Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

4
АПРЕЛЬ
Москва
2020

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Тематический выпуск (окончание)[1]

© 2020 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, Москва;
Московский авиационный институт)

АЛГОРИТМ РОБАСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ СЧИТАЮЩИМ НАБЛЮДЕНИЯМ[2]

Представлен алгоритм оценивания состояния марковских скачкообразных процессов по наблюдениям векторного процесса со считающими компонентами. Особенностью класса изучаемых систем наблюдения является то, что частота скачков поступающих наблюдений значительно превосходит интенсивность смены состояний оцениваемого процесса. Это свойство дает возможность в алгоритме фильтрации обрабатывать поступающие наблюдения с использованием их диффузионной аппроксимации. Предлагаемые в статье оценки обладают свойством устойчивости по отношению к неточному знанию распределения наблюдаемого процесса. Для иллюстрации робастных качеств оценок представлено решение прикладной задачи мониторинга состояния RTP-соединения по наблюдениям потока пакетов, регистрируемых на узле-получателе.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс, мультивариантный точечный процесс, диффузионная аппроксимация, алгоритм робастной фильтрации.

DOI: 10.31857/S0005231020040017

1. Введение

Создание высокоточных эффективных алгоритмов оценивания состояний марковских скачкообразных процессов (МСП) по скачкообразным наблюдениям при наличии различных комплексов доступной априорной информации о системе наблюдения всегда было востребованным при решении практических задач оценивания, управления и оптимизации в технических системах, медицине и финансах.

Задачи фильтрации скачкообразных процессов, оптимальной в среднем квадратическом смысле (СК-оптимальной), решаются с помощью аппарата стохастического анализа. В классической монографии [1, гл. 18 и 19] получено решение задачи фильтрации состояния скалярного точечного процесса по таким же наблюдениям. В [2] представлен фундаментальный результат — решена общая задача оптимальной фильтрации семимартингала по наблюдениям семимартингала. Для решения прикладных задач оценивания и управ-

---

[1] Первые три статьи являются окончанием тематического выпуска, посвященного Р.Ш. Липцеру (№3, 2020).

[2] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00187 А).

ления указанные результаты нуждались в выделении таких практически значимых классов систем наблюдения, для которых оптимальные оценки описывались бы конечной системой уравнений. В [3] получено решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по наблюдениям векторного мультивариантного точечного процесса, а в [4] предложены варианты возможного применения данных результатов в мониторинге состояния информационно-телекоммуникационных устройств и соединений.

Помимо своей очевидной теоретической пользы, оптимальные оценки фильтрации обладают сложностью численной реализации, связанной как со свойствами самой оценки, так и с особенностями решаемых прикладных задач. Во-первых, уравнения, описывающие оптимальную оценку, могут быть неустойчивыми и могут нуждаться в специальных методах численного решения. Во-вторых, качество оптимальных оценок является чувствительным к отклонениям истинного распределения процессов в системе наблюдения от своего номинала: полученные в этом случае оценки могут иметь осциллирующий, высокочастотный и высокоамплитудный характер. Более того, в ряде практических задач априорная информация о распределениях может отсутствовать, за исключением некоторых моментных характеристик, полученных путем их предварительного статистического оценивания по части наблюдений. Поэтому представляется важным разработать алгоритмы субоптимальной фильтрации, которые обеспечивали бы приемлемую точность оценок, с одной стороны, и обладали бы устойчивостью по отношению к неточному знанию априорных характеристик системы наблюдения — с другой.

На практике в ряде задач интенсивность смены состояний МСП много меньше частоты поступления наблюдений. Такая ситуация характерна, например, для электронных бирж [5, 6], на которых из-за большого числа участников частота поступления трейдерских приказов крайне высока (от десятых долей Гц до десятков герц), в то время как смена сценария развития рынка происходит достаточно редко (десятитысячные — стотысячные доли герца). Данное свойство системы наблюдения позволяет строить не только оптимальные процедуры слежения за функцией волатильности по наблюдениям случайного потока сделок [7], но и их устойчивые версии, основанные на диффузионной аппроксимации наблюдаемых процессов [8].

Другая область, в которой возникают подобные явления, включает в себя различные комплексы и сети массового обслуживания, в том числе и телекоммуникационные. Для систем подобного рода характерны большая размерность вектора состояния и наличие высокочастотных потоков событий, связанных с поступлением/обработкой заявок и сменой состояний. Эти особенности дают возможность строить жидкостные и диффузионные аппроксимации процессов в подобных комплексах [9, 10], значительно облегчающие их анализ [11–13]. В этих же системах могут присутствовать частично наблюдаемые разнотемповые потоки событий, и жидкостная и/или диффузионная аппроксимация правомерна только для высокочастотной составляющей. Например, при пакетной передаче данных по гетерогенному (проводному–беспроводному) каналу связи на узлах отправителя/получателя наблюдению доступны высокочастотные потоки собственно пакетов, а также подтверждений их успешной передачи. В то же время изменения состояния канала, связанные с временно́й перегрузкой его проводного участка или потерей несущего сигнала на беспроводном участке, происходят относительно редко. Для подобных каналов с помощью жидкостной и/или диффузионной аппроксимации можно проводить не только анализ их характеристик [14, 15], но и решать задачи оценивания состояний и параметров.

Цель данной статьи — построение алгоритма фильтрации состояний МСП по наблюдениям процесса со считающими компонентами, устойчивого по отношению к неточному знанию распределения наблюдений. Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен класс исследуемых систем наблюдения. Имеющиеся считающие наблюдения эквивалентны некоторому мультивариантному точечному процессу с конечным множеством состояний. Отличительной чертой рассматриваемых систем является линейная зависимость интенсивностей скачков от ненаблюдаемого МСП. Решение задачи оптимальной фильтрации [3] определяется некоторой стохастической системой со скачкообразными процессами в правой части.

В разделе 3 определены связанные с изучаемой системой наблюдения обобщенные процессы восстановления (renewal-reward processes). На основе центральной предельной теоремы представлена диффузионная аппроксимация распределений этих вспомогательных процессов. В разделе указаны условия применимости данной аппроксимации для описания распределения наблюдаемого процесса. Предлагаемый робастный алгоритм заключается в следующем. Исходные наблюдения предварительно семплируются, т.е. дискретизуются по времени с дополнительным линейным преобразованием. Затем, опираясь на правомерность использования диффузионной аппроксимации, преобразованные таким образом наблюдения обрабатываются уже как приращения некоторого непрерывного диффузионного процесса.

Раздел 4 посвящен решению прикладной задачи разработки аппаратно-независимого монитора состояния гетерогенного RTP-канала по потоку пакетов, регистрируемых на узле-получателе. Состояние канала недоступно прямому наблюдению, и о нем можно судить косвенно по случайному потоку поступающих пакетов, допускающему одновременное получение "пачек" пакетов случайного объема. Комплекс численных экспериментов демонстрирует правомерность применения диффузионной аппроксимации в данной практической задаче и позволяет провести сравнительный численный анализ качества оптимальной и робастной оценок в зависимости от объема априорной информации о распределении наблюдаемого процесса. Заключительные замечания и перспективы дальнейших исследований приведены в разделе 5.

2. Постановка задачи оптимальной фильтрации и ее решение

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ задан ненаблюдаемый МСП $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$

$$X_0 = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + M_t^X, \quad X_0 \sim p_0, \tag{1}$$

где $X_t \in \mathbb{S}^N$ — состояние процесса ($\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\} \subset \mathbb{R}^N$ — множество единичных вектор-столбцов пространства $\mathbb{R}^N$); Λ — матрица интенсивностей МСП, p_0 — его начальное распределение; $\{M_t^X\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ — $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал, $M_t^X \in \mathbb{R}^N$.

Наблюдению доступен процесс $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ со считающими компонентами ($Y_t \in \mathbb{Z}_+^M$)

$$Y_t = \int_0^t \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(s) \phi(s - \tau_{n-1}) X_{s-} \Phi(\tau_{n-1}, ds) + M_t^Y. \tag{2}$$

Здесь и далее $\int_a^b \dots \triangleq \int_{(a,b]} \dots$ для любых $-\infty < a < b < +\infty$; $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — возрастающая последовательность случайных моментов скачков наблюдений Y_t, $\tau_0 \equiv 0$; каждый скачок Y_t является случайным с конечным множеством возможных значений: $r_n \triangleq \Delta Y_{\tau_n} \in \mathbb{S}^M$, где $\mathbb{S}^M \triangleq \{f_1, \dots, f_M\} \subset \mathbb{R}^M$ — множество единичных вектор-столбцов $\mathbb{R}^M$; $\phi(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^{M \times N}$ — неслучайный матричнозначный процесс, $\Phi(u, dv)$ — неотрицательная неслучайная σ-конечная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, параметризованная $u \in \mathbb{R}_+$; M_t^Y — $\mathcal{F}_t$-согласованный чисто разрывный мартингал.

Обозначим через $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{Y_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ поток σ-алгебр, порожденный процессом наблюдений Y_t.

Относительно системы наблюдения (1), (2) сделаны следующие *предположения*:

а. Все траектории процессов X_t и Y_t непрерывны справа. Поток $\{\mathcal{F}_t\}$ порожден только процессами X_t и Y_t, т.е. $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{X_s, Y_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ для любого $t \geqslant 0$;

б. Мартингалы в (1) и (2) сильно ортогональны, т.е. для любого $t \geqslant 0$

$$[M^X, M^Y]_t \triangleq \sum_{s: s \leqslant t} \Delta M_s^X (\Delta M_s^Y)^\top \equiv 0 \quad \mathsf{P} - \text{п.н.} \quad (\text{почти наверное});$$

в. Все компоненты $\phi_{ij}(t)$ матричнозначного процесса $\phi(t)$ являются неотрицательными. Мера $\Phi(u, dv)$ такова, что $\Phi(u, [0, v]) \equiv 0$ и $\Phi(v, [0, u]) \equiv \Phi(0, [0, u - v])$ для любых $0 \leqslant v \leqslant u$. Она допускает разложение $\Phi(u, \cdot) = \Phi^c(u, \cdot) + \Phi^d(u, \cdot)$, где Φ^c — абсолютно непрерывная по мере Лебега, а Φ^d — дискретная (считающая) составляющая; Φ^d содержит лишь конечное множество скачков. Для процесса ϕ и меры Φ при любых $e_i \in \mathbb{S}^N$ и $t \geqslant 0$ выполняются условия

$$\begin{cases} \mathbf{1}\phi(t) e_j > 0, \\ \mathbf{1}\phi(t) e_j \Phi(0, \{t\}) \leqslant 1, \\ \exp\left[-\int_0^{+\infty} \mathbf{1}\phi(s) e_j \Phi^c(0, ds)\right] \prod_{s_k > 0} \Big(1 - \mathbf{1}\phi(s_k) e_j \Phi^d(0, \{s_k\})\Big) \equiv 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{1}$ — вектор-строка подходящей размерности.

Задача СК-оптимальной фильтрации состояния МСП X_t по имеющимся наблюдениям Y заключается в построении такой $\mathcal{O}_t$-согласованной оценки $\widehat{X}_t$, что

$$\mathsf{E}\left\{\|\widehat{X}_t - X_t\|^2\right\} \leqslant \mathsf{E}\left\{\|\overline{X}_t - X_t\|^2\right\}$$

для любой другой $\mathcal{O}_t$-согласованной оценки $\overline{X}_t$.

Представленные выше условия обеспечивают корректность мартингального представления векторного процесса со считающими компонентами (2), непрерывность справа потока σ-алгебр $\{\mathcal{O}_t\}$ и, в итоге, возможность использовать результаты решения общей задачи оптимальной нелинейной фильтрации [1, 2]. Детали верификации этих условий для рассматриваемого в статье класса систем наблюдения приведены в [3].

Известно, что оптимум СК-критерию доставляет условное математическое ожидание (УМО) оцениваемого состояния по имеющимся наблюдениям $\widehat{X}_t \triangleq \mathsf{E}\{X_t|\mathcal{O}_t\}$. Задача сводится к определению уравнений, задающих искомое УМО и численных методов их решения.

Наблюдаемому процессу со считающими компонентами Y_t может быть поставлен в соответствие мультивариантный точечный процесс, определенный последовательностью пар $\{(\tau_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $\mathfrak{O}_n \triangleq \sigma\{(\tau_k, r_k), k \leqslant n\}$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, порожденная первыми n скачками процесса Y_t. Ограничения (3) имеют следующую интерпретацию. Пара (ϕ, Φ) характеризует “мгновенные” характеристики совместного распределения моментов τ_n и скачков r_n:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\tau_{n-1} < s,\ \tau_n \in [s, s+ds),\ r_n = f_i | \mathcal{F}_s^X \vee \mathfrak{O}_{n-1} \vee \{\tau_n \geqslant s\}\right\} = \\ = f_i^\top \phi(s-\tau_{n-1}) X_{s-} \Phi(\tau_{n-1}, ds).\end{aligned}$$

Из этого равенства следует неотрицательность пары (ϕ, Φ). Первое неравенство в (3) регуляризует обращение в нуль произведения в правой части последнего равенства: оно может происходить только из-за равенства нулю меры Φ. Данное ограничение вполне стандартно: например, пуассоновский процесс корректно определен лишь в случае, когда его интенсивность строго положительна. Остальные условия (3) гарантируют, что дли́ны интервалов $\tau_n - \tau_{n-1}$ между скачками в процессе наблюдений Y_t являются *обычными* (нерасширенными) случайными величинами. Действительно, из [3, лемма 1] следует, что условное распределение момента скачка τ_n относительно $\mathfrak{O}_{n-1} \vee \mathcal{F}^X$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left\{\tau_n \leqslant t | \mathfrak{O}_{n-1} \vee \mathcal{F}^X\right\} = \\ &= \mathbf{I}(t-\tau_{n-1}) \left(1 - \exp\left(-\int\limits_{\tau_{n-1}}^{t} \mathbf{1}\phi(s-\tau_{n-1}) X_{s-} \Phi^c(\tau_{n-1}, ds)\right) \times \right. \\ &\left. \times \prod_{s_k < t-\tau_{n-1}} \left(1 - \mathbf{1}\phi(s_k - \tau_{n-1}) X_{s_k-} \Phi^d(\tau_{n-1}, \{s_k\})\right)\right).\end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что второе и третье условия (3) совместно обеспечивают для данной функции распределения выполнение базовых свойств: неотрицательности, монотонного неубывания и нормировки.

Введем в рассмотрение $\mathcal{O}_t$-согласованные процесс

$$\psi(t) \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}(t)\phi(t-\tau_{n-1}) \tag{4}$$

и меру

$$\Psi(dt) \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}(t)\Phi(\tau_{n-1},dt). \tag{5}$$

Оценка оптимальной фильтрации является сильным решением стохастической системы [3]

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t = p_0 + \int\limits_0^t \Lambda^\top \widehat{X}_s ds &+ \\ + \int\limits_0^t k(s-)\psi^\top(s)\Big(&(\Delta Y_s^\top \psi(s)\widehat{X}_{s-})^+ dY_s - \mathbf{1}^\top \Psi(ds)\Big) + \\ + \int\limits_0^t \mathbf{I}_{\{1\}}\big(&\mathbf{1}\psi(s)\widehat{X}_{s-}\Psi(\{s\})\big)\big(I - \Psi(\{s\})\mathrm{diag}\,(\mathbf{1}\psi(s))\big)\widehat{X}_{s-}\mathbf{1}dY_s, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\Delta Y_t \triangleq (Y_t - Y_{t-})$ — функция скачков наблюдений, $k(t) \triangleq \mathrm{diag}\,(\widehat{X}_t) - \widehat{X}_t\widehat{X}_t^\top = \mathrm{cov}(\widehat{X}_t, \widehat{X}_t|\mathcal{O}_t)$ — условная ковариация оценки $\widehat{X}_t$, а $(\cdot)^+$ — операция псевдообращения.

3. Алгоритм робастной фильтрации, основанный на диффузионной аппроксимации наблюдений

Рассмотрим вспомогательные M-мерные процессы со считающими компонентами

$$Y_t^j = \int\limits_0^t \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}^j,\tau_n^j]}(s)\phi(s-\tau_{n-1}^j)e_j\Phi(\tau_{n-1}^j, ds) + M_t^j, \quad j = \overline{1,N}, \tag{7}$$

где M_t^j — некоторые мартингалы. Все $\{Y_t^j\}$ являются однородными процессами восстановления, а распределение времени между их скачками и распределение скачков описываются следующими функциями (доказательство см. в [3]):

$$F_j(t) \triangleq \mathsf{P}\left\{\tau_1^j \leqslant t\right\} =$$

$$= 1 - \exp\left(-\int\limits_0^t \mathbf{1}\phi(s)e_j\Phi^c(0,ds)\right)\prod_{s_k<t}\Bigl(1-\mathbf{1}\phi(s_k)e_j\Phi^d(0,\{s_k\})\Bigr),$$

$$F_{ij}(t) \triangleq \mathsf{P}\left\{\tau_1^j \leqslant t,\ Y^j_{\tau_1^j} = f_i\right\} =$$

$$= \int\limits_0^t f_i^\top \phi(s)e_j \exp\left(-\int\limits_0^s \mathbf{1}\phi(u)e_j\Phi^c(0,du)\right)\prod_{u_k<t}\Bigl(1-\mathbf{1}\phi(u_k)e_j\Phi^d(0,\{u_k\})\Bigr)\Phi(0,ds).$$

Анализируя формулу для F_j, легко видеть, что условия (3) являются достаточно необременительными: в качестве распределения длины интервалов времени между скачками Y^j они допускают любые регулярные распределения на положительной полуоси, содержащие конечное число скачков.

Примéним к данным процессам центральную предельную теорему для обобщенных процессов восстановления (ЦПТОПВ) [16]. Так как скачки процессов Y^j являются случайными величинами с конечным множеством возможных значений $\mathbb{S}^M$, то для них существуют моменты любого порядка: в частности, $m_j^Y \triangleq \mathsf{E}\left\{Y^j_{\tau_1^j}\right\}$ и $K_j^Y \triangleq \operatorname{cov}(Y^j_{\tau_1^j}, Y^j_{\tau_1^j}) = \operatorname{diag}(m_j^Y) - m_j^Y(m_j^Y)^\top$. Дополнительно предполагается, что для любых $j = \overline{1,N}$ величины τ_1^j имеют моменты до второго включительно: $m_j^\tau \triangleq \mathsf{E}\left\{\tau_1^j\right\}$, $\sigma_j^\tau \triangleq \sqrt{\mathsf{D}\left\{\tau_1^j\right\}}$.

