рис. 7.** Вид рабочей зоны механизма.

механизм, а именно проведение хирургических операций и исследование свойств плазмы.

**Выводы.** В настоящей статье представлены механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. Параметры рассматриваемых механизмов соответствуют разработанным ранее устройствам с круговой направляющей, которые при сохранении функциональных возможностей робота Da Vinci примерно на порядок уменьшают габариты и вес устройства. При этом в предлагаемых механизмах не требуется круговая направляющая, что упрощает конструкцию.

Структурный анализ показал, что число степеней свободы равно тому значению, которое требуется для той или иной технической задачи. Решение задач о положениях, скоростях и ускорениях, а также динамический анализ показали, что предложенный подход дает возможность управлять механизмом с минимальной динамической ошибкой. Рабочая зона имеет вид пространственной фигуры, ограниченной конической поверхностью, размеры которой вполне соответствуют задачам, выполняемым данными механизмами.

Таким образом, предложены механизмы, которые при относительно более простой, по сравнению с имеющимися конструкциями, могут эффективно решать задачи по проведению хирургических операций и исследованию свойств плазмы.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратегия научно-технологического развития Российской Федерации, утверждена Указом Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. № 642.
2. *Ганиев Р.Ф.* Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Часть 1 // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 3.
3. *Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С.* Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботохирургия // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16.
4. *Филиппов Г.С., Глазунов В.А.* Перспективы применения механизмов параллельной структуры в аддитивных технологиях изготовления центрального тела сопла турбореактивного двигателя, высокоточных хирургических манипуляций, зондовой диагностике плазменных потоков // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2018. № 3. С. 121.
5. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам. 2-е изд. М.: Машиностроение. 1987. 560 с.
6. *Ilewicz G., Wojnarowski J.* Kinematics of Constant Point Mechanism of Cardiosurgical Telemanipulator // 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 19–25 June, 2011.
7. *Чернецов Р., Велиев Е., Глазунов В., Скворцов С., Ковалева Н.* Определение числа степеней свободы механизмов с постоянной точкой ввода инструмента // Станкоинструмент. 2019. № 4 (017). С. 80.
8. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С., Терехова А.Н.* Разработка и решение задачи о положениях механизма параллельно-последовательной структуры для хирургических операций как альтернативы роботу Da Vinci // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 4. С. 3.
9. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С.* Параллельные и последовательные структуры манипуляторов в роботохирургии // ДАН. 2019. № 2.
10. *Fomin A., Glazunov V., Terekhova A.* Development of a Novel Rotary Hexapod with a Single Drive // Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of ROMANSY XXII CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Springer. ISBN 978-3-319-78962-0. 2018. P. 141.

11. *Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K.* On the Maximization of Joint Velocities and Generalized Reactions in the Workspace and Singularity Analysis of Parallel Mechanisms // *Robotica*. Cambridge University Press. 2019. V. 37. P. 675.
12. Minimally invasive surgery market – Global industry analysis, size, share, growth, trends & forecast, 2013-2019 // *Transparency Market Research*. Albany. NY. USA. Tech. Rep. 2014.
13. *Велиев Е.И., Голубцова Е.Н., Томилов А.А.* Возможности малоинвазивной коррекции недержания мочи после радикального лечения рака предстательной железы // *Онкоурология*. 2013. № 4. С. 37.
14. *Sooriakumaran P., Srivastova A., Shariat S.F.* A Multinational, Multiinstitutional Study Comparing Positive Surgical Margin Rates among 22393 Open, Laparoscopic, and Robot – assisted Radical Prostatectomy Patients // *Eur Uro*. 2014. V. 66. N. 3. P. 450.
15. *Краснопольский В.И., Попов А.А., Мананникова Т.Н., Федоров А.А., Слободянюк В.А., Коваль А.А., Мироненко К.В.* Робот-ассистированная хирургия в онкогинекологии // *Онкогинекология*. 2014. № 3. С. 23.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.865.8

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ РОБОТА  
С МЕХАНИЗМАМИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО МАНИПУЛИРОВАНИЯ**© 2020 г. Е. В. Гапоненко<sup>1,\*</sup>, Л. А. Рыбак<sup>1</sup>, Д. И. Мальшев<sup>1</sup><sup>1</sup> Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Белгород, Россия

\*e-mail: gaponenkobel@gmail.com

Поступила в редакцию 21.02.2019 г.

После доработки 08.07.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

В статье рассмотрено применение оптимизационных алгоритмов для решения задачи определения рабочей области робота с механизмами относительного манипулирования на базе плоского 3-RPR-механизма и механизма-трипода. Рассмотрен метод аппроксимации множества решений системы нелинейных неравенств, описывающих ограничения на геометрические параметры робота. Синтезированы алгоритмы построения рабочих областей отдельных механизмов. Проанализировано влияние ориентации выходного звена на размер и форму рабочей области каждого механизма. Получена рабочая область робота с учетом ограничений на геометрические параметры обрабатываемого изделия, находящегося в подвижной системе координат, размещенной в центре плоского 3-RPR-механизма, а также с учетом конструктивных ограничений, пересечений звеньев и особых положений.

*Ключевые слова:* аппроксимационное множество, робот с механизмами относительного манипулирования, рабочая область, неравномерные покрытия, оптимизация, особые положения

DOI: 10.31857/S0235711920060036

Роботы параллельной структуры находят все большее применение в промышленности, в том числе машиностроении для выполнения различных технологических операций. Такие роботы обладают высокой производительностью, имеют повышенную жесткость конструкции, точность выполняемых операций. Вопросы структурного синтеза, методы исследования рабочего пространства, оптимизации траектории движения таких механизмов подробно рассмотрены в [1–4]. Важной характеристикой роботов параллельной структуры является их рабочая область, в пределах которой должен находиться рабочий инструмент при выполнении технологических операций. Нахождение рабочей области таких роботов гораздо сложнее, чем для роботов с последовательной архитектурой, что связано с особенностями структуры, кинематики и динамики. Для определения рабочей области известно применение различных численных методов интервального анализа, сеточной аппроксимации [5]. Применение традиционных подходов для решения поставленной задачи связано со значительными вычислительными трудностями, т.к. задача имеет большую размерность, что практически нереализуемо с использованием вычислительной техники. В работе [6] рассмотрен метод неравномерных покрытий для аппроксимации множества решений системы нелинейных неравенств, а в [7–9] этот метод применялся для определения рабочей области некоторых типов планарных роботов. Покрытием множества  $P$  называем

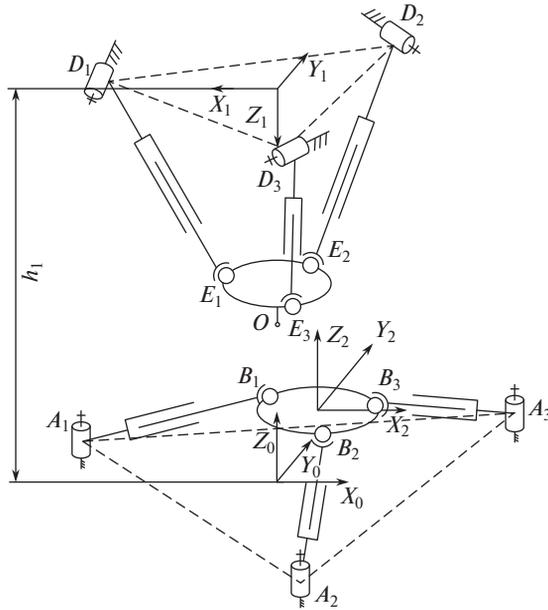


Рис. 1. Схема робота с механизмами относительного манипулирования.

совокупность  $n$ -мерных параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, k}$ , таких, что  $P \subseteq \bigcup_{i \in \overline{1, k}} P_i$  и для каждого  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, k}$ , выполняется хотя бы одно из трех условий

$$1. \max_{i \in \overline{1, k}} \max_{x \in P_i} g_j(x) < 0, \tag{1}$$

$$2. \max_{i \in \overline{1, k}} \min_{x \in P_i} g_j(x) < 0, \tag{2}$$

3. неравенства (1) и (2) не выполняются и  $d(P_i) \leq \delta$ , где  $\delta$  – заданная положительная величина, определяющая точность аппроксимации.

На основе метода неравномерных покрытий строится внешнее и внутреннее аппроксимационные множества. Внутреннее аппроксимационное множество включается во множество решений системы неравенств, а внешнее включает его. Оба множества представляют собой объединения  $n$ -мерных параллелепипедов. Этот метод позволяет аппроксимировать множество решений систем равенств или неравенств, описывающих рабочую зону робота. Рассмотрим структуру робота с механизмами относительного манипулирования (ОМ), в котором в отличие от [10], вращательные приводные пары верхнего и нижнего модулей заменены на поступательные (рис. 1). Верхний модуль выполнен на основе трипода с приводными поступательными кинематическими парами и вращательными шарнирами  $D_1, D_2, D_3$  и сферическими шарнирами  $E_1, E_2, E_3$ . Центр подвижной платформы модуля-трипода может совершать поступательное перемещение по оси  $Z$  и вращательное вокруг осей  $X$  и  $Y$ , а также дополнительные смещения выходного звена при его поворотах относительно горизонтальных осей, налагаемых кинематическими цепями модуля-трипода. Нижний модуль выполнен на основе плоского 3-RPR-механизма с поступательными приводными кинематическими парами и вращательными шарнирами  $A_1, A_2, A_3$  совершает поступательное перемещение по осям  $X$  и  $Y$ , вращательное вокруг оси  $Z$ . Таким обра-

зом, робот с механизмами ОМ имеет шесть степеней свободы. Его можно использовать для выполнения операций обработки деталей, если рабочий инструмент закреплен на подвижной платформе модуля-трипода, а обрабатываемая деталь на подвижной платформе 3-RPR-механизма. Оси  $Z_0$  и  $Z_1$ , лежат на одной прямой, перпендикулярной неподвижному основанию модуля-трипода  $D_1D_2D_3$  и платформе плоского 3-RPR-механизма и проходящей через центр описанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$ . В начальном положении, то есть при совпадении центра описанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$  с центром подвижной платформы плоского 3-RPR-механизма подвижная система координат  $X_2Y_2Z_2$  совпадает с  $X_0Y_0Z_0$ .

Для построения рабочей области робота ОМ в подвижной системе координат, связанной с нижним модулем, используем аппроксимационные множества отдельных модулей робота. Для нахождения максимума и минимума функций в параллелепипедах можно применить методы интервального анализа. Однако в этом случае, в связи с множественным вхождением переменных могут возникнуть ошибки, влияющие на результат. Поэтому поиск минимума и максимума функции находим с помощью сеточной аппроксимации. Метод аппроксимации разработан и апробирован ранее на моделях роботов с двумя и тремя степенями свободы в рамках проекта РНФ № 16-19-00148.

Определим рабочие области отдельных модулей. В статье [10] рассмотрен численный метод построения рабочей области плоских параллельных манипуляторов различной структуры, основанный на уравнениях кинематической сингулярности и управлении углами давления в шарнирах манипулятора вдоль заданной траектории платформы. В нашем случае механизм более сложный, состоящий из двух модулей, поэтому мы применяем метод, основанный на концепции неравномерных покрытий.

Рассмотрим схему верхнего модуля на базе трипода (рис. 2), который включает три штанги переменной длины  $l_1, l_2, l_3$ , которые соединены вращательными шарнирами  $D_1, D_2, D_3$  с основанием и сферическими шарнирами  $E_1, E_2, E_3$  с рабочей платформой. Основание и рабочая платформа представляют собой равносторонние треугольники. При изменении длин штанг рабочая платформа совершает перемещение по оси  $Z_1$  на расстояние  $z_1$ , и повороты вокруг оси  $X_1$  на угол  $\psi$  и вокруг  $Y_1$  угол  $\theta$ . Кроме этого, имеются дополнительные степени свободы – смещение по осям  $X_1$  на расстояние  $x_1$  и по  $Y_1$  на расстояние  $y_1$  и поворот относительно  $Z_1$  на угол  $\alpha$ , которые определяются по формулам [12]

$$\alpha = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi + \cos \theta} \right),$$

$$x_1 = \frac{r}{2} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \psi \sin \theta \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha),$$

$$y_1 = -r \cos \psi \sin \alpha.$$

Входными координатами являются длины приводных звеньев  $l_1, l_2, l_3$ , выходными – координаты точки  $O'$  рабочего органа  $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$ . Точка  $O'$  располагается на расстоянии  $h$  от центра подвижной платформы. Для определения рабочей области необходимо предварительно определить множество допустимых значений линейных и угловых координат центра  $O$  подвижной платформы, а затем для данных значений определить множество координат  $O'$  рабочего органа. Координаты  $O'$  в подвижной системе координат  $X'_1Y'_1Z'_1$

$$\mathbf{O}'_1 = [0 \ 0 \ h \ 1]^T.$$

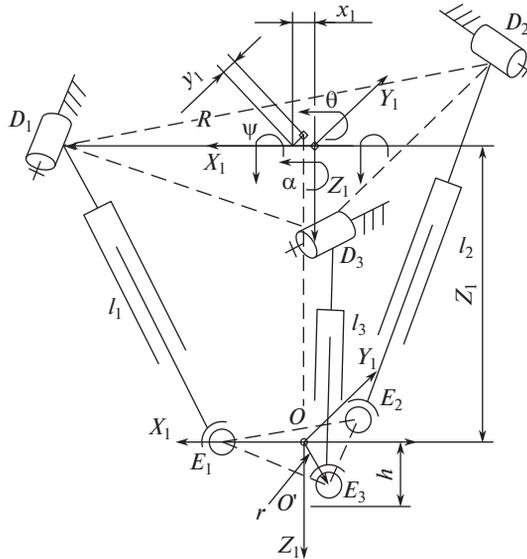


Рис. 2. Схема модуля-трипода.

Вычислим координаты точки  $O'$  в неподвижной системе координат  $X_1Y_1Z_1$

$$\mathbf{O}'_1 = \mathbf{M}_{1'_{-1}} \mathbf{O}'_1,$$

где  $\mathbf{M}_{1'_{-1}}$  – матрица перехода от подвижной системы координат  $X'_1Y'_1Z'_1$  к неподвижной системе  $X_1Y_1Z_1$ , которая включает матрицы смещений вдоль осей  $X_1, Y_1, Z_1$  и поворотов вокруг осей  $X_1, Y_1, Z_1$

$$\mathbf{M}_{1'_{-1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha + \sin \psi \sin \theta \sin \alpha & -\cos \theta \sin \alpha + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \cos \psi & x_1 \\ \cos \psi \sin \alpha & \cos \psi \cos \alpha & -\sin \psi & y_1 \\ -\sin \theta \cos \alpha + \sin \psi \cos \theta \sin \alpha & \sin \theta \sin \alpha + \sin \psi \cos \theta \cos \alpha & \cos \theta \cos \psi & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Обозначим в (3)

$$M_{11} = \cos \theta \cos \alpha + \sin \psi \sin \theta \sin \alpha; \quad M_{12} = -\cos \theta \sin \alpha + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha;$$

$$M_{13} = \sin \theta \cos \psi; \quad M_{21} = \cos \psi \sin \alpha; \quad M_{22} = \cos \psi \cos \alpha;$$

$$M_{23} = -\sin \psi; \quad M_{31} = -\sin \theta \cos \alpha + \sin \psi \cos \theta \sin \alpha;$$

$$M_{32} = \sin \theta \sin \alpha + \sin \psi \cos \theta \cos \alpha; \quad M_{33} = \cos \theta \cos \psi.$$

После преобразования получим

$$\mathbf{O}'_1 = \begin{bmatrix} x_1 + M_{31}h \\ y_1 + M_{32}h \\ z_1 + M_{33}h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \sin \theta \cos \psi h \\ y_1 - \sin \psi h \\ z_1 + \cos \theta \cos \psi h \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Введем ограничения на геометрические параметры механизма

$$l_{\min} \leq l_i \leq l_{\max}, \quad (5)$$

где  $l_{\min}$ ,  $l_{\max}$  определяются конструктивными параметрами механизма;  $l_i$  – длина  $i$ -й штанги, которая определяется как

$$l_i = \sqrt{(x_{Ei} - x_{Di})^2 + (y_{Ei} - y_{Di})^2 + (z_{Ei} - z_{Di})^2},$$

где  $x_{Ei}$ ,  $y_{Ei}$ ,  $z_{Ei}$  – координаты центров шарниров, точка  $E_i$ ;  $x_{Di}$ ,  $y_{Di}$ ,  $z_{Di}$  – координаты центров шарниров, точка  $D_i$  в неподвижной системе координат.

Определим координаты шарниров  $E_i$  в подвижной системе координат  $X_1'Y_1'Z_1'$   $\mathbf{E}'_1 = [r \ 0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{E}'_2 = [-0.5r \ 0.5\sqrt{3}r \ 0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{E}'_3 = [-0.5r \ -0.5\sqrt{3}r \ 0 \ 1]^T$ .

Выразим координаты шарниров  $E_i$  в неподвижной системе координат  $X_1Y_1Z_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{M}_{1' \rightarrow 1} \mathbf{E}'_1 = \begin{bmatrix} x_1 + M_{11}r \\ y_1 + M_{21}r \\ z_1 + M_{31}r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + M_{11}r \\ 0 \\ z_1 + M_{31}r \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{M}_{1' \rightarrow 1} \mathbf{E}'_2 = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5r(M_{11} - \sqrt{3}M_{12}) \\ y_1 - 0.5r(M_{21} - \sqrt{3}M_{22}) \\ z_1 - 0.5r(M_{31} - \sqrt{3}M_{32}) \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{M}_{1' \rightarrow 1} \mathbf{E}'_3 = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5r(M_{11} + \sqrt{3}M_{12}) \\ y_1 - 0.5r(M_{21} + \sqrt{3}M_{22}) \\ z_1 - 0.5r(M_{31} + \sqrt{3}M_{32}) \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $y_1 = -M_{21}r = -r \cos \psi \sin \alpha$ .

Определим координаты шарниров  $D_i$  в неподвижной системе координат  $X_1Y_1Z_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= [R \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{D}_2 &= [-0.5R \ 0.5\sqrt{3}R \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{D}_3 &= [-0.5R \ -0.5\sqrt{3}R \ 0 \ 1]^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (6) и (7) в (5), получим

$$l_1 = \sqrt{(x_1 + M_{11}r - R)^2 + (z_1 + M_{31}r)^2}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \left( (x_1 - 0.5r(M_{11} - \sqrt{3}M_{12}) + 0.5R)^2 + \left( y_1 - 0.5r(M_{21} - \sqrt{3}M_{22}) - \frac{\sqrt{3}}{2}R \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (z_1 - 0.5r(M_{31} - \sqrt{3}M_{32}))^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$l_3 = \left( (x_1 - 0.5r(M_{11} + \sqrt{3}M_{12}) + 0.5R)^2 + \left( y_1 - 0.5r(M_{21} + \sqrt{3}M_{22}) - \frac{\sqrt{3}}{2}R \right)^2 + (z_1 - 0.5r(M_{31} + \sqrt{3}M_{32}))^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

С учетом формул (4), (5), (8)–(10) синтезирован алгоритм аппроксимации рабочей области модуля-трипода. Алгоритм работает с четырьмя списками шестимерных параллелепипедов  $\mathbb{P}_0$ ,  $\mathbb{P}_{0,I}$ ,  $\mathbb{P}_1$  и  $\mathbb{P}_{1,I}$ , при этом список  $\mathbb{P}_0$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество положений  $O$ , список  $\mathbb{P}_{0,I}$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество координат  $O$ , удовлетворяющих условию (5), список  $\mathbb{P}_1$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество положений  $O'$ , список  $\mathbb{P}_{0,I}$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество координат  $O'$ , удовлетворяющих условию (5). Алгоритм работает следующим образом:

1. Зададим геометрические параметры робота и точность аппроксимации  $\delta$ .
2. На первом шаге алгоритма списки внутренней аппроксимации  $\mathbb{P}_{0,I}$  и  $\mathbb{P}_{1,I}$  пусты, список  $\mathbb{P}_0$  состоит только из одного параллелепипеда  $Q$ , включающего диапазон углов  $\psi$  и  $\theta$  поворота платформы  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и высоты платформы  $[l_{\min}, l_{\max}]$ , а список  $\mathbb{P}_1$  состоит только из одного параллелепипеда  $Q$ , гарантировано включающего рабочую область по осям  $X_1$ ,  $Y_1$  и  $Z_1$ .
3. Извлечем из списка  $\mathbb{P}_0$  параллелепипед  $Q_j$ ,  $j \in 1, n$  и разделим равномерной сеткой по каждой из осей углов поворота  $\theta$  и  $\psi$  и перемещения по оси  $Z_1$  с шагом  $\frac{\pi}{n}$  и  $\frac{(l_{\min}, l_{\max})}{n}$  соответственно.
4. Определим для всех точек  $A_k$ , лежащих внутри параллелепипеда с координатами  $z_k$ ,  $\psi_k$ ,  $\theta_k$ , значение длин штанг  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  по формулам (8)–(10) и координаты  $O'$  ( $x_{o'}$ ,  $y_{o'}$ ,  $z_{o'}$ ) по формуле (4).
5. Определим max и min значения координат  $O'$  –  $x_{o' \min}$ ,  $y_{o' \min}$ ,  $z_{o' \min}$ ,  $x_{o' \max}$ ,  $y_{o' \max}$ ,  $z_{o' \max}$ .
6. Если для всех точек  $A_k$  из  $Q_j$  выполняется условие (5),  $Q_j$  добавляется со значениями  $x_{o' \min}$ ,  $y_{o' \min}$ ,  $z_{o' \min}$ ,  $x_{o' \max}$ ,  $y_{o' \max}$ ,  $z_{o' \max}$  к списку  $\mathbb{P}_{0,I}$ .
7. Если для всех точек  $A_k$  из  $Q_j$  не выполняется условие (5),  $Q_j$  исключается.
8. В остальных случаях  $Q_j$  делится на два равных параллелепипеда вдоль ребра с наибольшей длиной. Данные параллелепипеды вносятся в конец списка  $\mathbb{P}_0$ , а если  $d(Q_j) < \delta$  по двум осям – со значениями  $x_{o' \min}$ ,  $y_{o' \min}$ ,  $z_{o' \min}$ ,  $x_{o' \max}$ ,  $y_{o' \max}$ ,  $z_{o' \max}$ .
9. Если  $d(Q_j) < \delta$  по всем осям, то переходим к шагу 11.
10. В остальных случаях происходит повторение шагов 3–9.
11. Извлекаем из списка  $\mathbb{P}_1$  параллелепипед  $Q_j$  и разделим равномерной сеткой на  $n$  частей по каждой из осей.
12. Если  $A_k \in \mathbb{P}_{0,I}$  для всех  $A_k \in Q_j$ , то  $Q_j$  добавляется к списку  $\mathbb{P}_{1,I}$ .
13. Если  $A_k \notin \mathbb{P}_{0,I}$  для всех  $A_k \in Q_j$ , то  $Q_j$  исключается из рассмотрения.
14. В остальных случаях  $Q_j$  делится на два равных параллелепипеда вдоль ребра с наибольшей длиной. Параллелепипеды вносятся в конец списка  $\mathbb{P}_1$ .

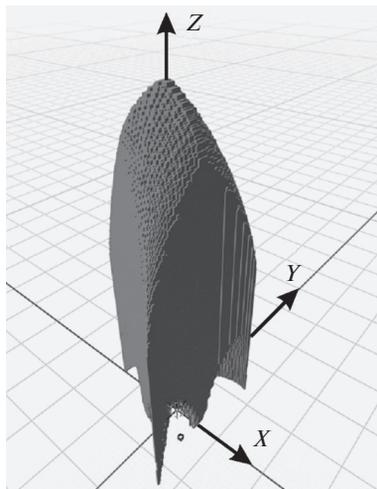


Рис. 3. Рабочая область модуля-трипода.

15. Если  $d(Q_j) < \delta$ , то алгоритм завершает свою работу.

16. В остальных случаях происходит повторение шагов 11–15.

Рабочая область представляет собой совокупность параллелепипедов из списка  $\mathbb{P}_{1,l}$  и параллелепипедов меньше заданной точности аппроксимации  $\delta$  по всем осям из списка  $\mathbb{P}_1$ .

Моделирование выполнено для  $l_{1,2,3} \in [300 \text{ мм}, 600 \text{ мм}]$ ,  $R = 400 \text{ мм}$ ,  $r = 100 \text{ мм}$ . Результаты моделирования представлены на рис. 3.

Рабочая область модуля-трипода (рис. 3) для заданных параметров ограничена размерами  $226 \times 260 \times 621 \text{ мм}$ . Время вычисления для точности аппроксимации  $\delta = 2 \text{ мм}$  и размерности сетки для вычислений функций  $64 \times 64 \times 64$  на ЭВМ составило 1 час 44 минуты.

Исследуем изменения рабочей области модуля-трипода при различных углах ориентации выходного звена  $\psi$  и  $\theta$ , т.к. из рис. 3 не ясна зависимость вида и формы рабочей области модуля-трипода от ориентации выходного звена.

Первоначально рассмотрим вид и форму рабочей области при углах ориентации выходного звена  $\psi = -60^\circ; -30^\circ; 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ$ , при этом угол  $\theta$  меняется в диапазоне  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Изменения рабочей области при различных углах ориентации  $\psi$  представлены на рис. 4.

Рабочая область модуля-трипода (рис. 4) достигает максимальных размеров при  $\psi = 0^\circ$  и составляет  $21 \times 621 \text{ мм}$ . Рабочие области являются симметричными при углах  $\psi = -60^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$  и при углах  $\psi = -30^\circ$ ,  $\psi = 30^\circ$ . При увеличении или уменьшении угла  $\psi$  габариты рабочей области уменьшаются от 212 до 102 мм по оси  $X$  и от 621 до 492 мм по оси  $Z$ , увеличивается ее кривизна и габаритный размер по оси  $Y$  от 0 до 87 мм.

Далее рассмотрим вид и форму рабочей области при различных углах ориентации выходного звена  $\theta = -60^\circ; -30^\circ; 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ$ , при этом угол  $\psi$  меняется в диапазоне  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Изменения рабочей области при различных углах ориентации  $\theta$  представлены на рис. 5.

Рабочая область модуля-трипода (рис. 5) достигает максимальных размеров по оси  $X$  при  $\theta = -60^\circ$  и составляет 160 мм, по оси  $Y$  при  $\theta = 60^\circ$  и составляет 236 мм, по оси  $Z$

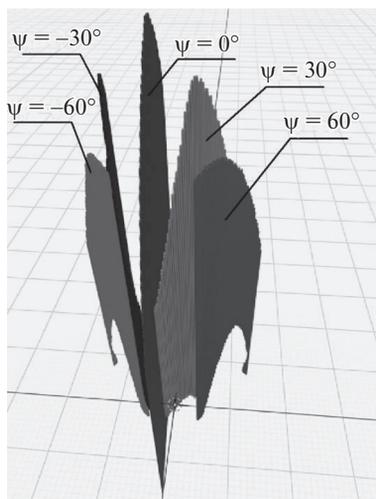


Рис. 4. Трехмерные рабочие области модуля-трипода при различных углах ориентации  $\psi$ .

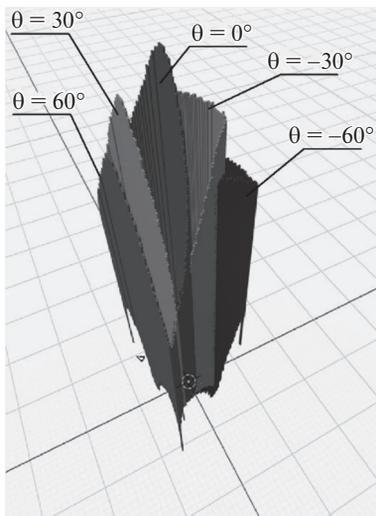


Рис. 5. Трехмерные рабочие области модуля-трипода при различных углах ориентации  $\theta$ .

при  $\theta = 30^\circ$  и составляет 524 мм. При изменении угла  $\theta$  от  $-60^\circ$  до  $60^\circ$  уменьшается кривизна рабочей области.

Рассмотрим аналогичным образом плоский 3-RPR-механизм, который состоит из трех цепей, содержащих три штанги переменной длины, шарнирно прикрепленные к неподвижному основанию в вершинах равностороннего треугольника  $A_1, A_2, A_3$  (рис. 6). Другие концы штанг шарнирно закреплены в вершинах равностороннего треугольника  $B_1, B_2, B_3$  на подвижной платформе. Входными координатами являются длины штанг ( $l_1, l_2, l_3$ ), выходными – положение геометрического центра подвижной платформы в декартовых координатах  $(x, y)$ , связанных с центром основания механизма, и

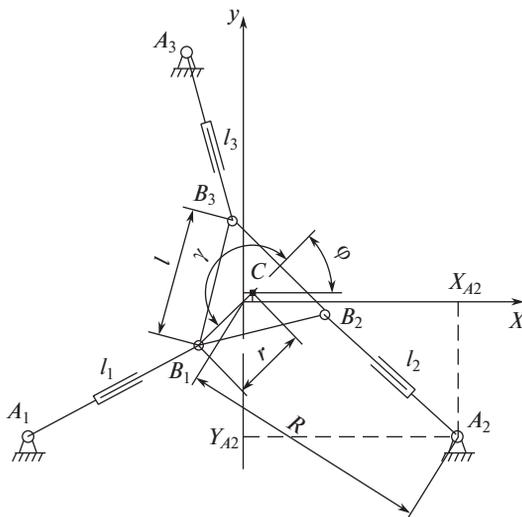


Рис. 6. Схема плоского 3-RPR-механизма.

угол ее поворота ( $\varphi$ ) относительно оси, перпендикулярной плоскости основания.  $R$  и  $r$  – радиусы окружностей, описывающих треугольники  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$  соответственно.

Определим рабочую область 3-RPR-механизма. Для этого введем ограничения на геометрические параметры механизма

$$l_{\min} \leq l_i \leq l_{\max}, \quad (11)$$

где  $l_{\min}$ ,  $l_{\max}$  определяются конструктивными параметрами механизма,  $l_i$  – текущая длина  $i$ -й штанги, которую определяем по формуле

$$l_i^2 = (x + r \cos(\gamma_i + \varphi) - x_{Ai})^2 + (y + r \sin(\gamma_i + \varphi) - y_{Ai})^2,$$

где  $\gamma_i$  – угол, определяющий геометрию выходного звена;  $x_{Ai}$ ,  $y_{Ai}$  – координаты точки  $A_i$  – шарнира крепления штанги к неподвижному основанию;  $l_i$  – длина  $i$ -й штанги.

Если точки  $A_i$  и  $B_i$  расположены в вершинах равносторонних треугольников, то изменение длин штанг определяется по формулам

$$l_1^2 = (x + 0.5r(\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi) + 0.5\sqrt{3}R)^2 + (y - 0.5r(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi) + 0.5R)^2, \quad (12)$$

$$l_2^2 = (x + 0.5r(\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) - 0.5\sqrt{3}R)^2 + (y + 0.5r(\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi) + 0.5R)^2, \quad (13)$$

$$l_3^2 = (x - r \sin \varphi)^2 + (y + r \cos \varphi - R)^2. \quad (14)$$

С учетом (11)–(14) синтезирован алгоритм аппроксимации рабочей области 3-RPR-механизма, которая представляет собой множество точек  $C$ . Алгоритм работает с двумя списками шестимерных параллелепипедов  $\mathbb{P}_2$  и  $\mathbb{P}_{2,l}$ , при этом список  $\mathbb{P}_2$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество положений точки  $C$ , список  $\mathbb{P}_{2,l}$  включает набор параллелепипедов, содержащих множество положений  $C$ , удовлетворяющих условию (11).

Результаты моделирования для  $R = 400$  мм,  $r = 50$  мм,  $l_{1,2,3} \in [200$  мм, 500 мм] представлены на рис. 7. Время вычисления для точности аппроксимации  $\delta = 2$  мм и раз-

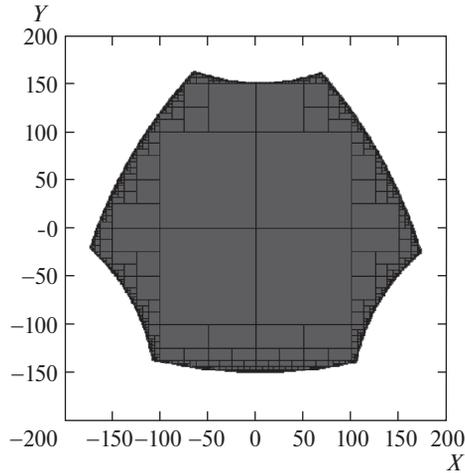


Рис. 7. Рабочая область плоского механизма.

мерности сетки для вычислений функций  $8 \times 8 \times 8$  на персональном компьютере составило 18 секунд. Рабочая область 3-RPR-механизма для заданных параметров ограничена размерами  $348 \times 313$  мм. Множество решений неравенств, описывающих рабочие области модуля-трипода (рис. 7) и 3-RPR-механизма, представляет собой аппроксимированный объем неправильной формы, состоящий из совокупности большого множества параллелепипедов.

Аналогичным образом исследована зависимость вида и формы рабочей области плоского механизма от ориентации выходного звена при фиксированных значениях угла поворота  $\varphi$  вокруг оси  $Z$ . На рис. 8 показана рабочая область плоского 3-RPR-механизма при различных углах ориентации  $\varphi$ . Для заданных параметров  $l_{1,2,3} \in [200 \text{ мм}, 500 \text{ мм}]$ ,  $R = 400 \text{ мм}$ ,  $r = 50 \text{ мм}$  (рис. 8) размер рабочей области плоского 3-RPR-механизма уменьшается с ростом угла  $\varphi$  от 350 мм до 280 мм по оси  $X$  и от 300 мм до 250 мм по оси  $Y$ . При  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 45^\circ$  в рабочей зоне манипулятора наблюдаются вырезы, их размер и расположение зависит от минимальной длины  $l_{\min}$ , чем она меньше, тем меньше и сами вырезы.

Для построения рабочей области робота с механизмами ОМ, накладывающей ограничения на геометрические параметры обрабатываемого изделия, необходимо найти множество положений  $O'$  в подвижной системе координат  $X_2Y_2Z_2$ , размещенной в центре плоского 3-RPR-механизма. При определении множества положений  $O'$  с использованием комбинаций точек из параллелепипедов, описывающих рабочие области модуля-трипода и 3-RPR-механизма, возникает необходимость вычисления координат  $O'$  значительное число раз. Например, в случае разделения параллелепипедов равномерной сеткой  $100 \times 100$  и количества параллелепипедов в каждом из списков  $n = 1000$ , количество вычислений и результатов, которые необходимо сохранить по каждой из координат составляет  $10^{18}$  раз. В связи с этим, необходимо применить “обратный” метод, т.е. проверить  $O'$  с координатами  $x_2, y_2, z_2$  на вхождение в рабочую область модуля-трипода. Для этого определим координаты  $O'$  в неподвижной системе  $X_1Y_1Z_1$  с использованием матриц преобразований, учитывающих переход от системы  $X_2Y_2Z_2$

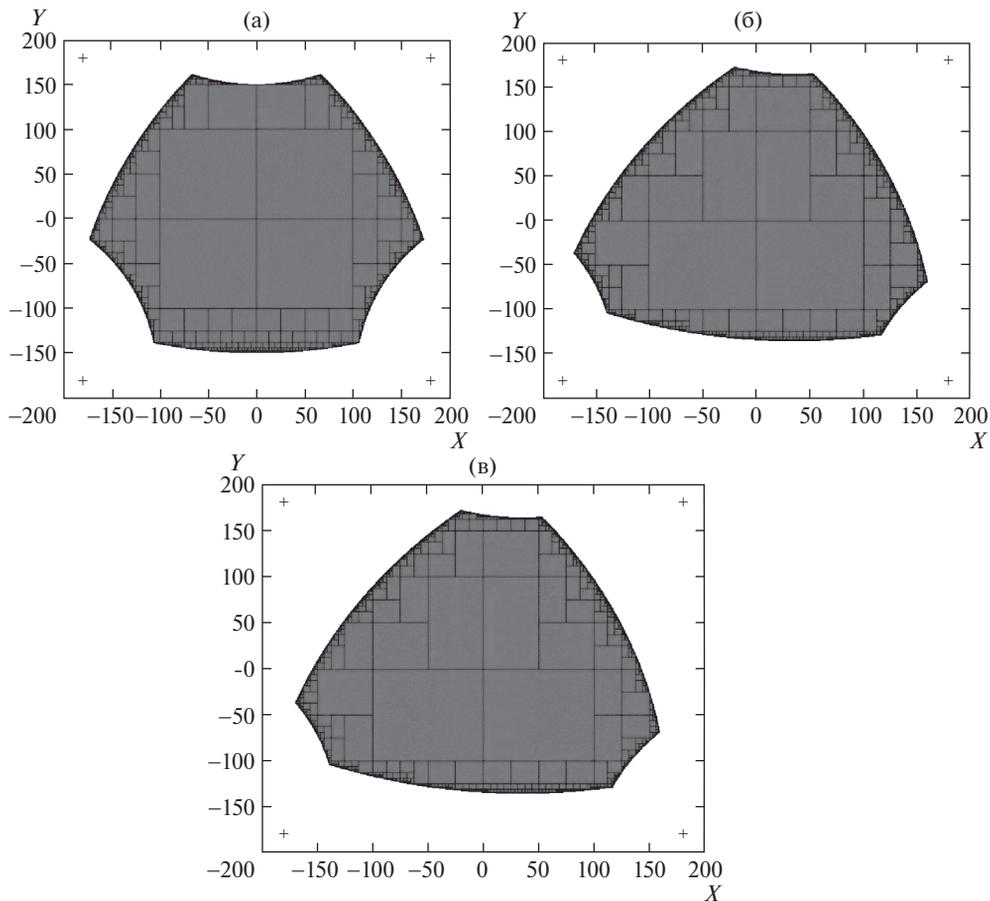


Рис. 8. Рабочая область плоского 3-RPR-механизма: (а) – при  $\varphi = 0^\circ$ ; (б) – при  $\varphi = 45^\circ$ ; (в) – при  $\varphi = 90^\circ$ .

к  $X_1Y_1Z_1$ , извлекаемых из параллелепипедов, описывающих рабочую область 3-RPR-механизма. Запишем соотношение, связывающее координаты  $O'$  в системах  $X_2Y_2Z_2$  и  $X_1Y_1Z_1$  (рис. 2)

$$O'_1 = M_{0\_1}M_{2\_0}O'_2,$$

где  $O'_2 = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ 1]^T$  – вектор координат  $O'$  рабочего органа в неподвижной системе координат  $X_1Y_1Z_1$ ;  $O'_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2 \ 1]^T$  – вектор координат  $O'$  в подвижной системе координат  $X_2Y_2Z_2$ , которые необходимо проверить на вхождение в рабочую область

модуля-трипода (рис. 3);  $M_{2\_0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & x_0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  – матрица, учитывающая пере-

ход от системы координат  $X_2Y_2Z_2$  к  $X_0Y_0Z_0$ , где  $\varphi$  – угол поворота системы координат

$X_0Y_0Z_0$  относительно оси  $Z_0$ ;  $x_0, y_0$  – линейные смещения по осям  $X_0$  и  $Y_0$  соответ-

ственно;  $\mathbf{M}_{0-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  – матрица, учитывающая переход от системы координат

$X_0Y_0Z_0$  к  $X_1Y_1Z_1$ , где  $h_1$  – расстояние от центра платформы 3-RPR-механизма до центра неподвижной платформы модуля-трипода.

