Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

12
декабрь
2021

Москва

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «Объединённая редакция»

К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.И. КИБЗУНА

DOI: 10.31857/S0005231021120011

31 июля 2021 г. исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему кафедрой «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института Кибзуну Андрею Ивановичу.

Андрей Иванович Кибзун — выдающийся ученый в области оптимизации стохастических систем и вероятностных методов системного анализа, создатель оригинального направления в стохастическом программировании, занимающегося разработкой методов анализа и оптимизации вероятностных и квантильных показателей качества. Им опубликовано более 350 научных работ, из них 270 печатных изданий, среди которых 4 монографии, 8 учебных пособий и 142 статьи в российских и зарубежных журналах (в том числе более 50 работ в журнале «Автоматика и телемеханика»). Охват работ Андрея Ивановича по практическому использованию своих теоретических исследований поистине восхищает: от приложений в области авиационно-космической техники и железнодорожного транспорта до задач оптимизации финансовых инвестиций и процессов автоматизации обучения.

Математикой Андрей Иванович увлекся, когда учился в физико-математической школе № 18 при МГУ, которой руководил академик А.Н. Колмогоров. В 1974 г. Андрей Иванович с отличием окончил факультет «Летательные аппараты» МАИ, параллельно учась на мехмате МГУ, который также с отличием окончил через год. Дальнейшая научная деятельность на долгие годы связала А.И. Кибзуна с МАИ, где он успешно защитил сначала кандидатскую, а потом в 1987 г. и докторскую диссертации. В этот период им была создана теория оптимизации стохастических систем с вероятностными критериями, где центральную роль играет разработанный им «обобщенный доверительный подход». С 1990 г. А.И. Кибзун возглавил кафедру «Теория вероятностей и математическая статистика» МАИ, переняв тем самым эстафету у ее создателя академика В.С. Пугачёва, основателя советской школы статистической теории управления. Андрей Иванович не только сохранил традиции этой школы, но и смог привлечь на кафедру первоклассных ученых в области стохастических систем, теории управления, методов статистического оценивания и оптимизации. Достижения А.И. Кибзуна в научной и педагогической деятельности многократно отмечались премиями и победами в конкурсах на уровне института. В 2000 г. Андрей Иванович был удостоен премии Правительства РФ в области науки и техники за разработку методики вероятностного анализа процесса отделения спутников от разгонного блока «Бриз-М». В 2015 г. ему совместно с соавторами была присуждена премия международной академической компании «Наука/Интерпериодика» за лучшую публикацию в журналах этой группы издательств.

За время своей работы на кафедре А.И. Кибзун создал уникальную для России научную школу по стохастическому программированию. В последние годы основными достижениями этой школы и лично Андрея Ивановича стали новые алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач вероятностной и квантильной оптимизации, основанные на сведении к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования, а также анализ этих аппроксимаций с точки зрения точности и сходимости. Под руководством А.И. Кибзуна защищены 7 докторских и 20 кандидатских диссертаций по физико-математическим наукам. Усилия возглавляемого Андреем Ивановичем научного коллектива поддержаны более чем двадцатью различными международными и российскими грантами, в том числе РФФИ, РНФ и Минобрнауки РФ. В рамках проводимых работ были успешно выполнены более 10 коммерческих контрактов по формированию пакетов прикладных программ, основанных на оригинальных разработках в области анализа, моделирования и оптимизации стохастических систем.

Андрей Иванович всегда уделял большое внимание учебно-методической работе, что нашло отражение не только в его многочисленных учебных пособиях и разработанных им специальных курсах, но и в созданной под его руководством адаптивной системе дистанционного обучения CLASS.NET. Эта система, вошедшая в обиход преподавательской практики МАИ и других вузов задолго до пандемии, в новых условиях существенно упростила образовательный процесс на всех его этапах.

Андрей Иванович ведет большую редакционную и общественно-научную деятельность. Будучи членом редколлегии АиТ, он работает также в журналах «Вестник компьютерных и информационных технологий» и «Applied Stochastic Models in Business and Industry». А.И. Кибзун является членом экспертного совета ВАК по управлению, вычислительной технике и информатике; членом двух специализированных советов по защите докторских диссертаций; членом Научно-методического совета по математике при Минобрнауки.

Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика», коллеги и ученики Андрея Ивановича поздравляют его с юбилеем и желают ему здоровья и новых успехов в научной и педагогической деятельности.

К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Е.Я. РУБИНОВИЧА

DOI: 10.31857/S0005231021120023

5 декабря 2021 г. исполняется 75 лет со дня рождения доктора технических наук, профессора Рубиновича Евгения Яковлевича — крупного ученого в области управления динамическими системами в условиях неполной информации и противодействия, работы которого получили признание как у нас в стране, так и за рубежом.

Е.Я. Рубинович работает в ИПУ РАН с 1971 г., после окончания МФТИ. Он сразу включился в работы, связанные с оптимизацией траекторий движущихся объектов специального назначения, которые ИПУ РАН вел в то время по заказу ВМФ. В процессе работы по данной тематике им были получены важные теоретические результаты, выходом которых стали новые алгоритмы наведения в условиях применения противником ложных целей. Эти работы дали начало новому научному направлению, связанному с постановкой и решением дифференциальных игр преследования — уклонения с ложной целью.

Оптимизация процессов сбора и обработки измерений в реальном времени на борту движущегося носителя в условиях дефицита информации о противнике — второе направление теоретических и прикладных работ Е.Я. Рубиновича. Им был решен ряд задач траекторного управления наблюдениями как в пассивном, так и в активном режимах. Предложенные алгоритмы качественно (на порядок) увеличивали точность оценки элементов движения цели по сравнению с известными методами. В процессе разработки этих алгоритмов были поставлены и решены новые задачи, связанные с калмановской фильтрацией дискретно-непрерывных и скачкообразных процессов, а также задачи импульсного управления с ограничениями на число и частоту следования импульсов. В настоящее время научные интересы Е.Я. Рубиновича связаны с математической формализацией процессов управления подвижными объектами в конфликтных средах.

Результаты теоретических исследований Е.Я. Рубиновича докладывались на крупных международных конференциях, включая конгрессы ИФАК, а также нашли свое отражение в трех монографиях (в соавторстве с Б.М. Миллером, сотрудником ИППИ РАН), изданных за рубежом (2003 г.) и у нас в стране (2005 и 2019 гг.).

Е.Я. Рубинович неоднократно приглашался для чтения лекций и временной научно-исследовательской работы в такие известные университеты, как Университет Иллинойса в г. Урбана-Шампейн (Иллинойс, США), Университет Нового Южного Уэльса (Сидней, Австралия), Университет Монаша (Мельбурн, Австралия), выступал с приглашенным докладом в Центре подводных исследований (Ньюпорт, США).

В настоящее время Е.Я. Рубинович ведет активную педагогическую и научно-организационную работу. Он — профессор кафедры “Интегрированных киберсистем” МФТИ, член редколлегии журналов “Автоматика и телемеханика” и “Проблемы управления”, член бюро Совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации, член Российского национального комитета по автоматическому управлению. Является экспертом РНФ и ФПИ.

Научная, педагогическая и научно-организационная деятельность Е.Я. Рубиновича отмечена научными наградами, грамотами и благодарностями.

Коллеги, друзья и коллективы Института проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова и редколлегии журнала “Автоматика и телемеханика” сердечно поздравляют Евгения Яковлевича Рубиновича с юбилейной датой и желают крепкого здоровья и новых творческих успехов!

Главный редактор АиТ
член-корреспондент РАН Галяев А.А.

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Обзоры

© 2021 г. **О.В. ЧЕРНОЯРОВ, д-р физ.-мат. наук (o_v_ch@mail.ru)**
(Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва;
Национальный исследовательский Томский государственный университет;
Майкопский государственный технологический университет),
С. ДАШЯН, д-р физ.-мат. наук (serguei.dachian@univ-lille.fr)
(Университет Лилля, Лилль, Франция;
Национальный исследовательский Томский государственный университет),
Ю.А. КУТОЯНЦ, д-р физ.-мат. наук (yury.kutoyants@univ-lemans.fr)
(Университет Ле Мана, Ле Ман, Франция;
Национальный исследовательский Томский государственный университет),
А.В. ЗЮЛЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (avzz888@yandex.ru)
(Воронежский государственный университет)

ОБ ОШИБКАХ ОЦЕНИВАНИЯ В ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ И ЛОКАЦИИ[1]

Рассматривается несколько задач оценки параметров по наблюдениям неоднородных пуассоновских процессов, возникающих в различных практических приложениях оптической связи и локации. Функция интенсивности наблюдаемого процесса складывается из периодического сигнала, зависящего от неизвестного параметра и постоянной интенсивности шума. Описывается асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия и байесовских оценок в случаях фазовой и частотной модуляции сигналов. Особое внимание уделяется сигналам разной регулярности (гладкие, непрерывные, но не дифференциируемые и типа разладки). Численное моделирование иллюстрирует представленные результаты. Работа является обзором результатов по поведению оценок в случаях частотной и фазовой модуляций сигналов разной регулярности.

Ключевые слова: оценка параметров, неоднородные процессы Пуассона, фазовая и частотная модуляции, ОМП и байесовские оценки, асимптотические свойства.

DOI: 10.31857/S0005231021120035

1. Введение

Во многих практических задачах, связанных с управлением стохастическими системами, необходимо анализировать случайные потоки событий, воздействующие на систему или являющиеся результатом ее работы. Эти потоки присутствуют в информационно-вычислительных сетях, в радиотехнических системах и системах связи. Такие задачи, как правило, требуют контроля за

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-11-50024.

изменением свойств наблюдаемого потока. Причем при изучении подобных объектов естественные предположения об ординарности и отсутствии последействия во многих случаях приводят к наиболее распространенной модели потока — нестационарному пуассоновскому точечному потоку и к его простейшему варианту — периодически нестационарному пуассоновскому потоку. Подобные потоки (процессы) используются в различных стохастических системах и при реализации задач управления в качестве моделей:

- в теории телетрафика для описания нагрузки, обладающей естественной (например суточной) периодичностью;
- для описания входных потоков в цифровых сетях интегрального обслуживания (ISDN) — SPP и MMP-потоки [1, 2];
- для анализа характеристик распределенного мультиагентного управления в “сложных сетевых системах” [3];
- в задачах приема слабых оптических сигналов [4];
- потоков истинных и ложных целей в задачах управления радиолокационными наблюдениями (обзор пространства, формирование диаграмм направленности антенн и т.д.);
- при измерении Допплер эффекта в различных прикладных задачах, например в астрономии (красное смещение) [5], радарах [6], медицине [7], задачах локализации [8–10].

Выше использованы обозначения: ISDN (Integrated Services Digital Network) — цифровые сети интегрального обслуживания (ЦСИО); SPP (Switched Poisson Process) — поток, в котором интервалы поступления стационарного пуассоновского потока одной интенсивности альтернируют с интервалами поступления стационарного пуассоновского потока другой интенсивности; MMP (Markov modulated Poisson process) — MMP-поток (см. в [2]).

Причем во всех рассматриваемых задачах для адекватного описания нестационарностей необходимо использовать различные модели, а также в той или иной мере контролировать изменение свойств наблюдаемого потока.

Имеются две базовые модели случайных процессов с непрерывным временем, которые обычно используются в задачах передачи информации: одна — это модель наблюдений сигнала в белом гауссовском шуме

$$\mathrm{d}X_t = S\left(\vartheta, t\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $S\left(\vartheta, t\right)$ — передаваемый сигнал, несущий информацию ϑ, σ — уровень шума и W_t — винеровский процесс, производная которого и есть белый шум. Вторая модель — это неоднородный процесс Пуассона, функция интенсивности которого зависит от неизвестного параметра ϑ (информации). Первая модель хорошо изучена в статистической радиотехнике, а вторая модель изучена существенно меньше. В этой работе описываются ошибки оценивания при передачи информации в рамках второй модели.

Рассмотрим задачу передачи информации ϑ с помощью сигнала $S\left(\vartheta, t\right)$ через канал Пуассона с шумом интенсивности $\lambda_0 > 0$ (dark current, т.е.

темновой ток). Предположим, что оптический сигнал (неоднородный пуассоновский процесс) имеет функцию интенсивности $S(\vartheta, t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $S(\vartheta, t)$ — периодическая функция времени t. Следовательно, наблюдения $X^T = (X_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ являются пуассоновским (считающим) процессом с функцией интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta, t) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Цель — оценить ϑ по наблюдениям X^T и описать свойства оценок в асимптотике больших выборок ($T \to \infty$). Это известная модель наблюдений в оптических системах связи (см., например, [4, 11–13] с соответствующими литературными ссылками). Будем рассматривать два типа модуляции (фазовую и частотную) и три типа регулярности сигналов: гладкий, непрерывный (но не дифференцируемый) и разрывный. Авторов интересует предел распределения оценок во всех этих ситуациях. Особое внимание уделяется изучению среднеквадратических ошибок

$$\mathbf{E}_\vartheta \left|\bar\vartheta_T - \vartheta\right|^2 = \frac{\sigma^2}{T^m}\left(1 + o(1)\right), \qquad T \longrightarrow \infty, \tag{3}$$

где $\bar\vartheta_T$ — некоторая оценка параметра ϑ. Здесь $\sigma^2 > 0$ — предельная дисперсия этой оценки, а значение $m > 0$ (определяющее скорость сходимости) зависит от регулярности функции $S(\vartheta, t)$ относительно ϑ. Для простоты изложения предполагаем, что неизвестный параметр одномерный: $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, где α и β конечны.

В качестве оценок будем использовать оценку максимального правдоподобия (ОМП) и байесовские оценки (БО). Предполагаем, что $\lambda_0 > 0$ и семейство функций $S(\cdot, t) \geqslant 0$ равномерно ограничено по ϑ. Тогда меры, соответствующие разным значения ϑ, эквивалентны, и функция отношения правдоподобия (ОП) (см. [14]) имеет вид

$$L\left(\vartheta, X^T\right) = \exp\left\{\int\limits_0^T \ln\left(1 + \frac{S(\vartheta, t)}{\lambda_0}\right) \mathrm{d}X_t - \int\limits_0^T S(\vartheta, t)\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad \vartheta \in \Theta.$$

Оценки вводятся по обычным формулам. В частности, ОМП $\hat\vartheta_T$ является решением уравнения

$$L\left(\hat\vartheta_T, X^T\right) = \sup_{\vartheta\in\Theta} L\left(\vartheta, X^T\right), \tag{4}$$

а БО $\tilde\vartheta_T$ для квадратичной функции потерь и априорной плотности $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, записывается как отношение двух интегралов

$$\tilde\vartheta_T = \frac{\int_\Theta \vartheta p(\vartheta)\, L\left(\vartheta, X^T\right) \mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p(\vartheta)\, L\left(\vartheta, X^T\right) \mathrm{d}\vartheta}. \tag{5}$$

В этой работе всегда предполагаем, что функция $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, положительна и непрерывна на Θ.

Функцию ОП и асимптотику $T \to \infty$ иногда удобно записать в немного другой форме. Предположим, что функция $S(\vartheta, t)$ периодическая с периодом $\tau > 0$. Если $T = n\tau$, где τ не зависит от ϑ и $n \to \infty$, тогда можно разрезать траекторию $X^{n\tau}$ на n периодов

$$X^{n\tau} = X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n), \qquad X_j = (X_j(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \tau),$$

где $X_j(s) = X_{s+(j-1)\tau} - X_{(j-1)\tau}$, $j = 1, \ldots, n$, — независимые одинаково распределенные процессы Пуассона. Функцию ОП в этом случае можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} L\left(\vartheta, X^{(n)}\right) &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\left(1 + \frac{S(\vartheta, s)}{\lambda_0}\right) \mathrm{d}X_j(s) - n\int_0^\tau S(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_0^\tau \ln\left(1 + \frac{S(\vartheta, t)}{\lambda_0}\right) \mathrm{d}Y_n(t) - n\int_0^\tau S(\vartheta, t)\,\mathrm{d}t\right\} = \\ &= L(\vartheta, Y^n), \end{aligned}$$

где введен случайный процесс $Y^n = (Y_n(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \tau)$, который определяется равенством

$$Y_n(s) = \sum_{j=1}^{n} X_j(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau.$$

Пуассоновский процесс $Y_n(\cdot)$ имеет функцию интенсивности

$$\lambda_n(\vartheta, t) = nS(\vartheta, t) + n\lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{6}$$

В данной работе рассматриваются два типа модуляции: фазовая и частотная. В случае фазовой модуляции $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \tau$, функция интенсивности (2) неоднородного пуассоновского процесса X^T — это

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $S(t)$ — τ-периодическая функция. Здесь период τ не зависит от ϑ и сведение X^T к n независимым одинаково распределенным пуассоновским процессам: $X^T \longmapsto X^{n\tau}$, а также к процессу Пуассона большой интенсивности (6): $X^T \longmapsto Y^n$ является возможными. Это означает, что модели наблюдений X^T, $X^{n\tau}$ и Y^n эквивалентны.

В случае частотной модуляции функция интенсивности (2) наблюдения X^T — это

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Если функция $S(t)$ τ-периодическая, то период функции интенсивности $\lambda(\vartheta,t)$ равен $\frac{\tau}{\vartheta}$, т.е. зависит от ϑ, и сведения $X^T \longmapsto X^{n\tau}$ и $X^T \longmapsto Y^n$ невозможны, потому что значение ϑ неизвестно.

В данной работе описываются свойства ОМП и БО в случаях как фазовой $(S(t-\vartheta),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, так и частотной $(S(\vartheta t),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ модуляций в ситуациях различных типов регулярности функции $S(t)$.

Задача оценки частоты периодического сигнала занимает специальное место в статистической радиотехнике. Частотная модуляция имеет ряд преимуществ при передаче информации. Измерение частоты также важно при использовании эффекта Допплера в различных моделях наблюдений. Математически строгое описание свойств ОМП и БО впервые было дано в [15], где была рассмотрена модель (1) наблюдений "сигнал в белом гауссовском шуме".

Здесь не рассматривается случай амплитудной модуляции, скажем,

$$\lambda(\vartheta,t) = \vartheta f(t) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $f(\cdot) \geqslant 0$ — τ-периодическая функция. Заметим, что ОМП $\hat{\vartheta}_T$ даже в этом случае не имеет явного выражения и является решением уравнения ОП

$$\int\limits_0^T \frac{f(t)}{\vartheta f(t) + \lambda_0} \mathrm{d}X_t - \int\limits_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \vartheta \in \Theta.$$

Скорость сходимости и предельное распределение ОМП хорошо известны (см., например, [16])

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta)^{-1}\right), \qquad \mathrm{I}(\vartheta) = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{f(t)^2}{\vartheta f(t) + \lambda_0}\mathrm{d}t.$$

Чтобы проиллюстрировать регулярность/сингулярность сигнала, введем функцию

$$S(t) = 2\left|\frac{t}{\delta}\right|^\kappa \mathbb{1}_{\{0 \leqslant t \leqslant \delta\}} + 2\mathbb{1}_{\{\delta < t \leqslant \tau\}}, \tag{7}$$

где $\delta > 0$ мало по отношению к τ. Регулярность статистического эксперимента полностью определяется значением параметра κ. Заметим, что все эти типы сингулярностей в случае независимых одинаково распределенных случайных величин описаны в [17].

Графики функции

$$\lambda(\vartheta,t) = S(t-\vartheta) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

для различных значений κ показаны на рис. 1.

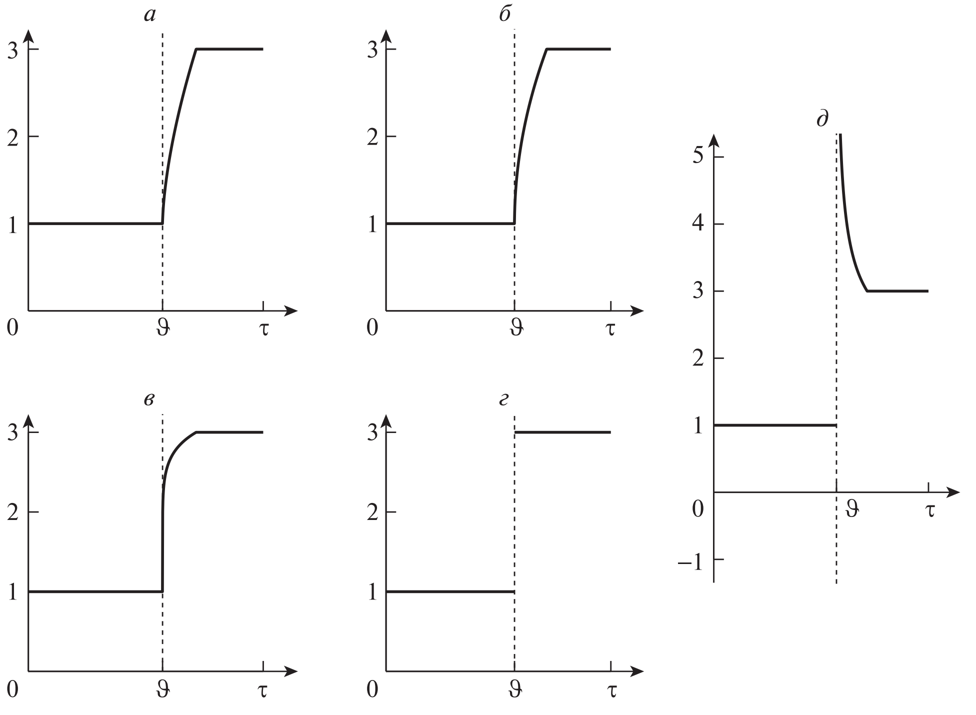


Рис. 1. Примеры сигналов с функциями интенсивности (7): *а*) $\kappa = \frac{5}{8}$, *б*) $\kappa = \frac{1}{2}$, *в*) $\kappa = \frac{1}{8}$, *г*) $\kappa = 0$, *д*) $\kappa = -\frac{3}{8}$.

Кратко опишем зависимость между κ и m в (3). Детали будут даны позже в этой работе. Если $\kappa > \frac{1}{2}$ (случай *а*), то имеем регулярную статистическую задачу оценивания с конечной информацией Фишера, и скоростям сходимости ОМП и БО в (3) соответствует $m = 1$. Если $\kappa = \frac{1}{2}$ (случай *б*), то снова имеем регулярный статистический эксперимент и

$$\mathbf{E}_\vartheta \left|\bar\vartheta_T - \vartheta\right|^2 = \frac{\sigma^2}{T \ln T} \left(1 + o\left(1\right)\right).$$

Если $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (случай *в*), то имеем особенность типа касп (cusp type singularity), и скорость сходимости этих оценок

$$\mathbf{E}_\vartheta \left|\bar\vartheta_T - \vartheta\right|^2 = \frac{\sigma^2}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}} \left(1 + o\left(1\right)\right), \qquad 1 < \frac{2}{2\kappa + 1} < 2.$$

Таким образом $m = 2/(2\kappa + 1)$. Заметим, что термин cusp используется в статистике для описания этого типа сингулярности после работы [18].

Ситуация когда сигнал разрывный (случай *г*) соответствует известной модели разладки (change-point). Здесь $\kappa = 0$ и функция интенсивности равна

$$\lambda\left(\vartheta, t\right) = 2\mathbb{1}_{\{t \geqslant \vartheta\}} + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

а скорость сходимости

$$\mathbf{E}_\vartheta \left|\bar\vartheta_T-\vartheta\right|^2=\frac{\sigma^2}{T^2}\left(1+o\left(1\right)\right).$$

Наконец, ситуация когда $\kappa\in(-1,0)$ (случай ∂) соответствует сингулярности типа взрыва (∞-type singularity). Свойства БО для особенностей этого типа изучались в [19]. Заметим, что скорость сходимости в этом случае

$$\mathbf{E}_\vartheta \left|\tilde\vartheta_T-\vartheta\right|^2=\frac{\sigma^2}{T^{\frac{2}{\kappa+1}}}\left(1+o\left(1\right)\right).$$

Так как функция интенсивности не ограничена, то этот тип сингулярности не обсуждается в данной работе.

Представленное исследование охватывает в основном собственные результаты авторов, что позволяет ограничить объем рукописи.

Отметим, что многие результаты для моделей пуассоновских процессов, представленные в этом обзоре, есть прямые аналоги результатов, полученных для моделей независимых одинаково распределенных случайных величин, описанных в [17].

2. Методика исследования

Свойства ОМП (4) и БО (5) изучаются с привлечением общих результатов Ибрагимова и Хасьминского [17]. Метод, разработанный этими авторами, довольно универсален и позволяет изучать ОМП и БО как в регулярном случае, так и в сингулярных ситуациях. Основная идея этого метода может быть описана следующим образом. Предположим, что истинное значение равно $\vartheta_0\in(\alpha,\beta)$ и у нас есть функция $\varphi_T\to 0$ такая, что нормализованная функция отношения правдоподобия

$$Z_T\left(u\right)=\frac{L\left(\vartheta_0+\varphi_T u,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)},\qquad u\in\mathbb{U}_T=\left(\frac{\alpha-\vartheta_0}{\varphi_T},\frac{\beta-\vartheta_0}{\varphi_T}\right)$$

сходится к некоторому невырожденному случайному процессу $Z\left(u\right)$, $u\in\mathcal{R}$. Обратите внимание, что $\mathbb{U}_T\nearrow\mathcal{R}$. Асимптотические распределения нормированных разностей

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{\hat\vartheta_T-\vartheta_0}{\varphi_T}<x\right)\qquad\text{и}\qquad\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{\tilde\vartheta_T-\vartheta_0}{\varphi_T}<x\right)$$

можно получить из этой сходимости, используя следующие соотношения.

Для ОМП имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\varphi_T^{-1}\left(\hat\vartheta_T-\vartheta_0\right)<x\right)=\\
&=\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)<x} L\left(\vartheta,X^T\right)>\sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\geqslant x} L\left(\vartheta,X^T\right)\right\}=\\
&=\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)<x} \frac{L\left(\vartheta,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)}>\sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\geqslant x} \frac{L\left(\vartheta,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)}\right\}=\\
&=\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{u<x}\frac{L\left(\vartheta_0+\varphi_T u,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)}>\sup_{u\geqslant x}\frac{L\left(\vartheta_0+\varphi_T u,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)}\right\}=\\
&=\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{u<x,u\in\mathbb{U}_T} Z_T\left(u\right)>\sup_{u\geqslant x,u\in\mathbb{U}_T} Z_T\left(u\right)\right\}\longrightarrow\\
&\qquad\longrightarrow\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{u<x} Z\left(u\right)>\sup_{u\geqslant x} Z\left(u\right)\right\}=\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\hat\zeta<x\right),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где сделана замена переменной $\vartheta=\vartheta_0+\varphi_T u$ и обозначено через $\hat\zeta$ решение уравнения

$$
Z(\hat\zeta)=\sup_{u\in\mathcal{R}} Z(u). \tag{9}
$$

Следовательно, для ОМП $\hat\vartheta_T$ получена сходимость

$$
\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{\hat\vartheta_T-\vartheta_0}{\varphi_T}<x\right)\longrightarrow\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\hat\zeta<x\right). \tag{10}
$$

Для БО имеем (с той же заменой $\theta_u=\vartheta_0+\varphi_T u$):

$$
\begin{aligned}
\tilde\vartheta_T&=\frac{\int_\Theta \theta p\left(\theta\right)L\left(\theta,X^T\right){\rm d}\theta}{\int_\Theta p\left(\theta\right)L\left(\theta,X^T\right){\rm d}\theta}=\vartheta_0+\varphi_T\frac{\int_{\mathbb{U}_T} up\left(\theta_u\right)L\left(\theta_u,X^T\right){\rm d}u}{\int_{\mathbb{U}_T} p\left(\theta_u\right)L\left(\theta_u,X^T\right){\rm d}u}=\\
&=\vartheta_0+\varphi_T\frac{\int_{\mathbb{U}_T} up\left(\theta_u\right)\frac{L\left(\theta_u,X^T\right)}{L\left(\theta_0,X^T\right)}{\rm d}u}{\int_{\mathbb{U}_T} p\left(\theta_u\right)\frac{L\left(\theta_u,X^T\right)}{L\left(\theta_0,X^T\right)}{\rm d}u}=\vartheta_0+\varphi_T\frac{\int_{\mathbb{U}_T} up\left(\theta_u\right)Z_T\left(u\right){\rm d}u}{\int_{\mathbb{U}_T} p\left(\theta_u\right)Z_T\left(u\right){\rm d}u}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\frac{\tilde\vartheta_T-\vartheta_0}{\varphi_T}=\frac{\int_{\mathbb{U}_T} up\left(\theta_u\right)Z_T\left(u\right){\rm d}u}{\int_{\mathbb{U}_T} p\left(\theta_u\right)Z_T\left(u\right){\rm d}u}\Longrightarrow\frac{\int_{\mathcal{R}} uZ\left(u\right){\rm d}u}{\int_{\mathcal{R}} Z\left(u\right){\rm d}u}=\tilde\zeta, \tag{11}
$$

и для БО получена сходимость

$$
\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{\tilde\vartheta_T-\vartheta_0}{\varphi_T}<x\right)\longrightarrow\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\tilde\zeta<x\right). \tag{12}
$$

Видим, что предельные распределения ОМП и БО задаются случайными величинами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определяемыми соотношениями (9) и (11).

Отметим, что различным типам модуляции (фазовая, частотная) и регулярности/сингулярности соответствуют различные скорости φ_T и различные $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$.

Покажем, как этот подход работает в простейшем гладком случае и при фазовой модуляции, т.е. $\lambda(\vartheta, t) = S(t-\vartheta) + \lambda_0$, где сигнал $S(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемый, τ-периодический и $\lambda_0 > 0$. Используя формулу Тейлора и полагая $\varphi_T = T^{-1/2}$, можно написать (ниже $T = n\tau$, $X_j(s) = X_{s+\tau(j-1)} - X_{\tau(j-1)}$, $j = 1, \ldots, n$, и $\vartheta_u = \vartheta_0 + \frac{u}{\sqrt{T}}$)

$$
\begin{aligned}
\ln Z_T(u) &= \frac{L(\vartheta_0 + \frac{u}{\sqrt{T}}, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} = \\
&= \int_0^T \ln\left(1 + \frac{S(t-\vartheta_u)}{\lambda(\vartheta_0, s)}\right) \mathrm{d}X_t - \int_0^T \left(S(t-\vartheta_u) - S(t-\vartheta_0)\right) \mathrm{d}t = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln\left(1 + \frac{S(s-\vartheta_u)}{S(s-\vartheta_0)+\lambda_0}\right) [\mathrm{d}X_j(s) - \lambda(\vartheta_0, s)\,\mathrm{d}s] - \\
&\quad - n \int_0^\tau \left(S(s-\vartheta_u) - S(s-\vartheta_0) - \lambda(\vartheta_0, s) \ln\left(1 + \frac{S(s-\vartheta_u)}{\lambda(\vartheta_0, s)}\right)\right) \mathrm{d}s = \\
&= -\frac{u}{\sqrt{n\tau}} \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s-\vartheta_0)}{\lambda(\vartheta_0, s)} \mathrm{d}\pi_j(s) - \frac{u^2}{2\tau} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s-\vartheta_0)^2}{\lambda(\vartheta_0, s)} \mathrm{d}s + o(1) = \\
&= u\Delta_T\left(\vartheta_0, X^T\right) - \frac{u^2}{2} \mathrm{I}(\vartheta_0) + o(1)\,.
\end{aligned}
$$

Здесь точка означает дифференцирование по θ, использованы разложения Тейлора $\ln(1+\varepsilon f(s)) = \varepsilon f(s) + O\left(\varepsilon^2\right)$ и $\ln(1+\varepsilon f(s)) = \varepsilon f(s) - \frac{\varepsilon^2}{2} f(s)^2 + O\left(\varepsilon^3\right)$, обозначено $\mathrm{d}\pi_j(s) = \mathrm{d}X_j(s) - \lambda(\vartheta_0, s)\,\mathrm{d}s$ и положено

$$
\Delta_T\left(\vartheta_0, X^T\right) = -\frac{1}{\sqrt{n\tau}} \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \frac{\dot{S}(t-\vartheta_0)}{S(t-\vartheta_0)+\lambda_0} \mathrm{d}\pi_j(t)\,,
$$

$$
\mathrm{I}(\vartheta_0) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(t)^2}{S(t)+\lambda_0} \mathrm{d}t.
$$

По центральной предельной теореме

$$
\Delta_T\left(\vartheta_0, X^T\right) \Longrightarrow \Delta(\vartheta_0) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s)}{\sqrt{S(s)+\lambda_0}}\, \mathrm{d}W_s \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I}(\vartheta_0))\,.
$$

Здесь W_s, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, — это стандартный винеровский процесс. Конечно, информация Фишера $\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)$ не зависит от ϑ_0, но сохраним это обозначение, потому что в общем случае эта зависимость имеется.

Следовательно

$$
\begin{aligned}
Z_T\left(u\right) &= \exp\left\{u\Delta_T\left(\vartheta_0, X^T\right) - \frac{u^2}{2}\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) + o\left(1\right)\right\} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow Z\left(u\right) = \exp\left\{u\Delta\left(\vartheta_0\right) - \frac{u^2}{2}\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Семейства мер, соответствующие наблюдениям с отношениями правдоподобия, удовлетворяющими (13), называются локально асимптотически нормальными (ЛАН), а соответствующие статистические эксперименты считаются регулярными.

Случайную величину $\hat{\zeta}$ получаем следующим образом:

$$
\left.\frac{\partial \ln Z\left(u\right)}{\partial u}\right|_{u=\hat{\zeta}} = \Delta\left(\vartheta_0\right) - \hat{\zeta}\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) = 0, \qquad \hat{\zeta} = \frac{\Delta\left(\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).
$$

Отсюда согласно (10) получаем асимптотическую нормальность ОМП:

$$
\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \hat{\zeta} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).
$$

Для предела $\tilde{\zeta}$ БО имеем представление (11) с данным процессом $Z\left(\cdot\right)$. Можем написать (ниже $\Delta = \Delta\left(\vartheta_0\right)$, $\mathrm{I} = \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)$ и $\tilde{\Delta} = \mathrm{I}^{-1}\Delta$)

$$
\ln Z\left(u\right) = u\Delta - \frac{u^2}{2}\mathrm{I} = -\frac{\mathrm{I}}{2}\left[u^2 - 2u\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^2\right] + \frac{\Delta^2}{2\mathrm{I}} = -\frac{\mathrm{I}}{2}\left[u - \tilde{\Delta}\right]^2 + \frac{\Delta^2}{2\mathrm{I}}.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} uZ\left(u\right)\mathrm{d}u &= e^{\frac{\Delta^2}{2\mathrm{I}}}\int_{\mathcal{R}} ue^{-\frac{\mathrm{I}}{2}\left[u-\tilde{\Delta}\right]^2}\mathrm{d}u = \\
&= e^{\frac{\Delta^2}{2\mathrm{I}}}\int_{\mathcal{R}}\left(u - \tilde{\Delta}\right)e^{-\frac{\mathrm{I}}{2}\left[u-\tilde{\Delta}\right]^2}\mathrm{d}u + \tilde{\Delta}e^{\frac{\Delta^2}{2\mathrm{I}}}\int_{\mathcal{R}} e^{-\frac{\mathrm{I}}{2}\left[u-\tilde{\Delta}\right]^2}\mathrm{d}u = \\
&= \tilde{\Delta}\int_{\mathcal{R}} Z\left(u\right)\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

потому что

$$
\int_{\mathcal{R}} ve^{-\frac{\mathrm{I}}{2}v^2}\mathrm{d}v = 0.
$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\zeta} = \frac{\int_{\mathcal{R}} uZ(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{\mathcal{R}} Z(u)\,\mathrm{d}u} = \tilde{\Delta} = \frac{\Delta(\vartheta_0)}{\mathrm{I}(\vartheta_0)} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

и в соответствии с (12)

$$\sqrt{T}\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Представленные выше вычисления не являются доказательством асимптотической нормальности и приведены для объяснения общего метода в регулярном случае. Настоящие доказательства включают в себя множество технических деталей, которые здесь не обсуждаются (см. [16, 17]).

В нерегулярных случаях (случаи сингулярности типа касп и разладки) нормировки φ_T и предельные процессы $Z(\cdot)$ разные, но соотношения (8)–(12) всегда действительны и позволяют описывать предельное поведение ОМП и БО и в этих случаях тоже.

Предельное отношение правдоподобия $Z(\cdot)$ в этих трех случаях (гладкий, касп и разладка) имеет существенно разные аналитические свойства. Чтобы проиллюстрировать возможные численные трудности в расчете ОМП, включим в эту работу графики реализаций $Z(\cdot)$.

Во всех рассматриваемых ниже задачах нас интересует построение асимптотически эффективных оценок.

В отличие от регулярного случая в сингулярных моделях нет нижней границы Крамера–Рао для определения асимптотически эффективных оценок. Будем использовать минимаксный подход, чтобы ввести нижние границы на среднеквадратические ошибки всех оценок $\bar{\vartheta}_T$, а затем определим асимптотически эффективные оценки как оценки, которые достигают эти границы. Нижняя граница имеет вид

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu}\varphi_T^{-2}\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T-\vartheta|^2 \geqslant \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}|^2. \tag{14}$$

Назовем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$, а точнее, если имеем

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu}\varphi_T^{-2}\mathbf{E}_\vartheta|\vartheta_T^*-\vartheta|^2 = \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}|^2 \tag{15}$$

для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Нижнюю оценку (14) можно получить следующим образом. Предположим, что уже доказаны сходимость (12) и сходимость моментов

$$\varphi_T^{-2}\mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\vartheta}_T-\vartheta|^2 \longrightarrow \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\zeta}|^2,$$

где $D(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\zeta}|^2$ — непрерывная функция от $\vartheta \in \Theta$. Зафиксировав некоторые $\vartheta_0 \in \Theta$ и $\nu > 0$, можно написать

$$\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \varphi_T^{-2}\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geqslant \varphi_T^{-2}\int\limits_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_T^{-2}\int\limits_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\vartheta}_{\tilde{p},T} - \vartheta|^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int\limits_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\zeta}|^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

при $T \to \infty$. Здесь введена положительная непрерывная плотность $p_\nu(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta_\nu$, где $\Theta_\nu = (\vartheta_0 - \nu, \vartheta_0 + \nu)$, и обозначена через $\tilde{\vartheta}_{\tilde{p},T}$ БО, соответствующая этой плотности. Используя непрерывность функции $D_\nu(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\zeta}|^2$, получаем последний предел (при $\nu \to 0$):

$$\int\limits_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta|\tilde{\zeta}|^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} D_\nu(\vartheta)\,p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}|^2.$$

Напомним, что в гладком случае получаем известную нижнюю границу Гаека–Ле Кама [20]

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \varphi_T^{-2}\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geqslant \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Более общие результаты и подробное доказательство см. в [17].

3. Фазовая модуляция

Рассмотрим задачу оценки ϑ по наблюдениям X^T пуассоновского процесса функции интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T = n\tau,$$

где $S(t)$ — τ-периодическая функция, а интенсивность шума $\lambda_0 > 0$.

3.1. Гладкий случай

Предположим, что функция $S(\cdot) \geqslant 0$ двукратно непрерывно дифференцируема и тождественно не равна нулю. Напомним, что информация Фишера $\mathrm{I}(\vartheta)$ для этой модели наблюдений имеет вид [21]

$$\mathrm{I}(\vartheta) = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\dot{S}(t)^2}{S(t) + \lambda_0}\,\mathrm{d}t.$$

Тогда имеет место нижняя оценка Гаека–Ле Кама на среднеквадратические ошибки всех оценок $\bar{\vartheta}_T$:

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T-\vartheta|^2 \geqslant \mathrm{I}\,(\vartheta_0)^{-1}\,.$$

Назовем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0\in\Theta$.

Предложение 1. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K}\subset\Theta$ состоятельны, асимптотически нормальны:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\hat{\zeta}\sim\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}\,(\vartheta_0)^{-1}\right),\qquad \sqrt{T}\left(\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\hat{\zeta},$$

имеем сходимость моментов: для всех $p>0$

$$T^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}|^p,\qquad T^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16, 22].

Пример 1. Предположим, что $S\,(t-\vartheta)=\frac{a}{2}\left[1+\cos\left(t-\vartheta\right)\right]$, где $a>0$. Функция $S\,(\cdot)$ периодична с периодом $\tau=2\pi$ и $T=2\pi n$. Информация Фишера имеет вид (см. [21])

$$\mathrm{I}\,(\vartheta_0)=\frac{a}{2}\left[1+2q-2\sqrt{q+q^2}\right],\qquad q=\frac{\lambda_0}{2}.$$

Пример 2. Предположим, что $S\,(t-\vartheta)=b\exp\left[a\cos\left(t-\vartheta\right)\right]$, где $a,b>0$. Функция $S\,(\cdot)$ периодична с периодом $\tau=2\pi$ и $T=2\pi n$. Информация Фишера имеет вид (см. [21])

$$\mathrm{I}\,(\vartheta_0)=ab\,I_0'\,(a),$$

где $I_0'\,(a)$ — производная модифицированной функции Бесселя

$$I_0\,(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{a\cos y}\mathrm{d}y.$$

В случае многомерного параметра аналогичный результат получен в [21, 23].

Пример 3. Отметим, что существование двух непрерывных ограниченных на $[0,\tau]$ производных — это достаточное условие. Можно показать, что есть регулярные модели с неограниченной первой производной. Если

$$\lambda\,(\vartheta,t)=a\,|t-\vartheta|^\kappa+\lambda_0,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

где $a>0$ и $\kappa>1/2$, то имеем регулярный (гладкий) случай с конечной информацией Фишера и скорость сходимости оценок $\sqrt{T}$ (случай *а* на рис. 1). Интересно отметить, что если $\kappa=1/2$ (случай *б* на рис. 1), то имеем регулярный эксперимент (семейство ЛАН с представлением (13)), но ОМП и БО асимптотически нормальны со скоростью $\varphi_T=\left(T\ln T\right)^{-1/2}$.

Для модели (1) аналогичный результат получен в [15].

Предположим, что функция интенсивности наблюдаемого процесса имеет вид

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t-\vartheta) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где сигнал $S(t-\vartheta)$ является τ-периодическим и может быть записан на первом периоде как $S(t-\vartheta) = \psi(t-\vartheta)\, g(t-\vartheta)$, где $t \in [0,\tau]$, а функция перехода $\psi(\cdot)$ задается формулой

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}(y)\left|\frac{y}{\delta}\right|^{\kappa}\right)\mathbb{1}_{\{|y|\leqslant\delta\}} + \mathbb{1}_{\{y>\delta\}}. \tag{16}$$

Здесь $\kappa \in (0,1/2)$ и постоянная $\delta > 0$ известны, а функция $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Кроме того, предполагаем, что $g(y) > 0$ для $y \in (-\delta, \tau_*)$ и $g(y) = 0$ для $y \geqslant \tau_*$, где $\delta < \tau_* < \tau - \delta$, и что множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $\delta < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$.

Заметим, что $S(t-\vartheta) = 0$ для $t \in [0, \vartheta - \delta]$ и что $S(t-\vartheta) = g(t-\vartheta)$ для $t \geqslant \vartheta + \delta$ и, следовательно, в частности, $S(t-\vartheta) = 0$ для $t \in [\vartheta + \tau_*, \tau]$. Следовательно, сигнал может быть периодически продолжен на интервал $[0,T]$, и функция $\psi(\cdot)$ описывает фронт сигнала. График такой функции интенсивности $\lambda(\vartheta,t)$ приведен на рис. 2.

Поскольку $\kappa \in (0,1/2)$, информация Фишера $\mathrm{I}(\vartheta_0) = \infty$, и, следовательно, имеем сингулярный статистический эксперимент.

Кратко объясним, почему рассматриваем сигналы с сингулярностью типа касп как альтернативу хорошо известным сигналам разрывного типа. Функция интенсивности неоднородного пуассоновского процесса (сигнала) $S(t)$ в передатчике (источнике сигнала) соответствует вариации электрического тока. В начале излучения по законам физики ток не может иметь

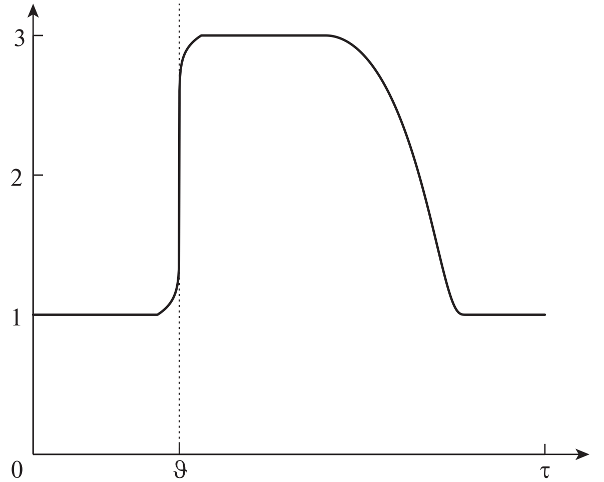


Рис. 2. Пример функции интенсивности с сигналом типа касп.

скачка, и фронт сигнала скорее должен быть описан сильно возрастающей, но непрерывной функцией. В зависимости от параметров электрической цепи это увеличение можно рассматривать как имеющее конечную (медленное увеличение) или бесконечную (быстрое увеличение) информацию Фишера. По нашему мнению, модель с непрерывным сигналом, но бесконечной информацией Фишера лучше подходит для описания так называемой “модели разладки”.

Исследование оценок для моделей наблюдений независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, имеющей сингулярность типа касп, началось с работы [18]. Отметим, что исчерпывающее описание свойств оценок параметров плотностей, имеющих широкий класс сингулярностей, включающих и сингулярности типа касп, приведено в [17]. Затем исследовались модели нелинейной регрессии [24–27]. Непараметрическое оценивание в модели регрессии изучалось в [28]. Для моделей наблюдений с непрерывным временем и сингулярностями типа касп свойства оценок изучались в следующих работах: неоднородные процессы Пуассона [29], эргодические диффузионные процессы [30, 31], диффузионные процессы с малой диффузией [32], детерминированный сигнал в белом гауссовском шуме [33]. Модели с касп сингулярностями использованы в [10, 34] в задачах локализации источников на плоскости.

Введем следующие обозначения.

1) $W^H(u)$, $u \in \mathcal{R}$, — стандартное дробное броуновское движение (fBm) с параметром Херста $H = \kappa + 1/2 \in (0,1)$, т.е. гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}W^H(u_1)\,W^H(u_2) = \frac{1}{2}\left[|u_1|^{2H} + |u_2|^{2H} - |u_1 - u_2|^{2H}\right].$$

2) $Z(\cdot)$ — случайный процесс

$$Z(u) = \exp\left\{W^{\kappa+\frac{1}{2}}(u) - \frac{|u|^{2\kappa+1}}{2}\right\}, \quad u \in \mathcal{R}. \tag{17}$$

3) $\hat\zeta = \hat\zeta_\kappa$ и $\tilde\zeta = \tilde\zeta_\kappa$ — случайные величины, определяемые соотношениями (9) и (11) соответственно с $Z(\cdot)$, см. (17).

4) Интеграл

$$Q(\kappa) = \int_{\mathcal{R}} \left[\operatorname{sgn}(v-1)\,|v-1|^\kappa - \operatorname{sgn}(v)\,|v|^\kappa\right]^2 \mathrm{d}v \tag{18}$$

и постоянная

$$\gamma_{\kappa,\tau} = \left(\frac{g^2(0)\,Q(\kappa)}{2\tau(g(0)+2\lambda_0)}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}.$$

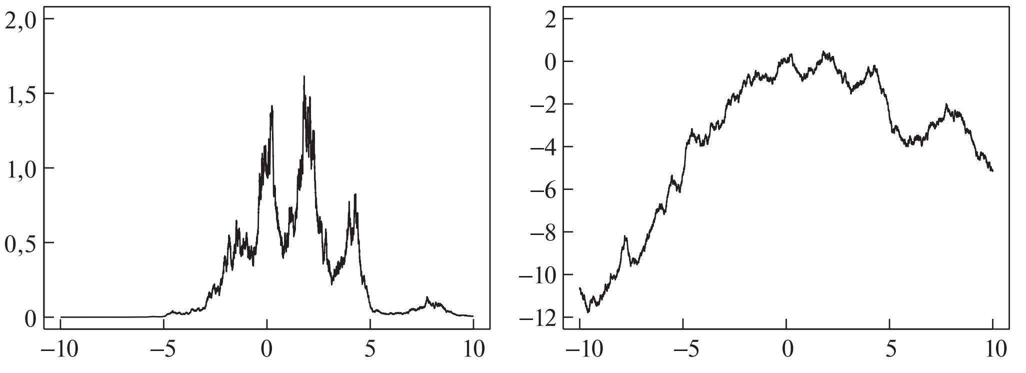


Рис. 3. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае сингулярности типа касп с $\kappa = 0{,}1$.

Отметим, что $Q\,(\kappa)$ допускает представления

$$Q\,(\kappa) = \frac{\Gamma\,(1+\kappa)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)}{2^{2\kappa-1}\sqrt{\pi}\,(2\kappa+1)}\,[1+\cos\,(\pi\kappa)] = \tag{19}$$
$$= 2B\,(\kappa+1,\kappa+1)\left[\frac{1}{\cos\,(\pi\kappa)}+1\right],$$

где через $\Gamma\,(\cdot)$ и $B\,(\cdot,\cdot)$ обозначены гамма и бета функции соответственно (см. раздел VI.4 в [17]). Единственность $\hat\vartheta_\rho$ доказана в [35].

Примеры реализаций предельного процесса ОП $Z(\cdot)$ и процесса $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 3.

Первый результат — это нижняя граница рисков всех оценок $\bar\vartheta_T$:

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T^{\frac{2}{2\kappa+1}}\mathbf{E}_\vartheta|\bar\vartheta_T-\vartheta|^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}\tilde\zeta_\kappa^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0\in\Theta$.

П р е д л о ж е н и е 2. ОМП $\hat\vartheta_T$ и БО $\tilde\vartheta_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K}\subset\Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^{\frac{1}{2\kappa+1}}\left(\hat\vartheta_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\frac{\hat\zeta_\kappa}{\gamma_{\kappa,\tau}},\qquad T^{\frac{1}{2\kappa+1}}\left(\tilde\vartheta_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\frac{\tilde\zeta_\kappa}{\gamma_{\kappa,\tau}},$$

моменты сходятся: для всех $p>0$

$$T^{\frac{p}{2\kappa+1}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\vartheta_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\zeta_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa,\tau}^p},\qquad T^{\frac{p}{2\kappa+1}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\vartheta_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\zeta_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa,\tau}^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

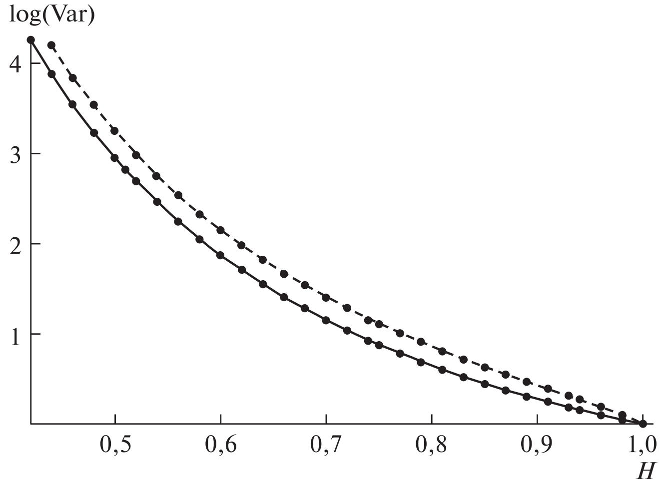


Рис. 4. Графики $\ln \hat{\sigma}_*^2 (H - 1/2) \geqslant \ln \tilde{\sigma}_*^2 (H - 1/2)$.