Рассмотрим N вспомогательных случайных векторов $\gamma_j \triangleq Y^j_{\tau_1^j} - \frac{\tau_1^j}{m_j^\tau}m_j^Y$, $j = \overline{1,N}$. Они являются центрированными с ковариационными матрицами

$$K_j^\gamma \triangleq \operatorname{cov}(\gamma_j,\gamma_j) =$$
$$= \operatorname{diag}(m_j^Y) - \left(1 - \left(\frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2\right) m_j^Y(m_j^Y)^\top -$$
$$- \frac{1}{m_j^\tau}\left(\operatorname{cov}\left(Y^j_{\tau_1^j}, \tau_1^j\right)(m_j^Y)^\top + m_j^Y \operatorname{cov}\left(\tau_1^j, Y^j_{\tau_1^j}\right)\right).$$

Подберем для всех K_j^γ такую общую $(L\times M)$-мерную матрицу Z ($L \leqslant M$), что преобразованные матрицы $ZK_j^\gamma Z^\top$ невырожденны для всех $j = \overline{1,N}$. Тогда по ЦПТОПВ [16] при $t \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{t}}Z\left(Y_t^j - \frac{t}{m_j^\tau}m_j^Y\right) \xrightarrow{Law} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m_j^\tau}ZK_j^\gamma Z^\top\right).$$

Легко видеть, что (7) похожи на наблюдаемый процесс (2): распределение Y_t совпадает с распределением Y_t^j при условии $X_t(\omega) \equiv e_j$. Поэтому диффузионная аппроксимация распределения процессов (7) будет приближенно выполняться и для исходных наблюдений (2), если считать, что темп смены состояний МСП X_t будет много меньше темпа скачков наблюдений. Для этого дополнительно предположим, что для системы (1) и (2) выполнено условие

$$\max_j m_j^\tau \ll \Delta \ll \frac{1}{\max_j |\lambda_{jj}|} \tag{8}$$

для некоторого шага $\Delta > 0$. Левое неравенство (8) обеспечивает в силу ЦПТОПВ приближенные равенства

$$Law\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} Z\left(Y^j_{n\Delta} - Y^j_{(n-1)\Delta} - \frac{\Delta}{m_j^\tau} m_j^Y\right)\right) \approx \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top\right), \quad j = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Правое неравенство (8) обеспечивает малую вероятность того, что на временно́м интервале длины Δ МСП X_t совершит хотя бы один скачок:

$$\mathsf{P}\left\{X_t \equiv X_{(n-1)\Delta},\ t \in [(n-1)\Delta, n\Delta]\right\} = 1 - \max_j |\lambda_{jj}|\Delta + o(\max_j |\lambda_{jj}|\Delta).$$

Пусть ν_n — число скачков состояния X, произошедших на интервале $[(n-1)\Delta, n\Delta]$, тогда в силу неравенства Берри—Эссеена

$$\begin{gathered} \Bigg\| Law\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} Z\left(Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}\right) \Big| \mathcal{F}^X\right) - \\ - \sum_{j=1}^N e_j^\top X_{n\Delta} \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} Z m_j^Y, \frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top\right)\Bigg\|_\infty \leqslant \\ \leqslant [1 - \mathbf{I}_{\{0\}}(\nu_n)](\max_j |\lambda_{jj}|\Delta + o(\Delta)) + \mathbf{I}_{\{0\}}(\nu_n) C \Delta^{-1/2} \end{gathered} \tag{10}$$

для некоторой константы C, зависящей от вторых и третьих моментов приращений $Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}$.

Итак, рассмотрим систему наблюдения в дискретном времени, полученную из (1), (2):

$$\begin{cases} x_n \triangleq X_{n\Delta}, \\ y_n \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} Z(Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}). \end{cases} \tag{11}$$

Левая часть неравенства (10) обеспечивает ее приближенное описание динамической моделью:

$$\begin{cases} x_n = P^\top x_{n-1} + \varepsilon_n, \\ y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^N e_j^\top x_n \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} Z m_j^Y + \left(\frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top\right)^{1/2} V_n\right), \end{cases} \tag{12}$$

где $P \triangleq \exp(\Delta\Lambda)$, $\{\varepsilon_n\}$ — $\mathcal{F}^X_{n\Delta}$-согласованная мартингал-разность, $\{V_n\}$ — независимый от $\{x_n\}$ L-мерный гауссовский стандартный дискретный белый шум.

Предлагаемый алгоритм робастной фильтрации совпадает с алгоритмом оптимальной нелинейной фильтрации [17] состояния системы (12):

а) начальное условие

$$\overline{X}_0 = p_0; \tag{13}$$

б) рекуррентная двухшаговая процедура вычисления в точках $\{n\Delta\}$:

$$\overline{\mathbf{X}}_{n\Delta} = P^\top \overline{X}_{(n-1)\Delta} \tag{14}$$

— прогноз,

$$\overline{X}^j_{n\Delta} = \frac{\overline{\mathbf{X}}^j_{n\Delta}\mathcal{G}\left(y_n, \mu_j, \varkappa_j\right)}{\sum\limits_{\ell=1}^{N}\overline{\mathbf{X}}^\ell_{n\Delta}\mathcal{G}\left(y_n, \mu_\ell, \varkappa_\ell\right)}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{15}$$

— коррекция;

в) вычисление оценки во внутренних точках интервалов $t \in ((n-1)\Delta, n\Delta)$:

$$\overline{X}_t = \exp((t-(n-1)\Delta)\Lambda^\top)\overline{X}_{(n-1)\Delta}. \tag{16}$$

В данном алгоритме обозначение

$$\mathcal{G}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2}(\det K)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)^\top K^{-1}(y-m)\right)$$

относится к гауссовской плотности со средним m и невырожденной ковариационной матрицей K, а моментные характеристики μ_j и $\varkappa_j$ в (15) вычисляются по формулам:

$$\mu_j = \frac{\sqrt{\Delta}}{m^\tau_j} Z m^Y_j, \quad \varkappa_j = \frac{1}{m^\tau_j} Z K^\gamma_j Z^\top, \quad j = \overline{1, N}. \tag{17}$$

4. Численный пример: мониторинг состояния RTP-канала

Рассмотрим прикладную задачу оперативного оценивания состояния гетерогенного телекоммуникационного канала, функционирующего под управлением протокола RTP, по потоку пакетов, регистрируемому на узле-получателе. Численные эксперименты выполнялись по смоделированным данным, однако параметры воспроизводимого RTP-канала выбирались близкими к характеристикам, вычисленным по реальным данным функционирования VoIP сервиса Linphone в телекоммуникационной сети с “последней милей” 3G [18]. Необходимость в синтетических данных возникла из-за особенностей тестов, демонстрирующих свойства предлагаемого робастного алгоритма. Для сравнительного анализа оценок требуется моделирование потоков пакетов с различными заданными распределениями и знание точного состояния МСП, которое в натурных экспериментах вряд ли достижимо.

RTP-канал описывается однородным МСП с матрицей интенсивностей переходов Λ и тремя возможными состояниями:

e_1 — малая загрузка канала,

e_2 — умеренная загрузка канала,

e_3 — перегрузка проводного участка или потеря сигнала на беспроводном участке.

Текущее состояние RTP-канала недоступно прямому наблюдению, однако на узле-приемнике имеется статистическая информация в виде входящего потока RTP-пакетов. Его особой чертой является возможность одновременного получения не одного, а целой "пачки" пакетов. Дело в том, что низкоуровневые протоколы, являющиеся базой для RTP, сконструированы таким образом, чтобы обеспечивать в условиях меняющегося качества канала требуемую среднюю скорость передачи. Данная характеристика обеспечивается на узле-передатчике с помощью управляемого буфера передачи. В случае хороших условий передачи размер буфера передатчика мал и отправка происходит интенсивно, но относительно малыми "пачками". При ухудшении состояния канала размер буфера увеличивается и отправка пакетов происходит менее интенсивно и большими "пачками".

Распределение потока "пачек" пакетов полностью характеризуется парами $\{(p^{\tau}(t|e_j), P^{Y}(n|e_j))\}_j$, где $p^{\tau}(t|e_j)$ — плотность распределения времени τ между получением последовательных "пачек" пакетов при условии, что канал находится в состоянии e_j, а $P^{Y}(n|e_j)$ — распределение размера Y "пачки" при том же условии. Предполагается, что при известном состоянии канала время τ и размер "пачки" Y независимы между собой.

Практическая задача состоит в конструировании аппаратно-независимого монитора RTP-канала на узле-получателе, т.е. в создании алгоритма оценивания в реальном масштабе времени состояния канала по наблюдениям потока принимаемых пакетов.

Решим эту задачу для разных комплексов априорной информации о распределении потока пакетов:

а) распределения $\{(p^{\tau}(t|e_j), P^{Y}(n|e_j))\}$ известны точно;

б) набор $\{(p^{\tau}(t|e_j), P^{Y}(n|e_j))\}$ неизвестен, но даны предполагаемые распределения $\{(\widetilde{p}^{\tau}(t|e_j), \widetilde{P}^{Y}(n|e_j))\}$;

в) набор $\{(p^{\tau}(t|e_j), P^{Y}(n|e_j))\}$ неизвестен, однако для него даны моментные характеристики

$$m_j^{\tau} \triangleq \mathsf{E}\{\tau|e_j\}, \quad \sigma_j^{\tau} \triangleq \sqrt{\mathsf{D}\{\tau|e_j\}}, \quad m_j^{Y} \triangleq \mathsf{E}\{Y|e_j\} \quad \text{и} \quad \sigma_j^{Y} \triangleq \sqrt{\mathsf{D}\{Y|e_j\}}.$$

Задачи определения параметров системы наблюдения (1), (2) по статистической информации не являются предметом изучения данной статьи, их можно решать, применяя различные процедуры адаптивной идентификации, включая EM-алгоритм [17] и его модификации [19].

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. а), то для решения задачи оценивания в реальном масштабе времени может быть применен алгоритм оптимальной фильтрации (6), в котором элементы $\phi_{nj}(t)$ матрицы интенсивности $\phi(t)$ в ψ (4) определены формулой

$$\phi_{nj}(t) = P^Y(n|e_j)p^\tau(t|e_j)\left(\int\limits_t^{+\infty} p^\tau(s|e_j)ds\right)^+,$$

а мера (5) $\Psi(dt) = dt$. Здесь $j = 1,2,3$ — номер возможного состояния RTP-соединения, $n = \overline{1,M}$ — объем "пачек" пакетов.

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. б), то для решения задачи можно использовать тот же алгоритм (6), подставив в него вместо реальных распределений предполагаемые $\{(\widetilde{p}^\tau(t|e_j), \widetilde{P}^Y(n|e_j))\}$.

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. в), то для оценивания состояния канала можно использовать предложенный алгоритм робастной фильтрации (13)—(17) после предварительного семплирования наблюдений.

Пусть для системы наблюдения, описывающей функционирование RTP-соединения, выполнено условие (8) для значения шага дискретизации Δ. Исходный наблюдаемый процесс $Y_t = \mathrm{col}\,(Y_t^1, \ldots, Y_t^M)$ содержит в качестве компонент счетчики "пачек" пакетов объема $n = \overline{1,M}$: компонента Y_t^n равна числу "пачек" размера n, зарегистрированных получателем за время $[0,t]$. Тогда в семплированных наблюдениях

$$\begin{bmatrix} \nu_r^\tau \\ \nu_r^Y \end{bmatrix} \triangleq \Delta^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & M \end{bmatrix} (Y_{r\Delta} - Y_{(r-1)\Delta}), \tag{18}$$

т.е. в качестве первой компоненты ν_r^τ выступает число "пачек", полученных на интервале $((r-1)\Delta, r\Delta]$, умноженное на $\Delta^{-1/2}$, а в качестве второй компоненты ν_r^Y — масштабированный таким же образом общий объем пакетов, полученных в этих "пачках". Применение ЦПТОПВ к наблюдениям (18) позволяет вычислить параметры (17) диффузионной аппроксимации в данной задаче:

$$\begin{gathered} \mu_j = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\Delta} m_j^Y}{m_j^\tau} \end{bmatrix}, \\ \varkappa_j = \frac{1}{m_j^\tau} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2 & \left(\dfrac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2 m_j^Y \\[2ex] \left(\dfrac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2 m_j^Y & (\sigma_j^Y)^2 + \left(\dfrac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2 (m_j^Y)^2 \end{bmatrix}, \quad j = 1,2,3. \end{gathered} \tag{19}$$

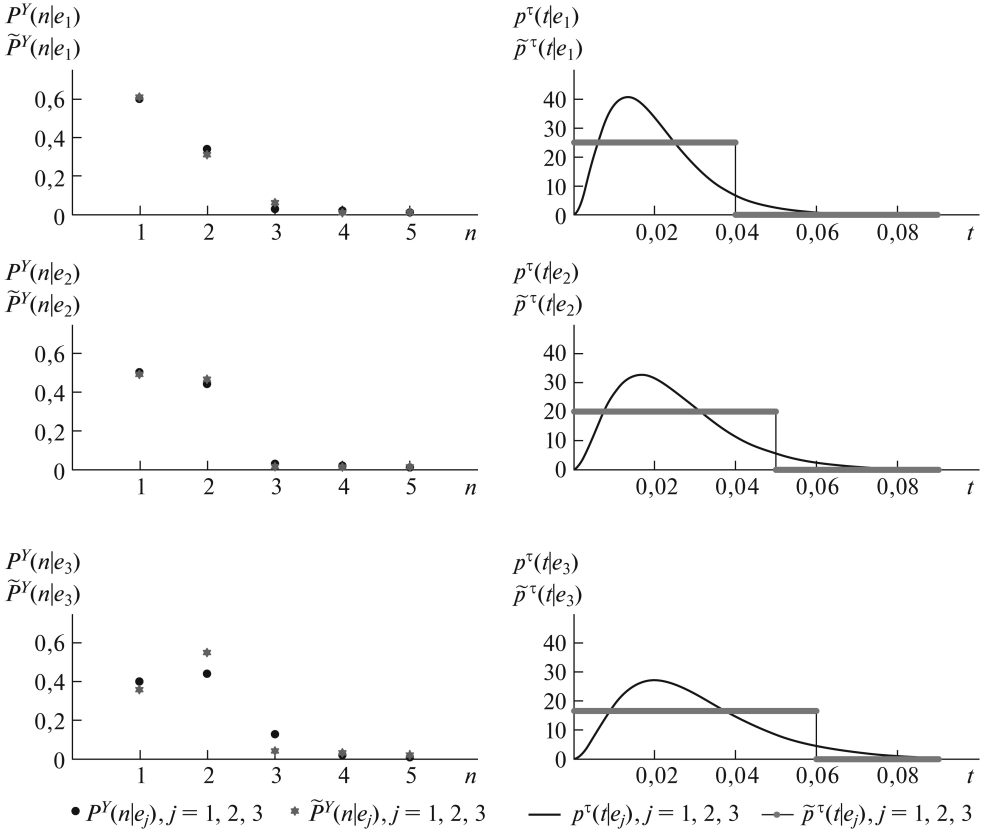

Рис. 1. Истинные $(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))$ и предполагаемые $(\widetilde{p}^\tau(t|e_j), \widetilde{P}^Y(n|e_j))$ распределения пары “время между получением — число пакетов в пачке” (в зависимости от состояния e_j канала).

Комплекс численных экспериментов проводился для системы наблюдения с параметрами:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}002171 & 0{,}001964 & 0{,}000207 \\ 0{,}002442 & -0{,}003161 & 0{,}000719 \\ 0{,}001665 & 0{,}000666 & -0{,}002331 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5039 \\ 0{,}3449 \\ 0{,}1512 \end{bmatrix}, \quad M = 5, \quad \Delta = 1{,}5.$$

Наборы истинных $(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))$ и предполагаемых $(\widetilde{p}^\tau(t|e_j), \widetilde{P}^Y(n|e_j))$ условных распределений представлены в табл. 1 и 2, а их графики — на рис. 1. Параметры распределений подобраны таким образом, чтобы моментные характеристики истинных и предполагаемых распределений совпадали для $j = 1, 2, 3$: $\widehat{m}_j^\tau \equiv m_j^\tau$, $\widehat{\sigma}_j^\tau \equiv \sigma_j^\tau$, $\widehat{m}_j^Y \equiv m_j^Y$ и $\widehat{\sigma}_j^Y \equiv \sigma_j^Y$.

Для демонстрации качества используемой диффузионной аппроксимации были смоделированы отрезки длительностью $T = 100000$ секунд потоков RTP-пакетов с истинным и предполагаемым распределениями. По получившимся семплированным наблюдениям $\{(\sqrt{\Delta}\nu_r^\tau, \sqrt{\Delta}\nu_r^Y)\}$ и $\{(\sqrt{\Delta}\widetilde{\nu}_r^\tau, \sqrt{\Delta}\widetilde{\nu}_r^Y)\}$ для обоих потоков были построены соответствующие гистограммы $\pi^\tau(x)$,

$\pi^Y(x)$, $\widetilde{\pi}^\tau(x)$ и $\widetilde{\pi}^Y(x)$. Так как начальное условие p_0 подобрано в данном эксперименте стационарным для матрицы Λ, то если временной шаг Δ достаточен для правомерности применения ЦПТОПВ, можно ожидать, что гистограммы в парах $(\pi^\tau(x), \widetilde{\pi}^\tau(x))$ и $(\pi^Y(x), \widetilde{\pi}^Y(x))$ будут схожи между собой и близки к следующим теоретическим плотностям — трехкомпонентным смесям гауссовских распределений:

$$q^\tau(x) = \sum_{j=1}^{3} p_0^j \mathcal{G}\left(x, \frac{\Delta}{m_j^\tau}, \frac{\Delta}{m_j^\tau}\left(\frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2\right),$$

$$q^Y(x) = \sum_{j=1}^{3} p_0^j \mathcal{G}\left(x, \frac{\Delta m_j^Y}{m_j^\tau}, \frac{\Delta}{m_j^\tau}\left[(\sigma_j^\tau)^2 + \left(\frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau}\right)^2 (m_j^Y)^2\right]\right).$$

Перечисленные выше гистограммы, теоретические плотности $q^\tau(x)$ и $q^Y(x)$ и отдельные гауссовские “моды” $q_j^\tau(x)$ и $q_j^Y(x)$— слагаемые в двух последних суммах, представлены на рис. 2. Конечно, формальные статистические тесты на проверку принадлежности выборок, по которым построены гистограммы, единой генеральной совокупности из предлагаемых теоретических распределений, дадут отрицательный результат при любом осмысленном выборе уровня доверительной вероятности. Тем не менее следует отметить несомненное визуальное сходство графиков в тройках $(\pi^\tau(x), \widetilde{\pi}^\tau(x), q^\tau(x))$ и

Таблица 1. Распределения времени между “пачками”

		Распределение	Параметр 1	Параметр 2
Истинное распределение $p^\tau(t\|e_j)$	e_1	Гамма	3	$\frac{1}{150}$
	e_2	Гамма	3	$\frac{1}{120}$
	e_3	Гамма	3	$\frac{1}{100}$
		Распределение	Параметр 1	Параметр 2
Предполагаемое распределение $\widetilde{p}^\tau(t\|e_j)$	e_1	Равномерное	0	0,04
	e_2	Равномерное	0	0,05
	e_3	Равномерное	0	0,06

Таблица 2. Распределения объема “пачек”

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Истинное распределение $P^Y(n\|e_j)$	e_1	0,6	0,34	0,03	0,02	0,01
	e_2	0,5	0,44	0,03	0,02	0,01
	e_3	0,4	0,44	0,13	0,02	0,01
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Предполагаемое распределение $\widetilde{P}^Y(n\|e_j)$	e_1	0,61	0,31	0,06	0,01	0,01
	e_2	0,49	0,465	0,015	0,015	0,015
	e_3	0,36	0,55	0,04	0,03	0,02

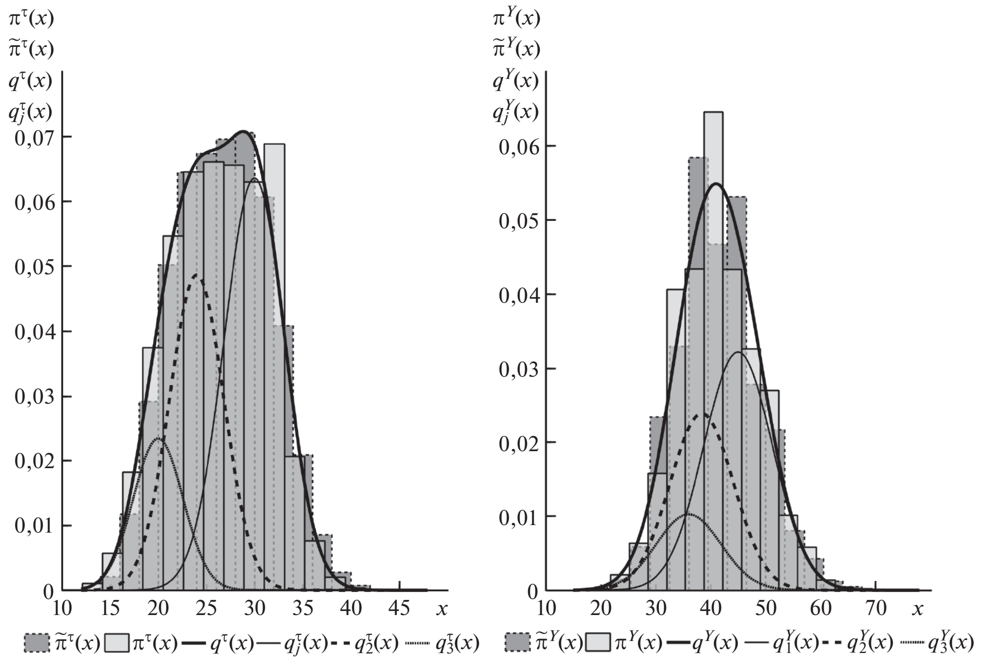

Рис. 2. Гистограммы $\pi^Y(x), \pi^\tau(x)$ и $\widetilde{\pi}^Y(x), \widetilde{\pi}^\tau(x)$, построенные по семплированным наблюдениям с истинным и предполагаемым распределением, в сравнении с теоретическими плотностями $q^Y(x), q^\tau(x)$ и отдельными гауссовскими модами $q_j^Y(x), q_j^\tau(x)$.