Тогда

$$\mathbf{O}'_1 = \begin{bmatrix} y_2 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi - x_0 \\ x_2 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi + y_0 \\ h_1 - z_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм аппроксимации рабочей области робота с механизмами ОМ в подвижной системе координат разработан в рамках проекта РНФ № 17-79-10512, программное обеспечение – в рамках проекта РНФ № 16-19-00148. Алгоритм (рис. 9) работает с четырьмя списками трехмерных параллелепипедов: двумя полученными ранее списками  $\mathbb{P}_{1,l}$  и  $\mathbb{P}_{2,l}$ , которые не будут изменяться в процессе выполнения алгоритма, а также двумя изменяемыми списками  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{P}_l$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 10. Время вычисления для точности аппроксимации  $\delta = 6$  мм и размерности сетки для вычислений функций  $64 \times 64 \times 64$  на персональном компьютере составили 2 часа 45 минут.

Визуализация результатов моделирования рабочей области осуществляется посредством преобразования списка трехмерных параллелепипедов, описывающих рабочую область в универсальный формат 3D-моделей-STL-файл.

Реальные конструктивные параметры механизма вносят дополнительные ограничения на рабочую область. Кроме ограничений на диапазон длин звеньев рабочее пространство робота зависит также от ограничений на углы поворота шарниров, интерференции звеньев, особых положений модулей.

Исследуем влияние конструктивных ограничений реального образца робота с механизмами ОМ на вид и форму его рабочей области.

Пересечение между звеньями было рассмотрено для плоского робота в [13, 14], для кабельных роботов в [15] или для определения траекторий в глобальном планировщике движений в [16]. В [17] с учетом пересечения звеньев определена траектория движения параллельного робота с шестью степенями подвижности с приводными парами в виде цилиндров, который может двигаться внутри заданного рабочего пространства или по траектории. В работе [18] с помощью геометрического метода определено рабочее пространство параллельных манипуляторов, для которых ориентация постоянна. Masou и Wang [19] представили численный метод для оценки рабочего пространства платформы Стюарта с учетом ограничений длины звеньев, ограничений угла поворота соединений и интерференции звеньев. В [20] предложен численный метод для определения рабочей области, свободной от ограничений, плоских и пространственных параллельных манипуляторов с тремя степенями свободы.

Подход, изложенный в [18], использован для разработки алгоритма построения рабочей области робота с механизмами ОМ с учетом конструктивных ограничений.

Для модуля-трипода с заданными параметрами  $R = 400$  мм,  $r = 100$  мм,  $l_{1,2,3} \in [300 \text{ мм}, 600 \text{ мм}]$  кроме ограничений на длины штанг введем дополнительные конструктивные ограничения на углы поворота сферических шарниров  $\varepsilon_1, \beta_1 \geq 5^\circ$ , где  $\varepsilon_1$  – угол между звеньями  $D_1E_1$  и  $E_1E_2$ ,  $\beta_1$  – угол между звеньями  $D_1E_1$  и  $E_1E_3$  (рис. 11). Аналогично вве-

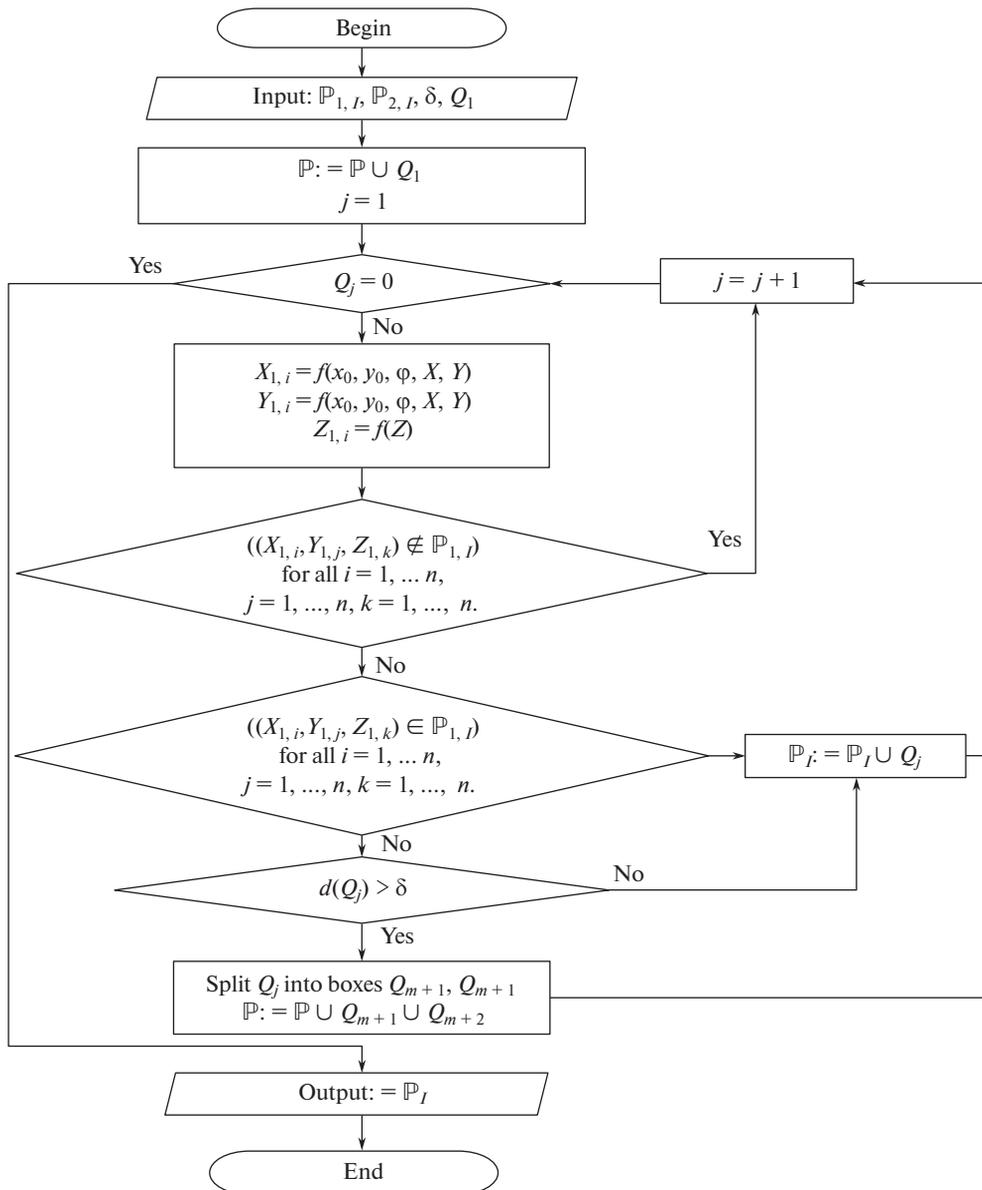


Рис. 9. Алгоритм аппроксимации рабочей области робота с механизмами относительного манипулирования.

дем ограничения для двух других штанг на углы  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ . В математической модели не учитываются реальные размеры шарниров, креплений, масса звеньев, зазоры в кинематических парах.

Для плоского 3-RPR-механизма с параметрами  $R = 400$  мм,  $r = 50$  мм,  $l_{1,2,3} \in [200$  мм, 500 мм] и диаметра штанги 100 мм введем дополнительные конструктивные ограничения  $\vartheta_1$ ;  $\delta_1 \geq 5^\circ$ ;  $25.4^\circ \leq \tau_1 \leq 154.6^\circ$ , где  $\vartheta_1$  – угол между звеньями  $A_1B_1$  и  $B_1B_2$ ;  $\delta_1$  – угол

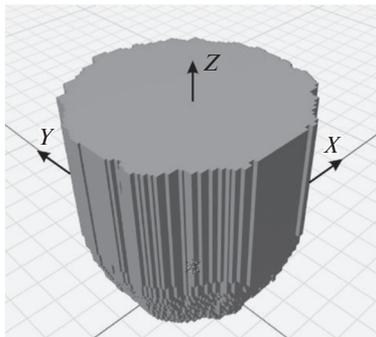


Рис. 10. Рабочая область робота с механизмами ОМ.

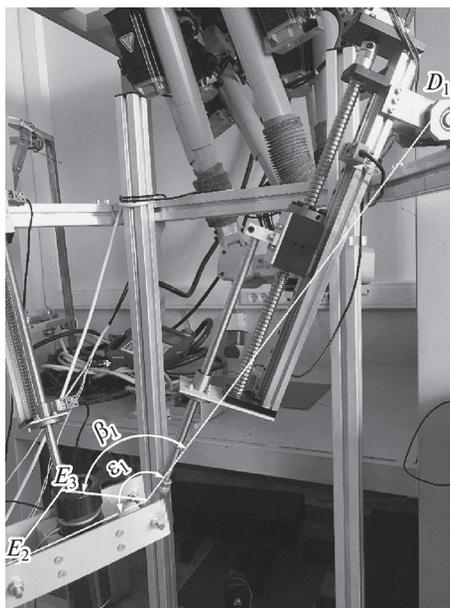


Рис. 11. Приводной кинематический узел модуля-трипода.

между звеньями  $A_1B_1$  и  $B_1B_3$ , ограничивающие поворот во вращательном шарнире  $B_1$ ;  $\tau_1$  – угол между штангой  $l_1$  и основанием каркаса робота, исключающий соприкосновения между штангами плоского механизма и вертикальными стойками каркаса робота (рис. 12). Аналогично введем ограничения для двух других штанг на углы  $\vartheta_2, \delta_2, \tau_2$  и  $\vartheta_3, \delta_3, \tau_3$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 13. На рис. 13а показана трехмерная рабочая область робота с механизмами ОМ без учета конструктивных ограничений (темная область – объем, который исключается из рабочей области в процессе моделирования с учетом ограничений), на рис. 13б – с учетом конструктивных ограничений.

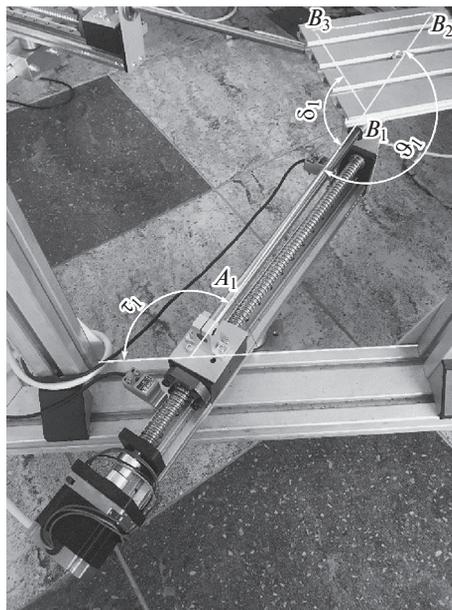


Рис. 12. Приводной кинематический узел плоского 3-RPR-механизма.

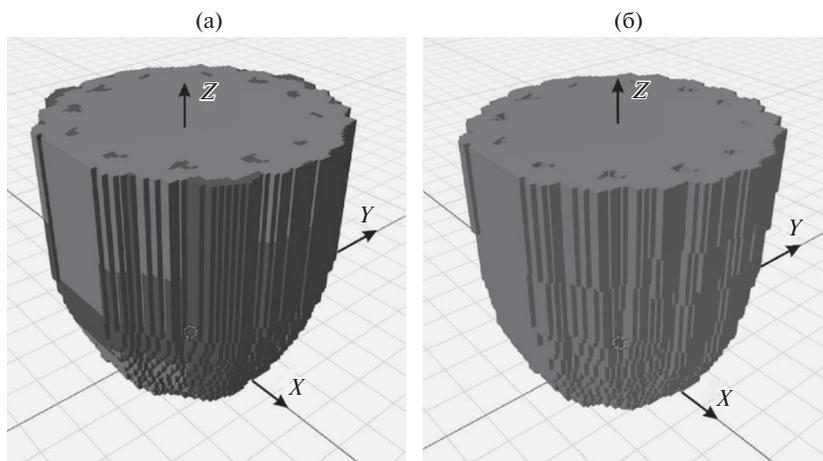


Рис. 13. Трехмерная рабочая область робота с механизмами ОМ: (а) – без учета конструктивных ограничений; (б) – с учетом конструктивных ограничений.

Объем рабочей области (рис. 13) при учете дополнительных конструктивных ограничений на углы поворота в шарнирах, а также возможных соприкосновений между звеньями плоского механизма и вертикальных стоек каркаса робота уменьшился с  $0.469 \text{ м}^3$  до  $0.364 \text{ м}^3$ .

Далее исследуем влияние особых положений на вид и форму рабочей области робота с механизмами ОМ.

Рассмотрим подходы для определения особых положений механизмов параллельной структуры. Первый метод на основе анализа кинематических винтов, разработанный проф. В.А. Глазуновым, который позволяет выполнить анализ плоских и пространственных параллельных механизмов с помощью кинематических винтов [21]. При этом связи, налагаемые кинематическими цепями, представлены в виде силовых винтов. Если приводы зафиксированы, то данная система силовых винтов образует пространственную структуру, способную уравновесить силовое воздействие. Если же имеет место особое положение, то система силовых винтов вырождается, и возникает мгновенная неуправляемая подвижность вдоль одного кинематического винта. Вторым методом, предложенный К. Гусленом [22], основан на анализе матрицы Якоби механизма, получаемой дифференцированием уравнений связи и описывающей переход от обобщенных скоростей в приводных кинематических парах к угловым или линейным скоростям выходного звена. С целью автоматизации расчетов при моделировании в статье использован второй метод.

Согласно классификации Гуслена [22] для трипода и плоского 3-RPR-механизма характерны сингулярности только второго типа, при которых равна нулю матрица Якоби.

Для модуля-трипода определитель матрицы Якоби имеет вид

$$\det(J_A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial \psi} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial \psi} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial \psi} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

где  $F_i$  соответствуют формулам длин штанг (8)–(10).

Ввиду громоздкости формул каждого из элементов определителя, приведем только один из них

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial z} = & z - r \left( \frac{Sb(Ca + Cb) - CbSbSa^2}{(Ca + Cb)\sqrt{\left(\frac{Sa^2Sb^2}{(Ca + Cb)^2} + 1\right)}} \right) \times \\ & \times \left( \left( r \left( \frac{Cb(Ca + Cb) + Sa^2Sb^2}{(Ca + Cb)\sqrt{\left(\frac{Sa^2Sb^2}{(Ca + Cb)^2} + 1\right)}} \right) - R + \frac{r \left( Cb - Ca \cos \left( 2 \tan^{-1} \left( \frac{SaSb}{(Ca + Cb)} \right) \right) \right)}{2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( z - r \left( \frac{Sb(Ca + Cb) - CbSbSa^2}{(Ca + Cb)\sqrt{\left(\frac{Sa^2Sb^2}{(Ca + Cb)^2} + 1\right)}} \right) \right)^2 \right)^{-2}, \end{aligned}$$

где  $Ca = \cos(\theta)$ ;  $Ca = \cos(\theta)$ ,  $Cb = \cos(\psi)$ ,  $Sa = \sin(\theta)$ ,  $Sb = \sin(\psi)$ .

Запишем условие возникновения особых положений

$$\det(J_A) = 0. \tag{15}$$

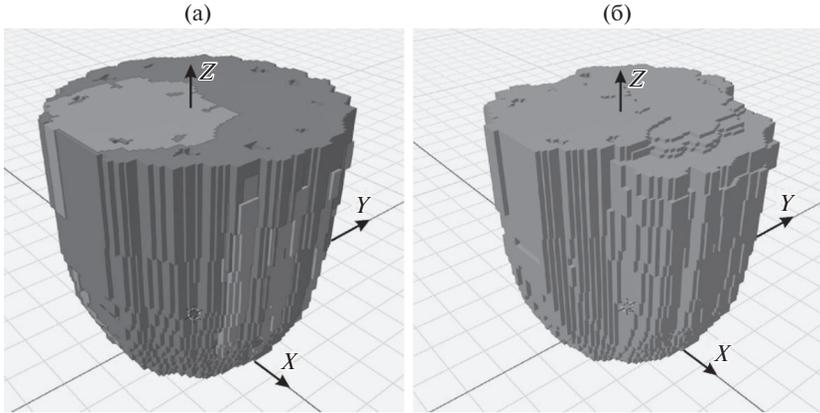


Рис. 14. Трехмерная рабочая область робота с механизмами ОМ: (а) – с учетом конструктивных ограничений; (б) – с учетом конструктивных ограничений и особых положений.

Для плоского 3-RPR-механизма определитель матрицы Якоби имеет вид

$$\det(J_A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

где  $F_i$  соответствуют формулам длин штанг (12)–(14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x} &= 2x - 2x_{Ai} + 2l_{3,i} \cos(\varphi + \gamma_i), \\ \frac{\partial F_i}{\partial y} &= 2y - 2y_{Ai} + 2l_{3,i} \sin(\varphi + \gamma_i), \\ \frac{\partial F_i}{\partial \varphi} &= 2l_{3,i} (y - y_{Ai} + l_{3,i} \sin(\varphi + \gamma_i)) \cos(\varphi + \gamma_i) - \\ &\quad - 2l_{3,i} (x - x_{Ai} + l_{3,i} \cos(\varphi + \gamma_i)) \sin(\varphi + \gamma_i). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (16) принимает вид

$$\det(J_A) = 12\sqrt{3}Rr \sin \varphi (R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2 - x^2 - y^2). \quad (17)$$

Особое положение возникает в том случае, если Якобиан (17) равен нулю, то есть  $\det(J_A) = 0$ , что возможно при выполнении условий

$$\sin \varphi = 0, \quad (18)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2. \quad (19)$$

Таким образом, чтобы платформа не проходила через особые положения согласно условию (18) углы ориентации платформы  $\varphi$  должны быть либо только положительными, либо только отрицательными. Т.к. механизм является симметричным относительно оси  $Y$ , формы и размеры рабочей области будут идентичными при положительных и отрицательных  $\varphi$ . Для моделирования были выбраны положительные углы  $\varphi$ .

С учетом условий (15), (18), (19) синтезирован алгоритм рабочей области робота с механизмами ОМ с учетом особых положений отдельных модулей.

На рис. 14а показана трехмерная рабочая область робота с механизмами ОМ только с учетом конструктивных ограничений (темная область – объем, который исключается из рабочей области в процессе моделирования особых положений), на рис. 14б – с учетом конструктивных ограничений и особых положений.

Объем рабочей области (рис. 14) при учете особых положений модулей уменьшился с  $0.364 \text{ м}^3$  до  $0.205 \text{ м}^3$  по сравнению с рабочей областью, представленной на рис. 14а.

**Заключение.** В статье рассмотрен робот с механизмами относительного манипулирования, который состоит из верхнего модуля-трипода с поступательными приводными кинематическими парами и нижнего модуля, выполненного на основе плоского 3-RPR-механизма с поступательными приводными кинематическими парами. Разработан численный метод определения рабочей области робота, основанный на концепции неравномерных покрытий, который позволяет учитывать конструктивные ограничения механизма, интерференцию звеньев и особые положения. В результате рабочая область реального механизма уменьшилась по сравнению с теоретической с  $0.469 \text{ м}^3$  до  $0.205 \text{ м}^3$ . В связи с увеличением объема расчетов снизилась скорость работы программы. С целью увеличения быстродействия выполнения программы была применена многопоточность с использованием пакета OpenMP для вычислений, к которым применимо распараллеливание аналогичных операций, которые могут выполняться одновременно. Это позволило эффективно распределить вычислительную нагрузку в восьмиядерной системе с общей памятью и добиться существенного ускорения расчетов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, соглашение № 16-19-00148, соглашение № 17-79-10512.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kong H., Gosselin C.M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. Springer. 2007. 272 p.
2. Merlet J.-P. Parallel Robots, 2nd ed. Springer. 2007. P. 269
3. Aleshin A.K., Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Shai O. Analysis of kinematic screws that determine the topology of singular zones of parallel-structure robots // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. V. 45. № 4. P. 291.
4. Merlet J.P. Determination of 6D Workspace of Gough-Type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries // Int. J. Robot. Res. 1999. V. 18. № 9. P. 902.
5. Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 6. С. 1390.
6. Evtushenko Y., Posypkin M., Rybak L., Turkin A. Approximating a solution set of nonlinear inequalities // J. Global Optimization. 2018. V. 7. P. 129.
7. Evtushenko Y., Posypkin M., Turkin A., Rybak L. The non-uniform covering approach to manipulator workspace assessment // Proceedings of the 2017 IEEE Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference, ElConRus 2017. P. 386.
8. Rybak L.A., Posypkin M.A., Turkin A.V. Method for approximating the workspace of the parallel robot // International Journal of Pharmacy and Technology. 2016. V. 8. № 4. P. 25045.
9. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure // Mechanism and Machine Theory. 2008. V. 43. P. 1129.

10. Глазунов В.А., Шалюхин К.А., Левин С.В., Костерева С.Д. Робототехническая установка для обработки деталей, РФ Патент 2415744, 2011. 3 с.
11. Pundru Srinivasa Rao, Nalluri Mohan Rao Position Analysis of Spatial 3-RPS Parallel Manipulator // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. 2013. V. 2. № 2. P. 80.
12. Вирабян Л.Г., Халапян С.Ю., Кузьмина В.С. Оптимизация траектории позиционирования выходного звена планарного параллельного робота // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2018. № 9. С. 106.
13. Chablat D., Wenger P. Moveability and collision analysis for fully-parallel manipulators // Proceedings of the 12th CISM-IFTOMM Symposium (Paris, July 6–9), 1998. P. 61.
14. Wenger P., Chablat D. Workspace and assembly modes in fully parallel manipulators: a descriptive study // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. 1998. P. 117.
15. Merlet J.-P. Analysis of the influence of wire interference on the workspace of wire robots // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. 2004. P. 211.
16. Cortés J., Siméon T. Probabilistic motion planning for parallel mechanisms // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2003. P. 4354.
17. Merlet J.P., Daney D. Legs interference checking of parallel robots over a given workspace or trajectory // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2006. P. 757.
18. Merlet J.-P. Geometrical determination of the workspace of a constrained parallel manipulator // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. 1992. P. 326.
19. Masory O., Wang, J. Workspace evaluation of Stewart platform // Adv. Robot. 1995. V. 9. № 4. P. 443.
20. Murali K.K., Aravind B., Rangaprasad A.S., Sandipan B. Computation of the safe working zones of planar and spatial parallel manipulators // Robotica. 2019. V. 38. № 5. P. 861.
21. Алешин А.К., Глазунов В.А., Рашоян Г.В., Офффер Шау. Анализ кинематических винтов, определяющих топологию сингулярных зон роботов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 3.
22. Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // IEEE Trans.Robotics&Autom. 1990. V. 6. № 3. P. 281.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 51-75

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРА И ЭКЗОСКЕЛЕТА**© 2020 г. С. Ф. Яцун<sup>1,\*</sup>, А. С. Яцун<sup>1</sup>, Е. В. Савельева<sup>1</sup>, А. Е. Карлов<sup>1</sup><sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия

\*e-mail: teormeh@inbox.ru

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

В статье рассмотрена структура аппаратных средств человеко-машинного интерфейса промышленных экзоскелетов и соответствующие математические модели, позволяющие подобрать оптимальные параметры человеко-машинного интерфейса и разработать алгоритмы управления. Предложен четырехэтапный алгоритм планирования угла поворота спины оператора при выполнении операции по подъему груза на основании полиномов седьмого порядка. Выполнено моделирование движения системы человек–экзоскелет с акцентом на тазобедренный сустав и поясничный отдел позвоночника. Показано влияние параметров математической модели системы человек–экзоскелет и в том числе мышечной системы оператора на точность воспроизведения экзоскелетом движений оператора.

*Ключевые слова:* промышленный экзоскелет, человеко-машинный интерфейс, математическая модель, подъем груза, кинематические параметры движения, человеко-машинное взаимодействие

**DOI:** 10.31857/S0235711920060115

Появление экзоскелетов облегчает труд работников промышленной сферы, улучшая условия труда и открывая новые функциональные возможности оператора при выполнении технологических операций, связанных с подъемом и переносом грузов [1–4]. В настоящее время передовые версии промышленных экзоскелетов позволяют выполнять операции с грузами до 60 кг. Их применение в промышленной отрасли облегчает тяжелый физический труд работников предприятий и при этом сокращает риск появления производственного травматизма. Функционирование экзоскелета необходимо рассматривать как систему, в которой человек и экзоскелет (ЧЭ) связаны между собой человеко-машинным интерфейсом (ЧМИ), охватывающим различные аспекты взаимодействия между элементами системы, который состоит не только из технических средств, но и соответствующего программного обеспечения. ЧМИ является важным компонентом системы, обеспечивая эффективность, гибкость функционирования системы ЧЭ. Методы проектирования системы ЧЭ связаны с разработкой инструментальных средств виртуального проектирования на основе математического моделирования взаимодействия человека и экзоскелета. Несмотря на рост публикаций по этой тематике, вопросы моделирования поведения системы ЧЭ изучены недостаточно, и требуют дальнейшего развития [5], особенно, когда речь идет о силовом взаимодействии, которым характеризуются системы ЧЭ [6–12]. В статье, разрабатываются математические модели элементов системы, обсуждаются вопросы персонализации ЧМИ, который ассоциируется с измерением и обработкой сигналов, регистрирующих силовое и кинематическое взаимодействие в системе. Одной из основных задач, решаемых интерфейсом, является создание наилучших условий

кооперативного поведения системы ЧЭ. Наиболее эффективно с такой задачей справляется интерфейс, который обладает совокупностью свойств, в том числе таких как: способность оценивать состояние окружающей среды, взаимодействие человека и экзоскелета, формирование управляющих сигналов, а также своевременное реагирование на изменения, происходящие в системе ЧЭ.

**Описание системы человек–экзоскелет.** Будем рассматривать систему человек–экзоскелет, которая представляет собой сложную био–электро–механическую многозвенную систему, математическая модель которой представляет собой систему нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений. При проектировании экзоскелетных систем можно применять механизмы параллельной структуры, что накладывает свой отпечаток на моделирование движений системы такого строения [13, 14].

На данном этапе, ограничимся рассмотрением движения спины оператора и экзоскелета относительно тазобедренного сустава (ТБС).

В рассматриваемой системе, оператор осуществляет информационное взаимодействие с окружающей средой с помощью зрения, тактильных сенсоров и силовое взаимодействие за счет мышечной системы ТБС, человеко–машинный интерфейс, контролирующей силовое и информационное взаимодействие человека с экзоскелетом и, собственно, экзоскелет, создающий дополнительные силовые воздействия на оператора, что обеспечивает снижение нагрузки на мышечную систему оператора. Экзоскелет снабжен системой персонифицированных фиксирующих элементов, гарантирующих комфортное пребывание оператора в экзоскелете.

На рис. 1 представлена схема системы человек–экзоскелет. Здесь обозначены элементы экзоскелета: 3 – бедро; 4 – спина и звенья оператора; 5 – спина; 6 – бедро; 7 – рука и 8 – груз.

$C_i$  – центры масс звеньев системы;  $M_{34}$  – моменты, создаваемые электроприводами шарниров;  $D_{34}$  – датчик угла поворота звена 4 относительно звена 3;  $D_3$  – датчик абсолютного угла наклона звена;  $R_{80}$  – реакция поверхности при начальном положении груза;  $\bar{F}$  – сила, действующая на руку оператора со стороны груза;  $\bar{G}$  – вес груза.

Положение звеньев экзоскелета и оператора оценивается абсолютными углами  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$ ,  $\varphi_5$ . Для контроля над этими углами применяются датчики углов поворота  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ . Взаимодействие спины оператора и спины экзоскелета измеряется с помощью датчика силы  $\bar{P}_{34}$ . Взаимодействие груза с опорной поверхностью контролируется датчиком силы  $\bar{R}_{80}$ , а взаимодействие оператора с грузом оценивается датчиком силы  $\bar{F}$ ;  $\bar{G}$  – вес груза.

Человек оценивает окружающую среду и воздействует на технологическую нагрузку (груз), создавая мышечной системой моменты, действующие в ТБС. Экзоскелет, оснащенный электроприводами, создающими моменты относительно тазобедренного шарнира (ТБШ), помогает оператору выполнять ту или иную технологическую операцию, значительно снижая уровень моментов мышечной системы, а в ряде случаев полностью разгружая человека [15–18].

Структура ЧМИ приведена на рис. 2. Этот интерфейс, контролирующий как силовые, так и кинематические параметры системы состоит из модулей спины, бедра, ТБШ, и управляемого устройства, установленного в ТБШ, получившего название линейный гравитационный компенсатор (ЛГК).

Мерой силового взаимодействия в системе ЧЭ является сила  $P_{34}$ , которая измеряется специальным датчиком. Также интерфейс имеет информационные каналы, с помощью которых, происходит измерение углов поворота звеньев оператора и экзоскелета. Бортовой вычислитель обрабатывает эту информацию в соответствии с алгорит-

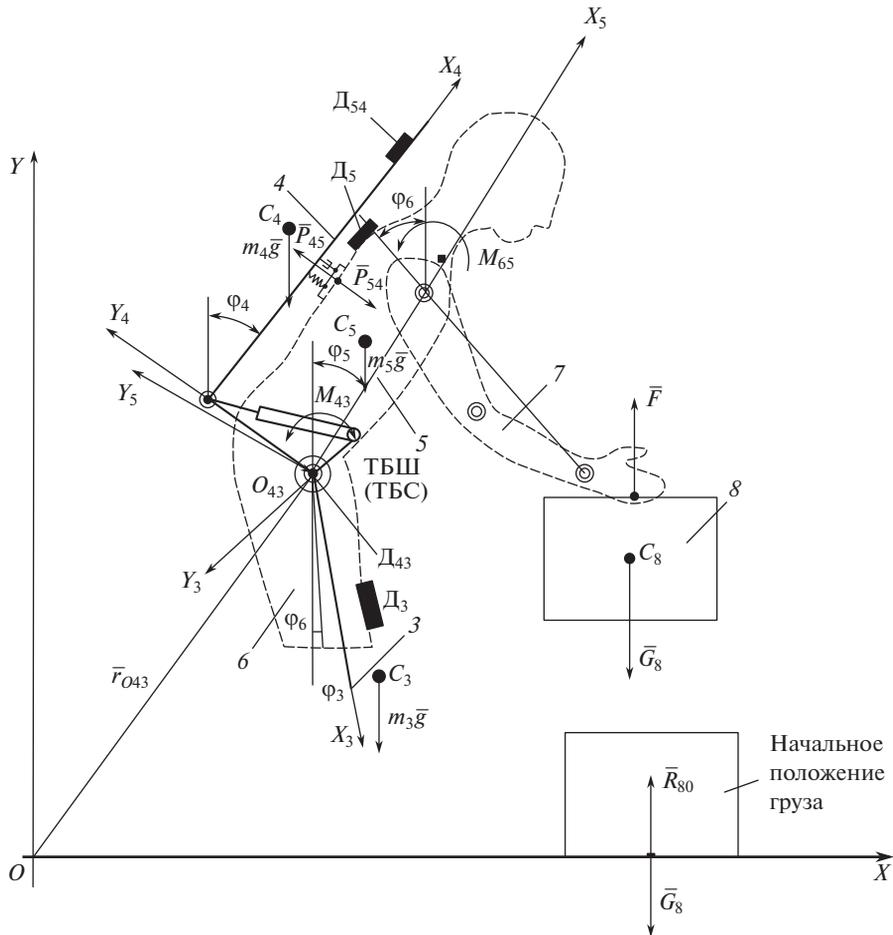


Рис. 1. Расчетная схема взаимодействия человека и экзоскелета при подъеме груза.

мом управления и формирует управляющее напряжение, поступающее на ЛГК ТБШ, который воздействует на экзоскелет, задавая характер желаемых движений звеньев экзоскелета.

На данном этапе исследований предположим, что оси вращения ТБШ и ТБС совпадают. Кроме того, примем, что бедренное звено экзоскелета жестко связано с бедром оператора [19–21].

**Планирование желаемой траектории движения.** Предположим, что планируемый закон изменения угла наклона спины оператора  $\varphi_3^*$  является гладкой функцией, которая, как и ее первая и вторая производные, не имеет разрывов в начальный и конечный моменты движения [22]. Такую функцию можно представить в виде комбинации отрезков прямой и полиномов седьмого порядка. Будем считать, что общее время подъема груза состоит из четырех отдельных этапов

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \tag{1}$$

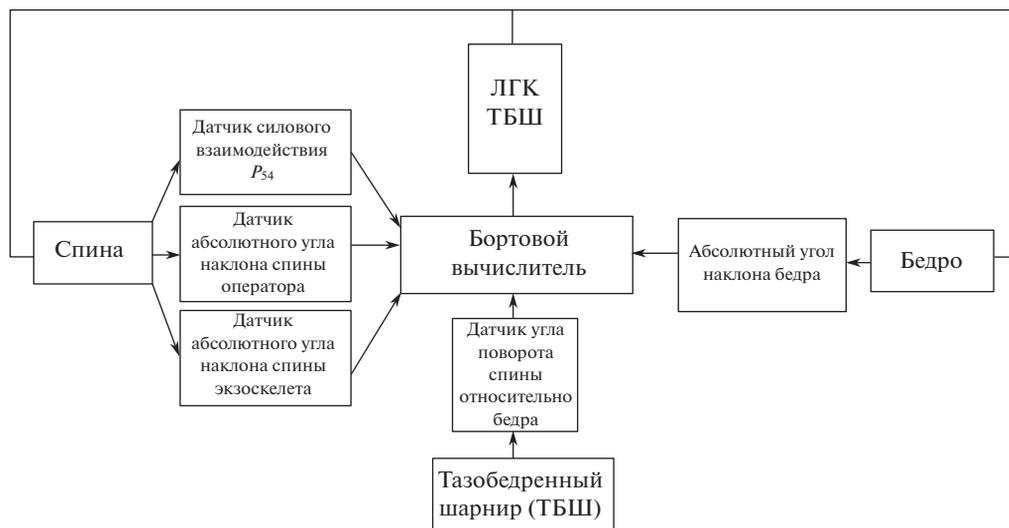


Рис. 2. Схема человеко-машинного интерфейса для звеньев бедра и спины системы ЧЭ.

где  $t_1$  – время подготовки;  $t_2$  – выполнения наклона;  $t_3$  – фиксации спины в положении наклона и  $t_4$  – подъема спины.

$$\begin{cases} \varphi_5^*(t) = 0 & 0 \leq t \leq t_1, \\ \varphi_5^*(t) = \sum_{i=0}^7 c_i \cdot t^i & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \varphi_5^*(t) = \varphi_{5\max}^* & t_2 \leq t \leq t_3, \\ \varphi_5^*(t) = \sum_{i=0}^7 d_i \cdot t^i & t_3 \leq t \leq t_4. \end{cases}$$

Коэффициенты  $c_i$  находятся из соответствующих граничных условий как решение алгебраического уравнения

$$C = A_1^{-1} B_1, \quad (2)$$

где  $A_1$ ,  $B_1$  – матрицы граничных условий,  $C$  – матрица коэффициентов  $c_i$ .

Коэффициенты  $d_i$  находятся из соответствующих граничных условий как решение алгебраического уравнения

$$D = A_2^{-1} B_2, \quad (3)$$

где  $A_2$ ,  $B_2$  – матрицы граничных условий;  $D$  – матрица коэффициентов  $d_i$ .

Для построения траектории движения приняты следующие значения функции и ее производных на границах соответствующих интервалов

$$\begin{aligned} \varphi_5^*(t_1) &= \varphi_{50}^*; & \varphi_5^*(t_2) &= \varphi_{5\max}^*; & \varphi_5^*(t_3) &= \varphi_{5\max}^*; & \varphi_5^*(t_4) &= 0, \\ \dot{\varphi}_5^*(t_1) &= \dot{\varphi}_{50}^*; & \dot{\varphi}_5^*(t_2) &= \dot{\varphi}_{5\max}^*; & \dot{\varphi}_5^*(t_3) &= \dot{\varphi}_{5\max}^*; & \dot{\varphi}_5^*(t_4) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_5^*(t_1) &= \ddot{\varphi}_{50}^*; & \ddot{\varphi}_5^*(t_2) &= \ddot{\varphi}_{5\max}^*; & \ddot{\varphi}_5^*(t_3) &= \ddot{\varphi}_{5\max}^*; & \ddot{\varphi}_5^*(t_4) &= 0, \\ \dddot{\varphi}_5^*(t_1) &= \dddot{\varphi}_{50}^*; & \dddot{\varphi}_5^*(t_2) &= \dddot{\varphi}_{5\max}^*; & \dddot{\varphi}_5^*(t_3) &= \dddot{\varphi}_{5\max}^*; & \dddot{\varphi}_5^*(t_4) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интервалы времени определены как  $t_1 = 1; t_2 = 2; t_3 = 3; t_4 = 4$  с. Интервалы времени 1–2 и 3–4 соответствуют процессу подъема и опускания груза. На интервале 2–3 с происходит удержание груза. В этот период желаемый угол наклона спины оператора по отношению к бедру остается неизменным.

**Модели сил, приложенных к системе.** Рассмотрим математические модели сил, приложенных к системе ЧЭ. Момент веса звена  $\bar{G}_i$  относительно центра ТБШ  $O_{43}$  определен в виде

$$\bar{M}_{O_{43}}(\bar{G}) = \bar{r}_{O_{43}C_i}^{(0)} \times \bar{G}. \quad (5)$$

Суммарный момент сил веса

$$\bar{M}_5 = \sum \bar{r}_{O_{43}C_i}^{(0)} \times \bar{G}_i, \quad (6)$$

где  $\bar{r}_{O_{43}C_i}^{(0)}$  – радиус вектор центра масс звена; вес звена

$$\bar{G}_i = (0, m_i g, 0)^T. \quad (7)$$

Модуль момента сил веса относительно  $O_{43}$  представим в виде

$$M_5(t) = L_5 m_5 g \sin \varphi_5 + (L_8 \sin \varphi_8 + L_5 \sin \varphi_5) \cdot (\delta_2(t - t_2) m_8 g - \delta_1(t - t_2) N_{80}), \quad (8)$$

где  $\delta_1(t - t_2) = \begin{cases} 0 & t \leq t_2 \\ 1 & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$ ;  $\delta_2(t - t_2) = \begin{cases} 0 & t \leq t_2 \\ 1 & t_2 \leq t \end{cases}$ ;  $L_5, L_8$  – приведенные геометрические размеры экзоскелета и оператора.

На интервале  $t_2 \leq t \leq t_3$  груз остается неподвижным, а реакция  $N_{80}$  уменьшается до 0. При выполнении условия  $N_{80} = 0$  завершается отрыв груза и начинается следующий этап – подъем груза.