Доказательство см. в [29]. Нормализованная функция ОП в этой задаче имеет вид

$$Z_T(u) = \frac{L\left(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T\right)}{L\left(\vartheta_0, X^T\right)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = \left(\frac{\alpha - \vartheta_0}{\varphi_T}, \frac{\beta - \vartheta_0}{\varphi_T}\right),$$

где

$$\varphi_T = \left(\gamma_{\kappa,\tau} T^{\frac{1}{2\kappa+1}}\right)^{-1}.$$

Имеет место сходимость

$$Z_T(\cdot) \Longrightarrow Z(\cdot),$$

и поэтому процесс $Z(\cdot)$ является пределом процесса отношения правдоподобия. Следовательно, свойства ОМП и БО следуют согласно соотношениям (8) и (11) соответственно.

Среднеквадратичные ошибки ОМП и БО следующие:

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}}(1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}}(1 + o(1)),$$

где

$$\hat{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E}\hat{\zeta}_\kappa^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2}, \qquad \tilde{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E}\tilde{\zeta}_\kappa^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2}.$$

Интересно сравнить предельные среднеквадратические ошибки $\hat{\sigma}^2(\kappa)$ и $\tilde{\sigma}^2(\kappa)$ ОМП и БО соответственно. Параметр Херста $H = \kappa + 1/2 \in (1/2, 1)$, где $\kappa \in (0, 1/2)$, и аналитические выражения для значений $\hat{\sigma}^2(\kappa) = \hat{\sigma}^2(H - 1/2)$ и

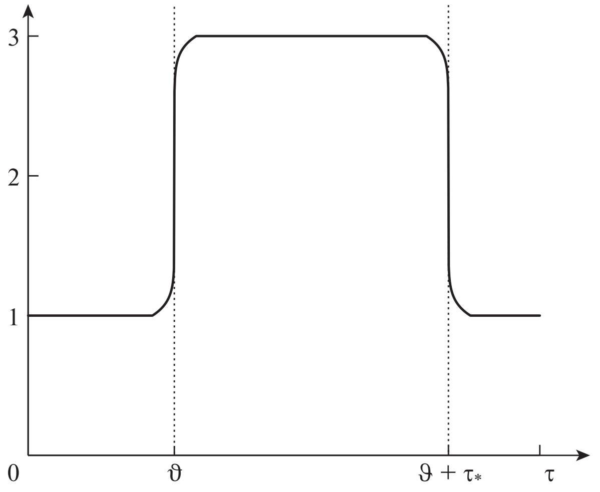


Рис. 5. Функция интенсивности примера 4.

$\tilde{\sigma}^2(\kappa) = \tilde{\sigma}^2(H - 1/2)$ неизвестны. Значения $\hat{\sigma}_*^2(\kappa) = \mathbf{E}\hat{\zeta}_\kappa^2$ и $\tilde{\sigma}_*^2(\kappa) = \mathbf{E}\tilde{\zeta}_\kappa^2$ были рассчитаны путем численного моделирования в [36] для значений $H \in [0{,}4,\ 1]$ и представлены (в логарифмическом масштабе) на рис. 4. Значение $H = 1$ ($\kappa = 1/2$) соответствует регулярному случаю, когда предельные среднеквадратические ошибки ОМП и БО совпадают.

Приведенные выше результаты можно обобщить на случай, когда сигнал имеет K точек сингулярности типа касп на интервале $[0, \tau]$. Точнее, предположим, что есть $K \geqslant 1$ точек $0 = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_K < \tau - 2\delta$, таких что $\tau_{k+1} - \tau_k > 2\delta$, и что τ-периодический сигнал $S(t - \vartheta)$ можно записать на первом периоде $t \in [0, \tau]$ в виде

$$S(t - \vartheta) = \sum_{k=1}^{K} \psi(t - \tau_k - \vartheta)\, g_k(t - \tau_k - \vartheta),$$

где функции $g_k(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, а функция $\psi(\cdot)$ задается формулой (16). Предполагаем, что $g_k(y) \neq 0$ для $y \in (\tau_k - \delta, \tau_*)$ и $g_k(y) = 0$ для $y \geqslant \tau_*$, где $\tau_K + \delta < \tau_* < \tau - \delta$, и множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $\delta < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$.

Заметим, что $S(t - \vartheta) = 0$ для $t \in [0, \vartheta - \delta]$ и для $t \in [\vartheta + \tau_*, \tau]$, и таким образом, сигнал может быть периодически продолжен на интервал $[0, T]$. Заметим также, что если фронт k-го сигнала описывается функцией $\psi(\cdot)$ (и $g_k(\cdot) \geqslant 0$) или функцией $-\psi(\cdot)$ (и $g_k(\cdot) \leqslant 0$), тогда все вышеприведенные результаты остаются верными с единственным отличием, что константа $\gamma_{\kappa,\tau}$ теперь задана формулой

$$\gamma_{\kappa,\tau} = \left(\frac{Q(\kappa)}{4\tau} \sum_{k=1}^{K} \frac{g_k^2(0)}{S(\tau_k) + \lambda_0} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}.$$

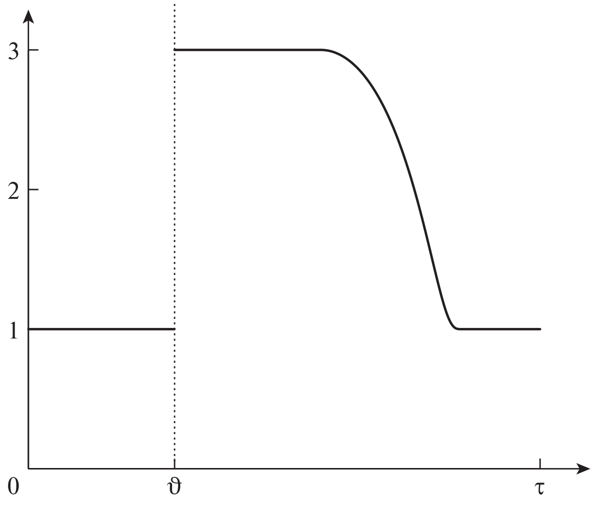


Рис. 6. Пример функции интенсивности сигнала с разладкой в ϑ.

Пример 4. Рассмотрим случай импульсного сигнала конечной длительности с особенностями типа касп в начале и в конце:

$$\lambda\left(\vartheta,t\right)=S\left(t-\vartheta\right)+\lambda_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где $S\left(t-\vartheta\right)$ является τ-периодическим сигналом, заданным для $t\in[0,\tau]$ формулой

$$S\left(t-\vartheta\right)=\frac{\lambda}{2}\left(1+\operatorname{sgn}\left(t-\vartheta\right)\left|\frac{t-\vartheta}{\delta}\right|^{\kappa}\right)1\!\!1_{\{|t-\vartheta|<\delta\}}+\lambda 1\!\!1_{\{\vartheta+\delta\leqslant t\leqslant\tau_*+\vartheta-\delta\}}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(t-\tau_*-\vartheta\right)\left|\frac{t-\tau_*-\vartheta}{\delta}\right|^{\kappa}\right)1\!\!1_{\{|t-\tau_*-\vartheta|<\delta\}}.$$

Здесь $2\delta<\tau_*<\tau-2\delta$, и множество $\Theta=(\alpha,\beta)$ с $\delta<\alpha<\beta<\tau-\tau_*-\delta$. График такой функции интенсивности $\lambda\left(\vartheta,t\right)$ приведен на рис. 5.

Асимптотическое поведение ОМП и БО в этой модели дается в предложении 2 с $\gamma_{\kappa,\tau}=\left(\frac{\lambda^2Q(\kappa)}{\tau(2\lambda_0+\lambda)}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}$. В частности, их среднеквадратические ошибки имеют вид

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\vartheta_T-\vartheta_0|^2=\frac{\mathbf{E}\hat\zeta_\kappa^2\left(1+o\left(1\right)\right)}{\gamma_{\kappa,\tau}^2\,T^{\frac{2}{2\kappa+1}}},\quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\vartheta_T-\vartheta_0|^2=\frac{\mathbf{E}\tilde\zeta_\kappa^2\left(1+o\left(1\right)\right)}{\gamma_{\kappa,\tau}^2\,T^{\frac{2}{2\kappa+1}}}.$$

Обзор результатов для моделей с касп сингулярностями см. в [37].

3.3. Случай разладки

Рассмотрим проблему оценки точки разладки. Наблюдаем неоднородный периодический пуассоновский процесс $X^T=\left(X_t,\ 0\leqslant t\leqslant T\right)$ с функцией интенсивности

$$\lambda\left(\vartheta,t\right)=S\left(t-\vartheta\right)+\lambda_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где на первом периоде

$$S(y) = h(y) + g(y)\,\mathbb{1}_{\{0\leqslant y\leqslant \tau_*\}}.$$

Здесь $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — τ-периодические непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции, причем $g(0) > 0$ и $g(\tau_*) = 0$. Неизвестный параметр — $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$. Конечно, предполагаем, что $\tau_* < \tau$. Пример такой функции интенсивности $\lambda(\vartheta, t)$ приведен на рис. 6.

Поскольку период τ известен, можем без ограничения общности предположить, что $T = n\tau$, и привести исходную модель к модели неоднородного пуассоновского процесса $Y^n = (Y_n(t)\,,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau)$ с интенсивностью

$$\lambda_n(\vartheta, t) = nS(t-\vartheta) + n\lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Справедливо равенство $L\left(\vartheta, X^T\right) = L(\vartheta, Y^n)$, и поэтому лог-ОП можно записать следующим образом:

$$\ln L(\vartheta, Y^n) = \int\limits_0^\tau \ln\left(\frac{S(t-\vartheta)+\lambda_0}{h(t-\vartheta)+\lambda_0}\right) \mathrm{d}Y_n(t) - n\int\limits_0^\tau \left[S(t-\vartheta) - h(t-\vartheta)\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_\vartheta^{\vartheta+\tau_*} \ln\left(1 + \frac{g(t-\vartheta)}{h(t-\vartheta)+\lambda_0}\right) \mathrm{d}Y_n(t) - n\int\limits_\vartheta^{\vartheta+\tau_*} g(t-\vartheta)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_\vartheta^{\vartheta+\tau_*} \ln\left(1 + \frac{g(t-\vartheta)}{h(t-\vartheta)+\lambda_0}\right) \mathrm{d}Y_n(t) - n\int\limits_0^{\tau_*} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Поскольку функция ОП $L(\vartheta, Y^n)$, $\vartheta \in \Theta$, разрывная, ОМП $\hat\vartheta_T$ определяется уравнением

$$\max\left(L(\hat\vartheta_T+, X^T), L(\hat\vartheta_T-, X^T)\right) = \sup_{\vartheta\in\Theta} L\left(\vartheta, X^T\right).$$

Здесь $L\left(\vartheta\pm, X^T\right)$ — правый и левый пределы ОП в точке ϑ соответственно. БО определяется соотношением (5).

Положим $\rho = \ln \frac{g(0)+h(0)+\lambda_0}{h(0)+\lambda_0}$ и введем предельный процесс отношения правдоподобия

$$Z(u) = \begin{cases} \exp\left\{-\rho x^+\left(\dfrac{u}{1-e^{-\rho}}\right) + u\right\}, & u \geqslant 0, \\[2ex] \exp\left\{\rho x^-\left(-\dfrac{u}{e^{\rho}-1}\right) + u\right\}, & u < 0, \end{cases} \tag{20}$$

где $x^\pm(\cdot)$ — два независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности.

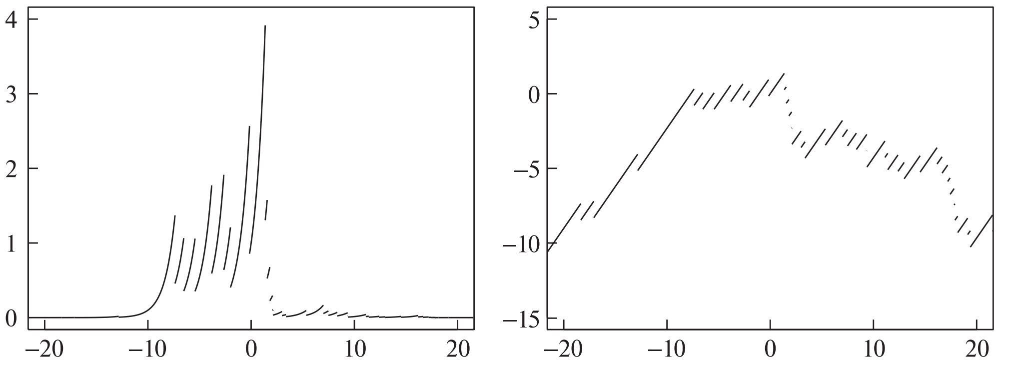


Рис. 7. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае $\rho = \ln 3$.

Примеры реализаций предельного процесса $Z(\cdot)$ и процесса $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 7.

Предельные распределения ОМП и БО даны с помощью случайных величин $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\rho$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\rho$, которые определяются соотношениями

$$\max\left(Z(\hat{\zeta}_\rho+), Z(\hat{\zeta}_\rho-)\right) = \sup_{u\in\mathcal{R}} Z\,(u) \tag{21}$$

и (11) соответственно, где $Z\,(\cdot)$ задано уравнением (20).

Имеем следующую нижнюю границу (15) на среднеквадратические ошибки всех оценок:

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T^2\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T-\vartheta|^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2}{\gamma_\tau^2}\,,$$

где $\gamma_\tau = \tau^{-1}g(0)$, и называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0\in\Theta$.

Предложение 3. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K}\subset\Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T\left(\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\frac{\hat{\zeta}_\rho}{\gamma_\tau},\qquad T\left(\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\frac{\tilde{\zeta}_\rho}{\gamma_\tau},$$

моменты сходятся: для всех $p>0$

$$T^p\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\rho|^p}{\gamma_\tau^p},\qquad T^p\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\rho|^p}{\gamma_\tau^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16]. Доказывается, что нормированное ОП

$$Z_T\,(u) = \frac{L\left(\vartheta_0+\frac{u}{\gamma_\tau T},X^T\right)}{L\,(\vartheta_0,X^T)},\qquad u\in\mathbb{U}_T = \left(\gamma_\tau T\,(\alpha-\vartheta_0)\,,\gamma_\tau T\,(\beta-\vartheta_0)\right)$$

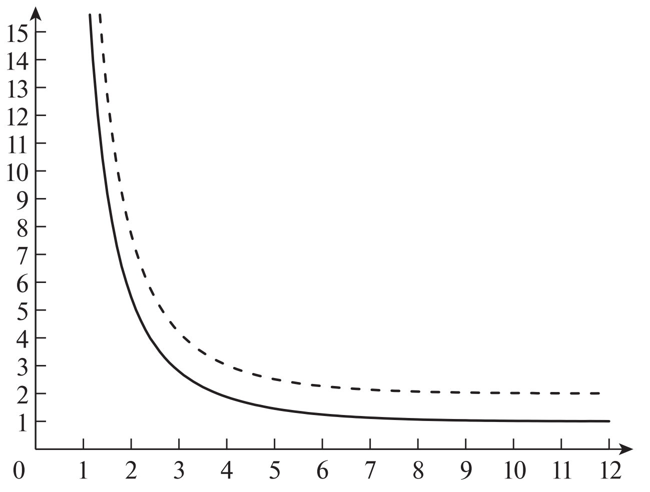


Рис. 8. Графики $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ (пунктирная линия) и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (сплошная линия).

сходится:

$$Z_T(\cdot) \Longrightarrow Z(\cdot),$$

и для среднеквадратических ошибок получаем представления

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\rho)}{T^2}(1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\rho)}{T^2}(1 + o(1)).$$

Здесь также интересно сравнить предельные среднеквадратические ошибки ОМП и БО. Аналитические выражения для $\hat{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2}\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\tilde{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2}\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ неизвестны. Исследованию случайной величины $\hat{\zeta}_\rho$ посвящено несколько работ. Распределения случайных величин $\sup_{u\geqslant 0} Z(u)$ и $\sup_{u\leqslant 0} Z(u)$ описаны в [38–40]. Распределения положениий точек максимума на отрицательной и на положительной полуосях изучены (по отдельности) в [41]. Распределение положения глобальной точки максимума $\hat{\zeta}_\rho$ получено в [42, 43]. Точную экспоненциальную асимптотику больших уклонений для $\hat{\zeta}_\rho$ можно найти в [44].

Значения $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ получены численным моделированием в [45]. Графики $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ представлены на рис. 8. Заметим, что при больших значениях ρ предельная ошибка ОМП в два раза больше, чем у БО.

При малых значениях ρ удобнее проследить кривые $\rho^2\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\rho^2\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (см. рис. 9). Объяснение пределов этих кривых при $\rho \to 0$ можно найти в [45].

Рассмотрим несколько обобщений.

Пример 5. Предположим, что сигнал $S(t)$ имеет K скачков на один период в точках $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_K < \tau$, скажем,

$$S(t) = \sum_{k=1}^{K+1} h_{k-1}(t)\, \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1} \leqslant t < \tau_k\}}.$$

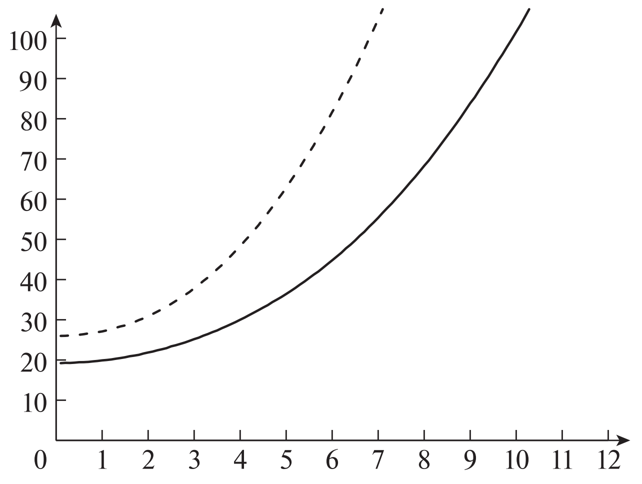


Рис. 9. Графики $\rho^2\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ (пунктирная линия) и $\rho^2\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (сплошная линия).

Здесь $\tau_0 = 0$ и $\tau_{K+1} = \tau$. Функции $h_k(\cdot)$ такие, что $\delta_k = h_{k-1}(\tau_k-) - h_k(\tau_k+) \neq \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, K$. Так как сигнал $S(\cdot)$ является τ-периодической функцией, предполагаем, что $h_0(0) = h_K(\tau)$. Обозначим: $h_{k-1}^- = h_{k-1}(\tau_k-)$, $h_k^+ = h_k(\tau_k+)$,

$$\rho_k = \ln\frac{h_{k-1}^- + \lambda_0}{h_k^+ + \lambda_0}, \qquad \delta_\Sigma = \sum_{k=1}^K \delta_k$$

и введем предельное ОП

$$Z(u) = \begin{cases} \exp\left\{\sum\limits_{k=1}^K \rho_k x_k^+\big((h_k^+ + \lambda_0)u\big) - \delta_\Sigma u\right\}, & u \geqslant 0, \\ \exp\left\{\sum\limits_{k=1}^K -\rho_k x_k^-\big(-(h_{k-1}^- + \lambda_0)u\big) - \delta_\Sigma u\right\}, & u < 0. \end{cases}$$

Здесь $x_k^\pm(\cdot)$, $k = 1, \ldots, K$, — независимые пуассоновские процессы единичной интенсивности.

Для описания асимптотических свойств ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ вводим случайные величины $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\Sigma$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\Sigma$ соотношениями (21) и (11) соответственно. Теперь если предположим, что $\delta_\Sigma \neq 0$, то предложение 3 справедливо и для оценок $\hat{\vartheta}_T$ и $\tilde{\vartheta}_T$ с соответствующими обозначениями. Следовательно,

$$T\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \tau\hat{\zeta}_\Sigma, \qquad T\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \tau\tilde{\zeta}_\Sigma.$$

Заметим, что здесь немного другая нормализация.

Пример 6. Рассмотрим частный случай примера 5, где $K = 2$, но $\delta_\Sigma = 0$. Предположим, что имеется прямоугольный импульсный сигнал известной ко-

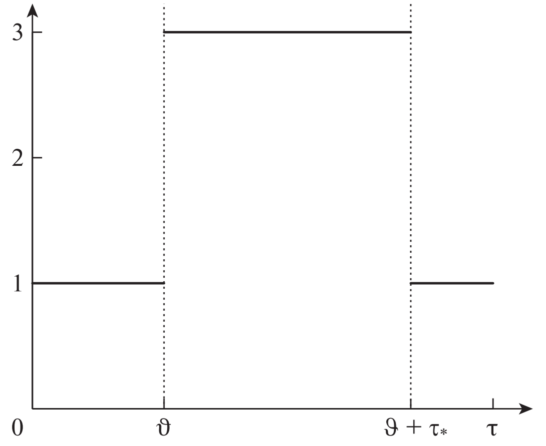


Рис. 10. Функция интенсивности примера 6.

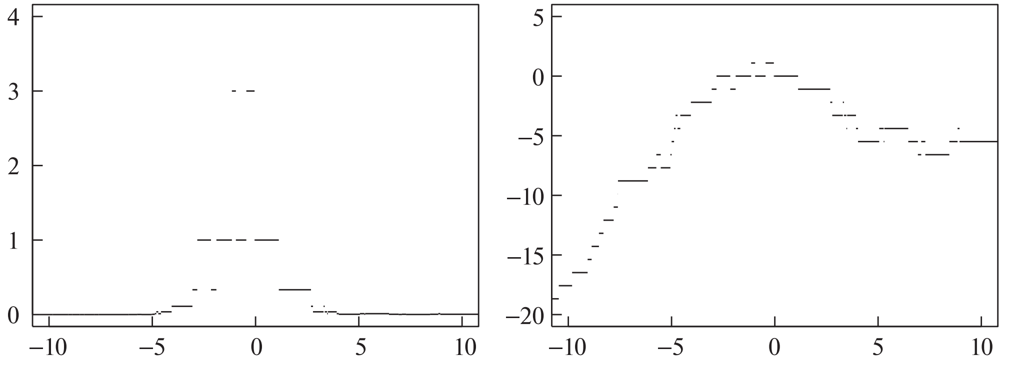


Рис. 11. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае $\rho = \ln 3$.

нечной продолжительности τ_*. Это соответствует функции интенсивности

$$\lambda\left(t-\vartheta\right)=\lambda\mathbb{1}_{\{\vartheta\leqslant t\leqslant\vartheta+\tau_*\}}+\lambda_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

на первом периоде, где $\lambda > 0$ (см. рис. 10).

Предполагаем, что $0<\alpha<\vartheta<\beta<\tau-\tau_*$ и $T=n\tau$. Функцию ОП в этой задаче можно записать следующим образом:

$$L\left(\vartheta, X^T\right)=\exp\left\{\ln\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\left[Y_T\left(\vartheta+\tau_*\right)-Y_T\left(\vartheta\right)\right]-n\tau_*\right\},\quad \vartheta\in\left(\alpha,\beta\right),$$

где $Y_n\left(t\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[X_{t+\tau(j-1)}-X_{\tau(j-1)}\right]$. Введем нормализующую функцию $\varphi_T=\left(\gamma_\tau T\right)^{-1}$, где $\gamma_\tau=\lambda/\tau$ и соответствующий нормализованный процесс ОП

$$Z_T\left(u\right)=\frac{L\left(\vartheta_0+\frac{u}{\gamma_\tau T}, X^T\right)}{L\left(\vartheta_0, X^T\right)},\qquad u\in\mathbb{U}_T=\left(\gamma_\tau T\left(\alpha-\vartheta_0\right),\gamma_\tau T\left(\beta-\vartheta_0\right)\right).$$

Тогда можно показать, что конечномерные распределения $Z_T(\cdot)$ сходятся к конечномерным распределениям предельного процесса $Z(\cdot)$

$$Z(u) = \begin{cases} \exp\left\{-\rho\left[x_1^+\left(\dfrac{u}{1-e^{-\rho}}\right) - x_2^+\left(\dfrac{u}{e^\rho - 1}\right)\right]\right\}, & u \geqslant 0, \\ \exp\left\{\rho\left[x_1^-\left(-\dfrac{u}{e^\rho - 1}\right) - x_2^-\left(-\dfrac{u}{1-e^{-\rho}}\right)\right]\right\}, & u < 0, \end{cases}$$

где $\rho = \ln\frac{\lambda+\lambda_0}{\lambda_0}$, а $x_1^\pm(\cdot)$, $x_2^\pm(\cdot)$ — четыре независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности. Примеры реализаций процессов $Z(\cdot)$ и $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 11.

Заметим, что имеется существенная разница между этим предельным процессом и другими предельными процессами в этой статье. Множество точек $\hat{\zeta}_\rho$, удовлетворяющих уравнению

$$Z(\hat{\zeta}_\rho) = \sup_{u\in\mathcal{R}} Z(u),$$

не является одноэлементным (это интервал со случайными концами или даже конечное объединение таких интервалов). Следовательно, асимптотика ОМП $\hat{\vartheta}_T$ требует специального исследования. Для БО $\tilde{\vartheta}_T$ этой проблемы нет, и имеем предел

$$\gamma_\tau T\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \tilde{\zeta}_\rho = \frac{\int_\mathcal{R} uZ(u)\,\mathrm{d}u}{\int_\mathcal{R} Z(u)\,\mathrm{d}u},$$

а сходимость моментов следует из общих рассуждений, аналогичных приведенным выше в доказательстве предложения 2:

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right|^2 = \frac{\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2}{\gamma_\tau^2 T^2}\left(1 + o(1)\right).$$

Пример 7. Рассмотрим случай нескольких точек разладки на одном периоде. Предположим, что функция интенсивности τ-периодического пуассоновского процесса X^T на первом периоде равна

$$\lambda(\vartheta, t) = \sum_{k=1}^K \left[h_k(t-\vartheta_k)\,\mathbb{1}_{\{t<\vartheta_k\}} + g_k(t-\vartheta_k)\,\mathbb{1}_{\{t\geqslant\vartheta_k\}}\right] + \lambda_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_K) \in \Theta \subset [0,\tau]^K$. Следовательно, надо оценить K точек разладки $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_K < \tau$ по наблюдениям неоднородного пуассоновского процесса $X^T = (X_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ с такой функцией интенсивности. Предполагаем, что функции $h_k(\cdot)$ и $g_k(\cdot)$ и множество Θ удовлетворяют условиям, обеспечивающим идентифицируемость модели.

ОМП $\hat{\vartheta}_T$ определяется уравнением вида (21), где правый и левый пределы рассчитываются в каждой компоненте. БО определяется как отношение (11).

Случайное поле предельного отношения правдоподобия равно

$$Z(\boldsymbol{u}) = \prod_{k=1}^{K} Z_k(u_k), \qquad \boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^K,$$

где

$$Z_k(u_k) = \begin{cases} \exp\left\{\ln\left(\dfrac{h_k+\lambda_0}{g_k+\lambda_0}\right) x_k^+\left((g_k+\lambda_0)\,u_k\right) - (h_k-g_k)\,u_k\right\}, & u_k \geqslant 0, \\ \exp\left\{\ln\left(\dfrac{g_k+\lambda_0}{h_k+\lambda_0}\right) x_k^-\left(-(h_k+\lambda_0)\,u_k\right) - (h_k-g_k)\,u_k\right\}, & u_k < 0. \end{cases}$$

Здесь $h_k = h_k(\tau_k)$, $g_k = g_k(\tau_k)$, а $x_k^{\pm}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, K$, — независимые пуассоновские процессы единичной интенсивности.

Введем случайные векторы $\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_1, \ldots, \hat{\zeta}_K)$ и $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_K)$ независимых случайных величин, определяемых соотношениями

$$\max\left(Z_k(\hat{\zeta}_k+), Z_k(\hat{\zeta}_k-)\right) = \sup_{v\in\mathcal{R}} Z_k(v), \qquad \tilde{\zeta}_k = \frac{\int_{\mathcal{R}} u_k Z_k(u_k)\,\mathrm{d}u_k}{\int_{\mathcal{R}} Z_k(u_k)\,\mathrm{d}u_k},$$

где $k = 1, \ldots, K$. Используя метод Ибрагимова–Хасьминского [17], можно проверить сходимость

$$T\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta\right) \Longrightarrow \tau\tilde{\zeta}, \qquad T^p \mathbf{E}_\vartheta \|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta\|^p \longrightarrow \tau^p \mathbf{E}_\vartheta \|\tilde{\zeta}\|^p.$$

Здесь $\|\cdot\|$ - евклидово расстояние в $\mathcal{R}^K$. Доказательство аналогичных пределов для ОМП

$$T\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta\right) \Longrightarrow \tau\hat{\zeta}, \qquad T^p \mathbf{E}_\vartheta \|\hat{\vartheta}_T - \vartheta\|^p \longrightarrow \tau^p \mathbf{E}_\vartheta \|\hat{\zeta}\|^p$$

является более сложной задачей, и ее решение пока неизвестно.

Для модели (1) аналогичный результат получен в [46]. Другой подход к исследованию моделей процессов Пуассона с разладкой в интенсивности развит в [47].

4. Частотная модуляция

Теперь рассмотрим практически те же модели с той лишь разницей, что используется частотная модуляция. Наблюдаемый неоднородный пуассоновский процесс $X^T = (X_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ имеет функцию интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где сигнал $S(t)$, $t \geqslant 0$, является τ-периодической функцией. Частота $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, а интенсивность шума (dark current) $\lambda_0 > 0$. Таким образом, функция $\lambda(\vartheta, t)$ периодическая с периодом $\tau_\vartheta = \vartheta/\tau$. Поскольку ϑ

неизвестно, нельзя заменить X^T на $n = T/\tau_\vartheta$ независимых одинаково распределенных пуассоновских процессов, как это было сделано в предыдущем разделе.

Ниже описываются свойства ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$, определяемых соотношениями

$$L(\hat{\vartheta}_T, X^T) = \sup_{\vartheta\in\Theta} L(\vartheta, X^T), \qquad \tilde{\vartheta}_T = \frac{\int_\Theta \vartheta p(\vartheta)\, L(\vartheta, X^T)\mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p(\vartheta)\, L(\vartheta, X^T)\mathrm{d}\vartheta},$$

где функция ОП равна

$$L(\vartheta, X^T) = \exp\left\{\int\limits_0^T \ln\left(1 + \frac{S(\vartheta t)}{\lambda_0}\right)\mathrm{d}X_t - \int\limits_0^T S(\vartheta t)\,\mathrm{d}t\right\}, \quad \vartheta\in\Theta.$$

Как и прежде, рассмотрим три типа регулярности/сингулярности моделей: гладкие модели, модели типа касп и модели разладки.

4.1. Гладкий случай

Предположим, что функция $S(\cdot) \geqslant 0$ дважды непрерывно дифференцируема и тождественно не равна нулю. Информацию Фишера запишем следующим образом:

$$\int\limits_0^T \frac{\dot{\lambda}(\vartheta, t)^2}{\lambda(\vartheta, t)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \frac{t^2 S'(\vartheta t)^2}{S(\vartheta t) + \lambda_0}\mathrm{d}t = \frac{T^3}{3\tau}\int\limits_0^\tau \frac{S'(t)^2}{S(t)+\lambda_0}\mathrm{d}t\,(1 + o(1)).$$

Точка означает производную по ϑ, а штрих — производную по аргументу функции. Здесь $S'(\vartheta t) = S'(y)|_{y=\vartheta t}$. Поэтому для этой модели наблюдений можно положить

$$\mathrm{I}(\vartheta) = \frac{1}{3\tau}\int\limits_0^\tau \frac{S'(t)^2}{S(t)+\lambda_0}\mathrm{d}t.$$

Нижняя граница (Гаека–Ле Кама) на среднеквадратические ошибки всех оценок $\bar{\vartheta}_T$ имеет вид

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T^3\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geqslant \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

П р е д л о ж е н и е 4. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K}\subset\Theta$ состоятельны, асимптотически нормальны:

$$T^{3/2}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \hat{\zeta} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \qquad T^{3/2}\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \hat{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для всех $p>0$

$$T^{\frac{3p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}|^p,\qquad T^{\frac{3p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательства см. в [21, 22]. Нормализующая функция может быть выбрана как $\varphi_T=T^{-3/2}$, и предельное отношение правдоподобия имеет вид

$$Z\left(u\right)=\exp\left\{u\Delta\left(\vartheta_0\right)-\frac{u^2}{2}\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)\right\},\qquad u\in\mathcal{R},\quad\Delta\left(\vartheta_0\right)\sim\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)\right).$$

Для среднеквадратических ошибок имеем

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0|^2=\frac{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}}{T^3}\left(1+o\left(1\right)\right),\quad\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0|^2=\frac{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}}{T^3}\left(1+o\left(1\right)\right).$$

Пример 8. Предположим, что $S\left(\vartheta t\right)=\frac{a}{2}\left[1+\cos\left(\vartheta t\right)\right]$, где $a>0$. Функция $S\left(\cdot\right)$ периодическая с периодом $\tau=2\pi/\vartheta$. Информация Фишера равна (см. [21])

$$\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)=\frac{a}{6}\left[1+2q-2\sqrt{q+q^2}\right],\qquad q=\frac{\lambda_0}{2}.$$

Пример 9. Предположим, что $S\left(\vartheta t\right)=b\exp\left[a\cos\left(\vartheta t\right)\right]$, где $a,b>0$. Функция $S\left(\cdot\right)$ периодическая с периодом $\tau=2\pi/\vartheta$. Информация Фишера равна (см. [21])

$$\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)=\frac{ab}{3}\,I_0'\left(a\right),$$

где $I_0'\left(a\right)$ — производная модифицированной функции Бесселя.

ОМП является асимптотически эффективной, но ее построение связано с определенными техническими трудностями, поэтому представляет интерес построение вычислительно существенно более простых оценок с теми же асимптотическими свойствами. Такое построение предложено в [48] в случае частотной модуляции для модели (1). Аналогичная конструкция может быть реализована и в случае пуассоновских наблюдений.

Заметим, что задача оценки частоты изучалась также в [49, 50]. В ряде работ рассматриваются задачи непараметрической оценки частоты и формы периодического сигналам, см., например, [51] и ссылки там.

4.2. Случай сингулярности типа касп

Предположим, что функция интенсивности наблюдаемого процесса равна

$$\lambda\left(\vartheta,t\right)=S\left(\vartheta t\right)+\lambda_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где функция $S(\cdot)$ является τ-периодической и может быть записана на первом периоде как $S(y) = \psi(y)\, g(y)$, где $y \in [0, \tau]$ и функция $\psi(\cdot)$ задана формулой

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}(y-\mu)\left|\frac{y-\mu}{\delta}\right|^{\kappa}\right)\mathbb{1}_{\{|y-\mu|<\delta\}} + \mathbb{1}_{\{y \geqslant \mu+\delta\}}.$$

Здесь $\kappa \in (0, 1/2)$, постоянная $\delta > 0$ известна, $\mu \in (\delta, \tau - \delta)$ и функция $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Более того, предполагаем, что $g(y) > 0$ для $y \in (\mu - \delta, \tau_*)$ и $g(y) = 0$ для $y \geqslant \tau_*$, где $\mu + \delta < \tau_* < \tau$. Как и ранее, множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $0 < \alpha < \beta$.

Заметим, что $S(y) = 0$ для $y \in [0, \mu - \delta]$ и что $S(y) = g(y)$ для $y \geqslant \mu + \delta$, и, следовательно, $S(y) = 0$ для $t \in [\tau_*, \tau]$. Таким образом, сигнал можно периодически продолжить, а функция $\psi(\cdot)$ описывает фронт сигнала. Также заметим, что поскольку $\kappa \in (0, 1/2)$, статистический эксперимент сингулярный.

Напомним некоторые обозначения, введенные в разделе 3.2. А именно введем случайные величины $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\kappa$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\kappa$ соотношениями (9) и (11) соответственно, используя случайный процесс

$$Z(u) = \exp\left\{W^{\kappa+\frac{1}{2}}(u) - \frac{|u|^{2\kappa+1}}{2}\right\}, \quad u \in \mathcal{R}.$$

Здесь $W^H(\cdot)$, как и раньше, обозначает дробное броуновское движение с параметром Херста $H = \kappa + \frac{1}{2}$. Напомним также интеграл $Q(\kappa)$, определенный ранее в (18)–(19). Пример реализации процесса $Z(\cdot)$ приведен на рис. 3.

Введем постоянную

$$\gamma_{\kappa,\tau} = \left(\frac{g^2(\mu)\, Q(\kappa)}{4\tau(g(\mu) + 2\lambda_0)(\kappa+1)}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}.$$

Первый результат — это нижняя граница рисков всех оценок $\bar{\vartheta}_T$:

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T^{\frac{4(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\,\mathbf{E}_\vartheta|\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}\tilde{\zeta}_\kappa^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 5. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^{\frac{2(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \frac{\hat{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa,\tau}}, \qquad T^{\frac{2(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \frac{\tilde{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa,\tau}},$$

моменты сходятся: для всех $p > 0$

$$T^{\frac{2p(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\,\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa,\tau}^p}, \qquad T^{\frac{2p(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\,\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa,\tau}^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство следует тем же этапам, что и доказательство аналогичного результата в [29]. Нормализованная функция ОП в этой задаче имеет вид

$$Z_T\left(u\right)=\frac{L\left(\vartheta_0+\varphi_T u,X^T\right)}{L\left(\vartheta_0,X^T\right)},\quad u\in\mathbb{U}_T=\left(\frac{\alpha-\vartheta_0}{\varphi_T},\frac{\beta-\vartheta_0}{\varphi_T}\right),$$

где нормирующая функция $\varphi_T=\left(\gamma_{\kappa,\tau}\,T^{\frac{2(\kappa+1)}{2\kappa+1}}\right)^{-1}$. Устанавливаем сходимость

$$Z_T\left(\cdot\right)\Longrightarrow Z\left(\cdot\right),$$

и поэтому процесс $Z(\cdot)$ является процессом предельного отношения правдоподобия этой модели. Следовательно, свойства ОМП и БО описываются соотношениями (8) и (11) соответственно.

Среднеквадратичные ошибки ОМП и БО имеют вид

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\vartheta_T-\vartheta_0|^2=\frac{\hat\sigma^2\left(\kappa\right)}{T^{\frac{4(\kappa+1)}{2\kappa+1}}}\left(1+o\left(1\right)\right),\quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\vartheta_T-\vartheta_0|^2=\frac{\tilde\sigma^2\left(\kappa\right)}{T^{\frac{4(\kappa+1)}{2\kappa+1}}}\left(1+o\left(1\right)\right),$$

где

$$\hat\sigma^2\left(\kappa\right)=\frac{\mathbf{E}|\hat\zeta_\kappa|^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2},\qquad \tilde\sigma^2\left(\kappa\right)=\frac{\mathbf{E}|\tilde\zeta_\kappa|^2}{\gamma_{\kappa,\tau}^2}.$$

Как и в разделе 3.2, предложение 5 можно обобщить на случай, когда функция $S\left(\cdot\right)$ имеет несколько точек сингулярности на интервале $[0,\tau]$.

Пример 10. Рассмотрим случай импульсного сигнала конечной длительности с особенностями типа касп в начале и в конце сигнала:

$$\lambda\left(\vartheta,t\right)=S\left(\vartheta t\right)+\lambda_0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где $S\left(y\right)$ является τ-периодической функцией, заданной для $y\in[0,\tau]$ формулой

$$S\left(y\right)=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn}\left(y-\mu\right)\left|\frac{y-\mu}{\delta}\right|^\kappa\right)1\!\!1_{\{|y-\mu|<\delta\}}+1\!\!1_{\{\mu+\delta\leqslant y\leqslant\tau_*-\delta\}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(y-\tau_*\right)\left|\frac{y-\tau_*}{\delta}\right|^\kappa\right)1\!\!1_{\{|y-\tau_*|<\delta\}}.$$

Здесь $\delta<\mu<\tau-3\delta$ и $\mu+2\delta<\tau_*<\tau-\delta$.

Асимптотическое поведение ОМП и БО в этой модели дается в предложении 5 с $\gamma_{\kappa,\tau}=\left(\frac{Q(\kappa)}{2\tau(2\lambda_0+1)(\kappa+1)}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}$.

Перейдем к проблеме оценки момента разладки. Функция интенсивности наблюдаемого неоднородного пуассоновского процесса $X^T = (X_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ имеет вид

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, а функция $S(\cdot)$ является τ-периодической. На первом периоде она имеет представление

$$S(t) = h(t) + g(t)\, \mathbb{1}_{\{\mu \leqslant t \leqslant \mu + \tau^*\}}, \qquad 0 \leqslant t < \tau,$$

где $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — τ-периодические непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $h(\cdot) > 0$, $g(\mu) > 0$, $g(\mu + \tau^*) = 0$, $0 < \tau^* < \tau - \mu$. Имеем

$$S(\vartheta t) = h(\vartheta t) + g(\vartheta t)\, \mathbb{1}_{\{\mu \leqslant \vartheta t \leqslant \mu + \tau^*\}}, \qquad 0 \leqslant t < \tau_\vartheta \equiv \frac{\tau}{\vartheta}.$$

Функции $h(\cdot)$, $g(\cdot)$ и параметры $\mu > 0$, τ^* предполагаются известными.

Лог-ОП может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned}
\ln L\left(\vartheta, X^T\right) &= \int_0^T \ln\left(\frac{S(\vartheta t) + \lambda_0}{h(\vartheta t) + \lambda_0}\right) \mathrm{d}X_t - \int_0^T \left[S(\vartheta t) - h(\vartheta t)\right] \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{\vartheta T} \ln\left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0}\right) \mathrm{d}X_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta T} \left[S(v) - h(v)\right] \mathrm{d}v = \\
&= \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\tau(k-1)}^{\tau k} \ln\left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0}\right) \mathrm{d}X_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\tau(k-1)}^{\tau k} \left[S(v) - h(v)\right] \mathrm{d}v + \\
&\qquad + \int_{\tau n_\vartheta}^{\tau T} \ln\left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0}\right) \mathrm{d}X_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \int_{\tau n_\vartheta}^{\tau T} \left[S(v) - h(v)\right] \mathrm{d}v = \\
&= \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\mu}^{\mu + \tau^*} \ln\left(1 + \frac{g(s)}{h(s) + \lambda_0}\right) \mathrm{d}X_k(\vartheta, s)\,(1 + o(1)) - \\
&\qquad - \frac{T}{\tau} \int_{\mu}^{\mu + \tau^*} g(s)\, \mathrm{d}s\, (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие обозначения: $n_\vartheta = \left[\frac{\vartheta T}{\tau}\right]$ (целая часть) и $X_k(\vartheta, s) = X_{\frac{s+\tau(k-1)}{\vartheta}} - X_{\frac{\tau(k-1)}{\vartheta}}$.

Напомним, что функция ОП $L\left(\vartheta, X^T\right)$, $\vartheta\in\Theta$ разрывная, поэтому ОМП $\hat\vartheta_T$ определяется уравнением

$$\max\left(L(\hat\vartheta_T+, X^T), L(\hat\vartheta_T-, X^T)\right) = \sup_{\vartheta\in\Theta} L\left(\vartheta, X^T\right).$$

БО определяется соотношением (5).

Положим

$$\gamma_\tau = \frac{g(\mu)}{2\tau}, \quad \rho = \ln\frac{h(\mu)+g(\mu)+\lambda_0}{h(\mu)+\lambda_0}$$

и введем процесс предельного отношения правдоподобия

$$Z(v) = \begin{cases} \exp\left\{\rho x^+\left(\dfrac{v}{e^\rho - 1}\right) - v\right\}, & v \geqslant 0, \\ \exp\left\{-\rho x^-\left(-\dfrac{v}{1-e^{-\rho}}\right) - v\right\}, & v < 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $x^\pm(\cdot)$ представляют собой два независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности. Заметим, что до замены переменной $v = -u$ этот процесс аналогичен процессу (20), который был в случае фазовой модуляции (см. раздел 3.3 и рис. 7).

Предельные распределения ОМП и БО даны с помощью случайных величин $\hat\zeta = \hat\zeta_\rho$ и $\tilde\zeta = \tilde\zeta_\rho$, определяемых соотношениями

$$\max\left(Z(\hat\zeta_\rho+), Z(\hat\zeta_\rho-)\right) = \sup_{u\in\mathcal{R}} Z(u)$$

и (11) соответственно, где $Z(\cdot)$ задано в (22).

Нижняя граница для среднеквадратических ошибок всех оценок имеет вид

$$\lim_{\nu\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} T^4\mathbf{E}_\vartheta|\bar\vartheta_T - \vartheta|^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}|\tilde\zeta_\rho|^2}{\gamma_\tau^2},$$

и называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0\in\Theta$.

Предложение 6. ОМП $\hat\vartheta_T$ и БО $\tilde\vartheta_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K}\subset\Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^2\left(\hat\vartheta_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \frac{\hat\zeta_\rho}{\gamma_\tau}, \qquad T^2\left(\tilde\vartheta_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \frac{\tilde\zeta_\rho}{\gamma_\tau},$$

моменты сходятся: для всех $p>0$

$$T^{2p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\vartheta_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat\zeta_\rho|^p}{\gamma_\tau^p}, \qquad T^{2p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\vartheta_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde\zeta_\rho|^p}{\gamma_\tau^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16]. Нормированное ОП определяем соотношением

$$Z_T(u) = \frac{L\left(\vartheta_0 + \frac{u}{\gamma_\tau T^2}, X^T\right)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \qquad u \in \mathbb{U}_T = \left(\gamma T^2(\alpha - \vartheta_0), \gamma_\tau T^2(\beta - \vartheta_0)\right),$$

и проверяем сходимость

$$Z_T(\cdot) \Longrightarrow Z(\cdot).$$

Для среднеквадратических ошибок получаем выражения

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\rho)}{T^4}(1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\rho)}{T^4}(1 + o(1)),$$

где $\hat{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\tilde{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$. Результаты численных вычислений значений $\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ приведены на рис. 8 и 9 в разделе 3.3.

Свойства ОМП частоты разрывного сигнала модели (1) описаны в [16] (см. утверждение 2.4.2). Сходные свойства эта оценка имеет и для более общей модели диффузионного процесса с разрывным периодическим сносом [52].

5. Численное моделирование

Значения ошибок, представленные на рис. 4, 8 и 9, соответствуют предельной модели ($T = \infty$). Интересно посмотреть, как среднеквадратические ошибки

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right)^2 = \frac{\sigma^2}{T^m}(1 + o(1))$$

сходятся к своим предельным значениям σ^2. Скорость этой сходимости можно увидеть по результатам численного моделирования, приведенным ниже.

Рассмотрим функции интенсивности:
гладкий случай (фаза и частота)

$$\lambda_{PS}(\vartheta, t) = \cos^2(2\pi(t - \vartheta)) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lambda_{FS}(\vartheta, t) = \cos^2(2\pi\vartheta t) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

случай сингулярности типа касп (фаза и частота)

$$\lambda_{PC}(\vartheta, t) = f(t - \vartheta) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$\lambda_{FC}(\vartheta, t) = f(\vartheta t) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где на первом периоде

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(2t + \delta)\left|\frac{2t + \delta}{\delta}\right|^\kappa\right]\mathbb{1}_{\{-\delta \leqslant t \leqslant 0\}} - \\ - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(2t - \delta)\left|\frac{2t - \delta}{\delta}\right|^\kappa\right]\mathbb{1}_{\{0 \leqslant t \leqslant \delta\}},$$

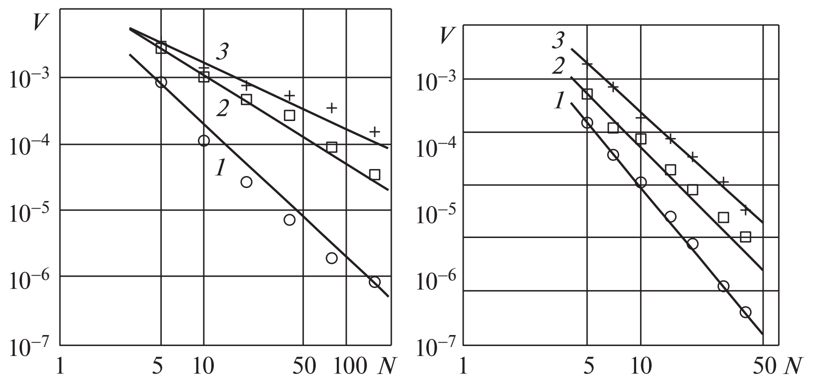


Рис. 12. Результаты симуляций в случаях фазовой (левая часть) и частотной (правая часть) модуляций.

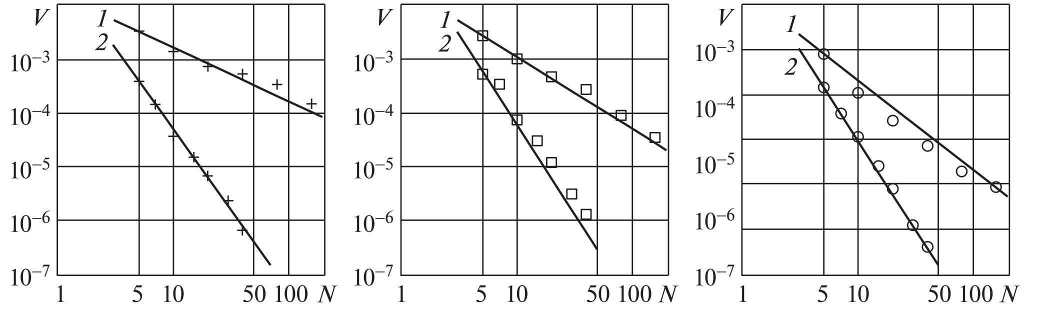


Рис. 13. Результаты симуляций в гладком случае (левая часть), в случае сингулярности типа касп (центральная часть) и в случае разладки (правая часть).