$(\pi^Y(x), \widetilde{\pi}^Y(x), q^Y(x))$, что позволяет сделать положительный вывод о возможности применения к имеющимся наблюдениям диффузионной аппроксимации.

На рис. 3 представлена часть семплированных наблюдений, соответствующих потоку RTP-пакетов с истинным распределением, в сравнении с текущем состоянием соединения X_t, полученная на отрезке времени $[0; 1000$ с$]$. По данным наблюдениям вычислены три оценки фильтрации:

оценка $\widehat{X}_t$ построена по комплексу п. а) априорной информации о потоке пакетов: оптимальная нелинейная оценка,

оценка $\widetilde{X}_t$ построена по комплексу п. б) априорной информации о потоке пакетов: оценка, вычисленная по формулам оптимальной нелинейной фильтрации и набору предполагаемых распределений,

оценка $\overline{X}_t$ построена по комплексу п. в) априорной информации о потоке пакетов: оценка, вычисленная с помощью предлагаемого робастного алгоритма.

Графики этих оценок приведены на рис. 4 в сравнении с истинным состоянием X_t. Из рис. 4 видно, что точность робастной оценки $\overline{X}_t$ мало проигрывает в сравнении с точностью оптимальной оценки $\widehat{X}_t$. В то же время оценка $\widetilde{X}_t$, вычисленная по оптимальному алгоритму, но предполагаемым распределениям, отличающимся от истинных, демонстрирует осциллирую-

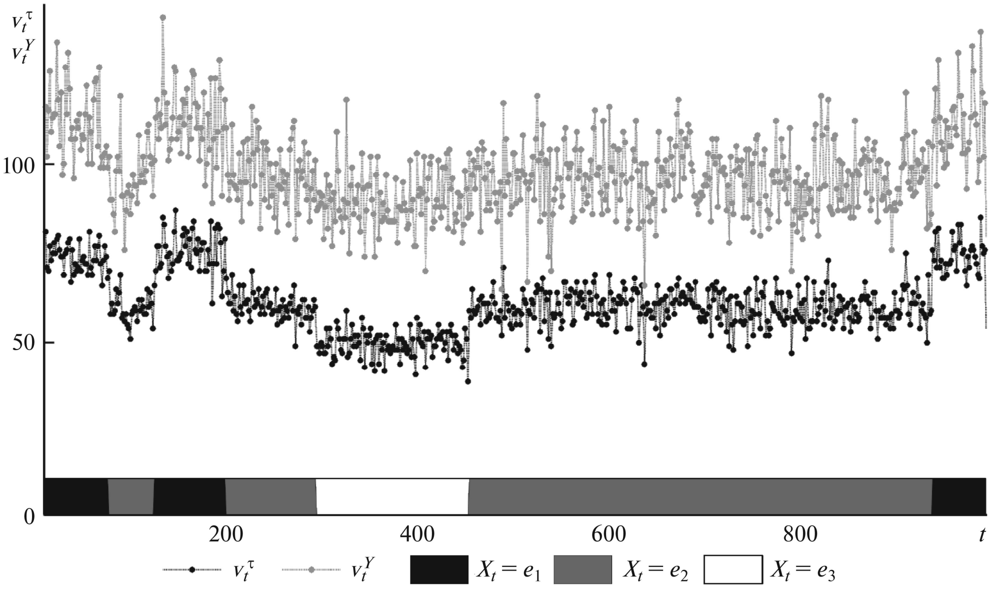

Рис. 3. Семплированные наблюдения "суммарное число пакетов — число пачек" (ν_t^Y, ν_t^τ), подготовленные для робастной фильтрации, на фоне состояния X_t.

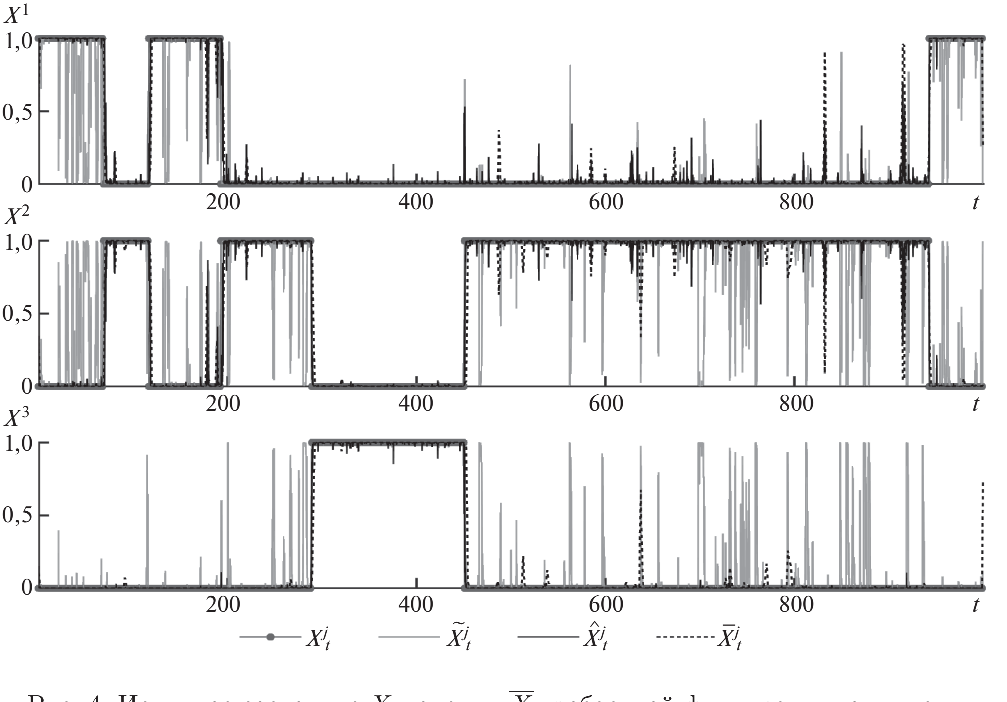

Рис. 4. Истинное состояние X_t, оценки $\overline{X}_t$ робастной фильтрации, оптимальной фильтрации с истинными $\widehat{X}_t$ и предполагаемыми $\widetilde{X}_t$ распределениями.

щий характер и сильно проигрывает двум упомянутым выше оценкам. По траекториям процесса и наблюдений длиной $T = 100000$ сек были вычислены выборочные средние следующих показателей точности:

$$\mathsf{E}\left\{\|\widehat{X}_t - X_t\|^2\right\} = 0{,}018,\ \mathsf{E}\left\{\|\overline{X}_t - X_t\|^2\right\} = 0{,}0396 \text{ и } \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_t - X_t\|^2\right\} = 0{,}1273.$$

При этом теоретически можно вычислить средний квадрат самого МСП:

$$\mathsf{E}\left\{\|X_t - p_0\|^2\right\} = 1 - \|p_0\|^2 = 0{,}3957.$$

Таким образом, дисперсия ошибки оценки робастной фильтрации превышает оптимальный параметр более чем в 2 раза, но оценка, вычисленная по оптимальному алгоритму, но предполагаемым распределениям — более чем в 7 раз. При этом отношение "мощность оцениваемого сигнала / мощность оставшегося шума" у оценок $\widehat{X}_t$, $\overline{X}_t$ и $\widetilde{X}_t$ составляют соответственно 21,98, 9,99 и 3,11.

Представленные результаты иллюстрируют весьма высокую точность предлагаемого алгоритма робастной фильтрации: по своему качеству он очень близок к оптимальному. При этом его реализация менее ресурсоемкая. На шаге дискретизации Δ алгоритм "прогноз—коррекция" выполняется единожды, причем матрица P вычислена для всех шагов один раз заранее. В то же время анализируя правую часть рис. 2, можно сделать вывод, что уравнение оптимальной фильтрации на одном шаге дискретизации Δ численно решается от 12 до 45 раз: такое число "пачек" пакетов поступает на узел–получатель за время Δ.

5. Заключение

В статье представлен новый алгоритм робастной фильтрации состояний МСП по многомерным считающим наблюдениям. Предлагаемый алгоритм разработан для такого класса моделей наблюдения, в которых интенсивность поступления наблюдений много больше интенсивности смены оцениваемого состояния. Это условие позволяет использовать вместо точного описания процесса наблюдений его диффузионную аппроксимацию и значительно упростить процедуру вычисления оценок фильтрации. При незначительных потерях в качестве оценивания по сравнению с оптимальным робастные оценки являются устойчивыми к априорной неопределенности распределения процесса наблюдений, в отличие от оптимальных. Это свойство продемонстрировано на численном примере мониторинга состояния RTP-соединения по наблюдениям высокочастотного потока пакетов на узле-получателе.

Исследования в области создания устойчивых алгоритмов оценивания состояний МСП по считающим наблюдениям нельзя считать законченными: их планируется продолжать по следующим направлениям. Во-первых, предлагаемый робастный алгоритм может быть дополнительно оптимизирован за счет выбора подходящей матрицы преобразования наблюдений Z. В теоретической части данной статьи к Z предъявляется только условие, обеспечивающее невырожденность ковариационных матриц диффузионных аппроксимаций распределения семплированных наблюдений. В численном примере конкретный вид матрицы Z был выбран исходя из физической подоплеки наблюдений: в результате преобразования в качестве наблюдений выступали пары "число полученных "пачек" пакетов — общее число пакетов в пачках", но этот выбор явно не единственный.

Во-вторых, представляется интересным получить количественные характеристики потери точности при переходе к диффузионной аппроксимации наблюдений. В-третьих, важными могли бы являться результаты исследований устойчивости робастного алгоритма фильтрации по отношению к неточному знанию моментных характеристик как наблюдений, так и самого состояния. В-четвертых, интерес представляет развитие предлагаемого робастного подхода для решения задачи идентификации параметров соответствующих систем наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liptser R., Shiryayev A.* Statistics of Random Processes. II: Applications. N.Y.: Springer-Verlag, 2001.
2. *Липцер Р., Ширяев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
3. *Борисов А.* Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера // Информатика и ее применения. 2014. V. 8. № 3. С. 34–50.
4. *Борисов А.* Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания //АиТ. 2016. № 2. С. 115–141.

   Borisov A. Application of Optimal Filtering Methods for On-line of Queueing Network States // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 2. P. 277–296.
5. *Cont R., Stoikov S., Talreja R.* A Stochastic Model for Order Book Dynamics // Oper. Res. 2010. V. 58. No. 3. P. 549–563.
6. *Cont R., Larrard A.* Price Dynamics in a Markovian Limit Order Market // SIAM J. Financial Math. 2013. V. 4. No. 1. P. 1–25.
7. *Cvitanic J., Liptser R., Rozovskii B.* A Filtering Approach to Tracking Volatility from Prices Observed at Random Times // Ann. Appl. Probab. 2006. V. 16. P. 1633–1652.
8. *Liptser R., Zeitouni O.* Robust Diffusion Approximation for Nonlinear Filtering // J. Math. Syst. Est. Control. 1998. V. 8. No. 1. P. 1–22.
9. *Whitt W.* Stochastic-Process Limits. An Introduction to Stochastic-Process Limits and their Application to Queues. N.Y.: Springer, 2002.
10. *Kushner H.* Heavy Traffic Analysis of Controlled Queueing and Communication Networks. N.Y.: Springer, 2001.
11. *Коган Я., Липцер Р., Смородинский А.* Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Пробл. передачи информации. 1986. V. 22. № 1. С. 49–65.
12. *Kogan Y., Liptser R., Shenfild M.* State-Dependent Beneš Buffer Model with Fast Loading Output Rates // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. No. 1. P. 97–120.
13. *Кричагина Е., Липцер Р., Пухальский А.* Диффузионная аппроксимация для систем с входным потоком, зависящим от очереди, и произвольным обслуживанием // Теория вероятностей и ее применения. 1988. V. 33. № 1. С. 124–135.

14. *Misra V., Gong W., Towsley D.* Fluid-Based Analysis of Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 2000. V. 30. No. 4. P. 151–160.
15. *Domanska J., Domanski A., Czachorski T., Klamka J.* Fluid Flow Approximation of Time-Limited TCP/UDP/XCP Streams // B. Pol. Acad. Sci. Tech. 2014. V. 62. No. 2. P. 217–225.
16. *Smith W.* Regenerative stochastic processes // Proc. Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1955. V. 232. No. 1188. P. 6–31.
17. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
18. *Борисов А., Босов А., Миллер Г.* Моделирование и мониторинг состояния VoIP-соединения // Информатика и ее применения. 2016. V. 10. № 2. С. 2–13.
19. *Королев В.* EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 17.06.2019

После доработки 16.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. **А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),**
С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),
А.С. СТЕПАНОВА (nas778810@yandex.ru)
(Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет))

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ПОГЛОЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения при анализе статических стохастических систем. Под доверительным множеством поглощения понимается множество начальных позиций системы, для которых система в терминальный момент не выйдет за пределы допустимых значений с заданной вероятностью. Устанавливаются свойства доверительного множества поглощения, в частности его выпуклость. На основе доверительного метода предлагается алгоритм построения внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. Устанавливаются свойства этой аппроксимации. На основе полученных результатов решается задача о прогнозе скорости ветра в районе аэродрома посадки самолетов. Приводятся численные расчеты.

Ключевые слова: стохастическое программирование, доверительное множество поглощения, прогноз скорости ветра.

DOI: 10.31857/S0005231020040029

1. Введение

Многие реальные технические системы описываются в терминах стохастических динамических систем, критерием качества функционирования которых является некоторый статистический критерий [1]. В большинстве случаев в качестве критерия рассматривается математическое ожидание функции потерь. Но во многих прикладных задачах анализа стохастических систем встречаются критерии в виде функции квантили [2, 3]. Функция квантили (или VaR-критерий) характеризует гарантированный по вероятности результат решения задачи. Функция квантили по смыслу — это значение функции потерь, которое не будет превышено с заданной вероятностью. Функция квантили является в некотором смысле обратной к функции вероятности, которая характеризует вероятность достижения системой заданной цели. Этим задачам посвящено много публикаций. Можно привести монографии [2, 3], в которых подробно изучаются свойства функции квантили и предлагаются

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00436 А).

методы ее минимизации. В [4] исследуются свойства функции вероятности и предлагаются методы ее максимизации.

Особое место в задачах анализа стохастических систем по квантильному критерию занимает задача о построении доверительного множества поглощения начальных позиций системы. Речь идет о начальных позициях системы, обеспечивающих в конечный момент времени выполнение ограничений с заданной вероятностью. Такое множество называется [3] доверительным множеством поглощения.

Доверительное множество поглощения в статических стохастических системах можно рассматривать как множество уровня функции вероятности. Свойства множества уровня тесно связаны со свойствами функции вероятности. В частности, при квазивыпуклости функции вероятности множества уровня являются выпуклыми. Свойства квазивыпуклости функции вероятности обсуждаются в [4–7]. Условия выпуклости множеств уровня для досточно больших значений вероятности исследуются в [8]. Утверждения о свойствах квазивыпуклости функции вероятности, как правило, опираются на понятия квазивогнутых и логарифмически вогнутых вероятностных мер [9–12]. Условия связности множества уровня функции вероятности получены в [13], достоинством которой является отсутствие каких-либо ограничений на распределение случайных параметров.

Множество уровня функции вероятности нетрудно построить в тех случаях, когда вероятностные ограничения могут быть заменены на детерминированные. Данный подход известен как метод детерминированного эквивалента [3]. Класс систем, к которым этот метод применим, является достаточно узким. Как правило, для его применения необходима монотонность функции потерь.

В другом частном случае, когда функция потерь представима в виде максимума функций, в которые случайные параметры входят аддитивно, для построения множества уровня функции вероятности может быть применен аппарат p-эффективных точек, введенный в [14]. По сути, p-эффективная точка является многомерным аналогом квантили распределения. Алгоритм, позволяющий получить множество p-эффективных точек дискретного случайного вектора, предложен в [15]. Нетрудно проверить, что в случае дискретного распределения с конечным числом реализаций множество p-эффективных точек конечно, что позволяет получить детерминированное описание множества уровня функции вероятности. С помощью p-эффективных точек также можно получить верхние и нижние оценки целевой функции в задаче оптимизации детерминированной функции при ограничениях на значение функции вероятности [16]. Алгоритм решения данной задачи, основанный на использовании p-эффективных точек, в случае непрерывного распределения предложен в [17]. Обзор методов решения задач с вероятностными ограничениями указанного выше типа, основанных на построении внутренних и внешних аппроксимаций множества уровня функции вероятности, приведен в [18].

Следует отметить способ построения внешней аппроксимации множества уровня функции вероятности, основанный на использовании понятия α-ядра вероятностной меры [3]. При выполнении некоторых условий регулярности с помощью ядра можно получить нижнюю оценку функции квантили, которую можно использовать для построения внешней аппроксимации доверительного множества поглощения. Методы аппроксимации α-ядра предложены в [19, 20].

Таким образом, известные методы позволяют построить доверительное множество поглощения только для весьма узкого класса стохастических систем. Поэтому актуальной является задача построения доверительного множества поглощения для стохастических систем общего вида. В настоящей статье более детально исследовано свойство доверительного множества поглощения для статической стохастической системы. В частности, приводятся условия, когда это множество выпукло. При этом функция потерь имеет достаточно общую структуру. Для построения доверительного множества поглощения предлагается использовать доверительный метод, который впервые был описан в [21] и более детально исследован в [3]. В данном случае доверительный метод позволяет построить внутреннюю аппроксимацию доверительного множества поглощения. Приводятся условия, когда граница доверительного множества поглощения переходит в границу терминального множества. Эффективность полученных результатов демонстрируется на примере, состоящем в построении множества значений скорости ветра в районе аэродрома, при которых скорость ветра по происшествии фиксированного времени не выйдет с заданной вероятностью за пределы допустимых значений, что позволяет осуществить безопасную посадку самолета.

2. Постановка задачи

Предположим, что известна зависимость $z(y, X)$ вектора $z \in \mathbb{R}^l$ терминального состояния системы от вектора начальных позиций $y \in \mathbb{R}^s$ системы и от случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$, влияющего на положение системы. Предполагается, что случайный вектор X имеет известную функцию распределения $F_X(x)$. Пусть вектор терминального состояния z должен удовлетворять заданным ограничениям

$$\Phi(y, X) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, X)) \leqslant \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^1, \tag{2.1}$$

где функция $\tilde{\Phi}(z)$ описывает эти ограничения. Установим вероятность выполнения терминальных ограничений

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{2.2}$$

Требуется построить множество значений y, для которых будет выполнено это неравенство

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \colon P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}. \tag{2.3}$$

Множество (2.3) назовем доверительным множеством поглощения.