Обычно, значение веса груза известно с определенной погрешностью. Такая неопределенность ограничивается интервалом, заданным максимально и минимально возможными значениями параметра, в пределах которого этот параметр может изменяться. Т.е.  $G_i = G_{i0} + \Delta G_i$ , где  $G_{i0}$  – медианное значение веса  $i$ -го звена;  $\Delta G_i$  – интервал изменения веса. Примем для веса груза  $G_{80} = m_8 g$ , а  $\Delta G_8 = \Delta m_8 g$ .

Для моделирования измерителя силы  $P_{54}$ , возникающей между спиной экзоскелета и спиной оператора, принята линейная упруго-вязкая модель Кельвина–Фойхта с параметрами  $C_{54}, \mu_{54}$ . Модуль этой силы определим по формуле

$$P_{54} = C_{54}(\varphi_5 - \varphi_4) + \mu_{54}(\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4). \quad (9)$$

Момент силы измерителя относительно точки  $O_{43}$

$$M(P_{54}) = L_{54} P_{54}. \quad (10)$$

Для построения математической модели момента, создаваемого мышечной системой бедренного сустава человека, будем считать, что момент мышечной системы тазо-бедренного сустава зависит от отклонения реального угла наклона спины от желаемого.

Наиболее известной моделью мышц является модель Хилла [15]. Уравнение Хилла является основным уравнением динамики мышечного сокращения и описывает взаимосвязь между силой и скоростью укорочения

$$(P + a)(V + b) = b(P_m + a) = \text{const}. \quad (11)$$

Здесь  $P$  – сила;  $V$  – скорость, которые развивает мышца;  $a, b, P_m$  – постоянные величины. Из этого равенства следует вывод, что между силой и скоростью существует обратно пропорциональная зависимость. Если скорость  $V = 0$ , то подстановка этого зна-

чения приводит к соотношению  $P = P_m$ , т.е. в этом случае мышца развивает максимальную силу, равную  $P_m$ . Если сила сокращения равна нулю, скорость достигает максимальной величины.

$$V_m = b \frac{P_m}{a}. \quad (12)$$

Далее сделано предположение о том, что реальный угол  $\varphi_5(t)$  наклона спины оператора отличается на некоторую величину от желаемого  $\varphi_5^*(t)$  и момент, мышц зависит от разности между желаемым и реальным углами, а также предполагается, что с ростом числа циклов нагружения, сила, создаваемая мышечной системой, уменьшается.

В статье, принята математическая модель мышечной системы ТБШ в виде

$$M_5^{\text{ч}} = K_p(\varphi_5^* - \varphi_5) + K_d(\dot{\varphi}_5^* - \dot{\varphi}_5), \quad (13)$$

где  $K_p = \frac{K_{po}(n)}{\dot{\varphi}_5 - a}$ ,  $K_d = \frac{K_{do}(n)}{\dot{\varphi}_5 - b}$ ,  $K_{po}(n)$ ,  $K_{do}(n)$  – функции отражающие зависимость мышечных сил от количества циклов. Далее принято, что

$$K_p(n) = \frac{K_{po}}{c - n}, \quad K_d(n) = \frac{K_{do}}{d - n}, \quad (14)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – некоторые эмпирические коэффициенты, отражающие физиологические возможности мышечной системы тазобедренного сустава, определяемые опытным путем.

Сила, создаваемая ЛГК ТБШ, является управляющей и определяется по формуле

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (15)$$

$\Phi_1$  – сила, создаваемая упругим элементом ЛГК

$$\Phi_1 = C\Delta L, \quad (16)$$

где  $C$  – коэффициент, определяемый свойствами упругого элемента;  $\Delta L$  – изменение длины ЛГК.

$\Phi_2$  – сила, создаваемая электроприводом ЛГК, реализованным на основе ШВП

$$\Phi_2 = \frac{2\pi M_B}{h}, \quad (17)$$

где  $M_B$  – момент электропривода, приведенный к гайке ШВП,  $h$  – шаг винта ШВП.

В свою очередь

$$M_B = M_{\text{эд}}\eta_p\eta, \quad (18)$$

где  $M_{\text{эд}}$  – момент электродвигателя;  $\eta_p$  – передаточное отношение гайка-шестерня;  $\eta$  – передаточное отношение редуктора. Момент, создаваемый электродвигателем

$$M_{\text{эд}} = c_M i, \quad (19)$$

где  $i$  – ток в обмотках электродвигателя ЛГК;  $c_M$  – постоянная момента электродвигателя.

Ток  $i$  определим из уравнения полного тока

$$L \frac{di}{dt} + iR + c_E \dot{\varphi} = U, \quad (20)$$

где  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление обмотки ротора;  $c_E$  – коэффициент пропорциональности, называемый постоянной ЭДС двигателя;  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость ротора электродвигателя;  $U$  – управляющее напряжение.

Момент силы  $\Phi$ , создаваемый относительно оси вращения ТБШ определим по формуле

$$M_{O_{43}}(\Phi) = \Phi |O_{43}H|, \quad (21)$$

где  $O_{43}H$  – плечо силы  $\Phi$  относительно центра ТБШ.

**Математическая модель системы ЧЭ.** Математическую модель функционирования системы ЧЭ можно описать с помощью нелинейного матричного уравнения, имеющего вид

$$\dot{\bar{X}} = A(\bar{X}) + B(\bar{X})\bar{U}, \quad (22)$$

где  $\bar{X} = (\varphi_4, \omega_4, \varphi_5, \omega_5)^T$ ;  $\omega_4 = \dot{\varphi}_4$ ;  $\omega_5 = \dot{\varphi}_5$ ;

$$A(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \omega_4 \\ L_4 \sin(\varphi_4)m_4g + C_{54}(\varphi_4 - \varphi_5) + \mu_{54}(\omega_4 - \omega_5) + (\Phi_1 + \Phi_2)O_{43}H \\ \omega_5 \\ L_5m_5g \sin \varphi_5 + (L_8 \sin \varphi_8 + L_5 \sin \varphi_5)(\delta_2(t - t_2)m_{8g} - \delta_1(t - t_2)N_{80}) - \\ - C_{54}(\varphi_4 - \varphi_5) - \mu_{54}(\omega_4 - \omega_5) + K_p(\varphi_5^* - \varphi_5) + K_d(\dot{\varphi}_5^* - \dot{\varphi}_5) \end{pmatrix};$$

$$B(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & O_{43}H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

управляющее воздействие

$$\bar{U} = (0, \Phi_2(U), 0, 0)^T. \quad (23)$$

**Алгоритм управления.** Система управления должна рассматриваться как робастная, т.е. обеспечивающая допустимое (в смысле некоторого критерия) качество при наличии параметрических и функциональных неопределенностей объекта управления, связанных с недостаточной информацией о весе поднимаемого груза [12, 19]. Принято, что в ходе функционирования системы, коэффициенты регулятора не подстраиваются, а малая чувствительность (т.е. робастность) к различного рода вариациям параметров математической модели объекта достигается за счет специальным образом выбранной структуры алгоритма управления.

В нелинейных робастных системах малая чувствительность к различным вариациям математической модели объекта управления обеспечивается за счет дополнительного введения в алгоритм управления специальной статической нелинейной обратной связи.

Представим алгоритм управления в виде

$$U_1 = U + f_1(P_{54}) + f_2(\varphi_{43});$$

$$f_1(P_{54}) = \begin{cases} 0P_{540} < P_{54} < P_{541}, \\ \Delta U_1 P_{540} > P_{54}, \\ -\Delta U_1 P_{54} > P_{541}; \end{cases} \quad (24)$$

$$f_2(\varphi_{43}) = \begin{cases} 0\varphi_{430} < \varphi_{43} < \varphi_{431}, \\ \Delta U_2 \varphi_{430} > \varphi_{43}, \\ -\Delta U_2 \varphi_{43} > \varphi_{431}, \end{cases}$$

где  $P_{540}$ ,  $P_{541}$ ,  $\varphi_{430}$ ,  $\varphi_{431}$ ,  $\Delta U_1$ ,  $\Delta U_2$  – параметры персональной настройки регулятора.

Для рассматриваемой системы выбран ПД регулятор

$$U = Ku\Delta\phi + Kdu\dot{\Delta\phi}, \quad (25)$$

где  $Ku$ ,  $Kdu$  – коэффициенты регулятора;  $\Delta\phi = \phi_5^* - \phi_4$ .

Параметры  $Ku$ ,  $Kdu$  определяются исходя из критерия качества переходного процесса системы. Подставляя необходимые параметры в (24) получим уравнение адаптивного регулятора

$$U_1 = k_1\Delta\phi + k_2\dot{\Delta\phi} + f_1(P_{54}) + f_2(\phi_{43}). \quad (26)$$

Такой регулятор создает управляющее напряжение  $U_1$  с учетом уровня параметров  $P_{54}$  и  $\phi_{43}$ , обеспечивая их значения в заданном интервале.

**Результаты математического моделирования работы системы управления БШТС.** Далее методом математического моделирования исследуется влияние параметров модели на характер функционирования ЧЭ. Кинематические особенности поведения системы отражены на диаграммах в виде зависимостей углов поворота спины оператора и экзоскелета углов  $\phi_4$ ,  $\phi_5$ ,  $\phi_5^*$  от времени на всем интервале движения системы при подъеме груза. Силовые возможности ЛГК ТБШ иллюстрируются графиками зависимости сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , создаваемых упругим элементом и электроприводом ЛГК на всем интервале движения системы при подъеме груза. Возможности мышечной системы и нагрузки на эту систему отражены на графиках в виде зависимостей момента мышечной системы оператора  $M_3^Ч$  от времени.

При расчетах приняты следующие неизменяемые параметры модели:  $m_5 = 35$  (кг) – масса туловища оператора;  $m_4 = 12$  (кг) – масса спины экзоскелета;  $m_8 = 30$  (кг) – масса поднимаемого груза;  $I_5 = 3.365$  (кг м<sup>2</sup>) – момент инерции тела оператора;  $I_4 = 1$  (кг м<sup>2</sup>) – момент инерции экзоскелета.

Моделирование функционирования системы ЧЭ выполнено при различных варьируемых параметрах модели. Параметры регулятора системы управления электроприводом ЛГК:  $Ku = 10$  В – пропорциональный;  $Kdu = 0.5$  В/с – дифференциальный.

Феноменологические параметры мышечной системы человека:  $Kp = 1000$  Н·м – упругие свойства мышечной системы;  $Kd = 100$  Н·м·с – диссипативные свойства мышечной системы.

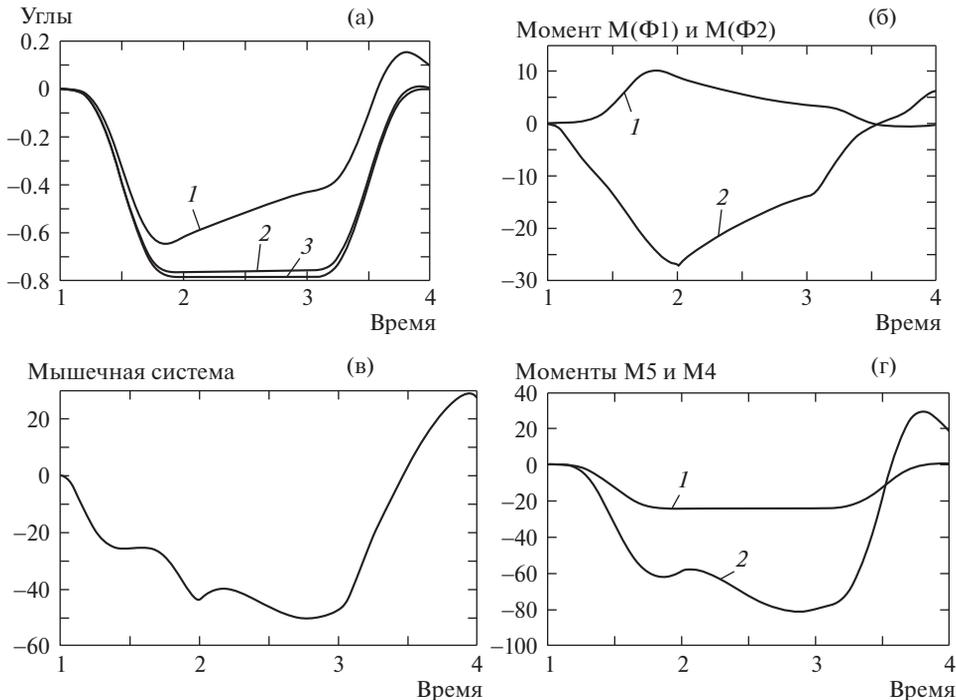
Параметры измерителя силы:  $C_{54} = 1000$  Н/м – упругие свойства;  $\mu_{54} = 10$  Н с/м – диссипативные свойства.

Жесткость упругого элемента ЛГК:  $C = 7000$  Н/м.

Для анализа отклонения реальных углов наклона от заданных исследуются три области, отмеченные на графике рис. За цифрами 1, 2, 3. Область 1 соответствует режиму наклона спины без груза; область 2 – отрыву груза от поверхности; область 3 – подъему груза.

Феноменологические параметры мышечной системы человека  $Kp$ ,  $Kd$  отражают упругие и диссипативные свойства мышечной системы, которые определяют степень подготовленности мышечной системы к подъему груза.

Результаты расчетов, выполненных при параметрах  $Kp = 1000$  Н·м и  $Kd = 100$  Н·м·с приведены на рис. За показывают значительное отклонение угла поворота спины экзоскелета от заданного, которое достигает максимума равного  $\Delta\phi = 0.2$  радиана в зоне 2.



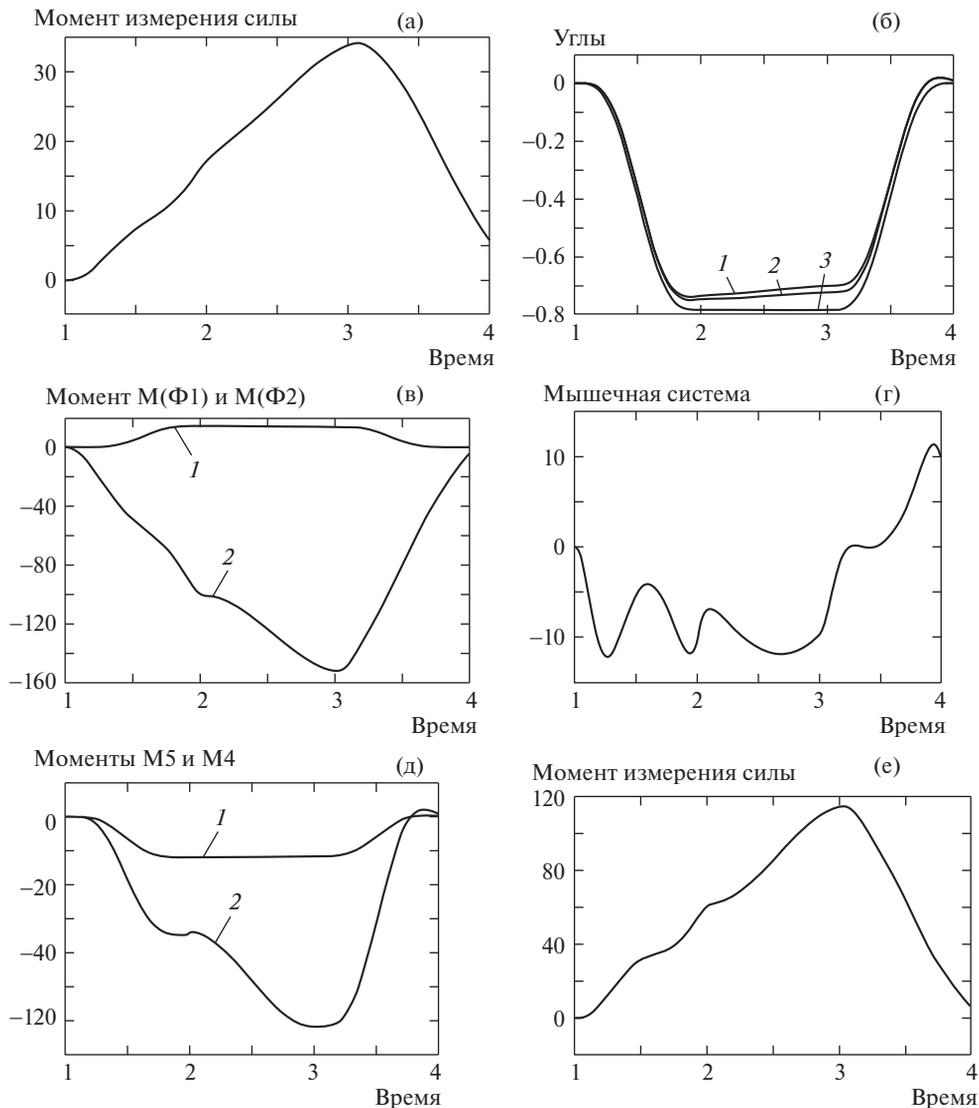
**Рис. 3.** Зависимости исследуемых параметров от времени: (а) – зависимость углов поворота спины оператора и экзоскелета углов  $\Phi_4$ ,  $\Phi_5$ ,  $\Phi_5^*$  от времени на всем интервале движения системы при подъеме груза; (б) – зависимость моментов сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , создаваемых ЛГК на всем интервале движения системы при подъеме груза; (в) – зависимость момента мышечной системы оператора  $M_5^ч$  от времени; (г) – зависимость моментов сил тяжести  $M_5$  и  $M_4$ : 1 –  $M_4$ ; 2 –  $M_5$ .

Далее приведены зависимости моментов сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  от времени, показывающие как происходит изменение моментов сил, генерируемых ЛГК (рис. 3б). Момент силы упругого элемента  $\Phi_1$  достигает максимальных значений 10 Н·м на первом этапе и далее на этапе отрыва груза от поверхности снижается, на третьем этапе, уменьшается до нуля. Момент силы  $\Phi_2$ , генерируемой электроприводом принимает максимальное значение 27 Н·м в конце первого этапа далее уменьшается до нуля.

Зависимость момента мышечной системы оператора  $M_5^ч$  от времени (рис. 3в) показывает вклад оператора в процесс подъема груза. Максимальное значение  $M_5^ч$  достигается в конце этапа, связанного с отрывом груза от поверхности, при этом  $M_5^ч = 50$  Н·м. Далее происходит уменьшение этого момента до нуля с последующей инвертацией.

Зависимость момента измерителя силы  $P_{54}$  от времени (рис. 4а) показывает монотонный рост момента, который достигает максимума  $M(P_{54}) = 34$  Н·м в конце второго этапа при  $t = 3$  с.

Для уменьшения погрешности угла поворота экзоскелета предложено изменить жесткость измерителя силы до  $C_{54} = 5000$ , сохранив неизменными остальные параметры системы. На рис. 4б показаны диаграммы зависимостей углов поворота спины опе-



**Рис. 4.** Зависимости исследуемых параметров от времени: (а) – момента измерителя силы  $P_{54}$  от времени; (б) – углов поворота спины оператора и экзоскелета углов  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{5^*}$  от времени на всем интервале движения системы при подъеме груза: 1 –  $\varphi_4$ ; 2 –  $\varphi_5$ ; 3 –  $\varphi_{5^*}$ ; (в) – моментов сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , создаваемых ЛГК на всем интервале движения системы при подъеме груза; (г) – момента мышечной системы оператора  $M_5^q$  от времени; (д) – моментов сил тяжести  $M_5$  и  $M_4$ : 1 –  $M_4$ ; 2 –  $M_5$ ; (е) – момента измерителя силы  $P_{54}$  от времени.

ратора и экзоскелета  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{5^*}$  от времени. Максимальное отклонение по углу поворота спины оператора от желаемого равно 0.06 рад, а для экзоскелета – 0.09 рад.

Зависимости моментов сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  от времени (рис. 4в), показывают что момент силы упругого элемента  $\Phi_1$  достигает максимальных значений 22 Н·м на первом этапе

и далее на этапе отрыва груза от поверхности остается неизменным, на третьем этапе, при подъеме груза снижается до нуля. Момент силы  $\Phi_2$ , генерируемой электроприводом принимает максимальное значение 150 Н·м в конце второго этапа, связанного с отрывом груза от поверхности, и далее уменьшается до нуля.

Зависимость момента мышечной системы оператора  $M_5^u$  от времени (рис. 4г) показывает немонотонный характер, а максимальное значение  $M_5^u$  достигает в конце этапа, связанного с отрывом груза от поверхности, при этом  $M_5^u = 12$  Н·м. Далее происходит уменьшение этого момента до нуля с последующей инвертацией. Таким образом, удалось снизить нагрузку на оператора, уменьшив момент  $M_5^u$  более чем в четыре раза.

Зависимость момента измерителя силы  $P_{54}$  от времени (рис. 4е) как и в предыдущем случае показывает монотонный рост момента, который достигает максимума  $M(P_{54}) = 115$  Н·м в конце второго этапа при  $t = 3$  с, что превышает момент  $M(P_{54})$  в предыдущем примере более чем в три раза.

**Заключение.** В статье предложена структура аппаратных средств ЧМИ и соответствующие математические модели, позволяющие подобрать оптимальные параметры ЧМИ и разработать алгоритмы управления. Предложен четырехэтапный алгоритм планирования угла поворота спины оператора при выполнении операции по подъему груза на основании полиномов седьмого порядка. Выполнено моделирование движения системы ЧЭ. Показано влияние параметров математической модели системы ЧЭ и, в том числе, жесткости измерителя силы на точность воспроизведения экзоскелетом движений оператора. Приводится математическое описание планирования желаемой траектории движения звеньев, смоделированы силы, действующие на систему, математически описана сама система и алгоритм управления.

Анализ полученных диаграмм показал, что реальный угол наклона спины оператора  $\varphi_5$ , отличается от виртуального желаемого угла  $\varphi_5^*(t)$ , а в зависимости от величины феноменологического параметра упругих свойств мышечной системы человека. Также наблюдается отклонение угла наклона спины экзоскелета  $\varphi_4$  от  $\varphi_5$ , которое определяется моментом, создаваемой измерителем силы.

Графики ассистирующего момента  $M(P_{54})$ , действующий на оператора со стороны экзоскелета показывают то, что момент силы  $P_{54}$  синхронно без запаздывания формируется измерителем силы.

Установлено, что погрешность реальных движений по отношению к задуманным существенно зависит от коэффициента жесткости измерителя силы  $C_{54}$ . Это хорошо видно при сравнении диаграмм углов  $\varphi_5$  и  $\varphi_5^*$ .

Проведенные исследования также показали работоспособность моделей и возможность прогнозирования характера поведения системы человек–экзоскелет при выполнении движений, связанных с подъемом груза.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00773-а).

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ergasheva B.I.* Lower Limb Exoskeletons: Brief Review // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 1153.
2. *De Looze M.P., Bosch T., Krause F., Stadler K.S., & O'Sullivan, L.W.* Exoskeletons for industrial application and their potential effects on physical work load. *Ergonomics*, 2016. V. 59 (5). P. 671.
3. *Spada S. et al.* Analysis of exoskeleton introduction in industrial reality: main issues and EAWS risk assessment // International Conference on Applied Human Factors and Ergonomics. Springer. Cham. 2017. P. 236.
4. *Яцун С.Ф., Антипов В.М., Карлов А.Е.* Подъем груза в экзоскелете с гравитационной компенсацией / Под ред. С.Ф. Яцун, В.М. Антипов, А.Е. Карлов, Аль Манджи Х.Х.М. // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019. Т. 23. № 2. С. 8.
5. *Гаврилов С.В., До Т.З.* Компьютерное моделирование динамики движения пятистепенного шагающего робота // Автоматизация в электроэнергетике и электротехнике. 2016. V. 1. P. 72.
6. *Plagenhoef, Stanley, F. Gaynor Evans, Thomas Abdelnour.* Anatomical data for analyzing human motion. // Research quarterly for exercise and sport 54. 1983. № 2. P. 169.
7. *Theurel J., Desbrosses K., Roux T., Savescu A.* Physiological consequences of using an upper limb exoskeleton during manual handling tasks // Applied ergonomics, 2018. V. 67. P. 211.
8. *Ulrey B.L., Fathallah F.A.* Subject-specific, whole-body models of the stooped posture with a personal weight transfer device // Journal of Electromyography and Kinesiology. 2013. V. 23. № 1. P. 206.
9. *Герасимов Д.Н., Лызлова М.В., Никифоров В.О.* Простые алгоритмы адаптивного и робастного управления классом линейных объектов с переменными параметрами // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 5. С. 351.
10. *Гурьев В.Ю.* Математическое моделирование биомеханических процессов в неоднородном миокарде: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Урал. ун-т. 2004.
11. *Домрачев Т.Б., Яшимтов К.С., Лоскутов Ю.В.* Кинематика локомоций человека при вставании из седа и посадке на опору // Инженерные кадры – будущее инновационной экономики России. 2017. № 1. С. 40.
12. *Лавровский Э.К.* Об энергетике походок человека-оператора, осуществляемых при помощи аппарата “Пассивный” экзоскелетон // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 1. С. 9.
13. *Алешин А.К., Глазунов В.А., Оффер Ш., Рахоян Г.В., Скворцов С.А., Ласточкин А.Б.* Анализ элементарных перемещений манипулятора параллельной структуры с круговой направляющей на основе дифференцирования уравнений связей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 17.
14. *Глазунов В.А. и др.* Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и частичной развязкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 3.
15. *Jatsun S., Savin S., Lushnikov B., Yatsun A.* System analysis of sagittal plane human motion wearing an exoskeleton using marker technology / In ITM Web of Conferences. 2016. V. 6. EDP Sciences.
16. *Jatsun S.F., Al Maji Kh.M.* Analysis of the effect of the exoskeleton geometrical dimensions on the nature of a linear compensator operation / S.F. Jatsun, Al Maji Kh.M., A.S. Yatsun, A.E. Karlov, E.V. Saveleva // Developments in eSystems Engineering 2019. Robotics, Sensors and Industry.
17. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // ПММ. 2017. Т. 81. № 5. С. 511.
18. *Павловский В.Е. и др.* Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 0. С. 111.

- 
19. *Борисов А.В.* Механика пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. 2018. № 3–4. С. 46.
  20. *Гаврилов С.В., До Т.З.* Компьютерное моделирование динамики движения пятистепенного шагающего робота // Автоматизация в электроэнергетике и электротехнике. 2016. № 1. С. 72.
  21. *Яцун С.Ф. и др.* Моделирование паттернов походки пациента с повреждением опорно-двигательного аппарата с помощью экзоскелета // Известия Юго-Западного государственного университета. 2020. Т. 23. № 6. С. 176.
  22. *Лушников Б.В., Скрыльников Н.Е.* Имитационная модель процесса вертикализации экзоскелета нижних конечностей в среде Simmechanics / MATLAB с учетом сухого трения в кинематических парах // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины. 2016. С. 261.

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.926.2

**О САМОСИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ  
ВИБРАЦИОННОЙ ШЕКОВОЙ ДРОБИЛКИ ПРИ УЧЕТЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ СРЕДОЙ**

© 2020 г. А. Е. Шохин

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
e-mail: shohinsn@mail.ru*Поступила в редакцию 03.03.2020 г.  
Принята к публикации 29.07.2020 г.

В статье рассмотрены колебания модели вибрационной щековой дробилки, возбуждаемые двумя самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями, при учете взаимодействия с обрабатываемой средой. Установлено, что области частот устойчивой противофазной синхронизации вращения вибровозбудителей, требуемой для нормальной работы дробилки, существенно зависят от зазора между щекой и элементом среды, причем уменьшение исходного зазора приводит к расширению области частот устойчивой противофазной синхронизации вибровозбудителей. При отсутствии исходного зазора и возникновении давления среды на щеки в резонансной области частот возможно появление области устойчивости синхронно-синфазного вращения вибровозбудителей. Показано, что при неизменной частоте возбуждения колебаний изменение исходного зазора между щеками и обрабатываемой средой может приводить к изменению типа синхронизации вращения вибровозбудителей и соответственно колебаний щек.

*Ключевые слова:* самосинхронизация, дебалансный вибровозбудитель, колебания, кусочно-линейная характеристика, вибрационная щековая дробилка, виброударная система

DOI: 10.31857/S0235711920060085

Одной из проблем создания вибрационных щековых дробилок (ВЩД) с самосинхронизирующимися дебалансными возбудителями колебаний является обеспечение требуемого синхронного режима колебаний щек и соответственно типа синхронизации вращения вибровозбудителей. Несмотря на значительные успехи в применении теории синхронизации динамических систем при разработке ВЩД, в практике их эксплуатации регулярно наблюдаются непрогнозируемые смены синхронного противофазного движения щек на синхронное синфазное, при котором эффективность дробления существенно снижается или дробление практически не происходит.

Аналізу динаміки ВЩД і методам їх проектування присвячено багато робіт. Общим вопросам и теории самосинхронизации дебалансных вибровозбудителей в колебательных системах посвящены работы [1–3]. В работе [4] представлен подробный обзор конструктивных схем щековых дробилок, а так же основные методы анализа динамики и расчета конструктивных параметров дробилок с двумя качающимися щеками. Вопросы динамики ВЩД с жестким закреплением вибровозбудителей на щеках без учета взаимодействия с обрабатываемой средой рассматривались в работе [5]. Отметим, что известные математические модели, применяемые для анализа динамики таких дробилок, включают ряд допущений о характере их движения и взаимо-

действию их элементов с обрабатываемой средой, которые с одной стороны существенно упрощают процесс анализа, а с другой — могут приводить к потере описания некоторых практически важных эффектов [1, 3, 6, 7]. Например, в [8–10] при анализе динамики дробилки с двумя подвижными щеками предполагается, что взаимодействие щек с обрабатываемой средой происходит одновременно с обеими щеками и учитывается в виде линейной вязкости. При этих допущениях не учитывается виброударный характер взаимодействия щек со средой, приводящий к необходимости рассмотрения существенно-нелинейной колебательной системы. Некоторые вопросы самосинхронизации колебаний ВЩД при учете обрабатываемой среды рассмотрены в работах [3, 11, 12]. В работе [12] проведен анализ взаимодействия обрабатываемой среды со щеками дробилки с прямолинейным движением щек в предположении о заданном законе их движения. В работе [13] описана многомассовая инерционная реологическая модель обрабатываемой среды, учитывающая ее деформации и перемещения в плоскости колебаний щек, а также ее взаимодействие со щеками как в направлении нормали их поверхности, так и по касательной. При расчете динамики щековой дробилки с использованием этой модели авторы рассматривают только симметричные условия контакта щек с обрабатываемой средой. Применение этой модели на практике затруднено необходимостью определения значительного количества параметров.

При практических расчетах часто ограничиваются рассмотрением колебаний вдали от резонансных частот, вблизи которых обычно расположены границы частотных диапазонов устойчивости требуемых синхронных режимов колебаний дробилки [4, 5, 10]. Резонансные частоты и указанные границы устойчивости определяются как конструктивными параметрами дробилки, так и свойствами обрабатываемого материала и характером его движения в рабочей зоне дробилки. При этом нелинейность сил взаимодействия рабочих органов дробилки с обрабатываемой средой может приводить к значительному изменению динамических свойств дробилки [6, 14]. Кроме того, задача обеспечения постоянства свойств обрабатываемого материала в рабочей камере дробилки оказывается трудно разрешимой. В связи с этим на практике оказывается затруднительным обеспечить возбуждение колебаний дробилки на достаточном удалении от границ устойчивости, что может приводить к смене режимов ее колебаний. Таким образом, вопросы учета взаимодействия рабочих органов с обрабатываемым материалом и его влияния на динамику дробилок приобретают особое значение при разработке ВЩД с самосинхронизирующимися дебалансными возбудителями колебаний.

В настоящей статье рассматривается модель ВЩД с двумя подвижными щеками, совершающими прямолинейные колебания, возбуждаемые самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями, установленными на щеках. С целью выявления возможного влияния свойств обрабатываемой среды на синхронизацию вращения вибровозбудителей и колебаний щек дробилки проводится анализ динамики ее модели с учетом прерывистого взаимодействия щек с обрабатываемой средой.

**Математическая модель и методы моделирования.** Расчетная схема модели дробилки с поступательными колебаниями щек представлена на рис. 1. Модель состоит из жесткой рамы, моделируемой твердым телом массой  $m_1$ , и двух подвижных щек, моделируемых твердыми телами с одинаковой массой  $m_2$ . Рама закреплена относительно неподвижного основания с помощью линейной пружины с коэффициентами жесткости и вязкости соответственно  $c_1$  и  $b_1$ . Левая и правая щеки упруго закреплены относительно рамы с помощью одинаковых линейных пружин с коэффициентами жесткости и вязкости соответственно  $c$  и  $b$ . Перемещения каждого из тел описываются перемещениями  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  их центров масс вдоль горизонтальной оси  $Ox$  относительно положений равновесия. Взаимодействие щек с обрабатываемой средой моделируется линейной пружиной с коэффициентами жесткости и вязкости соответственно  $c_2$  и  $b_2$ ,

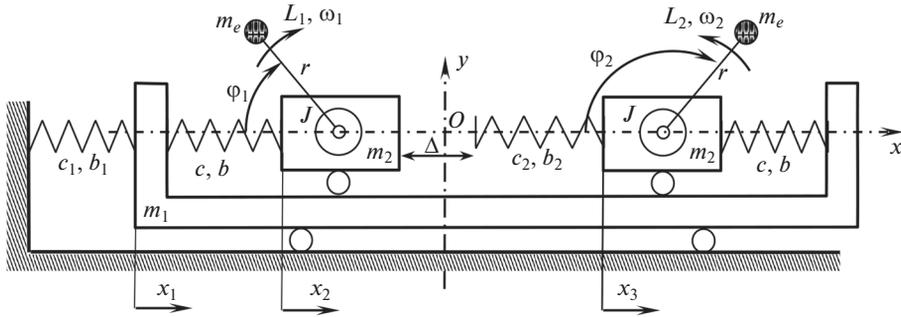


Рис. 1. Расчетная схема.

закрепленной на правой щеке и установленной с зазором  $\Delta$  относительно левой щеки. При этом величина  $\Delta$  характеризует степень наполненности рабочей камеры дробилки обрабатываемой средой. Уменьшение величины  $\Delta$  соответствует увеличению наполненности объема рабочей камеры дробилки. Значения  $\Delta < 0$  соответствуют возникновению давления среды на щеки. Таким образом, взаимодействие щек с обрабатываемой средой описывается кусочно-линейной функцией вида

$$\Phi^* = \begin{cases} 0, & \text{при } x_2 - x_3 - \Delta \leq 0, \\ c_2(x_2 - x_3 - \Delta) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), & \text{при } x_2 - x_3 - \Delta > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Колебания системы возбуждаются с помощью двух одинаковых дебалансных вибровозбудителей с массой дисбаланса  $m_e$  и эксцентриситетом  $r$ , жестко закрепленных на щеках. Вращение каждого из дебалансов осуществляется асинхронным электродвигателем, с приведенным к валу моментом инерции  $J_0$ . Крутящий момент каждого двигателя описывается его статической характеристикой [6], который с учетом момента трения в опорных подшипниках вала дебаланса описывается функцией  $L_i$  ( $i = 1, 2$  – номер дебаланса). Положения дисбалансов описываются углами поворота  $\phi_i$ , отсчитываемыми от отрицательного направления оси  $Ox$ .

Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \Phi + \mathbf{P}, \\ J\ddot{\phi}_1 = L_1(\phi_1) + m_e r \ddot{x}_2 \sin \phi_1, \\ J\ddot{\phi}_2 = L_2(\phi_2) + m_e r \ddot{x}_3 \sin \phi_2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = c \begin{bmatrix} 2 + \frac{c_1}{c} & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = b \begin{bmatrix} 2 + \frac{b_1}{b} & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi^* \\ \Phi^* \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_e r (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) \\ m_e r (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \end{bmatrix}, \text{ где } m = m_2 + m_e; J = J_0 + m_e r^2; \text{ точками обозначено дифференцирование по времени } \tau.$$

Представленная система уравнений позволяет провести анализ динамики дробилки с учетом возможного отрыва щек от обрабатываемой среды.

Вводя замену переменных  $x_j = \sum_{i=1}^3 u_{ij} q_i$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), где  $u_{ij}$  – элементы матрицы

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & u_{31} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

составленной из собственных векторов для порождающей системы

первых трех уравнений (2), получим систему уравнений движения относительно новых (главных) координат  $q_i$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 = [-b_{11}^* \dot{q}_1 - b_{13}^* \dot{q}_3 + P_2 + P_3]/m_{11}^*, \\ \ddot{q}_2 + p_2^2 q_2 = [-b_{22}^* \dot{q}_2 + 2\Phi^*(q_2, \dot{q}_2) - P_2 + P_3]/m_{22}^*, \\ \ddot{q}_3 + p_3^2 q_3 = [-b_{31}^* \dot{q}_1 - b_{33}^* \dot{q}_3 + P_2 + P_3]/m_{33}^*, \\ \dot{\varphi}_1 = [L_1(\varphi_1) + m_e r(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \sin \varphi_1]/J, \\ \dot{\varphi}_2 = [L_2(\varphi_2) + m_e r(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \sin \varphi_2]/J, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m_{ij}^*$ ,  $b_{ij}^*$  – соответствующие элементы матрицы масс  $\mathbf{M}^*$  и демпфирования  $\mathbf{B}^*$ , определяемые выражениями:  $\mathbf{M}^* = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{B}^* = \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U}$ ;  $p_j$  – собственные частоты, и

$$\Phi^*(q_2, \dot{q}_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } -2q_2 - \Delta \leq 0, \\ c_2(-2q_2 - \Delta) + b_2(-2\dot{q}_2), & \text{при } -2q_2 - \Delta > 0. \end{cases}$$

Выбирая масштаб времени  $T_* = 1/p_2$  и масштаб перемещений  $X_* = m_e r/m_{22}^*$ , и вводя безразмерное время  $t = \tau/T_*$  и координаты  $y_j = q_j/X_*$ , приведем систему (3) к безразмерному виду

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\lambda \mu_1 (\beta_1 \dot{y}_1 + \beta_4 \dot{y}_3) + n_1^2 y_1 = \mu_1 \left( \sum_{i=1}^2 (\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \ddot{y}_2 + 2\lambda \dot{y}_2 + y_2 - 2\Phi^{**}(y_2, \dot{y}_2) = \left( \sum_{i=1}^2 (-1)^i (\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \ddot{y}_3 + 2\lambda \mu_2 (\beta_4 \dot{y}_1 + \beta_3 \dot{y}_3) + n_3^2 y_3 = \mu_2 \left( \sum_{i=1}^2 (\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \dot{\varphi}_1 = N_1(\varphi_1) + J_* (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = N_2(\varphi_2) + J_* (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_2, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\Phi^{**}(y_2, \dot{y}_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } -2y_2 - \Delta^* \leq 0, \\ (n_2^2(-2y_2 - \Delta^*) + 2\lambda \beta_2(-2\dot{y}_2)), & \text{при } -2y_2 - \Delta^* > 0; \end{cases}$$

$$n_1 = p_1/p_2; \quad n_2 = \sqrt{c_2/m_{22}^*/p_2}; \quad n_3 = p_3/p_2; \quad \mu_1 = m_{22}^*/m_{11}^*; \quad \mu_2 = m_{22}^*/m_{33}^*;$$

$$\beta_1 = b_{11}^*/b_{22}^*; \quad \beta_2 = b_2/b_{22}^*; \quad \beta_3 = b_{33}^*/b_{22}^*; \quad \beta_4 = b_{13}^*/b_{22}^* = b_{31}^*/b_{22}^*;$$

$$\lambda = b_{22}^* T_*/2m_{22}^*; \quad N_i(\varphi_i) = L_i(\varphi_i)/L_*; \quad L_* = J/T_*^2; \quad J_* = m_{22}^* X_*^2/J; \quad \Delta^* = \Delta/X_*;$$

точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $t$ .