случай разладки (фаза и частота)

$$
\begin{aligned}
\lambda_{PD}(\vartheta,t) &= f(t-\vartheta)+1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
\lambda_{PD}(\vartheta,t) &= f(\vartheta t)+1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,
\end{aligned}
$$

где на первом периоде

$$f(t) = \mathbb{1}_{\{t \geqslant \mu\}} + 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Результаты численной симуляции

$$V(T) = \ln \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right)^2 = \ln \sigma^2 - m \ln T$$

в случаях фазовой и частотной модуляций представлены на рис. 12 и 13. Используем обозначения: $+$ (гладкий случай), $\square$ (случай сингулярности типа касп) и $\circ$ (случай разладки).

6. Выбор модели

Как видим, существует большое разнообразие скоростей сходимости ошибок в зависимости от аналитических свойств сигналов и типа модуляции. Поэтому естественно рассмотреть следующий вопрос:

Как выбрать функцию интенсивности и оценку, обеспечивающие минимально возможную ошибку оценки параметра? В частности, какова оптимальная скорость сходимости среднеквадратической ошибки?

Напомним, что в статистике обычно приводится модель наблюдений и проблема состоит в том, чтобы идентифицировать эту модель оптимальным образом. Здесь утверждение отличается, и можно выбрать и модель, и оценку, которые обеспечат лучшую ошибку.

Таким образом, рассматриваем задачу, которая в некотором смысле является обратной. Предположим, что можно выбрать любую интенсивность $\lambda(\vartheta,t)$, которую хотим, и цель состоит в том, чтобы найти такую функцию $\lambda\left(\vartheta,t\right)$, $\vartheta\in\Theta=(0,1)$ и $t\in[0,T]$, и такую оценку $\vartheta^{\star}_T$, что скорость убывания погрешности оценивания является наилучшей. Конечно, надо наложить некоторые ограничения на "энергию сигнала" (терминология, пришедшая из теории связи), поскольку если допустить $\lambda\left(\cdot\right)\to\infty$, то можно будет получить любую скорость.

Зафиксируем некоторое число $L>0$ и введем класс функций интенсивности, ограниченных этой константой:

$$\mathcal{F}(L)=\left\{\lambda(\cdot)\ :\quad 0\leqslant\lambda(\vartheta,t)\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant T\right\}.$$

Имеется следующий результат:

$$\inf_{\lambda\in\mathcal{F}(L)}\inf_{\bar\vartheta_T}\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathbf{E}_{\lambda,\vartheta}\left(\bar\vartheta_T-\vartheta\right)^2=\exp\left\{-\frac{TL}{6}\left(1+o(1)\right)\right\}.$$

На самом деле, здесь представлено два разных результата.

Первый — это нижняя граница на среднеквадратический риск при любом выборе интенсивности из этого класса и любой оценки $\bar\vartheta_T$:

$$\inf_{\lambda\in\mathcal{F}(L)}\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathbf{E}_{\lambda,\vartheta}\left(\bar\vartheta_T-\vartheta\right)^2\geqslant\exp\left\{-\frac{TL}{6}\left(1+o(1)\right)\right\}.$$

Второй результат — это выбор такой интенсивности $\lambda_*\left(\cdot\right)$ и построение такой оценки ϑ^*_T, что эта граница достигается:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathbf{E}_{\lambda_*,\vartheta}\left(\vartheta^*_T-\vartheta\right)^2\leqslant\exp\left\{-\frac{TL}{6}\left(1+o(1)\right)\right\}.$$

Доказательства, приведенные в [53, 54], существенно опираются на вычисление пропускной способности пуассоновского канала (см. [13, 55, 56]).

7. Обсуждения

Представленные выше результаты показывают, что порядок ошибки сильно зависит от свойств регулярности передаваемого сигнала. Заметим, что важно изучить ситуации, в которых предполагаемая регулярность сигнала и реальная регулярность разные. Например, статистик предполагает, что сигнал имеет сингулярность типа разладки, и строит ОМП на основе этого предположения, но реальный сигнал сглажен и функция интенсивности имеет конечную информацию Фишера. Тем самым имеем ошибку в определении регулярности. Тогда ОМП сходится к значению ϑ_*, которое минимизирует расстояние Кульбака–Лейблера, и скорость сходимости среднеквадратической ошибки существенно отличается от предполагаемой. Например, если имеем фазовую модуляцию и ожидаем скорость $\mathbf{E}_{\vartheta_0}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0)^2 \sim T^{-2}$, то реальная скорость ошибки ОМП будет $\mathbf{E}_{\vartheta_0}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_*)^2 \sim T^{-2/3}$. Среднеквадратичные ошибки ОМП при различных типах ошибок в типе регулярности сигналов изучались в [33, 57], где исследовалась модель "сигнал в белом гауссовском шуме" (1). Подобное исследование может быть интересно также и в случае пуассоновских процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.

   Vishnevskii V.M., Dudin A.N. Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.

2. *Назаров А.А., Любина Т.В.* Немарковская динамическая RQ-система с входящим MMP-потоком заявок // АиТ. 2013. № 7. С. 89–101.

   Nazarov A.A., Lyubina T.V. The Non-Markov Dynamic RQ System with the Incoming MMP Flow of Requests // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 7. P. 1132–1143.

3. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

   Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and Methods of Network Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.

4. *Rao M.M.* Optical Communication. Hyderabad: Universities Press, 2001.

5. *Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanene M., Donner K.J. (Ed's)* Fundamental Astronomy. New York: Springer, 2017.

6. *Chen V.C.* The Micro-Doppler Effect in Radar. 2nd ed. Boston: Artech House Publishers, 2019.

7. *Breyer B.* Physcal Principles of the Doppler Effect and Its Applicatio in Medecine // Color Doppler, 3D and 4D Ultrasound in Gynecology, Infertility and Obstetrics (*Kupesic S.* Ed.). Jaypee Brothers Medical Publishers, 2011. P. 1–11.

8. *Zekavat S.A.R., Buehrer R.M. (Ed's)* Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. 2nd ed. Hoboken: Jhon Wiley and Sons, 2019.

9. *Chernoyarov O.V., Kutoyants Yu.A.* Poisson Source Localization on the Plane. Smooth Case // Metrika. 2020. V. 83. No. 4. P. 411–435.

10. *Chernoyarov O.V., Dachian S., Kutoyants Yu.A.* Poisson Source Localization on the Plane. Cusp Case // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2020. V. 72. No. 5. P. 1137–1157.

11. *Bandyopdhyay M.N.* Optical Communication and Networks. Prentice Hall of India Private, 2014.

12. *Bar-David I.* Communication under the Poisson Regime // IEEE Trans. Information Theory. 1969. V. IT–15. No. 1. P. 31–37.

13. *Wyner A.D.* Capacity and Error Exponent for the Direct Detection Photon Channel — Parts I and II // IEEE Trans. Inform. Theory. 1988. V. IT–34. P. 1449–1471.

14. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

    Liptser R.S., Shiryaev A.N. Statistics of Random Processes. Berlin: Springer, 2001.

15. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Оценка параметра сигнала в гауссовском белом шуме // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 1. С. 39–59.

    Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Estimation of a Signal Parameter in Gaussian White Noise // Problems Inform. Transmission. 1974. V. 10. No. 1. P. 31–46.

16. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation for Stochastic Processes. Berlin: Heldermann, 1984.

17. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.

    Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Statistical Estimation. Asymptotic Theory. New York: Springer, 1981.

18. *Prakasa Rao B.L.S.* Estimation of the Location of the Cusp of a Continuous Density // Ann. Math. Statist. 1968. V. 39. No. 1. P. 76–87.

19. *Dachian S.* Estimation of the Location of a 0-type or ∞-type Singularity by Poisson Observations // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2011. V. 45. No. 5. P. 509–523.

20. *Hajek J.* Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1972. V. 1. P. 175–194.

21. *Kutoyants Yu.A.* Statistical Inference for Spatial Poisson Processes. New York: Springer, 1998.

22. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation of Intensity of Inhomogeneous Poisson Processes // Probl. Contr. Inform. Theory. 1979. V. 8. P. 137–149.

23. *Kutoyants Yu.A.* Multidimensional Parameter Estimation of Intensity of Inhomogeneous Poisson Processes // Probl. Contr. Inform. Theory. 1982. V. 11. P. 325–334.

24. *Prakasa Rao B.L.S.* Asymptotic Theory of Least Squares Estimator in a Nonregular Nonlinear Regression Model // Statist. and Probab. Lett. 1985. V. 3. No. 1. P. 15–18.

25. *Prakasa Rao B.L.S.* Estimation of Cusp in Nonregular Nonlinear Regression Models // Journal of Multivariate Analysis. 2004. V. 88. No. 2. P. 243–251.

26. *Döring M.* Asymmetric Cusp Estimation in Regression Models // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2015. V. 49. No. 6. P. 1279–1297.

27. *Döring M., Jensen U.* Smooth Change Point Estimation in Regression Models with Random Design // Ann. Inst. Stat. Math. 2015. V. 67. P. 595–619.

28. *Raimondo M.* Minimax Estimation of Sharp Change Points // The Annals of Statistics. 1998. V. 26. No. 4. P. 1379–1397.

29. *Dachian S.* Estimation of Cusp Location by Poisson Observations // Statist. Inference Stoch. Processes. 2003. V. 6. No. 1. P. 1–14.

30. *Dachian S., Kutoyants Yu.A.* On Cusp Estimation of Ergodic Diffusion Process // J. Stat. Plann. Infer. 2003. V. 117. P. 153–166.

31. *Fujii T.* An Extension of Cusp Estimation Problem in Ergodic Diffusion Processes // Statistics and Probability Letters. 2010. V. 80. No. 9–10. P. 779–783.

32. *Kutoyants Yu.A.* On Cusp Location Estimation for Perturbed Dynamical Systems // Scand. J. Statist. 2019. V. 46. P. 1206–1226.

33. *Chernoyarov O.V., Dachian S., Kutoyants Yu.A.* On Parameter Estimation for Cusp-type Signals // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2018. V. 70. No. 1. P. 39–62.

34. *Kutoyants Yu.A.* On Localization of Source by Hidden Gaussian Processes with Small Noise // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2021. V. 73. No. 4. P. 671–702.

35. *Pflug G.C.* A Statistically Important Gaussian Process // Stochastic Processes and their Applications. 1982. V. 13. P. 45–47.

36. *Новиков А.А., Кордзахия Н.Е., Линг Т.* О моментах оценок Питмена: случай дробного броуновского движения // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58. № 4. С. 695–710.

    Novikov A.A., Kordzakhia N.E., Ling T. On Moments of Pitman Estimators: the Case of Fractional Brownian Motion // Theory Probab. Appl. 2014. V. 58. No. 4. P. 601–614.

37. *Dachian S., Kordzakhia N., Kutoyants Yu.A., Novikov A.* Estimation of Cusp Location of Stochastic Processes: A Survey // Stat. Inference Stoch. Process. 2018. V. 21. No. 2. P. 345–362.

38. *Pyke R.* The Supremum and Infimum of the Poisson Process // Ann. Math. Statist. 1959. V. 30. P. 568–576.

39. *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.

    Skorohod A.V. Random Processes with Independent Increments. Dordrecht: Kluwer, 1991.

40. *Shorack G.R., Wellner J.A.* Empirical Processes with Applications to Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1986.

41. *Pflug G.C.* On an Argmax-Distribution Connected to the Poisson Process // Proceedings of the Fifth Prague Conference on Asymtotic Statistics (*Mandl P., Huskova M.* Ed's). 1993. P. 123–130.

42. *Мосягин В.Е., Швемлер Н.А.* Распределение момента максимума разности двух пуассоновских процессов с отрицательным линейным сносом // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1229–1248.

    Mosyagin V.E., Shvemler N.A. Distribution of the Time of Attaining the Maximum for the Difference of the Two Poisson's Processes with Negative Linear Drift (in Russian) // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 1229–1248.

43. *Мосягин В.Е., Швемлер Н.А.* Локальные свойства предельного распределения статистической оценки точки разрыва плотности // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 1307–1316.

Mosyagin V.E., Shvemler N.A. Local Properties of the Limiting Distribution of the Statistical Estimator for Jump Point of a Density (in Russian) // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2017. V. 14. P. 1307–1316.

44. *Мосягин В.Е.* Асимптотика распределения момента достижения максимума траекторией процесса Пуассона со сносом и изломом // Теория вероятн. и ее примен. 2021. Т. 66. № 1. С. 94–109.

    Mosyagin V.E. Asymptotics for the Distribution of the Time of Attaining the Maximum for a Trajectory of a Poisson Process with Drift and Break // Theory Probab. Appl. 2021. V. 66. No. 1.

45. *Dachian S.* On Limit Likelihood Ratio Processes of some Change-Point Type Statistical Models // J. Stat. Plan. Inference. 2010. V. 140. P. 2682–2692.

46. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовском шуме // Пробл. передачи информ. 1975. Т. 11. № 3. С. 31–43.

    Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Parameter Estimation for a Discontinuous Signal in White Gaussian Noise // Problems Inform. Transmission. 1975. V. 11. No. 3. P. 203–212.

47. *Галун С.А., Трифонов А.П.* Обнаружение и оценка момента изменения интенсивности пуассоновского потока // АиТ. 1982. № 6. С. 95–105.

    Galun S.A., Trifonov A.P. Detection and Estimation of the Time when the Poisson Flow Intensity Changes // Autom. Remote Control. 1982. V. 43. No. 6. P. 782–790.

48. *Голубев Г.К.* Фишеровский метод накопления в задаче оценивания частоты // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1981. Т. 108. С. 22–44.

    Golubev G.K. Fisher's Method of Scoring in the Problem of Frequency Estimation // Journal of Soviet Mathematics. 1984. V. 25. No. 3. P. 1125–1139.

49. *Helstrom C.* Estimation of Modulation Frequency of a Light Beam // Optical Space Communication; Proceedings of an MIT-NASA Workshop held at Williams College, Williamstown, MA, August 4–17, 1968 (*Kennedy R.S., Karp S.* Ed's). Appendix E. 1968.

50. *Vere-Jones D.* On the Estimation of Frequency in Point-Process Data // J. Appl. Probab. 1982. V. 19(A). P. 383–394.

51. *Hall P., Reimann J., Rice J.* Nonparametric Estimation of a Periodic Function // Biometrika. 2000. V. 87. No. 3. P. 545–557.

52. *Хепфнер Р., Кутоянц Ю.А.* Об оценивании частоты периодического эргодического диффузионного процесса // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 2. С. 48–64.

    Hopfner R., Kutoyants Yu.A. On Frequency Estimation for a Periodic Ergodic Diffusion Process // Problems Inform. Transmission. 2012. V. 48. No. 2. P. 127–141.

53. *Бурнашев М.В., Кутоянц Ю.А.* О границе сферической упаковки, пропускной способности и о подобных результатах для пуассоновского канала // Пробл. передачи информ. 1999. Т. 35. № 2. С. 3–22.

    Burnashev M.V., Kutoyants Yu.A. On the Sphere-Packing Bound, Capacity, and Similar Results for Poisson Channels // Problems Inform. Transmission. 1999. V. 35. No. 2. P. 95–111.

54. *Burnashev M.V., Kutoyants Yu.A.* On Minimal α-Mean Error Parameter Transmission over Poisson Channel // IEEE Transactions on Information Theory. 2001. V. IT–47. No. 6. P. 2505–2515.

55. *Кабанов Ю.М.* Пропускная способность канала пуассоновского типа // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. № 1. С. 148–153.

Kabanov Yu.M. The Capacity of a Poisson Type Channel // Theory Probab. Appl. 1978. V. 23. No. 1. P. 143–147.

56. *Davis M.H.A.* Capacity and Cutoff Rate for Poisson-type Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. V. IT–26. No. 6. P. 710–715.

57. *Chernoyarov O.V., Kutoyants Yu.A., Trifonov A.P.* On Misspecifications in Regularity and Properties of Estimators // Electron. J. Statist. 2018. V. 12. No 1. P. 80–106.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я.Рубиновичем.

Поступила в редакцию 16.06.2021

После доработки 01.07.2021

Принята к публикации 05.08.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Линейные системы

© 2021 г. **Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),**
Н.М. НОВОЖИЛКИН (nikitanovozhilkin261@outlook.com),
Е.Ю. ПОРЦЕВА (katyhka2007@yandex.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ[1]

Рассматривается решение задачи быстродействия для линейных нестационарных дискретных систем с выпуклыми ограничениями на управление. Предложен метод сведения общего случая задачи быстродействия к случаю линейных ограничений на управление при помощи алгоритмов полиэдральной аппроксимации. Сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности гарантирующего решения. Приведены примеры. На основе полученных методов решена задача наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

Ключевые слова: дискретная система управления, задача быстродействия, оптимальное позиционное управление, задача линейного программирования, множество управляемости, выпуклый многогранник, полиэдральная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0005231021120047

1. Введение

Задача быстродействия известна достаточно давно как задача оптимального управления с естественным функционалом качества — времени, затрачиваемого системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [1–3]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача не обладает какими-либо существенными особенностями, выделяющими ее из общей проблематики теории оптимального управления. Решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [1], гарантирует релейный характер управления для линейных систем.

В то же время системы с дискретным временем имеют ряд фундаментальных отличий от непрерывных систем при построении оптимального управления [4–6]. Тогда как в непрерывном случае оптимизационная задача является

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00128-а).

задачей вариационного исчисления, в дискретном времени она представляет собой задачу выпуклого программирования. Данный факт определяет принципиально иной набор средств для построения оптимальных процессов в дискретном случае. Но несмотря на то что посредством дискретного принципа максимума [6, 7] и метода динамического программирования [8] удается решить бо́льшую часть задач теории оптимального управления дискретными системами, для решения задачи быстродействия эти принцип и метод оказываются неприменимыми в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний, неединственности оптимальной траектории и дискретного характера критерия качества управления – числа шагов, необходимого для достижения фиксированного терминального состояния из заданного начального [9, 10].

В связи с этим оказывается актуальным поиск альтернативных подходов для решения поставленной задачи. На данный момент продемонстрировал свою эффективность метод, базирующийся на использовании множеств 0-управляемости [11] — множеств тех начальных состояний, из которых за конечное число шагов можно перевести систему в начало координат посредством выбора допустимого управления. При этом доказано, что метод решения во многом зависит от ограничений, накладываемых на управление. В случае строго выпуклых ограничений для построения оптимального по быстродействию управления удается модифицировать известный принцип максимума [9, 10]. Если множество допустимых значений управлений представляет собой многогранник, на основе метода динамического программирования решение исходной задачи может быть сведено к решению ряда задач линейного программирования [12, 13]. Однако в случае произвольных выпуклых ограничений на управление аналогичные подходы оказываются неприменимыми.

Одним из методов сведения общего случая исходной задачи к случаю линейных ограничений на управление является проведение предварительной полиэдральной аппроксимации множества допустимых значений управлений системы. Данный подход аппроксимации одного множества другим, более удобным в описании, широко используется не только в теории оптимального управления [14, 15], но также, например, в задачах стохастической оптимизации [16, 17] и дискретной оптимизации [18]. На данный момент известно большое количество алгоритмов полиэдральной аппроксимации [19–22], различающихся по сложности, эффективности и свойствам сходимости.

В публикациях [23, 24] рассмотрены методы построения субоптимального решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы и алгоритм оценки его точности на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации. Однако существенным недостатком этих работ является то, что в них не проводится исследование сходимости критерия качества управления, отсутствуют условия, при которых субоптимальное решение может оказаться оптимальным.

Данная статья посвящена исследованию точности субоптимального решения, полученного на основе методов полиэдральной аппроксимации, в задаче быстродействия для линейной дискретной системы. Доказано, что если алгоритмы внешней и внутренней аппроксимации гарантируют сходимость к исходному выпуклому компакту в смысле расстояния Хаусдорфа [25], то почти для всех начальных состояний за конечное число итерационного алгоритма удается добиться оптимальности гарантирующего решения. Данный факт позволяет в полной мере свести задачу быстродействия для дискретной линейной системы общего вида к случаю линейных ограничений.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведены постановка задачи быстродействия и описание семейства множеств 0-управляемости, описан метод решения задачи быстродействия в случае линейных ограничений, произведена постановка задачи об аппроксимации. В разделе 3 рассмотрены некоторые свойства пространства компактных множеств, наделенного метрикой Хаусдорфа. В разделе 4 сформулирован и доказан критерий оптимальности гарантирующего решения в задаче быстродействия для произвольных выпуклых ограничений. В разделе 5 опробована эффективность полученных результатов на примере различных систем управления. В разделе 6 приведено решение задачи наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

2. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная линейная система управления с дискретным временем и ограниченными множествами допустимых значений управлений $(\mathcal{A},\mathcal{U})$:

$$
\begin{gathered}
x(k+1) = A(k)x(k) + u(k), \\
x(0) = x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность множеств допустимых значений управлений системы, $u(k) \in \mathcal{U}(k)$ – управление, $\mathcal{A} = \{A(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность матриц системы. Предполагается, что для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество допустимых значений управлений $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым и компактным, 0 является относительно внутренней точкой $\mathcal{U}(k)$, $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A(k) \neq 0$. Для системы $(\mathcal{A},\mathcal{U})$ решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое можно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат, а также построить процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, который будем называть оптимальным. Предполагается, что $N_{\min} < \infty$.

Множество состояний, из которых систему $(\mathcal{A},\mathcal{U})$ можно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимого управления начиная с шага k, называется множеством 0-управляемости за N шагов:

$$
\mathcal{X}(N,k) = \begin{cases} \Big\{x(k) \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u(k+i) \in \mathcal{U}(k+i),\ i = \overline{0, N-1}\colon \\ \quad x(N+k) = 0\Big\},\ N \in \mathbb{N}, \\ \{0\},\ N = 0. \end{cases} \tag{2}
$$

Тогда $N_{\min}$ можно вычислить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$N_{\min} = \min\left\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon x_0 \in \mathcal{X}(N,0)\right\}. \tag{3}$$

Для двух произвольных $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n$ через $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ обозначим сумму множеств по Минковскому. Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ через $A\mathcal{X}$ обозначим образ $\mathcal{X}$ в результате действия линейного оператора, порожденного матрицей A:

$$A\mathcal{X} = \{Ax\colon x \in \mathcal{X}\}.$$

Построим аналитическое описание класса множеств 0-управляемости (2).

Лемма 1. Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2). *Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо представление*

$$\mathcal{X}(N,k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(-A^{-1}(k) \cdot \ldots \cdot A^{-1}(i+k)\right)\mathcal{U}(k+i).$$

Доказательства леммы 1 и всех последующих утверждений приведены в Приложении.

Следствие 1. Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$A(k) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathcal{U}(k) = \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

т.е. система (1) *является стационарной, семейство множеств $\{\mathcal{X}(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$ определяется соотношениями* (2).

Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливы следующие соотношения:

1) $\mathcal{X}(N,k) = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i}\mathcal{U}_0$,

2) $\mathcal{X}(N+1,k) = A^{-1}\mathcal{X}(N,k) + (-A^{-1}\mathcal{U}_0)$.

В публикациях [12, 13] подробно рассмотрен подход к решению задачи быстродействия для системы (1) в случае, когда на управление на каждом шаге наложены только линейные ограничения

$$\mathcal{U}(k) = \bigcap_{i=1}^{I(k)} \{u \in \mathbb{R}^n\colon (u, n^i(k)) \leqslant a_i(k)\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{5}$$

т.е. множество допустимых значений управлений на k-м шаге $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой полиэдр, ограниченный $I(k) \in \mathbb{N}$ числом гиперплоскостей с векторами нормалей $n^i(k) \in \mathbb{R}^n$, ориентированными вовне множества $\mathcal{U}(k)$. Известно, что в случае (5) задача быстродействия может быть сведена к задаче линейного программирования.

Обозначим через $\mu(x,\mathcal{X})$ функционал Минковского [25]:

$$\mu(x,\mathcal{X}) = \inf\{r \in \mathbb{R}\colon r > 0,\ x \in r\mathcal{X}\},$$

где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $k = \overline{0, N-1}$ определим отображение $S_{N,k}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$S_{N,k}(x) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}(k)} \mu(A(k)x + u, \mathcal{X}(N-k-1, k+1)).$$

Как продемонстрировано в [13], если известно представление

$$\mathcal{X}(N-k-1, k+1) = \operatorname{conv} \left\{ x^1(N-k-1, k+1), \ldots, x^M(N-k-1, k+1) \right\},$$

то вычисление отображения $S_{N,k}$ в случае (5) в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сводится к решению задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\min_{r, \lambda_1, \ldots, \lambda_M, u} r, \\
&A(k)x + u = \sum_{i=1}^{M} x^i(N-k-1, k+1)\lambda_i, \\
&\sum_{i=1}^{M} \lambda_i \leqslant r, \\
&0 \leqslant \lambda_i \leqslant r, \quad i = \overline{1, M}, \\
&(u, n^j(k)) \leqslant a_j(k), \quad j = \overline{1, I(k)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Также в [13] сформулирована и доказана теорема, определяющая вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия для системы (1) в случае (5).

Теорема 1 [13, теорема 5.1]. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условию* (5), *процесс* $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}}$ *определяется соотношениями*

$$\begin{aligned}
&x^*(k+1) = A(k)x^*(k) + S_{N_{\min},k}(x^*(k)), \quad k = \overline{0, N_{\min}-1}, \\
&x^*(0) = x_0.
\end{aligned}$$

Тогда

1) $x^*(N_{\min}) = 0$;

2) *оптимальное по быстродействию позиционное управление на k-м шаге имеет вид*

$$u^*(k, x^*(k)) = S_{N_{\min},k}(x^*(k)).$$

На основе теоремы 1 удается полностью решить задачу быстродействия для системы (1) в случае (5), используя только средства линейного программирования. Тем не менее аналогичный подход в общем случае, когда последовательность множеств допустимых значений управлений $\mathcal{U}$ состоит из произвольных выпуклых компактов, оказывается неприменимым, так как приводит к необходимости решения задачи выпуклого программирования общего вида. В результате оказывается актуальной следующая аппроксимационная задача.

Обозначим для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\{\underline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$ последовательности нижних и верхних оценок соответственно множества допустимых значений управлений $\mathcal{U}(k)$ системы (1) на k-м шаге, т.е. для каждого $m \in \mathbb{N}$ верно включение

$$\underline{\mathcal{U}_m}(k) \subset \mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}_m}(k).$$

Везде далее будем предполагать, что для всех $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ каждое из множеств $\underline{\mathcal{U}_m}(k), \overline{\mathcal{U}_m}(k) \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, содержащим 0. Тогда в общем случае справедливы оценки

$$\underline{N_{\min}}(m) \geqslant N_{\min} \geqslant \overline{N_{\min}}(m), \tag{7}$$

где $\underline{N_{\min}}(m)$, $\overline{N_{\min}}(m)$ – оптимальные значения критерия качества управления в задаче быстродействия для систем $\big(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{k=0}^{\infty}\big)$ и $\big(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{k=0}^{\infty}\big)$ соответственно.

Предполагая, что последовательности $\{\underline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$ построены на основе методов полиэдральной аппроксимации, требуется сформулировать достаточные условия, при которых для произвольной системы (1) найдется $m_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее равенству

$$\underline{N_{\min}}(m_0) = N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_0). \tag{8}$$

Таким образом, оптимальное управление для системы $\Big(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}_{m_0}}(k)\}_{k=0}^{\infty}\Big)$, вычисленное на основе теоремы 1, окажется не только гарантирующим, т.е. удовлетворяющим оценкам (7), но и оптимальным для исходной системы $(\mathcal{A},\mathcal{U})$.

Для рассмотрения вопросов сходимости исследуемые множества будем предполагать элементами метрического пространства компактов $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, наделенного метрикой Хаусдорфа:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \colon \mathcal{X} \text{ – компакт}\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max\left\{\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|\right\}.$$

Известно, что $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ является полным метрическим пространством [25].

3. Дополнительные построения

Для решения поставленной задачи сформулируем и докажем некоторые свойства пространства $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$.

Лемма 2 [23, лемма 4.3]. *Пусть отображение $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно. Тогда $A \colon \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ непрерывно, где для произвольного $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ в качестве $A(\mathcal{X})$ рассматривается образ множества $\mathcal{X}$.*

Лемма 3. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathbb{K}_n$ такие, что

$$\rho_H(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) < \varepsilon_1, \quad \rho_H(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) < \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Лемма 4. *Пусть для каждого $i = \overline{1, N}$ последовательность $\{\mathcal{X}_m^i\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \subset \mathbb{K}_n$ сходится к $\mathcal{X}^i \in \mathbb{K}_n$:*

$$\rho_H(\mathcal{X}_m^i, \mathcal{X}^i) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда

$$\rho_H\left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{X}_m^i, \sum_{i=1}^{N} \mathcal{X}^i\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

На основе лемм 2 и 4 можно сформулировать асимптотические свойства класса множеств 0-управляемости (2) системы (1). Обозначим через $\{\mathcal{X}_m(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$ класс множеств 0-управляемости вспомогательной системы $(\mathcal{A}, \{\mathcal{U}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $\{\mathcal{U}_m(k)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ сходится к множеству допустимых значений управлений $\mathcal{U}(k)$ системы* (1):

$$\rho_H(\mathcal{U}_m(k), \mathcal{U}(k)) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда для любых $N, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо соотношение

$$\rho_H(\mathcal{X}_m(N,k), \mathcal{X}(N,k)) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим через $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ замкнутый шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклые компакты, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$.*

Тогда $x_0 \in \mathcal{Y}$.

Следствие 3. *Пусть $\{\mathcal{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт такой, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ верно включение $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$,*

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда для всех $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 \in \mathcal{X}_N$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклые компакты, $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \varnothing$.*

Тогда $x_0 \notin \mathcal{Y}$.

Следствие 4. *Пусть $\{\mathcal{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт такой, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ верно включение $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_m$,*

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда для всех $x_0 \notin \mathcal{X}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 \notin \mathcal{X}_N$.

4. Достаточные условия оптимальности гарантирующего решения

Утверждения, доказанные в разделе 3, позволяют сформулировать достаточные условия, которым должен удовлетворять метод полиэдральной аппроксимации, чтобы на некоторой итерации $m_0 \in \mathbb{N}$ аппроксимационного алгоритма выполнилось равенство (8).

Согласно (3) величина $N_{\min}$ однозначно определяется посредством элементов семейства множеств 0-управляемости (2). В силу следствия 2 последовательность множеств 0-управляемости за $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ шагов вспомогательных систем $(\mathcal{A}, \{\mathcal{U}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$ сходится к $\mathcal{X}(N,k)$, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\mathcal{U}_m(k)\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к исходному множеству $\mathcal{U}(k)$. С другой стороны, следствия 3 и 4 гарантируют, что за конечное число итераций как внешней, так и внутренней аппроксимации удастся выполнить для каждого $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0)$ включение

$$x_0 \in \underline{\mathcal{X}_m}(N_{\min}, 0) \setminus \overline{\mathcal{X}_m}(N_{\min} - 1, 0),$$

откуда для заданного начального состояния следует равенство (8).

Сформулируем данный факт в виде следующих теорем.

Т е о р е м а 2. *Пусть для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $\{\underline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$, $\underline{\mathcal{U}_m}(k) \subset \mathcal{U}(k)$, $\rho_H(\underline{\mathcal{U}_m}(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m\to\infty} 0$.*

Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$, существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_1),$$

где $\underline{N_{\min}}(m_1)$ – оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы $\Big(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}_{m_1}}(k)\}_{k=0}^{\infty}\Big)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $\{\overline{\mathcal{U}_m}(k)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \subset \mathbb{K}_n$ – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}_m}(k)$, $\rho_H(\overline{\mathcal{U}_m}(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m\to\infty} 0$.*

Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$, существует $m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_2),$$

где $\overline{N_{\min}}(m_2)$ – оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}_{m_2}}(k)\}_{k=0}^{\infty})$.

С л е д с т в и е 5. *Пусть выполняются условия теорем 2 и 3 одновременно. Тогда существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$\overline{N_{\min}}(m_0) = N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_0).$$

Основным результатом раздела 4 являются сформулированные и доказанные в виде теорем 2 и 3 достаточные условия того, что применение методов полиэдральной аппроксимации позволит свести общий случай задачи быстродействия для исходной системы (1) к случаю (5), для которого оптимальный процесс может быть вычислен исключительно средствами линейного программирования на основе теоремы 1. Если метод полиэдральной аппроксимации гарантирует сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа к аппроксимируемому множеству, то почти для всех начальных состояний гарантирующее решение окажется также и оптимальным по быстродействию за конечное число итераций аппроксимационного алгоритма.

5. Численные расчеты величины $N_{\min}$

Проведем ряд численных экспериментов для демонстрации прикладного значения результатов раздела 4. Для наглядности все рассматриваемые системы вида (1) будут предполагаться стационарными, т.е. удовлетворяющими условиям (4). В качестве алгоритма полиэдральной аппроксимации для построения последовательностей $\{\underline{\mathcal{U}_m}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\overline{\mathcal{U}_m}\}_{m=1}^{\infty}$ используется алгоритм сближающихся многогранников. Такой выбор обусловлен тем, что, как продемонстрировано в [20], он обеспечивает сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа (в пространстве $\mathbb{K}_n$) к исходному множеству допустимых значений управлений $\mathcal{U}_0$. С другой стороны, данный алгоритм позволяет строить последовательности внутренних и внешних аппроксимаций одновременно. Более подробно описание алгоритма сближающихся многогранников и исследование его свойств приведено в [20], сопоставление сложности с другими методами полиэдральной аппроксимации подробно исследуется в [19].

Пример 1. Продемонстрируем поэтапное вычисление величины $N_{\min}$ для линейной дискретной системы, удовлетворяющей условию (4), на основе теорем 2, 3 и следствия 5. Пусть размерность фазового пространства $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \left\{ (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \colon u_1^2 + \frac{u_2^2}{4} \leqslant 1 \right\}.$$

В качестве начального состояния рассмотрим вектор

$$x_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Многогранники $\underline{\mathcal{U}_3}$ и $\overline{\mathcal{U}_3}$, представляющие собой внутреннюю и внешнюю оценки множества $\mathcal{U}_0$ соответственно, имеют следующий вид:

$$\underline{\mathcal{U}_3} = \mathrm{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0{,}8407 \\ 1{,}0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0{,}8893 \\ 0{,}9146 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}0486 \\ -1{,}9976 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}_3} = \mathrm{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0{,}0972 \\ 3{,}9953 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1{,}6814 \\ -2{,}1660 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1{,}7786 \\ -1{,}8292 \end{pmatrix} \right\}.$$

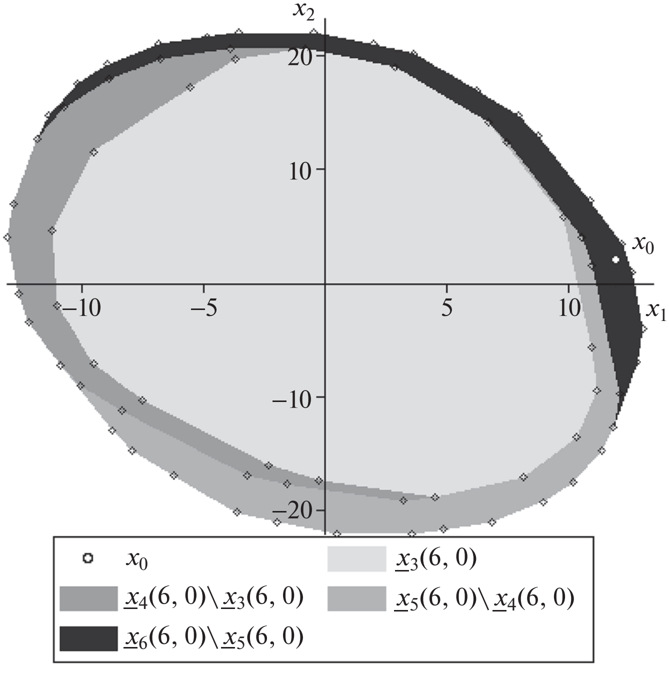


Рис. 1. Множества $\{\underline{\mathcal{X}_m}(6,0)\}_{m=3}^{6}$ и начальное состояние x_0.

Тогда на основе следствия 1 можно построить классы множеств 0-управляемости $\{\underline{\mathcal{X}_3}(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$, $\{\overline{\mathcal{X}_3}(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$ для вспомогательных систем $\big(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}_3}\}_{k=0}^{\infty}\big)$, $\big(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}_3}\}_{k=0}^{\infty}\big)$. Величины $\underline{N_{\min}}(3) = 7$, $\overline{N_{\min}}(3) = 5$ вычислены на основе соотношения (3). Множества $\underline{\mathcal{X}_3}(7,0)$ и $\overline{\mathcal{X}_3}(5,0)$ представляют собой многогранники с 21-й и 15-ю вершинами соответственно, иллюстрации которых представлены на рис. 1.

Поскольку при $m = 3$ равенство (8) не достигнуто, уточним внутреннюю и внешнюю аппроксимации $\mathcal{U}_0$ при помощи алгоритма сближающихся многогранников:

$$\underline{\mathcal{U}_4} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}8407\\1{,}0830\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8893\\0{,}9146\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0{,}0486\\-1{,}9976\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}0486\\1{,}9976\end{pmatrix}\right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}_4} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}5281\\2{,}0538\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}6253\\1{,}9415\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1{,}6814\\-2{,}1660\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1{,}7786\\-1{,}8292\end{pmatrix}\right\}.$$

Аналогичным образом вычислим оптимальные значения критерия качества управления для вспомогательных систем: $\underline{N_{\min}}(4) = 7$, $\overline{N_{\min}}(4) = 5$. Множества $\underline{\mathcal{X}_4}(7,0)$ и $\overline{\mathcal{X}_4}(5,0)$ представляют собой многогранники с 28-ю и 20-ю вершинами соответственно.

Продолжим процесс уточнения множества $\mathcal{U}_0$ при помощи алгоритма сближающихся многогранников до тех пор, пока неравенство (7) не перейдет в равенство (8). Приводим далее результаты расчетов.

$$\underline{\mathcal{U}_5} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}8407\\1{,}0830\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8893\\0{,}9146\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0{,}0486\\-1{,}9976\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}0486\\1{,}9976\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8407\\-1{,}0830\end{pmatrix}\right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}_5} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}5281\\2{,}0538\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}6253\\1{,}9415\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1{,}1533\\-0{,}1123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}5281\\-2{,}0537\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1{,}7786\\-1{,}8292\end{pmatrix}\right\},$$

$$\underline{N_{\min}}(5) = 7, \quad \overline{N_{\min}}(5) = 5.$$

Множества $\underline{\mathcal{X}_5}(7,0)$ и $\overline{\mathcal{X}_5}(5,0)$ представляют собой многогранники с 28-ю и 20-ю вершинами соответственно.

$$\underline{\mathcal{U}_6} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}8407\\1{,}0830\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8893\\0{,}9146\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0{,}0486\\-1{,}9976\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}-0{,}0486\\1,9976\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}8407\\-1{,}0830\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0{,}8893\\-0{,}9146\end{pmatrix}\right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}_6} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0{,}5281\\2{,}0538\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0{,}6253\\1{,}9415\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1{,}1533\\-0{,}1123\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}-0{,}5281\\-2{,}0537\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0{,}6253\\-1{,}9415\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1{,}1533\\0{,}1123\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\underline{N_{\min}}(6) = 6, \quad \overline{N_{\min}}(6) = 6.$$

Множества $\underline{\mathcal{X}_6}(6,0)$ и $\overline{\mathcal{X}_6}(6,0)$ представляют собой многогранники с 36-ю вершинами каждый.

Таким образом, удается вычислить для выбранного x_0 величину $N_{\min} = 6$ для исходной системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ в соответствии со следствием 5. При этом также справедливо равенство

$$m_1 = m_2 = m_0 = 5.$$

Процесс сходимости величин $\underline{N_{\min}}(m)$ и $\overline{N_{\min}}(m)$ к $N_{\min}$ продемонстрирован на рис. 1 и 2 соответственно. На рис. 1 различными цветами изображен набор возрастающих по включению множеств $\{\underline{\mathcal{X}_m}(6,0)\}_{m=3}^{6}$. Множество $\underline{\mathcal{X}_6}(6,0)$ при этом является первым множеством, содержащим начальное состояние x_0. Данное включение гарантирует выполнение неравенства $N_{\min} \geqslant 6$. На рис. 2 различными цветами изображен набор убывающих по включению множеств $\{\overline{\mathcal{X}_m}(5,0)\}_{m=3}^{6}$. Множество $\overline{\mathcal{X}_6}(5,0)$ при этом является первым множеством, не содержащим начального состояния x_0, что гарантирует выполнение неравенства $N_{\min} > 5$.

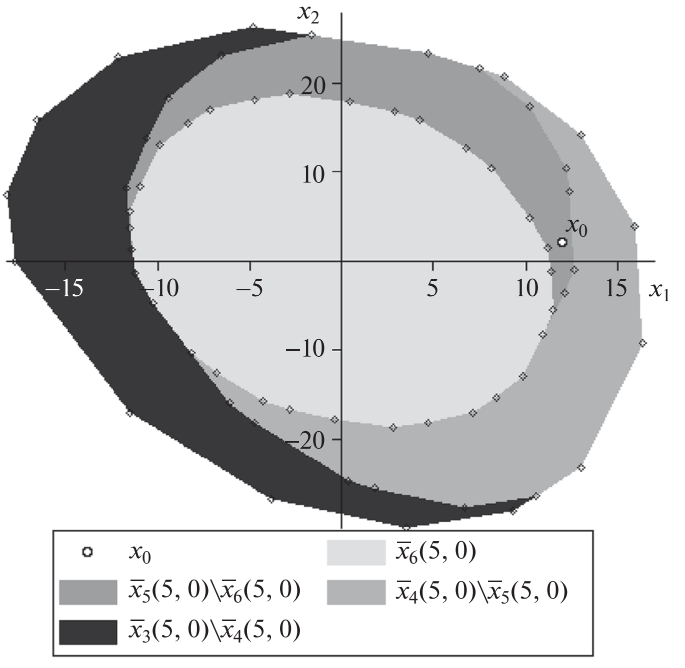


Рис. 2. Множества $\{\overline{\mathcal{X}_m}(5,0)\}_{m=3}^{6}$ и начальное состояние x_0.

Пример 2. Рассмотрим линейную дискретную систему (1), удовлетворяющую условию стационарности (4). Пусть размерность фазового пространства $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \left\{ (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \colon u_1^2 + \frac{u_2^2}{4} \leqslant 1 \right\}.$$

В качестве начальных состояний рассмотрим следующие три вектора:

$$x_{0,1} = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 9{,}5 \end{pmatrix}, \quad x_{0,2} = \begin{pmatrix} 9{,}9 \\ 9{,}9 \end{pmatrix}, \quad x_{0,3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Выбор данных начальных состояний обусловлен их расположением относительно границы множества 0-управляемости $\mathcal{X}(1,0)$. Согласно лемме 1 и свойствам эллиптических множеств [26] верно следующее представление:

$$\mathcal{X}(1,0) = -A^{-1}\mathcal{U}_0 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \colon u^{\mathrm{T}} H u \leqslant 1 \right\}, \quad H = \begin{pmatrix} 0{,}0125 & -0{,}0075 \\ -0{,}0075 & 0{,}0125 \end{pmatrix}.$$

Тогда верны включения $x_{0,1}, x_{0,2} \in \operatorname{int} \mathcal{X}(1,0)$, $x_{0,3} \in \partial \mathcal{X}(1,0)$. В силу (3) $N_{\min} = 1$ для всех трех предложенных начальных состояний. Тем не менее каждое из них находится на различном расстоянии от границы множества $\mathcal{X}(1,0)$, что влияет на сложность вычисления величины $N_{\min}$ при помощи

Таблица 1

x_0	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	$x_{0,3}$
m_1	10	18	–
m_2	4	4	4

следствия 5 и равенства (8). В качестве начального приближения в алгоритме сближающихся многогранников выбраны

$$\underline{\mathcal{U}_4} = \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix} -0{,}985726 \\ -0{,}336713 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}168356 \\ -1{,}971452 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}985726 \\ 0{,}336713 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0{,}168356 \\ 1{,}971452 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}_4} = \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix} -0{,}817370 \\ -2{,}308164 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1{,}154083 \\ -1{,}634740 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}817370 \\ 2{,}308164 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1{,}154083 \\ 1{,}634740 \end{pmatrix}\right\}.$$

Результаты расчетов величин m_1, m_2 из теорем 2, 3 приведены в табл. 1.

При этом величину m_1 для начального состояния $x_{0,3}$ вычислить не удается вплоть до аппроксимации $\underline{\mathcal{U}_{203}}$, т.е. $\underline{N_{\min}}(203) = 2$. Данный факт связан с тем, что теоремы 2 и 3 не гарантируют достижимость равенства (8) для начальных состояний, расположенных на границах множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N,0)\}_{N=0}^{\infty}$, в том числе и для $x_{0,3}$. Однако при этом можно построить субоптимальное решение задачи быстродействия при помощи теоремы 1, используя $\underline{\mathcal{U}_m}$ вместо множества $\mathcal{U}_0$, оценка точности критерия качества управления может быть вычислена в соответствии с неравенством (7) как величина $\underline{N_{\min}}(m) - \overline{N_{\min}}(m)$. В частности, для $x_{0,3}$ при $m = 203$ точность составляет $\underline{N_{\min}}(203) - \overline{N_{\min}}(203) = 1$.

6. Задача демпфирования высотного сооружения

Продемонстрируем эффективность разработанных методов на примере решения задачи оптимального по быстродействию демпфирования высотного сооружения.

Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, которые влияют на устойчивость и в конечном счете приводят к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе приобретенных изменений, т.е. задача управления системой по принципу обратной связи. На сегодняшний день наиболее активно применяются два принципиально различных способа организации такого управления: динамическое гашение колебаний с использованием дополнительных материальных тел и виброзащита, предполагающая изоляцию сооружения от подвижного основания. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании дополнительных технических этажей с размещением некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), которая будет перемещаться в соответствии с заданным законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, которая позволит оказывать управляющее воздействие на смежные этажи.

В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, предполагается одномерная последовательность упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек, поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы согласно модели, предложенной в [27], имеют вид

$$
\begin{cases}
m\ddot{\xi}_1(t) = -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\
\vdots \\
m\ddot{\xi}_i(t) = -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + \\
\qquad\qquad + c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\
\vdots \\
m\ddot{\xi}_n(t) = -2b\dot{\xi}_n(t) - 2c\xi_n(t) + b\dot{\xi}_{n-1}(t) + c\xi_{n-1}(t) + U_n(t),
\end{cases}
\tag{9}
$$

где ξ_i – координата i-й материальной точки относительно основания, U_i – управляющая сила, приложенная к i-й материальной точке, m – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей соответственно.

Введем обозначения:

$$
y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},
$$

$$
\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.
$$

Тогда уравнения (9) можно привести к каноническому виду

$$
\dot{y}(t) = \tilde{A}y(t) + v(t),
$$

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}.
$$

Пусть высота здания составляет 6 этажей, т.е. $n = 6$. Также пусть $\beta = 1$, $\omega^2 = 100$. Значение параметров выбраны на основе модели, описанной в [27]. Полагая, что управление $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией, меняющей свои значения через промежутки времени Δt, можно перейти к дискретному аналогу системы (9), обозначив

$$x(k) = y(k\Delta t), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ – матрица фундаментальной системы решений (9). Тогда, полагая $v(k\Delta t) = v_k$, справедливо представление

$$x(k+1) = \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)x(k) + \left(\Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)\tilde{A}^{-1} - \tilde{A}^{-1}\right) v_k.$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} A = \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0), \\ B = \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)\tilde{A}^{-1} - \tilde{A}^{-1}, \\ u(k) = Bv_k, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{gathered}$$

Окончательно получим систему управления, эквивалентную виду (1):

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ x(0) = y_0, \quad u(k) \in B\mathcal{U}_0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ – матрица дискретизированной системы, $B\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^{12}$ – множество допустимых значений управлений, $x(k) \in \mathbb{R}^{12}$ – состояние системы на k-м шаге. Данная система является стационарной, что можно рассматривать как частный случай нестационарной системы (1).

Предполагается, что демпфирующие устройства расположены на 2-м, 4-м и 5-м этажах. В качестве множества допустимых значений управлений рассматривается трехмерный эллипсоид в $\mathbb{R}^{12}$:

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{12} \colon u_8^2 + \frac{16}{9}u_{10}^2 + \frac{9}{4}u_{11}^2 \leqslant 1, \ u_i = 0, \ i \notin \{8, 10, 11\} \right\}.$$

Для аппроксимации $\mathcal{U}_0$ используется алгоритм сближающихся многогранников [20], который позволяет построить последовательности $\{\underline{\mathcal{U}_m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\overline{\mathcal{U}_m}\}_{m=1}^{\infty}$ верхних и нижних оценок $B\mathcal{U}_0$, сходящиеся к исходному множеству $B\mathcal{U}_0$ в смысле расстояния Хаусдорфа. Тогда в силу теорем 2, 3 и следствия 5 почти для всех начальных состояний также должны быть верны сходимости

$$\begin{gathered} \overline{N_{\min}}(m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} N_{\min}, \\ \underline{N_{\min}}(m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} N_{\min}. \end{gathered}$$

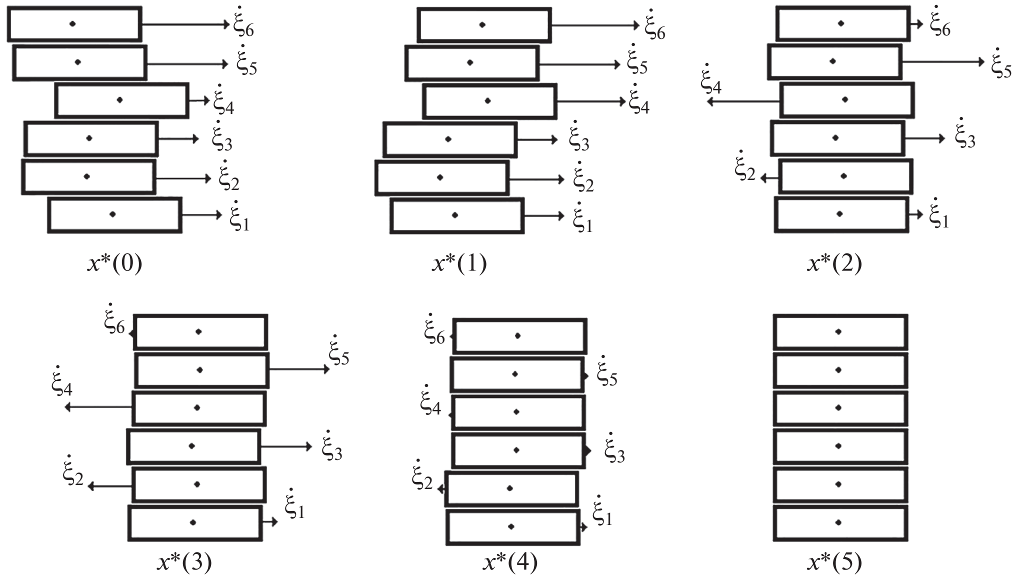


Рис. 3. Оптимальная траектория системы (10).