3. Свойства доверительного множества поглощения

В [2, 3] рассматривается аналогичная задача, в которой роль функции $\Phi(u, X)$ играет функция потерь, а вместо начальных позиций y рассматриваются стратегии управления $u \in U$. Для этой функции потерь вводятся функция вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} \tag{3.1}$$

и функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi\colon P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{3.2}$$

Согласно лемме Розенблатта [2, 3]

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y\colon P_\varphi(y) \geqslant \alpha\} = \{y\colon \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}. \tag{3.3}$$

Таким образом, для построения доверительного множества поглощения можно использовать не только свойства функции вероятности, но и свойства функции квантили.

В упомянутых публикациях приводятся условия, когда функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла, а функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута. Приведем этот результат из [3].

Определение 1 [4]. *Вероятностная мера $\mathcal{P}$ на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$ называется квазивыпуклой, если для любой пары непустых выпуклых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\mathcal{P}(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geqslant \min\{\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)\}.$$

Здесь сумма множеств и умножение множества на число понимаются в смысле Минковского:

$$(A + B) = \{z : z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\},$$
$$\lambda A = \{z : z = \lambda x,\ x \in A\}.$$

Приведем достаточное условие для квазивогнутости вероятностной меры.

Лемма 1 [4]. *Если случайный вектор имеет плотность вероятности $p(x)$ такую, что функция $p^{-\frac{1}{n}}(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$, то соответствующая ей вероятностная мера $\mathcal{P}$ квазивогнута.*

На основании этой леммы легко установить, что многие известные распределения имеют квазивогнутую вероятностную меру: нормальное распределение, экспоненциальное распределение, распределение Коши и т.д.

Напомним и другие определения.

Определение 2 [4]. *Функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется квазивыпуклой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leqslant \max\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

О п р е д е л е н и е 3 [4]. *Функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется квазивогнутой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geqslant \min\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

Приведем основной результат из [3], касающийся свойств выпуклости функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ и функции вероятности $P_\varphi(u)$.

Т е о р е м а 1 [3]. *Пусть функция потерь $\Phi(u,x)$ квазивыпукла по совокупности аргументов на $U \times \mathcal{X}$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое подмножество, а $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры $\mathcal{P}$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$, а функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U для любого $\alpha \in (0,1)$.*

Из этой теоремы получаем тривиальное следствие для исследования доверительного множества поглощения.

С л е д с т в и е 1. Пусть функция $\Phi(y,x)$, определяющая множество поглощения, квазивыпукла по совокупности аргументов на $\mathbb{R}^s \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры $\mathcal{P}$. Тогда доверительное множество поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ выпукло для любых $\varphi \in \mathbb{R}^1, \alpha \in (0,1)$.

Доказательство этого следствия основано на факте, что множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ играет роль множества уровня для квазивогнутой функции вероятности $P_\varphi(y)$, а множество уровня квазивогнутой функции выпукло.

Но остается вопрос: как строить доверительное множество поглощения. Это можно сделать, например, используя прямые методы, т.е. поступить следующим образом. Пусть зафиксировано некоторое конечное множество $Y \subset \mathbb{R}^s$.

А л г о р и т м 1.

1. Фиксируется точка $y \in Y$.

2. С помощью метода статистических испытаний оценивается вероятность $P_\varphi(y)$:

$$\widehat{P}_\varphi(y) = \frac{M(S_\varphi(y))}{n},$$

где $M(S_\varphi(y))$ — число успешных испытаний в серии из n испытаний, когда точки x из выборки принадлежат множеству

$$S_\varphi(y) \triangleq \{x : \Phi(y,x) \leqslant \varphi\}.$$

3. Проверяется условие $\widehat{P}_\varphi(y) \geqslant \alpha$. Если оно выполнено, то точка y включается в множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$, являющееся статистической аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

4. Процедура повторяется с шага 2 для новой точки $y \in Y$.

Можно отметить, что реализация данного алгоритма очень трудоемкая, так как при вероятностях α, близких к 1, объем выборки n должен быть очень большим, а перебрать нужно максимально большее число точек y из $\mathbb{R}^s$, чтобы хорошо оценить множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

В следующем разделе рассматривается другой способ построения множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, основанный на доверительном методе.

4. Построение внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения

Рассмотрим доверительный метод, подробно изложенный в [2, 3] и впервые опубликованный в [21].

Пусть S — доверительное множество, т.е. множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ реализаций случайного вектора X с вероятностной мерой не менее α. Рассмотрим функцию максимума

$$\psi(y, S) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(y, x). \tag{4.1}$$

Из [3] вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 2. Для любого доверительного множества S с вероятностной мерой не менее α выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \psi(y, S) \tag{4.2}$$

при всех $y \in \mathbb{R}^s$.

Данное утверждение вытекает из леммы 3.4 из [3]. Аналогично, переформулируя теорему 3.9 из [3], получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливы соотношения

$$\varphi_\alpha(y) = \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(y, S), \quad S_\alpha(y) = \arg\min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(y, S), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств с вероятностной мерой не менее α.

Примéним доверительный метод для построения доверительного множества поглощения. Зафиксируем множество $S \in \mathcal{F}_\alpha$ и рассмотрим множества

$$\mathcal{Y}_\varphi(x) \triangleq \{y : \Phi(y, x) \leqslant \varphi\}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \bigcap_{x \in S} \mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \colon \psi(y, S) \leqslant \varphi\}. \tag{4.5}$$

В соответствии с доверительным методом получается внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \mathcal{Y}_\varphi(S). \tag{4.6}$$

При этом если перебрать все доверительные множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$, то получится точное множество поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \bigcup_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \mathcal{Y}_\varphi(S). \tag{4.7}$$

Исследуем свойства множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$.

Пусть $\tilde{x} \in S$ — некоторая точка из S, а $N_i(\tilde{x})$ — прямая, содержащая точку $\tilde{x}$ и являющаяся параллельной i-й координатной оси. Введем обозначения:

$$a_i(\tilde{x}) \triangleq \min_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i, \quad b_i(\tilde{x}) \triangleq \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i.$$

Определим часть $\partial_i S$ границы множества S следующим образом:

$$\partial_i S \triangleq \bigcup_{\tilde{x} \in S} [\{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \colon x_i = a_i(\tilde{x})\} \cup \{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \colon x_i = b_i(\tilde{x})\}]. \tag{4.8}$$

Теорема 3. *Пусть множество S компактно. Пусть функция $\Phi(y, x)$ непрерывна и квазивыпукла по координате x_i вектора $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ для каждого $y \in \mathbb{R}^s$. Тогда*

$$\psi(y, S) = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x), \tag{4.9}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) = \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S), \tag{4.10}$$

где $\partial_i S$ — часть границы множества S, определяемая выражением (4.8).

Доказательство. Равенство (4.9) следует из определения части границы $\partial_i S$ и квазивыпуклости функции потерь по x_i:

$$\psi(y, S) = \max_{x \in S} \Phi(y, x) = \max_{\tilde{x} \in S} \max_{x \in N_i(\tilde{x})} \Phi(y, x) =$$
$$= \max_{\tilde{x} \in S} \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} \{\Phi(y, x) \colon x_i = a_i(\tilde{x}) \text{ или } x_i = b_i(\tilde{x})\} = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x).$$

По построению $\mathcal{Y}_\varphi(S) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Таким образом, для доказательства (4.10) нужно показать, что $\mathcal{Y}_\varphi(S) \supset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Пусть $y \in \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Это означает, что $\Phi(y, x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in \partial_i S$, или, что то же самое,

$$\max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x) \leqslant \varphi.$$

Но по доказанному выше

$$\max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x) = \psi(y, S),$$

что эквивалентно выполнению неравенства $\Phi(y, x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in S$. Таким образом, $y \in \mathcal{Y}_\varphi(S)$, т.е. равенство (4.10) выполнено. Теорема 3 доказана.

Таким образом, для вычисления функции $\psi(y, S)$ и построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ достаточно перебрать только точки, лежащие на части $\partial_i S$ границы ∂S доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{Z}_\varphi \triangleq \left\{ z \in \mathbb{R}^l \colon \tilde{\Phi}(z) \leqslant \varphi \right\} \tag{4.11}$$

и часть $\partial_r \mathcal{Z}_\varphi$ границы $\partial \mathcal{Z}_\varphi$ множества $\mathcal{Z}_\varphi$, которое соответствует координате z_r вектора $z \in \mathbb{R}^l$ и построено аналогично множеству $\partial_i S$ (4.8).

Теперь рассмотрим вопрос построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$.

Теорема 4. Пусть отображение $y \mapsto z(x,y)$ при заданном $x \in \mathcal{X}$ является гомеоморфизмом, а множество $\mathcal{Z}_\varphi$ компактно. Тогда прообразом множества $\mathcal{Z}_\varphi$ при данном отображении является множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. При этом

$$\partial\mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \colon z(x,y) \in \partial\mathcal{Z}_\varphi\}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Согласно свойствам гомеоморфных отображений прообразом компакта является компакт, при этом граничные точки множества $\mathcal{Z}_\varphi$ переходят под действием отображения $y \mapsto z(x,y)$ в граничные точки множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$, и наоборот. Теорема 4 доказана.

Таким образом получаем, следующий алгоритм построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ при выполнении условий теорем 3 и 4.

Алгоритм 2.

1. Для различных $x \in \partial_i S$ построить множества $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по формуле (4.12).
2. По границе $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ восстановить множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ для всех $x \in \partial_i S$.
3. Найти пересечение множеств $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по всем $x \in \partial_i S$.

Замечание 1. Если семейство доверительных множеств $S(a)$ зависит от некоторого вектора параметров $a \in A$, то описанный алгоритм 2 можно дополнить еще одним шагом, чтобы получить лучшую интерпретацию доверительного множества поглощения:

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \bigcup_{a \in A} \mathcal{Y}_\varphi(S(a)). \tag{4.13}$$

Рассмотрим вектор y в многомерной сферической системе координат $(\overline{y}, \beta)$, где $\overline{y} \triangleq \|y\|$, а β — вектор углов.

Введем определение 4.

Определение 4. Множество $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$ является звездчатым, если отрезок, соединяющий начало координат с произвольной точкой $y \in \mathcal{Y}$, полностью принадлежит множеству $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$.

Теорема 5. Пусть функция $\widehat{\Phi}(\overline{y}, \beta, x) = \Phi(y,x)$ квазивыпукла по $\overline{y}$ для каждого β. Если $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$, то множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ является односвязным и звездчатым.

Доказательство. Из квазивыпуклости функции $\hat{\Phi}(\cdot)$ следует, что при выполнении условий $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ и $y \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ справедливо, что

$$\Phi(\tilde{y}, x) \leqslant \max\{\Phi(0,x),\ \Phi(y,x)\} \leqslant \varphi,$$

для всех $\tilde{y}$, принадлежащих отрезку, соединяющему точки 0 и y. Таким образом, доказана звездчатость множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. А звездчатое множество является односвязным. Теорема 5 доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда множество $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ является звездчатым и односвязным.

Доказательство. Доказательство следует из факта, что пересечение звездчатых множеств оказывается также звездчатым, а следовательно и односвязным. Следствие 2 доказано.

5. Построение множества допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома

5.1. Постановка задачи

Сформулируем задачу. Пусть некоторый самолет вылетает из города N в город M, до которого время полета равно t. Посадка самолета в аэропорту города M возможна, если скорость ветра в продольном и боковом направлениях не выходит за допустимые пределы

$$\mathcal{W}_t = \left\{(w_x^t, w_z^t)\colon |w_z^t| \leqslant w_z^{\max}, w_x^{\min} \leqslant w_x^t \leqslant w_x^{\max}\right\}, \tag{5.1}$$

где w_x^t, w_z^t — скорости ветра в точке посадки в момент посадки самолета в продольном и боковом направлениях.

В нулевой момент, т.е. в момент вылета самолета из города N, в аэропорту города M скорость ветра была (w_x^0, w_z^0). Но по истечении времени t ветер может значительно измениться и его скорости не будут удовлетворять допустимым значениям, т.е. посадка самолета станет невозможной. Пусть значение скорости ветра w^t в момент t связано со скоростью ветра w^0 в нулевой момент соотношениями:

$$w_x^t = (v^0 + \xi)\cos(\beta^0 + \eta), \tag{5.2}$$

$$w_z^t = (v^0 + \xi)\sin(\beta^0 + \eta), \tag{5.3}$$

где v^0, β^0 — полярные координаты вектора w^0, а ξ и η — независимые случайные величины, имеющие усеченное нормальное распределение

$$\xi \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\xi^2), \quad \eta \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\eta^2),$$

причем $\xi \in [v_*, v^*]$, $\eta \in [\beta_*, \beta^*]$.

Найдем вероятность такого события, что самолету разрешат посадку в городе M, когда в момент его вылета из города N вектор скорости ветра был равен w^0:

$$P(w^0) = \mathcal{P}\left\{w^t(w^0, \xi, \eta) \in \mathcal{W}_t\right\}. \tag{5.4}$$

Необходимо построить множество $\mathcal{W}_0$ допустимых скоростей ветра w^0 в начальным момент, при которых по происшествии времени t скорость ветра w^t не выйдет за допустимые пределы с вероятностью α:

$$\mathcal{W}_0 = \{w^0 : P(w^0) \geqslant \alpha\}. \tag{5.5}$$

Другими словами, нужно построить доверительное множество поглощения.

5.2. Алгоритм построения доверительного множества поглощения

Для построения множества $\mathcal{W}_0$ воспользуемся результатами из предыдущих разделов. Заметим, что множество $\mathcal{W}_t$ можно записать через функцию потерь:

$$\mathcal{W}_t = \left\{(w_x^t, w_z^t) : \widetilde{\Phi}(w^t) \leqslant 1\right\}, \tag{5.6}$$

где

$$\widetilde{\Phi}(w^t) = \max\left\{\widetilde{\Phi}_1(w_x^t), \widetilde{\Phi}_2(w_z^t)\right\},$$
$$\widetilde{\Phi}_1(w_x^t) = \frac{|2w_x^t - w_x^{\min} - w_z^{\max}|}{w_x^{\max} - w_x^{\min}},$$
$$\widetilde{\Phi}_2(w_z^t) = \frac{|w_z^t|}{w_z^{\max}}.$$

Далее заметим, что скорости ветра в начальный и конечный моменты связаны между собой соотношениями в полярной системе координат:

$$\beta^0 = \beta^t - \eta,$$
$$v^0 = v^t - \xi.$$

Приведем связь между декартовой и полярной системами координат:

$$w_x^t = v^t \cos(\beta^t), \quad w_z^t = v^t \sin(\beta^t),$$
$$v^t = \sqrt{(w_x^t)^2 + (w_z^t)^2},$$
$$\beta^t = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & w_x^t = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим в нормированной системе координат случайные векторы

$$\overline{\xi} = \frac{\xi}{\sigma_\xi}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\eta}$$

и доверительное множество в форме квадрата

$$S_\Delta = \{|\overline{\xi}| \leqslant \Delta, |\overline{\eta}| \leqslant \Delta\}, \tag{5.7}$$

где параметр Δ выбирается из условия $\mathcal{P}(S_\Delta) = \alpha$. Предположим, что для случайной величины U со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$ соответствующие вероятности удовлетворяют неравенствам:

$$\mathcal{P}\{U < v_*/\sigma_\xi, U > v^*/\sigma_\xi\} \ll 1 - \alpha,$$
$$\mathcal{P}\{U < \beta_*/\sigma_\eta, U > \beta^*/\sigma_\eta\} \ll 1 - \alpha.$$

Тогда поскольку случайные величины $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ независимы, то параметр Δ может быть найден из условий

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha},$$

где

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\Delta} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим также семейство квадратов $S_\Delta(\gamma)$, подобных S_Δ, но повернутых относительно S_Δ на угол $\gamma \in [-\pi/2, 0]$.

В данном случае w_x^t и w_z^t линейно зависят от $\overline{\xi}$ и v^0, поэтому согласно теореме 5 множество

$$\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \Big\{(w_x^0, w_z^0)\colon \widetilde{\Phi}(w^t(w_x^0, w_z^0, \overline{\xi}, \overline{\eta})) \leqslant 1\Big\} \tag{5.8}$$

является звездчатым и односвязным. Поэтому для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно рассмотреть границу доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$.

Отображение $(w_x^0, w_z^0) \mapsto (w_x^t, w_z^t)$ области $\{(w_x^0, w_z^0)\colon v^0 > \max\{0, -\overline{\xi}\}\}$ в область $\{(w_x^t, w_z^t)\colon v^t > \max\{0, \overline{\xi}\}\}$ является гомеоморфизмом. Поэтому в силу теоремы 4 при выполнении условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial \mathcal{W}_t$ для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно найти для всех точек $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ прообраз в пространстве (w_x^0, w_z^0) границы $\partial \mathcal{W}_t$ множества $\mathcal{W}_t$.

Построим аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 3.

1. Перебираются $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ на границе $\partial S_\Delta(\gamma)$ множества $S_\Delta(\gamma)$.

2. Для каждой точки $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ находится прообраз $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ в пространстве переменных (w_x^0, w_z^0) границы множества $\mathcal{W}_t$.

3. Находится пересечение множеств

$$\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)) = \bigcap_{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in S_\Delta(\gamma)} \mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}).$$

4. Пп. 1–3 алгоритма 3 повторяются для разных значений $\gamma \in [-\pi/2, 0]$ и строится множество

$$\overline{\mathcal{W}}_0 = \bigcup_{\gamma \in [-\pi, 0]} \mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)).$$

5. Множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ принимается за аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Заметим, что для корректной работы алгоритма 3 необходимо выполнение условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial \mathcal{W}_t$.

Уточним полученную оценку.

Рассмотрим теперь доверительные множества S_r в форме круга

$$S_r \triangleq \{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) : \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2 \leqslant r^2\},$$

где радиус круга r определяется из условия, что $\mathcal{P}(S_r) = \alpha$. В данном случае в связи с независимостью $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ радиус круга находится аналитически

$$r = \sqrt{-2\ln(1-\alpha)}.$$

Для доверительного круга S_r шаги 1–3 алгоритма 3 повторяются и строится множество $\mathcal{W}_0(B_r)$, которое является внутренней аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Полученную аппроксимацию можно еще уточнить, если рассмотреть семейство доверительных множеств $S_\Delta(\gamma)$, где параметр γ выбирается из интервала $[-\pi, 0]$, и построить множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ так, как это описано в алгоритме 3.

Поскольку

$$\mathcal{W}_0 = \bigcup_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \mathcal{W}_0(S), \tag{5.9}$$

то, взяв объединение множеств $\mathcal{W}_0(B_r)$ и $\overline{\mathcal{W}}_0$, получаем более точную аппроксимацию доверительного множества поглощения

$$\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_0(S_r) \cup \overline{\mathcal{W}}_0. \tag{5.10}$$

Можно также сдвинуть одну из границ множества $S_\Delta(\gamma)$ ближе к началу координат, сохраняя при этом вероятностную меру множества. Объединение всех таких множеств $\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma))$ будет образовывать внутреннюю аппроксимацию множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

5.3. Вычислительный эксперимент

Пусть для примера

$$\alpha = 0{,}99;\ \sigma_\xi = 1{,}9\ [\text{м/с}];\ \sigma_\eta = 27^0;$$
$$w_z^{\max} = 15\ [\text{м/с}];\ w_x^{\min} = -25\ [\text{м/с}];\ w_x^{\max} = 10\ [\text{м/с}].$$

На рис. 1 сплошной линией изображена граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, а штрих-пунктирной линией — $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

Сдвигом границ доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$ влево и последующим вращением внутреннюю аппроксимацию множества $\mathcal{W}_0$ можно существенно улучшить. Граница полученного множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ изображена на рис. 2 штрих-пунктирной линией. Множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается выпуклым, хотя, как известно, объединение выпуклых множеств оказывается, как правило, невыпуклым. Для сравнения граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ изображена сплошной линией.