Система (4) полностью эквивалентна системе (2) однако более удобна для анализа, т.к. существенно-нелинейная функция  $\Phi^{**}$  содержится только в одном уравнении.

В рамках рассматриваемой постановки задачи будем искать решения системы соответствующие установившимся одночастотным близким к  $2\pi$  периодическим по  $\omega t$  режимам колебаний дробилки при синхронном практически равномерном вращении вибровозбудителей, поскольку именно такие режимы представляют наибольший практический интерес. Решение поставленной задачи получим методами прямого разделения движения и гармонической линеаризации [6, 15, 16]. Учитывая несимметричную характеристику нелинейности во втором уравнении системы (4), приближенные решения, описывающие колебания тел, будем искать в форме

$$y_j = y_j^* + \tilde{y}_j = y_j^* + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{jn} \cos(n\omega t) + D_{jn} \sin(n\omega t)),$$

$$\dot{y}_j = \sum_{n=1}^{\infty} (-\omega B_{jn} \sin(n\omega t) + \omega D_{jn} \cos(n\omega t)),$$

где  $y_j^*$  – смещение центра колебаний, обусловленное несимметричностью функции  $\Phi^{**}$ , зависящее от  $\tilde{y}_j$ . Решения, описывающие вращение вибровозбудителей, будем искать в форме  $\varphi_i = \sigma_i(\omega_i(t)t + \alpha_i)$ ,  $\dot{\varphi}_i = \sigma_i(\omega_i(t) + \omega_{vi})$ ,  $\omega_i(t) = \omega + \omega_{0i}(t)$ , где  $\omega_{0i}$  – медленная компонента, такая, что  $\omega_{0i} \ll \omega$ , а  $\omega_{vi}$  – быстрая компонента с нулевым средним за период по  $\omega t$ ,  $\sigma_i = 1$  при вращении дебаланса в положительном направлении измерения угла  $\varphi$  и  $\sigma_i = -1$  при вращении в обратном направлении.

Для дальнейшего построения решения выполним гармоническую линеаризацию  $\Phi^{**}$ , ограничиваясь учетом в решении  $\tilde{y}_j$  только первой гармоники. Учет более высоких гармоник не вызывает принципиальных затруднений, однако как отмечено в [15] основная качественная информация о свойствах сильно нелинейных систем отражается первой гармоникой колебаний. С учетом предполагаемого характера решений линеаризованное выражение для  $\Phi^{**}$  примет вид

$$\Phi^{***}(y_2, \dot{y}_2) = f_0 + k(y_2 - y_2^*) + \beta_* \dot{y}_2 = f_0 + k\tilde{y}_2 + \beta_* \dot{\tilde{y}}_2,$$

где

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{**}(y_2, \dot{y}_2) d(\omega t) = \frac{n_2^2}{2\pi} \left[ -(2\pi - 2\psi_*) (2y_2^* + \Delta^*) + 4A_{21} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \right)^2} \right],$$

$$k = \frac{1}{\pi A_{21}} \int_0^{2\pi} \Phi^{**}(y_2, \dot{y}_2) \cos(\omega t) d(\omega t) =$$

$$= \frac{n_2^2}{A_{21}\pi} \left[ 2(2y_2^* + \Delta^*) \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \right)^2} - 2A_{21} \left( (\pi - \psi_*) + \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \right)^2} \right) \right],$$

$$\beta_* = -\frac{1}{\pi \omega A_{21}} \int_0^{2\pi} \Phi^{**}(y_2, \dot{y}_2) \sin(\omega t) d(\omega t) =$$

$$= -\frac{4\lambda\beta_2}{\pi} \left[ (\pi - \psi_*) - \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \right)^2} \right],$$

$$\psi_* = \arccos \left( -\frac{\Delta^* + 2y_2^*}{2A_{21}} \right), \quad A_{21} = \sqrt{B_{21}^2 + D_{21}^2}.$$

Линеаризуем так же моментные характеристики двигателей  $N_i(\dot{\varphi}_i)$  вблизи парциальной частоты вращения вибровозбудителей  $\dot{\varphi}_i = \sigma_i \omega_{pi}$  (т.е. частоты вращения при установке вибровозбудителя на неподвижном основании), полагая ее близкой к рабочей частоте

$$N_i(\dot{\varphi}_i) = N_{0i}(\sigma_i \omega_{pi}) - h_i(\dot{\varphi}_i - \sigma_i \omega_{pi}),$$

где  $h_i$  – крутизна моментной характеристики электродвигателя  $i$ -го вибровозбудителя.

Подставляя полученные выражения в (4), и применяя метод прямого разделения движений, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\lambda\mu_1(\beta_1\dot{y}_1 + \beta_4\dot{y}_3) + n_1^2\ddot{y}_1 = \mu_1 \left( \sum_{i=1}^2 (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \ddot{y}_2 + (2\lambda - 2\beta_*)\ddot{y}_2 + (1 - 2k)\ddot{y}_2 = \left( \sum_{i=1}^2 (-1)^i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \ddot{y}_3 + 2\lambda\mu_2(\beta_4\dot{y}_1 + \beta_3\dot{y}_3) + n_3^2\ddot{y}_3 = \mu_2 \left( \sum_{i=1}^2 (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) \right), \\ \dot{\omega}_{v1} = -h_1\omega_{v1} + \sigma_1 V_1^*, \\ \dot{\omega}_{v2} = -h_2\omega_{v2} + \sigma_2 V_2^*, \\ \dot{\omega}_1 = -h_1(\omega_1 - \omega_{p1}) + \sigma_1 [N_{01}(\sigma_1 \omega_{p1}) + V_1], \\ \dot{\omega}_2 = -h_2(\omega_2 - \omega_{p2}) + \sigma_2 [N_{02}(\sigma_2 \omega_{p2}) + V_2], \end{cases} \quad (5)$$

где  $V_1 = \langle J_*(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_1 \rangle$ ;  $V_2 = \langle J_*(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_2 \rangle$ ;  $V_1^* = J_*(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_1 - V_1$ ;  $V_2^* = J_*(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \sin \varphi_2 - V_2$ ;  $\langle \rangle$  – обозначен оператор усреднения за период по  $\omega t$ . Величина  $y_2^*$  определяется выражением  $y_2^* = 2f_0$ , а  $y_1^* = y_3^* = 0$ .

Полученная система уравнений включает уравнения, описывающие быстрые движения – первые пять уравнений (5), и уравнения для медленных движений – последние два уравнения (5). В разыскиваемых установившихся синхронных режимах движения системы величины  $V_1^*$  и  $V_2^*$  можно считать малыми, и их можно представить в виде  $V_i^* = \varepsilon V_i^{**}$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Разыскивая решения (5) в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ , после подстановки их в (5) и выполнения преобразований, получим систему уравнений для определения решений в первом приближении в виде

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\lambda\mu_1(\beta_1\dot{y}_1 + \beta_4\dot{y}_3) + n_1^2\ddot{y}_1 = \mu_1 \left( \sum_{i=1}^2 \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i \right), \\ \ddot{y}_2 + (2\lambda - 2\beta_*)\ddot{y}_2 + (1 - 2k)\ddot{y}_2 = \left( \sum_{i=1}^2 (-1)^i \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i \right), \\ \ddot{y}_3 + 2\lambda\mu_2(\beta_4\dot{y}_1 + \beta_3\dot{y}_3) + n_3^2\ddot{y}_3 = \mu_2 \left( \sum_{i=1}^2 \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i \right), \\ \dot{\omega}_{v1} = -h_1\omega_{v1}, \\ \dot{\omega}_{v2} = -h_2\omega_{v2}, \\ \dot{\omega}_1 = -h_1(\omega_1 - \omega_{p1}) + \sigma_1 [N_{01}(\sigma_1 \omega_{p1}) + V_1], \\ \dot{\omega}_2 = -h_2(\omega_2 - \omega_{p2}) + \sigma_2 [N_{02}(\sigma_2 \omega_{p2}) + V_2]. \end{cases} \quad (6)$$

Стационарным решениям (6) соответствуют значения частот  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{v1} = \omega_{v2} = 0$ , и фаз  $\alpha_i = \text{const}$ . При этом вращение вибровозбудителей определяется выражением  $\varphi_i = \sigma_i(\omega t + \alpha_i)$ ,  $\dot{\varphi}_i = \sigma_i\omega$  и соответствует равномерному вращению с постоянной частотой  $\omega$ , которая определяется из дальнейшего решения (6). Рассматривая частоту  $\omega$  в качестве параметра и подставляя выражения для  $\varphi_i$  в первые три уравнения (6) определяем решения  $\tilde{y}_j$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= B_{11} \sum_{i=1}^2 \cos \varphi_i + D_{11} \sum_{i=1}^2 \sin \varphi_i, \\ \tilde{y}_2 &= B_{21} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \cos \varphi_i + D_{21} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \sin \varphi_i, \\ \tilde{y}_3 &= B_{31} \sum_{i=1}^2 \cos \varphi_i + D_{31} \sum_{i=1}^2 \sin \varphi_i,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $B_{j1} = \text{Re}(A_{j1}^*)$ ;  $D_{j1} = \text{Im}(A_{j1}^*)$ ;  $A_{11}^* = \omega^2 \frac{\mu_1 L_{33} - \mu_2 L_{13}}{L_{11} L_{33} - L_{13} L_{31}}$ ;  $A_{21}^* = \omega^2 \frac{1}{L_{22}}$ ;  $A_{31}^* = \omega^2 \frac{\mu_2 L_{11} - \mu_1 L_{31}}{L_{11} L_{33} - L_{13} L_{31}}$ ;  $L_{11} = n_1^2 - \omega^2 + 2\lambda\mu_1\beta_1\omega i$ ;  $L_{13} = 2\lambda\mu_1\beta_4\omega i$ ;  $L_{22} = (1 - 2k) - \omega^2 + (2\lambda - 2\beta_*)\omega i$ ;  $L_{31} = 2\lambda\mu_2\beta_4\omega i$ ;  $L_{33} = n_3^2 - \omega^2 + 2\lambda\mu_2\beta_3\omega i$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Далее для определенности будем считать, что приводные электродвигатели вибровозбудителей обладают одинаковыми моментными характеристиками (данное условие обычно выполняется на практике за счет соответствующего подбора электродвигателей). Следовательно,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ ,  $\sigma_1 N_{01}(\sigma_1 \omega_{p1}) = \sigma_2 N_{02}(\sigma_2 \omega_{p2}) = N_0(\omega_p)$ , где в соответствии с выбранными направлениями вращений (рис. 1)  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 1$ . Тогда, подставляя найденные решения для быстрых движений (7) в последние два уравнения (6) и выполняя усреднение по  $\omega t$ , получим систему из двух уравнений для определения частоты  $\omega$  и взаимной фазы вращений вибровозбудителей  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\begin{cases} -h(\omega - \omega_p) + N_0(\omega_p) - \frac{1}{2} J_* \omega^2 (H_1 \sin(\alpha) + Q_2 + Q_1 \cos(\alpha)) = 0, \\ -h(\omega - \omega_p) + N_0(\omega_p) - \frac{1}{2} J_* \omega^2 (-H_1 \sin(\alpha) + Q_2 + Q_1 \cos(\alpha)) = 0, \end{cases}\quad (8)$$

где  $H_1 = B_{11} - B_{21} + B_{31}$ ,  $Q_1 = D_{11} - D_{21} + D_{31}$ ,  $Q_2 = D_{11} + D_{21} + D_{31}$ .

Вычитая из первого уравнения системы (8) второе уравнение получим уравнение

$$-J_* \omega^2 H_1 \sin(\alpha) = 0,$$

которое имеет два различных решения:  $\alpha = 0$  соответствующее синхронному синфазному вращению вибровозбудителей, и  $\alpha = \pi$  – соответствующее их синхронному противофазному вращению.

Складывая оба уравнения системы (8) получим уравнение

$$-2h(\omega - \omega_p) + 2N_0(\omega_p) - J_* \omega^2 (Q_2 + Q_1 \cos(\alpha)) = 0,$$

выражающее баланс подводимой и рассеиваемой мощностей в системе, из которого определяется частота  $\omega$  синхронного вращений вибровозбудителей.

Анализ устойчивости найденных решений проводится известными методами теории устойчивости [6, 16, 17] на основе анализа корней характеристического уравнения для системы уравнений в вариациях. Для этого в первую очередь определяются асимптоты

тотически устойчивые решения для системы уравнений, описывающих быстрые движения. Далее для выбранных устойчивых решений быстрых движений выполняется проверка на устойчивость по уравнениям в вариациях для медленных движений, которые имеют вид

$$\begin{cases} \delta\dot{\alpha}_1 = \delta\omega_1, \\ \delta\dot{\alpha}_2 = \delta\omega_2, \\ \delta\dot{\omega}_1 = -h_1\delta\omega_1 + \sigma_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \frac{\partial V_1}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \omega_2} \delta\omega_2 \right), \\ \delta\dot{\omega}_2 = -h_2\delta\omega_2 + \sigma_2 \left( \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \frac{\partial V_2}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \delta\omega_2 \right). \end{cases}$$

Уравнения в вариациях для быстрых движений в настоящей статье не приводятся ввиду громоздкости их выражений вследствие высокого порядка системы. Их получение не вызывает принципиальных затруднений, а анализ характеристических показателей выполняется численно.

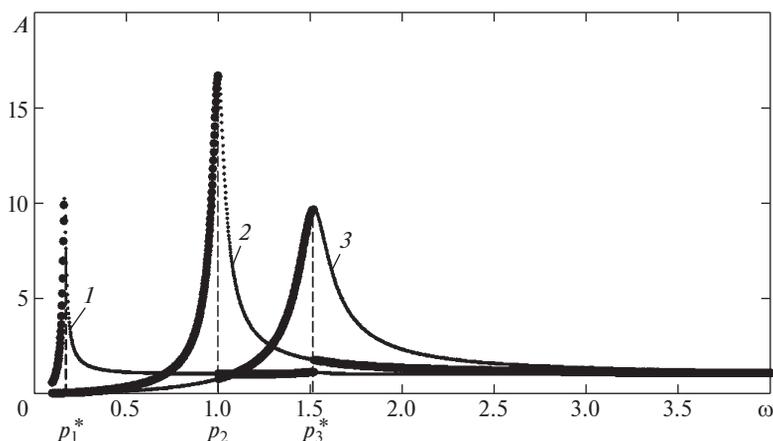
Анализ устойчивости решений существенно упрощается при рассмотрении колебаний вдали от резонанса [1, 14]. В этом случае устойчивость решений определяется корнем  $\chi$  уравнения

$$-J_*\omega^2 H_1 \cos(\alpha) - \chi = 0.$$

Решения устойчивы при  $\chi < 0$ , и, следовательно, критерий устойчивости можно записать в виде  $-J_*\omega^2 H_1 \cos(\alpha) < 0$ .

**Результаты моделирования.** Для выявления влияния взаимодействия шек с обрабатываемой средой на синхронные режимы вращения вибровозбудителей и колебаний шек рассматривались колебания модели дробилки при различной степени наполненности ее рабочей камеры, характеризуемой величиной исходного зазора  $\Delta^*$ . Расчеты проводились при варьировании значений исходного зазора в диапазоне  $\Delta^* = [-10, 20]$ . В результате расчетов были получены амплитудно-частотные характеристики системы (АЧХ) и определены области частот с устойчивыми синхронными синфазным и противофазным вращениями вибровозбудителей и колебаниями шек (в дальнейшем говоря о синхронном противофазном или синфазном вращении вибровозбудителей будем подразумевать и соответствующие синхронные колебания шек). Полученные результаты сравнивались с аналогичными характеристиками для модели дробилки, в которой не учитывается прерывистое взаимодействие шек с обрабатываемой средой (подобные модели обычно применяются при практических расчетах ВЦД). Последняя модель формально была получена из исходной при выборе величины зазора  $\Delta^*$  заведомо в несколько раз большей, чем максимальная величина амплитуды колебаний  $A_{21}$  в исследуемом диапазоне частот  $\omega$ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров системы:  $n_1 = 0.166$ ;  $n_2 = 6$ ;  $n_3 = 1.515$ ;  $\mu_1 = 1$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\beta_1 = 0.271$ ;  $\beta_2 = 10$ ;  $\beta_3 = 2.623$ ;  $\beta_4 = -0.281$ ;  $\lambda = 0.03$ ;  $h = 100$ ;  $J_* = 0.05$ .

На рис. 2 представлены АЧХ для каждой из координат  $\tilde{y}_j$  системы для модели дробилки, в которой не учитывается прерывистое взаимодействие шек с обрабатываемой средой. Номера линий на графиках соответствуют номерам координат. Представленные АЧХ координат  $\tilde{y}_1$  и  $\tilde{y}_3$  соответствуют случаю  $\alpha = 0$  (при котором, в соответствии со структурой уравнений (7),  $\tilde{y}_2 = 0$  во всей частотной области), а АЧХ координаты  $\tilde{y}_2$  соответствует случаю  $\alpha = \pi$  (при котором во всей частотной области  $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_3 = 0$ ). Жирными точками на кривых 1 и 3 отмечены участки характеристик, соответствующие устойчивым режимам с синхронным синфазным вращением вибровозбудителей ( $\alpha = 0$ ), а на кривой 2 – соответствующие устойчивым режимам с синхронным противофазным



**Рис. 2.** АЧХ модели дробилки не учитывающей прерывистое взаимодействие между щеками и обрабатываемой средой: 1 – для координаты  $\tilde{y}_1$  при  $\alpha = 0$ ; 2 – для координаты  $\tilde{y}_2$  при  $\alpha = \pi$ ; 3 – для координаты  $\tilde{y}_3$  при  $\alpha = 0$ .

вращением вибровозбудителей ( $\alpha = \pi$ ). Видно, что при возбуждении колебаний в областях частот между первой и второй резонансными частотами системы и за третьей резонансной частотой, т.е. при  $\omega \in (p_1^*, 1) \cup (p_3^*, \infty)$ , ( $p_1^* = n_1$ ,  $p_3^* = n_3$ ), реализуются синхронные режимы с устойчивым противофазным вращением вибровозбудителей. В остальных областях частот устойчивыми являются режимы с синхронным синфазным вращением вибровозбудителей.

На рис. 3–5 представлены АЧХ для каждой из координат  $\tilde{y}_j$  системы для модели дробилки учитывающей прерывистое взаимодействие щек с обрабатываемой средой, полученные при значениях зазора  $\Delta^* = \{20; 5; 0; -5; -10\}$  соответственно. Принятые на этих рисунках обозначения аналогичны обозначениям на рис. 2. Видно, что АЧХ первой и третьей координат системы, а, следовательно, первая и третья резонансные частоты, в первом приближении не зависят от  $\Delta^*$  (как и следовало ожидать исходя из вида уравнений (7)). АЧХ координаты  $\tilde{y}_2$  и области частот устойчивой противофазной синхронизации вращения вибровозбудителей оказываются существенно зависящими от  $\Delta^*$ .

При  $\Delta^* > 0$  (рис. 3) АЧХ модели соответствует системе с жесткой характеристикой нелинейности. При этом наблюдается расширение области частот устойчивой противофазной синхронизации вращения вибровозбудителей за счет увеличения второй резонансной частоты. Отметим, что рабочим режимам дробилки соответствует лишь область частот  $\omega \in (\omega_1^*, \omega_3^*)$ , в которой происходит взаимодействие щек с обрабатываемой средой. С уменьшением  $\Delta^*$  область частот устойчивой противофазной синхронизации расширяется. В области частот  $\omega \in (\omega_1^*, \omega_3^*) \cap (\omega_2^*, p_3^*)$  могут реализовываться как устойчивые синхронно-синфазные режимы колебаний так и устойчивые синхронно-противофазные режимы колебаний.

При  $\Delta^* = 0$  (рис. 4) система становится изохронной с увеличенной (по отношению к системе, не учитывающей прерывистое взаимодействие щек со средой) приблизительно в  $\sqrt{3}$  раз второй резонансной частотой. В этом случае колебания системы происходят при прерывистом взаимодействии щек со средой при любой ненулевой амплитуде колебаний координаты  $\tilde{y}_2$ . При этом область частот устойчивой противофаз-

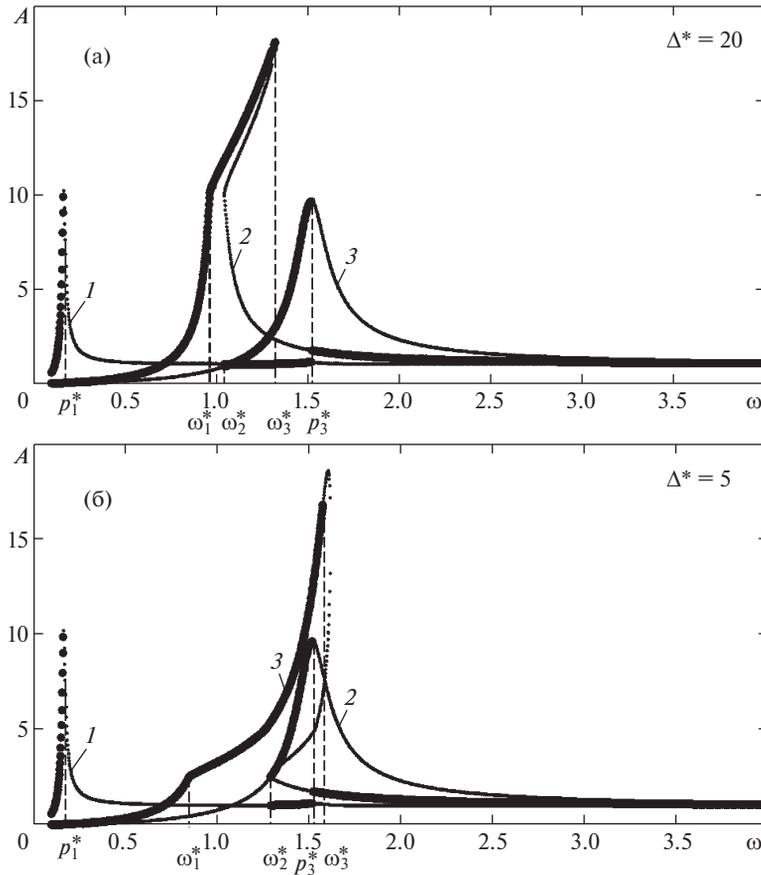


Рис. 3. АЧХ модели дробилки: (а) – при  $\Delta^* = 20$ , (б) – при  $\Delta^* = 5$ ; 1 – для координаты  $\tilde{y}_1$  при  $\alpha = 0$ ; 2 – для координаты  $\tilde{y}_2$  при  $\alpha = \pi$ ; 3 – для координаты  $\tilde{y}_3$  при  $\alpha = 0$ .

ной синхронизации вращения вибровозбудителей состоит из трех участков  $\omega \in (p_1^*, \omega_1^*) \cup (\omega_2^*, \omega_3^*) \cup (\omega_5^*, \infty)$ . Важно отметить, что в этом случае в области частот  $\omega \in (p_3^*, \infty)$  появляется область частот  $\omega \in (\omega_4^*, \omega_5^*)$  с устойчивыми синхронно-синфазными режимами вращения вибровозбудителей, при которых не возбуждаются встречные колебания щек, необходимые для нормальной работы дробилки.

При  $\Delta^* < 0$  (рис. 5) АЧХ модели соответствует системе с мягкой характеристикой нелинейности.

Область частот устойчивой противофазной синхронизации вибровозбудителей состоит из трех диапазонов  $\omega \in (p_1^*, \omega_1^*) \cup (p_3^*, \omega_3^*) \cup (\omega_4^*, \infty)$ . При этом в диапазоне частот  $\omega \in (p_1^*, \omega_1^*) \cup (p_3^*, \omega_3^*)$ , возбуждаемые противофазные колебания щек происходят без отрыва от обрабатываемой среды, что является малоэффективным для ее дробления. При  $\omega > \omega_4^*$  возбуждаемые противофазные колебания щек соответствуют требуемому виброударному режиму их взаимодействия со средой. В области частот  $\omega \in (p_3^*, \infty)$  появляется область частот  $\omega \in (\omega_2^*, \omega_4^*)$  с устойчивыми синхронно-синфазными режима-

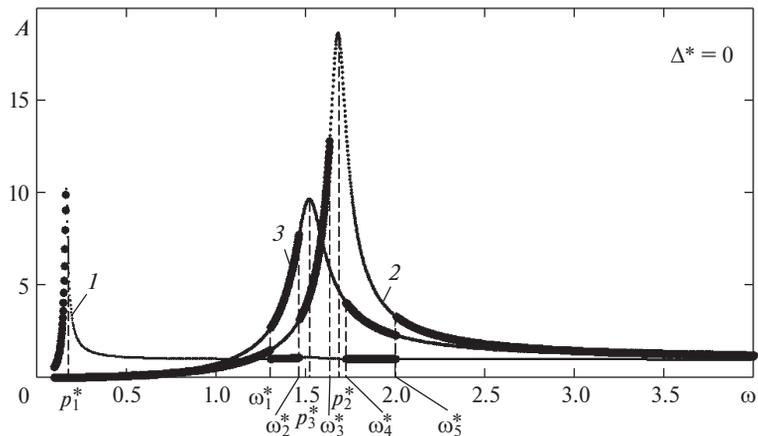


Рис. 4. АЧХ модели дробилки при  $\Delta^* = 0$ : 1 – для координаты  $\tilde{y}_1$  при  $\alpha = 0$ ; 2 – для координаты  $\tilde{y}_2$  при  $\alpha = \pi$ ; 3 – для координаты  $\tilde{y}_3$  при  $\alpha = 0$ .

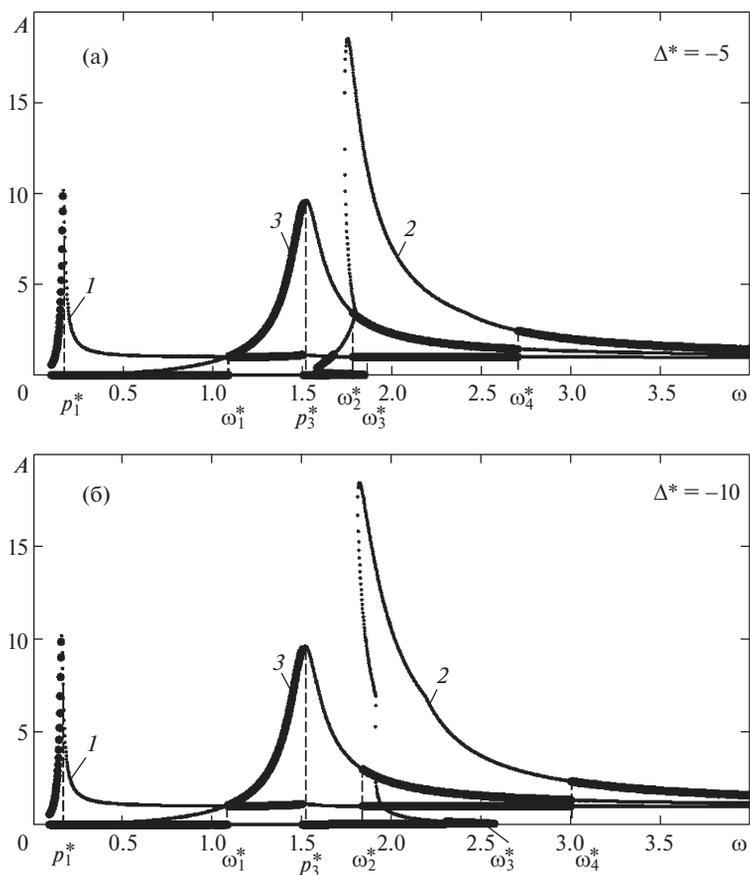


Рис. 5. АЧХ модели дробилки: (а) – при  $\Delta^* = -5$ ; (б) – при  $\Delta^* = -10$ ; 1 – для координаты  $\tilde{y}_1$  при  $\alpha = 0$ ; 2 – для координаты  $\tilde{y}_2$  при  $\alpha = \pi$ ; 3 – для координаты  $\tilde{y}_3$  при  $\alpha = 0$ .

ми вращения вибровозбудителей. При уменьшении  $\Delta^*$  (т.е. при увеличении давления среды на щеки) наблюдается увеличение граничных частот  $\omega_2^*$  и  $\omega_4^*$ , что означает увеличение нижней граничной частоты области рабочих частот дробилки.

**Заключение.** Представленная модель ВЩД в виде трехмассовой колебательной системы с самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями и нелинейным упруго-вязким элементом между щеками позволяет учесть прерывистый характер взаимодействия щек с обрабатываемым материалом, и проанализировать его влияние на синхронные режимы колебаний дробилки. В результате выполненного анализа динамики модели установлено, что области частот устойчивой противофазной синхронизации вращения вибровозбудителей, требуемой для нормальной работы дробилки, существенно зависят от зазора  $\Delta^*$  между щекой и элементом среды. Первая и третья резонансные частоты системы, оказались не зависящими от величины  $\Delta^*$ . Наиболее чувствительной к величине  $\Delta^*$  оказалась вторая резонансная частота. При значениях  $\Delta^* > 0$ , уменьшение  $\Delta^*$  (т.е. увеличение наполненности объема рабочей камеры дробилки) приводит к расширению области частот устойчивой противофазной синхронизации вибровозбудителей за счет увеличения второй резонансной частоты колебаний щек. При отсутствии исходного зазора и возникновении давления среды на щеки, в зарезонансной области частот (за третьим резонансом) возможно появление области частот устойчивой синфазной синхронизации вращения вибровозбудителей, которая при наличии зазора обычно является областью частот устойчивости синхронного противофазного вращения вибровозбудителей. Таким образом, при неизменной частоте возбуждения колебаний изменение исходного зазора между щеками и обрабатываемой средой может приводить к изменению типа синхронизации вращения вибровозбудителей и соответственно колебаний щек. Представленные результаты показывают, что при разработке ВЩД с самосинхронизирующимися вибровозбудителями следует применять модели, учитывающие упруго-диссипативные свойства обрабатываемой среды и прерывистый характер ее взаимодействия со щеками.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-08-01491\_а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука. 1971. 896 с.
2. *Nijmeijer H., Rodriguez-Angeles A.* Synchronization of mechanical systems. Singapore: World Scientific Publishing. 2003. 220 с.
3. *Nagaev R.* Dynamics of synchronizing systems. Berlin: Springer-Verlag. 2003. 326 с.
4. *Вайсберг Л.А., Зарогатский Л.П., Туркин В.Я.* Вибрационные дробилки. Основы расчета, проектирования и технологического применения. Санкт-Петербург: изд. ВСЕГЕИ. 2004. 305 с.
5. *Нагаев Р.Ф., Туркин В.Я., Шишкин Е.В.* Динамика вибрационной щековой дробилки с жестким креплением вибровозбудителей // Обогащение руд. 2002. № 3. С. 140.
6. *Blekhman I.I.* Vibrational Mechanics. Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. Singapore: World Scientific. 2000. 509 с.
7. *Gousskov A.M., Panovko G.Ya.* On parametric oscillations of pendular and rotor systems // Journal of Vibroengineering. 2008. V. 10. Iss. 3. С. 277.
8. *Тягушев С.Ю., Туркин В.Я., Шонин О.Б.* Стабилизация синхронно-противофазного режима вибрационной щековой дробилки средствами автоматизированного электропривода // Обогащение руд. 2011. № 2. С. 38.
9. *Архипов М.Н., Ветюков М.М., Нагаев Р.Ф., Утимшиев М.М.* Динамика вибрационной щековой дробилки при учете влияния разрушаемого материала // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 1. С. 21.

10. *Шишкин Е.В., Сафронов А.Н.* Динамика вибрационной щековой дробилки с учетом влияния технологической нагрузки // Обогащение руд. 2016. № 6. С. 39.
11. *Нагаев Р.Ф., Карагулов Р.Р.* Динамика вибрационной машины с учетом влияния обрабатываемого материала // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 1. С. 48.
12. *Нагаев Р.Ф., Утимишев М.М.* О движении материала в рабочей полости вибрационной щековой дробилки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 1. С. 85.
13. *Гончаревич И.Ф., Фролов К.В.* Теория вибрационной техники и технологии. М.: Наука. 1981. 319 с.
14. *Astashev V., Babitsky V., Kolovsky M.* Dynamics and Control of Machines. Berlin: Springer. 2000. 233 с.
15. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. 2001. 404 с.
16. *Бесекецкий В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука. 1975. 768 с.
17. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения, М.: Наука, 1966. 531 с.

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 666.3-122

**ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА SiC НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ  
СВОЙСТВА РЕАКЦИОННО-СПЕЧЕННОГО КАРБИДА КРЕМНИЯ**

© 2020 г. С. Н. Перевислов<sup>1,\*</sup>, М. В. Томкович<sup>2</sup>, М. А. Марков<sup>3</sup>,  
И. Н. Кравченко<sup>4</sup>, Ю. А. Кузнецов<sup>5</sup>, М. Н. Ерофеев<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Институт химии силикатов им. И.В. Гребенщикова РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> НИЦ “Курчатовский институт” – ЦНИИ КМ “Прометей”, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>5</sup> Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина, Орел, Россия

\*e-mail: perevislov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.06.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

В статье получены плотные керамические материалы на основе карбида кремния, методом реакционного спекания, с высоким уровнем механических свойств, применяемые в качестве узлов трения (подшипников скольжения, деталей пар трения) и высокотемпературных изделий, огнеупорных материалов и др. Показано влияние разного дисперсного состава порошков карбида кремния, на микроструктуру, размер зерен после спекания, а также физико-механические свойства.

*Ключевые слова:* карбид кремния, реакционное спекание, физико-механические свойства, микроструктура

**DOI:** 10.31857/S0235711920060073

Карбид кремния является материалом, обладающим чрезвычайно широким комплексом свойств, таким как высокая прочность и теплопроводность, низкий коэффициент линейного термического расширения, сохранение уровня механических свойств в широком температурном интервале, стойкость к окислению до критических температур и высокая твердость, что позволяет использовать SiC в качестве высокопрочных материалов, работающих в экстремальных условиях значительных температур и агрессивных сред [1, 2]. Также, благодаря своей износостойкости, карбид кремния используют для получения абразивных кругов, шлифовальных материалов, подшипников скольжения и качения и абразивного инструмента для обработки жаростойких сплавов в машиностроении [3–5].

Материалы на основе карбида кремния получают разными способами: горячим и горячим изостатическим прессованием, жидкофазным и реакционным спеканием. Максимальные свойства достигаются при использовании первых двух методов, однако из-за высокой энергоемкости и технологической сложности производства они не нашли широкого применения [6].

Наиболее технологичным является метод реакционного спекания, которым получают материалы, имеющие ряд преимуществ: использование более дешевых крупных исходных порошков, низкие температуры спекания, получение практически безусадочных изделий, что позволяет использовать метод для изготовления деталей любой сложности и конфигурации в промышленном масштабе [7].

**Таблица 1.** Составы материалов, исследуемые в работе

№ состава	Содержание карбида кремния, мас. %			Углерод, мас. %
	Марки М40	Марки М28	Марки М5	
1	50	30	20	15
2	60	40	–	15
3	60	–	40	15
4	60	30	10	15
5	70	30	–	15
6	50	20	30	15
7	70	–	30	15
8	80	–	20	15
9	50	50	–	15
10	50	10	40	15

Целью статьи является изучение влияния различного дисперсного состава порошков карбида кремния на физико-механические свойства (плотность заготовок при формовании, плотность спеченных материалов, пористость, модуль упругости, прочность при изгибе, коэффициент трещиностойкости, твердость по Виккерсу) материалов, полученных реакционным спеканием (пропиткой жидким кремнием).

**Материалы и методы исследования.** Реакционно-спеченный (“самосвязанный”) карбид кремния получают пропиткой жидким кремнием пористых заготовок, состоящих из частиц первичного карбида кремния ( $\text{SiC}^I$ ) и углерода, за счет растворения углерода и его транспорта через расплав кремния, и кристаллизации, на поверхности первичных частиц, вторичного карбида кремния ( $\text{SiC}^{II}$ ) [8, 9].

Как показано в работе [10] для максимальной упаковки частиц при формовании изделий необходимо использовать порошки карбида кремния разного гранулометрического состава. Составы материалов, исследуемые в работе, представлены в табл. 1. Углерод в количестве 15 мас. % (сверх 100%  $\text{SiC}$ ), вводили в материал на стадии перемешивания исходных компонентов.

Размер частиц порошка карбида кремния определяли на лазерном анализаторе дисперсности MasterSizer 2000: М40 –  $d_{0,5} = 27.8$  мкм; М28 –  $d_{0,5} = 14.8$  мкм; М5 –  $d_{0,5} = 3.7$  мкм. Порошки карбида кремния в необходимом соотношении перемешивали в барабанном смесителе с техническим углеродом, шихту пластифицировали и гранулировали.

Из полученной шихты методом полусухого формования прессовали образцы размером  $5 \times 5 \times 45$  мм, которые сушили и пропитывали кремнием при температуре  $1600^\circ\text{C}$  в атмосфере вакуума. Спеченные образцы поступали на пескоструйную обработку, для удаления излишков кремния с поверхности материалов.

Плотность образцов определяли методом гидростатического взвешивания. Пористость измеряли с помощью оптического микроскопа Meiji Techno IM 7200 и компьютерного анализатора изображения. Модуль упругости определяли на установке ЗВУК-130, методом резонансных колебаний. Прочность при трехточечном изгибе измеряли на установке ShimadzuAG-300kNX. Твердость и коэффициент трещиностойкости определяли путем внедрения в материал пирамиды Виккерса и измерения размера диагоналей отпечатка и исходящих из его углов трещин на микротвердомере ПМТ-3М. Микроструктуру исследовали на оптическом Meiji Techno IM 7200 и электронном микроскопе TESCAN VEGA 3 SBH.