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Здесь через $m \in \mathbb{N}$ обозначены число вершин многогранника $\underline{\mathcal{U}_m}$ и число гиперграней многогранника $\overline{\mathcal{U}_m}$. На шаге $m_0 = 8$ аппроксимационного алгоритма неравенство (7) переходит в равенство (8), откуда следует оптимальность управления, вычисленного на основе теоремы 1 для вспомогательной системы $\left(\mathcal{A}, \{B\underline{\mathcal{U}_{m_0}}\}_{k=0}^{\infty}\right)$, в задаче быстродействия для исходной системы управления (10),

$$N_{\min} = 5.$$

Также на основе теоремы 1 построен оптимальный процесс системы $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$. Результаты расчетов представлены в табл. 3 и 4. На рис. 3 схематично изображена оптимальная траектория системы (10).

Переход от непрерывной системы (9) к дискретной системе (10) выполнен без погрешностей и основан на возможности аналитически построить решение системы линейных дифференциальных уравнений (9) в предположении, что управление является кусочно-постоянным. В связи с этим фактом траектория, представленная на рис. 3, также визуализирует траекторию исходной непрерывной системы (9).

Таблица 2

m	5	6	7	8
$\overline{N_{\min}}(m)$	5	5	5	5
$\underline{N_{\min}}(m)$	8	8	6	5

Таблица 3. Оптимальная траектория системы

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^*(k)$	0,0001	−0,0031	−0,0135	−0,0111	−0,0012e-03	0
$x_2^*(k)$	−0,0038	−0,0162	−0,0109	0,0038	0,024e-03	0
$x_3^*(k)$	−0,0156	−0,0013	0,0035	−0,0151	0,021e-03	0
$x_4^*(k)$	−0,0037	−0,0169	−0,0198	−0,0168	0,015e-03	0
$x_5^*(k)$	−0,0011	−0,0147	−0,0352	−0,0315	0,0345e-03	0
$x_6^*(k)$	−0,0158	−0,0212	−0,0215	−0,0335	0,032e-03	0
$x_7^*(k)$	0,0026	0,0747	0,0915	−0,1694	−0,015e-03	0
$x_8^*(k)$	0,1099	0,0866	−0,1702	−0,0279	−0,052e-03	0
$x_9^*(k)$	−0,2835	−0,4534	−0,1461	−0,1240	−0,065e-03	0
$x_{10}^*(k)$	0,1024	0,1161	−0,0423	0,0302	0,01e-03	0
$x_{11}^*(k)$	0,0568	0,2169	0,1296	−0,1887	−0,014e-03	0
$x_{12}^*(k)$	0,1112	0,2312	0,0975	0,0426	0,026e-03	0

Таблица 4. Оптимальное управление

k	0	1	2	3	4
$u_1^*(k)$	0,0003	0,0032	0,0104	−0,0024	−0,0245
$u_2^*(k)$	0,0032	0,0123	−0,0053	−0,0148	0,0127
$u_3^*(k)$	0,0222	−0,0144	−0,0047	0,0186	−0,0006
$u_4^*(k)$	0,0037	0,0131	0,0030	−0,0031	0,0079
$u_5^*(k)$	0,0037	0,0137	0,0205	−0,0037	−0,0187
$u_6^*(k)$	0,0132	0,0054	0,0003	0,0120	0,0129
$u_7^*(k)$	0,0117	−0,0721	−0,0168	0,2609	0,0484
$u_8^*(k)$	0,0943	0,0232	0,2568	−0,1423	−0,2448
$u_9^*(k)$	−0,1508	0,1698	−0,3072	−0,0221	0,2824
$u_{10}^*(k)$	0,1069	−0,0136	0,1583	−0,0724	−0,0385
$u_{11}^*(k)$	0,0898	−0,1601	0,0873	0,3183	−0,1186
$u_{12}^*(k)$	0,1261	−0,1201	0,1337	0,0549	−0,2133

7. Заключение

В статье рассмотрена задача быстродействия для линейной дискретной нестационарной системы. Множества допустимых значений управлений на каждом шаге предполагаются выпуклыми компактами. Предложен метод сведения общего случая задачи быстродействия к случаю линейных ограничений на управление посредством полиэдральной аппроксимации множеств допустимых значений управлений. Сформулировано и доказано, что полученное таким образом гарантирующее решение сходится к оптимальному, если последовательность аппроксимирующих многогранников на каждом шаге сходится в смысле расстояния Хаусдорфа к истинному множеству допустимых значений управлений.

Отдельно рассмотрена задача наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности. Произведена дискретизация непрерывной системы. Для заданного множества допустимых значений управлений в виде эллипсоида проведена аппроксимация по предложенным алгоритмам и приведены иллюстрации. Найдены оптимальное управление и траектория системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Включение $x \in \mathcal{X}(N,k)$ в силу определения класса множеств 0-управляемости эквивалентно существованию векторов

$$u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1)$$

таких, что

$$\begin{gathered} 0 = x(N+k) = A(N+k-1)x(N+k-1) + u(N+k-1) = \\ = A(N+k-1)A(N+k-2)x(N+k-2) + \\ + A(N+k-1)u(N+k-2) + u(N+k-1) = \ldots = \\ = A(N+k-1) \cdot \ldots \cdot A(k)x + A(N+k-1) \cdot \ldots \cdot A(k+1)u(k) + \\ + A(N+k-1) \cdot \ldots \cdot A(k+2)u(k+1) + \ldots + u(N+k-1). \end{gathered}$$

Тогда в силу невырожденности матриц из последовательности $\mathcal{A}$

$$x = -A^{-1}(k) \cdot \ldots \cdot A^{-1}(N+k-1)u(N+k-1) - \ldots - A^{-1}(k)u(k),$$

что равносильно утверждению леммы 1.

Доказательство следствия 1. Доказательство следует непосредственно из леммы 1.

Доказательство леммы 3. В силу определения алгебраической суммы множеств верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} \rho_H(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2) = \\ = \max\left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1} \inf_{y \in \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2} \inf_{x \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1} \|x - y\| \right\} = \\ = \max\left\{ \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ y_1 \in \mathcal{Y}_1}} \inf_{\substack{x_2 \in \mathcal{X}_2 \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2}} \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\|; \right. \\ \left. \sup_{\substack{x_2 \in \mathcal{X}_2 \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2}} \inf_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ y_1 \in \mathcal{Y}_1}} \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \right\} \leqslant \\ \leqslant \max\left\{ \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \|x_1 - x_2\| + \sup_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \inf_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \|y_1 - y_2\|; \right. \\ \left. \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \|x_1 - x_2\| + \sup_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \inf_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \|y_1 - y_2\| \right\} \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \max\left\{\sup_{x_1\in\mathcal{X}_1}\inf_{x_2\in\mathcal{X}_2}\|x_1-x_2\|;\ \sup_{x_2\in\mathcal{X}_2}\inf_{x_1\in\mathcal{X}_1}\|x_1-x_2\|\right\}+$$
$$+\max\left\{\sup_{y_1\in\mathcal{Y}_1}\inf_{y_2\in\mathcal{Y}_2}\|y_1-y_2\|;\ \sup_{y_2\in\mathcal{Y}_2}\inf_{y_1\in\mathcal{Y}_1}\|y_1-y_2\|\right\}=$$
$$=\rho_H(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)+\rho_H(\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2)<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. По определению сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $i = \overline{1, N}$ справедливо неравенство $\rho_H(\mathcal{X}^i_m, \mathcal{X}^i) < \frac{\varepsilon}{N}$.

Тогда в силу леммы 3

$$\rho_H\left(\sum_{i=1}^{N}\mathcal{X}^i_m, \sum_{i=1}^{N}\mathcal{X}^i\right) < \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,$$

откуда согласно определению предела следует утверждение леммы 4.

Доказательство следствия 2. В силу леммы 2 для каждого $i = \overline{0, N-1}$ верно, что

$$\rho_H\big((-A^{-1}(k)\cdot\ldots\cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}_m(k+i),\\ (-A^{-1}(k)\cdot\ldots\cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}(k+i)\big) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Тогда в силу лемм 1 и 4 верны соотношения

$$\mathcal{X}_m(N,k) = \sum_{i=0}^{N-1}(-A^{-1}(k)\cdot\ldots\cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}_m(k+i) \xrightarrow{m\to\infty}$$
$$\xrightarrow{m\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1}(-A^{-1}(k)\cdot\ldots\cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}(k+i) = \mathcal{X}(N,k).$$

Доказательство леммы 5. Предположим, что $x_0 \notin \mathcal{Y}$. Пусть

$$y_1 = \arg\min_{y\in\mathcal{Y}}\|x_0 - y\|.$$

Определим $x^* \in \mathcal{X}$ из условий

$$\begin{cases} x^* = x_0 + \beta(x_0 - y_1), \\ x^* \in \partial\mathcal{X}, \end{cases} \tag{П.1}$$

т.е. x^* – точка пересечения границы множества $\mathcal{X}$ и луча, выходящего из точки y_1 и проходящего через x_0. Поскольку $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$, то $\|x_0 - x^*\| \geqslant \varepsilon$. Так как $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, существует $y_2 \in B_\varepsilon(x^*) \cap \mathcal{Y}$, т.е. $\|x^* - y_2\| \leqslant \varepsilon$.

Рассмотрим следующую величину:

$$(y_2 - x_0, x^* - x_0) = (y_2 - x^* + x^* - x_0, x^* - x_0) = \\ = (x^* - x_0, x^* - x_0) + (y_2 - x^*, x^* - x_0).$$

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$-\sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)(y_2 - x^*, y_2 - x^*)} \leqslant (y_2 - x^*, x^* - x_0),$$
$$(x^* - x_0, x^* - x_0) - \sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)(y_2 - x^*, y_2 - x^*)} \leqslant (y_2 - x_0, x^* - x_0),$$
$$\sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)}\left(\sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)} - \sqrt{(y_2 - x^*, y_2 - x^*)}\right) > 0.$$

Отсюда

$$(y_2 - x_0, x^* - x_0) > 0. \tag{П.2}$$

Представим y_1 как линейную комбинацию: $y_1 = x_0 + \alpha(x_0 - x^*)$. В силу (П.1) $\alpha > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (x_0 + \alpha(x_0 - x^*) - x_0, y_2 - x_0) = \\ = (\alpha(x_0 - x^*), y_2 - x_0) = -\alpha(x^* - x_0, y_2 - x_0).$$

С учетом (П.2)

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) < 0.$$

Обозначим через y^* проекцию x_0 на аффинную оболочку y_1 и y_2:

$$y^* = \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}(y_2 - y_1) + y_1.$$

Обозначим

$$\lambda = 1 - \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.$$

Тогда верно представление

$$y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2.$$

Докажем, что $\lambda \in [0; 1]$.

$$0 > (y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (y_1 - x_0, y_2 - y_1 + y_1 - x_0) = \\ + (y_1 - x_0, y_2 - y_1) + (y_1 - x_0, y_1 - x_0),$$
$$0 \leqslant (y_1 - x_0, y_1 - x_0) < (x_0 - y_1, y_2 - y_1) \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x_0 - y_1, x_0 - y_1)(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.$$

Отсюда

$$(x_0 - y_1, y_2 - y_1) > 0,$$
$$(x_0 - y_1, x_0 - y_1) < (y_2 - y_1, y_2 - y_1),$$

что эквивалентно $\lambda \in [0;1]$. Поскольку $\mathcal{Y}$ выпуклое, $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$, то $y^* \in \mathcal{Y}$. При этом $\|x_0 - y^*\| < \|x_0 - y_1\|$. С учетом определения y_1 получаем противоречие. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{Y}$. Лемма 5 доказана.

Доказательство следствия 3. Поскольку $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$. В силу условия $\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$\rho_H(\mathcal{X}_N, \mathcal{X}) < \varepsilon.$$

Тогда в силу леммы 5 верно включение $x_0 \in \mathcal{X}_N$.

Доказательство леммы 6. Предположим, что $x_0 \in \mathcal{Y}$. Пусть

$$y_1 = \arg\min_{y\in\mathcal{X}} \|y - x_0\|.$$

Определим $x^* \in \mathcal{Y}$ из условий

$$\begin{cases} x^* = x_0 + \beta(x_0 - y_1), \\ x^* \in \partial\mathcal{Y}, \end{cases} \tag{П.3}$$

т.е. x^* – точка пересечения границы множества $\mathcal{Y}$ и луча, выходящего из точки y_1 и проходящего через x_0. Так как $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, то существует $y_2 \in \mathcal{X}$ такой, что $\|x^* - y_2\| \leqslant \varepsilon$. В силу того что $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \varnothing$, справедливы неравенства $\|x_0 - y_1\| \geqslant \varepsilon$, $\|x_0 - y_2\| \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим следующую величину:

$$(y_2 - x_0, x^* - x_0) = (y_2 - x_0, x^* - x_0 + y_2 - y_2) =$$
$$= (y_2 - x_0, y_2 - x_0) + (y_2 - x_0, x^* - y_2).$$

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$-\sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)(x^* - y_2, x^* - y_2)} \leqslant (y_2 - x_0, x^* - y_2),$$
$$0 \leqslant \sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)}\left(\sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)} - \sqrt{(x^* - y_2, x^* - y_2)}\right) =$$
$$= (y_2 - x_0, y_2 - x_0) - \sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)(x^* - y_2, x^* - y_2)} \leqslant (y_2 - x_0, x^* - x_0).$$

Отсюда

$$(y_2 - x_0, x^* - x_0) \geqslant 0. \tag{П.4}$$

Представим y_1 как линейную комбинацию: $y_1 = x_0 + \alpha(x_0 - x^*)$. В силу (П.3) $\alpha > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (x_0 + \alpha(x_0 - x^*) - x_0, y_2 - x_0) =$$
$$= (\alpha(x_0 - x^*), y_2 - x_0) = -\alpha(x^* - x_0, y_2 - x_0) < 0.$$

С учетом (П.4)

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) < 0.$$

Обозначим через y^* проекцию x_0 на аффинную оболочку y_2 и y_1:

$$y^* = \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}(y_2 - y_1) + y_1.$$

Обозначим

$$\lambda = 1 - \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.$$

Тогда

$$y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2.$$

Докажем, что $\lambda \in [0; 1]$.

$$\begin{gathered} 0 > (y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (y_1 - x_0, y_2 - y_1 + y_1 - x_0) = \\ = (y_1 - x_0, y_2 - y_1) + (y_1 - x_0, y_1 - x_0), \\ 0 \leqslant (y_1 - x_0, y_1 - x_0) < (x_0 - y_1, y_2 - y_1) \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x_0 - y_1, x_0 - y_1)(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}. \end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} (x_0 - y_1, y_2 - y_1) > 0, \\ (x_0 - y_1, x_0 - y_1) < (y_2 - y_1, y_2 - y_1), \end{gathered}$$

что эквивалентно условию $\lambda \in [0; 1]$. Поскольку $\mathcal{X}$ выпуклое, $y_1, y_2 \in \mathcal{X}$, то $y^* \in \mathcal{X}$. При этом $\|x_0 - y^*\| < \|x_0 - y_1\|$. Получаем противоречие. Следовательно, $x_0 \notin \mathcal{Y}$. Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 4. Поскольку $x_0 \notin \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$, то согласно аксиоме отделимости существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \varnothing$. В силу условия $\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$\rho_H(\mathcal{X}_N, \mathcal{X}) < \varepsilon.$$

Тогда в силу леммы 6 верно, что $x_0 \notin \mathcal{X}_N$.

Доказательство теоремы 2. Условие $N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_1)$ в силу (3) и (7) эквивалентно включению $x_0 \in \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \cap \underline{\mathcal{X}_m}(N_{\min}, 0)$.

В силу следствия 2

$$\rho_H\left(\underline{\mathcal{X}_m}(N_{\min}, 0), \mathcal{X}(N_{\min}, 0)\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда согласно следствию 3 для любого $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}(N_{\min}, 0)$ существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 \in \underline{\mathcal{X}_{m_1}}(N_{\min}, k)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим точку

$$x_0 \in \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0).$$

Тогда $\mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0) \subset \overline{\mathcal{X}_m}(N_{\min} - 1, 0)$ и согласно следствию 2

$$\rho_H \left(\mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0), \overline{\mathcal{X}_m}(N_{\min} - 1, 0) \right) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда в силу следствия 4 существует $m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 \notin \overline{\mathcal{X}_{m_2}}(N_{\min} - 1, 0)$, откуда с учетом (3) и (7) следует утверждение теоремы 3.

Доказательство следствия 5. В силу теорем 2 и 3 для выполнения следствия 5 достаточно выбрать $m_0 = \max\{m_1; m_2\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
4. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
5. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
6. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
7. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
9. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.

   Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
10. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.

    Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
11. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.

    Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.

12. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30.

Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.

13. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2015. № 83. Доступ в журн.

http://trudymai.ru/published.php

14. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.

15. *Kurzhanskiy A.F., Varaiya P.* Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbancens // Optim. Method Software. 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746.

16. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статистических стохастических систем // АиТ. 2020. № 4. С. 21–36.

Kibzun A.I., Ivanov S.V., Stepanova A.S. Construction of Confidence Absorbing Set for Analysis of Static Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 5. P. 589–601.

17. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.

18. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // АиТ. 2018. № 12. С. 142–166.

Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. The Decomposition Problem for the Set of Paths in a Directed Graph and Its Application // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 12. P. 2217–2236.

19. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010.

20. *Каменев Г. К.* Алгоритм сближающихся многогранников // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 4. С. 134–147.

21. *Sonnevend G.* Asymptotically Optimal, Sequential Methods for the Approximation of Convex, Compact Sets in R-n in the Hausdorff Metrics // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. 1980. V. 35. No. 2. P. 1075–1089.

22. *Ludwig M.* Asymptotic Approximation of Smooth Convex Bodies by General Polytopes // Mathematika. 1999. V. 46. P. 103–125.

23. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2016. № 87. Доступ в журн. http://trudymai.ru/published.php

24. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 83–98.
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
26. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
27. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 21.06.2020

После доработки 03.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

© 2021 г. **М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ УЛУЧШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ[1]

Исследуется задача оптимизации линейной по состоянию и нелинейной по управлению динамической стохастической системы, функционирующей на бесконечном интервале времени, относительно квадратичного функционала качества. Предлагается несколько алгоритмов последовательного улучшения заданного нестационарного программного управления. Они могут быть использованы, в частности, для построения качественных динамических регуляторов неполной обратной связи в детерминированных линейных стационарных системах. Для обоснования алгоритмов улучшения сформулирован и доказан ряд строгих утверждений относительно исходной оптимизационной проблемы.

Ключевые слова: динамическая обратная связь, бесконечный интервал времени, нелинейная стохастическая система, структурные ограничения.

DOI: 10.31857/S0005231021120059

1. Введение

Предположим, что исследуется задача управления линейной динамической системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

с заданными начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и матрицами системы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, в которой качество управления оценивается значением функционала

$$J(u) = \int\limits_0^{+\infty} \big(x(t)^{\mathrm{T}} Qx(t) + u(t)^{\mathrm{T}} Eu(t)\big)\, dt \tag{2}$$

всюду, где он определен. Здесь $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – положительно определенные матрицы.

Будем считать, что функцию управления $u(t)$ необходимо построить в виде линейного регулятора

$$u(t) = P(t)x(t),$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

так что (1)–(2) преобразуются к виду

$$\dot{x}(t) = (A + BP(t))x(t), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$J(P) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}}(Q + P(t)^{\mathrm{T}}EP(t))x(t)dt. \tag{4}$$

Пусть, для начала, на матричную функцию $P(t)$ не наложено никаких ограничений, кроме естественного требования сходимости несобственного интеграла в правой части (4). Множество всех таких функций $P(t)$ обозначим через $\mathcal{S}$. В этом случае задача $J(P) \to \min_{P\in\mathcal{S}}$ совпадает с классической линейно-квадратичной задачей оптимального регулирования на бесконечном временном интервале, ее решение хорошо известно из теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) и является постоянной по времени матричной функцией $P(t) \equiv P^*$, одной и той же для любого x_0.

Предположим теперь, что дополнительно требуется удовлетворить некоторый набор структурных ограничений на функцию $P(t)$ (например, $P_{ij}(t) \equiv$ $\equiv 0$ для каких-то i, j и т.п.). Оказывается, что в этом случае решение задачи $J(P) \to \min_{P\in\mathcal{S}}$ на соответствующем множестве $\mathcal{S}$ может не быть постоянной матрицей. Это обстоятельство несколько удивительно ввиду того, что все параметры A, B, Q и E в задаче остаются стационарными, но стационарный регулятор уже не является оптимальным среди всех возможных. Возникает естественная потребность в алгоритме построения оптимального нестационарного регулятора в подобной задаче (или, по крайней мере, в алгоритме улучшения имеющегося оптимального регулятора среди всех стационарных), чему и посвящена данная работа. Соответствующие результаты формулируются для существенно более общей стохастической задачи оптимального управления, а затем обсуждаются, в том числе и для указанной выше ситуации, на примерах.

В контексте изучаемой проблемы и предлагаемых ниже путей ее решения нелишним будет указать ссылку на монографию [1], где в числе прочего обсуждается вопрос минимизации функционала (4) с условием (3) на множестве постоянных стабилизирующих матриц $P(t) \equiv P^*$, удовлетворяющих заданным структурным ограничениям. В частности, для задачи линейного регулирования по выходу выписан градиент функционала J на указанном множестве [1, с. 253]. Там же отмечается, что использование затем градиентной процедуры минимизации не гарантирует отыскание решения (ввиду невыпуклости как самого функционала, так и его области определения) и потому такую задачу следует отнести к разряду нерешенных проблем. То же самое, безусловно, можно сказать и об изучаемой в настоящей работе более общей задаче, однако в качестве ее «решения» здесь тем не менее предлагается улучшающая процедура градиентного типа. Это связано с тем, что для задач нестационарного регулирования в условиях структурных ограничений глобальный минимум значений J может, вообще говоря, не достигаться (см. [2], где построен простой пример расходящейся минимизирующей последовательности в линейно-квадратичной задаче на конечном временном интервале). Последнее означает, что даже наличие каких бы то ни было необходимых и достаточных условий оптимальности данного нестационарного регулятора также не гарантирует окончательного решения задачи, в то время как градиентная процедура одинаково успешно (или неуспешно) может отыскать и минимизирующую последовательность, и некоторое приближение к стационарной точке.

2. Формальная постановка задачи и предварительные результаты

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито [3]

$$dx(t) = A(u(t))x(t)dt + G(u(t))x(t)dw(t), \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

где x_0 — n-мерный случайный вектор с известной конечной матрицей вторых начальных моментов $\mathbb{E}[x_0 x_0^{\mathrm{T}}] = N_0 \succcurlyeq 0$, матричные функции $A, G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно дифференцируемы на всей области определения. Для заданных отображений A и G определено открытое множество $\mathcal{S}$ (стабилизирующих) векторов $v \in \mathbb{R}^m$ таких, что вещественные части всех собственных значений матрицы $A(v) \oplus A(v) + G(v) \otimes G(v)$ строго меньше нуля (символы $\oplus$ и $\otimes$ означают сумму и произведение Кронекера). Последнее условие гарантирует асимптотическую устойчивость (стабилизируемость) динамической системы (5) при $u(t) \equiv v \in \mathbb{R}^m$ в среднем квадратичном (это вытекает из векторного представления матричного уравнения для второго начального момента случайного процесса $x(t)$ [4]). Если $G = 0$, то оно эквивалентно классическому условию гурвицевости матрицы $A(v)$.

Будем исследовать задачу на минимум

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t))x(t)dt\right] \to \inf_{u\in\mathcal{U}}, \tag{6}$$

где для удобства записи опущена неявная зависимость в смысле уравнения (5) вектора состояния x от функции управления u, матричная функция $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно дифференцируема, $Q(u) \succcurlyeq 0 \;\; \forall u \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{T\geqslant 0} \mathcal{U}_T,$$

а $\mathcal{U}_T$ – множество измеримых на $[0; +\infty)$ функций u таких, что выполнены условия:

1) $u|_{[0;T]} \in L_2^m([0;T])$, если $T > 0$;

2) $u(t) = u_T \in \mathcal{S}$ для всех $t \geqslant T$.

Ясно, что $\mathcal{U}_T$ можно рассматривать как открытое множество в $L_2^m([0;T]) \times \mathbb{R}^m$ при $T > 0$ и как открытое множество в $\mathbb{R}^m$ при $T = 0$. Предполагается, что функционал J на множестве $\mathcal{U}$ определен корректно, то есть при любом $u \in \mathcal{U}$ существует единственное сильное решение [3] уравнения (5), а несобственный интеграл в правой части (6) сходится к случайной величине с конечным вторым моментом.

Отметим, что постановку задачи (5)–(6) и нижеследующие результаты можно элементарно обобщить на случай многомерного случайного возмущения, но здесь для удобства изложения ограничимся одномерным стандартным винеровским процессом $w(t)$. Если же положить $G(u) \equiv 0$, $A(u) = A^c + B^c P_u$, $Q(u) = Q^c + P_u^{\mathrm{T}} E^c P_u$, $x_0 = \mathbb{E}[x_0]$, то получается детерминированная задача (3)–(4) оптимизации линейного регулятора со структурными ограничениями (здесь P_u – матрица регулятора, а вектор u составляется из максимального набора линейно независимых компонент матрицы P_u).

Рассмотрим также три вспомогательные задачи: при фиксированном значении $T > 0$

$$J_*(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t)) x(t) dt\right] \to \inf_{u \in \mathcal{U}_T}; \tag{7}$$

на конечном интервале времени

$$J_\alpha(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{T} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t)) x(t) dt + x(T)^{\mathrm{T}} \alpha I x(T)\right] \to \inf_{u \in L_2^m([0;T])}, \quad T > 0, \tag{8}$$

где $\alpha \geqslant 0$ – скалярный коэффициент, а I – единичная матрица размеров $n \times n$; и на множестве допустимых управлений в виде постоянных векторов

$$J_c(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u) x(t) dt\right] \to \min_{u \in \mathcal{S}}. \tag{9}$$

Задачи (8) и (9) ранее исследовались в [5, 6]. Воспользуемся некоторыми результатами из этих работ для построения различных алгоритмов улучшения в задаче (6). Начнем с формулировки необходимых утверждений касательно задач (7)–(9). Здесь и далее под градиентом $\nabla F(v_0)$ функционала $F : L_2^m([0;T]) \to \mathbb{R}$ в точке $v_0 \in L_2^m([0;T])$ понимается, как обычно, элемент f пространства $L_2^m[(0;T)]$ такой, что $\langle f, v\rangle = F'(v_0)v \ \forall v \in L_2^m([0;T])$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $L_2^m([0;T])$, а $F'(v_0) : L_2^m([0;T]) \to \mathbb{R}$ – линейный функционал производной Фреше отображения F в точке v_0. Кратко будем писать $\nabla F(v_0) = t \to f(t)$.

Утверждение 1. *Компоненты градиента функционала J_α в произвольной точке $u \in L_2^m([0;T])$ имеют вид*

$$\frac{\partial J_\alpha(u)}{\partial u_j(\cdot)} = t \to \operatorname{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t)\frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) \frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j}\right) N(t)\right],$$

$j = \overline{1,m}$, *где матричная функция $N : [0;T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ является единственным решением задачи Коши*

$$\dot{N}(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}, \quad N(0) = N_0,$$

а матричная функция $M : [0;T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — *единственным решением задачи Коши*

$$\dot M(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) G(u(t)) + Q(u(t)),$$
$$M(T) = -\alpha I,$$

причем

$$J_\alpha(u) = -\mathrm{tr}\,[M(0)N_0]\,.$$

Утверждение 2. *Компоненты градиента функционала* J_c *в произвольной точке* $u \in \mathcal{S}$ *имеют вид*

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u_j} = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u)}{\partial u_j} - 2M_T\frac{\partial A(u)}{\partial u_j} - 2G(u)^{\mathrm{T}} M_T \frac{\partial G(u)}{\partial u_j}\right) N_T\right], \quad j = \overline{1, m},$$

где матрица $N_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *является единственным решением уравнения*

$$A(u)N_T + N_T A(u)^{\mathrm{T}} + G(u)N_T G(u)^{\mathrm{T}} + N_0 = 0,$$

а матрица $M_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *единственным решением уравнения*

$$Q(u) - M_T A(u) - A(u)^{\mathrm{T}} M_T - G(u)^{\mathrm{T}} M_T G(u) = 0,$$

причем

$$J_c(u) = -\mathrm{tr}\,[M_T N_0]\,.$$

Утверждение 3. *Градиент функционала* J_* *в произвольной точке* $u \in \mathcal{U}_T$ *имеет вид*

$$\nabla_u J_*(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_*(u)}{\partial u(\cdot)} \\ \dfrac{\partial J_*(u)}{\partial u_T} \end{pmatrix} \in L_2^m([0;T]) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\frac{\partial J_*(u)}{\partial u_j(\cdot)} = t \to \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t)\frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t)\frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j}\right) N(t)\right],$$
$$\frac{\partial J_*(u)}{\partial u_{T_j}} = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u_T)}{\partial u_j} - 2M_T\frac{\partial A(u_T)}{\partial u_j} - 2G(u_T)^{\mathrm{T}} M_T\frac{\partial G(u_T)}{\partial u_j}\right) N_T\right], \quad j = \overline{1, m},$$

где матричная функция $N : [0;T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *и матрица* $N_T \in \mathbb{R}^{n\times N}$ *являются единственным решением системы уравнений*

$$\dot N(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}, \quad N(0) = N_0,$$
$$A(u_T)N_T + N_T A(u_T)^{\mathrm{T}} + G(u_T)N_T G(u_T)^{\mathrm{T}} + N(T) = 0,$$

а матричная функция $M : [0;T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *и матрица* $M_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *– единственным решением системы уравнений*

$$\dot{M}(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}}M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}}M(t)G(u(t)) + Q(u(t)),$$
$$M(T) = M_T,$$

$$Q(u_T) - M_T A(u_T) - A(u_T)^{\mathrm{T}} M_T - G(u_T)^{\mathrm{T}} M_T G(u_T) = 0,$$

причем

$$J_*(u) = -\mathrm{tr}\,[M(0)N_0]\,.$$

Утверждение 1 для задачи (8) было впервые сформулировано и доказано в [5], а утверждение 2 для задачи (9) – в [6]. Утверждение 3 для задачи (7) формулируется впервые и комбинацией утверждений 1–2 не выводится. В целях соблюсти целостность текста статьи, а также подчеркнуть единый подход к задачам, полное доказательство всех этих утверждений приведено в Приложении. Альтернативные формулы для вычисления значений функционалов в каждом из сформулированных утверждений могут быть эффективно использованы для контроля значений этих функционалов в процессе применения улучшающих процедур. Это подразумевается в дальнейшем при формулировке алгоритмов. Важно отметить, что значение функционала J_α в отличие от значений J_c и J_* никак в общем случае не соотносится со значением исходного функционала J, так как речь идет о модифицированном функционале (8).

3. Алгоритмы улучшения нестационарных регуляторов

В [7] был предложен достаточно простой алгоритм улучшения имеющегося оптимального стационарного регулятора в задаче (9) за счет построения кусочно-постоянного управления, где при переходе к новому интервалу постоянства фиксируется текущее начальное условие и строится оптимальный для него стационарный регулятор на бесконечном времени. Уже такой подход в ряде случаев позволяет серьезно повысить качество управления. Проблема развития идей улучшения на «полностью нестационарный» случай состоит в том, что для нестационарного регулятора в подавляющем большинстве ситуаций невозможно аналитически определить оптимальное решение, а удается лишь построить улучшающую последовательность, быть может являющуюся (а быть может, и нет [2]) некоторым приближением к одной из множества стационарных точек. Исследование примеров также позволяет установить существенную неединственность таких улучшающих последовательностей, поэтому получение конкретного результата сильно зависит как от выбора начального приближения, так и от изменения величины шага улучшающей процедуры. Наконец, в изучаемой здесь оптимизационной проблеме (6) речь уже идет о совокупности задач, каждая из которых обладает указанными особенностями. Как итог, предлагаемые ниже алгоритмы улучшения не могут гарантировать отыскание близкого к оптимальному нестационарного регулятора и потому являются скорее полезным инструментом исследования проблемы, нежели сколь-нибудь полного ее решения. Тем не менее они могут быть эффективно применены в конкретных прикладных задачах, где порядок улучшения значительно важнее близости к неизвестному оптимальному решению.

Итак, пусть имеется какой-либо регулятор $u \in \mathcal{U}_T$ при некотором $T \geqslant 0$. В частности, при $T = 0$ имеется стационарный регулятор. Будем считать его начальным приближением и рассмотрим возможные варианты его улучшения в смысле функционала качества (6).

А л г о р и т м 1. А) Случай $T > 0$. Построить улучшающую последовательность в задаче (7), не изменяя T. Для этого осуществить градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_*(u)$ в утверждении 3. На каждом шаге при этом необходимо проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{U}_T$, в частности, должно быть выполнено включение $u_T \in \mathcal{S}$ (проверяется по определению). Завершить расчеты при выполнении условия достаточной малости совокупного градиента $\nabla_u J_*(u)$ по какой-либо норме.

Б) Случай $T = 0$. Построить улучшающую последовательность в задаче (9). Для этого осуществить градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_c(u)$ в утверждении 2. На каждом шаге проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{S}$. Завершить расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_c(u)$ по какой-либо норме.

Особенность алгоритма 1 состоит в том, что улучшающая последовательность относительно проблемы (6) будет построена только в заданном классе управлений $\mathcal{U}_T$. Если задан стационарный регулятор, то он останется стационарным.

А л г о р и т м 2. Построить улучшающие последовательности в задаче (7) с увеличением значения T относительно данного вплоть до некоторого $T_{\max}$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_*(u)$ в утверждении 3. На каждом шаге проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{U}_T$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости совокупного градиента $\nabla_u J_*(u)$ по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon;\ T^*]$ проверить условие $u(T^*) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(T^*)$, $t > T^*$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > T^*$.

Алгоритм 2 предполагает многократный градиентный спуск на растущем конечном интервале времени и все так же требует проверки условий $u_T \in \mathcal{S}$ и нахождения стабилизирующего регулятора при $T = T^*$. Вместе с тем поиск осуществляется в том числе и за пределами заданного исходного множества $\mathcal{U}_T$, однако и здесь могут быть потеряны некоторые потенциально качественные в смысле функционала (6) решения. Оказывается, существует способ существенно уменьшить вычислительную сложность алгоритма 2 и одновременно несколько изменить область поиска решений задачи (6) путем перехода к исследованию задачи (8).

Алгоритм 3. Задать некоторым образом весовой коэффициент $\alpha \geqslant 0$ и построить улучшающие последовательности в задаче (8), варьируя значения T в некотором диапазоне $(0; T_{\max}]$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для компонент градиента в утверждении 1. В качестве начального приближения брать $u|_{[0;\,T]}$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_\alpha(u)$ по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon; T^*]$ проверить условие $u(T^*) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(T^*)$, $t > T^*$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > T^*$. В случае отсутствия стационарности использовать значение $T^* = T_{\max}$. Проверить улучшение начального приближения в смысле функционала качества J_* и в случае отсутствия улучшений считать применение алгоритма безуспешным.

За счет задания достаточно большого значения α можно добиться отыскания алгоритмом 3 таких решений, которые соответствуют «быстрому обнулению» ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$, после чего любой стабилизирующий регулятор достаточно быстро «гасит» оставшийся «хвост». Более того, подходящий регулятор может быть найден автоматически. Естественно ожидать от таких решений высокого качества в смысле (6). Однако особенности рассматриваемой задачи не предполагают, что такое решение будет найдено именно в момент остановки алгоритма 3. Последний, учитывающий это обстоятельство алгоритм имеет следующий вид.

Алгоритм 4. Задать некоторым образом весовой коэффициент $\alpha \geqslant 0$ и построить улучшающие последовательности в задаче (8), варьируя значения T в некотором диапазоне $(0; T_{\max}]$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для компонент градиента в утверждении 1. В качестве начального приближения также брать $u|_{[0;T]}$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_\alpha(u)$, по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon; T^*]$ (или при $T^* = T_{\max}$) сравнить между собой все найденные до этого решения и выбрать наилучшее из них (в смысле используемого здесь функционала J_α), соответствующее какому-то $\tilde{T}$. Проверить условие $u(\tilde{T}) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(\tilde{T})$, $t > \tilde{T}$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > \tilde{T}$. Проверить улучшение начального приближения в смысле функционала J_* и в случае отсутствия улучшений считать применение алгоритма безуспешным.

Финальное условие остановки в алгоритмах 2–4 и произвольный выбор $u^* \in \mathcal{S}$ обусловлены тем, что для любого стабилизирующего (тем более оптимального) вектора выполнено $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$, из чего следует, что при достаточно большом T^* выбранное произвольно $u^* \in \mathcal{S}$, для которого было бы положено $u(t) = u^*$, $t > T^*$, отличается достаточно мало по значению J_* от любого другого $\tilde{u} \in \mathcal{S}$. Это, в свою очередь, означает малость компонент градиента J_* по u_T относительно задачи (7). Отметим также, что формально все алгоритмы являются только неухудшающими в том смысле, что не улучшают стационарные точки соответствующих функционалов. Более того, структура алгоритмов 3 и 4 до последнего шага даже не может гарантировать, что значение функционала качества J не ухудшится, и потому эти алгоритмы содержат дополнительную проверку найденного приближения по критерию J_*.

4. Примеры

Для начала рассмотрим детерминированный вариант модельного примера из [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2(t), \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - u(t)x_2(t), \quad x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \left(\left(u(t)^2 + 1\right) x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right) dt \to \min .$$

Воспользуемся утверждением 2, чтобы найти аналитическое решение задачи в классе $\mathcal{S}$ стабилизирующих постоянных значений $u \in \mathbb{R}$. Сперва определим множество $\mathcal{S}$. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -u \end{pmatrix},$$

откуда получаем собственные значения матрицы A

$$\lambda_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 8}}{2},$$

так что $\mathcal{S} = (0; +\infty)$. Из утверждения 2 получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u} = 2un_{11} + 2m_{12}n_{12} + 2m_{22}n_{22},$$

$$\begin{cases} 4n_{12} + 1 = 0, \\ 2n_{22} - n_{11} - un_{12} + 1 = 0, \\ -2n_{12} - 2un_{22} + 1 = 0, \\ u^2 + 1 + 2m_{12} = 0, \\ m_{22} - 2m_{11} + um_{12} = 0, \\ 1 - 4m_{12} + 2um_{22} = 0. \end{cases}$$

Последовательно находим (с учетом $0 \notin \mathcal{S}$)

$$n_{12} = -\frac{1}{4}, \quad n_{22} = \frac{3}{4u}, \quad n_{11} = \frac{3}{2u} + \frac{u}{4} + 1,$$
$$m_{12} = -\frac{u^2+1}{2}, \quad m_{22} = -u - \frac{3}{2u}, \quad m_{11} = -\frac{3}{4u} - \frac{u^3 + 3u}{4},$$

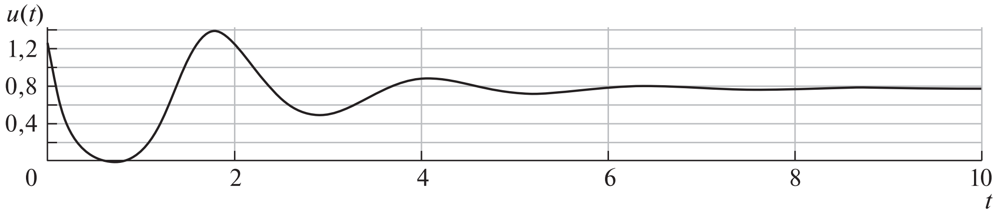


Рис. 1. Нестационарный регулятор $\tilde{u}$ (алгоритм 2).

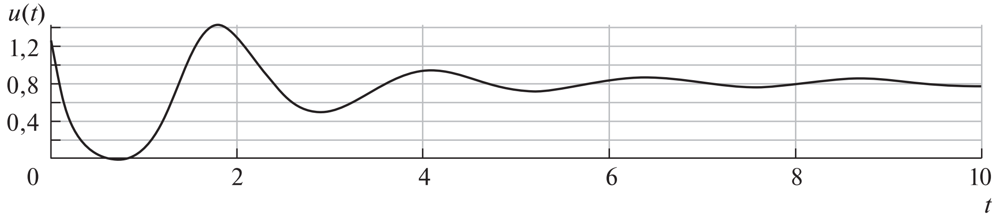


Рис. 2. Нестационарный регулятор $\hat{u}$ (алгоритм 3).

откуда

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u} = \frac{3u^4 + 8u^3 + 7u^2 - 9}{4u^2}.$$

В области $\mathcal{S}$ имеется единственное решение уравнения $\partial J_c(u)/\partial u = 0$, а именно, $u^* \approx 0,775$.

Итак, решение задачи в классе стабилизирующих постоянных управлений существует и определяется аналитически как единственный положительный действительный корень уравнения $3u^4 + 8u^3 + 7u^2 - 9 = 0$. При помощи альтернативной формулы для $J_c(u)$ из утверждения 2 также можно заключить, что значение функционала качества на этом решении равно

$$J_c(u^*) = -m^*_{11} - 2m^*_{12} - m^*_{22} = \frac{9}{4u^*} + \frac{(u^*)^3 + 7u^*}{4} + (u^*)^2 + 1 \approx 5{,}976.$$

Теперь интересен следующий вопрос: «Возможно ли улучшить качество найденного оптимального стационарного управления при помощи алгоритмов 1–4, и если да, то насколько сильно?»

Ясно, что алгоритм 1 не может улучшить найденное u^*, но с его помощью можно приблизиться к u^* сколь угодно точно, стартуя из произвольного стабилизирующего значения.

Реализуем численно алгоритм 2 (технические подробности относительно используемой в работе реализации алгоритмов 1–4 приведены в следующем разделе), взяв в качестве начального приближения $u(t) \equiv u^*$. В результате окажется найдено приближение $\tilde{u}$, представленное на рис. 1. Значение функционала качества также вычисляется численно по альтернативной формуле из утверждения 1:

$$J(\tilde{u}) = J_*(\tilde{u}) \approx 4,385.$$

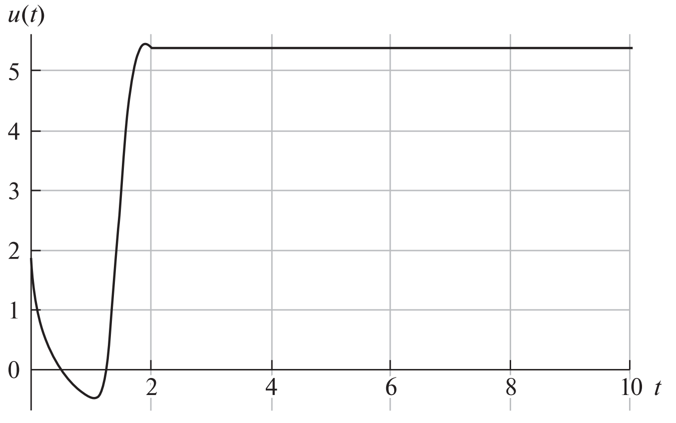


Рис. 3. Нестационарный регулятор $\overline{u}$ (алгоритм 4).

Используя то же начальное приближение $u(t) \equiv u^*$, применим алгоритм 3. В результате окажется найдено $\hat{u}$, отличающееся (хоть и незначительно) от $\tilde{u}$. Приближение $\hat{u}$ представлено на рис. 2. Значение функционала качества на нем

$$J(\hat{u}) = J_*(\hat{u}) \approx 4,332.$$

Наконец, алгоритм 4 позволяет получить из начального приближения $u(t) \equiv u^*$ совершенно другое $\overline{u}$ (см. рис. 3). При этом значение функционала качества

$$J(\overline{u}) = J_*(\overline{u}) \approx 3{,}572.$$

Как итог, получена возможность построить нестационарный регулятор, почти вдвое превышающий по качеству оптимальное стационарное решение. Ясно, что варьирование начального приближения и параметров алгоритмов может привести к дальнейшему улучшению.

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. В стационарной линейно-квадратичной задаче оптимального управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = (1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$J(u) = \int\limits_0^{+\infty} \bigl(x(t)^{\mathrm{T}} Qx(t) + u(t)Eu(t)\bigr)\, dt \to \min,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = 1$$

наилучший стационарный линейный регулятор вида

$$u(t) = u^* x_2(t)$$

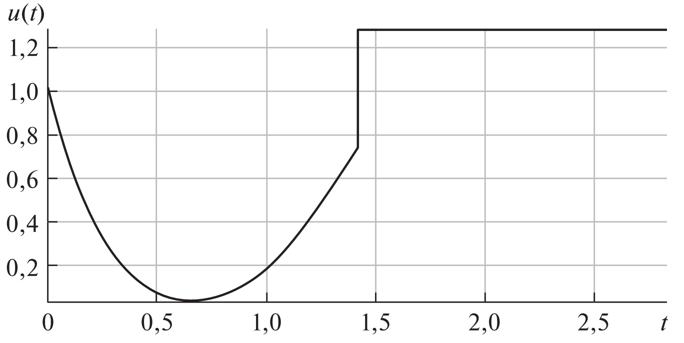


Рис. 4. Нестационарный регулятор $\hat{u}$ (алгоритм 1; стохастический случай).

не является оптимальным среди всех регуляторов, линейных по второй координате вектора состояния; в частности, регуляторы

$$u(t) = \tilde{u}(t)x_2(t), \quad u(t) = \hat{u}(t)x_2(t), \quad u(t) = \overline{u}(t)x_2(t)$$

обеспечивают лучшее качество управления в смысле заданного функционала J.

Сопоставим теперь результаты настоящей работы с исследованиями статьи [4]. В [4] обсуждается стохастический вариант предыдущего примера, а именно

$$\begin{cases} dx_1(t) = 2x_2(t)dt + \dfrac{1}{2}u(t)x_1(t)dw(t), \quad x_1(0) = 1, \\ dx_2(t) = -(x_1(t) + u(t)x_2(t))dt, \quad x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$J = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} \left(\left(u(t)^2 + 1\right) x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right) dt\right] \to \min.$$

Там же найдено оптимальное решение в классе стабилизирующих постоянных управлений. Аналогично предыдущему можно показать, что это решение является единственным в области устойчивости $\mathcal{S}$ действительным корнем u^* уравнения 6-й степени $\partial J_c(u)/\partial u = 0$ и $u^* \approx 0{,}678$, $J_c(u^*) \approx 6{,}777$. В [4] также предлагается улучшающий алгоритм построения кусочно-постоянного управления, с помощью которого найдено новое приближение

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0{,}678, & 0 \leqslant t < 1{,}42, \\ 1{,}239, & 1{,}42 \leqslant t < +\infty, \end{cases} \qquad J(\tilde{u}) \approx 6{,}185.$$

Ясно, что $\tilde{u} \in \mathcal{U}_T$ при $T = 1{,}42$, поэтому можно использовать для его улучшения алгоритм 1. Результат $\hat{u}$ представлен на рис. 4,

$$J(\hat{u}) = J_*(\hat{u}) \approx 5{,}165.$$

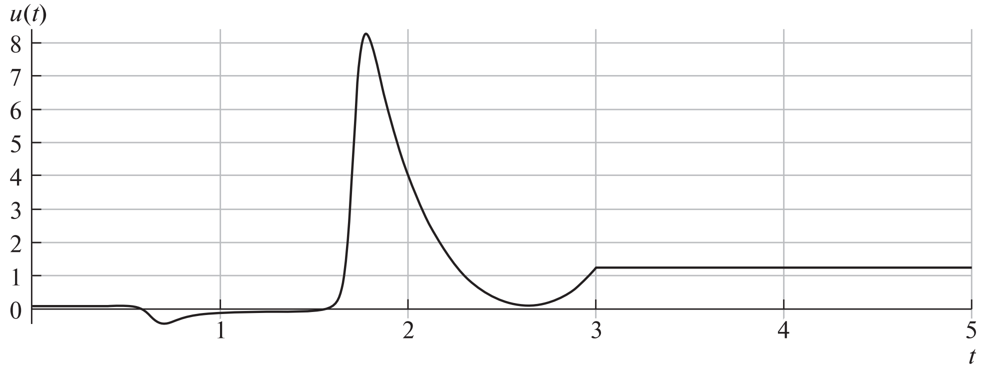


Рис. 5. Нестационарный регулятор (алгоритм 4; стохастический случай).

Алгоритмы 2–4 позволяют в дальнейшем улучшить качество управления до значений функционала

$$J_2 \approx 4{,}734, \quad J_3 \approx 4{,}639, \quad J_4 \approx 3{,}562.$$

Приближения, построенные по алгоритмам 2 и 3, практически не отличаются от представленных на рис. 1 и 2. Приближение по алгоритму 4 приведено на рис. 5.

5. Комментарии по реализации алгоритмов улучшения

Все алгоритмы реализованы в СКМ Maple в виде двух блоков программ (блок 1 – алгоритмы 1 и 2; блок 2 – алгоритмы 3 и 4). Численное решение задач Коши для линейных матричных дифференциальных уравнений в утверждениях 1 и 3 реализовано простейшим методом Эйлера с шагом $h = 0{,}001$, численное решение алгебраических уравнений в утверждениях 2 и 3 – встроенным решателем solve. При реализации градиентного спуска использованы динамически изменяющиеся величины шагов раздельно для «функциональной» и «хвостовой» части градиента. Значения параметров выбраны равными $T_{\max} = 10$, $\alpha = 100$. Изменение параметра T в алгоритмах 3 и 4 осуществляется на множестве $\{0, 1, \ldots, T_{\max}\}$. В соответствии с шагом численного интегрирования функциональная составляющая градиента считается принадлежащей пространству $\mathbb{R}^N$, $N = T/h$, а норма совокупного градиента вычисляется по формуле $||x||_\infty = \max_{0 \leqslant i \leqslant N+1} |x_i|$. Условие остановки градиентного спуска: норма совокупного градиента не превышает значение $\varepsilon = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Справедливость всех сформулированных в работе утверждений непосредственно вытекает из следующего общего результата.