Заметим, что множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ содержит в себе множество $\mathcal{W}_0(S_r)$. Это связано с тем, что доверительное множество S_r — одно и то же для всех начальных позиций системы w_0, а для каждой начальной точки имеется свое оптимальное доверительное множество, которое неизвестно. Варьируя множество $S_\Delta(\gamma)$, подбираем для каждой точки w_0 доверительное множество лучше, чем S_r, поэтому множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается шире множества $\mathcal{W}_0(S_r)$.

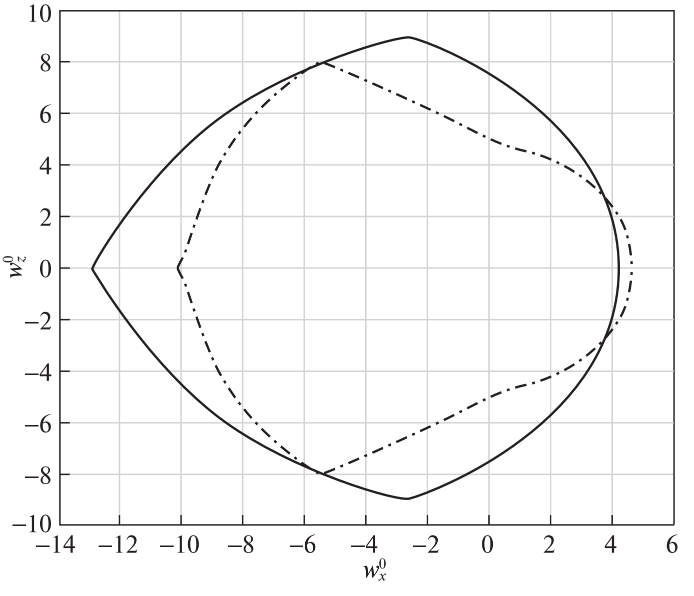

Рис. 1. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ и $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

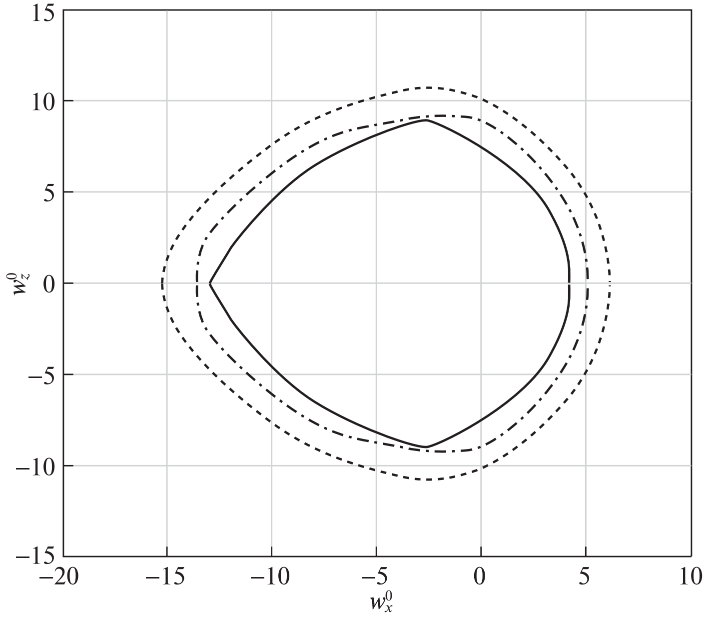

Рис. 2. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, $\overline{\mathcal{W}}_0$ и статистическая аппроксимация.

При построении данных множеств существенно использовалась их звездчатая структура. Граница звездчатого множества в полярных координатах описывается функцией полярного угла. Поэтому пересечению множеств соответствует минимум функций, описывающих границы, а объединению — максимум.

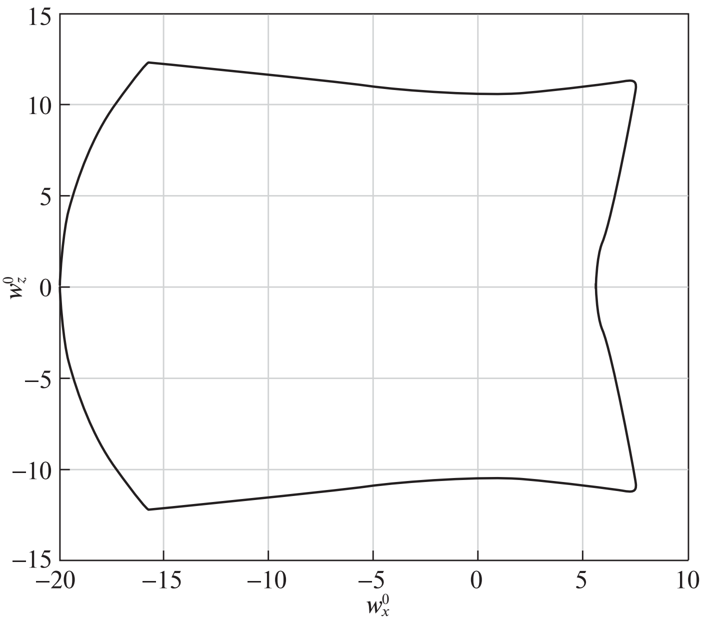

Рис. 3. Множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$.

Границу множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ можно уточнить с помощью метода статистических испытаний, используя алгоритм 1. Статистическая аппроксимация множества $\mathcal{W}_0$ изображена на рис. 2 точечной линией. Из рис. 2 видно, что получаемая статистическая аппроксимация доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ незначительно отличается от аппроксимирующего множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$, но для ее построения пришлось провести огромный объем вычислений.

Представляет интерес множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$. Как видно из рис. 3, это множество оказывается невыпуклым. При $\sigma_\eta \to \infty$ прогнозируемое значение скорости ветра оказывается распределенным в некотором кольце. Поэтому при возрастании v^0 радиус кольца увеличивается, а вероятность попадания прогнозируемой скорости ветра в множество $\mathcal{W}_t$ монотонно убывает. Это значит, что предельная функция вероятности является квазивогнутой, что гарантирует выпуклость ее множеств уровня. Таким образом, множество $\mathcal{W}_0$ становится выпуклым при достаточно большом значении σ_η.

6. Заключение

Исследована задача по построению доверительного множества поглощения при анализе стохастической системы. Устанавливаются свойства этого множества. На основе доверительного метода предлагается алгоритм построения доверительного множества поглощения. Предлагается также алгоритм построения этого множества на основе метода статистических испытаний. На основе полученных результатов решается задача о прогнозе скорости ветра в районе аэродрома посадки самолета. Рассматриваются несколько вариантов доверительного множества случайных параметров: круг и квадрат в нормированном пространстве. Кроме того, рассматривается семейство доверительных квадратов, повернутых на некоторый угол вокруг начала системы координат. Приводятся результаты численных расчетов, из которых следует, что лучшей внутренней аппроксимацией доверительного множества поглощения является объединение множеств поглощения, построенных для разных повернутых доверительных квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester–N.Y.–Brisbane–Toronto–Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
3. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
4. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
5. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
6. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. 1976. Т. 25. № 2. С. 141–144.
7. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.

   Kan Yu.S., Kibzun A.I. Convexity Properties of Probability Functions and Quantiles in Optimization Problems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 3. P. 368–383.
8. *Van Ackooij W.* Eventual Convexity of Chance Constrained Feasible Sets // Optimization (J. Math. Programm. Oper. Res.). 2015. V. 64. No. 5. P. 1263-1284.
9. *Prékopa A.* Logarithmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming // Acta Sci. Math. (Szeged). 1971. V. 32. P. 301–316.
10. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. V. 34. P. 335–343.
11. *Borell C.* Convex Set Functions in d-Space // Period. Math. Hung. 1975. V. 6. No. 2. P. 111–136.
12. *Норкин В.И., Роенко Н.В.* α-Вогнутые функции и меры и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 77–88.

    Norkin V.I., Roenko N.V. α-Concave Functions and Measures and Their Applications // Cybern. Syst. Anal. 1991. V. 27. No. 6. P. 860–869.
13. *Henrion R.* On the Connectedness of Probabilistic Constraint Sets // J. Optim. Theory Appl. 2002. V. 112. No. 3. P. 657–663.
14. *Prékopa A.* Dual Method for the Solution of a One-Stage Stochastic Programming Problem with Random RHS Obeying a Discrete Probability Distribution // ZOR — Methods and Models of Oper. Res. 1990. V. 34. P. 441–461.
15. *Lejeune M., Noyan N.* Mathematical Programming Approaches for Generating p-Efficient Points // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 207 P. 590–600.
16. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distribution // Nonlinear Analysis. 2001. V. 47. P. 1997–2009.

17. *Van Ackooij W., Berge V, de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. 2017. V. 77. P. 177–193.

18. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. 2018 (online first). DOI: 10.1007/s10479-018-2934-8

19. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A Method for Solving Quantile Optimization Problems with a Bilinear Loss Function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.

20. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информ. и её примен. 2018. Т. 12. № 2. С. 60–68.

21. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 1. С. 20–29.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 10.09.2019

Принята к публикации 26.09.2019

© 2020 г. **И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru),**
В.И. СИНИЦЫН, д-р физ.-мат. наук (sinitsin_vi@mail.ru),
Э.Р. КОРЕПАНОВ, канд. техн. наук (ekorepanov@ipiran.ru)
(Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН)

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ ЛИПЦЕРА – ШИРЯЕВА

Разработаны два типа приближенных субоптимальных фильтров Липцера – Ширяева (ФЛШ). Первый тип создан на основе обобщенного фильтра Калмана – Бьюси, а второй — на основе параметризации апостериорного распределения по методам ортогонального разложения и квазимоментов. Изложенные методы синтеза ФЛШ дают принципиальную возможность получить фильтр, близкий к оптимальному с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок учитываемых параметров ортогонального разложения, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке.

Ключевые слова: нормальный (гауссовский) фильтр; обобщенный фильтр Калмана – Бьюси (ОФКБ); стохастическая система (СтС); субоптимальная фильтрация (СОФ); условно-оптимальная фильтрация Пугачёва (УОФ); фильтры Липцера – Ширяева (ФЛШ).

DOI: 10.31857/S0005231020040030

1. Введение

Как известно [1–6], нелинейные гауссовские стохастические системы (СтС), линейные относительно состояния, определяющие оптимальный (в смысле минимума средней квадратической (с.к.) ошибки) алгоритм фильтрации, называются фильтрами Липцера – Ширяева (ФЛШ). Изучение условно-оптимальных ФЛШ выполнено в [4–6] как для гауссовских, так и негауссовских СтС. Настоящая статья посвящена развитию субоптимальных ФЛШ для нелинейных СтС относительно наблюдений и линейных относительно состояния. В разделе 2 получены точные уравнения для апостериорного нормированного одномерного распределения ФЛШ. Раздел 3 посвящен приближенным гауссовским алгоритмам субоптимальных ФЛШ на основе метода нормальной аппроксимации (МНА) и метода статистической линеаризации (МСЛ). В разделе 4 рассмотрены субоптимальные ФЛШ на основе обобщенных фильтров Калмана – Бьюси. Раздел 5 посвящен субоптимальным ФЛШ на основе ортогонального разложения апостериорной плотности. Алгоритмы оценки точности и чувствительности даны в разделе 6. В заключении сформулированы основные выводы и даны обобщения.

2. Точные уравнения для ФЛШ

2.1. Уравнения процессов

Будем рассматривать задачи фильтрации состояния систем, моделями которых могут служить стохастические дифференциальные уравнения с винеровскими и пуассоновскими шумами. В некоторых случаях стохастические дифференциальные уравнения модели изучаемой системы могут иметь неизвестные параметры и, как правило, всегда содержат параметры, известные с ограниченной точностью. Поэтому возникает задача непрерывного оценивания неизвестных параметров системы (точнее, ее модели) по результатам непрерывных наблюдений. Предположим, что правые части уравнений зависят от конечного множества неизвестных параметров, которые будем рассматривать как компоненты вектора параметров θ. Одним из возможных подходов в таких случаях является следующий прием: неизвестный векторный параметр θ считают стохастическим процессом $\Theta = \Theta_t$, который определяется дифференциальным уравнением $\dot{\Theta}_t = 0$, и включают компоненты этого векторного процесса в вектор состояния системы («расширяют» вектор состояния путем включения в него неизвестных параметров в качестве дополнительных компонент). Таким образом, задача непрерывной фильтрации неизвестных параметров модели системы сводится к задаче непрерывной фильтрации состояния системы с расширенным вектором состояния. От неизвестных параметров могут зависеть и уравнения наблюдения. Эти параметры следует включить в вектор θ и, следовательно, в расширенный вектор состояния.

Итак, пусть векторный стохастический процесс (СтП) $Z_t = \left[X_t^{\mathrm{T}} Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ определяется системой векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито [4–6]:

$$dX_t = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\ + \int\limits_{R_0^q} \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)P^0(dt, dv), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

$$dY_t = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\ + \int\limits_{R_0^q} \psi_1''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)P^0(dt, dv), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{2}$$

Здесь $Y_t = Y(t)$ — n_y-мерный наблюдаемый СтП; $X_t = X(t)$ — n_x-мерный ненаблюдаемый СтП (вектор состояния); $W_0 = W_0(t)$ — n_w-мерный винеровский СтП ($n_w \geqslant n_y$) интенсивности $\nu_0 = \nu_0(\Theta, t)$; $P^0(\Delta, A) = P(\Delta, A) - \mu_P(\Delta, A)$, $P(\Delta, A)$ представляет собой для любого множества A простой пуассоновский СтП, а $\mu_P(\Delta, A)$ — его математическое ожидание, причем

$$\mu_P(\Delta, A) = \mathrm{M}P(\Delta, A) = \int \nu_P(\tau, A)d\tau;$$

$\nu_P(\Delta, A)$ — интенсивность соответствующего пуассоновского потока событий, $\Delta = (t_1, t_2]$; интегрирование по v распространяется на все пространство R^q с выколотым началом координат; $\Theta = \theta$ — вектор случайных параметров размерности n_Θ; $\varphi = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)$, $\varphi_1 = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)$; $\psi' = \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)$, $\psi_1' =$

$= \psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t)$ — известные функции, отображающие $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R$ соответственно в $R^{n_x}, R^{n_y}, R^{n_x n_w}, R^{n_y n_w}$; $\psi'' = \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$, $\psi_1''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$ — известные функции, отображающие $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R^q$ в R^{n_x}, R^{n_y}.

Требуется найти с.к. оценку $\hat{X}_t$ СтП X_t в каждый момент времени t по результатам наблюдения СтП $Y(\tau)$ до момента t, $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : t_0 \leqslant \tau < t\}$. Предположим, что

• уравнение состояния имеет вид (1);

• уравнение наблюдения (2), во-первых, не содержит пуассоновского шума ($\psi_1'' \equiv 0$), а во-вторых, коэффициент при винеровском шуме ψ_1' в уравнениях наблюдения не зависит от состояния ($\psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t) = \bar{\psi}_1'(Y_t, \Theta, t)$).

В этом случае исходные уравнения задачи нелинейной фильтрации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dX_t &= \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\ &+ \int\limits_{R_0^q} \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)P^0(dt, dv), \quad X(t_0) = X_0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$dY_t = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \bar{\psi}_1'(Y_t, \Theta, t)dW_0, \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{4}$$

Кроме того будем считать, что выполнены условия существования и единственности СтП $\left[X_t^{\mathrm{T}}\ Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, определяемого (3) и (4) при соответствующих начальных условиях [5, 7].

2.2. Фильтрационные уравнения

Как известно [4, 6], для любых СтП X_t и Y_t оптимальная оценка $\hat{X}^t$, минимизирующая средний квадрат ошибки в каждый момент времени t, представляет собой апостериорное математическое ожидание СтП X_t: $\hat{X}_t = \mathrm{M}\left[X_t \mid Y_{t_0}^t\right]$. Чтобы найти это условное математическое ожидание необходимо знать $p_t = p_t(x)$ — апостериорное одномерное распределение СтП X_t. При условиях Липцера — Ширяева, т.е. когда имеют место соотношения:
1) система (3) гауссовская $\psi'' = 0$, $\psi'(X_t, Y_t, \Theta, t) = \bar{\psi}'(Y_t, \Theta, t)$, $\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) = a_1(Y_t, \Theta, t)X_t + a_0(Y_t, \Theta, t)$;
2) система (4) гауссовская $\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) = b_1(Y_t, \Theta, t)X_t + b_0(Y_t, \Theta, t)$.

В [6] получено следующее точное нелинейное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной характеристической функции $g_t(\lambda, \Theta) = \mathrm{M}^{p_t}\left[\exp(i\lambda^{\mathrm{T}} X_t)\right]$:

$$\begin{aligned} dg_t(\lambda, \Theta) &= \mathrm{M}^{p_t}\Bigg[\Bigg\{i\lambda^{\mathrm{T}}\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) - \\ &-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(X_t, Y_t, \Theta, t)\lambda + \gamma(\lambda, X_t, Y_t, \Theta, t)\Bigg\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t\Bigg] dt + \\ &+ \mathrm{M}^{p_t}\left[\left\{\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} + i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(X_t, Y_t, \Theta, t)\right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t\right] \times \\ &\times (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t)(dY_t - \hat{\varphi}_1 dt), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\gamma = \gamma(\lambda, X_t, Y_t, \Theta, t) =$$

$$= \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\psi''(X_t,Y_t,\Theta,t,v)} - 1 - i\lambda^{\mathrm{T}}\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v) \right] \nu_P(\Theta, t, v) dv, \tag{6}$$

$$\hat{\varphi}_1 = \mathrm{M}^{p_t} \left[\varphi_1(X_t, Y_t, t) \right]. \tag{7}$$

Функции $g_t(\lambda, \Theta)$ и апостериорная одномерная $p_t(x, \Theta)$ связаны между собой преобразованием Фурье [4, 5].