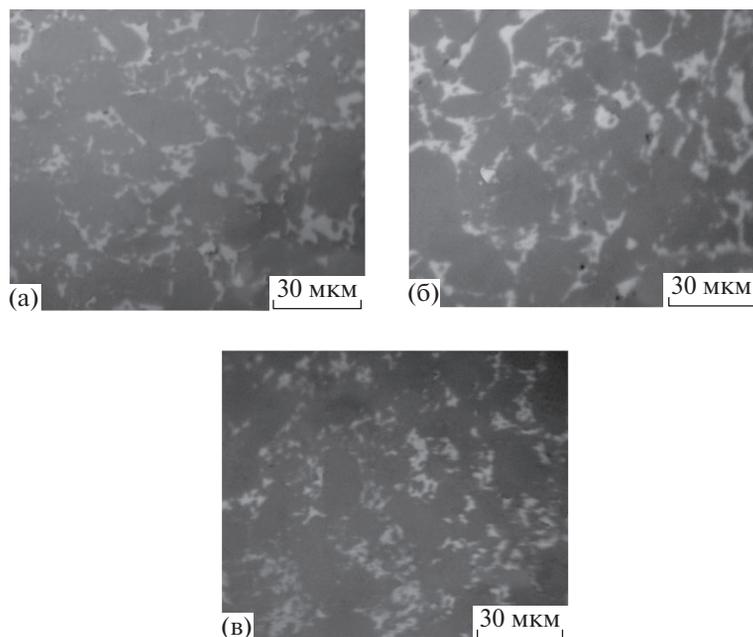


Рис. 1. Микроструктуры реакционно-спеченных SiC-материалов: (а) – состав 1; (б) – состав 2; (в) – состав 10.

**Результаты исследований и их обсуждение.** Реакционное спекание SiC-материалов включает в себя формование заготовок из смеси частиц SiC и углерода. Пористые заготовки пропитывают жидким Si, в результате проходит синтез вторичного карбида кремния, в соответствии с реакцией



В процессе спекания происходит контактное (на границе раздела фаз Si–C) взаимодействие кремния и углерода с образованием вторичного карбида кремния при температуре  $\sim 1200^\circ\text{C}$ . При температуре выше  $1420^\circ\text{C}$  кремний переходит в жидкое состояние, растворяя углерод и насыщая им кремниевый расплав с образованием фазы  $\text{SiC}^{\text{II}}$ , до предела растворимости кремния в карбиде кремния, после чего из расплава начинают кристаллизовываться зерна вторичного карбида кремния в межзеренном пространстве первичных частиц  $\text{SiC}^{\text{I}}$  [11–13]. Микроструктура SiC-материала характеризуется наличием зерен  $\text{SiC}^{\text{I}}$  (темная фаза), фазы  $\text{SiC}^{\text{II}}$  (занимает 15–20 об. %), в межзеренном пространстве первичных частиц и фазы твердого раствора на основе кремния (2–5 об. %) (рис. 1). Таким образом заполняется все поровое пространство до получения плотного монолитного материала [14–18]. Остаточный кремний ( $\text{Si}_{\text{ост}}$ ) или фаза твердого раствора на основе кремния снижают высокотемпературные свойства (температура эксплуатации изделий не превышает  $1200^\circ\text{C}$ ). При температуре  $1300^\circ\text{C}$  керамика начинает разупрочняться и практически полностью теряет прочность при  $1400^\circ\text{C}$ .

Значительный уровень механических свойств может быть достигнут на материалах, характеризующихся высокой плотностью (близкой к теоретической) и низким содержанием дефектов (трещин, пор). Для реакционно-спеченного карбида кремния, при условии практически беспористого материала, определяющим фактором, влияющим

**Таблица 2.** Плотность реакционно-спеченных SiC-материалов, при разном давлении формования заготовок

Давление, МПа	Плотность материалов после спекания $\rho$ ( $\pm 0.02$ ), г/см <sup>3</sup>									
	1 сост.	2 сост.	3 сост.	4 сост.	5 сост.	6 сост.	7 сост.	8 сост.	9 сост.	10 сост.
25	3.02	3.02	3.05	3.03	3.03	3.05	3.07	3.03	3.04	3.08
50	3.04	3.05	3.08	3.04	3.03	3.07	3.08	3.03	3.05	3.09
75	3.05	3.05	3.09	3.05	3.05	3.08	3.09	3.06	3.06	3.11
100	3.07	3.06	3.10	3.06	3.05	3.09	3.10	3.07	3.07	3.12

**Таблица 3.** Модуль упругости реакционно-спеченных SiC-материалов, при разном давлении формования заготовок

Давление, МПа	Модуль упругости материалов $E_{упр}$ ( $\pm 10$ ), ГПа									
	1 сост.	2 сост.	3 сост.	4 сост.	5 сост.	6 сост.	7 сост.	8 сост.	9 сост.	10 сост.
25	362	368	378	365	352	384	387	365	378	389
50	370	378	388	373	361	385	399	372	379	395
75	381	387	391	379	366	388	403	382	381	403
100	387	389	396	386	373	395	405	391	384	409

**Таблица 4.** Прочность при изгибе реакционно-спеченных SiC-материалов, при разном давлении формования заготовок

Давление, МПа	Прочность при изгибе $\sigma_{изг}$ ( $\pm 10$ ), МПа									
	1 сост.	2 сост.	3 сост.	4 сост.	5 сост.	6 сост.	7 сост.	8 сост.	9 сост.	10 сост.
25	315	310	281	288	292	295	249	316	309	324
50	382	335	310	309	300	342	284	338	313	344
75	347	353	339	328	324	361	320	342	327	374
100	385	371	395	377	384	381	358	350	346	400

на значение плотности, является исходный размер частиц SiC, правильность выбранного дисперсного состава, оптимальное давление формования заготовок, что приводит к получению материалов с максимальной плотностью (табл. 2), достигающих наивысшего уровня механических характеристик (табл. 3–5).

При минимальном давлении формования (25 МПа) спеченные материалы характеризуются повышенной пористостью и, как следствие, высоким содержанием  $Si_{ост}$ . На модуль упругости и прочность при изгибе сильно влияет количество остаточного кремния, охрупчивающего материал и уменьшающего уровень его механических свойств (табл. 3, 4).

Наивысшие свойства спеченных материалов достигнуты при оптимальном давлении формования заготовок, поэтому дальнейший комплекс свойств определяли при давлении формования 100 МПа.

Максимальная плотность после спекания у материалов состава 10, при практически равном содержании карбида кремния марок М40 и М5 и небольшом количестве (10 мас. %) порошка SiC марки М28. Для образцов состава 10 характерны высокие механические свойства:  $E_{упр} = 409 \pm 10$  ГПа;  $\sigma_{изг} = 400 \pm 10$  МПа;  $\sigma_{сж} = 2030 \pm 15$  МПа.

**Таблица 5.** Механические свойства реакционно-спеченных SiC-материалов

№ состава	Прочность при сжатии $\sigma_{сж}$ ( $\pm 15$ ), МПа	Коэффициент трещиностойкости $K_{1C}$ ( $\pm 0.2$ ), МПа	Твердость по Виккерсу $HV$ ( $\pm 0.2$ ), ГПа
1	1650	3.4	20.7
2	1587	3.0	20.8
3	1818	3.5	21.0
4	1602	3.2	21.0
5	1851	3.6	21.0
6	1778	3.4	20.8
7	1703	3.4	20.8
8	1567	3.0	21.0
9	1801	3.4	20.5
10	2030	4.0	20.7

**Таблица 6.** Физические свойства реакционно-спеченных материалов

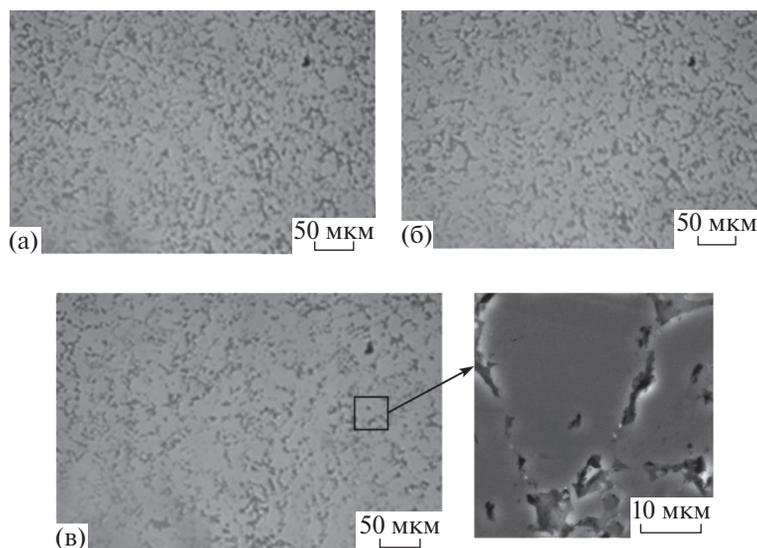
№ состава	Размер зерен SiC <sup>I</sup> $d_{0.5}$ , мкм	Длина пор, мкм		Пористость $P_{общ}$ ,* об. %
		$l_{min}$	$l_{max}$	
1	21.1	1.1	21.8	19.2
2	25.9	1.5	20.6	20.8
3	20.8	2.1	19.6	18.7
4	24.7	2.0	25.7	20.5
5	27.4	1.6	23.4	21.2
6	20.6	1.5	19.4	18.5
7	23.6	1.2	20.9	20.1
8	26.4	1.4	22.0	21.1
9	24.4	1.4	23.4	20.3
10	19.3	1.1	15.4	17.4

\* Пористость керамики после вытравливания кремния и вторичного карбида кремния в 48% фтороводородной кислоте.

Прочность при изгибе и сжатии, коэффициент трещиностойкости и твердость по Виккерсу сильно зависят от Si<sub>ост</sub>, при минимальном его количестве (максимальной плотности – материал состава 10), достигается наивысший уровень механических характеристик (табл. 5). Разрушение материалов подчиняется интеркристаллитному механизму (трещина проходит вдоль зерен, по более слабой межзеренной фазе), что также наблюдается при разрушении материалов на основе карбида бора, полученных реакционным спеканием [19].

Для анализа размера частиц SiC<sup>I</sup>, размера и объемного количества пор, образцы подвергали травлению 48% фтороводородной кислотой в течение 10–15 ч, для удаления фаз SiC<sup>II</sup> и Si<sub>ост</sub>. Микрофотографии травленных шлифов представлены на рис. 2. Физические свойства реакционно-спеченных материалов представлены в табл. 6.

Сравнивая жидкофазно-спеченные [20, 21], горячепрессованные карбидокремниевые [22], спеченные нитридокремниевые [23], реакционно-спеченные материалы на основе карбида бора [24, 25] и твердофазно-спеченные материалы в системе Мо-



**Рис. 2.** Микроструктуры травленных шлифов реакционно-спеченных SiC-материалов: (а) – состав 1; (б) – состав 2; (в) – состав 10.

Si<sub>2</sub>–SiC–ZrB<sub>2</sub> [26], в системе SiC–B<sub>4</sub>C–Me<sup>d</sup>B<sub>2</sub> [27, 28] и армированные материалы [29] с реакционно-спеченными SiC-материалами (табл. 7) можно отметить высокий уровень механических свойств последних, в сочетании с более экономичной технологией производства, что определяет широкий спектр их применения: узлы трения (подшипники скольжения, детали пар трения); лопатки ГТД, работающие в экстремальных условиях высоких температур и агрессивных сред; сопла для пескоструйной обработ-

**Таблица 7.** Физико-механические свойства реакционно-спеченных материалов на основе SiC и Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>

Материал	Метод получения	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$E_{\text{упр}}$ , ГПа	$\sigma_{\text{изг}}$ , МПа	$K_{1C}$ , МПа м <sup>1/2</sup>	$HV$ , ГПа
SiC	Реакционное спекание	3.05–3.10	380–410	380–400	3.5–4.0	20–21
SiC [18, 19]	Жидкофазное спекание	3.20–3.25	420–450	500–550	4.5–5.0	21–22
SiC [20]	Горячее прессование	3.25	450–480	600–650	5.0–5.5	24–26
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> [21]	Жидкофазное спекание	3.15–3.18	430–450	600–650	5.0–5.2	16–17
B <sub>4</sub> C [22, 23]	Реакционное спекание	2.60–2.65	380–420	350–380	3.2–3.5	28–30
MoSi <sub>2</sub> –SiC–TiB <sub>2</sub> [24]	Твердофазное спекание	4.60–4.80	550–580	350–380	4.5–5.0	26–27
SiC–B <sub>4</sub> C–ZrB <sub>2</sub> [25, 26]	Твердофазное спекание	5.20–5.40	560–600	350–380	4.5–5.0	25–26
SiC+10 об. % SiC <sub>f</sub> [27]	Реакционное спекание	3.00–3.05	320–350	420–450	5.0–5.5	19–20

ки; абразивоустойчивые, коррозионноустойчивые, высокотемпературные изделия, а также бронематериалы.

**Выводы. 1.** Путем подбора оптимального дисперсного состава шихты в статье получены высокоплотные керамические материалы ( $\rho = 3.12 \text{ г/см}^3$ ) из карбида кремния методом реакционного спекания. Максимальными механическими свойствами ( $E_{\text{упр}} = 409 \pm 10 \text{ ГПа}$ ;  $\sigma_{\text{изг}} = 400 \pm 10 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{\text{сж}} = 2030 \pm 15 \text{ МПа}$ ) обладает материал, содержащий следующий исходный фракционный состав порошка SiC: марки M40 – 50 мас. %, M28 – 10 мас. % и M5 – 40 мас. %. **2.** Полученные реакционным спеканием материалы на основе карбида кремния, по уровню механических характеристик, приближаются горячепрессованным и жидкофазно-спеченным материалам на основе SiC, при этом имеют ряд преимуществ: использование крупных порошков карбида кремния; более низкая температура спекания; безусадочная технология материалов, что позволяет получать изделия крупных размеров, сложной геометрической формы.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Briggs J.* Engineering ceramics in Europe and the USA J. Briggs // *Enceram.* Meith Wood. UK, Worcester. 2011. 331 p.
2. *Коломейченко А.В.* Повышение износостойкости металлокерамических покрытий, нанесенных методом карбовибродугового упрочнения / Под ред. А.В. Коломейченко, И.Н. Кравченко, Н.В. Титов, М.Н. Ерофеев, С.В. Карцев // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* 2019. № 4. С. 4.
3. *Дроздов Ю.Н.* Трибология технической керамики // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2003. № 6. С. 51.
4. *Носенко В.А.* Влияние контактного взаимодействия на износ абразивного инструмента при шлифовании // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2005. № 1. С. 73.
5. *Дроздов Ю.Н.* Прикладная трибология (трение, износ, смазка) / Под ред. Ю.Н. Дроздова, Е.Г. Юдин, А.И. Белов; под ред. Ю.Н. Дроздова. М.: “Эко-Пресс”, 2010. 604 с.
6. *Гаршин А.П., Гропянов В.М., Зайцев Г.П., Семенов С.С.* Керамика для машиностроения. М.: ООО Изд. “Научтехлитиздат”. 2003. 384 с.
7. *Гаршин А.П., Чулкин С.Г.* Реакционноспеченные карбидокремниевые материалы конструкционного назначения. Физико-механические и триботехнические свойства. СПб.: Изд. Политехнического ун-та. 2006. 84 с.
8. *Параносенков В.П., Чикина А.А., Андреев М.А.* Конструкционные материалы на основе самосвязанного карбида кремния // *Огнеупоры и техническая керамика.* 2006. № 7. С. 37.
9. *Параносенков В.П., Чикина А.А., Шкарупа И.Л.* Самосвязанный карбид кремния ОТМ-923 // *Огнеупоры и техническая керамика.* 2004. № 2. С. 23.
10. *Гаршин А.П.* Структура и свойства конструкционных износостойких материалов на основе карбида кремния, полученных методом реакционного спекания. Дис. ... д.т.н. СПб.: Изд. Политехнического ун-та. 2000. 267 с.
11. *Федорук Р.М., Примаченко В.В., Савина Л.К., Полтарак Е.В. и др.* Исследования влияния добавок графита и удельной поверхности кремния на теплопроводность и другие свойства реакционно связанных карбидокремниевых изделий // *Сборник научных трудов.* 2004. Т. 104. С. 31.
12. *Huang Q.-W., Zhu L.-H.* High-temperature strength and toughness behaviors for reaction-bonded SiC ceramics below 1400°C // *Mater. Lett.* 2005. V. 59. № 14–15. P. 1732.
13. *Clijsters S., Liu K., Reynaerts D., Lauwers B.* EDM technology and strategy development for the manufacturing of complex parts in SiSiC // *Journal of Materials Processing Technology.* 2010. V. 210. № 4. P. 631.
14. *Sangsuwan P., Orejas J.A., Gatica J.E., Tewari S.N. et al.* Reaction-bonded silicon carbide by reactive infiltration // *Industrial & engineering chemistry research.* 2001. V. 40. № 23. P. 5191.

15. Wang Y.-X., Tan Sh.-H., Jiang D.-L. The fabrication of reaction-formed silicon carbide with controlled microstructure by infiltrating a pure carbon preform with molten Si // *Ceramics international*. 2004. V. 30. № 3. P. 435.
16. Параносенков В.П., Чикина А.А., Андреев М.А. Конструкционные материалы на основе самосвязанного карбида кремния // *Огнеупоры и техническая керамика*. 2006. № 7. С. 37.
17. Параносенков В.П., Чикина А.А., Шкарупа И.Л. Самосвязанный карбид кремния ОТМ–923 // *Огнеупоры и техническая керамика*. 2004. № 2. С. 23.
18. Гаршин А.П., Чулкин С.Г. Реакционно-спеченные карбидокремниевые материалы конструкционного назначения. Физико-механические и триботехнические свойства. СПб.: Изд. Политехнического ун-та. 2006. 84 с.
19. Perevislov S.N. Evaluation of the crack resistance of reactive sintered composite boron carbide-based materials // *Refractories and Industrial Ceramics*. 2019. V. 60. № 3. P. 168.
20. Perevislov S.N., Lysenkov A.S., Titov D.D., Tomkovich M.V. et al. Production of ceramic materials based on SiC with low-melting oxide additives // *Glass and Ceramics*. 2019. V. 75. № 9–10. P. 400.
21. Frolova M.G., Leonov A.V., Kargin Y.F., Lysenkov A.S. et al. Molding features of silicon carbide products by the method of hot slip casting // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. V. 9. № 4. P. 675.
22. Perevislov S.N., Lysenkov A.S., Titov D.D., Tomkovich M.V. Hot-pressed ceramic SiC–YAG materials // *Inorganic Materials*. 2017. V. 53. № 2. P. 220.
23. Lysenkov A.S., Kim K.A., Titov D.D., Frolova M.G. et al. Composite material Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SiC with calcium aluminate additive // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2018. V. 1134. № 1. P. 012036.
24. Perevislov S.N., Shcherbak P.V., Tomkovich M.V. Phase composition and microstructure of reaction-bonded boron-carbide materials // *Refractories and Industrial Ceramics*. 2018. V. 59. № 2. P. 179.
25. Perevislov S.N., Lysenkov A.S., Titov D.D., Tomkovich M.V. et al. Materials based on boron carbide obtained by reaction sintering // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. IOP Publishing. 2019. V. 525. № 1. P. 012074.
26. Markov M.A., Ordan'yan S.S., Vikhman S.V., Perevislov S.N. et al. Preparation of MoSi<sub>2</sub>–SiC–ZrB<sub>2</sub> structural ceramics by free sintering // *Refractories and Industrial Ceramics*. 2019. V. 60. № 4. P. 385.
27. Ordan'yan S.S., Rumyantsev V.I., Nesmelov D.D., Korablev D.V. Physicochemical basis of creating new ceramics with participation of boron-containing refractory compounds and its practical implementation // *Refractories and Industrial Ceramics*. 2012. V. 53. № 2. P. 108.
28. Ordan'yan S.S., Nesmelov D.D., Danilovich D.P., Udalov Y.P. Revisiting the structure of SiC–B<sub>4</sub>C–Me<sup>d</sup>B<sub>2</sub> systems and prospects for the development of composite ceramic materials based on them // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 2017. V. 58. № 5. P. 545.
29. Perevislov S.N., Afanas'eva L.E., Baklanova N.I. Mechanical properties of SiC-fiber-reinforced reaction-bonded silicon carbide // *Inorganic Materials*. 2020. V. 56. № 4. P. 425.

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 539.3

**РАСЧЕТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МКЭ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ****© 2020 г. А. Ш. Джабраилов<sup>1,\*</sup>, А. П. Николаев<sup>1</sup>, Ю. В. Клочков<sup>1</sup>,  
Н. А. Гуреева<sup>2</sup>, Т. Р. Ищанов<sup>1</sup>**<sup>1</sup> *Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия*<sup>2</sup> *Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия**\*e-mail: arsen82@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

На шаге нагружения при деформировании оболочки за пределами упругости использованы соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений в трех вариантах. В первых двух вариантах зависимости приращений деформаций получены дифференцированием соотношений деформационной теории пластичности как с использованием гипотезы о несжимаемости материала при пластическом деформировании, так и без нее. В третьем варианте для получения определяющих уравнений предложен алгоритм на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений без учета гипотезы о несжимаемости материала при упругопластическом деформировании и без разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части.

*Ключевые слова:* оболочка, тензор деформаций, конечный элемент, вектор перемещения, физическая нелинейность, матрица пластичности, тензор напряжений

**DOI:** 10.31857/S0235711920060024

Теория оболочек в настоящее время имеет достаточно законченные очертания [1, 2]. Особо важное внимание ведущих исследователей мира, занимающихся анализом напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций, занимает учет физической нелинейности материала [3–5]. Применение метода конечных элементов (МКЭ) в этом случае является практически безальтернативным. Развитию, совершенствованию и использованию МКЭ посвящены работы известных отечественных и зарубежных авторов и научные статьи последних лет [6–13], изучение и анализ которых позволяет выделить ряд проблем и определить цель настоящего исследования. Во всех анализируемых литературных источниках, при учете физической нелинейности приращения деформации на шагах нагружения подразделяются на упругую и пластическую части. В настоящей статье получены зависимости между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения без разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части. В анализируемых статьях связь между средним линейным напряжением и средней линейной деформацией осуществляется при использовании условия несжимаемости материала при пластических деформациях. Это не вполне соответствует физическому смыслу процесса деформирования и может приводить к неточностям при значительных величинах пластических деформаций. В настоящей статье, при выводе уравнений связи между деформациями и напря-

жениями на основании деформационной теории использовалась эмпирическая функциональная зависимость между средним линейным напряжением и средней линейной деформацией на шаге нагружения.

**Материалы и методы. Геометрия оболочки.** Точка срединной поверхности оболочки в процессе деформирования рассматривается в трех положениях: исходное (точка  $M^0$ ), деформированное положение после  $(j - 1)$  шагов нагружения (точка  $M$ , вектор перемещения  $\mathbf{v}$ ) и положение после  $j$ -го шага нагружения (точка  $M^*$ , вектор перемещения  $\Delta\mathbf{v}$ ). Положение точки в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности, обозначаются символами:  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$  и  $M^{*\zeta}$  соответственно указанным состояниям.

Положение точки  $M^0$  эллиптического цилиндра определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^0 = x \cdot \mathbf{i} + b \sin t \cdot \mathbf{j} + c \cos t \cdot \mathbf{k}, \quad (1)$$

где  $x$  – осевая координата;  $t$  – параметр;  $2b$  и  $2c$  – размеры осей эллипса.

Дифференцированием (1) по координате  $x$  и дуге поперечного сечения эллиптического цилиндра  $s$  можно получить векторы локального базиса

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{R}_{,x}^0 = \mathbf{i}; \quad \mathbf{a}_2^0 = \mathbf{R}_{,s}^0 = \frac{b \cos t}{k} \mathbf{j} - \frac{c \sin t}{k} \mathbf{k}, \quad (2)$$

где  $k = \sqrt{b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t}$ .

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\mathbf{a}_n^0 = \mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0 = \frac{c \sin t}{k} \mathbf{j} + \frac{b \cos t}{k} \mathbf{k}. \quad (3)$$

Производные векторов локального базиса можно определить дифференцированием (2) и (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1,x}^0 &= \mathbf{R}_{,xx}^0 = 0; & \mathbf{a}_{1,s}^0 &= \mathbf{R}_{,xs}^0 = 0; & \mathbf{a}_{2,x}^0 &= \mathbf{R}_{,sx}^0 = 0; & \mathbf{a}_{n,x}^0 &= 0; \\ \mathbf{a}_{2,s}^0 &= \mathbf{R}_{,ss}^0 = \left[ \frac{-kb \sin t - k_t b \cos t}{k^2} \right] t_{,s} \mathbf{j} - \left[ \frac{ck \cos t - k_t c \sin t}{k^2} \right] t_{,s} \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{n,s}^0 &= \left[ \frac{ck \cos t - k_t c \sin t}{k^2} \right] t_{,s} \mathbf{j} + \left[ \frac{-bk \sin t - k_t b \cos t}{k^2} \right] t_{,s} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k_{,t} = \frac{(c^2 - b^2) \sin 2t}{2k}$ ;  $t_{,s} = \frac{1}{k}$ .

Соотношения (2)–(4) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ m^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ m_{,x}^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \mathbf{a}_{,s}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ m_{,s}^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1},$$

где  $\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}^T = \left\{ \mathbf{a}_1^0; \mathbf{a}_2^0; \mathbf{a}_n^0 \right\}$ ;  $\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,x}^0; \mathbf{a}_{2,x}^0; \mathbf{a}_{n,x}^0 \right\}$ ;  $\left\{ \mathbf{a}_{,s}^0 \right\}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,s}^0; \mathbf{a}_{2,s}^0; \mathbf{a}_{n,s}^0 \right\}$ ;  $\left\{ \mathbf{i} \right\}^T = \left\{ \mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k} \right\}$ .

На основании соотношения

$$\left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1} = \left[ m^0 \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1},$$

производные векторов локального базиса представляются компонентами в этом же базисе

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} &= \left[ m_{,x}^0 \right]_{3 \times 3} \cdot \left[ m^0 \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ 0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \\ \left\{ \mathbf{a}_{,s}^0 \right\}_{3 \times 1} &= \left[ m_{,s}^0 \right]_{3 \times 3} \left[ m^0 \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ n \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } [n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{23} \\ 0 & n_{32} & 0 \end{bmatrix}; \quad n_{23} = \frac{-cb}{k\sqrt{k}}; \\ n_{32} = \frac{cb}{k\sqrt{k}}.$$

Положения точек  $M^0$ ,  $M$ ,  $M^*$ ,  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$  и  $M^{*\zeta}$  характеризуются радиус-векторами

$$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{a}^0; \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{v}; \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \Delta \mathbf{v}; \\ \mathbf{R}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_n^0); \quad \mathbf{R}^{*\zeta} = \mathbf{R}^\zeta + \Delta \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{a}_n^* - \mathbf{a}_n), \quad (6)$$

где  $\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{a}_n^*$  – орты нормалей к срединной поверхности оболочки в точках  $M$  и  $M^*$ .

Входящие в (6) векторы перемещений  $\mathbf{v}$  и  $\Delta \mathbf{v}$  определяются в локальном базисе выражениями

$$\mathbf{v} = u\mathbf{a}_1^0 + v\mathbf{a}_2^0 + w\mathbf{a}_n^0; \quad \Delta \mathbf{v} = \Delta u\mathbf{a}_1^0 + \Delta v\mathbf{a}_2^0 + \Delta w\mathbf{a}_n^0. \quad (7)$$

Базисные векторы в точках  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$  и  $M^{*\zeta}$  находятся дифференцированием (6) по глобальным координатам  $x$  и  $s$

$$\mathbf{a}_1^{0\zeta} = \mathbf{R}_{,x}^{0\zeta}; \quad \mathbf{a}_1^\zeta = \mathbf{R}_{,x}^\zeta = \mathbf{a}_1^{0\zeta} + \mathbf{v}_{,x} + \zeta(\mathbf{a}_{n,x} - \mathbf{a}_{n,x}^0); \\ \mathbf{a}_1^{*\zeta} = \mathbf{R}_{,x}^{*\zeta} = \mathbf{a}_1^\zeta + \Delta \mathbf{v}_{,x} + \zeta(\mathbf{a}_{n,x}^* - \mathbf{a}_{n,x}); \\ \mathbf{a}_2^{0\zeta} = \mathbf{R}_{,s}^{0\zeta}; \quad \mathbf{a}_2^\zeta = \mathbf{R}_{,s}^\zeta = \mathbf{a}_2^{0\zeta} + \mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{a}_{n,s} - \mathbf{a}_{n,s}^0); \\ \mathbf{a}_2^{*\zeta} = \mathbf{R}_{,s}^{*\zeta} = \mathbf{a}_2^\zeta + \Delta \mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{a}_{n,s}^* - \mathbf{a}_{n,s}). \quad (8)$$

Производные вектора  $\mathbf{v}$  за  $(j-1)$  шагов нагружения можно получить дифференцированием (7) с учетом (5)

$$\mathbf{v}_{,x} = u_{,x}\mathbf{a}_1^0 + v_{,x}\mathbf{a}_2^0 + w_{,x}\mathbf{a}_n^0; \quad \mathbf{v}_{,s} = u_{,s}\mathbf{a}_1^0 + z_s^2\mathbf{a}_2^0 + z_s\mathbf{a}_n^0; \\ \mathbf{v}_{,xx} = u_{,xx}\mathbf{a}_1^0 + v_{,xx}\mathbf{a}_2^0 + w_{,xx}\mathbf{a}_n^0; \quad \mathbf{v}_{,ss} = u_{,ss}\mathbf{a}_1^0 + z_{ss}^2\mathbf{a}_2^0 + z_{ss}\mathbf{a}_n^0; \\ \mathbf{v}_{,xs} = u_{,xs}\mathbf{a}_1^0 + z_{xs}^2\mathbf{a}_2^0 + z_{xs}\mathbf{a}_n^0, \quad (9)$$

где  $z_s^2 = v_{,s} + n_{32}w$ ;  $z_s = w_{,s} + n_{23}v$ ;  $z_{ss} = n_{32}n_{23}w - n_{22}n_{23}v + 2n_{23}v_{,s} + w_{,ss}$ ;  $z_{ss}^2 = (n_{32}n_{23} + (n_{22})^2)v + v_{,ss} + 2n_{32}w_{,s} + n_{32}n_{22}w$ ;  $z_{xs}^2 = v_{,xs} + n_{22}v_{,x} + w_{,x}n_{32}$ ;  $z_{xs} = n_{23}v_{,x} + w_{,xs}$ .

Аналогично, на  $j$ -м шаге нагружения

$$\Delta \mathbf{v}_{,x} = \Delta u_{,x}\mathbf{a}_1^0 + \Delta v_{,x}\mathbf{a}_2^0 + \Delta w_{,x}\mathbf{a}_n^0; \quad \Delta \mathbf{v}_{,xs} = \Delta u_{,s}\mathbf{a}_1^0 + p_s^2\mathbf{a}_2^0 + p_s\mathbf{a}_n^0; \\ \Delta \mathbf{v}_{,xx} = \Delta u_{,xx}\mathbf{a}_1^0 + \Delta v_{,xx}\mathbf{a}_2^0 + \Delta w_{,xx}\mathbf{a}_n^0; \\ \Delta \mathbf{v}_{,ss} = \Delta u_{,ss}\mathbf{a}_1^0 + p_{ss}^2\mathbf{a}_2^0 + p_{ss}\mathbf{a}_n^0; \\ \Delta \mathbf{v}_{,xs} = \Delta u_{,sx}\mathbf{a}_1^0 + p_{xs}^2\mathbf{a}_2^0 + p_{xs}\mathbf{a}_n^0. \quad (10)$$

Орты нормалей в точках  $M$  и  $M^*$  выражаются векторными произведениями

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}; \quad \mathbf{a}_n^* = \frac{\mathbf{a}_1^* \times \mathbf{a}_2^*}{|\mathbf{a}_1^* \times \mathbf{a}_2^*|}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,x}$ ;  $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,s}$ ;  $\mathbf{a}_1^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{v})_{,x}$ ;  $\mathbf{a}_2^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{v})_{,s}$ .

Для определения деформаций и их приращений в произвольном слое, отстоящем на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности оболочки, используются уравнения механики сплошной среды [14]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0}{2}; \quad \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}}{2},$$

где ковариантные компоненты метрических тензоров для исходного и деформированного состояний определяются выражениями

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha}^{\zeta} \mathbf{a}_{\beta}^{\zeta}; \quad g_{\alpha\beta}^0 = \mathbf{a}_{\alpha}^{0\zeta} \mathbf{a}_{\beta}^{0\zeta}; \quad g_{\alpha\beta}^* = \mathbf{a}_{\alpha}^{*\zeta} \mathbf{a}_{\beta}^{*\zeta}. \quad (12)$$

Деформации и их приращения при учете (12) и (8)–(11) запишутся как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\zeta} &= u_{,x} - \zeta z_{,xx}; & \Delta\varepsilon_{11}^{\zeta} &= \Delta u_{,x} - \zeta p_{,xx}, \\ \varepsilon_{22}^{\zeta} &= z_s^2 + \zeta(z_s^2 n_{32} - z_{,ss}); & \Delta\varepsilon_{22}^{\zeta} &= p_s^2 + \zeta(p_s^2 n_{32} - p_{,ss}), \\ 2\varepsilon_{12}^{\zeta} &= u_{,s} - \zeta z_{,xs}; & 2\Delta\varepsilon_{12}^{\zeta} &= \Delta u_{,s} - \zeta p_{,xs}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (13) можно представить в более компактной форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \chi_{\alpha\beta}; \quad \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \Delta\chi_{\alpha\beta}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_{\alpha\beta}$  – деформации и искривления срединной поверхности в точке  $M$ ;  $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}$  и  $\Delta\chi_{\alpha\beta}$  – приращения деформаций и искривлений в точке  $M^*$ .

Выражения (14) удобно использовать в матричном виде

$$\{\varepsilon^{\zeta}\}_{3 \times 1} = [G]\{\varepsilon\}_{3 \times 6} = [G][L]\{\vartheta\}_{6 \times 3}; \quad \{\Delta\varepsilon^{\zeta}\}_{3 \times 1} = [G]\{\Delta\varepsilon\}_{3 \times 6} = [G][L]\{\Delta\vartheta\}_{6 \times 3}, \quad (15)$$

где  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; 2\varepsilon_{12}; \chi_{11}; \chi_{22}; 2\chi_{12}\}$ ;  $\{\vartheta\}^T = \{u; v; w\}$ ;  $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}; \Delta\varepsilon_{22}; 2\Delta\varepsilon_{12}; \Delta\chi_{11}; \Delta\chi_{22}; 2\Delta\chi_{12}\}$ ;  $\{\Delta\vartheta\}^T = \{\Delta u; \Delta v; \Delta w\}$ ;  $[L]$  – матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

**Конечный элемент на шаге нагружения.** В качестве элемента дискретизации принимается произвольный четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с узлами  $i, j, k, l$ . Для реализации численного интегрирования выбирается квадратный в плане элемент с локальными координатами  $\xi$  и  $\eta$ , на который отображается выбранный криволинейный конечный элемент (КЭ). Координаты  $\xi$  и  $\eta$  изменяются в пределах:  $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$ .

Глобальные координаты  $x$  и  $s$  произвольной точки срединной поверхности являются функциями локальных координат  $\xi$  и  $\eta$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} x^i + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} x^j + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} x^k + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} x^l; \\ s &= \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} s^i + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} s^j + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} s^k + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} s^l, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $x^i, x^j, \dots, s^k, s^l$  – узловые значения глобальных координат.

Зависимости (16) можно представить в матричном виде

$$x = [f] \{x^m\}_{1 \times 4}; \quad s = [f] \{s^m\}_{1 \times 4}, \quad (17)$$

где  $\{x^m\} = \{x^i x^j x^k x^l\}$ ;  $\{s^m\} = \{s^i s^j s^k s^l\}$ .

Производные глобальных координат в локальной системе определяются в результате дифференцирования (17)

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= [f_{,\xi}] \{x^m\}; & x_{,\eta} &= [f_{,\eta}] \{x^m\}; \\ s_{,\xi} &= [f_{,\xi}] \{s^m\}; & s_{,\eta} &= [f_{,\eta}] \{s^m\}. \end{aligned}$$

Для определения производных локальных координат в глобальной системе соотношения (17) записываются следующим образом

$$x - [f] \{x^m\} = 0; \quad s - [f] \{s^m\} = 0. \quad (18)$$

Дифференцированием (18) по  $x$  и по дуге  $s$  можно получить матричные зависимости

$$[N] \begin{Bmatrix} \xi_{,x} \\ \eta_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad [N] \begin{Bmatrix} \xi_{,s} \\ \eta_{,s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\text{где } [N] = \begin{bmatrix} [f_{,\xi}] \{x^m\} & [f_{,\eta}] \{x^m\} \\ [f_{,\xi}] \{s^m\} & [f_{,\eta}] \{s^m\} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, производные локальных координат  $\xi$  и  $\eta$  в глобальной системе определяются соотношениями

$$\begin{Bmatrix} \xi_{,x} \\ \eta_{,x} \end{Bmatrix} = [N]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \xi_{,s} \\ \eta_{,s} \end{Bmatrix} = [N]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

Или в более компактной форме

$$\xi_{,x} = \frac{s_{,\eta}}{\Delta}; \quad \xi_{,s} = -\frac{x_{,\eta}}{\Delta}; \quad \eta_{,x} = -\frac{s_{,\xi}}{\Delta}; \quad \eta_{,s} = \frac{x_{,\xi}}{\Delta},$$

где  $\Delta = [f_{,\xi}] \{x^m\} [f_{,\eta}] \{s^m\} - [f_{,\xi}] \{s^m\} [f_{,\eta}] \{x^m\}$ .

В качестве узловых неизвестных за  $(j - 1)$  предыдущих шагов выбираются компоненты вектора перемещения и их производные в локальной и глобальной системах координат

$$\begin{aligned} \{q^l\}^T_{1 \times 12} &= \{q^i q^j q^k q^l q^i_{,\xi} q^j_{,\xi} q^k_{,\xi} q^l_{,\xi} q^i_{,\eta} q^j_{,\eta} q^k_{,\eta} q^l_{,\eta}\}; \\ \{q^g\}^T_{1 \times 12} &= \{q^i q^j q^k q^l q^i_{,x} q^j_{,x} q^k_{,x} q^l_{,x} q^i_{,s} q^j_{,s} q^k_{,s} q^l_{,s}\}, \end{aligned}$$

где под  $q$  понимается перемещение  $u$ ,  $v$  или  $w$ .

Аналогично, на  $j$ -м шаге нагружения

$$\begin{aligned} \{\Delta q^l\}^T_{1 \times 12} &= \{\Delta q^i \Delta q^j \Delta q^k \Delta q^l \Delta q^i_{,\xi} \Delta q^j_{,\xi} \Delta q^k_{,\xi} \Delta q^l_{,\xi} \Delta q^i_{,\eta} \Delta q^j_{,\eta} \Delta q^k_{,\eta} \Delta q^l_{,\eta}\}; \\ \{\Delta q^g\}^T_{1 \times 12} &= \{\Delta q^i \Delta q^j \Delta q^k \Delta q^l \Delta q^i_{,x} \Delta q^j_{,x} \Delta q^k_{,x} \Delta q^l_{,x} \Delta q^i_{,s} \Delta q^j_{,s} \Delta q^k_{,s} \Delta q^l_{,s}\}, \end{aligned}$$

где символом  $\Delta q$  обозначается перемещение  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  или  $\Delta w$ .