Лемма 1. *Пусть заданы банахово пространство X, открытое множество $\mathcal{O}$ в гильбертовом пространстве U, непрерывное отображение*

$F:\mathcal{O}\to X$ и произвольная функция $J: X\times\mathcal{O}\to\mathbb{R}$. Если существуют множество Λ, отображение $F^*:\mathcal{O}\to\Lambda$ и функции $L: X\times\mathcal{O}\times\Lambda\to\mathbb{R}$, $J^*:\mathcal{O}\times\Lambda\to\mathbb{R}$ такие, что

1) $L(F(u),u,\lambda)=J(F(u),u) \quad \forall(u,\lambda)\in\mathcal{O}\times\Lambda$;

2) $L(x,u,F^*(u))=J^*(u,F^*(u)) \quad \forall(x,u)\in X\times\mathcal{O}$;

3) $\forall(u,\lambda)\in\mathcal{O}\times\Lambda$ *существует непрерывное отображение* $x\to L_u(x,u,\lambda): X\to U$,

то в любой точке $u\in\mathcal{O}$ функция $u\to J(F(u),u)$ дифференцируема и выполнены соотношения

$$J(F(u),u)=J^*(u,F^*(u)), \quad \nabla_u J(F(u),u)=L_u(F(u),u,F^*(u)).$$

Доказательство леммы 1. Первое соотношение очевидно следует из условий 1) и 2). Кроме этого, с учетом 3) для любых $u\in\mathcal{O}$ и $\tilde u$ из окрестности u внутри $\mathcal{O}$ справедливо

$$\begin{aligned} J(F(\tilde u),\tilde u)-J(F(u),u)&=L(F(\tilde u),\tilde u,F^*(\tilde u))-L(F(u),u,F^*(u))=\\ &=L(F(\tilde u),\tilde u,F^*(u))-L(F(\tilde u),u,F^*(u))=\\ &=\langle L_u(F(\tilde u),u,F^*(u)),\tilde u-u\rangle+o(||\tilde u-u||).\end{aligned}$$

Отсюда ввиду непрерывности F и $x\to L_u(x,u,F^*(u))$

$$\lim_{\tilde u\to u}\frac{J(F(\tilde u),\tilde u)-J(F(u),u)}{||\tilde u-u||}=\langle L_u(F(u),u,F^*(u)),e\rangle\,, \quad e\in S_U,$$

где $S_U:=\{e\in U:\ ||e||=1\}$, что завершает доказательство дифференцируемости и второго соотношения.

В дальнейшем будет удобно использовать следующее вспомогательное утверждение ($\mathcal{AC}^{n\times n}([0;T])$ – пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0;T]$ матричных функций размеров $n\times n$).

Лемма 2. Для любого допустимого управления u на множестве $\mathcal{AC}^{n\times n}([0;T])\times\mathbb{R}^{n\times n}$ существует единственное непрерывно зависящее от изменений $u\in\mathcal{U}$ решение $(N,\ N_T)$ уравнений

$$\dot N(t)=A(u(t))N(t)+N(t)A(u(t))^{\mathrm T}+G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm T}, \quad N(0)=N_0, \tag{П.1}$$

$$A(u_T)N_T+N_TA(u_T)^{\mathrm T}+G(u_T)N_TG(u_T)^{\mathrm T}+N(T)=0, \tag{П.2}$$

причем значение функционала (6) *удовлетворяет равенству*

$$J(u)=\int\limits_0^T \mathrm{tr}\,[Q(u(t))N(t)]\,dt+\mathrm{tr}\,[Q(u_T)N_T]\,.$$

Доказательство леммы 2. Уравнения (П.1) и (П.2) представляют собой линейную матричную задачу Коши и линейное матричное алгебраическое уравнение (обобщенное уравнение Ляпунова), разрешимые раздельно.

Существование и единственность решения в условиях задачи (5)–(6), а также его непрерывная зависимость от параметров хорошо известны [8, 9]. Используя формулу Ито [3], нетрудно проверить следующие равенства:

$$N(t) = \mathbb{E}[x(t)x(t)^{\mathrm{T}}], \quad N_T = \mathbb{E}\left[\int\limits_T^{+\infty} x(t)x(t)^{\mathrm{T}}dt\right],$$

где $x(t)$ – сильное решение уравнения (5). Остается записать исходя из (6), что

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}}Q(u(t))x(t)dt\right] = \int\limits_0^T \mathrm{tr}\left[Q(u(t))N(t)\right]dt + \mathrm{tr}\left[Q(u_T)N_T\right].$$

Доказательство утверждения 1. Дано число $T > 0$. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathcal{AC}^{n\times n}([0;T])$, $\mathcal{O} = U = L_2^m([0;T])$, отображение F определим как решение уравнения (П.1), функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (8). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение задачи Коши

$$\dot{M}(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}}M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}}M(t)G(u(t)) + Q(u(t)),$$
$$M(T) = -\alpha I,$$

а функции L и J^* – формулами

$$L(N,u,M) = J_\alpha(u) + \mathrm{tr}\left[M(T)N(T)\right] - \mathrm{tr}\left[M(0)N(0)\right] -$$
$$-\int\limits_0^T \mathrm{tr}\Big[\dot{M}(t)N(t) +$$
$$+ M(t)\left(A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}\right)\Big]dt,$$

$$J^*(u,M) = -\mathrm{tr}\left[M(0)N_0\right].$$

Справедливость условий 1)–2) леммы 1 очевидна (в самом деле, условие 1) следует из (П.1) и конструкции L, а отображение F^* построено непосредственно исходя из 2)), условие 3) следует из исходных требований на отображения A, G, Q. Применяя лемму 1, а затем лемму 2, завершаем доказательство.

Доказательство утверждения 2. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} = \mathcal{S}$, отображение F определим как решение уравнения (П.2) при $N(T) = N_0$, функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (9). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение обобщенного уравнения Ляпунова

$$Q(u_T) - M_TA(u_T) - A(u_T)^{\mathrm{T}}M_T - G(u_T)^{\mathrm{T}}M_TG(u_T) = 0,$$

а функции L и J^* – формулами

$$L(N_T, u, M_T) =$$
$$= J_c(u) - \mathrm{tr}\left[M_T\left(A(u_T)N_T + N_T A(u_T)^{\mathrm{T}} + G(u_T)N_T G(u_T)^{\mathrm{T}} + N_0\right)\right],$$
$$J^*(u, M_T) = -\mathrm{tr}\left[M_T N_0\right].$$

Справедливость условий 1)–3) леммы 1 вновь очевидна. Остается применить ее, а затем лемму 2.

Доказательство утверждения 3. Дано число $T > 0$. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathcal{AC}^{n\times n}([0;T]) \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = L_2^m([0;T]) \times \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} = \mathcal{U}_T$, отображение F определим как решение уравнений (П.1), (П.2), функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (7). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение системы уравнений

$$\dot{M}(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}}M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}}M(t)G(u(t)) + Q(u(t)),$$
$$M(T) = M_T,$$

$$Q(u_T) - M_T A(u_T) - A(u_T)^{\mathrm{T}}M_T - G(u_T)^{\mathrm{T}}M_T G(u_T) = 0,$$

а функции L и J^* – формулами

$$L(N, N_T, u, M, M_T) = J_*(u) + \mathrm{tr}\left[M(T)N(T)\right] - \mathrm{tr}\left[M(0)N(0)\right] -$$
$$- \int_0^T \mathrm{tr}\Big[\dot{M}(t)N(t) +$$
$$+ M(t)\left(A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}\right)\Big]dt -$$
$$-\mathrm{tr}\left[M_T\left(A(u_T)N_T + N_T A(u_T)^{\mathrm{T}} + G(u_T)N_T G(u_T)^{\mathrm{T}} + N(T)\right)\right],$$

$$J^*(u, M, M_T) = -\mathrm{tr}\left[M(0)N_0\right].$$

Для завершения доказательства вновь последовательно применяем леммы 1 и 2.

В заключение отметим, что утверждения 1–3 вовсе не обязательно доказывать, опираясь на весьма общую лемму 1. В частности, в [5, 6] утверждения 1 и 2 были доказаны непосредственным анализом приведенных выше конструкций L с использованием аналогов леммы 2. Лемма 1, в свою очередь, выделяет и обобщает до абстрактного уровня ключевую концепцию, присущую каждому из трех доказанных утверждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. *Rumyantsev D., Tsarkov K.* On Certainty Equivalence Property in Deterministic LQ-problems with Random Initial Data and Information Constraints // Proceedings of the 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2020, Moscow). M.: IEEE, 2020.

3. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
4. *Онегин Е.Е.* Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 10. С. 589–599.
5. *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // АиТ. 2017. № 6. С. 84–105.

   Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
6. *Onegin E., Khrustalev M.* Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters // Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow). M.: IEEE, 2018.
7. *Онегин Е.Е., Хрусталев М.М.* Субоптимальная стабилизирующая стратегия управления линейной стохастической системой с управляемыми параметрами // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 870–874.
8. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 1964.
9. *Damm T.* Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 07.03.2021

После доработки 27.04.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Стохастические системы

© 2021 г. **К.А. ВЫТОВТОВ, д-р техн. наук (vytovtov_konstan@mail.ru),**
Е.А. БАРАБАНОВА, д-р техн. наук (elizavetaalexb@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕОДНОРОДНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПЕРЕХОДА

В статье рассматривается неоднородный марковский процесс с конечным числом дискретных состояний, непрерывным временем и кусочно-постоянными интенсивностями перехода. Впервые приведены аналитические выражения, описывающие и переходной, и стационарный режимы случайного процесса. Для решения этой задачи фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений Колмогорова найдена в аналитическом виде в элементарных функциях. Кроме того, рассматривается неоднородный процесс с периодически изменяющимися интенсивностями переходов. Для этого случая представлены условия существования стационарного режима. Приведены численные расчеты для процесса без скачков, со скачками и с периодическими скачками интенсивностей переходов.

Ключевые слова: неоднородный марковский процесс, кусочно-постоянные интенсивности переходов, уравнения Колмогорова.

DOI: 10.31857/S0005231021120060

1. Введение

Марковские случайные процессы используются для решения целого ряда задач в системах управления, теории надежности, системах массового обслуживания, поддержки принятия решений и т.д. [1–5]. Как правило, в литературе рассматриваются стационарные марковские процессы, однако во многих случаях реальные системы необходимо описывать с использованием нестационарных марковских процессов, в которых интенсивности переходов из состояния в состояние зависят от времени, а в ряде случаев их изменения носят скачкообразный характер [4]. Причинами таких изменений интенсивностей перехода, например в системах связи и управления, являются помехи, в том числе периодические.

Изучение марковских процессов с зависимыми от времени интенсивностями переходов началось с работ Кларка [6, 7] и продолжилось Лемуаном [8] и Харисоном [9]. В дальнейшем данная тема получила развитие в работах Когана Я.А., Литвина В.Г., Дудина А.Н., Миллера Б.М., Бондровой О.В. и Головко Н.И. [4, 10–14,] и др. Так, в [10] рассмотрено функционирование узлов информационных сетей Интернет, описываемых системами массового обслуживания с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени. В [12] рассматриваются системы массового обслуживания с основным и резервным приборами и скачкообразной интенсивностью входного потока и для данного случая получена система интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова–Чепмена. В [13] также изучались марковские процессы со скачкообразным изменением интенсивностей входного потока. Предложен так называемый функционально-аналитический метод. В этой работе также приводится доказательство существования и единственности нестационарного и стационарного режимов. В [14] выведены интегро-дифференциальные уравнения относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок на основе метода Колмогорова–Чепмена.

При рассмотрении систем массового обслуживания часто исследуется вопрос о возможности установления в системе стационарного режима [4, 5]. Однако стационарный режим во многих случаях не раскрывает реальной картины поведения многих систем, поскольку он не учитывает переходные процессы как в момент запуска системы, так и в момент внешних воздействий. В большинстве практических приложений как интенсивности переходов, так и вероятности состояний претерпевают изменения, которые можно проанализировать только в переходном режиме. Кроме этого, если, например, в начальный момент времени в системе массового обслуживания отсутствуют заявки, то время пребывания запросов в системе, их число и другие параметры будут отличаться от значений в установившемся режиме, и, следовательно, использование результатов расчета параметров системы в стационарном состоянии для анализа переходного режима не является корректным.

Одно из первых исследований переходного режима было представлено в работе Харрисона [9] в 1981 г. Но затем эта проблема долгое время не рассматривалась. Увеличение сетевого трафика и возникновение так называемых катастроф [15] привело к актуальности изучения переходного режима [16, 17]. В [16] представлены выражения для вероятностей состояний в переходном режиме для гетерогенной многосерверной марковской системы массового обслуживания, подверженной катастрофам. В [17] рассматривается система массового обслуживания M/M/2 с катастрофами, для которой получены зависящие от времени вероятности нахождения различного числа заявок в системе.

Таким образом, целый ряд случайных процессов описывается системой уравнений Колмогорова с зависящими от времени коэффициентами. Однако на данный момент отсутствует аналитическое решение для вероятностей состояний случайного марковского процесса с дискретным числом состояний и интенсивностями переходов, изменяющимися скачками в произвольные неслучайные моменты времени, выражающееся через интенсивности переходов в явном виде.

В данной работе впервые представлен аналитический подход для исследования как переходного, так и стационарного режимов случайного марковского процесса с дискретным числом состояний и изменяющимися скачками интенсивностями переходов. В разделе 3.1 представлена фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова для случая постоянных интенсивностей переходов. Здесь следует отметить, что определитель матрицы коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений равен нулю, а фундаментальная матрица не является унимодулярной, как в большинстве случаев [18–20]. Фундаментальная матрица для скачкообразных интенсивностей переходов получена в разделе 3.2. Несмотря на то что на сегодняшний день данный случай широко исследуется, аналитического выражения фундаментальной матрицы, выраженной в интенсивностях переходов в явном виде, в литературе представлено не было. Важным является также тот факт, что функция, описывающая интенсивности переходов, является произвольной детерминированной кусочно-постоянной, т.е. имеет произвольное число скачков. Случай периодически изменяющихся интенсивностей переходов исследован в разделе 3.3. Исследование условий существования переходного и стационарного режимов здесь основывается на аппарате теории устойчивости Ляпунова [18]. Численные расчеты для процесса с тремя состояниями представлены в разделе 4.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается неоднородный марковский процесс с M дискретными состояниями и непрерывным временем (рис. 1). Пространство состояний процесса есть множество неотрицательных целых чисел. Время пребывания процесса в состоянии j имеет показательное распределение. Здесь предполагается, что все интенсивности переходов описываются кусочно-постоянными функциями (например, рис. 2). Система уравнений Колмогорова для этого случая, составленная с помощью Δt-метода [4–6, 8], имеет вид

$$(1) \qquad \frac{dP_j(t)}{dt} = -P_j(t) \sum_{i=1, i\neq j}^{M} \lambda_{ji}(t) + \sum_{i=1, i\neq j}^{M} \lambda_{ij}(t) P_i(t),$$

где $\lambda_{ij}(t)$ – кусочно-постоянные функции, $P_j(t)$ – вероятности состояний процесса, M – число состояний процесса. Основной целью статьи является разработка аналитического метода исследования неоднородного марковского процесса со скачкообразным изменением интенсивностей переходов, описываемого системой (1) с кусочно-постоянными коэффициентами.

Для решения (1) традиционно используется преобразование Лапласа [4, 5]. Однако такой подход не позволяет записать общее выражение для случая

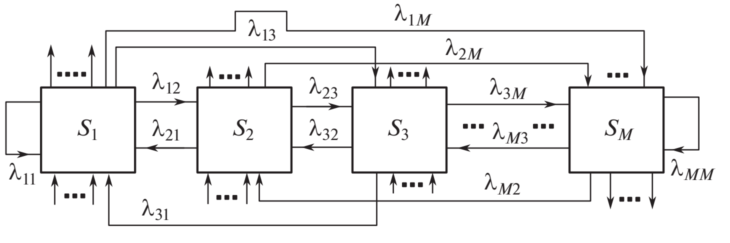


Рис. 1. Граф переходов рассматриваемого случайного процесса.

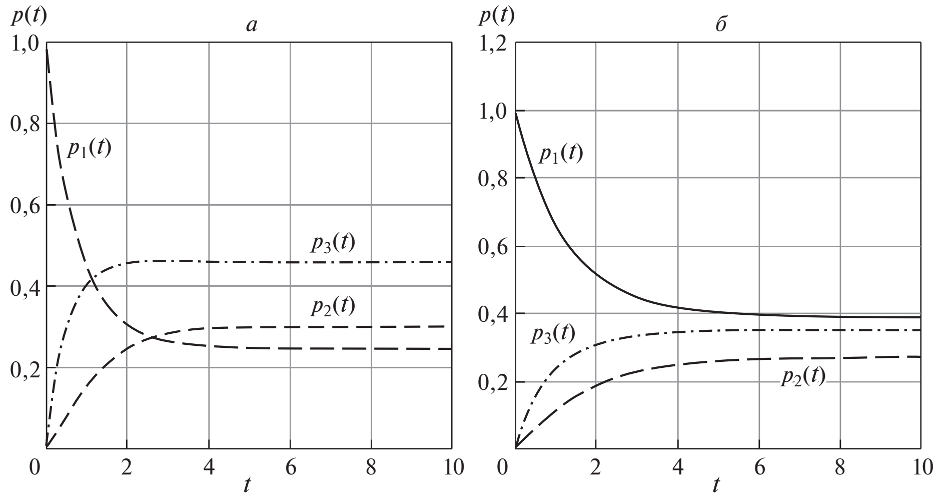


Рис. 2. Зависимость вероятностей состояний от времени для случая постоянных интенсивностей переходов.

произвольного числа состояний и произвольных интенсивностей переходов. Поэтому здесь предлагается принципиально иной подход, основанный на методе фундаментальной матрицы системы линейных однородных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

3. Фундаментальная матрица

В данном разделе представлен аналитический метод решения системы уравнений Колмогорова, описывающей марковский случайный процесс с конечным числом M состояний в произвольный момент времени как с постоянными, так и с кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Для этого использована концепция фундаментальной матрицы системы линейных однородных дифференциальных уравнений.

Известно, что фундаментальной матрицей $\mathbf{L}(t)$ является матрица [18–20], столбцы которой образуют фундаментальную систему решений. С практической точки зрения она связывает вероятности состояний процесса в некоторый момент времени t с теми же вероятностями в начальный момент времени t_0. Таким образом, для случая M состояний процесса можно написать

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_{M\times M}(t)\mathbf{U}(t_0). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{L}_{M\times M}(t)$ – искомая фундаментальная матрица размерностью $M \times M$, $\mathbf{U}(t) = (P_j)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояний случайного процесса, где $j = \overline{1, M}$, Т – оператор транспонирования.

3.1. Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс с постоянными интенсивностями переходов

В этом подразделе фундаментальная матрица $\mathbf{L}(t)$, описывающая переходный режим случайного однородного марковского процесса с M дискретными состояниями и постоянными интенсивностями переходов, получена в аналитической форме, удобной для дальнейшего исследования кусочно-постоянных интенсивностей переходов. В рассматриваемом случае $\mathbf{L}(t)$ — это матрица (M × M), имеющая вид

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{A}_j \exp(\gamma_j t). \tag{3}$$

Элементы (M × M) — матрицы $\mathbf{A}_j$ записываются как

$$(A_j)_{kl} = \frac{(-1)^{k+l}\Delta_{ij}}{\Delta}\xi_{kj}, \tag{4}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1M} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{M1} & \xi_{M2} & \dots & \xi_{MM} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Δ_{lj} – определитель алгебраического дополнения к элементу ξ_{lj} матрицы Δ, Δ – собственный базис матрицы коэффициентов системы (1) в M-мерном пространстве [18], γ_j – j-й корень характеристического уравнения системы (1). Отметим, что выражение (3) справедливо, если все корни характеристического уравнения простые. Причем в рассматриваемой задаче один из корней всегда равен нулю, поскольку определитель матрицы коэффициентов равен нулю при любых положительных $\lambda_{ij}(t)$.

Одной из важнейших задач при рассмотрении переходного режима является нахождение постоянной времени процесса в переходном режиме и времени установления стационарного режима [9]. В данном случае процесс в переходном режиме представляет собой линейную комбинацию экспоненциальных процессов с постоянными времени $\tau_j = 1/\mid\gamma_j\mid$. Постоянная времени общего процесса определяется как величина, обратная модулю наименьшего ненулевого γ_j, т.е. $\tau = 1/\mid\gamma_{\min}\mid$, где $\forall\gamma_j \in \Gamma\ (\gamma_j \geqslant \gamma_{\min} \Rightarrow \gamma_j = \gamma_{\min})$ [9]. Тогда время переходного режима можно определить как $\tau_{\mathrm{tr}} = (3 \div 5)\tau = (3 \div 5)/\mid\gamma_{j\min}\mid$.

3.2. Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс с кусочно-постоянными интенсивностями переходов

Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова с кусочно-постоянными интенсивностями переходов, описывающей процесс на N-м интервале, может быть найдена как произведение матриц с постоянными интенсивностями переходов [18–21]

$$\mathbf{L}_{\Sigma}(t) = \mathbf{L}_N(t - t_{N-1})\left[\prod_{i=N-1}^{1} \mathbf{L}_i(\Delta t_i)\right], \tag{6}$$

где $\mathbf{L}_i(\Delta t_i)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающая процесс на i-м интервале с постоянными интенсивностями переходов, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – длительность i-го интервала, N – число интервалов, $\mathbf{L}_N(t)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающая процесс на N-м интервале, $\mathbf{L}_\Sigma(t)$ – результирующая фундаментальная матрица. Действительно, пусть на первом интервале с постоянными интенсивностями переходов процесс описывается системой уравнений Колмогорова, фундаментальная матрица которой равна $\mathbf{L}_1(t-t_0)$. Тогда на этом интервале состояния системы в произвольный момент времени находятся как

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_1(t-t_0)\mathbf{U}(t_0), \tag{7}$$

а при $t = t_1$ имеем

$$\mathbf{U}(t_1) = \mathbf{L}_1(\Delta t_1)\mathbf{U}(t_0). \tag{8}$$

Аналогично для второго интервала запишем

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_2(t-t_1)\mathbf{U}(t_1), \tag{9}$$

где $\mathbf{L}_2(t-t_1)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс на втором интервале с постоянными интенсивностями переходов. Учитывая условие непрерывности вероятностей состояний на границе между интервалами [18–20], можно подставить (8) в (9)

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_2(t-t_1)\mathbf{L}_1(\Delta t_1)\mathbf{U}(t_0). \tag{10}$$

Из (10) следует, что фундаментальная матрица, описывающая поведение процесса на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, имеет вид

$$\mathbf{L}_\Sigma(t) = \mathbf{L}_2(t-t_1)\mathbf{L}_1(\Delta t_1). \tag{11}$$

Проделав эту процедуру для произвольного конечного числа интервалов N, получим выражение (6).

В результате доказано, что матрица (6) описывает поведение случайного процесса и предполагает отсутствие скачков вероятностей состояний на границах интервалов. Однако скачки первой производной не исключаются. Действительно, в соответствии с методом [18–20] фундаментальная матрица системы (1) составляется при условии непрерывности функций, но не их производных. С точки зрения практических приложений это означает, что каждый из скачков интенсивностей перехода приводит к новому переходному режиму с начальными значениями, равными вероятностям состояний непосредственно перед скачком.

Подставляя (3) в (6), проводя алгебраические преобразования, применяя операцию логарифмирования, а затем потенцирования, найдем выражение фундаментальной матрицы для N интервалов с постоянными интенсивностями переходов и M состояниями системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{\substack{j_i=1 \\ 1\leqslant j\leqslant N}}^{M} \exp\left[\sum_{i=N-1}^{1}\big(\mathrm{Ln}(\mathbf{A}_{ij_i}) + \gamma_{ij_i}\Delta t_i\big) + \mathrm{Ln}(\mathbf{A}_{Nj_N}) + \gamma_{Nj_N}(t - t_{N-1})\right], \tag{12}$$

где i – номер интервала с постоянными интенсивностями переходов, j_i – номер состояния процесса на интервале i, $\mathbf{A}_{ij_i}$ – матрицы с элементами (3) на i-м интервале, γ_{ij_i} – j_i-й корень характеристического уравнения системы (1) на интервале i.

Таким образом, найдена фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова для неоднородного марковского процесса с произвольным конечным числом состояний и произвольными кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Отметим, что преобразование произведения фундаментальных матриц в конечную сумму экспонент без нарушения граничных условий в моменты скачков интенсивностей переходов является важным моментом для данного результата. Действительно, каждая из экспонент в (12) описывает некоторый непрерывный экспоненциальный процесс. Такой подход позволяет анализировать влияние каждого интервала с постоянными параметрами на результирующее состояние процесса. Кроме того, очевидно, что результирующее состояние процесса определяется параметрами каждого из интервалов с постоянными интенсивностями переходов. Поэтому нельзя считать, что общее решение является результатом простого совмещения решений на интервалах с постоянными параметрами. Более того, отметим, что предложенный подход не требует использования численных методов, которые обычно применялись для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

3.3. Процесс с периодическими кусочно-постоянными интенсивностями переходов

Приведенные выше результаты очень важны для самых разнообразных приложений. Например, изучение процессов с периодическими интенсивностями переходов является очень интересной, но не изученной практической задачей. Допустим, что интенсивности переходов являются периодическими функциями времени $\lambda_{ij}\,(kT+t)=\lambda_{ij}(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, T – период изменения интенсивностей переходов. Причем $\lambda_{ij}(t)$ на периоде является кусочно-постоянной функцией. Очевидно, что фундаментальная матрица для K периодов T изменения интенсивностей переходов может быть найдена как K-я степень матрицы (12) [18]:

$$\mathbf{L}_K=\left\{\sum_{\substack{j_i=1\\1\leqslant i\leqslant N}}^{M}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\mathrm{Ln}\left(\mathbf{A}_{ij_i}\right)+\gamma_{ij_i}\Delta t_i\right)\right]\right\}^K. \tag{13}$$

Вычисление выражения (13) является достаточно сложной задачей, особенно если число состояний M очень велико. Однако для описания рассматриваемого периодического процесса достаточно исследовать фундаментальную матрицу процесса за период T в виде (13). Действительно, собственные числа и собственные векторы матрицы (13) полностью характеризуют рассматриваемый случайный процесс [18]. Отметим также, что при периодической зависимости коэффициентов (1) от времени нет необходимости рассматривать динамику процесса внутри каждого периода, но необходимо исследовать изменение вероятностей состояний за один период. Этот вопрос является одной из важнейших задач теории устойчивости дифференциальных уравнений [18, 21, 22]. При этом наиболее часто используется понятие устойчивости решений по Ляпунову, поскольку оно является наиболее строгим. Согласно теории устойчивости, процесс будет устойчивым по Ляпунову и достигнет стационарного состояния с течением времени только в том случае, если все мультипликаторы q_m системы (1) (собственные числа q_m фундаментальной матрицы (12)) по модулю меньше единицы ($q_m \leqslant \mid 1 \mid$, $m = \overline{1, M}$) или, другими словами, характеристические показатели Ляпунова $\alpha_m = (1/T)\,\mathrm{Ln} q_m \leqslant 0$ должны быть отрицательными либо равными нулю.

Более того, процесс является экспоненциальным, если все мультипликаторы q_m системы (1) с периодическими коэффициентами действительны. Процесс является незатухающим гармоническим, если мультипликаторы q_m мнимые. Процесс должен быть затухающим волнообразным, если хотя бы один мультипликатор q_m является комплексным и его действительная часть по модулю меньше единицы.

Отметим также, что мультипликаторы системы (1) могут быть мнимыми или комплексными, даже если ее собственные числа на интервалах с постоянными коэффициентами действительны и отрицательны [18, 21, 22]. При этом данный факт не означает, что комплексными или мнимыми являются вероятности состояний, а означает лишь волнообразный характер процесса. Действительная часть мультипликатора определяет скорость затухания переходного режима, а мнимая часть определяет частоту переколебаний вероятностей состояний в этом режиме. Таким образом, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, то время переходного режима процесса определяется как $\tau_{\mathrm{tr}} = 1/ \mid \mathrm{Re}\,(q_{\min}) \mid$, где $q_{\min}$ – минимальный мультипликатор системы.

4. Численный расчет

В этом разделе приводится тестовый расчет на примере частного случая марковского случайного процесса с тремя дискретными состояниями, непрерывным временем и зависящими от времени кусочно-постоянными интенсивностями переходов. В данном случае система уравнений Колмогорова приводится к следующему виду:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dP_1(t)}{dt} &= -\left(\lambda_{12}(t) + \lambda_{13}(t)\right) P_1(t) + \lambda_{21}(t)P_2(t) + \lambda_{31}(t)P_3(t),\\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda_{12}(t)P_1(t) - \left(\lambda_{21}(t) + \lambda_{23}(t)\right) P_2(t) + \lambda_{32}(t)P_3(t),\\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_{13}(t)P_1(t) + \lambda_{23}(t)P_2(t) - \left(\lambda_{31}(t) + \lambda_{32}(t)\right) P_3(t),
\end{aligned}
\right.
\tag{14}
$$

для постоянных коэффициентов ($\lambda_{ij} = \mathrm{const}$) ее характеристические числа являются решением линейного алгебраического уравнения третьего порядка, один из которых всегда равен нулю.

Из вида матрицы коэффициентов уравнения (1) следует, что корни $\gamma_{2,3}$ всегда будут отрицательными [18]. Общие решения для вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_3(t)$ при $\lambda_{ij} = \mathrm{const}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \xi_{11}A + \xi_{12}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{13}C\exp(\gamma_3 t), \\ P_2(t) &= \xi_{21}A + \xi_{22}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{23}C\exp(\gamma_3 t), \\ P_3(t) &= \xi_{31}A + \xi_{32}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{33}C\exp(\gamma_3 t). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь A, B, C – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, γ_j – корни характеристического уравнения системы (14), ξ_{kj} – коэффициенты, соотносящие $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, образующие собственный базис матрицы коэффициентов системы (14).

Далее также обычно учитывается известное соотношение

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1. \tag{16}$$

С учетом (16) находится постоянная интегрирования A как функция от λ_{ij}, а константы B и C определяются начальными условиями процесса.

Отметим, что из (15) очевидно следует, что при $t \to \infty$, $\gamma_{1,2} \leqslant 0$ и любых начальных условиях процесс стремится к стационарному режиму с вероятностями состояний

$$\begin{pmatrix} P_1^{(i)} \\ P_2^{(i)} \\ P_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11}^{(i)} & \xi_{12}^{(i)} & \xi_{13}^{(i)} \\ \xi_{21}^{(i)} & \xi_{22}^{(i)} & \xi_{23}^{(i)} \\ \xi_{31}^{(i)} & \xi_{32}^{(i)} & \xi_{33}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{17}$$

и результаты совпадают с ранее полученными [4, 5].

Однако в данной работе рассматривается классический подход [18–20] к решению системы линейных однородных дифференциальных уравнений (14), не использующий напрямую тождество (16). Ниже будет показано, что при использовании фундаментальной матрицы условие (16) выполняется автоматически и, следовательно, нет необходимости дополнительно вычислять константу A. Для рассматриваемого случая матрица (3) для i-го интервала с постоянными интенсивностями переходов принимает вид

$$\mathbf{L}_i = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j^{(i)} \exp(\gamma_j^{(i)} \Delta t_i), \tag{18}$$

где

$$
\mathbf{A}_j^{(i)} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \xi_{1j}^{(i)}\Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{1j}^{(i)}\Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{1j}^{(i)}\Delta_{j3}^{(i)} \\ \xi_{2j}^{(i)}\Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{2j}^{(i)}\Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{2j}^{(i)}\Delta_{j3}^{(i)} \\ \xi_{3j}^{(i)}\Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{3j}^{(i)}\Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{3j}^{(i)}\Delta_{j3}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{19}
$$

и

$$
\Delta^{(i)} = \xi_{21}^{(i)}\left(\xi_{32}^{(i)} - \xi_{33}^{(i)}\right) + \xi_{22}^{(i)}\left(\xi_{33}^{(i)} - \xi_{31}^{(i)}\right) + \xi_{23}^{(i)}\left(\xi_{31}^{(i)} - \xi_{32}^{(i)}\right);
$$

$$
\Delta_{11}^{(i)} = \xi_{22}^{(i)}\xi_{33}^{(i)} - \xi_{23}^{(i)}\xi_{32}^{(i)}; \quad \Delta_{21}^{(i)} = \xi_{23}^{(i)}\xi_{31}^{(i)} - \xi_{21}^{(i)}\xi_{33}^{(i)}; \quad \Delta_{31}^{(i)} = \xi_{21}^{(i)}\xi_{32}^{(i)} - \xi_{22}^{(i)}\xi_{31}^{(i)};
$$

$$
\Delta_{12}^{(i)} = \xi_{32}^{(i)} - \xi_{33}^{(i)}; \quad \Delta_{22}^{(i)} = \xi_{33}^{(i)} - \xi_{31}^{(i)}; \quad \Delta_{32}^{(i)} = \xi_{31}^{(i)} - \xi_{32}^{(i)}; \quad \Delta_{13}^{(i)} = \xi_{23}^{(i)} - \xi_{22}^{(i)};
$$

$$
\Delta_{33}^{(i)} = \xi_{22}^{(i)} - \xi_{21}^{(i)}; \quad \xi_{1j}^{(i)} = 1.
$$

Далее для скачкообразного изменения интенсивностей переходов необходимо использовать матрицу (12).

Теперь рассмотрим случайный процесс с постоянными интенсивностями переходов. На рис. 2,*а* представлены зависимости вероятностей состояний от времени для интенсивностей переходов $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$ при начальных условиях $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Расчеты показывают, что сумма вероятностей состояний в любой момент времени равна единице. Таким образом, условие (16) выполняется автоматически и никаких дополнительных расчетов при использовании представленного подхода не требуется. Также видно (рис. 2,*а*), что для этих параметров переходный режим имеет экспоненциальный характер, а стационарный режим устанавливается приблизительно при $t = 4{,}3$. Действительно, время переходного режима определяется характеристическими числами системы уравнений (1), которые в данном случае равны $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1{,}168$, $\gamma_3 = -1{,}832$. Таким образом, переходной режим представляет собой суперпозицию двух переходных режимов с постоянными времени $\tau_2 = 1/\mid\gamma_2\mid$ и $\tau_3 = 1/\mid\gamma_3\mid$. Тогда время каждого переходного режима $t_{\mathrm{tr}2} = (3 \div 5)\tau_2 = 2{,}57 \div 4{,}28$, $t_{\mathrm{tr}3} = (3 \div 5)\tau_3 = 1{,}64 \div 2{,}73$, большее из которых 4,28 соответствует началу стационарного режима (рис. 2,*а*).

На рис. 2,*б* представлен результат расчетов для случая, когда есть вероятность того, что процесс не выйдет из какого-либо состояния. Здесь $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Из расчетов видно, что сумма вероятностей состояний в каждый момент времени в данном случае также равна единице, а стационарный режим устанавливается при $t = 8{,}5$.

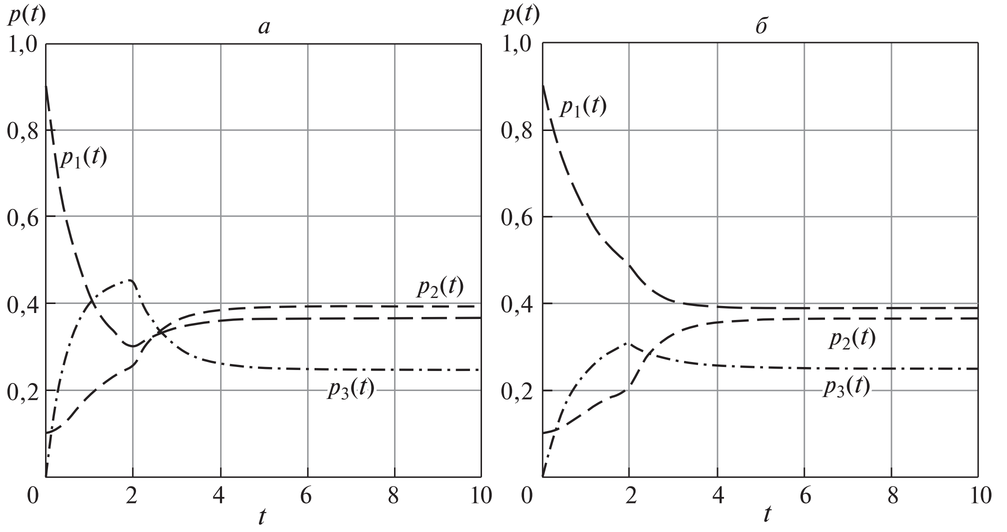


Рис. 3. Зависимость вероятностей состояний от времени при одном скачке.

Результаты численных расчетов для одного скачка интенсивностей переходов представлены на рис. 3,a. Скачок происходит в момент времени $t = 2$. Здесь на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$; на втором интервале $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}3$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{23} = 0{,}35$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}55$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Из рис. 3,a видно, что вероятности состояний не испытывают скачков при скачках интенсивностей переходов ($t = 2$), тем не менее для их первых производных наблюдаются скачки. Время переходного режима после скачка определяется параметрами процесса на втором интервале и составляет $t = 6$.

Результаты численных расчетов вероятностей состояний для одного скачка при наличии вероятностей того, что процесс не покинет определенные фиксированные состояния, показаны на рис. 3,$б$. Скачок происходит в момент времени $t = 2$. Здесь на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$; на втором интервале $\lambda_{11} = 0{,}1$, $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}2$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{22} = 0{,}05$, $\lambda_{23} = 0{,}3$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}25$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0) P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. В этом случае сумма вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ в любой момент времени также равна единице. Стационарный режим устанавливается при $t = 7$, т.е. время переходного режима увеличилось в сравнении с этим временем для предыдущего случая. Это обусловлено уменьшением значений характеристических показателей системы Колмогорова в рассматриваемом случае.

Также рассчитан процесс с тремя состояниями и двумя скачками интенсивностей переходов, результаты представлены на рис. 4,a,$б$. На рис. 4,a показаны зависимости вероятностей состояний от времени для случая, когда

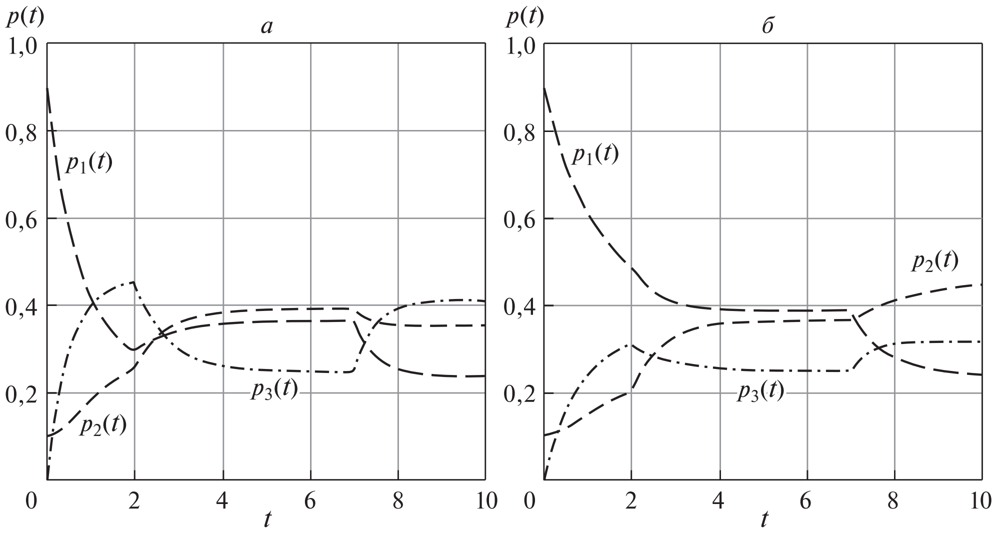


Рис. 4. Зависимость вероятностей состояний от времени.

$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$. Остальные параметры процесса следующие: на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$; на втором интервале $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}3$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{23} = 0{,}35$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}55$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$; на третьем интервале $\lambda_{12} = 0{,}3$, $\lambda_{13} = 0{,}7$, $\lambda_{21} = 0{,}1$, $\lambda_{23} = 0{,}9$, $\lambda_{31} = 0{,}6$, $\lambda_{32} = 0{,}4$. Скачки происходят в моменты времени $t = 2$ и $t = 7$. Также для рассматриваемого случая сумма вероятностей состояний равна единице для любого момента времени, а стационарный режим устанавливается при $t = 9{,}5$.

Также анализируется случай марковского процесса с тремя состояниями и двумя скачками интенсивностей переходов для ненулевых λ_{11}, λ_{22}, λ_{33} (рис. 4,*б*). Параметры процесса следующие: на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$; на втором интервале $\lambda_{11} = 0{,}1$, $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}2$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{22} = 0{,}05$, $\lambda_{23} = 0{,}3$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}25$; на третьем интервале $\lambda_{11} = 0{,}2$, $\lambda_{12} = 0{,}3$, $\lambda_{13} = 0{,}6$, $\lambda_{21} = 0{,}1$ $\lambda_{22} = 0{,}4$, $\lambda_{23} = 0{,}5$, $\lambda_{31} = 0{,}6$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}1$. Скачки также происходят при $t = 2$ и $t = 7$. Как и для случая с двумя скачками и ненулевыми $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$, время переходного режима увеличилось в сравнении со случаем нулевых $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$.

Теперь рассмотрим неоднородный процесс с периодическими кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Здесь предполагается, что период содержит три интервала с постоянными параметрами. Интенсивности переходов соответствуют значениям случая, представленного на рис. 4,*а*, длительности первого и второго интервалов $\Delta t_1 = 1$ и $\Delta t_2 = 2$ соответственно. На рис. 5 представлена зависимость мультипликаторов матрицы (19) от длительности третьего интервала Δt_3. Из результатов расчета видно, что два мультипликатора по модулю меньше единицы, а третий равен единице, т.е. в соответ-

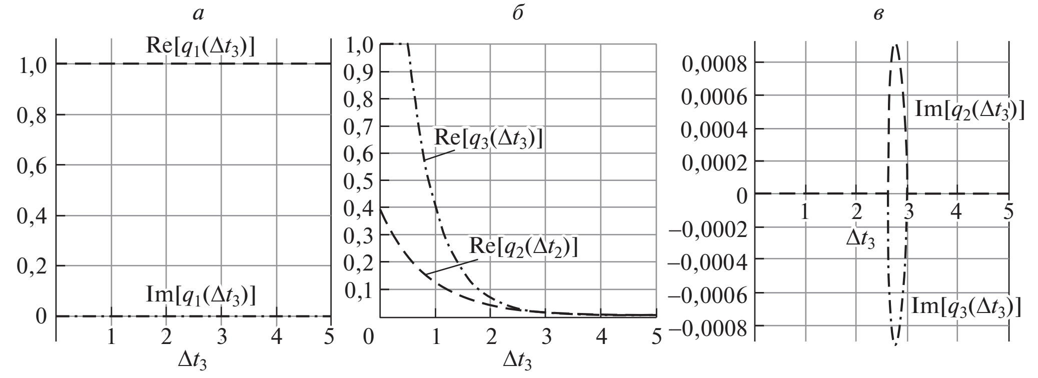


Рис. 5. Зависимость мультипликаторов системы (1) от длительности третьего интервала периода: *а*) действительная и мнимая части первого мультипликатора, *б*) действительные части второго и третьего мультипликаторов, *в*) мнимые части второго и третьего мультипликаторов.

ствии с теоремой Ляпунова [18] процесс имеет стационарное состояние. Кроме того, два из трех мультипликаторов являются комплексно-сопряженными, если $2{,}63 \leqslant \Delta t_3 \leqslant 3{,}0$ (рис. 5,*б*,*в*). Следовательно, при большом числе периодов процесс имеет стационарное состояние, а переходной режим имеет затухающий гармонический характер.

5. Заключение

В этой статье рассматривается неоднородный марковский процесс с конечным числом дискретных состояний M, непрерывным временем и кусочно-постоянными интенсивностями переходов $\lambda_{ij}(t)$. Выражения, описывающие одновременно как переходные, так и стационарные режимы случайного процесса, представлены впервые. В работе предложено аналитическое решение системы уравнений Колмогорова (1) с кусочно-постоянными коэффициентами. Для решения этой задачи фундаментальная матрица (6) или (12) системы (1) находится в аналитическом виде в элементарных функциях. Предлагаемый метод позволяет исследовать рассматриваемый марковский процесс без использования численных методов. Изучение фундаментальной матрицы дает возможность описать характер процесса даже без начальных условий. Действительно, собственные значения и собственные векторы этой матрицы дают полную картину поведения решений системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Более того, решение представлено в виде конечной суммы членов, описывающих некоторые случайные процессы. Дополнительно рассматривается неоднородный процесс с периодически изменяющимися интенсивностями переходов. Представлены условия существования стационарного режима при периодически изменяющихся интенсивностях переходов. Также приведены численные расчеты, доказывающие правильность разработанного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abubakar U.Y., Hakimi D., Mohammed A., Lawal A.A.* A Non-stationary Transition Probabilities for a Reservoir Elevation of Hydro Electric Power Dam // IOSR J. Math. 2014. V. 10. No. 3. C. 39–44.

2. *Shirdel G.H., Abdolhosseinzadeh M.* The shortest path problem in the stochastic networks with unstable topology // SpringerPlus. 2016. No. 5:1529.

   https://doi.org/10.1186/s40064-016-3180-7

3. *Jaime González-Domínguez, Gonzalo Sánchez-Barroso and Justo García-Sanz-Calcedo.* Scheduling of Preventive Maintenance in Healthcare Buildings Using Markov Chain // Appl. Sci. 2020. V.10. No. 15. 5263.

   https://doi.org/10.3390/app10155263

4. *Миллер А.Б., Миллер Б.М., Степанян К.В.* Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени // АиТ. 2020. № 3. С. 114–131.

   Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V. Simultaneous Impulse and Continuous Control of a Markov Chain in Continuous Time // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 3. P. 469–482.

5. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименюк, В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018.

6. *Clarke A.B.* The time-dependent waiting line problem. Umv Michigan Rept M720-1RS9. 1953.

7. *Clarke A.B.* On time-dependent waiting line processes // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24. P. 491–492.

8. *Lemoine A.J.* On queues with periodic Poisson input // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. P. 889–900.

9. *Harrison P.G.* Transient Behaviour of Queueing Networks // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. No. 2. P. 482–490.

10. *Коган Я.А., Литвин В.Г.* К вычислению характеристик систем массового обслуживания с конечным буфером, работающей в случайной среде // АиТ. 1976. № 12. С. 49–57.

11. *Дудин А.Н.* Об обслуживающей системе с переменным режимом работы // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 27–29.

12. *Бондрова О.В., Крылова Д.С., Головко Н.И., Жук Т.А.* Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Вестник ВГУ: Серия: физика. математика. 2015. № 4. С. 89–100.

13. *Головко Н.И., Каретник В.О., Пелешок О.В.* СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Автоматика и вычислительная техника. 2009. № 10. С. 75–96.

14. *Бондрова О.В., Головко Н.И., Жук Т.А.* Вывод уравнений типа Колмогорова–Чепмена с интегральным оператором // Дальневосточный мат. журн. 2017. Т. 17. № 2. С. 135–146.

15. *Dudin A.N., Karolik A.V.* BMAP/SM/1 Queue with Markovian Input of Disasters and Non-instantaneous Recovery // Performance Evaluat. 2001. V. 45. No. 1. P. 19–32.

16. *Dharmaraja S., Rakesh Kumar.* Transient solution of a Markovian queuing model with heterogeneous servers and catastrophes // OPSEARCH. 2015. 52(4). P. 810–826.
17. *Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K.S.* Transient solution of an M/M/2 queue with heterogeneous servers subject to catastrophes // Int. J. Inform. Management Sci. 2017. V. 18. No. 1. P. 63–80.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
19. *Vytovtov K., Barabanova E., Vishnevskiy V.* Accurate mathematical model of two-dimensional parametric systems based on 2×2 Matrix // Commun. Comput. Inform. Sci. 2019. V. 1141. P. 199–211.
20. *Vytovtov K., Barabanova E.* Mathematical model of four-dimensional parametric systems based on block diagonal matrix with 2×2 blocks // Commun. Comput. Inform. Sci. 2019. P. 139–155.
21. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
22. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 29.01.2021

После доработки 03.05.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

© 2021 г. **С.В. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук** (sergeyivanov89@mail.ru),
С.Д. МЕРЗЛИКИНА (sv.merzlikina@mail.ru)
**(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))**

ПОИСК РАВНОВЕСИЙ ПО НЭШУ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ И КВАНТИЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫШЕЙ[1]

Рассматривается биматричная игра со случайными выигрышами игроков и смешанными стратегиями. Определяются функции вероятности и квантили потерь игроков (выигрышей с противоположным знаком). Для данных функций потерь рассматриваются задачи поиска равновесия по Нэшу. Показано, что игра с вероятностным критерием сводится к биматричной игре с функциями выигрышей в форме математического ожидания. Получены необходимые и достаточные условия существования равновесия в игре с квантильным критерием. Доказана теорема о связи равновесий в играх с квантильными и вероятностными критериями. Предложен алгоритм поиска равновесий в игре с квантильным критерием. Алгоритм основан на последовательном решении задач поиска точек, принадлежащих множествам, описываемым квадратичными невыпуклыми ограничениями. Предлагаются подходы к нахождению данных точек. Приведены результаты вычислений равновесных пар стратегий.

Ключевые слова: теория игр, биматричная игра, функция вероятности, функция квантили, равновесие по Нэшу, игра с вероятностными ограничениями.

DOI: 10.31857/S0005231021120072

1. Введение

Важной задачей исследования операций является описание поведения нескольких конкурирующих лиц, одновременно принимающих решения. Для математического моделирования их поведения используется аппарат теории игр (см., например, [1, 2]). Равновесием по Нэшу называется такая ситуация в игре, при которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться от выбранных стратегий в одностороннем порядке. В случае конечного множества стратегий игроков (так называемых чистых стратегий) выигрыши игроков могут быть записаны с помощью двух матриц, поэтому такая игра называется биматричной.

Известно, что в биматричной игре не всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. В связи с этим рассматривается смешанное расширение биматричной игры, состоящее в том, что игроки задают вероятности выбора чистых стратегий (смешанные стратегии). При этом функциями

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-37-70022).

выигрышей игроков являются математические ожидания случайного выигрыша. В такой биматричной игре всегда существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Поиск равновесия в биматричной игре сводится к решению конечного числа систем линейных уравнений [1]. Другой подход основан на теореме, доказанной в [3], согласно которой все равновесия по Нэшу в биматричной игре являются глобальными оптимумами некоторой квадратичной невыпуклой задачи оптимизации. Метод решения данной задачи с помощью теории d.c.-оптимизации предложен в [4]. Способ сведения поиска равновесия по Нэшу в полиматричной игре к невыпуклой задаче оптимизации предложен в [5].

Не всегда использование математического ожидания в качестве критериальной функции оправданно. Надежность функционирования моделируемой системы целесообразно описывать с помощью функций вероятности и квантили [6]. В биматричной игре можно сформулировать функции потерь игроков в форме вероятности и квантили. Функция вероятности определяется как вероятность непревышения потерями игрока заданного уровня. Значение функции квантили показывает минимальные потери игрока, непревышение которых гарантируется с заданной вероятностью. Данный подход был применен в [7], где формулировалась игра с медианной функцией выигрыша, представляющей собой квантиль уровня 1/2. Методы поиска минимаксной стратегии в игре с квантильным критерием предложены в [8], а для игр со случайными функциями выигрышей — в [9]. Задачи поиска равновесий по Нэшу в этих работах не рассматривались.