Отсюда при условиях Липцера – Ширяева для гауссовской системы, когда $\gamma = 0$, уравнение (5) приобретает вид

$$\begin{gathered} dg_t(\lambda, \Theta) = \mathrm{M}^{p_t} \left[\left\{ i\lambda^{\mathrm{T}}(a_1 X_t + a_0) - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t)\lambda \right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \middle| Y_{t_0}^t \right] dt + \\ + \mathrm{M}^{p_t} \left[\left\{ (b_1 X_t + b_0)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} + i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t) \right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t \right] \times \\ \times (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t)(dY_t - (b_1 X_t + b_0)dt). \end{gathered} \tag{8}$$

2.3. Частный случай уравнений (3), (4) *при условиях Липцера – Ширяева*

Если функция $\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$ в (3) допускает представление

$$\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v) = \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)\omega(\Theta, v), \tag{9}$$

где $P^0(\Delta, A) = P^0((0, t], dv)$, то уравнения (3), (4) при условиях Липцера – Ширяева примут следующий вид:

$$\dot{X}_t = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) + \psi'(0, Y_t, \Theta, t)V(\Theta, t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{10}$$

$$\dot{Y}_t = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) + \bar{\psi}_1(Y_t, \Theta, t)V_0(\Theta, t), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{11}$$

Здесь $V_0(\Theta, t) = \dot{W}_0(\Theta, t)$; $V(\Theta, t) = \dot{\bar{W}}(\Theta, t)$,

$$\bar{W}(\Theta, t) = W_0(\Theta, t) + \int\limits_{R_0^q} \omega(\Theta, v) P^0((0, t], dv); \tag{12}$$

$\nu_P(\Theta, t, v)dv = \left[\partial\mu(\Theta, t, v)/\partial t\right] dv$ — интенсивность пуассоновского потока скачков, равных $\omega(\Theta, t)$. При этом логарифмические производные от одномерных характеристических функций определяются известными формулами

$$\chi^{W_0}(\rho; t) = -\frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}\nu_0(\Theta, t)\rho, \tag{13}$$

$$\chi^{\bar{W}}(\rho; t) = -\frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}(\Theta, t)\rho^{\mathrm{T}} + \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\rho^{\mathrm{T}}\omega(\Theta,v)} - 1 - i\rho^{\mathrm{T}}\omega(\Theta, v) \right] \nu_P(\Theta, t, v) dv. \tag{14}$$

В таком случае уравнение для апостериорной одномерной характеристической функции имеет вид (7), где функция (6) допускает следующую запись:

$$\gamma = \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\psi'(0,Y_t,\Theta,t)\omega(\Theta,v)} - 1 - i\lambda^{\mathrm{T}}\psi'(0,Y_t,\Theta,t)\omega(\Theta,v) \right] \nu_P(\Theta,t,v)dv. \tag{15}$$

Замечание 1. Этот случай для нормированного распределения рассмотрен в [9].

2.4. Основные результаты раздела 2

Утверждение 1. *Пусть для СтС* (3), (4) *при фиксированном* $\Theta = \theta$ *выполнены условия существования и единственности решения, а матрица* $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ *не выраждена. Тогда при условии ограниченности соответствующих математических ожиданий точное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной нормированной характеристической функций имеет вид* (7)–(6).

Утверждение 2. *В условиях утверждения 1 при отсутствии пуассоновских шумов точное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной нормированной характеристической функции имеет вид* (8).

Утверждение 3. *Пусть для СтС* (10), (11) *выполнены условия существования и единственности решения, имеет место представление* (9), *а матрица* $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ *не выраждена. Тогда при условии ограниченности соответствующих математических ожиданий точное фильтрационное уравнение имеет вид* (7) *при условии* (15).

3. Нормальные субоптимальные ФЛШ на основе МНА (МСЛ)

3.1. Вводные замечания

Точное решение фильтрационных уравнений (1), (2) возможно только в случаях, когда уравнения гауссовской дифференциальной СтС линейны или линейны лишь относительно вектора состояния X_t при независимой от состояния функции ψ. Эти уравнения дают точное решение задачи с.к. оптимальной нелинейной фильтрации. Это решение не может быть реализовано практически в задачах реального времени. Для нахождения оптимальной оценки вектора состояния необходимо решить фильтрационное уравнение для апостериорной характеристической функции (или фильтрационное уравнение для апостериорной плотности вектора состояния X_t) после получения результатов наблюдений, затем вычислить оптимальную оценку вектора X_t. Но методов точного решения этих уравнений в общем случае пока еще не существует.

Численное решение фильтрационных уравнений в задачах реального времени тоже невозможно, так как для этого требуется много времени, а решать их необходимо каждый раз после получения результатов наблюдений. Кроме того, практическое применение точной теории оптимальной нелинейной фильтрации имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислять в реальном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Точная теория дает оптимальные оценки в каждый момент t по результатам наблюдений, полученным к этому моменту, без использования последующих результатов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием и их вычисление приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t, для оценивания состояния системы в момент t. Поэтому для статистической обработки результатов после окончания наблюдений, т.е. для офлайн-оценивания, целесообразно применять известные из математической статистики методы постобработки информации [7].

Необходимость обработки результатов наблюдений в реальном масштабе времени непосредственно в процессе эксперимента привела к появлению ряда приближенных методов оптимальной нелинейной фильтрации, называемых обычно методами *субоптимальной фильтрации* (СОФ) [4–6]. Одни приближенные СОФ методы основаны на приближенном решении фильтрационных уравнений, а другие — на превращении формул для стохастических дифференциалов оптимальной оценки $\hat{X}_t$ и апостериорной ковариационной матрицы ошибки R_t в стохастические дифференциальные уравнения для $\hat{X}_t$ и R_t путем разложения функций φ, φ_1, ψ_1 или φ, φ_1, $\psi'\psi''$, ψ, ψ_1 в степенные ряды и отбрасывания остаточных членов.

Для приближенного решения уравнения для апостериорной одномерной характеристической функции $g_1(\lambda, \Theta)$ вектора X_t можно использовать методы СОФ, основанные на параметризации одномерных распределений СтП, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением [4–6]. Эти методы СОФ позволяют изучить стохастические дифференциальные уравнения для параметров апостериорного распределения. Простейшим методом СОФ является МНА апостериорного распределения. Исключительно важное практическое значение имеют квазилинейные фильтры, получаемые с помощью методов эквивалентной линеаризации [4–6].

3.2. Нормальный субоптимальный ФЛШ для гауссовских СтС

Так как нормальное (гауссовское) распределение, аппроксимирующее апостериорное одномерное распределение X_t, полностью определяется математическим ожиданием $\hat{X}_t$ и ковариационной матрицей R_t вектора X_t, то при аппроксимации апостериорного одномерного распределения вектора X_t нормальным распределением все математические ожидания в правых частях формул для дифференциалов $d\hat{X}_t$ и dR_t будут определенными функциями $\hat{X}_t$, R_t и t. Для гауссовских СтС ($\psi'' = 0$, $\psi_1'' = 0$) фильтрационные уравнения для нормального СОФ (НСОФ) будут представлять собой стохастические дифференциальные уравнения, определяющие $\hat{X}_t$ и R_t:

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}_t &= f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)dt + \\
&+ h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)\left[dY_t - f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)dt\right],
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$dR_t = \left\{ f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) - h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(Y_t, \Theta, t) \times \right.$$

$$\left. \times\, h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} \right\} dt + \tag{17}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n_y} \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) \left[dY_r - f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) dt \right].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$f = f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) = \mathrm{M}^N \left[\varphi(Y_t, X_t, \Theta, t) \right] = \hat{\varphi}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} f^{(1)} = f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \left\{ f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) \right\} = \\ = \mathrm{M}^N \left[\varphi_1(Y_t, X, \Theta, t) \right] = \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} h = h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) = \left\{ \mathrm{M}^N \left[\hat{X}_t \varphi_1(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} + \psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t, \Theta, t) \right] - \right. \\ \left. - \hat{X}_t f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} \right\} (\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)} = f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \mathrm{M}^N \left\{ (X_t - \hat{X}_t) \varphi(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} + \right. \\ \left. + \varphi(Y_t, X_t, \Theta, t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) + \psi \nu_0 \psi^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t, \Theta, t) \right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \rho_r = \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \mathrm{M}^N \left\{ (X_t - \hat{X}_t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) \alpha_r(Y_t, X_t, \Theta, t) + \right. \\ + (X_t - \hat{X}_t) \beta_r(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} (X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) + \\ \left. + \beta_r(Y_t, X_t, \Theta, t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) \right\} \quad (r = \overline{1, n_y}), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) = a_1(Y_t, \Theta, t) X_t + a_0(Y_t, \Theta, t), \tag{23}$$

$$\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) = b_1(Y_t, \Theta, t) X_t + b_0(Y_t, \Theta, t), \tag{24}$$

где α_r — r-й элемент матрицы-строки $(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})$, а β_{kr} — элемент k-й строки и r-го столбца $(\psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$; β_r — r-й столбец матрицы $(\psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})$, $\beta_r = [\beta_{1r} \ldots \beta_{n_x r}]^{\mathrm{T}}$, при этом α_r и β_r зависят только от Θ, t.

Количество уравнений для апостериорного одномерного распределения определяется по формуле $Q_{\text{МНА}} = \frac{n_x(n_x+3)}{2}$.

За начальные значения $\hat{X}_t$, R_t при интегрировании уравнений (16) и (17), естественно, следует принять условные математическое ожидание и ковариационную матрицу величины X_0 относительно Y_0:

$$\hat{X}_0 = \mathrm{M}^N \left[X_0 \mid Y_0 \right], \quad R_0 = \mathrm{M}^N \left[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0^{\mathrm{T}} - \hat{X}_0^{\mathrm{T}}) \mid Y_0 \right]. \tag{25}$$

Если нет информации об условном распределении X_0 относительно Y_0, то начальные условия можно взять в виде $\hat{X}_0 = \mathrm{M}X_0$, $R_0 = \mathrm{M}(X_0 - \mathrm{M}X_0)\times$ $\times(X_0^{\mathrm{T}} - \mathrm{M}X_0^{\mathrm{T}})$. Если же и об этих величинах нет никакой информации, то начальные значения $\hat{X}_t$, R_t приходится задавать произвольно.

3.3. Нормальный субоптимальный ФЛШ для негауссовских СтС

В основе соответствующей теоремы для СтС (3), (4) с пуассоновскими шумами в (3) и невырожденной матрицей $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ лежат уравнения (16), (17). При этом потребуется ограниченность функций f, $f^{(1)}$, h, ρ_r, определяемых (18)–(22), и функции

$$\bar{f}^{(2)} = f^{(2)} + \mathrm{M}^N\left[\int\limits_{R_0^q} \psi''\psi''^{\mathrm{T}}\nu_P(\Theta, t, dv)\right]. \tag{26}$$

Замечание 2. Для гладких функций $\varphi, \varphi_1, \psi', \psi_1'$ и гауссовских СтС (3), (4) СОФ на основе МНА называется просто гауссовским фильтром [6], а ФЛШ — нелинейным субоптимальным ФЛШ.

3.4. Квазилинейный НСОФЛШ на основе МСЛ

Для СтС (1), (2) с аддитивными винеровскими и пуассоновскими шумами уравнения НСОФ проще получаются, если нелинейные функции φ и φ_1 на основе гауссовского (нормального) распределения заменить на статистически линеаризованные [4–6]:

$$\varphi = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) \approx \varphi_0 + k_x^{\varphi}(X_t - m_t^x) + k_y^{\varphi}(Y_t - m_t^y), \tag{27}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) \approx \varphi_{10} + k_x^{\varphi_1}(X_t - m_t^x) + k_y^{\varphi_1}(Y_t - m_t^y), \tag{28}$$

а затем использовать уравнения линейной фильтрации [4–6] для $Z_t =$ $= \left[X_t^{\mathrm{T}}\ Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$. Коэффициенты статистической линеаризации зависят от математических ожиданий, дисперсий и ковариаций

$$m_t^z = \begin{bmatrix} m_t^x \\ m_t^y \end{bmatrix}, \quad K_t^z = \begin{bmatrix} K_t^x & K_t^{xy} \\ K_t^{xy} & K_t^y \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Они определяются из уравнений

$$\dot{Z}_t = A^z Z_t + A_0^z + B_0^z V, \quad V = \dot{W}, \tag{30}$$

$$\dot{m}_t^z = A^z m_t^z + A_0^z, \quad m_{t_0}^Z = m_0^z, \tag{31}$$

$$\dot{K}_t^z = B^z K_t^z + K_t^z (B^z)^{\mathrm{T}} + B_0^z \nu^m (B_0^z)^{\mathrm{T}}, \quad K_{t_0}^z = K_0^z. \tag{32}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_0^z = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad A^z = \begin{bmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{bmatrix}, \quad B_0^z = \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\psi}_1 \end{bmatrix},$$

$$a = k_y^{\varphi}, \quad a_1 = k_x^{\varphi}, \quad a_0 = \varphi_0 - k_x^{\varphi} m_t^x - k_y^{\varphi} m_t^y,$$

$$b = k_y^{\varphi_1}, \quad b_1 = k_x^{\varphi_1}, \quad b_0 = \varphi_0 - k_x^{\varphi_1} m_t^x - k_y^{\varphi_1} m_t^y,$$

$$\psi dW_0 + \int\limits_{R_0^q} \psi'' P^0(dt, dv) = \bar{\psi} dW, \quad \psi_1' dW_0 + \int\limits_{R_0^q} \psi_1'' P^0(dt, dv) = \bar{\psi}_1 dW, \tag{33}$$

где ν^W — интенсивность СтП с независимыми приращениями, состоящего из винеровской и пуассоновской частей. Тогда уравнения квазилинейного НСОФ будут иметь вид

$$\dot{\hat{X}}_t = aY_t + a_1\hat{X}_t + a_0 + \beta_t \left[Z_t - (bY_t + b_1\hat{X}_t + b_0) \right], \tag{34}$$

$$\beta_t = (R_t b_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi}\nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})(\bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered} \dot{R}_t = a_1 R_t + R_t a_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi}\nu^W \bar{\psi}^{\mathrm{T}} - \\ - (R_t b_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi}\nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})(\bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})^{-1}(b_1 R_t + \bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}^{\mathrm{T}}). \end{gathered} \tag{36}$$

3.5. Основные результаты раздела 3

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда НСОФ для* (3), (4) *описывается уравнениями* (16), (17), (25) *при условиях ограниченности функций* (18)–(22).

У т в е р ж д е н и е 5. *Пусть выполнены условия утверждения 2. Тогда НСОФ для гауссовской системы* (3) *описывается уравнениями* (16), (17), (25) *при условиях ограниченности функций* (18)–(22).

У т в е р ж д е н и е 6. *Пусть СтС* (1), (2) *содержит только аддитивные винеровские и пуассоновские шумы и допускает замену статистически линеаризованной, а матрица $\sigma_1 = \bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}}$ не вырождена. Тогда в основе алгоритма квазилинейного НСОФ лежат уравнения* (31)–(33) *при начальных условиях* (25).

З а м е ч а н и е 3. Из теорем 1–6 немедленно следуют уравнения НСОФ для фильтрации стационарных процессов в установившемся режиме для стационарных СтС, если приравнять нулю правые части фильтрационных уравнений.

4. Субоптимальные ФЛШ на основе обобщенных фильтров Калмана – Бьюси (ОФКБ)

Для гауссовских СтС при условиях Липцера – Ширяева в [4, 6] описаны методы с.к. оптимального синтеза путем разложения в ряд Тейлора правых частей уравнений с.к. оптимальной фильтрации и удержания членов первого, второго и высших порядков относительно разностей $X_t - \hat{X}_t$. Если ограничиться членами первого порядка, то получим искомые уравнения:

$$\dot{X}_t = \left[\varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_x(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} (X_t - \hat{X}_t) \right] + \psi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) V_0(\Theta, t), \tag{37}$$

$$(38)\quad \dot{Y}_t = \left[\varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_{1x}(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t)\right] + \psi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)V_0(\Theta, t),$$

$$(39)\quad \varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_x(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t) \equiv a(Y_t, \Theta, t)\hat{X}_t + a_0(Y_t, \Theta, t),$$

$$(40)\quad \varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_{1x}(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t) \equiv b(Y_t, \Theta, t)\hat{X}_t + b_0(Y_t, \Theta, t),$$

$$(41)\quad \dot{\hat{X}}_t = \varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)\left[\dot{Y}_t - \varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)\right],$$

$$(42)\quad \begin{gathered} \dot{R}_t = \varphi_x(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} R_t + R_t\varphi_x(0, Y_t, \Theta, t) + (\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t) - \\ - h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)(\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}, \end{gathered}$$

$$(43)\quad \begin{gathered} h(0, Y_t, R_t, \Theta, t) = \\ = \left[R_t\varphi_{1x}(0, Y_t, \Theta, t) + (\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t)\right](\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t). \end{gathered}$$

При этом характеристическая функция апостериорного распределения является гауссовской. Этот фильтр называется ОФКБ первого порядка, так как учитываются только члены первого порядка относительно $X_t - \hat{X}_t$. Если учитывать члены высших порядков, то ОФКБ будет негауссовским.

Таким образом, имеем следующий результат.

Утверждение 7. Пусть при фиксированном $\Theta = \theta$ *СтС* (37), (38) *удовлетворяют условиям Липцера – Ширяева. Тогда уравнения ФЛШ имеют вид* (41)–(43) *при начальных условиях* (25).

Замечание 4. Как показано [4, 6], ОФКБ второго и высших порядков в силу условий Липцера – Ширяева совпадают с фильтрами первого порядка. Для негауссовских систем ФЛШ приводит к результатам, точность которых трудно оценить, поэтому рекомендуется использовать подходы [4, 6, 8–12] и следующего раздела 5.

5. Субоптимальные ФЛШ на основе параметризации апостериорного распределения

Для приближенного решения уравнений для апостериорной одномерной характеристической функции и плотности вероятностей можно использовать методы, основанные на параметризации одномерного распределения посредством начальных и центральных вероятностных моментов, семиинвариантов и квазимоментов, а также методов ортогональных разложений (МОР) [4–6]. В [4–12] подробно описаны методы синтеза с.к. условно-оптимальных фильтров (УОФ) для решения задач реального времени при условиях Липцера – Ширяева. Рассмотрим частный случай УОФЛШ на основе аппроксимации апостериорного распределения посредством МОР.

При аппроксимации апостериорной одномерной плотности отрезком ее ортогонального разложения [4, 5]:

$$(44)\quad p_t(x, \Theta) = p^*(x; \Theta, \vartheta) = w(x; \Theta)\left[1 + \sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x)\right],$$

естественно принять за параметры, образующие вектор ϑ, апостериорные математическое ожидание $\hat{X}_t$, ковариационную матрицу R_t вектора X_t, а также коэффициенты ортогонального разложения (КОР) c_ν ($|\nu| = \overline{3, N}$). Здесь КОР определяется формулой

$$c_\kappa = [q_\kappa(\partial / i\partial\lambda) g_t(\lambda, \Theta)]_{\lambda=0} \,. \tag{45}$$

Заметим, что полином q_κ зависит от $\hat{X}_t$ и R_t; $w(x; \Theta)$ — эталонное распределение.