Векторы узловых неизвестных КЭ на шаге нагружения в локальной и глобальной системах координат записываются строками

$$\{U^l_y\}^T_{1 \times 36} = \left\{ \{u^l\}^T_{1 \times 12} \quad \{v^l\}^T_{1 \times 12} \quad \{w^l\}^T_{1 \times 12} \right\}; \quad \{U^g_y\}^T_{1 \times 36} = \left\{ \{u^g\}^T_{1 \times 12} \quad \{v^g\}^T_{1 \times 12} \quad \{w^g\}^T_{1 \times 12} \right\}.$$

На основании дифференциальных зависимостей

$$q_{,\xi} = q_{,x}x_{,\xi} + q_{,s}s_{,\xi}; \quad q_{,\eta} = q_{,x}x_{,\eta} + q_{,s}s_{,\eta},$$

между узловыми неизвестными имеет место матричное соотношение

$$\{\Delta U_y^l\}_{36 \times 1} = [H]_{36 \times 36} \{\Delta U_y^g\}_{36 \times 1}. \quad (19)$$

Перемещения внутренней точки КЭ в деформированном состоянии выражаются через узловые значения

$$q = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{q\}_{12 \times 1}; \quad \Delta q = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{\Delta q\}_{12 \times 1} \quad (20)$$

где под  $q$  понимается перемещение  $u$ ,  $v$  или  $w$ , а элементами матрицы  $\{\varphi\}^T$  являются полиномы Эрмита третьей степени [15].

Приращения деформаций на шаге нагружения, согласно (15) и с учетом (20), переписываются в виде

$$\{\Delta \varepsilon^{\zeta}\}_{3 \times 1} = [G]_{3 \times 6} [L]_{6 \times 3} \{\Delta \vartheta\}_{3 \times 1} = [G]_{3 \times 6} [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 36} \{\Delta U_y^l\}_{36 \times 1} = [G]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} \{\Delta U_y^l\}_{36 \times 1}, \quad (21)$$

$$\text{где } [A]_{3 \times 36} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}_{1 \times 12}^T & \{0\}_{1 \times 12}^T & \{0\}_{1 \times 12}^T \\ \{0\}_{1 \times 12}^T & \{\varphi\}_{1 \times 12}^T & \{0\}_{1 \times 12}^T \\ \{0\}_{1 \times 12}^T & \{0\}_{1 \times 12}^T & \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \end{bmatrix}.$$

**Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения.** При использовании основных положений деформационной теории пластичности [16] связь между компонентами девиатора деформаций и компонентами девиатора напряжений осуществляется в виде

$$\frac{\varepsilon_{11}^{\zeta} - \varepsilon_0}{\sigma_{11} - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_{22}^{\zeta} - \varepsilon_0}{\sigma_{22} - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_{33}^{\zeta} - \varepsilon_0}{-\sigma_0} = \frac{\varepsilon_{12}^{\zeta}}{2\sigma_{12}} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}, \quad (22)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11}^{\zeta} + \varepsilon_{22}^{\zeta} + \varepsilon_{33}^{\zeta}}{3}$  – средняя линейная деформация;  $\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3}$  – среднее линейное напряжение.

На основе диаграмм растяжения и деформирования материала имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma; & \varepsilon_i &= \frac{2}{3} \varepsilon (1 + \mu); & \Delta \sigma_i &= \Delta \sigma; & \Delta \varepsilon_i &= \frac{2}{3} \Delta \varepsilon (1 + \mu), \\ \sigma_0 &= \sigma; & \varepsilon_0 &= \varepsilon (1 - 2\mu); & \Delta \sigma_0 &= \Delta \sigma; & \Delta \varepsilon_0 &= \Delta \varepsilon (1 - 2\mu), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – напряжение и деформация стержня при растяжении;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации;  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta \varepsilon$  – приращения напряжений и приращения деформаций на шаге растяжения стержня;  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  – средние значения напряжений и деформаций;  $\Delta \sigma_0$ ,  $\Delta \varepsilon_0$  – приращения средних значений напряжений и деформаций на шаге растяжения стержня.

Соотношения между средними деформациями и средними напряжениями определяются выражением

$$\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon(1 - 2\mu)}{\sigma} = \frac{1 - 2\mu}{E_s}, \quad (24)$$

где  $E_s$  – секущий модуль диаграммы растяжения.

В деформационной теории пластичности принято, что за пределами упругости зависимость  $\epsilon_0$  от  $\sigma_0$  остается неизменной

$$\epsilon_0 = K_1 \sigma_0, \quad (25)$$

где  $K_1 = \frac{1-2\mu}{E}$ ;  $E$  – модуль упругости.

На основе (24) и с учетом (23) можно получить зависимости

$$K_2 = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} = \frac{\epsilon(1-2\mu)}{\sigma} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \frac{1}{E_{sd}},$$

$$K_3 = \frac{\Delta\epsilon_0}{\Delta\sigma_0} = \frac{\Delta\epsilon_i \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)}}{\Delta\sigma_i} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \frac{1}{E_h}, \quad (26)$$

где  $E_{sd}$  – секущий модуль диаграммы деформирования материала;  $E_h$  – хордовый модуль диаграммы деформирования.

Для определения компонент приращений тензора деформаций на шаге нагружения необходимо выразить из (22) деформации в явном виде

$$\epsilon_{11}^\zeta = (\sigma_{11} - \sigma_0) \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} + K_\alpha \sigma_0; \quad \epsilon_{22}^\zeta = (\sigma_{22} - \sigma_0) \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} + K_\alpha \sigma_0;$$

$$\epsilon_{33}^\zeta = (-\sigma_0) \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} + K_\alpha \sigma_0; \quad \epsilon_{12}^\zeta = \sigma_{12} \frac{3\epsilon_i}{\sigma_i}, \quad (27)$$

где  $\alpha = 1, 2$ .

В общем случае приращения деформаций на шаге нагружения определяются соотношением

$$\Delta\epsilon_{\rho\gamma}^\zeta = \frac{\partial\epsilon_{\rho\gamma}^\zeta}{\partial\sigma_{11}} \Delta\sigma_{11} + \frac{\partial\epsilon_{\rho\gamma}^\zeta}{\partial\sigma_{22}} \Delta\sigma_{22} + \frac{\partial\epsilon_{\rho\gamma}^\zeta}{\partial\sigma_{12}} \Delta\sigma_{12}. \quad (28)$$

В настоящей статье для получения зависимостей между приращениями деформаций и напряжений предлагается использовать гипотезу о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений на шаге нагружения

$$\frac{\Delta\epsilon_{11}^\zeta - \Delta\epsilon_0}{\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_0} = \frac{\Delta\epsilon_{22}^\zeta - \Delta\epsilon_0}{\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_0} = \frac{\Delta\epsilon_{33}^\zeta - \Delta\epsilon_0}{-\Delta\sigma_0} = \frac{\Delta\epsilon_{12}^\zeta}{2\Delta\sigma_{12}} = \frac{3}{2E_h}. \quad (29)$$

На основании (25)–(29) формируется матричная зависимость

$$\{\Delta\epsilon^\zeta\}_{3 \times 1} = [D_m]_{3 \times 3} \{\Delta\sigma_{\alpha\beta}\}_{3 \times 1}, \quad (30)$$

где  $m = 1, 2, 3$ ;  $\{\Delta\epsilon^\zeta\}^T = \{\Delta\epsilon_{11}^\zeta \Delta\epsilon_{22}^\zeta 2\Delta\epsilon_{12}^\zeta\}$ ;  $\{\Delta\sigma_{\alpha\beta}\}^T = \{\Delta\sigma_{11} \Delta\sigma_{22} \Delta\sigma_{12}\}$ ;  $[D_m]$  – матрица упругопластического деформирования на шаге нагружения на основе коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  соответственно.

**Матрица жесткости на шаге нагружения.** При выводе матрицы жесткости четырехугольного КЭ используется функционал, основанный на равенстве работ внутренних и внешних сил на шаге нагружения

$$\Pi = \int_V \{\Delta\epsilon^\zeta\}^T (\{\sigma_{\alpha\beta}\} + \{\Delta\sigma_{\alpha\beta}\}) dV - \int_F \{\Delta\vartheta\}^T (\{P\} + \{\Delta P\}) dF, \quad (31)$$

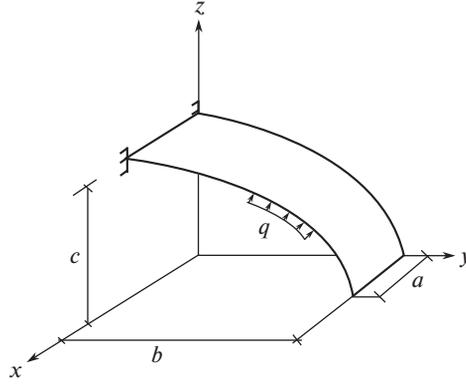


Рис. 1. Фрагмент эллиптического цилиндра.

где  $\{\sigma_{\alpha\beta}\}^T = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{12}\}$  – матрица-строка напряжений после  $(j-1)$  шагов нагружения в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности;  $\{P\}^T = \{P_{11}P_{22}P_{12}\}$ ;  $\{\Delta P\}^T = \{\Delta P_{11}\Delta P_{22}\Delta P_{12}\}$  – внешняя нагрузка за  $(j-1)$  предыдущих шагов нагружения и ее приращения на  $j$ -м шаге нагружения.

Для точки произвольного слоя, отстоящего на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности оболочки, приращения напряжений определяются соотношением

$$\{\Delta\sigma_{\alpha\beta}\} = [D_m]^{-1} \{\Delta\varepsilon^\zeta\}, \quad (32)$$

где  $[D_m]^{-1}$  выражается из (30).

С учетом (21) и (32) равенство (31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Pi = & \{\Delta U_y^I\}^T \int_V [B]^T [G]^T \{\sigma_{\alpha\beta}\} dV + \\ & + \{\Delta U_y^I\}^T \int_V [B]^T [G]^T [D_m]^{-1} [G] [B] \{\Delta U_y^I\} dV - \\ & - \{\Delta U_y^I\}^T \int_F [A]^T \{P\} dF - \{\Delta U_y^I\}^T \int_F [A]^T [\Delta P] dF. \end{aligned} \quad (33)$$

При использовании (19) и выполнении минимизации (33) по узловым неизвестным  $\{\Delta U_y^g\}$  формируется матричное соотношение

$$[M] \{\Delta U_y^g\} = \{F\} + \{f\},$$

где  $[M] = [H]^T \int_V [B]^T [G]^T [D_m]^{-1} [G] [B] dV [H]$  – матрица жесткости четырехугольного КЭ на шаге нагружения;

$\{F\} = [H]^T \int_F [A]^T \{\Delta P\} dF$  – вектор узловых нагрузок на шаге нагружения;

$\{f\} = [H]^T \int_F [A]^T \{P\} dF - [H]^T \int_V [B]^T [G]^T \{\sigma_{\alpha\beta}\} dV$  – поправка Ньютона–Рафсона.

Таблица 1. Первый вариант расчета

Координата $y$ , см	Координата $\zeta$ , см	Напряжение, МПа		
		Число шагов нагружения, $n$		
		30	70	100
0.0	-0.250	243.1	243.4	243.1
	-0.166	190.8	191.5	190.7
	-0.083	97.0	97.3	96.9
	0.0	3.2	3.2	3.1
	0.083	-90.6	-90.9	-90.5
	0.166	184.4	-185.1	-184.3
	0.250	-241.6	-241.8	-241.5
100	-0.250	-12.9	-13.0	-13.1
	-0.166	-8.6	-8.6	-8.6
	-0.083	-4.2	-4.2	-4.2
	0.0	0.1	0.1	0.1
	0.083	4.4	4.4	4.4
	0.166	8.8	8.8	8.8
	0.250	13.1	13.2	13.2

**Результаты.** В качестве примера была решена тестовая задача по определению напряженно-деформированного состояния фрагмента произвольной оболочки в форме эллиптического цилиндра (рис. 1).

Оболочка, нагруженная внутренним давлением интенсивности  $q$ , имеет на левом крае жесткое защемление. Были приняты следующие исходные данные:  $q = 0.18$  МПа; модуль упругости  $E = 2 \times 10^6$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0.32$ ; толщина оболочки  $t = 0.005$  м; интенсивность напряжения, соответствующая пределу текучести  $\sigma_{iT} = 200$  МПа; интенсивность деформации, соответствующая пределу текучести  $\epsilon_{iT} = 0.0023$ ; геометрические характеристики оболочки:  $a = b = 1$  м,  $c = 0.5$  м.

С учетом условия сходимости вычислительного процесса на первом шаге нагружения при различных вариантах дискретизации оболочки было принято достаточным разбиение рассматриваемой конструкции на двадцать шесть четырехугольных КЭ.

В настоящей статье диаграмма деформирования для нелинейного участка аппроксимировалась в виде функции

$$\sigma_i = A\epsilon_i^2 + B\epsilon_i + C,$$

где  $A = -23461.55$  МПа;  $B = 181201.17$  МПа;  $C = 1574.3$  МПа.

При решении задачи было реализовано три различных варианта расчета. В первом варианте зависимости между напряжениями и деформациями на шаге нагружения формировались при использовании коэффициента  $K_1 = \frac{1 - 2\mu}{E}$ . В табл. 1 приведены результаты конечно-элементных решений для данного варианта расчета при различных числах шагов нагружения. Значения напряжений  $\sigma_{22}$  представлены для жестко защемленного левого и незагруженного правого края оболочки в зависимости от координаты  $\zeta$  по толщине оболочки.

Таблица 2. Второй вариант расчета

Координата $y$ , см	Координата $\zeta$ , см	Напряжение, МПа		
		Число шагов нагружения, $n$		
		30	70	100
0.0	-0.250	237.9	238.3	238.4
	-0.166	192.2	193.0	193.2
	-0.083	97.7	98.1	98.2
	0.0	3.2	3.2	3.2
	0.083	-91.3	-91.7	-91.8
	0.166	-185.8	-186.6	-186.8
	0.250	-236.5	-236.9	-237.0
100	-0.250	-12.9	-13.0	-13.0
	-0.166	-8.6	-8.6	-8.6
	-0.083	-4.2	-4.2	-4.2
	0.0	0.1	0.1	0.1
	0.083	4.4	4.4	4.4
	0.166	8.8	8.8	8.8
	0.250	13.2	13.2	13.2

Таблица 3. Третий вариант расчета

Координата $y$ , см	Координата $\zeta$ , см	Напряжение, МПа		
		Число шагов нагружения, $n$		
		30	70	100
0.0	-0.250	243.0	243.2	243.3
	-0.166	190.8	191.5	191.7
	-0.083	97.0	97.4	97.4
	0.0	3.1	3.2	3.2
	0.083	-90.6	-90.9	-91.0
	0.166	-184.4	-185.1	-185.3
	0.250	-241.5	-241.7	-241.8
100	-0.250	-12.9	-13.0	-13.0
	-0.166	-8.6	-8.6	-8.6
	-0.083	-4.2	-4.2	-4.2
	0.0	0.1	0.1	0.1
	0.083	4.4	4.4	4.4
	0.166	8.8	8.8	8.8
	0.250	13.1	13.2	13.2

Во втором варианте расчета для связи средней линейной деформации  $\epsilon_0$  и среднего линейного напряжения  $\sigma_0$  на шаге нагружения использовался коэффициент  $K_2 = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \epsilon_i$ . Значения контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния для второго варианта представлены в табл. 2.

В третьем варианте расчета разделение деформации на шаге нагружения на упругую и пластическую части не использовалось. Приращения компонент тензора деформаций определялись согласно (29), что значительно упростило алгоритм формирования матрицы пластичности. В табл. 3 представлены значения напряжений  $\sigma_{22}$  для контролируемых точек оболочки в третьем варианте расчета.

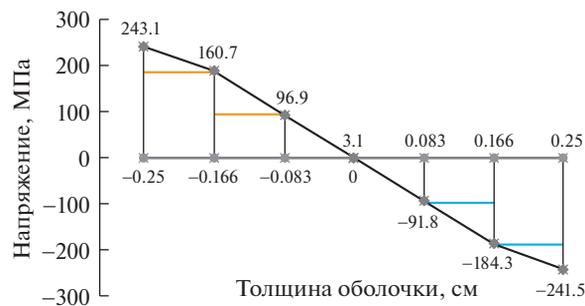


Рис. 2. Эпюра напряжений  $\sigma_{22}$  в опорном сечении для первого варианта расчета.

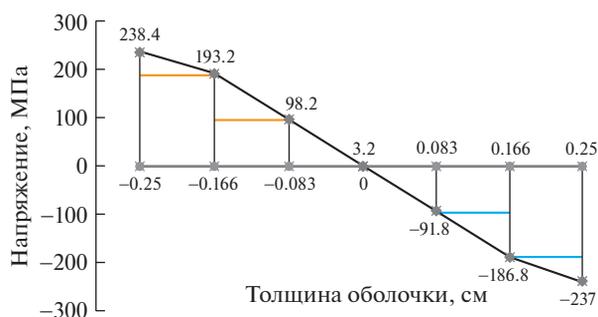


Рис. 3. Эпюра напряжений  $\sigma_{22}$  в опорном сечении для второго варианта расчета.

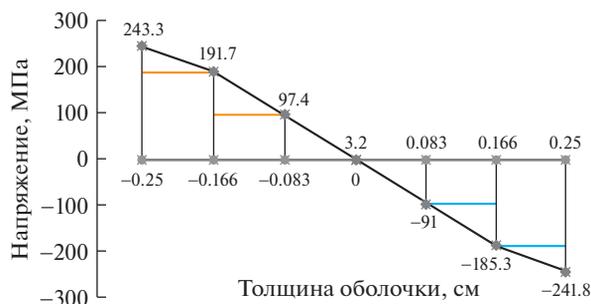


Рис. 4. Эпюра напряжений  $\sigma_{22}$  в опорном сечении для третьего варианта расчета.

С использованием полученных данных, в опорном сечении при числе шагов  $n = 100$ , были построены эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  по толщине рассматриваемой оболочки. Данные эпюры для трех вариантов расчета представлены на рис. 2–4.

**Обсуждения.** Анализ полученных результатов производился по нескольким критериям. При различном числе шагов нагружения сравнивались численные значения напряжений  $\sigma_{22}$  в рассматриваемых сечениях оболочки: левом, жестко защемленном крае и в концевом сечении.

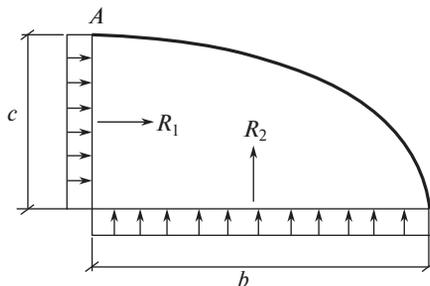


Рис. 5. Расчетная схема определения момента в точке А.

Как видно из табл. 1–3 во всех вариантах расчета наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса. С ростом числа шагов нагружения значения контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния незначительно (в пределах 1%) отличаются друг от друга.

Так как правый край оболочки не нагружен и по физическому смыслу задачи значения напряжений  $\sigma_{22}$  на срединной поверхности в этом сечении должны стремиться к нулю. Нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  на срединной поверхности правого края стремятся к нулю, что соответствует физическому условию нагружения рассматриваемой конструкции (табл. 1–3).

Для получения третьего критерия верификации полученных данных необходимо вычислить изгибающий момент в опорном сечении рассматриваемой конструкции и сравнить его со значением, вычисленным из условия статики. Согласно расчетной схеме (рис. 5), суммарный изгибающий момент относительно точки А находится как

$$M_A = \frac{R_1 b}{2} + \frac{R_2 c}{2} = 11.25 \text{ кН м.} \quad (34)$$

Во всех трех вариантах расчета при числе шагов равно  $n = 100$  в опорном сечении были получены численные значения расчетных изгибающих моментов. Для этого, эпюры кольцевых напряжений разбивались на элементарные геометрические фигуры и вычислялись их площади. Затем полученные усилия умножались на соответствующие плечи, равные расстояниям от центров тяжести элементарных фигур до нейтральной оси сечения оболочки. Суммированием полученных произведений находились расчетные значения изгибающих моментов для каждого из вариантов расчета.

Для первого варианта расчета суммарный изгибающий момент оказался равным  $M_1^R = 10.986$  кН м, для второго варианта  $M_2^R = 10.995$  кН м, а в третьем варианте расчета данное значение составило  $M_3^R = 11.03$  кН м. Сравнивая полученные значения с результатом (34), можно определить погрешности вычислений, которые составили  $\delta_1 = 2.34\%$ ,  $\delta_2 = 2.26\%$  и  $\delta_3 = 1.91\%$  соответственно для каждого из вариантов.

**Заключение.** Опираясь на анализ полученных результатов можно сделать несколько выводов: 1) разработанный алгоритм учета физической нелинейности материала можно эффективно использовать в расчетах произвольных оболочек, т.к. доказана возможность получения достоверных значений контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния при различных вариантах компоновки матрицы пластичности на шаге нагружения; 2) использование предположения о неизменности объема в результате пластических деформаций является, по мнению авторов, не совсем корректным. Сравнительный анализ показал, что связь между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений на шаге нагружения можно осуществлять

в виде (26), что более соответствует физическому смыслу процесса деформирования; 3) доказано, что предположение о неразделении приращения деформации на упругую и пластическую части на шаге нагружения обосновано. Использование соотношений (29) позволило исключить процедуру дифференцирования зависимостей полных деформаций от напряжений, что существенно упрощает процесс формирования матрицы пластичности на шаге нагружения. Третий вариант расчета позволил получить наименьшую погрешность вычислений.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование проведено при поддержке гранта РФФИ и администрации Волгоградской области № 19-41-340002 p\_a.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reissner E.* Linear and Nonlinear Theory of Shells // Thin-shell structures: theory, experiment and Design, Prentice – Hall inc., 1974. P. 29.
2. *Green A.E.* On the linear theory of thin elastic shells // Proc. Rog. Soc. London, 1962. Ser. A 266. P. 143.
3. *Kayumov R.A.* 2017 Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. V. 52 (5). P. 575.
4. *Chernykh K.F., Cabrita S.A.* General nonlinear theory of elastic shells. SPb.: Publishing House of St. Petersburg University. 2002. 388 p.
5. *Тупышкин Н.Д., Занара М.А.* Определяющие соотношения тензорной теории пластической повреждаемости металлов // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Тверь: ТвГТУ. 2011. С. 216.
6. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams. Applied Mechanics and materials. 2014. V. 578–579. P. 858.
7. *Розин Л.А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб. СПбГТУ. 1998. 532 с.
8. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38 (5). P. 779.
9. *Beirao da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2015. V. 295. P. 327.
10. *Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P.* Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture. // Submitted to International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2019.
11. *Magisano D., Leonetti L., Garcea G.* Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // Composite Structures 2016. V. 154. P. 296. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct>
12. *Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H.* Polygonal finite elements for finite elasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering 2015. V. 101. P. 305.
13. *Тюкалов Ю.Я.* Равновесные конечные элементы для плоских задач теории упругости // Инженерно-строительный журнал. 2019. № 7 (91). С. 80.
14. *Sedov L.I.* Continuum Mechanics. Moscow: Science. V. 1. P. 535.
15. *Джабраилов А.Ш., Ключков Ю.В., Николаев А.П., Фомин С.Д.* Определение напряжений в оболочках вращения при наличии зон сочленения на основе треугольного конечного элемента с учетом упругопластического деформирования // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. № 1. С. 8.
16. *Malinin M.M.* Applied Theory of Plasticity and Creep, Moscow, Engineering. 1975.

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 621.793:621.893

**ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА И СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ТРИБОТЕХНИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕРМИКУЛИТА  
НА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ФОРМИРУЕМЫХ ПОКРЫТИЙ**© 2020 г. Л. Б. Леонтьев<sup>1,\*</sup>, Н. П. Шапкин<sup>1</sup>, А. Л. Леонтьев<sup>1</sup><sup>1</sup>*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия**\*e-mail: leontyev.l.b@yandex.ru*

Поступила в редакцию 21.04.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

В статье представлены авторские исследования влияния состава и структуры триботехнических материалов на основе вермикулита, используемых для формирования тонкопленочных покрытий на стали 40Х, на эксплуатационные свойства трибосопряжения “коленчатый вал–вкладыш подшипника” судового среднеоборотного дизеля. Для изменения состава, структуры и свойств исходных слоистых силикатов их подвергали модификации кислотой и различными полимерами, вследствие этого изменялись эксплуатационные свойства формируемых тонкопленочных металлокерамических покрытий.

*Ключевые слова:* вермикулит, химический состав, структура, модифицирование, сталь, покрытие, механические свойства, износ

**DOI:** 10.31857/S023571192006005X

Поверхностный слой деталей в условиях эксплуатации подвергается наиболее сильному механическому, тепловому, коррозионному и другим воздействиям. Отказ детали и необходимость в ее замене возникает в большинстве случаев из-за разрушения ее поверхностного слоя вследствие абразивного, усталостного, коррозионного и других видов изнашивания. Обеспечить заданную долговечность трибоузлов машин, механизмов и оборудования можно путем получения оптимальных эксплуатационных свойств поверхностного слоя сопряженных деталей.

Решение проблемы радикального повышения долговечности трибосопряжений связано с применением новых ресурсосберегающих технологий, таких как формирование композитных тонкопленочных износостойких покрытий путем использования слоистых силикатов добавляемых в смазку в процессе эксплуатации или в результате фрикционно-механического воздействия при упрочнении поверхностей трения деталей при их изготовлении или восстановлении, позволяющих получать оптимальный комплекс параметров материала поверхностного слоя со свойствами, существенно отличающимися от свойств металла детали [1–7]. Новое качество поверхностного слоя детали обеспечивает существенное повышение ресурса трибоузла, в который она входит.

Природные и синтетические слоистые силикаты, в том числе и вермикулит, в настоящее время широко применяются в качестве присадок к маслам или для фрикционно-механического модифицирования поверхностей трения деталей при их восстановлении [1–7]. Использование слоистых силикатов, таких как вермикулит и серпентинит в качестве триботехнических материалов объясняется тем, что высокодисперсные порошки данных неорганических материалов, имея ярко выраженную слоистую структуру, ока-

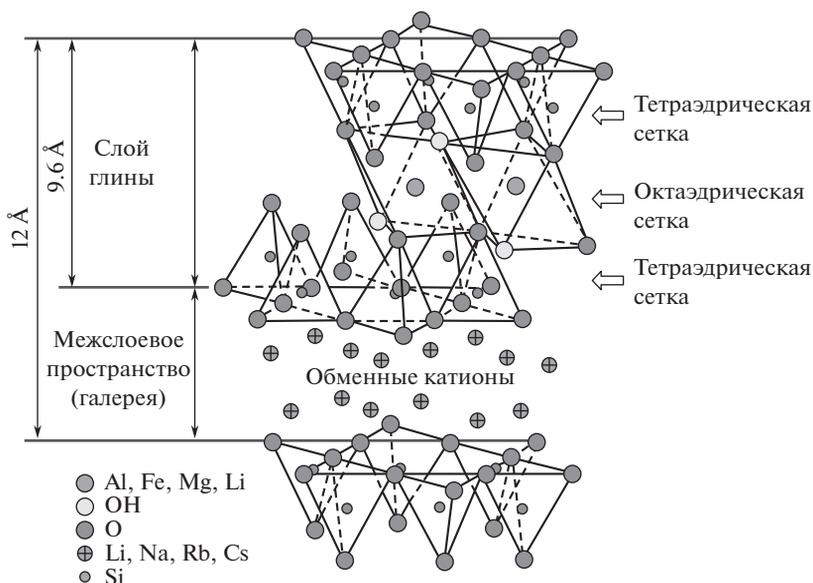


Рис. 1. Структура вермикулита.

зались чрезвычайно перспективными для формирования износостойких металлокерамических тонкопленочных покрытий. Формирование тонкопленочных металлокерамических покрытий на поверхностях трения деталей трибоузлов позволяет решить следующие задачи: повышение ресурса; снижение коэффициента трения и механических потерь (повышение КПД оборудования); ускоренной приработки сопряженных поверхностей [3].

Недостатками серпентинита является значительное различие в химическом составе даже с одного месторождения, а также большим количеством примесей в его составе, которые необходимо убирать для уменьшения абразивных свойств и получения требуемого состава, что приводит к увеличению его себестоимости [2]. Вермикулиты имеют стабильный химический состав и широко применяются в различных отраслях, поэтому их использование более перспективно для решения проблемы повышения износостойкости узлов трения.

Технология получения наноструктурированных композитов на основе природного слоистого силиката вермикулита [5] для формирования металлокерамических покры-

Таблица 1. Химический состав вермикулита и его модифицированных форм

№	Триботехнический материал для формирования покрытия	Содержание элементов и химических соединений, %							
		SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	MgO	CaO	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	TiO <sub>2</sub>	C	другие
1	Исходный вермикулит	42.72	11.81	24.52	5.75	8.74	0.85	—	0.580
2	Вермикулит + HCl	89.63	5.18	1.06	1.01	0.34	0.17	—	0.017
3	Вермикулит + HCl + + целлюлоза	84.50	4.50	1.00	0.90	0.20	0.10	7.5	—
4	Вермикулит + HCl + полифенилсилоксан	93.00	3.10	1.20	—	0.35	0.08	4.8	—
5	Вермикулит + HCl + + хитозан	95.27	1.26	1.09	—	0.24	—	—	0.017

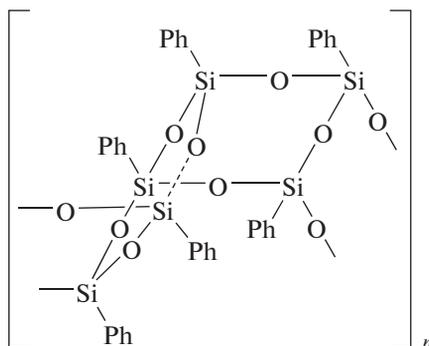


Рис. 2. Структура полифенилсилоксана.

тий на поверхностях трения, обладающих минимальным коэффициентом трения и высокими износо- и задиростойкостью открывает перспективы широкого использования в качестве триботехнических материалов. Однако многие аспекты проблемы зависимости эксплуатационных свойств тонкопленочных покрытий от химического состава и структуры, используемых триботехнических материалов, требуют дополнительных исследований. Поэтому разработка новых трибоматериалов связана с большим объемом экспериментальных исследований для обеспечения стабильности свойств, надежности и эффективности покрытия. Сложность решения данной проблемы определяется зависимостью физико-механических и триботехнических свойств формирующихся покрытий от множества параметров применяемого материала: химического состава, структуры, физико-химических и геометрических параметров и др.

**Цель работы** — исследование влияния химического состава, структурных и размерных характеристик композитов на основе вермикулита на физико-механические и эксплуатационные свойства формируемых покрытий.

**Материалы и методы исследований.** Природный вермикулит Ковдорского месторождения имеет общий состав  $MgFe_{0,8}Ca_{0,9}Al_{0,4}Si_3O_{11,7}H_2O$ . Вермикулит имеет слоистую структуру (рис. 1).

Исходный вермикулит содержит большое количество оксидов кремния, магния и алюминия (табл. 1). Расстояние между слоями находится в пределах 14.3–9.2 Å, в среднем 5.1 Å. В результате обработки вермикулита соляной кислотой происходит увеличение размера “галерей” за счет извлечения ионов алюминия, магния и железа [5].

Модифицирование вермикулита кислотой позволяет уменьшить содержание оксида алюминия в 2.3 раза, который характеризуется высокими абразивными свойствами, и повысить количество оксида кремния в 2.1 раза за счет растворения оксидов магния, железа и кальция.

Полифенилсилоксан (ПФС) — искусственный слоистый силикат (рис. 2), имеющий стабильный химический состав  $[C_6H_5SiO_{1,5}]_n$ .

Целлюлоза — природное высокомолекулярное органическое соединение, полисахарид с формулой  $(C_6H_{10}O_5)_n$ .

Хитозан представляет собой природный полисахарид, содержащий 41.8% углерода, 7.5% азота и 8.8% воды. Брутто-формула хитозана  $(C_6H_9O_4NH_2)_n$ . Структурная формула представлена на рис. 3.

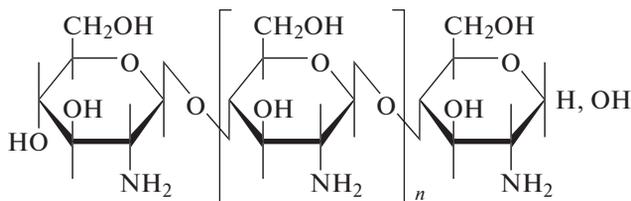


Рис. 3. Структурная формула элементарного звена хитозана.

Плакирование вермикулита, модифицированного кислотой, целлюлозой и ПФС позволяет ввести в состав частиц углерод (табл. 1), который обладает хорошими антифрикционными свойствами.

Рентгенофазный анализ (РФА) проводили на дифрактометре “Advance-D8” фирмы “Bruker”. При съемке РФА-спектров использовали  $\text{CuK}\alpha$ -излучение с разрешением  $0.02^\circ$  в диапазоне  $2^\circ < 2\theta < 90^\circ$ . В исследованиях использовался метод Дебая–Шеррера, который позволяет рассчитать размер частиц, кристаллитов, пакетов [8].

Для определения поверхности твердых тел использовали адсорбционный метод измерения удельной поверхности, отличающиеся высокой точностью и сравнительной простотой. Анализ поверхности образцов методом физической адсорбции азота осуществляли на анализаторе “ASAP 2020 MP” (“Micrometrics GmbH”, США).

Определение удельной поверхности минералов осуществляли по методике ученых Брунауэра, Эммета и Теллера [9]. Размер пор и их объем определяли с помощью ртутного поромера “Autopore-4” фирмы Micrometrics.

Триботехнические испытания проводили на универсальной машине трения модели УМТВК, которая используется для испытаний на трение и износ материалов (производство ООО НПФ “Сигма, г. Тольятти) по схеме “ролик–колодка” в условиях граничного трения при постоянной скорости скольжения  $0.63 \text{ м/с}$ , в связи с тем, что критерием, отличающим капитальный ремонт судового двигателя от среднего, является техническое состояние коленчатого вала. Когда по результатам дефектации состояние коленчатого вала классифицируется как работоспособное, капитальный ремонт двигателя может быть заменен объемом среднего ремонта, а срок эксплуатации двигателя до капитального ремонта продлевается. Если состояние коленчатого вала классифицируется как неработоспособное, то такой двигатель требует капитального ремонта. Поэтому триботехнические испытания проводили для сопряжения “шейка коленчатого вала – вкладыш подшипника”. В качестве неподвижного образца использовались колодки, вырезанные из современного вкладыша типа “Rillenlager” (“Miba” 33). Диски для упрочнения были взяты из стали 40Х твердостью 230 НВ, т.к. свыше 80% коленчатых валов судовых дизелей имеют твердость шеек в диапазоне 201–230 НВ. Смазку пары трения осуществляли капельным способом (5–6 капель в минуту). Для смазки применялось работающее дизельное масло марки М-14-ДЦЛ-30 ГОСТ 12337-84.

Нагрузку при формировании покрытия и трибоиспытаниях изменяли в соответствии с режимами (табл. 2).

Износ образцов определяли весовым способом на лабораторных весах с ценой деления  $0.1 \text{ мг}$  марки AUW 220D фирмы Shimadzu (Япония).

Исследование механических свойств покрытий выполняли на ультрамикротестере DUN-211S фирмы Shimadzu (Япония) при нагрузке  $19.7 \text{ мН}$  (максимальная глубина отпечатка  $0.13 \text{ мкм}$ ), которая позволяет избежать влияния основного металла (толщина покрытия колеблется в пределах 6–8 мкм). Прибор предназначен для измерения твердости, модуля упругости и упругого восстановления по методу наноиндентирова-

**Таблица 2.** Режимы формирования покрытия и триботехнических испытаний

Нагрузка, Н	40	100	200	400
Время нанесения покрытия, мин	–	1	1	1
Время формирования покрытия, мин	–	5	10	45
Время трибоиспытаний, мин	30	30	60	60

**Таблица 3.** Физико-химические характеристики исследуемых триботехнических материалов

Триботехнический материал для формирования покрытия	Удельная поверхность частицы, м <sup>2</sup> /г	Общий объем пор, см <sup>3</sup> /г	Средний размер пор, нм	Средний размер частиц, нм	Максимальная сорбция красителя*, мг/г
Вермикулит	12.88	0.028	18.0	682.0	37.0
Вермикулит + HCl	340.37	0.375	6.8	25.8	75.0
Вермикулит + HCl + + целлюлоза	286.00	0.130	2.5–4.0	102.1	–
Вермикулит + HCl + + 9% ПФС	387.00	0.030	5.0–6.0	135.0	33.6
Вермикулит + HCl + + хитозан	333.58	0.280	4.8	26.5	184.0

Примечание. \* – В качестве красителя применяли бриллиантовый зеленый.

ния. Испытания соответствуют стандарту ISO 14577-4. Величину упругого восстановления покрытий определяли по формуле [10]

$$W_e = \frac{(h_{\max} - h_r)}{h_{\max}},$$

где  $h_r$  – глубина остаточного отпечатка после снятия нагрузки;  $h_{\max}$  – максимальная глубина отпечатка при максимальной нагрузке  $P_{\max}$ .

**Результаты экспериментов и их обсуждение.** Частицы исходного вермикулита (табл. 3) имеют маленькие величины удельной поверхности и объема пор, но большой средний размер частиц 682 нм. Модифицирование вермикулита соляной кислотой позволяет не только существенно изменить его химический состав, но и уменьшить размер частиц на порядок: с 682 нм до 26 нм (табл. 3). При этом общий объем пор и удельная поверхность частиц возрастают более чем на порядок, а также повышается их сорбционная способность и следовательно, маслосъемность. Кристаллическая структура вермикулита разрушается и становится аморфной (рис. 4б). На дифрактограмме имеются отражения в области 2° и 22°, т.е. полученная структура похожа на структуру, характерную для аморфных силиконов. Такая картина, с небольшим отличием, наблюдается и для вермикулита, модифицированного затем ПФС (рис. 4в) или хитозаном. Первое отражение, отвечающее межплоскостному расстоянию, несколько сдвигается в область малых углов, т.е. больших расстояний. При этом второе отражение, отвечающее расстоянию внутри силиконовой цепи, не изменяется.

Полифенилсилоксан и целлюлоза хорошо плакируют частицы вермикулита и склеивают их между собой, поэтому размер частиц возрастает в несколько раз (табл. 3), при этом создается минеральная силикатная основа, на которой формируется полимерное силикатное покрытие. При этом удельная поверхность частиц изменяется незначительно, а общий объем пор уменьшается. Композиты, содержащие ПФС, обладают высокой адгезией к металлам.