Алгоритм поиска равновесия по Нэшу в матричной игре с квантильным критерием предложен в [10], где предполагалось, что первый игрок максимизирует свой гарантированный доход, а второй игрок стремится его минимизировать. В [10] доказано существование равновесия по Нэшу в этой игре. Следует отметить возникающую асимметрию в принятии решений согласно этой модели. С точки зрения второго игрока более выгодна не минимизация гарантированного дохода первого игрока, а максимизация собственного гарантированного выигрыша. В отличие от [10] в данной работе рассматривается биматричная игра, в которой каждый из игроков стремится максимизировать свой гарантированный выигрыш (или минимизировать свои потери). Решаются задачи поиска равновесия по Нэшу в играх с квантильными и вероятностными функциями потерь.

Близкая к рассматриваемой в работе постановка изучалась в [11], где функции выигрышей игроков определяются как квантили усредненных по смешанным стратегиям случайных доходов игроков. Данная игра в [11] называется игрой с вероятностными ограничениями. Для некоторых распределений случайных параметров доказано существование равновесия по Нэшу. В [12] для биматричной игры с вероятностными ограничениями для некоторых распределений случайных параметров предложен метод поиска равновесия по Нэшу, основанный на сведении к задаче квадратичного программирования. Обобщение данных игр на случай непрерывных стратегий приводится в [13]. В отличие от [11, 12] в данной работе используется другой подход к определению функции потерь: рассматривается не квантиль усредненных по смешанным стратегиям случайных доходов игроков, а квантиль случайных доходов игроков без усреднения по стратегиям.

Игры с квантильными критериями нашли свое применение при моделировании взаимодействия экономических агентов [14] и моделировании энергетических рынков [15].

2. Постановка задачи

Пусть поведение первого игрока описывается случайным вектором ξ с реализациями $e_1, \dots, e_m$, где e_k — m-мерный вектор, k-я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Аналогично поведение второго игрока описывается случайным вектором η с реализациями $e'_1, \dots, e'_n$, где e'_l — n-мерный вектор, l-я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Случайные векторы ξ и η определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и являются независимыми. Распределения случайных векторов ξ и η описываются векторами $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых определяются по правилу

$$x_k \triangleq \mathbf{P}\{\xi = e_k\}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$
$$y_l \triangleq \mathbf{P}\{\eta = e'_l\}, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Векторы x, y называются смешанными стратегиями первого и второго игрока соответственно. Они должны удовлетворять ограничениям:

$$x \in X \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{m} x_k = 1,\ x \geqslant 0 \right\},$$
$$y \in Y \triangleq \left\{ \sum_{l=1}^{n} y_l = 1,\ y \geqslant 0 \right\}.$$

Стратегии, в которых только одна компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю, называются чистыми.

Случайные проигрыши (или выигрыши с противоположным знаком) первого и второго игрока при использовании чистых стратегий задаются матрицами $\mathbf{A} \triangleq (\mathbf{a}_{kl})$ и $\mathbf{B} \triangleq (\mathbf{b}_{kl})$, $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, составленными из случайных величин $\mathbf{a}_{kl} \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{b}_{kl} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Таким образом, в результате игры игроки получают случайные выигрыши $-\xi^\top \mathbf{A} \eta$ и $-\xi^\top \mathbf{B} \eta$ соответственно.

В данной статье предполагается, что случайные величины $\mathbf{a}_{kl}$, $\mathbf{b}_{kl}$ являются дискретными с конечным множеством реализаций, а также что случайные векторы ξ, η и случайный вектор, составленный из всех случайных величин $\mathbf{a}_{kl}$, $\mathbf{b}_{kl}$, независимые. Из независимости этих случайных векторов следует, что вероятность события, состоящего в том, что проигрыш первого игрока составит не более заданной величины $\varphi \in \mathbb{R}$, равняется

$$P\left\{\xi^\top \mathbf{A} \eta \leqslant \varphi\right\} = x^\top A(\varphi) y, \tag{1}$$

где элементы матрицы $A(\varphi) = (a_{kl}(\varphi))$ определяются по правилу:

$$a_{kl}(\varphi) \triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{a}_{kl} \leqslant \varphi\}.$$

Аналогично можно определить вероятность того, что проигрыш второго игрока составит не более заданной величины $\psi \in \mathbb{R}$:

$$P\left\{\xi^\top \mathbf{B}\eta \leqslant \psi\right\} = x^\top B(\psi) y,$$

где $B(\psi) = (b_{kl}(\psi))$, $b_{kl}(\psi) \triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{b}_{kl} \leqslant \psi\}$.

Таким образом, следуя принятой в [6] терминологии, можно ввести функции вероятности

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \triangleq \mathbf{P}\left\{\xi^\top \mathbf{A}\eta \leqslant \varphi\right\} = x^\top A(\varphi) y,$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y) \triangleq \mathbf{P}\left\{\xi^\top \mathbf{B}\eta \leqslant \psi\right\} = x^\top B(\psi) y,$$

где φ, ψ — заданные числа. Функции вероятности при заданных значениях x и y как функции параметров φ и ψ являются функциями распределения случайных величин $\xi^\top \mathbf{A}\eta$, $\xi^\top \mathbf{B}\eta$ соответственно. Значения $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y)$, $P_\psi(\mathbf{B}, x, y)$ показывают вероятность благоприятного исхода игры, когда проигрыш оказывается меньше предельно допустимого уровня, для первого и второго игрока соответственно. Таким образом, игроки заинтересованы в максимизации данных вероятностей. Поэтому можно определить игру с вероятностным критерием, которая будет обозначаться как $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$. Для данной игры ставится задача поиска равновесия по Нэшу.

Определение 1. Пара смешанных стратегий $(x, y) \in X \times Y$ называется равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$ с вероятностным критерием, если для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x', y) \leqslant P_\varphi(\mathbf{A}, x, y),$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y') \leqslant P_\psi(\mathbf{B}, x, y).$$

Введем функции квантили

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$
$$\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \min\{\psi \in \mathbb{R} \mid P_\psi(\mathbf{B}, x, y) \geqslant \beta\}, \tag{3}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ — заданные значения функций вероятности. В (2) минимум корректно определен [6] по той причине, что функция $\varphi \mapsto P_\varphi(\mathbf{A}, x, y)$ является функцией распределения случайной величины $\xi^\top \mathbf{A}\eta$, а функция распределения всегда является непрерывной справа. Аналогичное верно и для (3). Таким образом, значение $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ показывает минимальный проигрыш первого игрока, непревышение которого гарантируется с вероятностью α, а $\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y)$ — минимальный проигрыш второго игрока, непревышение которого гарантируется с вероятностью β. Иными словами, значения

$-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ и $-\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y)$ равны максимальным гарантированным с заданными вероятностями выигрышам первого и второго игрока соответственно.

Сформулируем понятие равновесия по Нэшу в игре с квантильным критерием, которая будет обозначаться как $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Определение 2. Пара смешанных стратегий $(x, y) \in X \times Y$ называется равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ с квантильным критерием, если для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x', y) \geqslant \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y),$$
$$\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y') \geqslant \varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y).$$

В статье рассматриваются задачи поиска равновесия по Нэшу в играх $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$ и $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Замечание 1. Отметим отличия игры $Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ от других известных постановок игр с квантильными критериями. Сравнение произведем, используя обозначения данной статьи и заменив функции дохода на функции потерь. В [10] функцией потерь первого игрока является $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$, а функция потерь второго игрока равна $-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$. Это значит, что второй игрок не минимизирует собственные потери, а максимизирует потери соперника. В общем случае $-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \neq \varphi_\alpha(-\mathbf{A}, x, y)$. Поэтому специальные методы, предложенные в [10], не могут быть применены для решения рассматриваемой задачи, даже когда $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$.

В [11, 12] функция потерь определяется следующим образом: $\varphi'_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \mathbf{P}\{x\mathbf{A}y \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$. Заметим, что $\mathbf{P}\{x\mathbf{A}y \leqslant \varphi\} \neq P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = \mathbf{P}\{\xi\mathbf{A}\eta \leqslant \varphi\}$, поскольку $x = \mathbf{M}\xi$, $y = \mathbf{M}\eta$. Это значит, что постановка [11, 12] предполагает усреднение функции потерь по смешанным стратегиям игроков. Отметим, что если матрица $\mathbf{A}$ является детерминированной, то данная постановка сводится к детерминированной игре. Изучаемая в данной работе задача даже в случае детерминированной матрицы $\mathbf{A}$ требует разработки новых методов.

3. Условия равновесия по Нэшу в играх с вероятностным и квантильным критериями

Рассмотрим произвольные случайные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, задающие игру с вероятностным или квантильным критерием. Расположим уникальные значения реализаций элементов матрицы $\mathbf{A}$ в порядке возрастания и обозначим их через $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$. Определим случайные величины $\bar{\mathbf{a}}_{kl}$ по правилу: $\bar{\mathbf{a}}_{kl} = i$, если $\mathbf{a}_{kl} = \varphi_i$. Составим случайную матрицу $\bar{\mathbf{A}} \triangleq (\bar{\mathbf{a}}_{kl})$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$. Аналогично по матрице $\mathbf{B}$ построим матрицу $\bar{\mathbf{B}} = \left(\bar{\mathbf{b}}_{kl}\right)$, а реализации ее элементов, расположенные в порядке возрастания, обозначим через $\psi_1, \ldots, \psi_N$. Для удобства будем считать, что $\varphi_{M+1} = \psi_{N+1} = +\infty$. Игру с вероятностным или квантильным критерием, задаваемую полученными случайными матрицами $\bar{\mathbf{A}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$, назовем игрой в стандартной форме. В полученной игре элементы матриц $\bar{\mathbf{A}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$ принимают значения во множествах $\{1, \ldots, M\}$, $\{1, \ldots, N\}$ соответственно.

Введем матрицы $A(\varphi) \triangleq \{a_{kl}(\varphi)\}$ и $B(\psi) \triangleq \{b_{kl}(\psi)\}$, элементы которых определяются по правилу

$$a_{kl}(\varphi) = \mathbf{P}\{\mathbf{a}_{kl} \leqslant \varphi\}, \quad b_{kl}(\psi) = \mathbf{P}\{\mathbf{b}_{kl} \leqslant \psi\},$$
$$k \in \{1, \dots, m\}, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Аналогично определяются матрицы $\bar{A}(\varphi) \triangleq \{\bar{a}_{kl}(\varphi)\}$ и $\bar{B}(\psi) \triangleq \{\bar{b}_{kl}(\psi)\}$:

$$\bar{a}_{kl}(\varphi) = \mathbf{P}\{\bar{\mathbf{a}}_{kl} \leqslant \varphi\}, \quad \bar{b}_{kl}(\psi) = \mathbf{P}\{\bar{\mathbf{b}}_{kl} \leqslant \psi\}. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$A_i \triangleq \bar{A}(i), \quad B_j \triangleq \bar{B}(j), \quad i \in \{0, 1, \dots, M\}, \quad j \in \{0, 1, \dots, N\}. \tag{5}$$

Заметим, что матрицы A_0 и B_0 являются нулевыми, а все элементы матриц A_M и B_N равны единице.

Лемма 1. Если $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$, *то*

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = x^\top A(\varphi) y = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = x^\top A_i y.$$

Доказательства леммы 1 и последующих теорем, лемм и следствий вынесены в Приложение.

Теорема 1. Пусть $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$, $\psi_j \leqslant \psi < \psi_{j+1}$. *Тогда следующие три утверждения эквиваленты:*

1) *пара стратегий* $(x, y) \in X \times Y$ *является равновесной в игре* $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$;
2) *пара стратегий* $(x, y) \in X \times Y$ *является равновесной в игре* $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i, j)$;
3) *для всех* $x' \in X$ *и* $y' \in Y$

$$x'^\top A_i y \leqslant x^\top A_i y,$$
$$x^\top B_j y' \leqslant x^\top B_j y.$$

Таким образом, полученный критерий позволяет любую игру с вероятностным критерием свести к игре в стандартной форме. Отметим, что множество игр в стандартной форме при фиксированных m, n является конечным.

Из теоремы 1 следует, что равновесие в игре с вероятностным критерием эквивалентно равновесию в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков A_i и B_j, определенными в (5). Поэтому для поиска равновесия в игре с вероятностным критерием можно применять методы, разработанные для биматричных игр с критерием в форме математического ожидания [1, 4]. Как известно, такое равновесие всегда существует [1].

Перейдем к изучению игр с квантильным критерием.

Лемма 2. Для любых стратегий $(x, y) \in X \times Y$ *выполнено*

1) $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$;
2) $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $i \in \{1, \dots, M\}$.

Сформулируем теорему о необходимых и достаточных условиях равновесия по Нэшу в игре с квантильным критерием.

Теорема 2. Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$. Тогда следующие три утверждения эквиваленты:

1) *пара стратегий $(x,y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$;*
2) *пара стратегий $(x,y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$;*
3) *для некоторых $i \in \{1, \ldots, M\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$ выполнены неравенства*

$$x^\top A_i y \geqslant \alpha, \tag{6}$$

$$x^\top B_j y \geqslant \beta, \tag{7}$$

$$\|A_{i-1} y\|_\infty < \alpha, \tag{8}$$

$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty < \beta, \tag{9}$$

где $\|x\|_\infty = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,m\}} |x_k|$.

При этом выполнены равенства

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i, \quad \varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \psi_j, \quad \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j.$$

Таким образом, любая игра с квантильным критерием может быть сведена к игре в стандартной форме. Кроме того, теорема 2 описывает простые условия для проверки равновесности заданной пары стратегий игроков, не требующие вычисления функций квантили. Для проверки этих условий необходимо только вычислить матрицы A_i, B_j, A_{i-1}, B_{j-1} по формуле (5).

Сформулируем следствия из теоремы 2.

Докажем, что если в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков $-\mathbf{A}$ и $-\mathbf{B}$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, то те же стратегии являются равновесными в игре с квантильным критерием.

Следствие 1. Пусть для пары стратегий (e_k, e'_l) с вероятностью единица выполнены условия

$$e_{k'}^\top \mathbf{A} e'_l \geqslant e_k^\top \mathbf{A} e'_l,$$
$$e_k^\top \mathbf{B} e'_{l'} \geqslant e_k^\top \mathbf{B} e'_l$$

для всех $k' \in \{1, \ldots, m\}$, $l' \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда (e_k, e'_l) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$.

Нижеприведенные следствия определяют необходимые условия, которым должны удовлетворять i, j, чтобы существовало решение системы неравенств (6)–(9).

Следствие 2. Если $(x,y) \in X \times Y$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$, $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$, то матрица A_{i-1} не содержит строк, все элементы которых не меньше α, а матрица B_{j-1} не содержит столбцов, все элементы которых не меньше β.

Отметим, что если матрица A_{i-1} содержит строку, все элементы которой не меньше α, то матрицы $A_i, \ldots, A_M$ обладают тем же свойством.

Следствие 3. Если $(x, y) \in X \times Y$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$, $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$, то хотя бы один элемент матрицы $A_i + B_j$ не меньше $\alpha + \beta$.

Отметим, что если все элементы матрицы $A_i + B_j$ меньше $\alpha + \beta$, то таким же свойством обладают матрицы $A_{i'} + B_{j'}$ при $i' \leqslant i$, $j' \leqslant j$.

4. О связи игр с квантильным и вероятностным критериями

Докажем теорему о том, что равновесная пара стратегий в игре с вероятностным критерием при некоторых значениях уровней надежности является равновесной и в игре с квантильным критерием.

Теорема 3. Пусть (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i-1, j-1)$, $i \in \{1, \ldots, M\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Тогда (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$ для

$$\alpha \in (x^\top A_{i-1} y, x^\top A_i y], \quad \beta \in (x^\top B_{j-1} y, x^\top B_j y]. \tag{10}$$

К сожалению, доказать или опровергнуть существование равновесия в произвольной игре с квантильным критерием затруднительно. Это связано с тем, что график многозначного отображения $x \mapsto \operatorname{Arg}\min\limits_{y \in Y} \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ не является замкнутым, что не позволяет применить теорему Какутани, используемую для доказательства существования равновесия в игре с критерием в форме математического ожидания [1]. Однако теорема 3 показывает, что при некоторых значениях α и β в игре с квантильным критерием равновесие существует. При проведении многочисленных вычислительных экспериментов авторам не удалось найти примеров, в которых не существует равновесных стратегий.

5. Алгоритм поиска равновесия в игре с квантильным критерием

Полученные следствия из теоремы 2 позволяют предложить алгоритм поиска равновесных пар стратегий в игре с квантильным критерием. Введем обозначения:

$$\overline{M} \triangleq \max\left\{ i \in \{1, \ldots, M\} \mid \max_{k \in \{1,\ldots,m\}} \min_{l \in \{1,\ldots,n\}} \bar{a}_{kl}(i-1) < \alpha \right\},$$

$$\overline{N} \triangleq \max\left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \mid \max_{l \in \{1,\ldots,n\}} \min_{k \in \{1,\ldots,m\}} \bar{b}_{kl}(j-1) < \beta \right\},$$

$$\underline{N}(i) \triangleq \min\left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \mid \max_{\substack{k \in \{1,\ldots,m\},\\ l \in \{1,\ldots,n\}}} \{\bar{a}_{kl}(i) + \bar{b}_{kl}(j)\} \geqslant \alpha + \beta \right\},$$

где $\bar{a}_{kl}(i)$, $\bar{b}_{kl}(j)$ определены в (4). Пусть

$$\underline{M} \triangleq \min\{i \in \{1, \ldots, M\} \mid \underline{N}(i) \leqslant \overline{N}\}.$$

Для поиска равновесий по Нэшу в игре с квантильным критерием можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Установить $i := \underline{M}$.

2. Если $i \leqslant \overline{M}$, установить $j := \underline{N}(i)$. В противном случае завершить выполнение алгоритма.

3. Если $j \leqslant \overline{N}$, то перейти к следующему шагу. Иначе перейти к шагу 6.

4. Найти пару стратегий $(x, y) \in X \times Y$, удовлетворяющую ограничениям (6)–(9). Если такая пара (x, y) найдена, то она является равновесной.

5. $j := j + 1$. Перейти к шагу 3.

6. $i := i + 1$. Перейти к шагу 2.

Отметим, что при выполнении алгоритма перебираются только те значения i, j, для которых выполнены необходимые условия существования решения системы (6)–(9), обеспечиваемые следствиями 2, 3.

При практической реализации алгоритма могут возникать трудности с проверкой на непустоту в общем случае незамкнутого множества, описываемого ограничениями (6)–(9). Данная проблема может быть решена двумя способами. Первый способ состоит в замене ограничений (8), (9) на ограничения

$$\|A_{i-1}y\|_\infty \leqslant \alpha - \varepsilon, \tag{11}$$

$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty \leqslant \beta - \varepsilon, \tag{12}$$

где ε — малая положительная константа. Ограничения (11), (12) эквивалентны линейным ограничениям

$$A_{i-1}y \leqslant (\alpha - \varepsilon)\mathbf{e}_m, \tag{13}$$

$$B_{j-1}^\top x \leqslant (\beta - \varepsilon)\mathbf{e}_n, \tag{14}$$

где $\mathbf{e}_m$ — вектор, составленный из m единиц. При использовании данного подхода задача сводится к проверке на непустоту множества, описываемого линейными и квадратичными (в общем случае невыпуклыми) ограничениями (6), (7), (13), (14). Данная задача может быть решена с помощью программ, предназначенных для решения линейных и квадратичных задач математического программирования с линейными и квадратичными ограничениями. Следует заметить, что при использовании данного подхода возможна потеря некоторых решений исходной задачи.

Второй подход состоит в решении задачи

$$\theta^* \triangleq \tag{15}$$

$$\triangleq \min_{\theta\in\mathbb{R},\, x\in X,\, y\in Y} \left\{\theta \mid A_{i-1}y \leqslant \alpha\mathbf{e}_m\theta,\ B_{j-1}^\top x \leqslant \beta\mathbf{e}_n\theta,\ x^\top A_i y \geqslant \alpha,\ x^\top B_j y \geqslant \beta\right\}.$$

В задаче (15) минимум достигается, потому что множество допустимых значений (x, y) является компактом, а ограничение $\theta \in \mathbb{R}$ может быть заменено на $\theta \in \left[0, \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\}\right]$. Сформулированная задача также может быть решена с помощью специальных программ. Нетрудно заметить, что $\theta^* < 1$ в том и только том случае, когда множество, описываемое ограничениями (6)–(9), непусто. Если $\theta^* < 1$, то пара оптимальных значений переменных (x, y) в задаче (15) будет являться равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Следует заметить, что ограничения (6), (7) являются невыпуклыми. Поэтому проверка на совместность системы неравенств (6), (7), (13), (14) или решение задачи (15) является трудоемким. В связи с этим представляют интерес быстрые методы поиска пар стратегий (x, y), удовлетворяющих ограничениям (6)–(9). Предлагается следующий алгоритм, с помощью которого могут быть найдены решения системы неравенств (6)–(9).

Алгоритм 2.

1. Задать начальное значение стратегии второго игрока $y^{(0)} \in Y$, $\nu := 0$.

2. Решить задачу линейного программирования:

$$\theta_1^{(\nu)} \triangleq \max_{\theta \in \mathbb{R},\, x \in X} \left\{\theta \mid x^\top A_i y^{(\nu)} \geqslant \alpha\theta,\ x^\top B_j y^{(\nu)} \geqslant \beta\theta,\ B_{j-1}^\top x \leqslant (\beta - \varepsilon)\mathbf{e}_n\right\}. \tag{16}$$

Оптимальное значение переменной x в задаче (16) обозначим через $x^{(\nu)}$. Если у этой задачи нет решений, то система неравенств (6), (7), (13), (14) несовместна. Если $\nu > 0$ и $\theta_1^\nu \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\nu > 1$ и $\theta_1^{(\nu)} \leqslant \theta_1^{(\nu-1)}$, завершить выполнение алгоритма.

3. Решить задачу линейного программирования:

$$\theta_2^{(\nu)} \triangleq \max_{\theta \in \mathbb{R},\, y \in Y} \left\{\theta \mid x^{(\nu)\top} A_i y \geqslant \alpha\theta,\ x^{(\nu)\top} B_j y \geqslant \beta\theta,\ A_{i-1} y \leqslant (\alpha - \varepsilon)\mathbf{e}_m\right\}. \tag{17}$$

Оптимальное значение переменной y в задаче (17) обозначим через $y^{(\nu+1)}$. Если у этой задачи нет решений, то система неравенств (6), (7), (13), (14) несовместна. Если $\theta_2^\nu \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu+1)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

4. Присвоить $\nu := \nu + 1$ и перейти к шагу 2.

При $\nu = 0$ в результате применения алгоритма находится пара стратегий $(x^{(0)}, y^{(1)})$, удовлетворяющая неравенствам (13), (14). Затем получается возрастающая последовательность $\theta_1^{(1)} \leqslant \theta_2^{(1)} \leqslant \theta_1^{(2)} \leqslant \theta_2^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \theta_q^{(\nu)}$, где $q = 1$ или $q = 2$. Если $\theta_1^{(\nu)} \geqslant 1$ и $\nu > 0$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\theta_2^{(\nu)} \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu+1)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\theta_1^{(\nu)} < 1$ или $\theta_2^{(\nu)} < 1$, то для поиска равновесной пары стратегий можно снова воспользоваться алгоритмом 2, задав другую начальную стратегию $y^{(0)}$. В силу невыпуклой структуры рассматриваемой задачи нельзя гарантировать, что в результате применения алгоритма будет найдено решение системы неравенств (6), (7), (13), (14), если оно существует. Однако в случае успешного применения алгоритма 2 нет необходимости решать задачу невыпуклой оптимизации.

Предложим алгоритм поиска начальной стратегии $y^{(0)} \in Y$ для применения алгоритма 2.

Алгоритм 3.

1. Найти максимальные элементы матриц $A_i - A_{i-1}$ и $B_j - B_{j-1}$. Обозначим индексы этих элементов через (k_1, l_1), (k_2, l_2) соответственно.

2. Если $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, то при выполнении условий $a_{k_1 l_1} \leqslant a_{k l_1}$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$, $b_{k_2 l_2} \leqslant b_{k_2 l}$ для всех $l \in \{1, \dots, n\}$ определить $y^{(0)} = e'_{l_1}$. Если $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, но указанные условия не выполнены, то найти

$$l^* = \arg \max_{l \in \{1, \dots, j\}} \{a_{k_1 l} \mid a_{k_1 l} + a_{k_1 l_2} \leqslant 1\}.$$

Если для всех l выполнено $a_{k_1 l} + a_{k_1 l_2} > 1$, определить l^* произвольно. Задать $y^{(0)}_{l_2} = \alpha - \varepsilon$, $y^{(0)}_{l^*} = 1 - \alpha + \varepsilon$, где ε — малая положительная константа.

3. Если $k_1 \neq k_2$, $l_1 = l_2$, то найти такой индекс $l^* \neq l_1$, для которого при всех k выполнено $a_{kl^*} + a_{kl_1} \leqslant 1$. Если такого индекса нет, то определить l^* произвольно.

4. Если $l_1 \neq l_2$, то $y^{(0)}_{l_1} = y^{(0)}_{l_2} = 1/2$.

Идея предлагаемого алгоритма 3 состоит в том, чтобы увеличить левые части неравенств (6), (7), но при этом по возможности не нарушить неравенства (8), (9).

6. Примеры

6.1. Игра 2×2

При $m = n = 2$ наибольший интерес представляют игры, в которых не существует равновесия в чистых стратегиях. Таковой является игра в стандартной форме с детерминированными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \beta < 1$. Тогда для $i = j = 3$ система неравенств (6)–(9) примет вид

$$\begin{gathered} x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = 1 - x_1 y_2 \geqslant \alpha, \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = 1 - x_1 y_1 \geqslant \beta, \\ y_1 < \alpha,\ y_2 < \alpha, \\ x_1 < \beta,\ x_2 < \beta. \end{gathered}$$

Как нетрудно проверить, данной системе неравенств удовлетворяет пара стратегий (x, y), если

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in (1 - \beta, \min\{\beta, 2(1 - \beta)\}).$$

Если $\alpha < \beta < 1$, $\beta > \frac{1}{2}$, то первый игрок может уменьшить свои потери до $i = 2$, при этом $j = 3$. Соответствующая система неравенств (6)–(9) принимает вид

$$\begin{gathered} x_1 y_1 + x_2 y_2 \geqslant \alpha, \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \geqslant \beta, \\ y_1 < \alpha, \\ x_1 < \beta, \ x_2 < \beta. \end{gathered}$$

Данной системе неравенств удовлетворяют пары стратегий (x, y), если

$$x = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in (\max\{\alpha, 1 - \beta\}, \beta).$$

6.2. Игры 3×3

Разработанный алгоритм поиска равновесия в игре с квантильным критерием был программно реализован на языке matlab с использованием решателя задач квадратичного программирования gurobi. Исходные данные этих задач и найденные точки равновесия в игре с квантильным критерием приведены в табл. 1.

В первой строке таблицы приведено решение задачи для игры с нулевой суммой. При равных значениях α и β было найдено две пары равновесных стратегий, соответствующих различным потерям второго игрока: $j = 6$ и $j = 7$. Потери первого игрока для каждой из полученных стратегий одинаковы и равны $i = 5$. Если $\alpha < \beta$, то в игре имеется три равновесных стратегии с различными потерями игроков. Отметим, что в данном случае первый игрок имеет возможность уменьшить свои потери до $i = 3$. Это связано с уменьшением уровня его доверительной вероятности. Оставшиеся две равновесные точки обеспечивают те же потери, что и в случае $\alpha = \beta$.

Во второй строке табл. 1 приведено решение для игры с ненулевой суммой. Для уровней вероятности $\alpha = \beta = 0{,}9$ и $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}9$ были найдены три равновесные стратегии. Отметим, что при уменьшении доверительной вероятности первого игрока его потери могут быть снижены до минимально возможных.

В третьей строке табл. 1 приведены результаты вычислений для случайных матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Случайная величина τ принимает 4 равновероятных значения: 0, 1, 2, 3.

Приведенные решения были найдены менее чем за одну секунду.

Таблица 1. Равновесные стратегии в игре 3×3

A	B	α	β	i	j	x	y
$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	5	6	$\begin{pmatrix} 0{,}0999 \\ 0{,}1001 \\ 0{,}8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8999 \\ 0{,}1001 \\ 0 \end{pmatrix}$
				5	7	$\begin{pmatrix} 0{,}1461 \\ 0{,}8476 \\ 0{,}0063 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}5005 \\ 0{,}4752 \\ 0{,}0243 \end{pmatrix}$
		0,8	0,9	3	7	$\begin{pmatrix} 0{,}1078 \\ 0{,}8844 \\ 0{,}0078 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}0399 \\ 0{,}8998 \\ 0{,}0603 \end{pmatrix}$
				5	6	$\begin{pmatrix} 0{,}0998 \\ 0{,}1001 \\ 0{,}8001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}7999 \\ 0 \\ 0{,}2001 \end{pmatrix}$
				5	7	$\begin{pmatrix} 0{,}1462 \\ 0{,}7538 \\ 0{,}1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}2001 \\ 0{,}7999 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	4	4	$\begin{pmatrix} 0{,}0077 \\ 0{,}8935 \\ 0{,}0988 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8968 \\ 0{,}1032 \\ 0 \end{pmatrix}$
				4	5	$\begin{pmatrix} 0{,}1001 \\ 0{,}8999 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8902 \\ 0{,}0110 \\ 0{,}0988 \end{pmatrix}$
				5	5	$\begin{pmatrix} 0{,}8973 \\ 0{,}0923 \\ 0{,}0104 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8092 \\ 0{,}0906 \\ 0{,}1002 \end{pmatrix}$
		0,8	0,9	1	5	$\begin{pmatrix} 0{,}8999 \\ 0{,}1001 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8891 \\ 0{,}0987 \\ 0{,}0122 \end{pmatrix}$
				4	5	$\begin{pmatrix} 0{,}6284 \\ 0{,}3716 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}7877 \\ 0{,}0334 \\ 0{,}1789 \end{pmatrix}$
				5	5	$\begin{pmatrix} 0{,}7938 \\ 0{,}0769 \\ 0{,}1293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}7866 \\ 0{,}0133 \\ 0{,}2001 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	4	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9001 \\ 0{,}0999 \\ 0 \end{pmatrix}$
				4	4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8668 \\ 0{,}1332 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
				6	6	$\begin{pmatrix} 0{,}1707 \\ 0 \\ 0{,}8293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1707 \\ 0{,}8293 \end{pmatrix}$
				6	7	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1998 \\ 0{,}8002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}5000 \end{pmatrix}$
				7	5	$\begin{pmatrix} 0{,}3592 \\ 0{,}5947 \\ 0{,}0461 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}8756 \\ 0 \\ 0{,}1244 \end{pmatrix}$
				7	6	$\begin{pmatrix} 0{,}1214 \\ 0{,}0456 \\ 0{,}8330 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3340 \\ 0 \\ 0{,}6660 \end{pmatrix}$
				7	7	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}2000 \\ 0{,}8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4000 \\ 0 \\ 0{,}6000 \end{pmatrix}$

Все эти решения, кроме одного, были найдены как с помощью точного решения систем неравенств (6), (7), (13), (14), так и с помощью быстрых алгоритмов 2 и 3. Во втором примере не удалось найти стратегию, соответствующую $i = 4$, $j = 5$, при $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}9$.

6.3. Игра 6×8

Рассматривается игра $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, 0{,}9, 0{,}9)$, задаваемая детерминированными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 30 & 11 & 8 & 30 & 25 & 26 & 26 & 28 \\ 13 & 20 & 18 & 11 & 28 & 9 & 12 & 29 \\ 5 & 1 & 29 & 24 & 27 & 10 & 35 & 7 \\ 32 & 35 & 19 & 21 & 15 & 3 & 2 & 18 \\ 23 & 6 & 16 & 31 & 24 & 4 & 22 & 17 \\ 4 & 35 & 33 & 34 & 7 & 30 & 14 & 24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 28 & 20 & 30 & 23 & 34 & 3 & 21 & 12 \\ 10 & 5 & 9 & 18 & 11 & 2 & 17 & 20 \\ 19 & 6 & 25 & 13 & 32 & 16 & 1 & 7 \\ 26 & 10 & 13 & 30 & 15 & 29 & 13 & 22 \\ 33 & 31 & 8 & 22 & 14 & 34 & 6 & 10 \\ 35 & 4 & 36 & 20 & 21 & 27 & 29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Для поиска равновесных стратегий применялся разработанный алгоритм. Во избежание возможных ошибок округления вместо системы неравенств (6)–(9) решалась система неравенств

$$x^\top A_i y \geqslant \alpha + \varepsilon,$$
$$x^\top B_j y \geqslant \beta + \varepsilon,$$
$$\|A_{i-1} y\|_\infty \leqslant \alpha - \varepsilon,$$
$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty \leqslant \beta - \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$.

В данной игре удалось найти 86 пар равновесных стратегий, соответствующих различным значениям целевых функций игроков. Соответствующие значения отражены в табл. 2. По строкам расположены значения функции квантили первого игрока, а по столбцам — второго игрока. Знаками * и + отмечены те пары значений (i, j), для которых удалось найти равновесные стратегии, при этом знаком + отмечены те значения (i, j), для которых удалось найти решение с помощью быстрого алгоритма 2 с начальным решением, получаемым с помощью алгоритма 3. Алгоритм 2 позволил найти 49 решений задачи.

Приведем решение, оптимальное по Парето (соответствующее значениям $(i, j) = (5, 6)$):

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0630 \\ 0{,}8999 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0371 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0{,}0963 \\ 0{,}8999 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0038 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2. Найденные равновесия в игре 6×8

$i\backslash j$	6	9	10	12	13	16	17	20	21	22	23	24
5	+											
6	*											
7	*											
10	*		*			*	*					
11	*	*				*						
12		+					+					
13		+					+					
15		*					*					
16	*	+		+	+	*	*					
17	*	*		+	*		+					
18		+	+	*	+	+	+	+				
19			*	*	+	*	+	*	+			
20	+		+	*	+	+	+	+	*			
21			*		*			*				
22			+	+	+	*	+	*	*			
23					+		*		+			
24					*	+	+	+	+	+	+	+
27						*				*		+
28						*		+	+	+	+	*
29						+	*	+	+	+	+	+

Вычисления проводились на ЭВМ с процессором Intel(R) Core(TM) i5-6300U, 2,4 ГГц, 8 ГБ ОЗУ. Вычислительное время при применении алгоритма 1 составило 6363 с, а при применении быстрого алгоритма 2 — всего лишь 7,5 с.

Приведенный пример показывает, что в игре небольшой размерности может существовать большое количество пар равновесных стратегий, соответствующих различным потерям игроков. При этом их поиск может требовать значительного объема вычислений, однако большая часть решений может быть найдена достаточно быстро с помощью алгоритмов 2 и 3.

7. Заключение

В работе были рассмотрены задачи поиска равновесия в играх с вероятностными и квантильными критериями. Задача с вероятностным критерием была сведена к биматричной игре с функциями выигрышей в форме математических ожиданий. Для решения задачи с квантильным критерием предложен алгоритм, основанный на последовательном решении задач поиска точек множеств, описываемых квадратичными невыпуклыми ограничениями. Однако вопрос о существовании равновесия в произвольной игре с квантильным критерием остается открытым. Авторы провели большое количество вычислений на случайно моделируемых данных, в результате которых не удалось обнаружить примеров, когда не существует равновесных стратегий. К сожалению, поиск равновесных стратегий в игре с квантильным критерием размерности 6×8 продолжался более часа. По этой причине был предложен быстрый метод поиска равновесий, с помощью которого удалось найти 49 из 86 решений задачи. Отметим, что многие из рассмотренных в работе подходов могут быть перенесены в дальнейшем на случай игры нескольких лиц. Также представляют интерес игры с квантильным критерием и непрерывным распределением случайных параметров, для анализа которых требуется разработка новых методов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Первое равенство следует из независимости ξ и η и установлено в (1). Из определения величин φ_i и неравенства $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$ следует, что $a_{kl}(\varphi) = \bar{a}_{kl}(i)$. Поэтому

$$x^\top A(\varphi)y = x^\top A_i y = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Теорема следует из определения 1 равновесия по Нэшу в игре с вероятностным критерием и из леммы 1, согласно которой

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = x^\top A_i y,$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y) = P_j(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = x^\top B_j y.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем утверждение 1) леммы. Предположим противное. Тогда возможны две ситуации: $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) < \varphi_1$ или $\varphi_i < \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) < \varphi_{i+1}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, M\}$. В первом случае $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = 0$, что противоречит неравенству $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \geqslant \alpha$ в определении квантили, так как $\alpha > 0$. Во втором случае $\alpha \leqslant P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = P_{\varphi_i}(\mathbf{A}, x, y)$, откуда следует, что $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \leqslant \varphi_i$. Полученное противоречие доказывает утверждение 1) леммы.

Утверждение 2) леммы следует из леммы 1, согласно которой $P_{\varphi_i}(\mathbf{A}, x, y) = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 и упорядоченности величин φ_i и ψ_j следует эквивалентность утверждений 1) и 2).

Отметим, что

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = \min\left\{i \in \{1, \ldots, M\} \mid x^\top A_i y \geqslant \alpha\right\},$$
$$\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = \min\left\{j \in \{1, \ldots, N\} \mid x^\top B_j y \geqslant \beta\right\}.$$

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 3). Пусть для заданной пары $(x, y) \in X \times Y$ выполнено $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$. Это значит, что

$$x^\top A_i y \geqslant \alpha, \quad x^\top B_j y \geqslant \beta.$$

Неравенства (6), (7) доказаны. Из определения равновесия по Нэшу следует, что для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \tag{П.1}$$

$$\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y') \geqslant \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j. \tag{П.2}$$

Докажем, что для всех $x' \in X$, $y' \in Y$

$$x'^\top A_{i-1} y < \alpha, \tag{П.3}$$

$$x^\top B_{j-1} y' < \beta. \tag{П.4}$$

Предположим противное. Пусть для определенности нарушается неравенство (П.3) при некотором $x' \in X$. Это значит, что $P_{i-1}(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant \alpha$, но тогда в силу определения функции квантили $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \leqslant i-1$, что противоречит неравенству (П.1). Аналогично устанавливается, что при $x^\top B_{j-1} y' \geqslant \beta$ нарушается неравенство (П.2). Таким образом, неравенства (П.3) и (П.4) доказаны.

В силу того, что множества X и Y компактны, выполнение неравенств (П.3) и (П.4) для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ эквивалентно неравенствам

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y < \alpha, \quad \max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' < \beta. \tag{П.5}$$

Заметим, что $\|x\|_1 \triangleq \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k| = 1$, $\|y\|_1 = 1$. Поэтому

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y \leqslant \|A_{i-1} y\|_\infty \|x\|_1 = \|A_{i-1} y\|_\infty,$$
$$\max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' \leqslant \|B_{j-1}^\top x\|_\infty \|y\|_1 = \|B_{j-1}^\top x\|_\infty.$$

Верхние оценки данных максимумов достигаются, если $x' = e_{k^*}$, $y' = e_{l^*}$, где k^* и l^* номера максимальных компонент векторов $A_{i-1} y$ и $B_{j-1}^\top x$ соответственно. Поэтому

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y = \|A_{i-1} y\|_\infty, \tag{П.6}$$

$$\max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' = \|B_{j-1}^\top x\|_\infty. \tag{П.7}$$

Доказываемые неравенства (8), (9) следуют из полученных равенств (П.6), (П.7) и неравенств (П.5).

Пусть теперь выполнено утверждение 3). Из неравенств (6)–(9) следует, что $x^\top A_i y \geqslant \alpha$ и $x^\top A_{i-1} y < \alpha$, $x^\top B_j y \geqslant \beta$ и $x^\top B_{j-1} y < \beta$. Значит,

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j. \tag{П.8}$$

Из неравенств (8), (9) следует, что при любых $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено ${x'}^\top A_{i-1} y < \alpha$, $x^\top B_{j-1} y' < \beta$. Поэтому

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y') \geqslant j. \tag{П.9}$$

Из равенств (П.8) и неравенств (П.9) следует, что пара стратегий (x, y) является равновесной. Эквивалентность утверждений 2) и 3) доказана.

Равенства $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i$, $\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \psi_j$ следуют из (П.8) и леммы 2. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Из условий следствия и леммы 1 вытекает, что при всех $i \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1})$, $\psi \in [\psi_j, \psi_{j+1})$ выполнены неравенства

$$e_{k'}^\top A_i e_l' = \mathbf{P}\left\{e_{k'}^\top \mathbf{A} e_l' \leqslant \varphi\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{e_k^\top \mathbf{A} e_l' \leqslant \varphi\right\} = e_k^\top A_i e_l', \tag{П.10}$$

$$e_k^\top B_j e_{l'}' = \mathbf{P}\left\{e_k^\top \mathbf{B} e_{l'}' \leqslant \psi\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{e_k^\top \mathbf{B} e_l' \leqslant \psi\right\} = e_k^\top B_j e_l'. \tag{П.11}$$

Пусть $i^* = \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, e_k, e_l')$, $j^* = \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, e_k, e_l')$. Тогда по определению (2) квантили $e_k^\top A_{i^*} e_l' \geqslant \alpha$, $e_k^\top B_{j^*} e_l' \geqslant \beta$, $e_k^\top A_{i^*-1} e_l' < \alpha$, $e_k^\top B_{j^*-1} e_l' < \beta$. Из этих неравенств и неравенств (П.10) и (П.11) следует, что

$$\|A_{i^*-1} e_l'\|_\infty = \max_{k' \in \{0,1,\ldots,m\}} e_{k'}^\top A_{i^*-1} e_l' < \alpha,$$
$$\|B_{j^*-1} e_l'\|_\infty = \max_{l' \in \{0,1,\ldots,n\}} e_k^\top B_{j^*-1} e_{l'}' < \beta.$$

Таким образом, из теоремы 2 следует, что (e_k, e_l') — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Если A_{i-1} содержит строку, все элементы которой не меньше α, то $\|A_{i-1} y\|_\infty \geqslant \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha y_l = \alpha$, что противоречит неравенству (8). Аналогично, если B_{j-1} имеет столбец, все элементы которого не меньше β, то $\|B_{j-1}^\top x\|_\infty \geqslant \beta$, что противоречит (9). Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Предположим противное: все элементы матрицы $A_i + B_j$ меньше $\alpha + \beta$. Тогда

$$x^\top (A_i + B_j) y < (\alpha + \beta) \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} x_k y_l = \alpha + \beta. \tag{П.12}$$

С другой стороны, складывая неравенства (6) и (7), получаем

$$x^\top (A_i + B_j) y \geqslant \alpha + \beta,$$

что противоречит неравенству (П.12). Следствие 3 доказано.

Доказательство теоремы 3. Пусть (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i-1, j-1)$. Тогда

$$\|A_{i-1}y\|_\infty = x^\top A_{i-1}y,$$
$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty = x^\top B_{j-1}y.$$

Таким образом, при α и β, удовлетворяющих условию (10), выполнены неравенства (6)–(9), сформулированные в критерии равновесия в квантильной игре. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
2. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
3. *Mills H.* Equilibrium points in finite games // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1960. V. 8. No. 2. P. 397–402.
4. *Орлов А.В., Стрекаловский А.С.* О численном поиске ситуаций равновесия в биматричных играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. Т. 45. № 6. С. 983–997.

   Orlov A.V., Strekalovskii A.S. Numerical search for equilibria in bimatrix games // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. V. 45. No. 6. P. 947–960.
5. *Стрекаловский А.С., Энхбат Р.* Полиматричные игры и задачи оптимизации // АиТ. 2014. № 4. С. 51–66.

   Strekalovskii A.S., Enkhbat R. Polymatrix Games and Optimization Problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. P. 632–645.
6. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
7. *Walsh J.E.* Median Two-Person Game Theory for Median Competitive Games // J. Oper. Res. Soc. Jpn. 1969. V. 12. No. 1. P. 11–20.
8. *De Vries H.* Quantile Criteria for the Selection of Strategies in Game Theory // Int. J. Game Theory. 1974. V. 3. No. 2. P. 105–114.
9. *Cassidy R.G., Field C.A., Kirby M.J.L.* Solution of a Satisficing Model for Random Payoff Games // Manage. Sci. 1972. V. 19. No. 3. P. 266–271.
10. *Popov L.D.* Methods for Matrix Games with Mixed Strategies and Quantile Payoff Function / Bykadorov I., Strusevich V., Tchemisova T. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Communications in Computer and Information Science, v. 1090. Cham: Springer, 2019. P. 304–318.
11. *Singh V.V., Jouini O., Lisser A.* Existence of Nash Equilibrium for Chance-Constrained Games // Oper. Res. Lett. 2016. V. 44. P. 640–644.
12. *Singh V.V., Lisser A.* A Characterization of Nash Equilibrium for the Games with Random Payoffs // J. Optimiz. Theory App. 2018. V. 178. P. 998–1013.
13. *Singh V.V., Lisser A.* Variational inequality formulation for the games with random payoffs // J. Global Optim. 2018. V. 72. P. 743–760.

14. *Konyukhovskiy P.V., Malova A.S.* Game-Theoretic Models of Collaboration among Economic Agents // Contributions to Game Theory and Management. 2013. V. 6. P. 211–221.

15. *Mazadi M., Rosehart W.D., Zareipour H., Malik O.P., Oloomi M.* Impact of wind integration on electricity markets: A chance-constrained Nash Cournot model // Int. Trans. Electr. Energy Syst. 2013. V. 23. No. 1. P. 83–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 10.08.2020

После доработки 15.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. А.Л. ШЕСТАКОВ, д-р техн. наук (a.l.shestakov@susu.ru), А.А. ЗАМЫШЛЯЕВА, д-р физ.-мат. наук (zamyshliaevaaa@susu.ru), Н.А. МАНАКОВА, д-р физ.-мат. наук (manakovana@susu.ru), Г.А. СВИРИДЮК, д-р физ.-мат. наук (sviridyuk@susu.ru) (Южно-Уральский государственный университет, Челябинск), А.В. КЕЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (alevtinak@inbox.ru) (Воронежский государственный технический университет)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ[1]

Представлен новый алгоритм обработки результатов динамических измерений, при которых по известному выходному или наблюдаемому сигналу и известной передаточной функции измерительного устройства необходимо найти входной сигнал. Ранее авторами была построена теория оптимальных динамических измерений, в рамках которой для восстановления динамически искаженных сигналов успешно использовались методы теории оптимальных управлений. Первые численные алгоритмы теории оптимальных динамических измерений на модельных примерах показали эффективность результата по достигаемой погрешности при значительном времени счета. Предлагаемый численный алгоритм решения исследуемой задачи позволяет снизить время счета более чем в 5 раз. Приводятся необходимые теоретические сведения, общая схема алгоритма, данные эксперимента, результаты обработки экспериментальных данных по предлагаемому алгоритму.

Ключевые слова: динамические измерения, обработка результатов эксперимента, численные методы, оптимальные динамические измерения, датчики давления, статистические методы.

DOI: 10.31857/S0005231021120084

1. Введение

В теории динамических измерений задачу восстановления входящего сигнала по известным характеристикам измерительного устройства (ИУ) и выходного сигнала принято считать одной из сложных [1]. Ранее для ее решения принято было использовать в качестве основных математических методов теорию обратных задач [2].

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FENU-2020-0022).

На современном этапе развития теории динамических измерений активно ведутся исследования в двух направлениях. Первое связано с оцениванием неопределенности в динамических измерениях [3, 4], второе развивает методологию применения теории автоматического управления для решения задач динамических измерений [5]. В рамках развития второго направления разрабатывались не только различные технические решения, но и развивались математические методы решения задач динамических измерений. Так, для решения задачи по восстановлению динамически искаженного сигнала А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком была сформулирована задача оптимальных динамических измерений, в которой восстанавливаемый входной сигнал определялся как решение задачи оптимального управления [6–8] для системы леонтьевского типа. Отметим, что использование начального условия Коши вызывает значительные трудности и накладывает ограничения при численном решении задач оптимального динамического измерения. В связи с этим было предложено использовать условие Шоуолтера–Сидорова, которое не требует согласования начальных данных при численном исследовании прикладных задач [9]. Подчеркнем, что математическая модель сложной измерительной системы, например, состоящей из нескольких измерительных устройств, строится как система леонтьевского типа [10], которая, с одной стороны, является частным случаем дескрипторной системы [11], с другой – конечномерным случаем уравнения соболевского типа. Именно поэтому все математические результаты стали возможны благодаря развиваемой Г.А. Свиридюком и его учениками теории оптимального управления решениями уравнений соболевского и леонтьевского типов (см. обзор результатов в [12]).

Формирование теории оптимальных динамических измерений включало в себя построение математических моделей и разработку численных методов. Первый алгоритм численного решения задачи оптимального динамического измерения был предложен А.В. Келлер и Е.И. Назаровой, при этом предполагалось, что динамическое искажение являлось следствием только инерционности ИУ [13]. В следующем алгоритме, разработанном Ю.В. Худяковым, численное решение задачи восстановления динамически искаженного сигнала проводилось с учетом инерционности ИУ и наличия резонансов [14]. Важным в развитии численных методов решения задач теории оптимальных динамических измерений стал алгоритм с использованием сплайнов, предложенный А.В. Келлер [15].

Необходимо отметить, что все обсуждаемые алгоритмы были апробированы на модельных примерах, в рамках которых рассматривались сигналы простой формы, например $u = a \sin \omega t$. Когда измеряемые сигналы имеют более сложную форму, разработанные ранее алгоритмы требовали либо значительного объема машинного времени, либо большей мощности персональных компьютеров, что в конечном итоге привело к пониманию необходимости разработки нового численного метода для решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала.

В данной статье представлен новый численный метод, базирующийся на идеях теории оптимальных динамических измерений, позволяющий более эффективно обрабатывать эмпирические данные и восстанавливать динамически искаженный сигнал по результатам натурного вычислительного эксперимента.

2. Основные понятия и методы теории оптимальных динамических измерений

В теории оптимальных динамических измерений важной математической моделью является модель ИУ. Динамические свойства ИУ определяются системой леонтьевского типа

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\zeta, \\ \quad y = Cx + D\eta, \end{cases} \tag{2.1}$$

а его состояние в начале работы – начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{2.2}$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$. Здесь $\rho^L(A) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \det(\alpha L - A) \neq 0\}$ [13]. Математическая модель ИУ (2.1), (2.2) связывает $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений (или выходного сигнала); A и L – квадратные матрицы состояний и взаимовлияния скоростей состояния ИУ соответственно; C и D – матрицы, характеризующие связи между состоянием ИУ и наблюдением; $u(t)$ – вектор-функция измерения (или входного сигнала); $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ – вектор-функции помех на выходе и в цепях ИУ соответственно.

Отметим, что при моделировании может быть получен случай, когда $\det L = 0$ [10]. Кроме того, при решении задачи (2.1) и (2.2) важным условием является (L, p)-регулярность матрицы A.