В основе ортогонального субоптимального ФЛШ лежат, во-первых, уравнения для $\hat{X}_s$ и R_{sq}:

$$d\hat{X}_s = f_s dt + h_s(dY_t - f^{(1)}dt) = A^{\hat{X}_s} dt + B^{\hat{X}_s} dY_t \quad (s = \overline{1, n_x}), \tag{46}$$

$$dR_{sq} = (f_{sq}^{(2)} - h_s \psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}} h_q^{\mathrm{T}})dt + \eta_{sq}(dY_t - f^{(1)}dt) = A^{R_{sq}} dt + B^{R_{sq}} dY_t. \tag{47}$$

Здесь $\hat{X}_s(t_0) = X_{s0}$, $R_{sq}(t_0) = R_{sq0}$; $s, q = \overline{1, n_x}$; η_{sq} — матрица-строка, элементами которой служат соответствующие элементы матрицы $\rho_1, \ldots, \rho_{n_1}$:

$$\eta_{sq} = \eta_{e_s + e_q} = [\rho_{1sq} \ldots \rho_{msq}] \quad (s, q, = \overline{1, n_x}),$$

где h_s, $f^{(1)}$, $f_{sq}^{(2)}$ — по координатная запись выражений (18)–(24). Во-вторых, для любого полинома $P(x)$, $P\left[(\partial / \partial(i\lambda)) g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0} = P(\alpha)$, где α — начальный вероятностный момент, получаем стохастические дифференциальные уравнения для КОР:

$$\begin{gathered}
dc_\kappa = \Biggl\{ F_\kappa + \sum_{s=1}^{n_x} \frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial \hat{X}_s} f_s + \sum_{s,u=1}^{n_x} \frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su}} \left(f_{su}^{(2)} - h_s \psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}} h_u^{\mathrm{T}} \right) + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{s,u=1}^{n_x} \frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial \hat{X}_s \partial \hat{X}_u} h_s \psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}} h_u^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} \sum_{s,u,k,l=1}^{n_x} \frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su} \partial R_{kl}} \eta_{su} \psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}} \eta_{kl}^{\mathrm{T}} + \\
+ \sum_{s,k,l=1}^{n_x} \frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial \hat{X}_s \partial R_{kl}} h_s \psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}} \eta_{kl}^{\mathrm{T}} \Biggr\} dt + \Biggl\{ H_\kappa + \sum_{s=1}^{n_x} \frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial \hat{X}_s} h_s + \\
+ \sum_{s,u=1}^{n_x} \frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su}} \eta_{su} \Biggr\} (dY_t - f^{(1)}dt) = A^{c_\kappa} dt + B^{c_\kappa} dY_t, \\
c_\kappa(t_0) = c_{\kappa 0} \quad (|\kappa| = \overline{3, N}).
\end{gathered} \tag{48}$$

Здесь в дополнение к прежним обозначениям принято:

$$\begin{gathered}
F_\kappa = F_\kappa(Y_t, \Theta, \vartheta, t) = \sum_{s=1}^{n_x} \mathrm{M}^{p^*} \left[\varphi_s(Y_t, X, \Theta, t) \frac{\partial q_\kappa(X)}{\partial X_s} \right] + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{s,u=1}^{n_x} \mathrm{M}^{p^*} \left[\sigma_{su}(Y_t, X, \Theta, t) \frac{\partial^2 q_\kappa(X)}{\partial X_s \partial X_u} \right],
\end{gathered} \tag{49}$$

$$H_\kappa = H_\kappa(Y_t, \vartheta, \Theta, t) = \Bigg\{ \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_1(Y_t, X, \Theta, t)^{\mathrm{T}} q_\kappa(X)\right] + \tag{50}$$
$$+\sum_{s=1}^{n_x} \mathrm{M}^{p^*}\left[(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})_s(Y_t, X, \Theta, t)\frac{\partial q_\kappa(X)}{\partial X_s}\right] - c_\kappa f^{(1)\mathrm{T}} \Bigg\} (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t),$$

где через $(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})_s$ обозначена s-я строка матрицы $\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$; $\sigma = \psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}} = \{\sigma_{su}\} f$.

Функции f_s, $f^{(1)}$, $f_{su}^{(2)}$, h_s, η_{su}, F_κ и H_κ в уравнениях (46)–(48) представляют собой линейные комбинации величин c_ν ($|\nu| = \overline{3, N}$) с коэффициентами, зависящими от $\hat{X}_t$ и R_t. Величины $\partial q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s$, $\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s \partial \hat{X}_u$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{kl}$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s \partial R_{kl}$ после замены моментов их выражениями через c_ν тоже будут линейными комбинациями величин c_ν с коэффициентами, зависящими от $\hat{X}_t$ и R_t.

В частном случае разложений (44) по полиномам Эрмита КОР c_ν представляют собой квазимоменты (КМ). В этом случае, как показано в [4, 5], для производных полиномов Эрмита G_ν формулы (49), (50) приводятся к виду

$$F_\kappa = \sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_s(Y_t, X, \Theta, t) G_{\kappa - e_s}(X - m)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s(\kappa_s - 1)\mathrm{M}^{p^*}\left[\sigma_{ss}(Y_t, X, \Theta, t) G_{\kappa - 2e_s}(X - m)\right] + \tag{51}$$
$$+\sum_{u=2}^{n_x}\sum_{s=1}^{u-1} \kappa_s\kappa_u \mathrm{M}^{p^*}\left[\sigma_{su}(Y_t, X, \Theta, t) G_{\kappa - e_s - e_u}(X - m)\right],$$

$$H_\kappa = \Bigg\{ \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_1(Y_t, X, \Theta, t)^{\mathrm{T}} G_\kappa(X - m)\right] + \tag{52}$$
$$+\sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s \mathrm{M}^{p^*}\left[(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(Y_t, X, t) G_{\kappa - e_s}(X - m)\right] - f^{(1)\mathrm{T}} c_\kappa \Bigg\} (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, t),$$

где

$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s = -\kappa_s c_{\kappa - e_s}, \tag{53}$$
$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss} = -\frac{1}{2}\partial q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s^2 = -\frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s - 1)c_{\kappa - 2e_s},$$

$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su} = -\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s \partial \hat{X}_u = -\kappa_s\kappa_u c_{\kappa - e_s - e_u}, \tag{54}$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}^2 = \frac{1}{4}\kappa_s(\kappa_s - 1)(\kappa_s - 2)(\kappa_s - 3)c_{\kappa - 4e_s},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kk} = \frac{1}{4}\kappa_s(\kappa_s - 1)\kappa_s(\kappa_s - 1)c_{\kappa - 2e_s - 2e_k},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{sl} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s - 1)(\kappa_s - 2)\kappa_l c_{\kappa - 3e_s - e_l},$$

$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kl} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s-1)\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-2e_s-e_k-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{sl} = \kappa_s(\kappa_s-1)\kappa_u\kappa_l c_{\kappa-2e_s-e_u-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{kl} = \kappa_s\kappa_u\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-e_s-e_u-e_k-e_l}, \tag{55}$$

$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{ss} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s-1)(\kappa_s-2)c_{\kappa-3e_s},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{sl} = \kappa_s(\kappa_s-1)\kappa c_{\kappa-2e_s-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{kk} = \frac{1}{2}\kappa_s\kappa_k(\kappa_k-1)c_{\kappa-e_s-2e_k},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{kl} = \kappa_s\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-e_s-e_k-e_l}. \tag{56}$$

Таким образом, имеем следующие утверждения.

Утверждение 8. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МОР определяется уравнениями* (44)–(48) *при условиях ограниченности* (49), (50).

Утверждение 9. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МКМ определяется уравнениями теоремы 8 при условиях* (50)–(56).

В случае пуассоновских шумов, которые влияют только на $f^{(2)}$, надо заменить $f^{(2)}$ на $\bar{F}^{(2)}$ согласно (26). В результате придем к следующим утверждениям.

Утверждение 10. *В условиях утверждения 1 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МОР определяется теоремами 5 и 8 при условии ограниченности* (18)–(20), (22), (49), (50).

Утверждение 11. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МКМ определяется теоремами 5 и 9 при условиях ограниченности* (18)–(20), (22), (51), (52).

6. Точность и чувствительность ФЛШ

Применяя методы теории чувствительности [13, 14] для приближенного анализа фильтрационных уравнений раздела 3 и учитывая случайность параметров Θ, придем к следующим уравнениям для функций чувствительности первого порядка:

$$d\nabla^\Theta \hat{X}_s = \nabla^\Theta A^{\hat{X}_s}dt + \nabla^\Theta B^{\hat{X}_s}dY_t, \quad \nabla^\Theta B^{\hat{X}_s}(t_0) = 0, \tag{57}$$

$$d\nabla^\Theta R_{sq} = \nabla^\Theta A^{R_{sq}}dt + \nabla^\Theta B^{R_{sq}}dY_t, \quad \nabla^\Theta R_{sq}(t_0) = 0, \tag{58}$$

$$d\nabla^\Theta c_\kappa = \nabla^\Theta A^{c_\kappa}dt + \nabla^\Theta B^{c_\kappa}dY_t, \quad \nabla^\Theta c_\kappa(t_0) = 0. \tag{59}$$

В (57)–(59) процедура взятия производных осуществляется по всем входящим переменным, а коэффициенты чувствительности вычисляются при

$\Theta = m^{\Theta}$. При этом предполагается малость дисперсий по сравнению с их математическими ожиданиями. Очевидно, что при дифференцировании по Θ ($\nabla^{\Theta} = \partial/\partial\Theta$) порядок уравнений возрастает пропорционально числу производных. Аналогично составляются уравнения для элементов матриц вторых функций чувствительности.

Для оценки качества нормальных ФЛШ при гауссовских Θ с математическим ожиданием m^{Θ} и ковариационной матрицей K^{Θ}, введем условную функцию потерь, допускающую квадратичную аппроксимацию:

$$\rho^{\hat{X}_s} = \rho^{\hat{X}_s}(\Theta) = \rho(m^{\Theta}) + \sum_{i=1}^{n^{\Theta}} \rho_i'(m^{\Theta})\Theta_s^0 + \sum_{i,j=1}^{n^{\Theta}}\sum^{n^{\Theta}} \rho_{ij}''(m^{\Theta})\Theta_i^0\Theta_j^0, \tag{60}$$

а также показатель ε

$$\varepsilon = \varepsilon_2^{1/4}. \tag{61}$$

Здесь

$$\varepsilon_2 = \mathrm{M}^N\left[\rho(\Theta)^2\right] - \rho(m^{\Theta})^2, \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^N\left[\rho(\Theta)^2\right] = \rho(m^{\Theta})^2 + \rho'(m^{\Theta})^{\mathrm{T}}K^{\Theta}\rho'(m^{\Theta}) + 2\rho(m^{\Theta})\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right] + \\ + \left\{\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right]\right\}^2 + 2\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right]^2,\end{aligned} \tag{63}$$

а функции ρ' и ρ'' по известным формулам определяются на основе первых и вторых функций чувствительности.

7. Заключение

Разработаны два типа приближенных ФЛШ. Первый тип создан на основе обобщенного фильтра Калмана – Бьюси, а второй — на основе параметризации апостериорного распределения по методам ортогонального разложения и квазимоментов.

Изложенные выше методы синтеза ФЛШ дают принципиальную возможность получить фильтр, близкий к оптимальному с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок учитываемых параметров ортогонального разложения, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке. Однако число уравнений, определяющих параметры апостериорного одномерного распределения, быстро растет с увеличением числа учитываемых параметров. Соответствующие оценки можно найти в [4, 5, 13].

Результаты, во-первых, допускают обобщение на случай дискретных и непрерывно-дискретных ФЛШ и, во-вторых, для СтС с автокоррелированными помехами при условиях Липцера – Ширяева. При этом интерес представляет использование ненормированных апостериорных распределений.

Авторы благодарны А.В. Борисову за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liptser R.Sh., Shiryayev A.N.* Statistics of Conditionally Gaussian Random Sequences // Proc. Sixth Berkeley Sympos. on the Math. Statistic and Probability. 1970. II. P. 389-422.
2. *Липцер Р.Ш.* Условно-гауссовские случайные процессы // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. Вып. 2. С. 75–94.
3. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов / Нелинейная фильтрация и смежные вопросы, Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1974. 476 с.
4. *Пугачёв В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.
5. *Пугачёв В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
6. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва. 2-е изд. М.: Логос, 2007. 776 с.
7. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка, Н.И. Портенко, А.В. Скорохода, А.Ф. Турбина. М.: Наука, 1985. 640 с.
8. *Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.* Нормальные фильтры Пугачёва для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния // Системы и средства информатики. 2016. Т. 26. № 2. С. 63–78.
9. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р.* Нормальные условно-оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 30–38.
10. *Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.* Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 14–23.
11. *Wonham M.* Some application of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // J. Soc. Industr. Appl. Math. Control. 1965. V. 2. P. 347–369.
12. *Синицын И.Н.* Ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 34–44.
13. *Синицын И. Н.* Нормальные и ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Системы и средства информатики. 2016, Т. 26. № 1. С. 199–226.
14. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 09.09.2019

Принята к публикации 26.09.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Линейные системы

© 2020 г. **Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ**, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. I

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой системы на внешнее тепловое воздействие. В отличие от предыдущей работы по исследованию свойств этого объекта здесь учитывается влияние механических колебаний на процесс передачи тепла. Устанавливается, что и при учете этого влияния сохраняется свойство двойного интегрирующего эффекта по каналу тепловое воздействие → механические колебания.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, оператор, передаточная функция, внутренняя обратная связь, двойной интегрирующий эффект.

DOI: 10.31857/S0005231020040042

1. Введение

Исследования процессов деформации упругих тел под действием источников тепла проводились в классических работах [1–4]. Наиболее полное исследование этих процессов проведено в книге В. Новацкого [5], где дан вывод основных уравнений термоупругости, учитывающих взаимное влияние деформаций распределенного объекта на процесс передачи тепла.

Из современных исследований по теории термоупругости и по конкретным ее проблемам можно назвать, например, [6], где исследуются плоские гармонические волны в термоупругой среде, [7], где получается уравнение состояния термоупругости, [8], где дается современное изложение теории термоупругости, [9], где изучается влияние частоты внешних воздействий и параметров материала на амплитуды термоупругих волн, и [10], где на основе представления для свободной энергии термоупругой среды (см. [5]) получаются выражения для напряжений и энтропии, а по ним — дифференциальные уравнения перемещений частиц среды и распространения тепла.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной упругой механической системы, подверженной внешнему тепловому воздействию на одном из концов.

В качестве исходных основ для составления математической модели процессов в такой системе были приняты работы [5, 10], но в отличие от предыдущих исследований динамических свойств этого объекта (см. [11]) здесь учитывается внутренняя, присущая объекту, обратная связь от механических перемещений к процессу передачи тепла. Устанавливается, что в данной, более точной, математической модели объекта сохраняется свойство двойного интегрирующего эффекта реакции механических колебаний объекта на внешнее тепловое воздействие.

2. Математическое описание динамических свойств объекта управления

Пусть заданы линеаризованные (вокруг некоторого установившегося режима) дифференциальные уравнения продольных колебаний стержня ограниченной длины, подвергающегося тепловому воздействию на одной из границ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \beta_{\text{т}}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $t \geq 0$, $x \in [0, l]$; a, c, β, $\beta_{\text{т}}$ — положительные константы (см., например, [5], гл. 3, § 9, уравнения (3), (4)).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от места приложения теплового воздействия; $\theta(x)(t)$ — температура стержня в сечении x.

Принимаем нулевые начальные условия по времени и граничные условия в виде

$$\begin{cases} \varphi'_x\,(0) = 0, \\ \varphi'_x\,(l) = 0, \\ (-\lambda\theta'_x + \alpha\theta)\,(0) = u, \\ (\lambda\theta'_x + \alpha\theta)\;(l) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где u — внешнее тепловое воздействие (функция времени).

3. Выражение для передаточной функции $u \to \binom{\varphi(x)}{\theta(x)}$

1. Выполнив преобразование Лапласа уравнений системы (2.1) при граничных условиях (2.2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\bar\varphi}{\partial x^2}(x)(p) - p^2\bar\varphi(x)(p) - \beta\dfrac{\partial\bar\theta}{\partial x}(x)(p) = 0, \\ a\dfrac{\partial^2\bar\theta(x)}{\partial x^2} - \beta_{\text{т}}p\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x} - p\bar\theta = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \overline{\varphi'_x}(0) = 0, \\ \overline{\varphi'_x}(l) = 0, \\ (-\lambda\overline{\theta'_x} + \alpha\bar\theta)(0) = \bar u, \\ (\lambda\overline{\theta'_x} + \alpha\bar\theta)(l) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь p — точка комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

2. Решение системы уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2) приводит к следующему результату.

Теорема 1. Зависимости $\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\theta}(x)$ от $\bar{u}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x) = \Big[-\beta a D_1(x) + \frac{d_1}{\Delta_A}\big(ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)\big) + \\ +\beta\frac{d_2}{\Delta_A}\left(pD_0(x) + arD_1(x)\right)\Big]\frac{\bar{u}}{\lambda},\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) = \Big[-ac^2 D_2(x) + ap^2 D_0(x) + \frac{d_1}{\Delta_A}\beta_{\text{т}} p^3 D_0(x) + \\ +\frac{d_2}{\Delta_A}\left(a\,c^2\,D_3(x) + ra\,c^2\,D_2(x) - b_2 p\,D_1(x) - r\,a\,p^2\,D_0(x)\right)\Big]\frac{\bar{u}}{\lambda},\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$D_0(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)/\sqrt{\rho_1} - \operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)/\sqrt{\rho_2}}{R},$$

$$D_1(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$D_2(x) = \frac{\sqrt{\rho_1}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \sqrt{\rho_2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$D_3(x) = \frac{\rho_1\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \rho_2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$\rho_{1,2} = \frac{(a\,p + b_1)\,p \pm R}{2ac^2}, \quad R = \sqrt{(ap+b_1)^2 - 4ac^2p^3},$$

$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad a_{11} = ac^2\left(D_3\right)'_x(l) - b_1 p D_2(l),$$

$$a_{12} = \beta\left(pD_1(l) + arD_2(l)\right), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\left(D_1(l) + rD_0(l)\right),$$

$$\begin{aligned}a_{22} = ac^2\left(D_3\right)'_x(l) + 2rac^2 D_3(l) + \left(r^2ac^2 - b_2 p\right)D_2(l) - \\ - rp\left(b_2 + ap\right)D_1(l) - r^2ap^2D_0(l),\end{aligned}$$

$$\left(D_3\right)'_x(l) = \frac{\rho_1^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}l\right) - \rho_2^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}l\right)}{R},$$

$$b_1 = c^2 + \beta\beta_{\text{т}}, \quad b_2 = ap + \beta\beta_{\text{т}}, \quad r = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$d_1 = a_{22}f_1 - a_{12}f_2, \quad d_2 = a_{11}f_2 - a_{21}f_1, \quad f_1 = \beta a D_2(l),$$

$$f_2 = ac^2\left(D_3(l) + rD_2(l)\right) - ap^2\left(D_1(l) + rD_0(l)\right).$$

Доказательство теоремы см. в Приложении П.1.

3. Для выяснения динамических свойств исследуемого объекта далее рассматривается поведение передаточных функций операторов $u \to \varphi(x)$ и

$u \to \theta(x)$ в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$. Результатом этого исследования является

Т е о р е м а 2. *Передаточная функция оператора $u \to \varphi(x)$ исследуемого объекта представляется в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ в виде $\frac{\beta}{\lambda}\frac{1+O(p)}{(2+rl)p^2}$, т.е. этот оператор отражает двойное интегрирующее свойство объекта по каналу "внешнее тепловое воздействие $\to$ механические колебания". Передаточная же функция оператора $u \to \theta(x)$ стремится при $p \to 0$ к константе $\frac{1+r(l-x)}{\alpha(2+rl)}$.*

(Здесь под $O(p)$ понимается функция $v(p)$, для которой отношение $\frac{v(p)}{p}$ ограничено в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$.)

Доказательство теоремы 2 см. в Приложении 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.