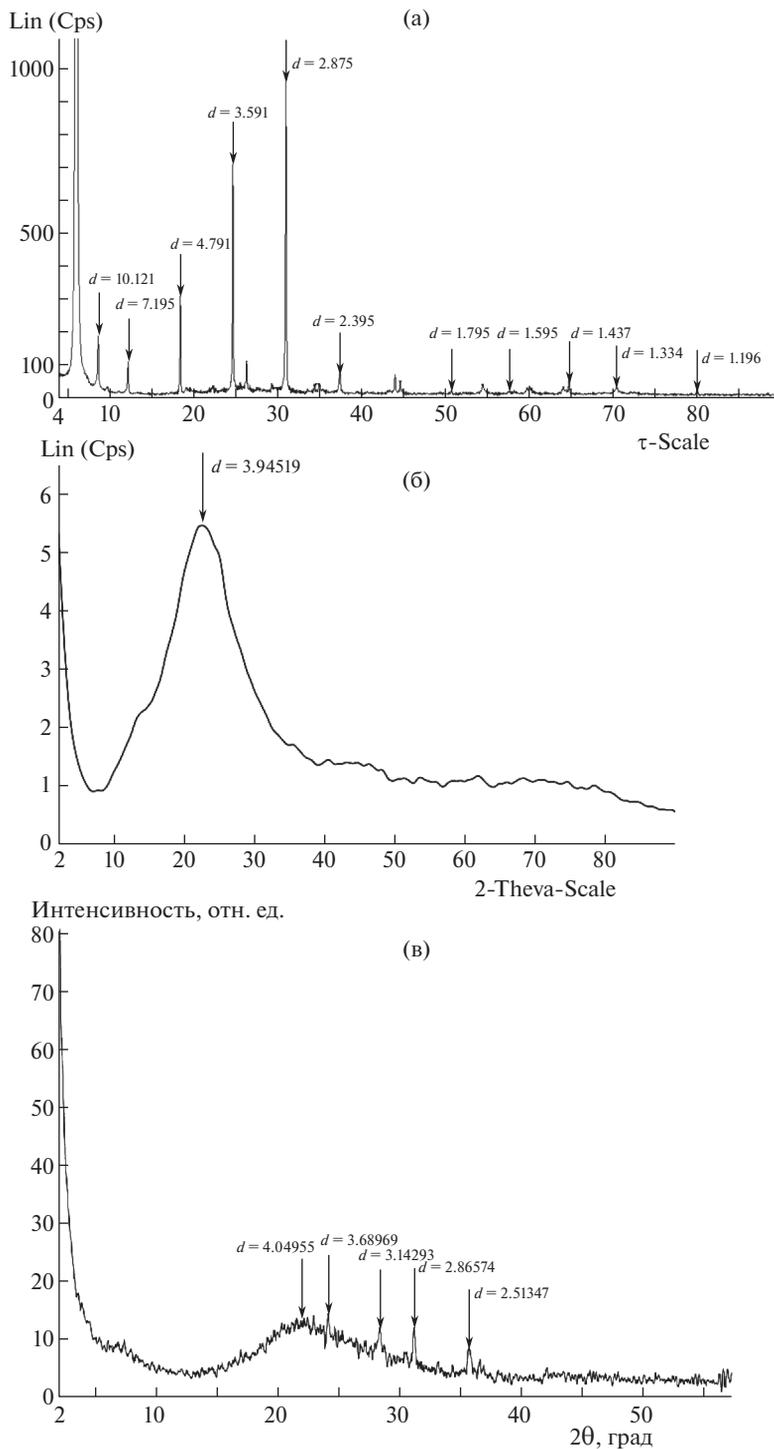


Рис. 4. Дифрактограммы: (а) – исходного вермикулита; (б) – вермикулита, обработанного кислотой; (в) – вермикулит + HCl + ПФС.

Увеличение размера “галереи” за счет расширяющейся решетки вермикулита после его обработки кислотой позволяет вводить полимерную молекулу ПФС, толщина которой равна 4.6–4.8 Å, согласно данным рентгенофазового анализа (РФА) и позитронно-аннигиляционной спектроскопии [5], а структуры их во многом близки по природе. Это также подтверждается данными РФА-спектроскопии (рис. 3в). При введении в “галерею” ПФС происходит эксфолиация вермикулита, что подтверждается данными РФА-спектроскопии. При модификации вермикулита в растворе происходит образование покрытия молекулярного характера в связи с близостью физико-химических характеристик ПФС и силиката.

Увеличение размера “галереи” за счет расширяющейся решетки вермикулита после его обработки кислотой позволяет вводить полимерную молекулу ПФС, толщина которой равна 4.6–4.8 Å, согласно данным рентгенофазового анализа (РФА) и позитронно-аннигиляционной спектроскопии [5], а структуры их во многом близки по природе. Это также подтверждается данными РФА-спектроскопии (рис. 3в). При введении в “галерею” ПФС происходит эксфолиация вермикулита, что подтверждается данными РФА-спектроскопии. При модификации вермикулита в растворе происходит образование покрытия молекулярного характера в связи с близостью физико-химических характеристик ПФС и силиката.

Обработка вермикулита, модифицированного кислотой, хитозаном меняет характер поверхности, но практически не изменяет размер частицы, общий объем пор снижается в 1.3 раза, однако максимальная сорбция возрастает в 2.4 раза.

Формирование покрытия выполняли за две технологические операции.

**Первая операция.** Модифицирование поверхностей трения осуществляли фрикционным методом в течение 3 мин стальным индентором (ролик диаметром 45 мм, твердость после закалки 54–56 HRC). Модифицирующий состав, состоящий из модифицирующего материала и масла, предварительно наносится на упрочняемую поверхность и подается в зону трения каждые 15–20 с капельным методом (табл. 2). На данном этапе преобладают процессы абразивного изнашивания поверхности стали и насыщения ее поверхностного слоя элементами триботехнического материала, начинается процесс формирования тонкопленочного покрытия [5].

**Вторая операция.** Формирование износостойкого металлокерамического покрытия производится стальным индентором (ролик диаметром 45 мм, твердость после закалки 54–56 HRC) в течение 1 часа (смазка подается в зону трения без модификатора для уменьшения скорости абразивного изнашивания) (табл. 2). На данном этапе происходит окончательное формирование металлокерамического покрытия на поверхности трения, которое характеризуется минимальным содержанием железа и большим содержанием углерода, кислорода и кремния [5].

Модифицирование стали вермикулитом, композицией и композитами на основе модифицированного кислотой и полимерами вермикулита позволяет получать тонкопленочное покрытие толщиной 7.0–8.3 мкм, (в среднем 7.8 мкм) с физико-механическими свойствами в широком диапазоне (табл. 4), которые оказывают существенное влияние на эксплуатационные показатели: долговечность, которая определяется в первую очередь скоростями изнашивания сопряженных поверхностей в условиях трения при граничной смазке, эффективность (потери на трение и температура поверхностей зависят от коэффициента трения).

Большой разброс значений модуля упругости и твердости объясняется химической и структурной неоднородностью покрытия: в мягкую матрицу (сталь) внедрены оксиды алюминия и кремния, которые соответственно имеют различные параметры. Например, при упрочнении композитом вермикулит + ПФС после трибоиспытаний поверхностный слой имеет следующий состав (в атомных процентах): O = 43.2; C = 39.8;

**Таблица 4.** Физико-механические свойства поверхностного слоя исходной стали 40Х и после ее модифицирования различными материалами

Материал для модифицирования	Вид обработки или испытаний	Модуль упругости покрытия $E \times 10^5$ , МПа	Динамическая нанотвердость, НV	Величина упругого восстановления покрытия $W_e$
Сталь исходная (немодифицированная)	шлифование	$\frac{1.8-25.2}{10.3}$	$\frac{268-482}{356}$	0.68
	триботехнические испытания	$\frac{8.4-12.8}{9.6}$	$\frac{500-642}{588}$	0.76
Однокомпонентные материалы				
Вермикулит	триботехнические испытания	$\frac{1.3-2.7}{1.8}$	$\frac{386-1120}{694}$	0.86
Вермикулит + НСI	формирование покрытия	$\frac{0.5-2.2}{1.07}$	$\frac{368-916}{484}$	0.70
	триботехнические испытания	$\frac{1.6-24.6}{12.9}$	$\frac{320-680}{582}$	0.64
Композиты				
Вермикулит + ПФС	триботехнические испытания	$\frac{1.4-3.5}{1.9}$	$\frac{387-1098}{587}$	0.95
Вермикулит + НСI + хитозан	формирование покрытия	$\frac{13.1-31.4}{20.1}$	$\frac{363-467}{425}$	1.15
	триботехнические испытания	$\frac{0.3-19.8}{3.8}$	$\frac{286-580}{450}$	0.64
Вермикулит + НСI + ПФС	формирование покрытия	$\frac{0.74-4.2}{2.0}$	$\frac{591-985}{792}$	2.04
	триботехнические испытания	$\frac{2.52-17.2}{10.4}$	$\frac{408-640}{544}$	2.2
Композиция				
Вермикулит + НСI + производная молибдена	формирование покрытия	$\frac{0.7-4.2}{1.7}$	$\frac{392-771}{481}$	2.08
	триботехнические испытания	$\frac{0.2-17.0}{8.60}$	$\frac{382-557}{468}$	0.90

Примечание. В числителе приведен интервал изменения величины, в знаменателе – средняя величина параметра.

Al = 7.2; Fe = 4.5; Si = 2.4; N = 1.6; Ca = 1.0; Sn = 0.3; Pb = 0.1; после травления поверхности аргоном на глубине 100 нм: O = 45.5; Fe = 21.1; Al = 18.6; C = 10.6; Si = 2.9; Ca = 1.1; N = 0.5; Sn = 0.3; Pb = 0.1.

Покрытие, полученное в результате трибомодифицирования стали вермикулитом, характеризуется высокой средней твердостью по сравнению со сталью после шлифования, значительным разбросом величин твердости и низким значением модуля упругости (примерно на порядок меньше стали после трибоиспытаний), возрастает также величина упругого восстановления. Большие значения нанотвердости имеют включе-

ния оксида алюминия, а матрица имеет величину твердости примерно такую же, как у исходной стали.

Покрытие, полученное при использовании частиц вермикулита, плакированного ПФС, имеет практически такие же величины модуля упругости и упругого восстановления, однако средняя твердость его на 18% меньше (табл. 4) чем при применении вермикулита. Использование вермикулита, обработанного соляной кислотой, приводит к значительному уменьшению средней величины и диапазона изменения величин твердости покрытия вследствие уменьшения количества оксида алюминия, а также снижению величин модуля упругости и упругого восстановления покрытия вследствие изменения химического состава и структуры исходного материала. Модифицирование вермикулита, обработанного кислотой, а затем хитозаном позволяет получить покрытие, которое имеет большие величины модуля упругости и упругого восстановления, но низкие значения величины твердости (табл. 4). Модифицирование вермикулита, обработанного кислотой, а затем ПФС позволяет получить покрытие с максимальной твердостью и величиной упругого восстановления при низком модуле упругости. Композиция вермикулита, обработанного кислотой, и производной молибдена позволяет получить покрытие с достаточно высокой твердостью и величиной упругого восстановления при низком модуле упругости.

Следует отметить, что средняя величина поверхностной нанотвердости исходной стали в процессе триботехнических испытаний возрастает, а значение модуля упругости остается примерно таким же. Величина упругого восстановления покрытия у всех материалов за исключением ПФС в процессе триботехнических испытаний снижается до уровня стали вследствие частичного изнашивания покрытия.

Таким образом, изменяя химический состав и структурные характеристики материалов на основе вермикулита, можно управлять эксплуатационными свойствами формируемых покрытий и, соответственно, триботехническими характеристиками на этапах формирования покрытия и эксплуатации трибосопряжения.

Анализ скоростей изнашивания на этапах нанесения триботехнического материала и формирования (табл. 5) показал, что наиболее высокими абразивными свойствами обладает вермикулит вследствие высокого содержания оксида алюминия и большого размера частиц (на образцах формируются следы царапин). Плакирование частиц вермикулита ПФС приводит к незначительному повышению скорости изнашивания при нанесении материала, однако при формировании покрытия скорость снижается в три раза по сравнению с немодифицированным вермикулитом.

Модифицирование вермикулита соляной кислотой позволяет снизить скорость изнашивания на данных этапах примерно в два раза вследствие изменения структуры триботехнического материала, уменьшения содержания оксида алюминия и размера частиц. Использование композиций и композитов на основе вермикулита, модифицированного кислотой, для формирования покрытий обеспечивает снижение скорости изнашивания стали по сравнению с модифицированным вермикулитом, особенно на этапе нанесения материала. Минимальные скорости изнашивания при формировании покрытия получают при использовании композита вермикулит + HCl + ПФС и композиции вермикулит + HCl + производная молибдена. Таким образом, на этапах формирования покрытия на скорость изнашивания стали наибольшее влияние оказывают химический состав (в частности величина содержания оксида алюминия), структура (кристаллическая или полиморфная), размер частиц. Следует ограничивать содержание оксида алюминия (оптимальное количество 4.5–5.2%), размер частиц должен быть не более 100 нм, а структура предпочтительна полиморфная. Плакирование частиц вермикулита ПФС позволяет повысить износостойкость стали в процессе триботехнических испытаний в 1.5 раза, при этом скорость изнашивания вкладыша уменьшается незначительно, однако коэффициент трения возрастает в два раза.

**Таблица 5.** Скорости изнашивания стали 40X на различных этапах формирования покрытия, деталей сопряжения в процессе трибоиспытаний и различных материалах для формирования покрытия

№ п/п	Триботехнический материал для формирования покрытия	Скорость изнашивания стали, мг/ч			Скорость изнашивания вкладыша в процессе трибоиспытаний, мг/ч	Коэффициент трения при максимальной нагрузке
		при нанесении материала	при формировании покрытия	в процессе трибоиспытаний		
1	Сталь без упрочнения	—	—	2.7	10.5	0.079
Однокомпонентные материалы						
2	Вермикулит	64	3.4	0.6	3.5	0.036
3	Вермикулит + HCl	28	1.7	0.1	2.5	0.046
Композиты						
4	Вермикулит + 9% ПФС	72	1.1	0.4	3.2	0.036
5	Вермикулит + HCl + хитозан	18	1.5	0.5	5.1	0.036
6	Вермикулит + HCl + 9% ПФС	8	1.4	0.1	1.9	0.014
7	Вермикулит + HCl + целлюлоза	2	0.1	1.0	1.9	0.014
Композиция						
8	Вермикулит + HCl + производная молибдена	2	0.1	0.6	1.5	0.022

Модифицирование вермикулита кислотой позволяет существенно снизить скорость изнашивания стали не только на этапах формирования покрытия, но и в процессе триботехнических испытаний (табл. 5) вследствие уменьшения содержания оксида алюминия в покрытии, изменения структуры с кристаллической на полиморфную, повышения модуля упругости, хотя при этом происходит снижение величины его твердости. Скорость изнашивания вкладыша при работе в паре с покрытием, сформированным модифицированным вермикулитом, значительно уменьшается в условиях трения при граничной смазке, однако коэффициент трения несколько возрастает.

Модифицирование вермикулита кислотой позволяет существенно снизить скорость изнашивания стали не только на этапах формирования покрытия, но и в процессе триботехнических испытаний (табл. 5) вследствие уменьшения содержания оксида алюминия в покрытии и повышения модуля упругости, хотя при этом происходит снижение величины его твердости покрытия. Скорость изнашивания вкладыша при работе в паре с покрытием, сформированным модифицированным вермикулитом, значительно уменьшается в условиях трения при граничной смазке, однако коэффициент трения несколько возрастает.

Максимальную износостойкость трибосопряжения обеспечивают следующие материалы: композит вермикулит + HCl + 9% ПФС и композиция вермикулит + HCl + производная молибдена. При этом покрытие, сформированное композитом вермикулит + HCl + 9% ПФС, обладает наибольшей твердостью среди исследованных материалов, а композицией вермикулит + HCl + производная молибдена в 1.6 раза меньше. Следует отметить, что применение этих двух материалов позволяет получить покрытие с наибольшими величинами упругого восстановления, которые обеспечивают

максимальную площадь соприкосновения сопряженных поверхностей и, соответственно, минимальную удельную нагрузку.

Таким образом, максимальную износостойкость трибосопряжения “шейка вала–вкладыш подшипника” в процессе эксплуатации обеспечивают покрытия, имеющие максимальные величины твердости и упругого восстановления покрытия и минимальную величину – модуль упругости.

Минимальный коэффициент трения ( $k_{тр} = 0.014$ ) в условиях трения при граничной смазке в трибосопряжении (табл. 5) обеспечивается при применении композитов на основе вермикулита, содержащих углерод (табл. 2). Композиция модифицированного вермикулита с производной молибдена позволяет получить также достаточно низкий коэффициент трения ( $k_{тр} = 0.022$ ).

**Выводы.** Получение оптимальных эксплуатационных свойств для обеспечения долговечности и эффективности трибосопряжения (на примере узла “коленчатый вал–вкладыш подшипника” судового среднеоборотного дизеля) можно достичь путем применения композиций и композитов на основе модифицированного вермикулита для формирования тонкопленочных износостойких покрытий на стальных поверхностях.

На этапах формирования покрытия на скорость изнашивания стали наибольшее влияние оказывают химический состав (в частности величина содержания оксида алюминия), структура (кристаллическая или полиморфная) и размер частиц триботехнического материала на основе вермикулита. Следует ограничивать содержание оксида алюминия (оптимальное количество 4.5–5.2%), размер частиц должен быть не более 100 нм.

Минимальный износ поверхностей трибосопряжения “шейка вала–вкладыш подшипника” в процессе эксплуатации обеспечивают тонкопленочные покрытия на стали на основе модифицированного вермикулита, имеющие максимальные величины твердости и упругого восстановления покрытия и минимальную величину – модуль упругости. Данные свойства покрытий позволяют получить следующие материалы: композит вермикулит, модифицированный соляной кислотой и 9% полифенилсилоксана, и композиция вермикулит, модифицированный соляной кислотой, и производная молибдена.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Погодаев Л.И.* Влияние геомодификаторов трения на работоспособность трибосопряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 1. С. 58.
2. *Погодаев Л.И., Кузьмин А.А.* Структурно-энергетические модели надежности материалов и технических средств. СПб.: СПГУВК, 2010. 123 с.
3. *Дунаев А.В., Ладиков В.В., Пустовой И.Ф., Голубев И.Г.* Эффективность применения минеральных модификаторов при техническом сервисе в АПК: науч. издание. М.: ФГБНУ “Росинформагротех”, 2014. 164 с.
4. *Колокатов А.М.* Ремонтно-восстановительные составы для повышения ресурса машин. М.: Изд-во РГАУ-МСХА, 2016. 215 с.
5. *Леонтьев Л.Б., Шапкин Н.П., Леонтьев А.Л., Макаров В.Н., Токликишвили А.Г.* Триботехнические наноматериалы и надежность судовых дизелей: Монография. Владивосток: ДВФУ, 2020. 277 с.

- 
6. Шапкин Н.П., Леонтьев Л.Б., Леонтьев А.Л., Шкуратов А.Л., Васильева В.В. Исследование влияния состава минеральных и органоминеральных смесей на триботехнические характеристики пар трения // Неорганические материалы. 2013. Т. 49. № 8. С. 961.
  7. Jaber M., Mische-Brenble J., Roux M., Dentzer J. and other. A new Al, Mg-organoclay // New Journal Chemistry. 2002. № 26. P. 1597.
  8. Shantarovich V.P. Positronium Atom in Solids—Peculiarities of Formation and Interconnection with Free Volume Nanostructure // Journal of Nuclear and Radiochemical Sciences. 2006. V. 7. N. 1. P. 37.
  9. Brunauer S., Emmett P.H., Teller E. Adsorption of Gases in Multimolecular Layers // Journal of the American Chemical Society. 1938. V. 60. P. 309.
  10. Головин Ю.И. Наноидентификация и его возможности. М.: Машиностроение, 2009. 312 с.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 62-462.3;677.076

**О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ КЕРАМИКИ  
В ГИБКИХ РУКАВАХ КРОССХЕЛИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ**© 2020 г. А. В. Березин<sup>1</sup>, В. Ю. Жиркевич<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: basiliuss@gmail.com

Поступила в редакцию 02.04.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Проведены исследования прочностных свойств гибкого рукава, выполненного из карбида титана и имеющего ранее не применявшееся в технике переплетение нитей. В ходе моделирования, проведенного с использованием метода конечных элементов, показано, что рукава предлагаемой конструкции способны выдерживать давление, делающее оправданным их применение в промышленности. При этом они способны демонстрировать достаточно высокую гибкость, нетипичную в традиционном контексте обсуждения механических свойств технических керамик. Это открывает новые возможности использования керамики в науке и технике.

*Ключевые слова:* переплетение нитей, гибкие рукава, техническая керамика, жаропрочность, износостойкость, конечноэлементный анализ

DOI: 10.31857/S0235711920050041

В статье предложен принципиально новый класс тканей, имеющих ранее не применявшееся переплетение нитей [1]. Нити основы в нем изготовлены в виде винтовых спиралей (пружинок), которые перевиваются с нитями утка – такими же пружинками, но закрученными в противоположном направлении, из-за чего ткань предложенной структуры получила название кроссхеликальной. Такая ткань отличается максимально возможной для ткани связностью, поскольку на каждом витке каждая нить основы охватывает не только соответствующие нити утка, но и смежные нити самой основы. Высокая связность обуславливает значительную живучесть ткани ввиду того, что развитие любого локального повреждения сдерживается перераспределением нагрузок между всеми примыкающими к нему нитями.

Предложенная конструкция может найти много полезных применений, одним из которых может являться производство бесшовных гибких труб (рукавов). Т.к. длинные тонкие пружины чрезвычайно плохо сопротивляются поперечному изгибу, можно предположить, что с их использованием возможно изготовление гибких рукавов из достаточно хрупких материалов, поскольку значительные поперечные перемещения концов каждой пружинки будут сопровождаться относительно небольшими деформациями в ее материале. На рис. 1 показан фрагмент рукава описанной конструкции. Было бы заманчиво изготовить такое изделие из жаропрочной технической керамики, что дало бы возможность использовать рукава такого рода для транспортировки различных расплавов, включая расплавы металлов, либо горячих газов. Предполагается, что для обеспечения герметичности поры такой конструкции заполнены столь же жаропрочным волокнистым материалом.

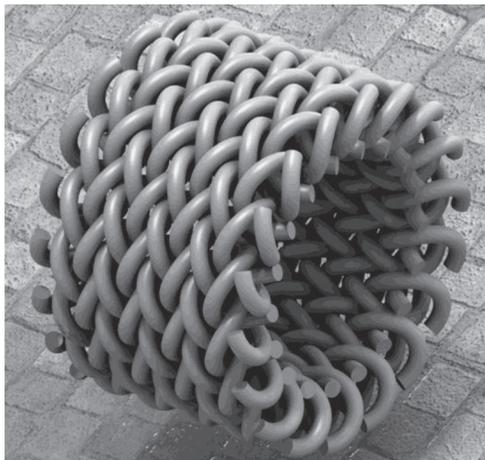


Рис. 1. Рукав из кроссхеликальной ткани.

**Обоснование подходов и результаты моделирования.** Исследование, которому посвящена настоящая статья, имело своей целью проверку средствами конечноэлементного моделирования предположения о допустимости применения технической керамики для использования в гибких рукавах описанной конструкции. Проверка осуществлялась на примере карбида титана, механические характеристики которого достаточно давно известны [2–4]. Несмотря на то, что прочность при растяжении этого материала, как и других технических керамик, сильно различается в зависимости от пористости, размера зерна, технологии получения, применяемых добавок и способов термообработки, в целом из имеющейся литературы следует, что для качественных образцов горячепрессованного карбида титана она составляет около 500 МПа, причем это значение сохраняется до температур около 1000°C, после чего быстро падает. Поэтому для расчета принимались механические характеристики карбида титана, соответствующие именно этой температуре.

В недеформированном состоянии рукав кроссхеликальной структуры представляет собой переплетение двух семейств искривленных винтовых пружин (рис. 1), в которых оси соответствующих винтов образуют на цилиндрической срединной поверхности формируемого рукава ортогональную сеть, базисные векторы которой ориентированы под 45° к оси этой цилиндрической поверхности. Таким образом, получается предфрактал, т.е., самоподобная фигура, в которой базовые винтовые образования, в свою очередь, закручиваются по винтовым линиям большего диаметра.

На рис. 2 показана коаксиальная к упомянутой срединной поверхности цилиндрическая поверхность, ограничивающая рукав снаружи, наряду с тороидальной поверхностью, в которую она переходит при изгибе рукава.

Геометрия рукава рассматриваемой структуры характеризуется четырьмя параметрами: диаметром нити или прутка, из которого сформированы винтовые пружины  $d_1$ , диаметром соответствующего базового винта  $d_2$ , диаметром упомянутой срединной цилиндрической поверхности  $d_3$  и общим числом пружин  $k$  в основании цилиндра срединной поверхности, которые, в конечном счете, образуют замкнутую поверхность рукава. Параметр  $k$  всегда четный, поскольку включает в себя одинаковое количество пружин, закрученных в одну и другую сторону. Если вернуться к аналогии с традиционной тканью, то произвольный малый фрагмент кроссхеликального рукава подобен полотну, сориентированному на срединной поверхности так, что нити основы и утка

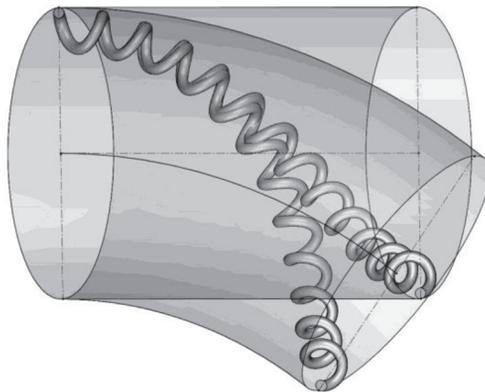


Рис. 2. Схема изгиба рукава с образующими его винтовыми нитями.

направлены под  $45^\circ$  градусов к оси рукава по разные стороны от нее. Обвивая срединную поверхность по винтовой кривой, эти нити сколь угодно долго циклично воспроизводят исходную геометрию. Только так возможно получить бесшовный длинный рукав.

Поскольку размерность диаметров  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  одинакова, удобно ввести безразмерные диаметры  $\delta_1 = d_1/d_3$  и  $\delta_2 = d_2/d_3$ . Любопытно, что для каждого  $k$  существует единственное сочетание  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , соответствующее максимально возможной плотности структуры. Эти значения определены в результате 3D-моделирования и приведены в табл. 1, где через  $\phi$  обозначена пористость получаемого тела рукава, ограниченного огибающими его внутренней и наружной цилиндрическими поверхностями.

Видно, что для рукава из 24 пружинok она составляет около половины общего объема структуры и уменьшается с увеличением  $k$ . При фиксированном диаметре рукава максимально возможной плотности, его толщина и диаметр прутков, используемых для изготовления пружинok, уменьшаются почти обратно пропорционально значению  $k$ . На рис. 3 показана ячейка периодичности рукава максимальной плотности.

Для конечноэлементного анализа был выбран рукав максимальной плотности с параметрами:  $k = 24$ ,  $d_1 = 1.6$  мм,  $d_2 = 5.2$  мм,  $d_3 = 36$  мм. В ходе исследования в первую очередь определялась величина максимально допустимого давления заполняющей рукав среды, которое способна выдержать конструкция по условиям прочности. Поскольку исследуемая геометрия сама по себе достаточно сложна, при деформировании образует множественные заранее не определенные контакты, а свойства заполняющего поры волокнистого материала трудно формализуемы. Расчет проводился в предположении, что в ходе перераспределения нагрузки от внутреннего давления между всеми элементами конструкции, в конечном счете, получится достаточно однородная картина, близкая к случаю нагружения модели радиально ориентированными

Таблица 1. Параметры рукава максимальной плотности

$k$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\phi$
24	0.0448	0.1440	0.496
36	0.0306	0.0978	0.477
48	0.0232	0.0740	0.467
60	0.0188	0.0598	0.457

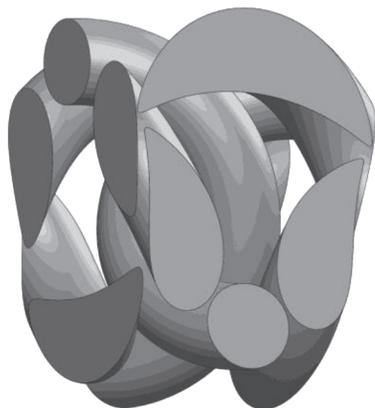


Рис. 3. Пространственная ячейка периодичности структуры рукава.

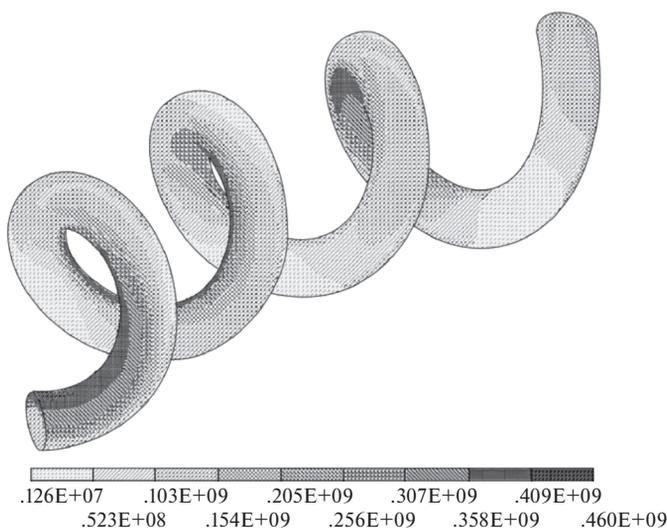


Рис. 4. Напряжения растяжения от действия внутреннего давления.

объемными силами. Т.к. в этом случае все пружинки оказываются в одинаковых условиях нагружения, достаточно рассмотреть фрагмент любой из них, взятой отдельно от массива, при условии задания соответствующих условий периодичности на концах выбранного фрагмента.

Ввиду того, что прочность керамики на растяжение значительно ниже прочности на сжатие, в ходе решения контролировалась величина возникающих в конструкции максимальных растягивающих напряжений. Радиальная объемная нагрузка увеличивалась до тех пор, пока эти напряжения не достигли предела прочности при растяжении. Состояние, соответствующее этому моменту, показано на рис. 4, где градуировка цветовой шкалы показывает первые главные напряжения в Па, и соответствует давлению среды в рукаве в 6.5 атм.

Для изучения изгибной податливости конструкции взят фрагмент пружины длиной в половину шага винта вокруг срединной цилиндрической поверхности рукава. При

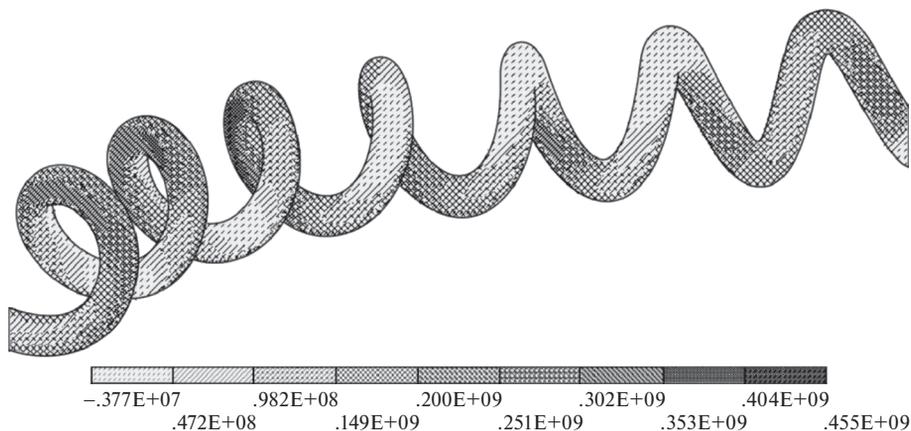


Рис. 5. Напряжения растяжения, возникающие при изгибе рукава.

изгибе рукава в плоскости, проходящей через концы такого фрагмента, он оказывается достаточным для исследования, т.к. исчерпывает весь спектр нагрузок, возникающих для произвольной пружины во время такого изгиба, ибо содержит как участки, подвергающиеся максимальному растяжению, так и участки максимального сжатия, равно как и все промежуточные. На рис. 2 этот фрагмент показан как в исходном положении, соответствующем недеформированному рукаву, так и в положении, когда при изгибе рукава его наружная поверхность, охватывающая данный фрагмент, переходит в тороидальную, которая соответствует изогнутому состоянию. Вопросы возможной потери устойчивости в рамках данного исследования не рассматривались. Нагружение осуществлялось кинематически, путем принудительного перевода исследуемого фрагмента пружины из исходной недеформированной геометрии в геометрию, соответствующую изображенному на рис. 2 изгибу рукава, после чего анализировалось возникшее при этом напряженное состояние. Такое моделирование должно осуществляться в постановке задачи больших перемещений (рис. 5).

В ходе расчетов выявлено, что растягивающие напряжения, приближающиеся к пределу прочности на растяжение, возникают в конструкции при изгибе оси рукава по радиусу 90 мм, т.е. радиусу, равному всего 2.5 диаметра срединной поверхности рукава. Такой показатель можно оценить как свидетельство достаточной для практического применения гибкости рукава предложенной конструкции. Учитывая, что речь идет о применении жаропрочного, но очень хрупкого материала, этот результат следует считать интересным.

Однако использование геометрии максимальной плотности имеет свои минусы. Осевые линии используемых в конструкции рукава пружин образуют на срединной цилиндрической поверхности рукава ортогональную сеть. При изгибе рукава эта сеть перестает быть ортогональной и превращается в ромбическую, со стороны растянутой части — с ромбами, вытянутыми вдоль направления растяжения волокон, а со стороны сжатой — сплюснутыми в этом направлении. Поскольку в рукаве максимальной плотности смыкание смежных витков изначально имеет место, эта сплюснутость не может быть реализована, и возможны значительные возрастания напряжений растяжения из-за смещения нейтральной оси непосредственно в область сжимаемой поверхности рукава, либо потеря устойчивости того или иного вида. Из этого следует, что необходимо уменьшить диаметр  $d_1$  для обеспечения зазоров между витками, достаточных для смыкания витков на сжимаемой стороне рукава во время изгиба.

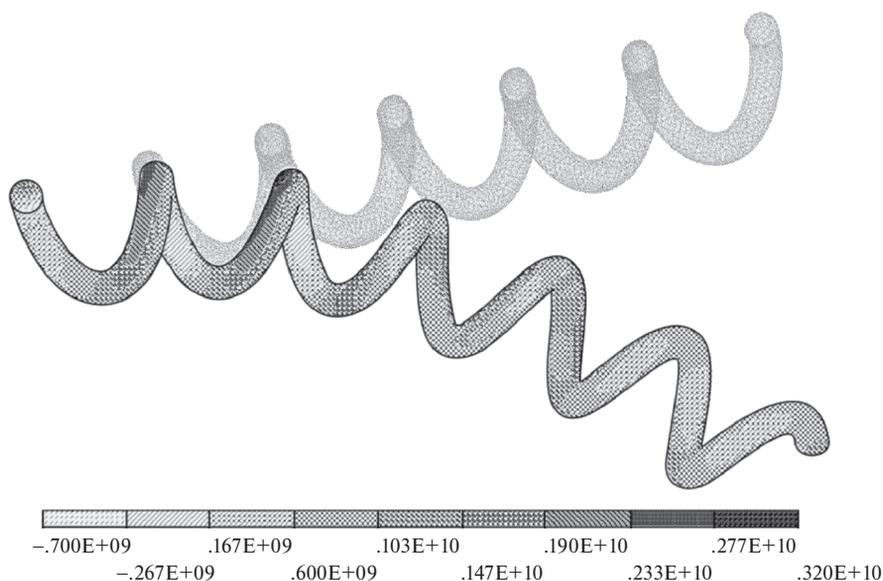


Рис. 6. Напряжения растяжения при формировании рукава.

В частности, как обнаружено в ходе 3D-моделирования на рассматриваемом примере, это уменьшение при радиусе изгиба 90 мм должно составлять почти треть, что достаточно много, но при радиусе 180 мм — уже около 15%, что можно считать приемлемой величиной. Если ранее радиус изгиба в  $2.5d_3$  был оценен как допустимый по условию прочности, то вдвое больший, то есть  $5d_3$ , тем более окажется позволительным. К тому же уменьшение диаметра прутка до  $0.85d_1$  вызовет увеличение податливости пружины, что при кинематическом нагружении приведет к снижению возникающих в ней напряжений.

Подобно процедуре определения напряжений в пружинах изогнутого рукава решалась задача определения напряжений в них в процессе изначальной сборки прямого рукава из прямолинейных винтовых пружин. Как и ранее, нагружение осуществлялось путем принудительного перевода пружины из исходной прямолинейной геометрии в геометрию, соответствующую ее положению в теле не искривленного рукава. Соответствующий результат показан на рис. 6, где исходная форма пружины изображена полупрозрачной. В отличие от случая изгиба рукава напряжения, возникающие в этом варианте, явно превышают прочность материала. Из этого следует вывод, что изготовление такого рода рукавов путем сборки из предварительно изготовленных прямолинейных пружин, ввинчиваемых в процессе сборки в соответствующие позиции, вряд ли возможно. Технология изготовления должна предполагать получение всего рукава целиком непосредственно на этапе формовки, до процедуры горячего прессования.

Полученные на примере карбида титана результаты можно распространить и на другие виды хрупких жаропрочных материалов. В соответствии с [5] прочность при растяжении поликристаллического карбида вольфрама существенно зависит от среднего размера зерна, но при значении этого параметра 0.7 мкм примерно сопоставима с прочностью, принимавшейся здесь для карбида титана. Это значит, что рукава из карбида вольфрама будут обладать такой же способностью переносить внутреннее давле-

ние. Вместе с тем, допустимый радиус изгиба для них будет больше ввиду большего модуля упругости.

Изготовление гибких рукавов можно осуществлять путем предварительного размещения спекаемой смеси в плавких тонких трубках требуемой конфигурации для предварительного уплотнения под давлением при невысоких температурах, как это делается для карбида бора в [6], с последующим спеканием. В перспективе возможно применение аддитивных технологий [7]. Можно ожидать, что при этом наиболее заманчивым окажется применение диборидов металлов [8], отличающихся жаропрочностью и высокими прочностными свойствами.

**Выводы.** Таким образом, возможно получение гибких рукавов из жаропрочной керамики. Такие рукава могут выдерживать значительное внутренне давление и не разрушаться при изгибах по радиусу, впятеро превышающему средний диаметр рукава. Изготовление таких изделий возможно при условии получения рукава необходимой структуры непосредственно на этапе формовки, до процедуры горячего прессования. Такие рукава можно использовать, например, при перекачке различных расплавов, высокоабразивных материалов, управлении направлением горячих газовых потоков и при других нестандартных применениях.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин А.В., Жиркевич В.Ю. Ткань и способ ее получения. РФ Патент 2243299, 2004.
2. Самсонов Г.В., Унадхая Г.Ш., Нешпор В.С. Физическое материаловедение карбидов. Киев: Наукова думка. 1974. 455 с.
3. Кипарисов С.С., Левинский Ю.В., Петров А.П. Карбид титана: получение, свойства, применение. М.: Металлургия, 1987. 216 с.
4. Шевченко В.Я. Введение в техническую керамику. М.: Наука. 1993. 112 с.
5. Головчан В.Т., Бондаренко В.П., Литошенко Н.В. О прочности поликристаллического монокарбида вольфрама при растяжении // Проблемы прочности. 2003. № 4. С. 82.
6. Liu L., Li X., He Q., Xu L., Cao X., Peng X., Meng C., Wang W., Zhu W., Wang Y. Sintering dense boron carbide without grain growth under high pressure // Journal of the American Ceramic Society. 2018. V. 101. № 3. P. 1289.
7. Chen A.N., Wu J.M., Chen J.Y., Xiao H., Chen P., Li C.H., Shi Y.S., Liu K. High-performance ceramic parts with complex shape prepared by selective laser sintering: a review // Advances in Applied Ceramics. Institute of Materials. 2018. V. 117. № 2. P. 100.
8. Zhang G.-J., Liu J.-X., Ni D.-W., Zou J., Liu H.-T., Wu W.-W., Suzuki T.S., Sakka Y. Inherent anisotropy in transition metal diborides and microstructure/property tailoring in ultra-high temperature ceramics-A review // Journal of the European Ceramic Society. 2018. V. 38. № 2. P. 371.