В [3, 5] для решения задачи восстановлении входного сигнала $u = u(t)$ по наблюдаемому выходному сигналу $y = y_0(t)$ конструируется модель ИУ, при этом качество модели оценивается величиной расхождений значений выходных сигналов ИУ и его модели при соответствующих t. Если различия незначительны, то значения входных сигналов ИУ и его модели будут также незначимо различаться. Это положение легло в основу математической модели оптимальных динамических измерений как задачи оптимального динамического измерения: необходимым условием для построения функционала штрафа является отражение в нем разности между выходными сигналами реального ИУ и его математической моделью, а минимизация функционала обеспечивает нахождение такого входного сигнала, который является математической моделью искомого измерения (рис. 1).

Для построения математической модели оптимальных динамических измерений будем использовать пространство состояний

$$\chi = \Big\{ x \in L_2\left((0, \tau), \mathbb{R}^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0, \tau), \mathbb{R}^n\right) \Big\},$$

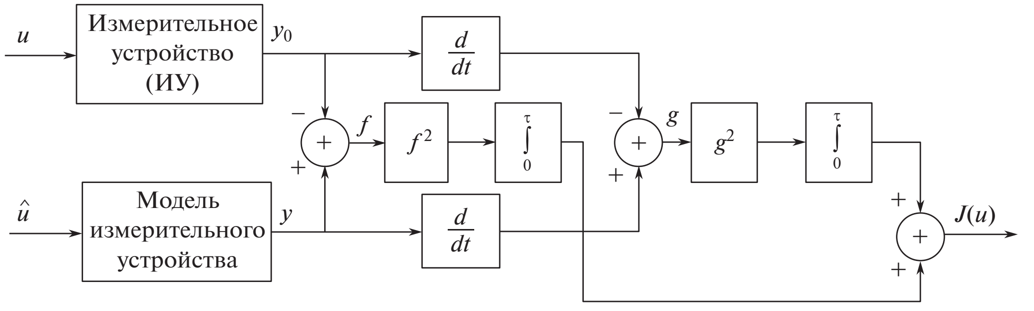


Рис. 1. Структурная схема математической модели динамических измерений.

пространство измерений

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \in L_2\left((0,\tau), \mathbb{R}^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau), \mathbb{R}^n\right) \right\}$$

и пространство наблюдений $\mathfrak{Y} = C[\chi]$, причем $\mathfrak{Y}$ изоморфно некоторому подпространству в χ, хотя не всегда $\mathfrak{Y} = \chi$.

Функционал штрафа имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \tag{2.3}$$

где $y_0(t)$ – выходной сигнал, получаемый в ходе натурного эксперимента, $y(t)$ – моделируемый выходной сигнал (получаемый при работе с математической моделью восстановления динамически искаженного сигнала), $||\cdot||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что вид функционала штрафа обусловлен также и постановкой задачи, например при наличии резонансов в цепях ИУ функционал имеет другой вид [14].

Будем искать решение задачи на множестве допустимых моделируемых измерений $\mathfrak{U}_\partial$. В качестве $\mathfrak{U}_\partial$ возьмем компактное выпуклое подмножество $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \leqslant d \right\}, \tag{2.4}$$

где $d = \mathrm{const}$.

Таким образом, задача оптимального динамического измерения заключается в нахождении такой вектор-функции моделируемого измерения $v \in \mathfrak{U}_\partial$, при которой функционал штрафа (2.3) достигает минимального значения, т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{2.5}$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (2.1) почти всюду на $(0,\tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ – условию Шоуолтера–Сидорова (2.2).

Вектор-функцию $v \in \mathfrak{U}_\partial$, начиная с первых работ по теории оптимальных динамических измерений, называют оптимальным динамическим измерением [6]. Подчеркнем, что требование близости не только значений наблюдаемого сигнала и моделируемого наблюдения, но и скоростей их изменения, обосновано результатами качественных исследований и присутствует во всех математических моделях оптимальных динамических измерений [6, 8, 14, 15].

3. Алгоритм восстановления динамически искаженного сигнала

В качестве исходной информации известны элементы матриц системы (2.1), начальные условия (2.2) и функционал качества (2.3), множество допустимых измерений (2.4), массив значений Y_{0i} наблюдаемого сигнала в моменты времени t_i с интервалом δ, $i = 1, 2, \dots, N$.

1. Из множества значений Y_{0i} формируется подмножество, элементы которого выбираются через равный интервал, который назовем интервалом дискретизации алгоритма Δ по времени. Отметим, что тогда $\Delta = K \cdot \delta$, $K \in \mathbf{Z}$. Выбор интервала дискретизации является важной самостоятельной задачей, поэтому ей будет посвящен раздел 5 статьи. Выбор Δ при известном δ определяет значение K, которое в свою очередь задает количество основных циклов алгоритма. Обозначим порядковый номер цикла буквой ℓ, таким образом, $\ell = 1, 2, \dots, K$.

2. Выполняются базовые расчеты для каждого из основных циклов нахождения приближенного динамического измерения входного сигнала $v^\ell(t)$, $\ell = 1, 2, \dots, K$:

2.1. Определяются начальные точка расчета t_0^ℓ и состояние системы x_0^ℓ:

$$t_0^\ell: \quad t_0^1 = 0, \quad t_0^\ell = t_0^1 + (\ell - 1)\delta, \quad \ell = 2, \dots, K,$$
$$x_0^\ell: \quad x_0^1 = 0, \quad x_0^\ell = C^{-1} Y(t_0^1 + (\ell - 1)\delta), \quad \ell = 2, \dots, K;$$

2.2. Выбираются точки для базового расчета $T_k^\ell = t_0^\ell + (k-1)\Delta$, $k = 1, 2, \dots, R$, где $R = [\frac{N}{K}]$. Эти точки группируются по четыре $(T_1^\ell, T_2^\ell, T_3^\ell, T_4^\ell)$, $(T_4^\ell, T_5^\ell, T_6^\ell, T_7^\ell)$ и т.д. Эти группы будем называть “наборами по T”. На рис. 2,*а* точки первого основного цикла T_k^1 обведены черными кругами, “наборы по T” показаны дугами;

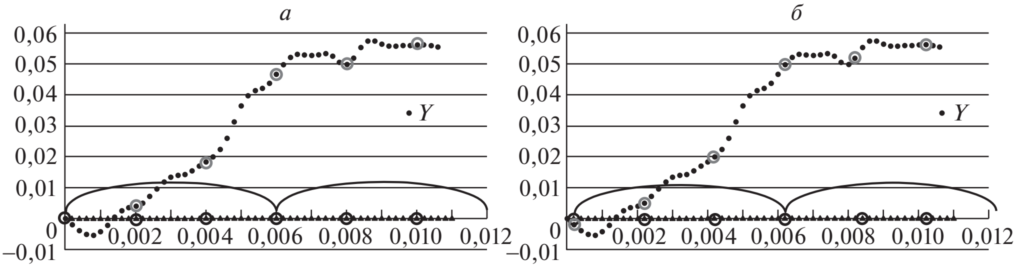


Рис. 2. *а* – Точки для базового расчета в первом основном цикле $\ell = 1$; *б* – точки для базового расчета во втором основном цикле $\ell = 2$.

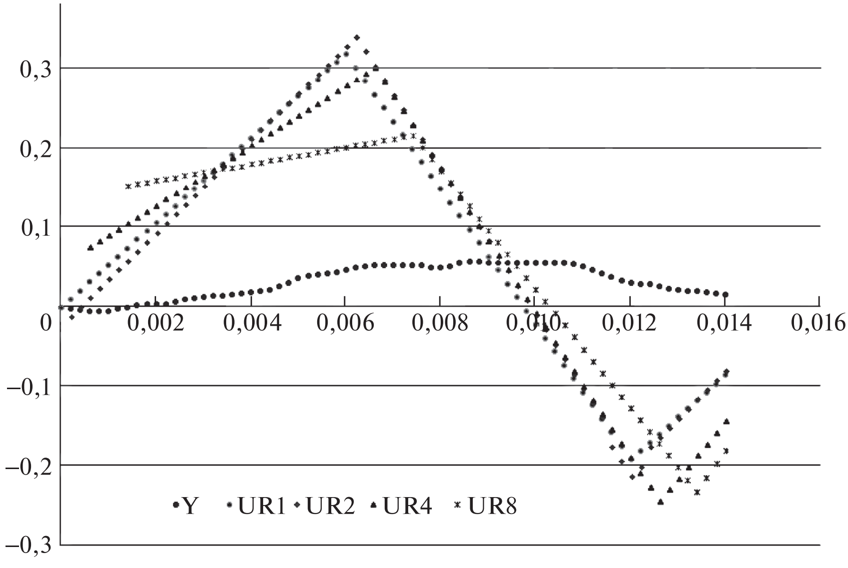


Рис. 3. Значения $v_i^\ell = v_j^\ell(t_i)$ (этап 2.5).

2.3. По каждому "набору по T" формируем "наборы по Y": $(Y_1^\ell, Y_2^\ell, Y_3^\ell, Y_4^\ell)$, $(Y_4^\ell, Y_5^\ell, Y_6^\ell, Y_7^\ell)$ и т.д. На рис. 2,*а* для первого основного цикла точки $Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1, Y_4^1, Y_4^1, Y_5^1, Y_6^1$ обведены серыми кругами. На рис. 2,*б* показаны точки для базового расчета во втором основном цикле T_k^2 и Y_k^2, "наборы по T";

2.4. Для каждого j-го набора ℓ-го основного цикла на временно́м промежутке $[T_{3j+1}^\ell, T_{3j+4}^\ell]$, $j = 0, \ldots, [(R-1)/3]$: 1) по Y_k^ℓ интерполяцией определяется функция наблюдения $y_j^\ell(t)$; 2) по построенной функции наблюдения решается задача оптимального динамического измерения.

Приближенное измерение ищется на основе метода Ритца в виде тригонометрического полинома или многочлена заданной степени. Так как в алгоритме применяется сплайн метод, то решено использовать представление приближенного измерения в виде многочлена. Его степень, как правило, не превосходит степени интерполяционного многочлена $y_j^\ell(t)$ (в данном алгоритме равной трем) и выбирается с учетом вычислительной мощности и заданного шага дискретизации. Основная процедура сводится к поиску такого массива коэффициентов искомого многочлена, при котором достигается минимум функционала. В алгоритме для этого реализуется многошаговый итеративный метод, предложенный в [16]. В нем использованы идеи покоординатного многошагового спуска с памятью, при подборе шага используются результаты предшествующей итерации с выполнением проверки условий ограничений на принадлежность множеству допустимых измерений. Завершается процедура нахождения минимума функционала штрафа по достижению абсолютной величины разности значений функционала последней и предпоследней итерации цикла меньшего значения, чем заданная погрешность. Основные этапы алгоритма решения задачи оптимального динамического измерения изложены в [15]. Особенностью предлагаемого здесь алгоритма является условие равенства значений $u_j^\ell(t)$ в граничных точках наборов $[u_j^\ell(T_{3j+4}) = u_{j+1}^\ell(T_{3(j+1)+1})]$, $j = 0, \ldots, [(R-1)/3]$. В результате получим приближенное оптимальное динамическое измерение $v_j^\ell(t)$ для каждого j-го набора ℓ-го основного цикла на временном промежутке $[T_{3j+1}^\ell, T_{3j+4}^\ell]$, $j = 0, \ldots, [(R-1)/3]$;

2.5. Вычисляются значения $v_i^\ell = v_j^\ell(t_i)$, $\ell = 1, 2, \ldots, K$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, [(R-1)/3]$ (см. рис. 3).

3. Используя полученные K значений v_i^ℓ, $\ell = 1, \ldots, K$, в каждой точке t_i, вычисляются средние значения $\overline{v_i}$ в каждой точке t_i.

4. Моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$ получается интерполяцией средних значений $\overline{v_i}$.

4. Описание эксперимента

Экспериментальные данные были получены на стенде, схема которого представлена на рис. 4. Основными параметрами стенда являются:

— минимальное входное давление – 800 кПа;

— форма пульсации давления на выходе – синус, меандр, произвольная;

— частота пульсации – от 0 до 100 Гц;

— максимальное давление на выходе – 600–800 кПа;

— амплитуда пульсации – от 0 до 100%;

— погрешность формирования формы пульсации – не более 10%.

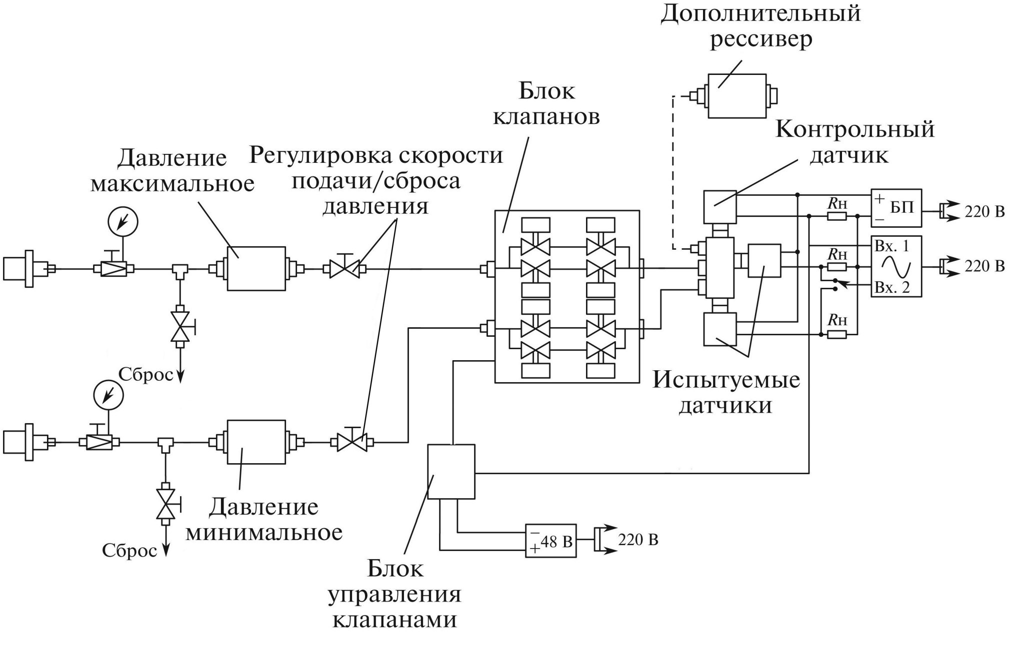


Рис. 4. Схема стенда.

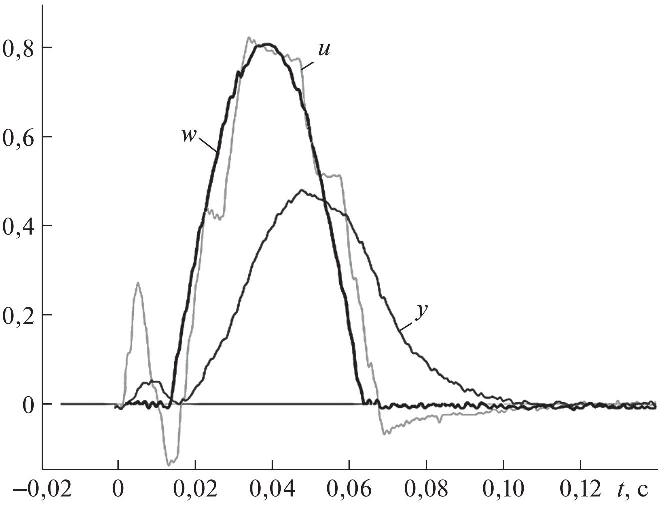


Рис. 5. Результаты испытания датчика.

На стенде испытывается датчик давления Метран-43 с аналоговым электронным преобразователем. Передаточная функция датчика имеет вид

$$W(p) = \frac{0{,}72}{0{,}0119p + 1}. \tag{4.1}$$

Преобразуя ее к виду дескрипторной системы, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -84x + u, \\ y = 60{,}5x. \end{cases} \tag{4.2}$$

Зададим начальное состояние системы

$$x(0) = 0. \tag{4.3}$$

На рис. 5 представлены результаты испытания датчика на стенде. Черным цветом обозначен задающий сигнал $w(t)$, подаваемый на блок управления клапанами. Светло-серым цветом обозначен входящий сигнал $u(t)$ испытуемого датчика, фиксируемый контрольным датчиком. Характеристики контрольного датчика на порядок превышают такие характеристики испытуемого датчика, как точность и быстродействие, что позволяет считать этот сигнал истинным. Темно-серым цветом обозначен наблюдаемый (или выходящий) сигнал $y(t)$ испытуемого датчика.

Заметим, что ступенчатый вид истинного сигнала обусловлен особенностью системы управления стенда, связанной с работой по открытию и закрытию клапанов. Проверка математической модели датчика (4.2), (4.3) показала соответствие полученного наблюдаемого сигнала входящему.

Получив экспериментальные данные наблюдаемого сигнала и математическую модель датчика, ставится вторая обратная задача динамических измерений – восстановить методами теории оптимальных динамических измерений входящий сигнал, а затем сравнить его с истинным сигналом.

5. Шаг дискретизации и его определение в алгоритме

Определение интервала дискретизации на первом шаге предлагаемого алгоритма является основополагающим для адекватного решения задачи оптимального динамического измерения. При проведении вычислительных экспериментов было рассмотрено несколько случаев с различным интервалом дискретизации. Качественное сравнение результатов стало возможно в связи с известным истинным сигналом, фиксируемым контрольным датчиком испытательного стенда.

На рис. 6,*а* представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0{,}002$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 70 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенного оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. Отметим, что ограничения прежде всего связаны с реализацией большого числа вычислений для малых величин как независимых, так и зависимых при необходимости приемлемых временных затрат на вычисления. На рис. 6,*а* показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отражен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом — отражено истинное измерение.

На рис. 6,*б* представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0{,}001$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 140 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенного оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. На рис. 6,*б* показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отражен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом — отражено истинное измерение.

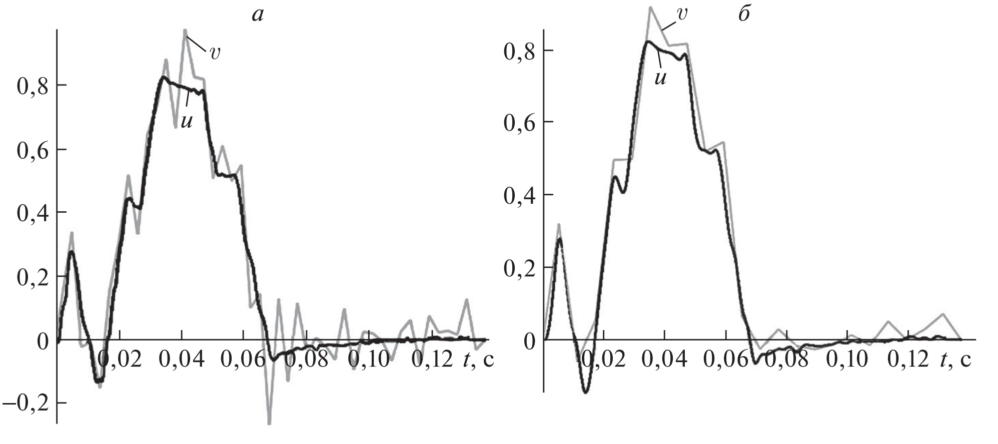


Рис. 6. *а* – Интервал дискретизации $\Delta_i = 0{,}002$, полином первой степени; *б* – интервал дискретизации $\Delta_i = 0{,}001$, полином первой степени.

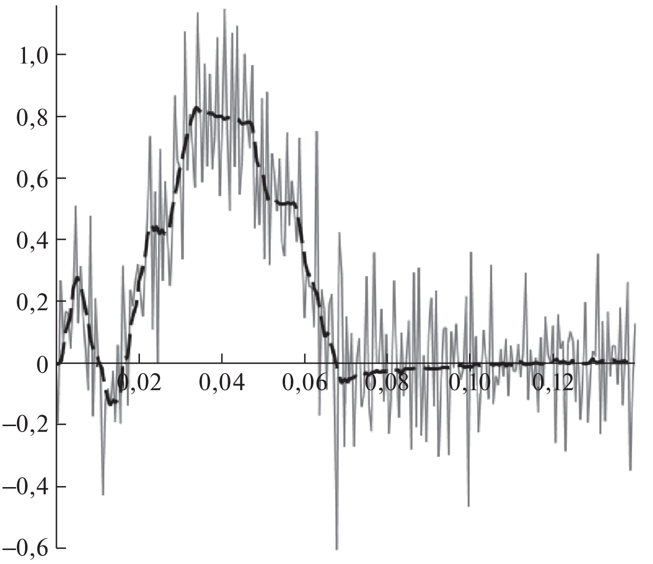


Рис. 7. Интервал дискретизации $\Delta_i = 0{,}0002$, полином первой степени.

На рис. 7 представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0{,}0002$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 700 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенного оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. На рис. 7 показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отражен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом отражено истинное измерение.

В таблице приведены результаты сравнения погрешностей при нахождении приближенного оптимального динамического измерения v в зависимости от выбора шага дискретизации Δ на первом основном цикле. Полученные значения свидетельствуют о том, что погрешность с увеличением шага дискретизации сначала уменьшается, а затем снова увеличивается.

Сравнение результатов при различных интервалах дискретизации позволяет сделать вывод об их согласовании с известной в области цифровой обработки сигналов теоремой Котельникова [17], из которой следует, что любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с задаваемой точностью по своим дискретным отсчетам, частота которых $f \geqslant 2f_{\text{c}}$, где f_{c} – максимальная частота, которой ограничен спектр реального сигнала.

Таблица. Значения погрешности и времени счета при различных интервалах дискретизации

Интервал дискретизации Δ, с	0,0002	0,001	0,002	0,004	0,008
Погрешность $\delta = \|u - v\|^2$	101,5218	0,1684	0,0204	0,0236	0,03012
Время счета, с	2760,32	36,62	27,21	20,07	17,69

Таким образом, в представляемом алгоритме выбор интервала дискретизации становится, по сути, выбором фильтра на основании

$$0 < \Delta \leqslant \frac{1}{2f_{\text{c}}}. \tag{5.1}$$

Получаем, что при $\Delta_1 = 0{,}004$, $f_{\text{c}} = 120$ Гц, при $\Delta_2 = 0{,}002$, $f_{\text{c}} = 250$ Гц, при $\Delta_3 = 0{,}001$, $f_{\text{c}} = 500$ Гц, $\Delta_4 = 0{,}0002$, $f_{\text{c}} = 2500$ Гц. В заключение отметим, что использование выборок для восстановления сигналов на основе теоремы отсчетов Котельникова является стандартным приемом [18].

6. Обработка результатов эксперимента

Проведем реализацию описанного алгоритма на примере данных, полученных в результате стендовых испытаний (см. рис. 2,*а*). Множество Y_{0i} содержит 700 точек. На основании сведений о достаточности $f_{\text{c}} = 250$ Гц выбираем шаг дискретизации $\Delta_2 = 0{,}002$ на основании (5.1). Таким образом, подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 70 точек. Количество основных циклов равно 10. Приведем результаты реализации алгоритма для одного из основных циклов.

На рис. 8,*а* для примера представлены результаты базовых расчетов на четвертом основном цикле. Серым цветом представлено моделируемое оптимальное динамическое измерение v_i^4.

Осреднив результаты, полученные на десяти основных циклах, получим $\overline{v_i}$ в каждой точке t_i, а затем интерполированием – моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$. На рис. 8,*б* представлены графики $v(t)$ (серый цвет) и истинного измерения (черный цвет).

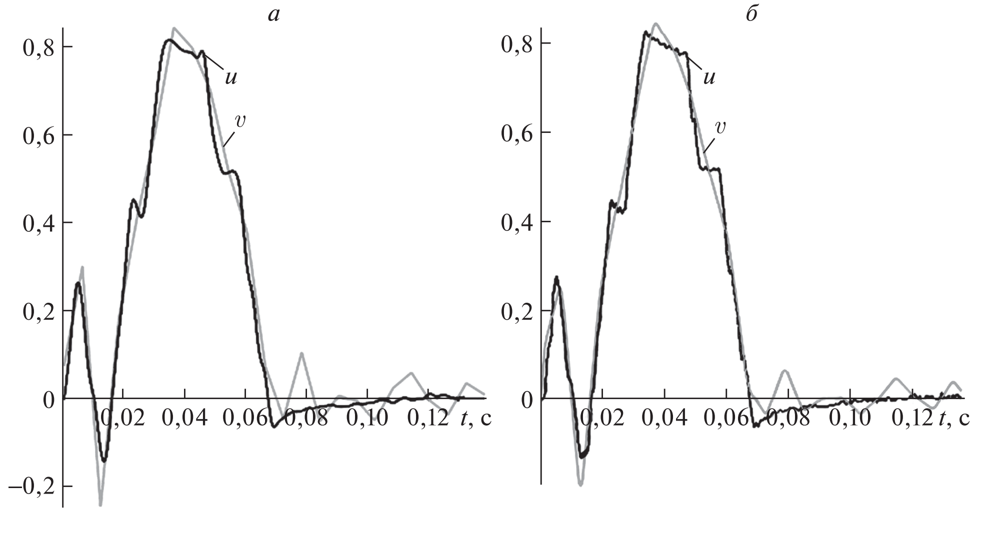


Рис. 8. *а* – Истинное измерение и моделируемое на четвертом основном цикле алгоритма оптимальное динамическое измерение; *б* – моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$ и истинное измерение.

Значительные отклонения моделируемого от истинного измерения наблюдаются именно “на ступенях” истинного сигнала (см. п. 4), на остальных частях графика отклонения незначительны. Отметим, что погрешность найденного приближенного оптимального динамического измерения v

$$\delta = \|u - v\|^2 = 0,000197.$$

При этом время счета составило 109,71 с.

7. Заключение

В статье представлен новый алгоритм восстановления динамически искаженного сигнала. Алгоритм построен на методах теории оптимальных динамических измерений, численных методах интерполирования и нахождения средних.

Результаты вычислительного эксперимента сопоставлены с результатами натурного эксперимента, найденные значения погрешности свидетельствуют об эффективности предлагаемого метода. Приведенные результаты вычислительной точности при различных шагах дискретизации согласуются с шагом дискретизации, выбранным согласно теореме Котельникова. Предложенный метод позволил сократить время счета более чем в 5 раз при меньшей мощности персонального компьютера с приемлемой точностью нахождения оптимального динамического измерения. Кроме того, имеется возможность распараллеливания процессов, что позволит дальнейшее сокращение времени счета.

Отметим, что данный численный метод позволит продолжить исследования в рамках теории оптимальных динамических измерений по следующим направлениям: моделирование оптимальных динамических измерений со случайными помехами с построением новых цифровых фильтров; моделирование нестационарных моделей оптимальных динамических измерений; применение в алгоритмах решения других обратных задач динамических измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грановский В.А.* Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение вчера и сегодня // Датчики и системы. 2016. № 3 (201). С. 57–72.
2. *Ruhm K.H.* Measurement Plus Observation — a Modern Structure of Metrology // 21st IMEKO World Congr. on Measurement in Research and Industry. Prague, 2015. Article ID 116100.
3. *Elster C., Eichstädt S., Link A.* Uncertainty Evalution of Dynamic Measurements in Line with the GUM // 19th IMEKO World Congr. 2009. V. 1. P. 98–101.
4. *Sommer K.-D., Hqnebeck U.D., Krystek M., et al.* Modelling of Dynamic Measurements for Uncertainty Analysis by Means of Discxretized State-Space Forms // 19th IMEKO World Congr. 2009. V. 1. P. 290–294.
5. *Шестаков А.Л.* Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013.

6. *Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.* The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology // J. Comp. Eng. Math. 2020. V. 7. No. 1. P. 3–23.
7. *Sagadeeva M.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N.* The Pyt'ev–Chulichkov Method for Constructing a Measurement in the Shestakov–Sviridyuk Model // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020 V. 13. No. 4. P. 68–82.
8. *Шестаков А.Л., Загребина С.А., Манакова Н.А., Сагадеева М.А., Свиридюк Г.А.* Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства // АиТ. 2021. № 1. С. 55–67.

   Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. Numerical Optimal Measurement Algorithm under Distortions Caused by Inertia, Resonances, and Sensor Degradation // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 41–50.
9. *Загребина С.А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 2007. № 3. С. 22–28.
10. *Khudyakov Yu.V.* On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 68–73.
11. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
12. *Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N.* Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020. V. 13. No. 1. P. 5–27.
13. *Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И.* Численое решение задачи оптимального измерения // АиТ. 2012. № 1. С. 107–115.

    Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 97–104.
14. *Худяков Ю.В.* Алгоритм численного исследования модели Шестакова–Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами // Математические заметки СВФУ. 2013. Т. 20. № 2. С. 211–221.
15. *Keller A.V., Ebel A.A.* Parallelization of Numerical Algorithm for Optimum Dynamic Measurement Problem Solution // Proc. – 2017 2nd Int. Ural Conf. on Measurements. 2017. V. 2017. P. 372–377.
16. *Келлер А.В.* Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 42.
17. *Котельников В.А.* О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. 2006. № 7. С. 762–770.
18. *Зиатдинов С.И.* Восстановление сигналов по его выборкам на основе теоремы отсчетов Котельникова // Изв. высш. уч. заведений. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 5. С. 44–47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 18.04.2021

После доработки 09.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Управление в социально-экономических системах

© 2021 г. **В.А. ДАВЫДОВ, канд. тех. наук, канд. экон. наук (novdav2017@yandex.ru)**
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва),
С.А. КРУГЛИК, канд. физ.-мат. наук (stanislav.kruglik@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва, Научно-технологический университет Сириус, Сочи),
Ю.А. ЯНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (y.yanovich@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва, Научно-технологический университет Сириус, Сочи, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

СРАВНЕНИЕ РИСКОВ БАНКОВСКОГО И РАВНОПРАВНОГО КРЕДИТОВАНИЯ[1]

Рассмотрена задача минимизации риска, который берут на себя инвесторы в двухуровневой (банковской) системе кредитования и системе равноправного кредитования при условии неизменности входящих рисков. Показано, что при введении специального (несистематического) риска модель равноправного кредитования оказывается оптимальной.

Ключевые слова: управление в социально-экономических системах, банковский риск, равноправное кредитование, теория оптимального портфеля Марковца.

DOI: 10.31857/S0005231021120096

1. Введение

Одним из важнейших условий развития экономики является наличие кредитного рынка [1], который входит как наиболее крупный сегмент в состав финансового рынка. Рассмотрим его на примере Российской Федерации. Участников кредитного рынка можно разделить на четыре категории:

- Инвесторы — владельцы свободных финансовых ресурсов (домохозяйства и фирмы). Цель инвесторов — максимально эффективно (т.е. под более высокие ставки) разместить свободные средства таким образом, чтобы иметь возможность их досрочного возврата без потери доходности.
- Банки — кредитно-финансовые организации, которые аккумулируют свободные средства и предоставляют их во временное пользование заемщикам на возмездной основе. Цель банков — привлечь максимальный объем

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках научных проектов № 19-37-51036 и 20-07-00652, а также РФФИ и Японского общества продвижения науки (ЯОПН) в рамках научного проекта № 20-51-50007.

средств от инвесторов и разместить их заемщикам с минимальным риском и максимальной маржой.

- Заемщики — юридические и физические лица, привлекающие средства от банков. Цель заемщиков — привлечь необходимый объем средств для личных целей или целей бизнеса на требуемый срок и под минимальный процент.
- Государство — регулятор кредитного рынка, осуществляющий контроль (через Центральный банк РФ) за финансовыми посредниками и управляющий денежной массой и процентными ставками, а также Агентство по страхованию вкладов (АСВ), реализующее специальную государственную программу "О страховании вкладов в банках Российской Федерации" [2].

В число задач Центрального банка [3] входят развитие и укрепление банковской системы страны, а также развитие и обеспечение стабильности финансового рынка. К основным рискам банковской системы относятся

- риск ликвидности,
- кредитный риск,
- риск достаточности банковского капитала.

ЦБ РФ применяются различные критерии для оценки перечисленных рисков и контроля надежности банковской системы в целом и каждого банка в отдельности. К их числу относятся система обязательных нормативов коммерческих банков [4], рейтинговые оценки банков, динамика просроченных кредитов и т.п.

Источником кредитного риска в банковской системе, т.е. риска невозврата заемщиком взятого кредита банку, является финансовое состояние заемщика, которое, согласно требованиям Базель III [5, 6], оценивается такими параметрами как PD — вероятность дефолта заемщика и LGD — доля потери банка при дефолте заемщика. Заметим, что данный риск также оказывает влияние и на ликвидность банков, и на достаточность их капитала. Таким образом, входящий риск заемщиков, кредитующихся в банковской системе, является исходной величиной, определяющей риск системы, которая перераспределяется между кредитующими банками и далее между инвесторами, разместившими в банках свои средства.

Часть такого риска (по вкладам физических лиц, не превышающим определенной суммы) берет на себя государство в лице АСВ. Однако, как показала практика последних лет [7], капитала АСВ оказывается недостаточно для процедуры выплаты вкладчикам ряда крупных банков, попавшим в процедуру санации. В результате государство вынуждено осуществлять прямые инвестиции и фактически выкупать проблемные банки в государственную собственность.

Кроме традиционной двухуровневой модели кредитования, т.е. модели с финансовыми посредниками — банками, в последние несколько лет получила развитие так называемая модель равноправного (peer-to-peer, P2P) кредитования [8, 9], т.е. одноуровневая модель прямого кредитования инвесторами конечных заемщиков. Данная модель имеет целый ряд недостатков по сравнению с традиционной моделью, которые сдерживают ее более активное внедрение на рынке. Основным из таких недостатков является относительно высокий риск инвестора при принятии им решения о вложении средств в определенного заемщика. Для минимизации данного риска используются различные способы и модели кредитования [10, 11]. В частности, в [12] предложен метод диверсификации вложений инвестора на рынке P2P, который сочетается с банковскими моделями оценки риска заемщика, а также с использованием банков в качестве организатора рынка P2P кредитования.

В основе расчета риска кредитных моделей лежит входящий риск заемщиков. Зафиксируем риск заемщиков равным для одно- и двухуровневой моделей. Такое равенство на практике может означать, что кредиты уже были выданы заемщикам профессиональными участниками рынка — банками — и далее банки, как это описано в [12], токенизировали уже сформированные кредитные портфели и разместили полученные пакеты токенов инвесторам.

Целью настоящей работы является сравнение усредненного риска, который берут на себя инвесторы в двухуровневой (банковской) системе кредитования и системе P2P кредитования при условии неизменности входящих рисков заемщиков. Для такого сравнения будем использовать ставшую классической теорию оптимального портфеля Марковица [13]. Она получила множество развитий за почти 70 лет существования и применения [14, 15]. Так, поскольку истинные параметры доступных ценных бумаг ненаблюдаемы, проблема выбора робастного портфеля представляет интерес [16, 17]. А чтобы облегчить изменение портфелей, предложены многопериодные и разреженные модификации [18, 19].

Задача оценивания риска рынка кредитования является важной для банков и регуляторов [20, 21]. Теория оптимального портфеля дает математический язык для описания моделей кредитования [22–24]. Однако она неприменима для всего рынка напрямую, так как решает задачу вложения одного малого (в сравнении с совокупным объемом) участника. В данной работе анализируется, в архитектуре какой системы заложены (или порождаются) большие риски для системы кредитования в целом.

2. Модели кредитования

Будем считать, что на рынке имеется Z заемщиков с номерами $z\colon 1 \leqslant z \leqslant Z$. Доходности вложений в заемщиков являются случайными величинами. Математические ожидания доходностей описываются вектором $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$. В общем случае заемщики являются зависимыми с матрицей ковариации

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{Z\times Z},$$

состоящей из Z строк и Z столбцов. Элементы на главной диагонали $e_{zz} \in \mathcal{E}$ равны дисперсии заемщика с номером $1 \leqslant z \leqslant Z$, которая описывает риск единичного вложения в данного заемщика.

Рассмотрим одного инвестора, который вкладывает в каждый из активов определенную долю имеющихся средств — формирует портфель. Доли запишем в виде вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$.

Согласно оригинальной работе Марковица [13] применительно к кредитному рынку ищется портфель ценных бумаг, который минимизирует риск портфеля (дисперсию $\vec{g}^{\mathrm{T}}\vec{x}$) при условии фиксированной ожидаемой доходности μ. То есть, решается задача условной оптимизации

$$\vec{x}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}\vec{x} \to \min_{\substack{\vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{g}=\mu \\ \sum_{z=1}^{Z} x_z=1 \\ \forall z=1,\ldots,Z:\, x_z\geqslant 0}}, \tag{1}$$

относящаяся к классу квадратичного программирования с линейными ограничениями и допускающая эффективное решение.

Построение оптимального портфеля подразумевает, что инвестор может вложить любой объем средств в любой актив. Таким образом предполагается, что сумма вложений инвестора в портфель меньше, чем объем рынка для любого из активов, которые составляют портфель.

В данной работе рассматривается задача распределения средств инвесторов, объем которых превышает объем любого из доступных активов. Такая постановка накладывает дополнительные ограничения при построении портфелей по Марковицу.

Будем считать, что на рынке имеется I инвесторов с номерами $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$, желающих вложить $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_I)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{I\times 1}$. Заемщики хотят получить $\vec{l} = (l_1, \ldots, l_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$. Вложения и займы положительны, т.е. $\vec{v} > 0$ и $\vec{l} > 0$, где сравнение понимается поэлементно.

2.1. Банковская модель

В двухуровневой системе кредитования банки привлекают средства у инвесторов и размещают их заемщикам. В терминах портфельной теории банки формируют портфели первого уровня, кредитуя заемщиков, а затем инвесторы собирают на втором уровне свои, вкладывая средства в банки.

Пусть на рынке B банков с номерами $b\colon 1 \leqslant b \leqslant B$. Объем средств, которые банк b выдал в кредит заемщику z, обозначим через k_{bz}. Матрицу

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ k_{B1} & \ldots & k_{BZ} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{B\times Z}$$

будем называть матрицей кредитов или кредитной матрицей.

Очевидно, что если сумма привлеченных средств каждым банком равна сумме размещенных средств этим же банком, то верно равенство

$$\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_B = \vec{l},$$

где $\vec{\mathbf{1}}_a$ – вектор из a единиц.

Операцией $\hat{*}$ будем обозначать нормировку на единичную l_1-норму для векторов и единичную l_1-норму для строк в случае матриц. То есть,

$$\hat{\vec{l}} = \left(\frac{l_1}{\sum_{z=1}^{Z} l_z}, \ldots, \frac{l_Z}{\sum_{z=1}^{Z} l_z}\right)^{\mathrm{T}}$$

и

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_{11}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{1z}} & \ldots & \dfrac{k_{1Z}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{1z}} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{k_{B1}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{Bz}} & \ldots & \dfrac{k_{BZ}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{Bz}} \end{pmatrix}.$$

В матричной форме справедливо представление

$$\hat{\mathcal{K}} = \mathtt{diag}(\mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1}\mathcal{K},$$

где оператор `diag` отображает вектор в диагональную матрицу, помещая элементы вектора на главную диагональ, а матрицу отображает в вектор, в который собираются ее диагональные элементы.

В терминах теории Марковица каждый банк с номером $b\colon 1 \leqslant b \leqslant B$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{K}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{K}}$ равна единице. Взаимные риски r_{ab} вложений банков с номерами $a, b\colon 1 \leqslant a \leqslant B$, $1 \leqslant b \leqslant B$ вычисляются по формуле

$$r_{ab} = (\hat{k}_{a1}, \ldots, \hat{k}_{aZ})\mathcal{E}(\hat{k}_{b1}, \ldots, \hat{k}_{bZ})^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, получаем матрицу банковских рисков

$$\mathcal{R} = \hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{K}}^{\mathrm{T}},$$

которая состоит из B строк и B столбцов. Элемент $r_{bb} \in \mathcal{R}$ равен риску, который банк b взял на себя в результате выдачи кредитов заемщикам с учетом взаимной связи заемщиков и пересечения кредитных портфелей различных банков.

В описываемой модели I инвесторов с номерами $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ размещают свои средства в банки. А именно, обозначим через d_{ib} объем средств, которые инвестор i вложил в банк b. Матрицей депозитов назовем

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1B} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ d_{I1} & \ldots & d_{IB} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{I\times B}.$$

Очевидно, что если каждый банк привлек ровно столько средств, сколько выдал заемщикам, то верно равенство

$$\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_I = \mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z = \vec{x}.$$

Ему соответствует нормированная матрица депозитов

$$\hat{\mathcal{D}} = \mathtt{diag}(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)^{-1}\mathcal{D}.$$

Обозначим: S_{IB} – сумма вложений (депозитов) всех инвесторов в банки, S_{BZ} – сумма всех вложений (кредитов), выданных банками заемщикам. Рассмотрим случай, при котором общая сумма средств, вложенных инвесторами в банки, равна общей сумме средств, привлеченных заемщиками у банков. Таким образом, выполняется равенство

$$S_{IB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{b=1}^{B} d_{ib} = \sum_{b=1}^{B}\sum_{z=1}^{Z} k_{bz}.$$

В терминах теории Марковица каждый инвестор с номером $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ имеет свой портфель вложений в B банков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{D}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{D}}$ равна единице. Риск h_{ii} вложений инвестора с номерам $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ на рынке банков вычисляется по формуле

$$h_{ii} = (\hat{d}_{i1}, \ldots, \hat{d}_{iB})\mathcal{R}(\hat{d}_{i1}, \ldots, \hat{d}_{iB})^{\mathrm{T}}.$$

При этом элементы h_{ii} расположены на главной диагонали матрицы, состоящей из Z строк и Z столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}.$$

Будем называть описанную модель кредитного рынка двухуровневой риск-моделью или банковской моделью и обозначать как $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$. Два уровня в модели отражают факт того, что инвесторы вкладывают свои средства в заемщиков не напрямую, а через банки. Обозначим через $\vec{h} = \mathtt{diag}(\mathcal{H})$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{H}$.

Определим вектор инвестиций $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_I)^{\mathrm{T}}$, компоненты которого v_i равны доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ от общего объема вложенных средств всех инвесторов и вычисляются по формуле

$$v_i = \left(\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right)\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right)^{-1} = \left(\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right) S_{BZ}^{-1},$$

что, в свою очередь, может быть записано как $\vec{v} = \left(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B/(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)\right)$.

Средним (специальным) риском [14] инвесторов в банковской модели $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ будем называть величину $R(\mathscr{B})$, равную взвешенной сумме диагональных элементов матрицы $\mathcal{H}$ с весами, равными долям $\vec{v}$ участников: $R(\mathscr{B}) = \vec{v}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}(\mathcal{H})$. Что, в свою очередь, может быть записано как

$$R(\mathscr{B}) = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B\right)}(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathcal{D}}\hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{K}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathcal{D}}.$$

Отметим, что средний риск инвариантен при разделении долей инвесторов без изменения состава их портфелей.

Кроме того, заметим, что в данном описании риска банковской модели с использованием подхода Марковца отсутствует понятие доходности портфеля, которое присутствует в классической модели Марковца. Это связано с тем, что банки, являясь финансовыми посредниками, фактически устанавливают для инвесторов определенные “рыночные” ставки по размещению депозитов, которые могут не иметь жесткой привязки к ставкам кредитов. В результате банки зарабатывают прибыль на марже между ставкой привлечения средств у инвесторов и ставкой их размещения заемщикам. Говорить при таком подходе о максимизации дохода инвестора, размещающих средства в банках исходя из ставок кредитуемых банком заемщиков, некорректно. Тем не менее интегральная оценка риска, которую получает инвестор на банковском рынке исходя из рисков кредитного портфеля банка, может быть адекватно вычислена предложенным методом [25].

2.2. P2P модель

Объем средств S_{BZ}, привлеченных всеми заемщиками, является неизменным, так как эти суммы зафиксированы в заключенных кредитных договорах между заемщиками и кредитующими их банками. Общий объем средств S_{IB}, вложенных инвесторами, также остается неизменным, поскольку определяется наличием у них свободных собственных средств. При этом будем считать, что выполняется неравенство $S_{BZ} \geqslant S_{IB}$. Отметим, что строгое неравенство соответствует случаю, когда часть средств, вкладываемых в заемщиков, является собственными средствами банков, которые в таком случае сами выступают инвесторами.

Будем считать, что инвесторы передали все свои средства S_{IB} некоторому координирующему центру с предоставлением права распределить данные средства между заемщиками определенным способом. Задача координирующего центра заключается в распределении средств инвесторов таким образом, чтобы минимизировать средний риск инвесторов. Отметим, что в данной конструкции координирующий центр не привлекает средства инвесторов, как это делают банки, и не размещает их от своего имени в кредиты заемщиков. Координирующий центр только перераспределяет вложения инвесторов между заемщиками. В результате на самом координирующем центре не возникает рисков, как на банках в модели банковского рынка. Все риски заемщиков напрямую переходят на инвесторов, вложивших в заемщиков свои средства в соответствии с распределением средств инвесторов, которое выбрал координирующий центр.

Координирующий центр для заданного вектора заимствований $\vec{l} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$, суммы вложений инвесторов $S_{IB} = \vec{v}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_I$, вектора-столбца доходностей $\vec{g}$ и заданной доходности портфеля μ выбирает такой портфель инвесторов $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_Z)^{\mathrm{T}} : \hat{\vec{y}} = \vec{y}$, для которого выполняются условия

(2)
$$\vec{y}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}\vec{y} \to \min_{\substack{S_{IB}\vec{y}^{\mathrm{T}}\vec{g}=\mu \\ \sum_{z=1}^{Z} y_z=1 \\ \forall z=1,\ldots,Z:\ \frac{l_z}{S_{IB}}\geqslant y_z\geqslant 0}}.$$

Определим матрицу

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{11} & \ldots & \hat{p}_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \hat{p}_{I1} & \ldots & \hat{p}_{IZ} \end{pmatrix},$$

которая состоит из I строк и Z столбцов. Матрицу $\hat{\mathcal{P}}$ будем называть матрицей долей прямых вложений. Элемент $\hat{p}_{iz} \in \hat{\mathcal{P}}$ равен доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ в заемщика с номером $1 \leqslant z \leqslant Z$ от общих средств, вложенных данным инвестором, и определяется по формуле $\hat{p}_{iz} = \hat{y}_z$. Таким образом, все строки матрицы $\hat{\mathcal{P}}$ одинаковы и совпадают с $\vec{y}^{\,\mathrm{T}}$, что, в свою очередь, может быть записано как

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathtt{diag}(\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1}\mathcal{P}.$$

Определим диагональную матрицу $\mathcal{Y} = \mathtt{diag}(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{P})$, у которой на главной диагонали расположены элементы вектора $\vec{y}$. Матрица

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ p_{I1} & \ldots & p_{IZ} \end{pmatrix} = \mathcal{Y}\hat{\mathcal{P}},$$

состоит из I строк и Z столбцов. Будем называть $\mathcal{P}$ матрицей прямых вложений. Элемент $p_{iz} \in \mathcal{P}$ равен объему средств инвестора i, которые координирующий центр вложил в заемщика z. Для суммы вложений инвесторов S_{IB} выполняется тождество для всех элементов матрицы $\mathcal{P}$

$$S_{IB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}.$$

Сумма, направляемая заемщику с номером z координирующим центром, вычисляется по формуле $m_z = \sum_{i=1}^{I} p_{iz}$.

В случае выполнения строгого неравенства $S_{BZ} > S_{IB}$ часть кредитов заемщиков финансируется банками. Для данного случая введем матрицу остаточных кредитов

$$\mathcal{K}^* = \begin{pmatrix} k^*_{11} & \dots & k^*_{1Z} \\ \dots & \ddots & \dots \\ k^*_{B1} & \dots & k^*_{BZ} \end{pmatrix},$$

состоящую из B строк и Z столбцов. При этом ее элемент $k^*_{bz} \in \mathcal{K}^*$ равен объему средств, которые банк b выдал в виде кредита заемщику z из собственных средств. Он может быть вычислен по формуле

$$k^*_{bz} = \frac{k_{bz}(l_z - m_z)}{l_z},$$

из чего следует сохранение долей финансирования банками данного заемщика в случае, если он не полностью финансируется инвесторами.

В свою очередь, матрица $\mathcal{K}^*$ однозначно определяет матрицу

$$\hat{\mathcal{K}}^* = \begin{pmatrix} \hat{k}^*_{11} & \dots & \hat{k}^*_{1Z} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \hat{k}^*_{B1} & \dots & \hat{k}^*_{BZ} \end{pmatrix},$$

которая также состоит из B строк и Z столбцов. Матрицу $\hat{\mathcal{K}}^*$ будем называть нормированной матрицей остаточных кредитов. Элемент $\hat{k}^*_{bz} \in \hat{\mathcal{K}}^*$ вычисляется по формуле

$$\hat{k}^*_{bz} = k_{bz} \left(\sum_{z=1}^{Z} k_{bz} \right)^{-1}.$$

В матричной форме справедливо представление

$$\hat{\mathcal{K}}^* = \mathtt{diag}(\mathcal{K}^* \vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1} \mathcal{K}^*.$$

Будем называть модель кредитного рынка с описанным правилом распределения средств инвесторов и банков одноуровневой риск-моделью или P2P моделью и обозначать через $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$. Один уровень в названии модели означает, что инвесторы кредитуют заемщиков не через банки, а напрямую в соответствии с распределением средств всех инвесторов, которое задает координирующий центр. Банки также кредитуют заемщиков напрямую исключительно за счет собственных средств.

В терминах теории Марковица каждый инвестор с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{P}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{P}$ равна единице. Риск f_{ii}

вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ на рынке P2P вычисляется по формуле

$$f_{ii} = (\hat{p}_{i1}, \ldots, \hat{p}_{iZ}) \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{p}_{iZ} \end{pmatrix}.$$

Элементы f_{ii} расположены на главной диагонали матрицы $\mathcal{F}$, состоящей из Z строк и Z столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{F} = \hat{\mathcal{P}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим через $\vec{f}$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{F}$:

$$\vec{f} = \mathtt{diag}(\mathcal{F}) = (f_{11}, \ldots, f_{II})^{\mathrm{T}}.$$

Определим вектор инвестиций $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_I)$, компоненты которого u_i равны доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ от общего объема вложенных средств всех инвесторов на рынке P2P и вычисляются по формуле

$$u_i = \left(\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right)\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right)^{-1} = \left(\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right) S_{IB}^{-1},$$

что в матричной форме принимает вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z / \left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z\right).$$

Для дальнейшего сравнения модели рынка P2P кредитования с моделью банковского рынка будем считать, что ограничение на доходность портфеля отсутствует. Другими словами, будем искать для модели P2P рынка средний риск для портфелей с минимальным риском, или портфелей с точкой минимальной дисперсии (ТМД) [14], и сравнивать полученный риск со средним риском инвесторов для модели банковского рынка.