---

---

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.  
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ**

---

---

УДК 621.793+621.43-049.32

**МОДИФИКАЦИЯ ПОДШИПНИКОВЫХ СОПРЯЖЕНИЙ  
ТУРБОКОМПРЕССОРА ТКР 7С-6**© 2020 г. А. Г. Ипатов<sup>1,\*</sup>, Е. В. Харанжевский<sup>2</sup>, А. Г. Иванов<sup>1</sup><sup>1</sup> *Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия*<sup>2</sup> *Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия**\*e-mail: Ipatow.al@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.04.2020 г.

Принята к публикации 29.07.2020 г.

Исследована возможность повышения работоспособности турбокомпрессоров ТКР 7С-6 путем создания новых пар трения в подшипниковых сопряжениях с использованием сверхтвердых керамических покрытий. Выполненные исследования показали, что наиболее эффективным сочетанием материалов для подшипников скольжения является пара трения: сверхтвердое покрытие В<sub>4</sub>С-ВN и бронза БрАЖ9-4. Применение этой пары трения в турбокомпрессоре ТКР 7С-6 позволяет снизить коэффициент трения в подшипниковых сопряжениях, что обеспечивает снижение интенсивности изнашивания в сравнении со стандартными подшипниковыми узлами в турбокомпрессоре. Низкий коэффициент трения положительно сказывается на динамике набора оборотов вала турбокомпрессора и коленчатого вала ДВС. Представленные результаты могут быть использованы в условиях двигателестроения и ремонтного производства.

*Ключевые слова:* сверхтвердое покрытие, низкий коэффициент трения, короткоимпульсная лазерная обработка, турбокомпрессор, подшипниковый узел

**DOI:** 10.31857/S0235711920060048

С ужесточением экологических норм к выбросам от современных автомобильных двигателей внутреннего сгорания автопроизводители все чаще прибегают к использованию турбин. Использование турбин значительно сокращает вредные выбросы в атмосферу без значительных инвестиций в двигателестроение. Работа большинства турбин основана на использовании энергии выхлопных газов для раскручивания вала турбины. Использование выхлопных газов накладывает свои недостатки на работу турбины, связанные с инертностью системы и низкой эффективностью потока выхлопных газов, приводящие к формированию провалов в работе турбокомпрессора. Особенно это характерно в условиях городского цикла движения автомобиля, когда турбина недостаточно раскручивается, снижая динамику набора оборотов коленчатого вала и повышая расход топлива. С целью повышения эффективности работы турбокомпрессоров снижают силу инерции вращающихся частей, главным образом, за счет уменьшения их массы и размеров. Однако уменьшение размеров приводит к значительному увеличению скорости вращения вала турбины (до 200000 об/мин), что сказывается на ее ресурсе [1]. Поэтому вопросы повышения эффективности работы турбокомпрессоров остаются актуальными в современном двигателестроении [2, 3].

Основная причина выхода из строя турбокомпрессоров – разрушение подшипниковых опор вала турбины. Ресурс подшипниковых опор современных турбин составляет 30–60% от ресурса самой турбины, поэтому основная задача повышения эффективно-

сти работы турбокомпрессоров заключается в обеспечении повышенного ресурса подшипниковых сопряжений. Разрушение подшипниковых сопряжений обусловлено аварийными условиями эксплуатации, которые возникают вследствие низких оборотов вала турбины (не обеспечиваются гидродинамические условия смазки) или же при высоких кинематических режимах работы вала турбины, когда смазочный материал теряет свою эффективность в силу высоких температур (свыше 200°C). Основной причиной выхода из строя подшипникового сопряжения является механическое изнашивание трущихся поверхностей в условиях отсутствия интенсивной смазки [4]. Поэтому решение задачи по снижению интенсивности изнашивания подшипникового сопряжения направлено на: 1) обеспечение интенсивной смазки в сопряжении; 2) использование материалов с повышенной термостойкостью и устойчивостью к абразивному изнашиванию.

Отсутствие интенсивной смазки в сопряжении вызвано низкими оборотами вала турбины турбокомпрессора в период набора оборотов двигателя, что связано с инертностью системы вращающихся элементов. На динамику раскрутки вала турбокомпрессора влияет момент трения в подшипниковом сопряжении. Поскольку массовые и геометрические параметры вала турбины изменить в условиях ремонтного производства невозможно, то наиболее оптимальным методом снижения инертности системы является снижение момента трения в подшипниковых сопряжениях. Таким образом, проблемы инертности системы и работоспособности подшипникового сопряжения лежат в одной плоскости, и их решение определяет эффективность эксплуатации всего турбокомпрессора.

В современном машиностроении для подшипниковых пар трения в турбокомпрессорах используют традиционные трибосопряжения на основе “бронза—сталь”. Трибологические и физико-механические свойства большинства медных сплавов и сталей не отвечают требованиям современного машиностроения, в частности, эксплуатация данных материалов ограничена в температурном диапазоне (от –40 до +200°C), в кинематических режимах (не более 5 м/с), в динамических характеристиках (не более 35 МПа). Как показывает практика, в современных условиях эксплуатации турбокомпрессоров скоростные параметры превышают 50 м/с, динамические нагрузки достигают свыше 200 МПа, а температурный фон колеблется в пределах 200–250°C. Поэтому оптимизация материалов в парах трений остается наиболее актуальной задачей и ее решение носит фундаментальный характер при проектировании турбокомпрессоров [3].

**Цели и задачи исследований.** Целью настоящего исследования является повышение эффективности работы турбокомпрессора в условиях высоких температур и в условиях масляного голодания. Наиболее жаростойкими и износостойкими являются керамические материалы. Однако их использование ограничено низкой технологичностью получения и высоким коэффициентом трения. В работе [5] предложена уникальная технология получения тонких сверхтвердых покрытий на основе карбида и нитрида бора с низким коэффициентом трения. Покрытия наносят методом короткоимпульсной лазерной обработки мелкодисперсных порошковых композиций. Синтезируемые покрытия обладают стойкостью к высоким температурам, длительным нагрузкам и характеризуются сверхнизким коэффициентом трения в условиях сухого трения скольжения, в том числе при повышенных нагрузках и температурах [5]. В настоящей статье исследовано влияние сверхтвердого керамического покрытия на момент трения в подшипниковом сопряжении вала турбины турбокомпрессора ТКР 7С-6.

**Материалы и методика исследований.** Для оптимизации материалов подшипникового сопряжения проанализировали трибологические характеристики различных трибосопряжений. При трибоиспытаниях приняли схему “диск—колодка”. В качестве пар трений использовали следующие сочетания: 1) “Сверхтвердое покрытие – закаленная сталь 45”; 2) “Сверхтвердое покрытие – бронза БрАЖ9-4”; 3) “Сверхтвердое покрытие – антифрикционный чугу́н АЧС-5”.

Выбор материалов в сопряжениях обоснован их высокими трибологическими свойствами в условиях сухого, граничного и жидкостного трения. Обоснование механизмов формирования сверхнизкого коэффициента трения приведено в работах [6–8] для различных условий испытаний. Исследуемое сверхтвердое покрытие на основе карбида и нитрида бора наносили на поверхность стального диска. Толщина покрытия составляла 10–15 мкм. Основные физико-механические характеристики используемых сверхтвердых покрытий и технология их получения представлены в работе [2].

В качестве режимов трибонагружения приняли режимы: скорость трения 0.85 м/с; диапазон нагружения варьировали в пределах от 50 до 400 Н. Нагрузку увеличивали через 50 Н, с длительностью испытания при каждой нагрузке пять минут. Данные режимы наиболее эффективно моделируют условия работы подшипникового сопряжения турбины турбокомпрессора в переходных режимах двигателей КамАЗ-740 [3]. В процессе трибологических испытаний контролировали коэффициент трения.

После оптимизации пары трения была изготовлена партия из десяти штук турбокомпрессоров ТКР 7С-6 с модифицированными подшипниковыми узлами, которые сравнивались с десятью турбокомпрессорами ТКР 7С-6 со стандартными подшипниковыми сопряжениями. Для определения эффективности и качества работы подшипниковых сопряжений турбин разработали методику определения момента трения в лабораторных условиях.

Рассматриваемая методика опирается на основное уравнение динамики вращательного движения [9], когда в случае равнозамедленного движения можно записать

$$M = I|\varepsilon| = I \frac{\omega_0 - \omega_1}{t}, \quad (1)$$

где  $M$  – модуль момента трения в подшипниковых узлах вращающейся детали, Н м;  $I$  – момент инерции вращающейся детали относительно оси вращения, кг м<sup>2</sup>;  $\varepsilon$  – угловое ускорение вращающейся детали, рад/с<sup>2</sup>;  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  – угловая скорость в начальный и конечный момент времени соответственно, рад/с;  $t$  – время проведения измерений, с.

При проведении опытов исследуемую конструкцию в сборе фиксируют, затем раскручивают ее вал сторонним приводом до некоторой частоты вращения  $n_0$  (об/мин), причем известно соотношение  $\omega = \pi n / 30$ . Затем отсоединяют привод и обеспечивают свободное вращение вала под действием момента трения в подшипниковых узлах. Одновременно с этим фиксируется время и частота вращения. По окончании опыта определяется момент трения

$$M = I \frac{\pi(n_0 - n_1)}{30t}, \quad (2)$$

где  $n_0$ ,  $n_1$  – угловая скорость в начальный и конечный момент времени соответственно, об/мин.

В рассматриваемой методике определения момента трения  $M$  по формулам (1), (2) пренебрегается действием момента сопротивления  $M_S$ , создаваемого воздухом при вращении крыльчатки турбокомпрессора, т.к. при испытаниях вал раскручивается до относительно невысоких скоростей вращения по сравнению с рабочей скоростью вала в турбокомпрессоре (до 50000 с<sup>-1</sup>). Очевидно, что величина момента  $M_S$  зависит от частоты вращения крыльчатки, т.е.  $M_S = f(n)$ . Энергия вала турбокомпрессора, раскрученного до начальной угловой скорости  $\omega$ , определяется как  $E = I\omega^2/2$ . В ходе вращения, эта энергия расходуется на работу момента трения  $A$ , совершаемую в узле трения, и работу момента сопротивления  $A_S$ , связанную с преодолением сопротивления воздушного потока в крыльчатке турбокомпрессора

$$E = A + A_S = A + 2\pi \int M_S n(t) dt, \quad (3)$$

при этом  $M_S$  тем больше, чем больше скорость вращения вала  $n$ , т.е. зависит от времени вращения. Второй член в уравнении (3) является сугубо положительной величиной, которая при увеличении времени свободного вращения вала  $t$  может только возрастать. Таким образом, можно утверждать, что в опытах по раскрутке вала до одинаковой начальной скорости  $n_0$  увеличение времени свободного вращения вала  $t$  однозначно приводит к увеличению вклада от второго слагаемого в уравнении (3) и снижению вклада от первого. Это обосновывает достоверность используемого допущения модели о пренебрежении величиной  $M_S$ .

В формулах (1), (2) предполагается, что момент трения в подшипниковых узлах постоянен в заданном диапазоне скоростей и не отличается от момента трогания (момента трения вблизи нулевой скорости скольжения). Такое положение характерно для подшипниковых опор на подшипниках качения. Для таких конструкций можно рекомендовать оценивать время до полной остановки вала ( $n_1 = 0$ ). В случае использования опор с подшипниками скольжения, работающими в гидродинамических условиях смазки, следует принять, что момент начала вращения вала турбины больше собственного момента трения в подшипниковых узлах. Для определения последнего оценим время не до полной остановки, а до некоторой конечной частоты вращения ( $n_1 > 0$ ). При этом в подшипниковые узлы необходимо обеспечить подачу смазки, соответствующей условиям эксплуатации.

Для определения момента трения в подшипниковых узлах турбокомпрессоров автомобильных двигателей, мы использовали начальную частоту вращения  $n_0 = 1400$  об/мин. Этого недостаточно, чтобы обеспечить рабочие условия в узлах трения, номинальные скорости которых достигают десятков тысяч оборотов в минуту. Данный режим позволяет исследовать переходные процессы граничного трения при недостаточных условиях смазки, характерных для частичных нагрузок ДВС с нестационарными режимами. Именно в этих режимах обеспечивается повышенный износ узлов трения и их уплотнений. Данная методика позволяет прогнозировать износостойкость посадочных мест валов и втулок подшипников независимо от температурного режима, опираясь только на трибологические свойства при низких скоростях вращения. Вопрос о моменте начала вращения вала турбины не исследуется, т.к. он наблюдается в очень короткий промежуток времени запуска двигателей, и составляет менее 1% от срока службы машины. Основной износ происходит при работе именно в переходных режимах.

После установки турбокомпрессора в тиски лабораторного стенда и подключения к внешнему двигателю производится настройка системы управления на отключение счетчика времени в момент достижения частоты вращения  $n_1 = 500$  об/мин при свободном выбеге вала. Затем проводят измерения на каждом турбокомпрессоре в десятикратной повторяемости для получения достоверных и значимых результатов. При испытаниях в систему смазки турбокомпрессора обеспечивали подачу масла KAMAZ SAE 15W40 API CI-4/SL K10-40.50, которое соответствует спецификации завода-изготовителя.

**Результаты исследований и их обсуждение.** Оптимальное сочетание пар трений определили по величине коэффициента трения в процессе испытаний с изменением нормальной нагрузки. Исследование провели в условиях граничной смазки, близким к аварийным режимам эксплуатации подшипниковых сопряжений турбокомпрессоров.

Минимальный коэффициент трения наблюдается у сопряжения «сверхтвердое покрытие–бронза БрАЖ9-4» (рис. 1). Низкий коэффициент трения бронз в условиях полужидкостного трения, а также химическая инертность материалов пары трения обеспечивают низкую интенсивность изнашивания в анализируемом сопряжении. При этом наличие алюминия в составе бронзы улучшает приработку с минимальным износом, что предопределяет малые зазоры и высокую эффективность работы сопря-



Рис. 1. Сравнительный анализ коэффициента трения различных пар трения.

жения. Наличие железа и твердых растворов на основе железа и меди позволяют хорошо противостоять микродеформации тонких поверхностных слоев бронзы и дальнейшему их разрушению. Как показали трибологические испытания, медьсодержащие продукты износа не вымываются из зоны трения, а участвуют в формировании тонкого медного слоя на поверхности контртела, покрытого анализируемым керамическим покрытием, реализуя эффект безызносности [10].

Что касается антифрикционного чугуна, то проведенные исследования подтверждают низкий коэффициент трения в сопряжении, однако низкая усталостная прочность, приводящая к диспергированию тонких поверхностных слоев, и низкая теплопроводность вызывают интенсивное изнашивание. Стальная поверхность в сопряжении с керамическим покрытием обладает низкой степенью прирабатываемости, повышенным коэффициентом трения в условиях граничной смазки, вызывающие значительный перегрев сопряжения и схватывание трущихся поверхностей. Поэтому данные сочетания материалов использовать в условиях подшипниковых сопряжений турбокомпрессоров недопустимо. Таким образом, установлено, что наиболее оптимальное сочетание материалов в подшипниковом сопряжении турбокомпрессора “сверхтвердое покрытие – БрАЖ9-4”.

На основе такого сочетания материалов были подготовлены модифицированные подшипниковые сопряжения турбокомпрессоров ТКР 7С-6 в количестве десяти штук и проанализирована их сравнительная эффективность эксплуатации в условиях стендовых испытаний по вышеуказанной методике. Определение момента трения в стандартных подшипниковых сопряжениях валов турбокомпрессоров проводили на турбокомпрессорах, прошедших обкатку 1000 км. После этого на поверхности валов турбокомпрессоров синтезировали анализируемое керамическое покрытие, после чего собирали турбокомпрессор, устанавливали его на лабораторный стенд и проводили испытания по измерению момента трения. Результаты испытаний показали, что значения моментов трения в подшипниковых узлах всех проанализированных турбокомпрессоров с вероятностью 95% находятся в диапазонах  $M = 2.36 \pm 0.11$  Н м до обработки вала и  $M = 1.73 \pm 0.10$  Н м после обработки вала. Таким образом, нанесение сверхтвердого керамического покрытия на опорные шейки вала турбокомпрессора снижает момент трения в подшипниковых узлах турбокомпрессора ТКР 7С-6 в 1.37 раза или

на 27%. Снижение величины момента трения должно положительно сказываться на чувствительности турбокомпрессора, т.е. его способности повышать частоту вращения вала во время увеличения подачи топлива. Указанное обстоятельство позволяет снизить время действия так называемой “турбоямы” во время набора скорости транспортным средством.

**Выводы.** Представленные результаты исследований подтверждают работоспособность модифицированных подшипниковых сопряжений турбокомпрессора ТКР 7С-6 на основе сверхтвердых материалов. Эффективность работы турбокомпрессора оценивалась по величине момента трения в подшипниковом сопряжении и увеличилась на 27%, что сказывается на снижении интенсивности изнашивания подшипникового сопряжения. Представленные результаты исследований можно применить при производстве и ремонте турбокомпрессоров.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-79-20012).

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов А.В., Космынин А.В., Хвостиков А.С., Щетинин В.С., Иванова Н.А. Проблемы эксплуатации турбокомпрессоров ДВС и пути повышения их надежности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 2. С. 67.
2. Pesiridis A. The application of active control for turbocharger turbines. International // Journal of Engine Research. 2012. № 13 (4). P. 385.  
<https://doi.org/10.1177/1468087411435205>
3. Бурцев А.Ю., Плаксин А.М., Гриценко А.В. Повышение эксплуатационной надежности турбокомпрессоров дизелей тракторов // АПК России. 2015. Т. 72. № 1. С. 23.
4. Величко С.А., Сенин П.В., Чумаков П.В. Пути повышения межремонтного ресурса силовых гидроцилиндров // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2015. № 4. С. 36.
5. Ipatov A.G., Kharanzhevskiy E.V. The Tribological Properties of Superhard and Functional Coatings Based on Carbide and Boron Nitrid // Journal of Friction and Wear. 2019. V. 40. № 6. P. 588.
6. Larsson P., Axen N., Hogmark S. Tribofilm formation on boron carbide in sliding wear. Wear 236. 1999. P. 73.
7. Bhowmick S., Sun G., Alpas A.T. Low friction behaviour of boron carbide coatings (B4C) sliding against Ti–6Al–4V // Surface & Coatings Technology. 2016. № 308. P. 316.
8. Erdemir A., Bindal C., Fenske G.R. Formation of ultralow friction surface films on boron carbide. // Appl. Phys. Lett. 1996. № 68. P. 1637.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5 т. Механика – 4-е изд. М.: Физматлит: МФТИ, 2005. Т. 1. 560 с.
10. Гаркунов Д.Н., Бабель В.Г., Мельников Э.Л., Щедрин А.В., Аванесян В.П. Новое научное открытие в трибологии на основе самоорганизации // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2019. № 6. С. 18.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА.  
ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 537.312;537.9;629.7.02

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ  
НА НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ МАШИН  
МЕТОДОМ КОНТАКТНОЙ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

© 2020 г. В. С. Олешко

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия*

*e-mail: OleshkoVS@mai.ru*

Поступила в редакцию 08.06.2020 г.  
Принята к публикации 29.07.2020 г.

Статья посвящена совершенствованию неразрушающего контроля металлических деталей машин методом контактной разности потенциалов. Представлены результаты экспериментальных исследований влияния параметров окружающей среды на измерение контактной разности потенциалов зондом Кельвина на поверхности металлических образцов из Al, Ti и Ni. Объяснена зависимость результатов измерений контактной разности потенциалов на поверхности металлов от параметров окружающей среды. Даны практические рекомендации по измерению контактной разности потенциалов на поверхности деталей. Полученные результаты применимы при производстве, эксплуатации и ремонте металлических деталей машин.

*Ключевые слова:* работа выхода электрона, контактная разность потенциалов, зонд Кельвина, металл, детали машин

**DOI:** 10.31857/S0235711920060061

Совершенствование методов неразрушающего контроля металлических деталей (МД) машин в целях поддержания заданного уровня их надежности является актуальной задачей. Конструкционные сплавы на основе Al, Fe, Ti, Ni, Cr и других металлов нашли широкое применение в машиностроении, в частности, в аэрокосмической отрасли. Металлические детали и агрегаты воздушных судов и космических аппаратов эксплуатируются в тяжелых условиях, на пределе своих прочностных свойств. На них воздействуют значительные силы и моменты, экстремальные температуры и давления, коррозионно-активные среды и т.д. Некоторые детали, например, лопатки турбин газотурбинных двигателей эксплуатируются при температурах выше температуры плавления материала, из которого они изготовлены. И максимальные нагрузки при таких условиях эксплуатации в авиационной и космической технике воспринимает именно поверхность металлических деталей и агрегатов [1–5].

В результате воздействия условий эксплуатации, а порой и при нарушении технологии изготовления, эксплуатации или ремонта, на поверхности МД образуются дефекты. Опасны поверхностные и подповерхностные несплошности материала, особенно трещины МД, являющиеся концентраторами напряжений и способные привести к разрушению детали. Своевременное обнаружение и устранение опасных дефектов МД машин является важной задачей.

Известен перспективный метод контактной разности потенциалов (КРП), относящийся к электрическому виду неразрушающего контроля поверхности МД [6]. Метод

КРП применяется в машиностроении для исследования свойств поверхности МД – при трибологических исследованиях, при оценке качества очистки их поверхности от загрязнений перед склеиванием, пайкой, сваркой деталей, при контроле качества нанесения защитных покрытий и т.д.

Метод КРП позволяет определить величину работы выхода электрона (РВЭ) из металла или сплава. Метод контактной разности потенциалов основан на сравнении величин работ выхода из исследуемого металла и металлического измерительного электрода (ИЭ) прибора измерения КРП.

Работа выхода является фундаментальным параметром твердого тела. По ее уровню можно судить об энергетических характеристиках металлических образцов, состоянии их поверхности. Увеличение измеренной КРП свидетельствует об уменьшении РВЭ из металлов.

Для определения РВЭ из металлов применяется позволяющий измерять КРП динамический конденсатор (ДК) зонда Кельвина, в котором ИЭ датчика прибора приводится в колебательное движение. В применяемом нами приборе измерения КРП “Поверхность-11” [7] ИЭ изготовлен из чистого Ni с РВЭ около  $8.0109 \times 10^{-19}$  Дж, частота его колебаний составляет 410 Гц. При приложении датчика прибора к МД его колеблющийся ИЭ и поверхность исследуемого металла образуют ДК, в котором возникает КРП, регистрируемая прибором.

В литературных источниках [8–12] упоминаются факты влияния атмосферы на определение РВЭ методом КРП. Однако в [8] указано, что в настоящее время не существует количественной теории температурной зависимости РВЭ.

**Температурная зависимость РВЭ и КРП металлов.** Температура, важнейший термодинамический параметр твердого тела, оказывает влияние на величину РВЭ и КРП металлов. Температурную зависимость КРП исследовал еще А. Вольта. Его первый закон гласит: “На контакте двух разных металлов возникает разность потенциалов, которая зависит от химической природы и от температуры спаев”. Однако до сих пор сведения о температурной зависимости РВЭ и КРП металлов противоречивы. Температурная зависимость РВЭ может быть как прямой, так и обратной, и во многом зависит от условий ее определения [8].

На практике примером реализации температурной зависимости КРП служат конденсаторные датчики измерения температуры. По аналогии с такими датчиками зонд Кельвина прибора “Поверхность-11” при прикладывании к поверхности МД также образует конденсатор, только динамический. Температурная зависимость КРП, образующейся в ДК, основана на изменении емкости  $C$  вследствие изменения относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды зазора между поверхностями МД и ИЭ зонда Кельвина согласно формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды зазора между ИЭ и поверхностью исследуемого металла, для сухого воздуха  $\epsilon \approx 1.00059$ ;  $S$  – площадь ИЭ датчика прибора измерения КРП, м<sup>2</sup>;  $d$  – зазор между ИЭ и поверхностью исследуемого металла, м.

При неразрушающем контроле МД машин в конденсаторе зонда Кельвина возникает КРП  $U$ , связанная с емкостью конденсатора  $C$  формулой

$$U = \frac{q}{C}, \quad (2)$$

где  $q$  – электрический заряд конденсатора, Кл.

**Влияние на РВЭ и КРП металлов влажности атмосферы.** В [11] показано, что определение РВЭ из образцов из Al, Zn и W методом КРП во влажной атмосфере влечет за собой уменьшение КРП. Причиной этого являются пары воды в воздухе, приносящие отрицательный заряд, который частично переходит в металл, а затем остается на поверхности металла в слое воды. При последующем измерении КРП на поверхности металлов в сухом воздухе вода с поверхности образцов испаряется. Контактная разность потенциалов металлов при этом увеличивается, что свидетельствует об уменьшении РВЭ из них.

По аналогии с конденсаторными датчиками температуры примером практической реализации зависимости РВЭ и КРП от влажности воздуха служат конденсаторные датчики приборов-влагомеров. Контактная разность потенциалов в ДК зонда Кельвина изменяется вследствие изменения относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  между поверхностями МД и ИЭ согласно формуле (1). При увеличении влажности окружающей среды диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  зазора ДК, а, следовательно, и его емкость  $C$ , в общем случае, увеличиваются согласно формуле (1). При этом КРП металлов  $U$  уменьшается согласно формуле (2). Это свидетельствует об увеличении РВЭ из металлов вследствие увеличения влажности окружающей атмосферы воздуха.

**Влияние на РВЭ и КРП металлов давления атмосферы воздуха** исследовали в работе [11], было установлено, что при различном атмосферном давлении КРП металлов изменяется незначительно. Однако почти всегда КРП чистых металлов при давлении воздуха  $1 \times 10^5$  Па меньше, чем при давлении  $1 \times 10^{-5}$  Па. Для образцов же из азидов металлов наблюдались обратные процессы, их КРП уменьшалась с уменьшением давления воздуха. Изменение КРП объясняется различием адсорбционно-десорбционных процессов атомов и молекул газов донорного и акцепторного типов на поверхности металлических образцов.

Таким образом, имеются теоретические и практические основания для количественной оценки влияния параметров окружающей среды – температуры, относительной влажности и давления воздуха, на неразрушающий контроль МД машин методом КРП.

Целью настоящей статьи является исследование влияния на измерение контактной разности потенциалов металлов основных параметров окружающей воздушной атмосферы – температуры, относительной влажности и давления. Настоящая статья является продолжением проведенных исследований, результаты которых изложены в [13].

**Исследование влияния на измерение КРП металлов параметров окружающей среды.** Экспериментальные исследования проводились в лаборатории, при условиях атмосферы близким к нормальным, на плоских образцах из Al, Ti и Ni, имеющих химическую чистоту 99%. Под нормальными условиями атмосферы мы понимаем температуру 20°C, относительную влажность 58% и давление воздуха 1013 гПа. Температура, относительная влажность и давление воздуха оценивались цифровой метеостанцией “Нама EWS-800” с заявленной точностью измерений 2%.

За несколько месяцев проведенных измерений КРП на образцах из Al, Ti и Ni диапазон определенных метеостанцией “Нама EWS-800” параметров окружающей среды составил: 1) температуры – от 14 до 29°C с ее средним значением 23°C; 2) относительной влажности воздуха – от 19 до 59% со средним значением 34%; 3) атмосферного давления – от 963 до 1022 гПа с его средним значением 997 гПа.

Перед измерением КРП плоские образцы из Al, Ti и Ni были подготовлены способом, описанном в [12]. Контактная разность потенциалов образцов измерялась прибором “Поверхность-11”. Всего было выполнено 314 сеансов измерений КРП на образцах. Каждый сеанс состоял из восьми измерений КРП образцов. Из этих восьми измеренных значений КРП исключались min и max значения, и по оставшимся шести измеренным значениям КРП вычислялось их среднее арифметическое значение, которое и учитывалось. Такая методика необходима для исключения промахов (“выска-

**Таблица 1.** Результаты линейного регрессионного анализа

Уравнение регрессии $U = f(t, h, p)$	$R$
$U_{Al} = 1113.6591 - 6.2083t - 3.3569h + 0.0162p$	0.54
$U_{Ti} = -67.1834 - 14.2041t + 0.5297h + 0.6606p$	0.50
$U_{Ni} = 47.0687 - 9.477t + 1.6381h + 0.3235p$	0.41

квивающих” значений) в измерениях, для повышения точности измерений КРП, т.к. РВЭ и КРП свойственна флуктуация.

Результаты измерений КРП были обработаны методами математической статистики. Предварительная проверка результатов измерений КРП показала, что их распределение близко к нормальному. Результаты статистических расчетов измерений КРП на поверхности образцов были получены следующие: 1) для Al среднее арифметическое значение КРП  $\bar{U}_{Al} = 874$  мВ со средним квадратическим отклонением КРП  $\sigma = 75$  мВ; 2) для Ti среднее арифметическое значение КРП  $\bar{U}_{Ti} = 284$  мВ со средним квадратическим отклонением КРП  $\sigma = 70$  мВ; 3) для Ni среднее арифметическое значение КРП  $\bar{U}_{Ni} = 208$  мВ со средним квадратическим отклонением КРП  $\sigma = 65$  мВ.

Значения средних квадратических отклонений измеренной на поверхности металлических образцов КРП  $\sigma$  показывают величину рассеивания КРП  $U$  относительно оценок их математического ожидания (средних арифметических значений)  $\bar{U}$ .

Контактная разность потенциалов  $U = 208$  мВ между исследуемым никелевым образцом и никелевым же ИЭ зонда Кельвина прибора “Поверхность-11” объясняется разницей в технологии изготовления и параметрами их поверхностей, прежде всего шероховатостью, что оказывает определенное влияние на энергетическое состояние их поверхности.

В целях определения величины влияния на КРП образцов из Al, Ti, Ni параметров окружающей среды с использованием программы “Statistica 10” проведен линейный регрессионный анализ результатов экспериментальных исследований. Регрессионный анализ показывает влияние изменения значений предикторов – температуры, относительной влажности и давления воздуха на зависимую переменную – КРП исследуемых металлов. В табл. 1 представлены результаты регрессионного анализа – линейные уравнения, с доверительной вероятностью 0.95 описывающие влияние на КРП  $U$  образцов из Al, Ti и Ni изменений температуры  $t$ , относительной влажности  $h$  и давления воздуха  $p$ . В табл. 1 также представлены значения коэффициентов множественной корреляции  $R$ , показывающих адекватность полученных линейных уравнений регрессии.

**Обсуждение результатов исследований.** Анализ уравнений регрессии (табл. 1) показывает, что на КРП исследуемых металлов наибольшее влияние оказывает температура. При увеличении температуры на  $1^\circ\text{C}$  происходит уменьшение КРП образцов: Al на 6 мВ, Ti на 14 мВ и Ni на 9 мВ, соответственно. Однако влияние на КРП металлов относительной влажности и давления воздуха очень слабое. Коэффициенты множественной корреляции  $R$  линейных уравнений регрессии (табл. 1) показывают слабое совместное влияние на КРП параметров окружающей среды, особенно для образцов, изготовленных из Ni.

Несмотря на то, что влияние на КРП параметров окружающей среды слабое, оно все же имеет место. Уменьшение КРП  $U$  при увеличении температуры окружающей среды  $t$  также объясняется уменьшением диэлектрической постоянной  $\epsilon$  с увеличением температуры согласно формуле (1). Диэлектрическая постоянная воздуха  $\epsilon$  уменьшается по причине того, что с увеличением температуры воздух становится более разреженным и в нем находится меньшее количество атомов воздуха в зазоре ДК, прово-

дящих электрический ток между ИЭ и исследуемыми металлическими образцами согласно формуле (1).

Различие зависимостей КРП  $U$  (табл. 1) от *относительной влажности воздуха*  $h$  – обратной для Al и Ti, и прямой для Ni, может объясняться различными адсорбционными процессами на их поверхностях при взаимодействии с водой. Для образцов из Al и Ti это взаимодействие акцепторное (приводит к уменьшению КРП), а для образцов из Ni – носит донорный характер, в итоге приводящее к крайне слабому увеличению КРП.

Однако необходимо отметить, что измерения КРП проходили в относительно сухой воздушной атмосфере (среднее измеренное значение относительной влажности составило 34%). Более высокая влажность воздуха оказывает большее влияние на КРП [14].

Увеличение КРП  $U$  при увеличении *атмосферного давления*  $p$  (табл. 1) объясняется увеличением количества атомов воздуха, передающих электрические заряды в зазоре ДК согласно формуле (1). Однако такое увеличение КРП крайне мало. При нормальных условиях окружающей среды влиянием на КРП и РВЭ металлов атмосферного давления, по всей видимости, можно пренебречь.

При измерении КРП при экстремально низком атмосферном давлении, например, на большой высоте, КРП металлов может уменьшаться более интенсивно. И тем более фактор влияния на КРП металлов давления воздуха необходимо учитывать при проведении измерений КРП при искусственно сниженном (к примеру, в вакууме) или, напротив, повышенном атмосферном давлении, например, при нагнетании воздуха.

**Выводы.** Экспериментальные исследования показали, что в лабораторных условиях изменение параметров окружающей среды не оказывает существенного влияния на измерения КРП металлов. Слабая зависимость КРП металлов от параметров окружающей среды объясняется физико-химическими свойствами металлов и адсорбционных процессов, происходящих на их поверхности.

Однако, влияние окружающей среды на КРП металлов может быть более существенным при измерениях КРП в условиях, значительно отличающихся от нормальных – при высоких или низких значениях температуры и влажности воздуха, в вакууме или при разреженной атмосфере и т.п. В любом случае значительные отличия температуры окружающей среды от нормальной необходимо учитывать при измерениях КРП металлов.

Величина КРП металлов изменяется при ее измерении в нестационарных условиях окружающей среды, при изменении хотя бы одного параметра – температуры, относительной влажности или давления воздуха [13].

Проведенные экспериментальные исследования и расчеты подтвердили сведения, что минимальную зависимость от параметров окружающей среды из трех исследованных металлов показывает Ni. Поэтому Ni применяют для изготовления ИЭ средств измерения КРП [7].

Необходимо помнить о тщательной очистке от загрязнений поверхности исследуемых металлических образцов перед измерением КРП, например, способом, изложенным в [12], т.к. загрязнения поверхности металлов значительно влияют на результаты измерений КРП.

Таким образом, в целях повышения точности измерения КРП МД рекомендуется проводить в лаборатории, при нормальных условиях, при неменяющихся в процессе измерения КРП атмосферных условиях. Если же соблюсти эти рекомендации невозможно, то в результаты измерений необходимо ввести поправки, пользуясь коэффициентами параметров окружающей среды из представленных в табл. 1 уравнений. Полученные результаты могут применяться при неразрушающем контроле МД машин при их производстве, эксплуатации и ремонте. Это позволит увеличить эффективность неразрушающего контроля МД машин методом КРП в целях поддержания заданного уровня их надежности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Betsofen S.Ya., Gordeeva M.I., Knyazeva Yu.A., Sbitneva S.V., Pantelev M.D., Bakradze M.M.* Phase composition formation in a V-1469 alloy (Al-Cu-Li system) during friction stir welding // Russian metallurgy (Metally). 2018. V. 2018. № 11. P. 1059.
2. *Gerasimov I.V., Kravchenko G.N., Kravchenko K.G.* Recovery of fatigue life of 30HGSN2A steel aircraft parts by repeated shot peening // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1399. Iss. 4. P. 044030.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/4/044030>
3. *Ryapukhin A.V., Kabakov V.V., Zaripov R.N.* Risk management of multimodular multi-agent system for creating science-intensive high-tech products // Espacios. 2019. V. 40. № 34. P. 19.
4. *Беспалов А.В., Петров А.П., Соколов А.В.* Трение и поверхностные явления при штамповке труднодеформируемых сплавов // Вестник Московского авиационного института. 2017. Т. 24. № 3. С. 179.
5. *Шишкин С.В., Бойков А.А., Колпаков А.М.* К расчёту на прочность Z-образного металлического уплотнения с врезающимися элементами, деформируемого упруго-пластически // Труды МАИ. 2019. Выпуск № 109.  
<https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-9>
6. *Калмыков В.В., Мусохранов М.В., Смирнов О.О.* Оценка влияния параметров электрических сигналов при измерении контактной разности потенциалов // Динамика сложных систем – XXI век. 2018. Т. 12. № 2. С. 56.
7. *Самойленко В.М., Олешко В.С.* Применение прибора измерения контактной разности потенциалов “Поверхность-11” в неразрушающем контроле деталей машин // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2011. № 2. С. 3.
8. *Шебзухова И.Г., Арефьева Л.П.* Анизотропия работы выхода электрона 3d-металлических кристаллов // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2015. Т. 79. № 6. С. 896.  
<https://doi.org/10.7868/S0367676515060344>
9. *Örnek C., Leygraf C., Pan J.* Real-Time Corrosion Monitoring of Aluminum Alloy Using Scanning Kelvin Probe Force Microscopy // Journal of The Electrochemical Society. 2020. V. 167. Iss. 8. № 081502.  
<https://doi.org/10.1149/1945-7111/ab8826>
10. *Бабич А.В., Погосов В.В., Рева В.И.* Расчет вероятности захвата позитрона вакансией металла и оценка вакансионного вклада в работу выхода электронов и позитронов // Физика металлов и металловедение. 2016. Т. 117. № 3. С. 215.
11. *Суровой Э.П., Титов И.В., Бугерко Л.Н.* Контактная разность потенциалов для азидов свинца, серебра и таллия // Известия Томского политехнического университета. 2005. Т. 308. № 2. С. 79.
12. *Олешко В.С.* Способ подготовки поверхности металлических деталей к оперативному выявлению прижогов измерением работы выхода электрона. РФ Патент 2488093, 2013.
13. *Yurov V.M., Oleshko V.S.* The impact of the environment on the contact potential difference of metal machine parts // Eurasian Physical Technical Journal. 2019. V. 16. № 1 (31). P. 99.
14. *Huber S., Wicinski M., Hassel A.W.* Suitability of Various Materials for Probes in Scanning Kelvin Probe Measurements // Physica Status Solidi A: Applications and materials science. 2018. V. 215. Iss. 15. № 1700952.  
<https://doi.org/10.1002/pssa.201700952>