Средним (специальным) риском инвесторов в P2P модели $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ будем называть величину $R(\mathscr{P})$, вычисляемую по формуле $R(\mathscr{P}) = \mathcal{U}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}\,\mathcal{F}$, что может быть записано как

$$R(\mathscr{P}) = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z\right)}(\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{\mathrm{T}}\hat{\mathcal{P}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{T}}.$$

В терминах теории Марковица каждый банк с номером $1 \leqslant b \leqslant B$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{K}}^*$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{K}}^*$ равна единице. Риск t_{bb}

банка с номером $1 \leqslant b \leqslant B$ на остатке вложений в заемщиков с учетом вложений рынка P2P вычисляется по формуле

$$t_{bb} = (\hat{k}^*_{b1}, \ldots, \hat{k}^*_{bZ}) \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}^*_{b1} \\ \vdots \\ \hat{k}^*_{bZ} \end{pmatrix}.$$

Элементы t_{bb} расположены на главной диагонали матрицы $\mathcal{T}$, состоящей из B строк и B столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{T} = \hat{\mathcal{K}}^* \mathcal{E} \hat{\mathcal{K}}^{*\mathrm{T}}.$$

Обозначим через $\vec{t} = \mathtt{diag}(\mathcal{T})$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{T}$.

Определим вектор банковских инвестиций на остатке кредитов, которые не были профинансированы на рынке P2P как $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_B)^{\mathrm{T}}$. Компоненты вектора w_b, $1 \leqslant b \leqslant B$ от общего объема вложенных средств всеми банками на остатке рынка P2P вычисляются по формуле

$$w_b = \left(\sum_{z=1}^{Z} k^*_{bz} \right) \left(\sum_{b=1}^{B} \sum_{z=1}^{Z} k^*_{bz} \right)^{-1}.$$

Средним риском банков на остатке кредитов в P2P модели $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ будем называть величину R_B, вычисляемую по формуле $R_B = \vec{w}^{\,\mathrm{T}} \vec{t}$.

3. Сравнение рисков двух моделей рынка

В данном разделе докажем основное утверждение статьи о минимуме специального риска инвесторов в P2P модели $\mathscr{P}(\hat{\mathcal{P}}, \mathcal{E})$ по сравнению с банковской моделью $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$. Для этого будем интерпретировать двухуровневую модель $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ как вложение инвесторов в портфели банков пропорционально размеру их вклада от общего вклада в данный банк.

Условие того, что объем инвестиций на рынке совпадает с объемом выданных займов, можно записать в виде равенства

$$\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \mathcal{D} \vec{\mathbf{1}}_B = \vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \vec{y} = \vec{l}^{\,\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_Z = \vec{\mathbf{1}}_B^{\mathrm{T}} \mathcal{K} \vec{\mathbf{1}}_Z.$$

Тогда суммарные инвестиции в каждый банк можно записать в виде

$$\vec{x} = \mathcal{D}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_I.$$

Из чего следует, что предлагаемый банками инвесторам состав пакета на единицу вложений по строкам может быть записан как

$$\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1} \mathcal{K} = \mathtt{diag}(\mathcal{K} \vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1} \mathcal{K} = \mathtt{diag}(\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_I)^{-1} \mathcal{K}.$$

В свою очередь, состав вложений инвесторов по строкам равен $\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}$, а вектор вложений инвесторов равен $\vec{y} = \mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z = \mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B$.

Благодаря этому, можно записать ковариацию вложений инвесторов в виде $\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}(\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K})^{\mathrm{T}}$, что приводит к следующему выражению для риска инвестора в банковской модели

$$\mathtt{diag}(\vec{y})^{-1}\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}\left(\mathtt{diag}(\vec{y})^{-1}\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Вводя матрицу рисков банков как $\mathcal{E}_B = \mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}$, перепишем риск банковской модели как

$$\hat{\mathcal{D}}\mathcal{E}_B\hat{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}}.$$

Сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема. Для любого набора матриц депозитов $\mathcal{D}$, кредитов $\mathcal{K}$, рисков $\mathcal{E}$ средний специальный риск банковской модели $\mathscr{B}(\mathcal{D},\mathcal{K},\mathcal{E})$ не меньше среднего специального риска P2P модели $\mathscr{P}(\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{D},\mathcal{K}),\mathcal{E})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $\hat{\mathcal{D}}$. Построим новую матрицу $\hat{\mathcal{D}}^* = (\hat{d}_1^*, \ldots, \hat{d}_I^*)^{\mathrm{T}}$, строки которой равны между собой и являются усредненными строками матрицы $\hat{\mathcal{D}}$. Иными словами $\hat{d}_1^* = \cdots = \hat{d}_I^* = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i$.

Матрица $\hat{D}^*$ задает возможные вложения инвесторов в банки. Сравним средний специальный риск $\hat{\mathcal{D}}^*$ и $\hat{\mathcal{D}}$. Для этого запишем их разность

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i^{\mathrm{T}}\mathcal{E}_B\hat{d}_i - \sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i^{*T}\mathcal{E}_B\hat{d}_i^* = \\ = \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}||\hat{d}_i||^2_{\mathcal{E}_B,2}\right) - \left\|\frac{\sum_{i=1}^{I} y_i\hat{d}_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\right\|^2_{\mathcal{E}_B,2}.$$

В соответствии с неравенством Йенсена [26] для нестрого выпуклой функции $||*||^2_{\mathcal{E}_B,2}$, соответствующей квадратичному функционалу, получаем, что вышеописанная разность неотрицательна. Таким образом, усреднение портфелей инвесторов не увеличивает средний специальный риск. Или, иными словами, P2P сценарий доставляет минимум специального риска.

4. Пример

Параметры кредитных портфелей составляют банковскую тайну, поэтому реальные данные о них недоступны. Воспользуемся искусственными данными для иллюстрации к использованным в работе определениям и предложенной теореме. Пусть на рынке работает $B = 4$ банка, $I = 12$ инвесторов и $Z = 8$

заемщиков. Нормированная по строкам матрица долей кредитов $\hat{\mathcal{K}}$ при этом имеет вид

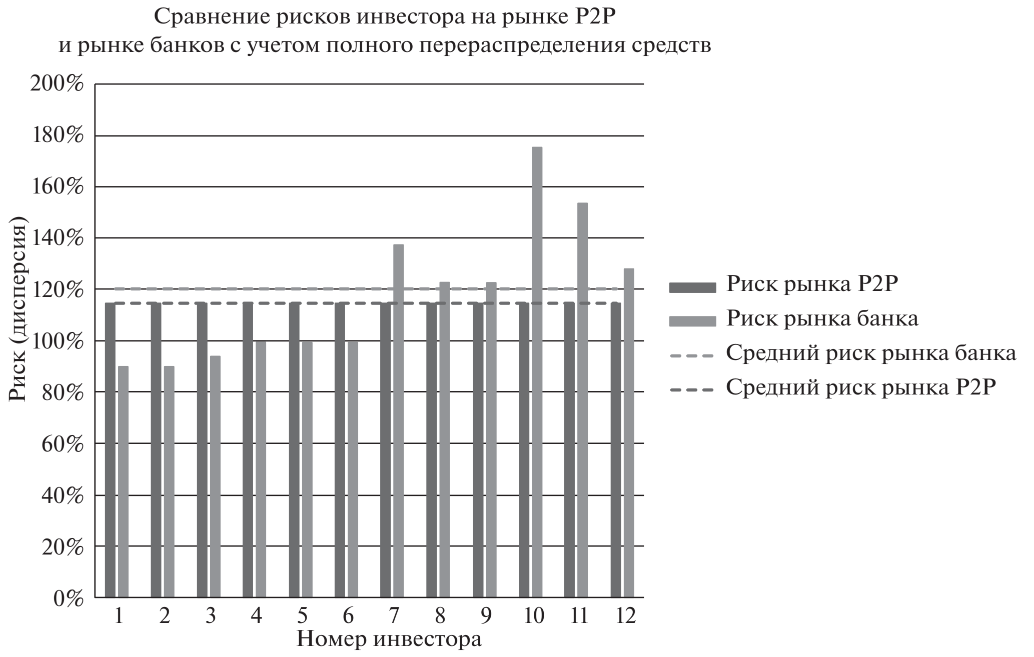
$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1250 & 0{,}1250 & 0{,}3750 & 0{,}3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6667 & 0{,}0667 & 0{,}2000 & 0{,}0667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5714 & 0{,}1429 & 0{,}2381 & 0{,}0476 \end{pmatrix}.$$

Источником средств, за счет которых банки выдают кредиты заемщикам, являются депозиты, размещаемые инвесторами в банках. Нормированная по строкам матрица депозитов $\hat{\mathcal{D}}$, элемент d_{ib} которой равен доле средств, которые инвестор $1 \leqslant i \leqslant 12$ вложил в банк $1 \leqslant b \leqslant 4$, представлена ниже:

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0{,}7500 & 0 & 0 & 0{,}2500 \\ 0{,}7500 & 0 & 0 & 0{,}2500 \\ 0{,}3750 & 0 & 0 & 0{,}6250 \\ 0 & 0{,}1111 & 0 & 0{,}8889 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8571 & 0{,}1429 \\ 0 & 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 \\ 0 & 0 & 0{,}4000 & 0{,}6000 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что заемщики не являются независимыми и что их взаимосвязь описывается матрицей корреляции заемщиков $\mathcal{E}$. При этом элементы на ее главной диагонали описывают дисперсии заемщиков, соответствующие риску вложения в них, а сама матрица имеет вид

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3459 & 0{,}3653 & 0{,}8105 & 0{,}7606 & 0{,}7623 & 0{,}7033 & 0{,}6860 \\ 0{,}3459 & 1 & 0{,}9280 & 0{,}1816 & 0{,}8719 & 0{,}8706 & 0{,}9059 & 0{,}9132 \\ 0{,}3653 & 0{,}9280 & 1 & -0{,}0068 & 0{,}8239 & 0{,}8223 & 0{,}8807 & 0{,}8965 \\ 0{,}8105 & 0{,}1816 & -0{,}0068 & 1 & 0{,}5610 & 0{,}5634 & 0{,}4638 & 0{,}4328 \\ 0{,}7606 & 0{,}8719 & 0{,}8239 & 0{,}5610 & 1 & 1 & 0{,}9918 & 0{,}9874 \\ 0{,}7623 & 0{,}8706 & 0{,}8223 & 0{,}5634 & 1 & 1 & 0{,}9915 & 0{,}9870 \\ 0{,}7033 & 0{,}9059 & 0{,}8807 & 0{,}4638 & 0{,}9918 & 0{,}9915 & 1 & 0{,}9921 \\ 0{,}6860 & 0{,}9132 & 0{,}8965 & 0{,}4328 & 0{,}9874 & 0{,}9870 & 0{,}9921 & 1 \end{pmatrix}.$$



Сравнение риска инвестора на рынке P2P и рынке банков.

При этом матрица долей прямых вложений на рынке P2P, элемент $\hat{p}_{iz}$ которой равен доле вложений инвестора $1 \leqslant i \leqslant 12$ в заемщика $1 \leqslant z \leqslant 8$, имеет вид

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \end{pmatrix}.$$

В результате расчета получаем, что средний риск в банковской модели равен 1,2019, а средний риск в модели P2P равен 1,1460. График сравнения рисков в данном случае представлен на рисунке.

5. Заключение

Из утверждения теоремы следует, что структура финансовых посредников — банков, которая описывается двухуровневой моделью $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, соответствует большему специальному несистематическому риску, нежели одноуровневая модель $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ при одинаковых рисках заемщиков, описываемых матрицей $\mathcal{E}$. Другими словами, сама идеология финансового посредничества в большинстве случаев порождает дополнительный риск для инвесторов.

Необходимо подчеркнуть, что такое сравнение возможно только при специальных несистематических рисках заемщиков, которые одинаковы для обоих рассматриваемых моделей. Такое равенство может быть достигнуто при условии выдачи кредитов банками и их последующей токенизации и распределения пакетов токенов между инвесторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. World Bank, International Finance Corporation. Doing Business 2014: Understanding Regulations for Small and Medium-Size Enterprises: The World Bank. 2013.
2. Российская Федерация. Федеральный закон от 23.12.2003 г. № 177-ФЗ О страховании вкладов физических лиц в банках Российской Федерации. 2003.
3. Российская Федерация. Федеральный закон от 10 июля 2002 г. № 86-ФЗ О Центральном банке Российской Федерации (Банке России). 2002.
4. Центральный Банк Российской Федерации. Инструкция от 29 ноября 2019 г. № 199-И об обязательных нормативах и надбавках к нормативам достаточности капитала банков с универсальной лицензией. 2019.
5. Basel Committee on Banking Supervision. Regulatory Consistency Assessment Programme (RCAP): Assessment of Basel III risk-based capital regulations – United States of America: Bank for International Settlements. 2014.
6. Basel Committee on Banking Supervision. Regulatory Consistency Assessment Programme (RCAP): Assessment of Basel III risk-based capital regulations – Russia: Bank for International Settlements. 2016.
7. РБК. АСВ подстраховало ЦБ. https://www.rbc.ru/newspaper/2017/10/13/59df617a9a7947c6698e1c0e. 2017.
8. *Bachmann A., Becker A., Buerckner D., Hilker M., Kock F., Lehmann M., Tiburtius P., Funk B.* Online peer-to-peer lending – A literature review // J. Internet Banking Commerc. 2011. No. 2. V. 16. P. 1–18.
9. LendingClub Corporation LendingClub Reports Fourth Quarter and Full Year 2019 Results. LendingClub. 2020. P. 1–15.
10. *Davydov V., Gazaryan A., Madhwal Y., Yanovich Y.* Token Standard for Heterogeneous Assets Digitization into Commodity // Proceedings of the 2019 2nd International Conference on Blockchain Technology and Applications. ACM. 2019. P. 43–47.
11. *Davydov V., Yanovich Y.* Optimal Portfolio Sold-Out via Blockchain Tokenization // Proceedings of the 2020 2nd International Electronics Communication Conference. ACM. 2020. P. 129–136.

12. *Davydov V., Yanovich Y.* Financial Instruments Generation via Tokenization into Commodity // 2nd Conference on Blockchain Research & Applications for Innovative Networks and Services (BRAINS). IEEE. 2020. P. 25–29.
13. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
14. *Lyuu Y.-D.* Financial Engineering and Computation. Cambridge Books. 2002.
15. *Kolm P.N., Tutuncu R., Fabozzi F.J.* 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 234. No. 2. P. 356–371.
16. *Fabozzi F.J., Kolm P.N., Pachamanova D., Focardi S.M.* Robust Portfolio Optimization and Management. John Wiley. 2007.
17. *Ben-Tal A., Ghaoui L.E., Nemirovski A.* Robust optimization. Princeton Series in Applied Mathematics. 2009.
18. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.
19. *Skaf J., Boyd S.* Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transaction Costs. Stanford working papers. 2009. P. 1–23.
20. *Gambacorta L., Marques-Ibanez D.* The bank lending channel: lessons from the crisis // Econ. Policy. 2011. V. 26. No. 66. P. 135–182.
21. *Shim J.* Loan portfolio diversification, market structure and bank stability // J. Bank. Finance. 2019. V. 104. P. 103–115.
22. *Stiroh K.J.* A Portfolio View of Banking with Interest and Noninterest Activities // J. Money Credit Bank. 2006. V. 38. No. 5. P. 1351–1361.
23. *Musto D.K., Souleles N.S.* A portfolio view of consumer credit // J. Monet. Econ. 2006. V. 53. No. 1. P. 59–84.
24. *Bottero M., Lenzu S., Mezzanotti F.* Sovereign debt exposure and the bank lending channel: impact on credit supply and the real economy // J. Int. Econ. 2020. P. 103328.
25. *Bessis J.* Risk Management in Banking. Wiley Finance. 2015.
26. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. М.: МЦНМО. 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 18.01.2021

После доработки 26.05.2021

Принята к публикации 30.06.2021

Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2021 г. **А.З. МЕЛИКОВ, чл.-корр. НАН Азербайджана, д-р техн. наук (agassi.melikov@gmail.com),**
М.О. ШАХМАЛЫЕВ (mamed.shahmaliyev@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку),
С.С. НАИР (saji72nair@gmail.com)
(Государственный инженерный колледж, Триссур, Индия)

МАТРИЧНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОРТЯЩИМИСЯ ЗАПАСАМИ

Изучаются марковские модели систем обслуживания с портящимися запасами и бесконечным буфером при использовании двух политик пополнения запасов: в одной из них объем заказов является постоянной величиной, а другая зависит от текущего уровня запасов. Заявки могут присоединяться к очереди даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. После завершения обслуживания заявки либо получают запасы, либо уходят из системы, не получив их, при этом длительность их обслуживания зависит от того, получила ли заявка запасы или нет. Получены условия эргодичности построенных двумерных цепей Маркова, и для вычисления их стационарных распределений используется матрично-геометрический метод. Найдены формулы для нахождения характеристик системы при использовании указанных политик пополнения запасов и даны результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система обслуживания-запасания, портящиеся запасы, политика пополнения запасов, матрично-геометрический метод.

DOI: 10.31857/S0005231021120102

1. Введение

В последние три десятилетия системы обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS) широко исследуются различными авторами. Современное состояние теории QIS и ее приложения подробно описаны в недавней обзорной работе [1]. Важным подклассом QIS являются системы с портящимися запасами (Perishable QIS, PQIS), в которых время жизни (годности) запасов является конечной случайной величиной (с.в.). Обзорная работа [2] и монография [3] посвящены исключительно изучению PQIS.

Среди работ, опубликованных после [2, 3], следует отметить [4–17]. Вкратце рассмотрим обзор их результатов. Для краткости изложения здесь используются модифицированные обозначения Кендалла, которые были предложены для обозначения моделей систем массового обслуживания (СМО). Более конкретно, в известные символические обозначения добавляются новые компоненты, которые указывают используемую политику пополнения запасов (ППЗ)[1], тип функции распределения (ф.р.) времени жизни запасов (символ ∞ в соответствующей позиции означает, что запасы являются долговечными) и тип ф.р. времени поставки запасов (0 в соответствующей позиции означает, что время поставки запасов равно нулю).

В [4–6] изучены Марковские модели управления запасами с мгновенным обслуживанием. В [7] изучена модель типа M/M/1/N/(s, Q)/M/M с нетерпеливыми заявками. Для решения задачи минимизация суммарных штрафов (Total Cost, TC) в системе используется метод, основанный на марковских процессах принятия решений, при этом управляемым параметром является скорость обслуживания сервера. Оптимальная скорость сервера выбирается из заданного конечного (дискретного) множества. Отметим, что такой подход минимизации TC ранее был использован в [18] для модели QIS с терпеливыми заявками, где управляемым параметром является объем поставок. В [8] изучена модель MAP/M/1/N/(s, Q)+(s, S)/M/PH с обратной связью и отдыхами сервера, здесь символ "+" указывает, что в зависимости от состояния системы используется либо (s, Q), либо (s, S)-политика. Для изучения данной системы используется матрично-геометрический метод (Matrix-Geometric Method, MGM) [19], получены формулы для вычисления характеристики системы и решена задача минимизации TC. В [9] изучена модель M/M/1/N/(s, Q)/M/M с ненадежным сервером, где поступающие заявки в зависимости от статуса сервера и уровня запасов могут либо просоединяться в очередь, либо покидать систему. Стационарное распределение находится с использованием MGM и решается задача минимизации TC. В [10–12] предложены модели PQIS, которые могут быть использованы для моделирования процессов бронирования, отмены и продажи авиа/ж.д./автобусных билетов. В [13] изучена модель M/M/1/0/(s, Q)/M/M с повторными заявками и рабочими отдыхами сервера. Аналогичная модель с ненадежным сервером изучена в [14]. В обеих работах для расчета характеристик изучаемых систем используется MGM. В [15] исследуется модель M/M/1/0/(s, Q)/M/M с повторными заявками. Найдено условие эргодичности системы, для расчета ее стационарного распределения используется MGM. Похожая модель M/M/1/0/(s, S)/M/M изучена в [16]. Марковская модель M/M/1/N/(s, S)/M/M с многократными отдыхами сервера изучена в [17]. Заявки, которые поступают во время отсутствия запасов, согласно схеме Бернулли либо присоединяются к очереди, либо покидают систему. Обслуживание заявок прекращается, если уровень запасов опускается ниже критического уровня. Для изучения системы используется MGM и приводятся результаты объемных вычислительных экспериментов.

---

[1] Различные авторы используют разные обозначения для одних и тех же ППЗ. Во избежание недоразумений здесь для ППЗ, в которой объем заказа равен $Q = S - s$, используется обозначение (s, Q), а обозначение (s, S) используется для ППЗ, в которой объем заказа равен $S - m$, где m указывает на текущий уровень запасов в момент выполнения заказа.

Почти во всех работах по QIS предполагается, что после завершения обслуживания все заявки получают запасы. Однако это предположение не всегда удовлетворяется в реальных системах. Кажется, первой работой, где учитывается этот факт, является [20]. В указанной работе изучаются модели $M/M/1/\infty/(s,S)/\infty/M$ и $M/M/1/\infty/(s,Q)/\infty/M$, где принимается принципиальное допущение о том, что заявки не принимаются в систему, если в моменты их поступления уровень запасов равень нулю. Доказано, что стационарное распределение системы определяется как произведение маргинального распределения числа заявок в СМО типа $M/M/1/\infty$ и числа товаров на складе. Интересным результатом этой работы является то, что условие эргодичности системы совпадает с соответствующим условием для СМО типа $M/M/1/\infty$, т.е. оно не зависит ни от типа ППЗ, ни от параметра времени выполнения заказов. Аналогичные результаты получены недавно в [21] для модели с отдыхами сервера и случайными объемами поставок.

Обобщение модели [20] для систем с портящимися запасами было предложено в [22]. Другими и при этом принципиальными отличиями модели, изученной в [22], от указанной в статье [20], являются следующие: (i) заявки могут приниматься в систему даже тогда, когда уровень запасов равен нулю; (ii) заявки в очереди являются нетерпеливыми; (iii) длительности обслуживания заявок зависят от того, получают они запасы или нет. В [22] был предложен приближенный метод расчета характеристик системы. Наряду с низкой вычислительной сложностью и высокой точностью указанного метода следует отметить, что его корректное применение требует выполнения определенных соотношений между исходными параметрами системы. Однако если необходимые соотношения не выполняются, то точность разработанных алгоритмов ухудшается. Поэтому возникает необходимость разработки универсального метода, применение которого не требует выполнения определенных соотношений между исходными параметрами системы. В связи с этим в данной работе предлагается матрично-геометрический метод.

Еще одно отличие изучаемой модели состоит в том, что здесь, как и в [7, 15, 16], допускаются порчи запасов даже в период их отпуска по заявкам.

2. Описание моделей

Рассмотрим модели $M/M/1/\infty/(s,S)/M/M$ и $M/M/1/\infty/(s,Q)/M/M$. В обеих моделях интенсивность поступающего пуассоновского потока равна λ. Для простоты полагаем, что заявки требуют запаса единичного размера; уровень запасов уменьшается также в результате их порчи, при этом время жизни запасов имеет экспоненциальную ф.р. с параметром γ, $\gamma > 0$.

Если в момент поступления заявки сервер является свободным и уровень запасов положительный, то она принимается на обслуживание; иначе заявки становятся в очередь бесконечной длины. Заявки присоединяются к очереди согласно схеме Бернулли даже тогда, когда уровень запасов равен нулю, т.е. если в момент поступления очередной заявки в системе отсутствуют запасы, то она либо с вероятностью φ_1 становится в очередь, либо с вероятностью φ_2

покидает систему, при этом $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Считается, что если уровень запасов равен нулю, то лишь заявка в начале очереди является нетерпеливой, т.е. в таких случаях заявка во главе очереди ожидает некоторое случайное время, которое имеет экспоненциальную ф.р. со средним τ^{-1}.

После завершения обслуживания заявка согласно схеме Бернулли либо с вероятностью σ_1 отказывается получить товар, либо с вероятностью σ_2 получает товар, $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. При этом если заявка отказывается получить товар, то время ее обслуживания имеет экспоненциальную ф.р. со средним μ_1^{-1}; иначе время ее обслуживания также имеет экспоненциальную ф.р, но со средним μ_2^{-1}. Изучаются две ППЗ: (s, S) и (s, Q), при этом в обеих ППЗ время выполнения заказа имеет экспоненциальную ф.р. со средним ν^{-1}.

3. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, S) политики

Работа системы описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov Chain, 2-D MC) с состояниями вида (n, m), где n указывает число заявок в системе, $n = 0, 1, \dots$, а m обозначает уровень запасов на складе системы, $m = 0, 1, \dots, S$. Пространство состояний этой цепи определяется так:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n),$$

где множество $L(n) = \{(n, 0), (n, 1), \dots, (n, S)\}$ называется n-й уровень.

Перенумеруем все состояния системы лексикографичским способом, т.е. состояния нумеруются согласно порядку $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, S), (1, 0), (1, 1), \dots, (1, S), \dots$ Тогда исходя из описания системы заключаем, что полученная 2-D MC представляет собой не зависящий от уровня квази-процесс размножения и гибели (Level Independent Quasi-Birth-Death Process, LIQBD) со следующим генератором:

$$G = \begin{pmatrix} B & A_0 & . & . & . \\ A_2 & A_1 & A_0 & . & . \\ . & A_2 & A_1 & A_0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Блочные матрицы B, A_k, $k = 0, 1, 2$, являются квадратными с размерностью $S + 1$, и их элементы $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \dots, S$, $A_k = \left\|a_{ij}^{(k)}\right\|$, $k = 0, 1, 2$, $i, j = 0, 1, \dots, S$, определяются как

$$b_{ij} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad i \le s,\ j = S, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -(\nu + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu + i\gamma + \lambda), & \text{если} \quad 0 < i \le s,\ i = j, \\ -(i\gamma + \lambda), & \text{если} \quad s < i \le S,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda\varphi_1, & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \lambda, & \text{если} \quad i \neq 0,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях}; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad 0 \leq i \leq s,\ j = S, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -(\tau + \nu + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu + i\gamma + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если} \quad i > 0,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях}; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \tau, & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если} \quad i \neq 0,\ i = j, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ 0, & \text{в других случаях}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 1. *При использовании (s, S)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:*

$$\lambda\left(1 - (1 - \varphi_1)\,\pi(0)\right) < \tau\pi(0) + (\mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)\,(1 - \pi(0)) \ , \tag{3.6}$$

где

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{m=1}^{s+1} a_m + \sum_{m=s+2}^{S} b_m\right)^{-1};$$

$$a_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{\Lambda_{i-1} + \nu}{\Lambda_i}; \quad b_m = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m} \prod_{i=1}^{s+1} \frac{\Lambda_{i-1} + \nu}{\Lambda_i}; \quad \Lambda_i = \mu_2\sigma_2 + i\gamma, \quad i = 1, \ldots, S.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стационарное распределение, которое соответствует генератору $A = A_0 + A_1 + A_2$, обозначим через $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(S))$, т.е. эти величины удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\boldsymbol{\pi} A = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = 1, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-строка размерности $S + 1$ и $\mathbf{e}$ – вектор-столбец размерности $S + 1$, все компоненты которых равны единице. Иными словами, величины $\pi(m)$, $m = 0, 1, \ldots, S$, представляют собой вероятности того, что уровень запасов равен m, $m = 0, 1, \ldots, S$.

Из соотношений (3.3)–(3.5) заключаем, что элементы генератора $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \ldots, S$, определяются как

$$a_{ij} = \begin{cases} -\nu & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \nu & \text{если} \quad 0 \leq i \leq s,\ j = S, \\ \mu_2\sigma_2 + i\gamma & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -(\mu_2\sigma_2 + i\gamma + \nu) & \text{если} \quad 0 < i \leq s,\ j = i, \\ -(\mu_2\sigma_2 + i\gamma) & \text{если} \quad i > s,\ j = i, \\ 0 & \text{в других случаях}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.8) заключаем, что система уравнений (3.7) имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned}(\nu + (m\gamma + \mu_2\sigma_2)(1-\delta_{m,0}))\,\pi(m) = \\ = ((m+1)\,\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi\,(m+1)\,, \quad 0 \le m \le s;\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}(m\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m) = ((m+1)\,\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi\,(m+1)\,(1-\delta_{m,S}) + \\ +\nu\sum_{k=0}^{s}\pi(k)\delta_{m,S}, \quad s+1 \le m \le S\,.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь и далее $\delta_{x,y}$ обозначают символы Кронекера. Из уравнений (3.9) и (3.10) величины $\pi(m)$, $m = 1, \ldots, S$, выражаются через $\pi(0)$ следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} a_m\pi\,(0)\,, & \text{если} \quad 1 \le m \le s+1, \\ b_m\pi\,(0)\,, & \text{если} \quad s+1 < m \le S. \end{cases} \tag{3.11}$$

Величина $\pi(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\pi(0)+\pi(1)+\ldots+ + \pi(S) = 1$.

Согласно [19] (гл. 3, стр. 81–83) изучаемый LIQBD является эргодичным тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\pi} A_0\mathbf{e} < \boldsymbol{\pi} A_2\mathbf{e}. \tag{3.12}$$

С учетом соотношений (3.3), (3.5) и (3.11) после выполнения определенных преобразований из (3.12) получим соотношение (3.6).

Замечание 1. Условие эргодичности (3.6) имеет вероятностный смысл. Действительно, левая часть неравенства (3.6) представляет собой взвешенную общую интенсивность поступления заявок в систему при условии отсутствия запасов и при их наличии, а правая часть (3.6) определяет взвешенную общую интенсивность ухода заявок из системы в результате нетерпеливости заявок из-за отсутствия запасов системы (см. первое слагаемое в правой части (3.6)) и после их обслуживания с получением запасов и без их получения (см. второе слагаемое в правой части (3.6)). Следовательно, условие (3.6) физически означает следующее: взвешенная общая интенсивность поступления заявок в систему должна быть меньше, чем взвешенная общая интенсивность ухода заявок из системы. Условие (3.6) может быть заменено грубым, но в то же время легко проверяемым условием $\lambda < \min(\tau, \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)$.

Замечание 2. В частном случае, когда $\varphi_1 = 0$ и $\tau = 0$, из (3.6) при $\sigma_2 = 0$ находим классическое условие эргодичности одноканальной марковской системы обслуживания. Кроме того, если положить $\sigma_2 = 1$, то находим, что при $\varphi_1 = 0$ и $\tau = 0$ условие эргодичности системы не зависит от размера склада системы (S), а также не зависит ни от интенсивностей порчи запасов (γ) и ни от интенсивности их пополнения (ν). Эти результаты полностью соответствуют результатам работ [20, 21].

Стационарное распределение, соответствующее генератору G, обозначим через $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots)$, где $\boldsymbol{p}_n = (p\,(n,0)\,, p\,(n,1)\,, \ldots, p\,(n,S))$, $n = 0, 1, \ldots$. При выполнении условия эргодичности (3.6) искомое стационарное распределение определяется как

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_0 R^n, \quad n \geq 1, \tag{3.13}$$

где R является неотрицательным и минимальным решением следующего квадратичного матричного уравнения:

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0. \tag{3.14}$$

Вероятности $\boldsymbol{p}_0$ граничных состояний вычисляются из следующей системы уравнений:

$$\boldsymbol{p}_0\,(B + R A_2) = \mathbf{0}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{p}_0\,(I - R)^{-1}\,\mathbf{e} = 1, \tag{3.16}$$

где I обозначает единичную матрицу размерности $S + 1$.

4. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, Q)-политики

Пространство состояний данной модели также задается с помощью множества E, но здесь элементы генератора $\tilde{G}$ полученной LIQBD вычисляются так:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & A_0 & . & . & . \\ A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & . & . \\ . & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Элементы матриц $\tilde{B}$ и $\tilde{A}_1$ вычисляются как

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad j = i + S - s, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -\left(\nu + \lambda\varphi_1\right), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -\left(\nu + i\gamma + \lambda\right), & \text{если} \quad 0 < i \leq s,\ i = j, \\ -\left(i\gamma + \lambda\right), & \text{если} \quad s < i \leq S,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях}; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad 0 \leq i \leq s,\ j = i + S - s, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -\left(\tau + \nu + \lambda\varphi_1\right), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -\left(\nu + i\gamma + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2\right), & \text{если} \quad i > 0,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Т е о р е м а 2. При использовании (s,Q)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (3.6), *где*

$$\pi(0) = c_0 \left(\sum_{m=0}^{s} c_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} d_m + \sum_{m=S-s+1}^{S} f_m \right)^{-1};$$

$$c_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu + \Lambda_{i-1}}; \quad d_m = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m}; \quad f_m = \frac{\nu}{\Lambda_m} \sum_{i=m-S+s}^{s} c_i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы генератора $\tilde{A} = A_0 + \tilde{A}_1 + A_2$ определяются так:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} -\nu & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \nu & \text{если} \quad 0 \le i \le s, \ j = i + S - s, \\ \mu_2\sigma_2 + i\gamma & \text{если} \quad i > 0, \ j = i - 1, \\ -\left(\mu_2\sigma_2 + i\gamma + \nu\right) & \text{если} \quad 0 < i \le s, \ j = i, \\ -\left(\mu_2\sigma_2 + i\gamma\right) & \text{если} \quad i > s, \ j = i, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.4) заключаем, что система уравнений (3.7), соответствующая генератору $\tilde{A}$, имеет следующий явный вид:

$$\begin{gathered} \left(\nu + \left(m\gamma + \mu_2\sigma_2\right)\left(1 - \delta_{m,0}\right)\right)\pi(m) = \\ = \left(\left(m+1\right)\gamma + \mu_2\sigma_2\right)\pi\left(m+1\right), \quad 0 \le m \le s; \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} \left(m\gamma + \mu_2\sigma_2\right)\pi(m) = \left(\left(m+1\right)\gamma + \mu_2\sigma_2\right)\pi\left(m+1\right)\left(1 - \delta_{m,S}\right) + \\ + \nu\pi\left(m - S + s\right)\delta_{m,S}, \quad s + 1 \le m \le S. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) вероятности $\pi(m)$, $m = 1, \ldots, S$, выражаются через величины $\pi(s+1)$ следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} c_m\pi(s+1), & \text{если} \quad 0 \le m \le s, \\ d_m\pi(s+1), & \text{если} \quad s + 1 \le m \le S - s, \\ f_m\pi(s+1), & \text{если} \quad S - s + 1 \le m \le S, \end{cases} \tag{4.7}$$

где

$$c_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu + \Lambda_{i-1}}; \quad d_m = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m}; \quad f_m = \frac{\nu}{\Lambda_m} \sum_{i=m-S+s}^{s} c_i.$$

Значение $\pi\left(s+1\right)$ вычисляется через условие нормировки:

$$\pi(s+1) = \left(\sum_{m=0}^{s} c_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} d_m + \sum_{m=S-s+1}^{S} f_m \right)^{-1}.$$

Далее с учетом соотношений (3.3), (3.5) и (4.7) после выполнения определенных преобразований из (3.12) получаем, что теорема 2 верна.

Стационарное распределение исходной модели опять определяется с помощью системы уравнений (3.15), (3.16).

Замечание 3. Из теорем 1 и 2 заключаем, что в отличие от [20, 21] в исследуемых моделях условия эргодичности зависят от размера склада системы, интенсивности порчи запасов и времени пополнения заказов.

5. Расчет характеристик системы

При использовании обеих ППЗ усредненные характеристики исследуемой PQIS находятся через вероятности состояний системы. В качестве основных выбираются следующие характеристики:

- средний уровень запасов на складе (S_{av})

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n,m)\,; \tag{5.1}$$

- средний объем одного заказа при использовании (s,S)-политики (V_{av})

$$V_{av} = \sum_{m=S-s}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n,S-m)\,; \tag{5.2}$$

Замечание 4. Средний объем одного заказа при использовании (s,Q)-политики пополнения запасов является постоянной величиной и равен $Q = S - s$.

- средняя длина очереди заявок (L_{av})

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^{S} p\,(n,m)\,; \tag{5.3}$$

- средняя интенсивность заказов (RR)

$$RR = \gamma\,(s+1)\,p\,(0,s+1) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} p\,(n,s+1)\,; \tag{5.4}$$

- средняя интенсивность порчи запасов (Γ_{av})

$$\Gamma_{av} = \gamma S_{av}; \tag{5.5}$$

- вероятность потери заявок из-за отсутствия запасов (PL)

$$PL = \varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n,0)\,. \tag{5.6}$$

6. Численные результаты

Цель выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения характеристик рассматриваемых моделей (5.1)–(5.6), а также суммарных штрафов (Total Cost, TC) относительно изменения значений исходных параметров при использовании различных ППЗ.

Отметим, что при использовании обеих ППЗ TC определяются как

$$TC\,(s) = (K + c_r V_{av})\,RR + c_h S_{av} + c_{ps}\Gamma_{av} + c_l \lambda PL + c_w L_{av}, \tag{6.1}$$

где K – фиксированная цена одного заказа, c_r – цена единицы объема заказа; c_h – цена хранения единицы объема запасов за единицу времени; c_{ps} – цена порчи единицы запаса; c_l – штрафы за потери одной заявки; c_w– цена за единицу времени ожидания в очереди одной заявки.

Некоторые результаты этих экспериментов для модели с максимальным размером склада $S = 20$ показаны в табл. 1–9, где в каждом столбце верх-

Таблица 1. Зависимость характеристик моделей от параметра λ

λ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
1	6,9467 7,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,15 2045,36
1,2	6,9245 7,8195	0,4286 0,4286	0,6410 0,5898	0,0902 0,0830	 8,0763	2131,46 2115,15
1,4	6,9024 7,8047	0,5385 0,5326	0,7123 0,6519	0,0931 0,0855	 8,1013	2220,67 2181,53
1,6	6,8805 7,7883	0,6667 0,6667	0,7830 0,7199	0,0960 0,0883	 8,1287	2309,91 2255,10
1,8	6,8587 7,7728	0,8182 0,8182	0,8534 0,7841	0,0989 0,0909	 8,1547	2399,31 2325,53
2	6,8371 7,7574	1 1	0,9232 0,8478	0,1018 0,0935	 8,1805	2489,12 2396,52

Таблица 2. Зависимость характеристик моделей от параметра μ_1

μ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,9379 7,8291	0,3682 0,3683	0,5973 0,5500	0,0844 0,0814	 8,0606	2076,47 2072,63
3,2	6,9398 7,8304	0,3606 0,3608	0,5913 0,5445	0,0811 0,0811	 8,0581	2069,19 2066,63
3,4	6,9416 7,8317	0,3534 0,3535	0,5855 0,5392	0,0879 0,0809	 8,0559	2062,13 2061,08
3,6	6,9433 7,8329	0,3468 0,3465	0,5802 0,5340	0,0877 0,0807	 8,0539	2055,62 2055,68
3,8	6,9450 7,8341	0,3398 0,3398	0,5744 0,5289	0,0874 0,0805	 8,0518	2048,61 2050,45
4	6,9467 7,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0870 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 3. Зависимость характеристик моделей от параметра μ_2

μ_2	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,9575 7,8429	0,4283 0,4288	0,5962 0,5498	0,0858 0,0790	 8,0371	2080,52 2075,91
3,2	6,9550 7,8412	0,4051 0,4055	0,5884 0,5424	0,0861 0,0793	 8,0400	2069,68 2067,32
3,4	6,9527 7,8395	0,3843 0,3846	0,5829 0,5362	0,0864 0,0796	 8,0428	2060,61 2060,12
3,6	6,9505 7,8380	0,3656 0,3658	0,5766 0,5312	0,0867 0,0798	 8,0453	2053,11 2054,15
3,8	6,9485 7,8366	0,3487 0,3488	0,5720 0,5271	0,0870 0,0801	 8,0477	2046,99 2049,26
4	6,9467 7,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 4. Зависимость характеристик моделей от параметра τ

τ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
1	6,9448 7,8338	0,3483 0,3471	0,5764 0,5289	0,0874 0,0804	 8,0522	2051,30 2050,61
1,2	6,9452 7,8342	0,3448 0,3439	0,5748 0,5278	0,0873 0,0804	 8,0517	2049,18 2049,40
1,4	6,9456 7,8345	0,3416 0,3411	0,5732 0,5268	0,0873 0,0803	 8,0512	2047,23 2048,33
1,6	6,9460 7,8348	0,3386 0,3382	0,5718 0,5258	0,0873 0,0803	 8,0507	2045,41 2047,23
1,8	6,9464 7,8350	0,3359 0,3358	0,5704 0,5249	0,0872 0,0803	 8,0503	2043,72 2046.31
2	6,9467 8,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 5. Зависимость характеристик моделей от параметра ν

ν	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
2	5,5928 6,5507	0,3333 0,3333	0,4598 0,4241	0,1778 0,1640	 10,1186	1656,16 1735,25
2,2	5,9107 6,8595	0,3333 0,3333	0,4856 0,4474	0,1531 0,1411	 9,6272	1746,62 1810,19
2,4	6,2024 7,1388	0,3333 0,3333	0,5091 0,4688	0,1324 0,1219	 9,1797	1829,72 1877,75
2,6	6,4707 7,3925	0,3333 0,3333	0,5308 0,4886	0,1148 0,1057	 8,7706	1906,22 1938,95
2,8	6,7181 7,6237	0,3333 0,3333	0,5507 0,5070	0,0999 0,0920	 8,3953	1976,83 1994,58
3	6,9467 7,8553	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 6. Зависимость характеристик моделей от параметра γ

γ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
2	8,1789	0,3333	0,5214	0,0380		1804,37
	8,9524	0,3333	0,4818	0,0352	6,1934	1731,77
2,2	7,9023	0,3333	0,5326	0,0469		1859,29
	8,7061	0,3333	0,4915	0,0433	6,6077	1801,47
2,4	7,6420	0,3333	0,5429	0,0564		1910,14
	8,4720	0,3333	0,5005	0,0520	6,9988	1867,40
2,6	7,3967	0,3333	0,5524	0,0663		1957,33
	8,2493	0,3333	0,5089	0,0611	7,3685	1929,86
2,8	7,1653	0,3333	0,5611	0,0766		2001,23
	8,0373	0,3333	0,5167	0,0705	7,7184	1989,10
3	6,9467	0,3333	0,5691	0,0872		2042,14
	7,8353	0,3333	0,5340	0,0803	8,0499	2045,36

Таблица 7. Зависимость характеристик моделей от параметра φ_1

φ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
0	6,9497	0,3106	0,5575	0,0870		2027,59
	7,8367	0,3125	0,5164	0,0801	8,0461	2037,24
0,2	6,9485	0,3193	0,5620	0,0870		2033,25
	7,8367	0,3204	0,5193	0,0802	8,0476	2040,35
0,4	6,9473	0,3285	0,5667	0,0871		2039,13
	7,8358	0,3289	0,5224	0,0802	8,0491	2043,64
0,6	6,9461	0,3378	0,5713	0,0872		2044,91
	7,8348	0,3375	0,5255	0,0803	8,0506	2046,95
0,8	6,9447	0,3489	0,5766	0,0874		2051,50
	7,8338	0,3476	0,5291	0,0804	8,0523	2050,78
1	6,9434	0,3601	0,5818	0,0875		2057,98
	7,8328	0,3579	0,5326	0,0805	8,0539	2054,61

Таблица 8. Зависимость характеристик моделей от параметра σ_1

σ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
0	6,8993	0,3333	0,6488	0,0935		2132,41
	7,8017	0,3333	0,5967	0,0860	8,1063	2115,75
0,2	6,9308	0,3333	0,5998	0,0893		2072,39
	7,8240	0,3333	0,5484	0,0822	8,0688	2068,87
0,4	6,9627	0,3333	0,5423	0,0851		2011,74
	7,8466	0,3333	0,4995	0,0784	8,0309	2021,73
0,6	6,9948	0,3333	0,4884	0,0808		1950,43
	7,8693	0,3333	0,4500	0,0745	7,9927	1974,14
0,8	7,0273	0,3333	0,4335	0,0764		1888,47
	7,8922	0,3333	0,3999	0,0705	7,9542	1926,08
1	7,0602	0,3333	0,3782	0,0720		1825,83
	7,9153	0,3333	0,3333	0,0665	7,9153	1877,54

Таблица 9. Зависимость характеристик моделей от параметра s

s	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,2553	0,3333	0,5209	0,1108		1907,38
	6,6468	0,3333	0,5053	0,1074	6,8351	1780,71
4	6,5519	0,3333	0,5290	0,0996		1955,25
	7,0966	0,3333	0,5056	0,0952	7,3077	1874,02
5	6,7778	0,3333	0,5457	0,0922		2000,48
	7,4889	0,3333	0,5127	0,0866	7,7020	1962,11
6	6,9467	0,3333	0,5691	0,0872		2042,15
	7,8353	0,3333	0,5240	0,0803	8,0499	2045,36
7	7,0667	0,3333	0,5986	0,0839		2080,25
	8,1440	0,3333	0,5383	0,0754	8,3598	2124,23
8	7,1211	0,3333	0,6322	0,0823		2113,55
	8,4206	0,3333	0,5548	0,0717	8,6372	2199,15
9	7,1775	0,3333	0,6764	0,0810		2147,49
	8,6688	0,3333	0,5732	0,0686	8,8861	2270,43

няя строка соответствует (s,Q)-политике, а нижняя — (s,S)-политике пополнения запасов (поскольку характеристики (5.5) и (5.1) отличаются друг от друга лишь постоянным множителем, то в таблицах значения характеристики (5.5) не приводятся). В табл. 1–8 принимается, что $s=6$; в качестве базовых принимаются следующие значения исходных данных (т.е. в каждой таблице при изменении значений конкретного параметра значения других параметров остаются неизменными): $\lambda=1$; $\mu_1=\mu_2=4$; $\nu=\gamma=3$; $\tau=2$; $\varphi_1=0{,}5$; $\sigma_1=0{,}3$. Коэффициенты в выражении функционала (6.1) выбирались так:

$$K=750,\quad c_r=35,\quad c_h=50,\quad c_l=75,\quad c_w=30,\quad c_{ps}=50.$$

Из-за ограниченности объема работы здесь не приводится подробный анализ результатов численных экспериментов; лишь отметим, что все результаты полностью соответствуют теоретическим ожиданиям, при этом сравнительный анализ значений суммарных штрафов при различных ППЗ показывает, что они существенным образом зависят от значений многочисленных исходных параметров, и потому невозможно предсказать эффективность той или иной ППЗ без выполнения соответствующих вычислительных экспериментов (хотя наблюдается монотонность характеристик относительно изменения конкретных параметров).

7. Заключение

В работе изучаются марковские модели систем обслуживания-запасания с бесконечным размером буфера, нетерпеливыми заявками и портящимися запасами при использовании двух политик пополнения запасов — с фиксированным и переменным объемом заказов. Отличительной особенностью изучаемых моделей является то, что заявки могут приниматься в систему даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. Считается, что после завершения обслуживания часть заявок согласно схеме Бернулли либо покидает систему без получения товаров, либо получают товары. Математическими моделями изучаемых систем при обеих ППЗ являются двумерные цепи Маркова, которые имеют трехдиагональные генераторы. Найдены условия эргодичности этих цепей и показано, что в частном случае из них получаются ранее известные результаты для подобных моделей.

Здесь предполагалось, что время жизни запасов является непрерывной случайной величиной с заданной функцией распределения, и таким образом, не учитываются их мгновенные порчи из-за внезапных событий, например в результате небрежного отношения сотрудников склада к своей работе. Такие ситуации могут быть учтены с помощью введения потока "катастрофических" заявок, которые не требуют обслуживания, а их появление приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов (этот поток можно называть "негативные пополнения", как аналог негативных заявок). Эти модели являются объектами дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with positive service time: a survey / Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books "Mathematics and Statistics" Sciences. Anisimov V., Limnios N. (Eds.). ISTE & Wiley. London. 2021. Vol. 2. P. 201–238.
2. *Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H.* Review of inventory systems with deterioration since 2001 / Eur. J. Oper. Res. 2012. V. 221. P. 275–284.
3. *Nahmias S.* Perishable Inventory Theory. Heidelberg: Springer, 2011.
4. *Ko S.S., Kang J., Kwon E-J.* An (s, S) inventory model with level-dependent G/M/1 type structure / J. Ind. & Manag. Opt. 2016. V. 12. Iss. 2. P. 609–624.

   https://doi.org/10.3934/jimo.2016.12.609
5. *Ko S.S.* A nonhomogeneous quasi-birth-death process approach for an (s, S) policy for a perishable inventory system with retrial demands / J. Ind. & Manag. Opt.

   https://doi.org/10.3934/jimo.2019009
6. *Kocer U.U., Yalcin B.* Continuous review (s, Q) inventory system with random lifetime and two demand classes / OPSEARCH. 2020. V. 57. P. 104–118.

   https://doi.org/10.1007/s12597-019-00393-0
7. *Al Hamadi H.M., Sangeetha N., Sivakumar B.* Optimal control of service parameter for a perishable inventory system maintained at service facility with impatient customers / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 3–23.
8. *Amirthakodi M., Radhamani V., Sivakumar B.* A perishable inventory system with service facility and feedback customers / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 25–55.
9. *Jeganathan K., Yadavalli V.S.S.* A finite source perishable inventory system with second optional service and server interruptions / ORiON. 2016. V. 32. Iss. 1. P. 23–53.
10. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Lakshmy B.* On a queueing-inventory with reservation, cancellation, common life time and retrial / Ann. Oper. Res. 2016. V. 247. P. 365–389.

11. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Lakshmy B.* G/M/1 type queueing-inventory system with postponed, cancellation and common life time / Indian J. Pure & Appl. Math. 2016. V. 47. Iss. 2. P. 357–388.
12. *Shajin D., Krishnamoorthy A., Manikandan R.* On a queueing-inventory system with common life time and Markovian lead time process / Oper. Res.
https://doi.org/10.1007/s12351-020-00560-y
13. *Laxmi P.V., Soujanya M.L.* Perishable inventory model with retrial demands, negative customers and multiple working vacations / Int. J. Math. Model. & Comput. 2017. V. 7. Iss. 4. P. 239–254.
14. *Laxmi P.V., Soujanya M.L.* Perishable inventory system with service interruptions, retrial demands and negative customers / Appl. Math. & Comput. 2015. V. 262. P. 102–110.
15. *Reshmi P.S., Jose K.P.* A queueing-inventory system with perishable items and retrial of customers / Malaya J. Mat. 2019. V. 7. Iss. 2. P. 165–170.
16. *Reshmi P.S., Jose K.P.* A production inventory model with deteriorating items and retrial demands / OPSEARCH. https://doi.org//10.1007/s12597-020-00471-8
17. *Jajaraman B., Sivakumar B., Arivarignan G.* A Perishable Inventory System with Postponed Demands and Multiple Server Vacations / Modeling and Simulation Engineering (Hindawi Publishing Corporation). V. 2012. Article ID 620960. 17 pages.
18. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock optimization in transport/storage systems / Cybernetics. 1992. V. 27. Iss. 3. P. 484–487.
19. *Neuts M.F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.
20. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B.* Revisit to queueing-inventory system with positive service time / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 221–236.
21. *Zhang Y., Yue D., Yue W.* A queueing-inventory system with random order size policy and server vacations / Ann. Oper. Res.
https://doi.org/10.1007/s10479-020-03859-3
22. *Melikov A.Z., Shahmaliyev M.O.* Markov models of inventory management systems with a positive service time / J. Comp. & Sys. Sci. Int. 2018. V. 57. Iss. 5. P. 767–783.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 22.03.2021

После доработки 05.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S