1. Выполним преобразование Лапласа уравнений (3.1) по пространственной координате x, учитывая граничные условия (3.2) (см. [12], гл. VI, § 1, п. 80, формулы (6) и (7)):

$$\text{(П.1.1)}\qquad \begin{cases} \left(c^2q^2 - p^2\right)\bar{\bar{\varphi}}(q) - \beta q\bar{\bar{\theta}}(q) = z_1(q), \\ -\beta_{\text{т}} qp\bar{\bar{\varphi}}(q) + (aq^2 - p)\bar{\bar{\theta}}(q) = z_2(q), \end{cases}$$

где $\bar{\bar{y}}(q)$ — преобразование Лапласа от функции $\bar{y}(x)$ по x,

$$z_1(q) = c^2q\bar{\varphi}(0) - \beta\bar{\theta}(0), \quad z_2(q) = aq\bar{\theta}(0) + a\bar{\theta}'_x(0) - \beta_{\text{т}} p\bar{\varphi}(0).$$

Решение системы уравнений (П.1.1) относительно вектора $\begin{pmatrix} \bar{\bar{\varphi}} \\ \bar{\bar{\theta}} \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\text{(П.1.2)}\qquad \begin{aligned} \bar{\bar{\varphi}}(q) &= \frac{z_1(q)\left(aq^2 - p\right) + \beta q z_2(q)}{\Delta(q)} = \\ &= \frac{ac^2q^3\bar{\varphi}(0) + B_1 q + \beta p\bar{\theta}(0)}{\Delta(q)}, \end{aligned}$$

$$\text{(П.1.3)}\qquad \begin{aligned} \bar{\bar{\theta}}(q) &= \frac{\beta_{\text{т}} z_1(q)\,qp + z_2(q)\left(A^2q^2 - p^2\right)}{\Delta(q)} = \\ &= \frac{ac^2q^3\bar{\theta}(0) + ac^2q^2\bar{\theta}'_x(0) - b_2 qp\bar{\theta}(0) + B_2 p^2}{\Delta(q)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(q) = \det\begin{pmatrix} c^2q^2 - p^2 & -\beta q \\ -\beta_{\text{т}} qp & aq^2 - p \end{pmatrix} &= ac^2q^4 - q^2p(ap + b_1) + p^3 = \\ &= ac^2\left(q^2 - \rho_1\right)\left(q^2 - \rho_2\right), \end{aligned}$$

$$\rho_{1,2}=\frac{(a\,p+b_1)\,p\pm R}{2ac^2},\quad R=\sqrt{(ap+b_1)^2\,p^2-4ac^2p^3},$$
$$B_1=\beta a\bar\theta'_x(0)-b_1p\bar\varphi(0),\quad B_2=\beta_{\text{т}}p\bar\varphi(0)-a\bar\theta'_x(0),$$
$$b_1=c^2+\beta\beta_{\text{т}},\quad b_2=ap+\beta\beta_{\text{т}}.$$

2. Используя соотношение

$$\frac{1}{\Delta(q)}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{q^2-\rho_1}-\frac{1}{q^2-\rho_2}\right),$$

от выражений (П.1.2) и (П.1.3) переходим к оригиналам по координате x (см. [12], гл. VI, § 1, п. 80, формула (4))

$$\bar\varphi(x)=ac^2\bar\varphi(0)\,D_3(x)+B_1D_1(x)+\beta p\bar\theta(0)\,D_0(x)\,,\tag{П.1.4}$$

$$\begin{gathered}\bar\theta(x)=ac^2\bar\theta(0)\,D_3(x)+ac^2\bar\theta'_x(0)\,D_2(x)-\\ -b_2p\bar\theta(0)\,D_1(x)+B_2p^2D_0(x)\,,\end{gathered}\tag{П.1.5}$$

где

$$D_0(x)=\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)/\sqrt{\rho_1}-\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)/\sqrt{\rho_2}}{R},$$
$$D_1(x)=(D_0)'_x(x)=\frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)-\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$
$$D_2(x)=(D_1)'_x(x)=\frac{\sqrt{\rho_1}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)-\sqrt{\rho_2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$
$$D_3(x)=(D_2)'_x(x)=\frac{\rho_1\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)-\rho_2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

3. Подставляя выражения (П.1.4) и (П.1.5) в граничные условия (3.2) и учитывая соотношение

$$(D_3)'_x(x)=\frac{\rho_1^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)-\rho_2^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},\tag{П.1.6}$$

получаем:

первое из условий (3.2) выполняется;

второе из условий (3.2) принимает вид

$$ac^2\bar\varphi(0)\,(D_3)'_x(l)+B_1D_2(l)+\beta p\bar\theta(0)\,D_1(l)=0;\tag{П.1.7}$$

последнее из условий (3.2) принимает вид

$$\begin{gathered}ac^2(D_3)'_x(l)\bar\theta(0)+ac^2D_3(l)\bar\theta'_x(0)-b_2pD_2(l)\bar\theta(0)+B_2p^2D_1(l)+\\ +r\left\lfloor ac^2D_3(l)\bar\theta(0)+ac^2D_2(l)\bar\theta'_x(0)-b_2pD_1(l)\bar\theta(0)+B_2p^2D_0(l)\right\rfloor=0,\end{gathered}\tag{П.1.8}$$

где $r=\frac{\alpha}{\lambda}$.

Используя третье из условий (3.2) в виде

$$\overline{\theta'_x}\,(0) = r\bar{\theta}\,(0) - \frac{\bar{u}}{\lambda} \tag{П.1.9}$$

и выражения для B_i $(i = 1, 2)$, (см. пояснения к (П.1.3) получаем систему уравнений относительно вектора $y = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}\,(0) \\ \bar{\theta}\,(0) \end{pmatrix}$:

$$Ay = f, \tag{П.1.10}$$

где

$$A = (a_{ij};\, i, j = 1,\, 2)\,, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \frac{\bar{u}}{\lambda},$$

$$a_{11} = ac^2\,(D_3)'_x\,(l) - b_1 p D_2\,(l)\,, \quad a_{12} = \beta\,(pD_1\,(l) + arD_2\,(l))\,;$$

$$a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,, \quad a_{22} = ac^2\left((D_3)'_x\,(l) + 2rD_3\,(l) + r^2 D_2\,(l)\right) -$$

$$- b_2 p\,(D_2\,(l) + rD_1\,(l)) - arp^2\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,,$$

$$f_1 = \beta a D_2\,(l)\,, \quad f_2 = ac^2\,(D_3\,(l) + rD_2\,(l)) - ap^2\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,.$$

Решение системы (П.1.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi\,(0) \\ \theta\,(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \frac{\bar{u}}{\lambda \Delta_A}, \tag{П.1.11}$$

где $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $d_1 = a_{22}f_1 - a_{12}f_2$, $d_2 = a_{11}f_2 - a_{21}f_1$.

Подставляя (П.1.11) в (П.1.4) и в (П.1.5), получаем выражения для $\bar{\varphi}\,(x)$ и $\bar{\theta}\,(x)$, приведенные в формулировке теоремы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ниже для функций φ, ψ, отображающих плоскость $\mathbf{C}$ в себя, будем обозначать через $O\,(\psi)$ класс функций φ, для которых отношение $\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ ограничено в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$.

1. Опираясь на известное соотношение

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} + O\left(v^2\right),$$

асимптотику поведения функции R (см. пояснения к (П.1.3)) в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R &= (ap + b_1)\,p\sqrt{1 - \frac{4ac^2 p}{(ap + b_1)^2}} = \\ &= (ap + b_1)\,p\left(1 - \frac{2ac^2 p}{(ap + b_1)^2} O\left(p^2\right)\right) = b_1 p + O\left(p^2\right). \end{aligned} \tag{П.2.1}$$

Поэтому, опираясь на соотношение

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{R} = \frac{1}{a\,c^2}, \tag{П.2.2}$$

получаем асимптотику для ρ_i $(i = 1, 2)$.

$$\rho_1 = \frac{ap^2 + 2b_1 p + O\left(p^2\right)}{2ac^2} = \frac{b_1 p}{ac^2} + O\left(p^2\right), \tag{П.2.3}$$

$$\rho_2 = \frac{ap^2 + O\left(p^2\right)}{2ac^2} = O\left(p^2\right). \tag{П.2.4}$$

2. При $p \to 0$ значения функции $D_0\left(x\right)$ стремятся к $\frac{x^3}{6ac^2}$, значения функции $D_1\left(x\right)$ — к $\frac{x^2}{2ac^2}$ и значения функции $D_3\left(x\right)$ — к $\frac{1}{ac^2}$.

3. Асимптотика функции $D_2\left(x\right)$ при $p \to 0$:

$$\begin{gathered} D_2\left(x\right) = \\ = \frac{\sqrt{\rho_1}\left(\sqrt{\rho_1}x + \rho_1^{3/2}x^3/6 + O\left(\rho_1^{5/2}\right)\right) - \sqrt{\rho_2}\left(\sqrt{\rho_2}x + \rho_2^{3/2}x^3/6 + O\left(\rho_2^{5/2}\right)\right)}{R} = \\ = \frac{x + x^3\left(\rho_1 + \rho_2\right)/6 + \sum_{i=1}^{2} O\left(\rho_i^3\right)}{ac^2} = \\ = \frac{1}{ac^2}\left[x + \frac{x^3}{6}\frac{b_1 p + a\,p^2}{ac^2} + O\left(p^2\right)\right] \xrightarrow[p \to 0]{} \frac{x}{ac^2}. \end{gathered} \tag{П.2.5}$$

4. Асимптотика функции $\left(D_3\right)'_x\left(x\right)$ при $p \to 0$ определяется из (П.1.6):

$$\begin{gathered} \left(D_3\right)'_x\left(x\right) = \frac{\rho_1^{3/2}}{R}\left(\sqrt{\rho_1}x + \rho_1^{3/2}x^3/6 + O\left(\rho_1^{5/2}\right)\right) - \\ - \frac{\rho_2^{3/2}}{R}\left(\sqrt{\rho_2}x + \rho_2^{3/2}x^3/6 + O\left(\rho_2^{5/2}\right)\right) = \\ = \frac{1}{ac^2}\left[x\left(\rho_1 + \rho_2\right) + x^3\left(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2\right)/6 + \sum_{i=1}^{2} O\left(\rho_i^4\right)\right] = \\ = \frac{1}{ac^2}\left[x\frac{b_1 p + ap^2}{ac^2} + \frac{x^3}{6}\left(\frac{b_1 p}{ac^2}\right)^2 + O\left(p^3\right)\right] = \\ = d_{31}\left(x\right)p + d_{32}\left(x\right)p^2 + O\left(p^3\right) \xrightarrow[p \to 0]{} 0, \end{gathered} \tag{П.2.6}$$

где

$$d_{31}\left(x\right) = \frac{xb_1}{\left(ac^2\right)^2}, \quad d_{32}\left(x\right) = \frac{x}{ac^4}\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{xb_1}{ac}\right)^2\right).$$

5. При $p \to 0$ значения функции a_{12} стремятся к $\frac{\beta rl}{c^2}$, а значения функции a_{22} — к $r\left(2 + rl\right)$.

6. Асимптотика функции a_{11} при $p \to 0$ следует из асимптотик функций $(D_3)'_x(x)$ и $D_2(x)$ (см. пп. 2 и 3):

(П.2.7) $$a_{11} = \frac{l}{c^2} p^2 + O\left(p^3\right).$$

7. Асимптотика функции a_{21} при $p \to 0$ следует из предельных значений функций $D_0(l)$ и $D_1(l)$:

(П.2.8) $$a_{21} = \frac{\beta_{\text{т}} l^2}{2ac^2} \left(1 + \frac{rl}{3}\right) p^3 + O\left(p^4\right).$$

8. Поэтому на основании пп. 5–7 функцию Δ_A можно представить в виде

(П.2.9) $$\Delta_A = \frac{rl\,(2 + rl)}{c^2} p^2 + O\left(p^3\right).$$

9. На основании пп. 2 и 3 значения функции f_1 при $p \to 0$ стремятся к $\frac{\beta l}{c^2}$, а значения функции f_2 — к $1 + rl$. Поэтому значения функции d_1 при $p \to 0$ стремятся к $\frac{r\beta l}{c^2}$, а функцию d_2 можно представить в виде, аналогичном представлению (П.2.7) для Δ_A:

(П.2.10) $$d_2 = \frac{l}{c^2} (1 + rl)\, p^2 + O\left(p^3\right).$$

Отношение $\frac{d_2}{\Delta_A}$ представляется при $p \to 0$ в виде

(П.2.11) $$\frac{d_2}{\Delta_A} = \frac{1 + rl}{r\,(2 + rl)} (1 + O(p)).$$

Отношение же $\frac{d_1}{\Delta_A}$ представляется в виде

(П.2.12) $$\frac{d_1}{\Delta_A} = \frac{\beta}{(2 + rl)\, p^2} (1 + O(p)).$$

10. Подставляя полученные в предыдущих пунктах асимптотики в (3.3) и (3.4), получаем утверждения теоремы 2.

Автор благодарен Л.А. Черемушкиной за творческую помощь в работе и за подбор литературы по термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Боли Б., Уэйнер П.П.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
3. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965.

4. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermo-elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
6. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type-I11 thermoelastic media // Proc. Royal Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
7. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013.
9. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
10. *Торсукова Е.Б., Христич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вест. ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016. Вып. 1. С. 88–92.
11. *Solnechnyi E.M.* The Dynamic Properties Investigation for a Distributed Thermomechanical Control Plant // 2018 Eleventh Int. Conf. “MLSD”, 1–3 Oct. 2018.

    https:/ /ieeexplore.ieee.org/document/8551890
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. 6-е изд., стер. М.: Изд-во «Лань», 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 02.07.2019

После доработки 05.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Стохастические системы

© 2020 г. В.М. ВИШНЕВСКИЙ, д-р техн. наук (vishn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
К.Е. САМУЙЛОВ, д-р техн. наук (ksam@sci.pfu.edu.ru),
Н.В. ЯРКИНА, канд. физ.-мат. наук (natyarkina@sci.pfu.edu.ru)
(Российский университет дружбы народов, Москва)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОТЫ LTE С ТРАФИКОМ МЕЖМАШИННЫХ И ШИРОКОПОЛОСНЫХ КОММУНИКАЦИЙ[1]

Представлена система массового обслуживания с эластичными и неэластичными заявками для анализа совместной передачи трафика межмашинных и широкополосных коммуникаций в соте LTE. Поступающие в систему эластичные заявки образуют марковский поток и обслуживаются в соответствии с дисциплиной справедливого разделения процессора на выделяемых блоками ресурсах. Получена система уравнений равновесия для расчета стационарного распределения вероятностей состояний и выражения основных вероятностно-временных характеристик. На примере рассматриваемой системы исследована связь характеристик производительности системы и коэффициента корреляции последовательных интервалов между поступлениями заявок в марковском потоке.

Ключевые слова: разделение ресурсов, марковский поток, межмашинные коммуникации, интернет вещей, MAP, IoT, mMTC, LTE.

DOI: 10.31857/S0005231020040054

1. Введение

Дальнейшее развитие сетей сотовой подвижной связи направлено на решение двух задач: расширение возможностей существующих систем по широкополосной передаче данных (mobile broad band, MBB) и обеспечение комплексной инфраструктуры для межмашинных коммуникаций (machine-type communications, MTC) как для потребительских, так и для промышленных нужд, призванной стать основой для полноценного развертывания Интернета вещей (Internet of Things, IoT) [1]. Таким образом, в одной сети связи необходимо организовать эффективную передачу трафика двух типов с принципиально различными характеристиками и требованиями к качеству обслуживания. Действительно, если трафик MBB, как правило, связан с услугами телефонии и мультимедиа и характеризуется продолжительными соединениями и передачей больших объемов данных с малыми задержками, то для трафика MTC характерна передача пакетов данных малого размера от чрезвычайно большого количества устройств.

[1] Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 2.882.2017/4.6).

Поддержка двух принципиально различных типов трафика, необходимость реализации которой возникла в сетях Long Term Evolution (LTE), поиному ставит задачи оптимизации ресурсов соты, причем как канальных, так и сигнализации. Например, в статье [2] построена вероятностная модель для анализа эффективности механизма доступа устройств МТС в соту LTE. Пропускная способность соты здесь оценивается не с точки зрения канальных ресурсов, а как среднее число успешных попыток получить доступ в сеть за единицу времени. Модель позволяет настроить параметры стандартных процедур радиодоступа LTE таким образом, чтобы максимизировать пропускную способность соты.

В [3] предложена математическая модель для анализа совместной передачи межмашинного и широкополосного трафика в соте сети пятого поколения с поддержкой механизмов нарезки (slicing) сети доступа. Модель построена в виде системы массового обслуживания и учитывает потери запросов как из-за нехватки канальных ресурсов, так и из-за коллизий на этапах установления соединения. Численный анализ модели показывает, что основные потери в соте вызваны именно нехваткой сигнальных ресурсов для обслуживания большого числа устройств МТС.

Одним из возможных способов избежать перегрузок на уровне радиодоступа при обслуживании очень большого числа устройств МТС и обеспечить покрытием труднодоступные места (например, подвальные помещения) является агрегация трафика МТС посредством кластеризации (группировки) устройств, при которой один или несколько узлов сети, называемых агрегаторами, осуществляют передачу данных на базовую станцию от группы устройств МТС [4, 5]. В [6, 7] в роли агрегаторов предложено использовать устройства МТС, первыми установившие соединение с базовой станцией.

В настоящей статье предложена модель для анализа разделения канальных ресурсов соты сети, обслуживающей трафик MBB и МТС с агрегацией трафика МТС и резервированием ресурсов. Модель построена в виде системы массового обслуживания (СМО) с двумя типами заявок. Заявки, соответствующие запросам от устройств МТС, образуют марковский входящий поток [8, 9] и обслуживаются в соответствии с дисциплиной справедливого разделения процессора на выделяемых блоками ресурсах. Поскольку скорость обслуживания заявок данного типа зависит от числа заявок в системе, называем их эластичными.

На численном примере исследовано поведение системы с входящими потоками некоторых специальных видов и связь корреляции длин последовательных интервалов между поступлениями заявок марковского потока с характеристиками системы. Существенное влияние корреляции во входящем потоке на характеристики функционирования СМО отмечено в [10, 11], где при численном анализе ряда систем замечено ухудшение показателей производительности с ростом коэффициента корреляции (см., например, [11, с. 290]). В настоящей статье показано, что коэффициент корреляции во входящем марковском потоке не обязательно отражает характер распределения поступлений заявок во времени, вызывающий ухудшение показателей производительности СМО.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 производится построение СМО, описаны входящие потоки и особенности выделения ресурсов заявкам разных типов. В разделе 3 получена система уравнений равновесия (СУР) для нахождения стационарного распределения вероятностей состояний системы. Эффективный алгоритм для решения СУР представлен в разделе 4. В разделе 5 даны выражения для основных вероятностно-временных характеристик СМО. В разделе 6 представлены результаты численного анализа.

2. Построение системы массового обслуживания

Рассмотрим соту сети LTE, в которой осуществляется предоставление двух типов услуг связи: передача потоков данных MBB, например телефония, и передача блоков данных от устройств MTC, например счетчиков потребления электроэнергии. Для построения математической модели такой соты сделаем следующие упрощающие предположения. Пусть все оконечные устройства не меняют своего положения относительно базовой станции и имеют одинаковое значение отношения сигнал/шум. Таким образом, все устанавливаемые в соте радиоканалы имеют одинаковые характеристики, и скорость передачи данных определяется лишь количеством выделенных единиц канального ресурса. Под единицей (канального) ресурса будем понимать условную величину, соответствующую минимально допустимой скорости передачи данных (например, в кбит/с) для заданного количества выделенных физических ресурсных блоков.

С ростом предложенной нагрузки планировщик на базовой станции LTE определяет оптимальный размер диапазона выделяемых радиоресурсов, исходя из установленных оператором сети требований к качеству обслуживания. Будем считать, что при поступлении запросов на MBB-соединения планировщик выделяет канальные ресурсы оконечному устройству на все время сеанса связи (телефонного разговора). Передача же MTC-данных осуществляется через агрегатора следующим образом: при поступлении первого запроса на MTC-передачу агрегатор соединяется с базовой станцией и обслуживание последующих MTC-запросов производится по уже установленному каналу. Если количество одновременно обслуживаемых посредством одного канала MTC-устройств не позволяет соблюсти требования к качеству обслуживания, то агрегатор запрашивает установление еще одного канала с теми же характеристиками. При отсутствии активных соединений с MTC-устройствами канал между базовой станцией и агрегатором разрывается.

Для того чтобы сделать сети LTE эффективным механизмом обслуживания MTC-трафика, необходимы методы распределения радиоресурсов, минимизирующие влияние MTC на качество обслуживания традиционных абонентов, приносящих пока основной доход операторам сетей связи. Поэтому будем считать, что часть ресурсов соты доступна только трафику MBB и не может использоваться для соединений с агрегатором MTC.

Рассмотрим изображенную на рис. 1 многолинейную СМО, обслуживающую заявки двух типов. Заявки первого типа – эластичные – обслуживаются с переменной скоростью, зависящей от числа заявок данного типа в систе-

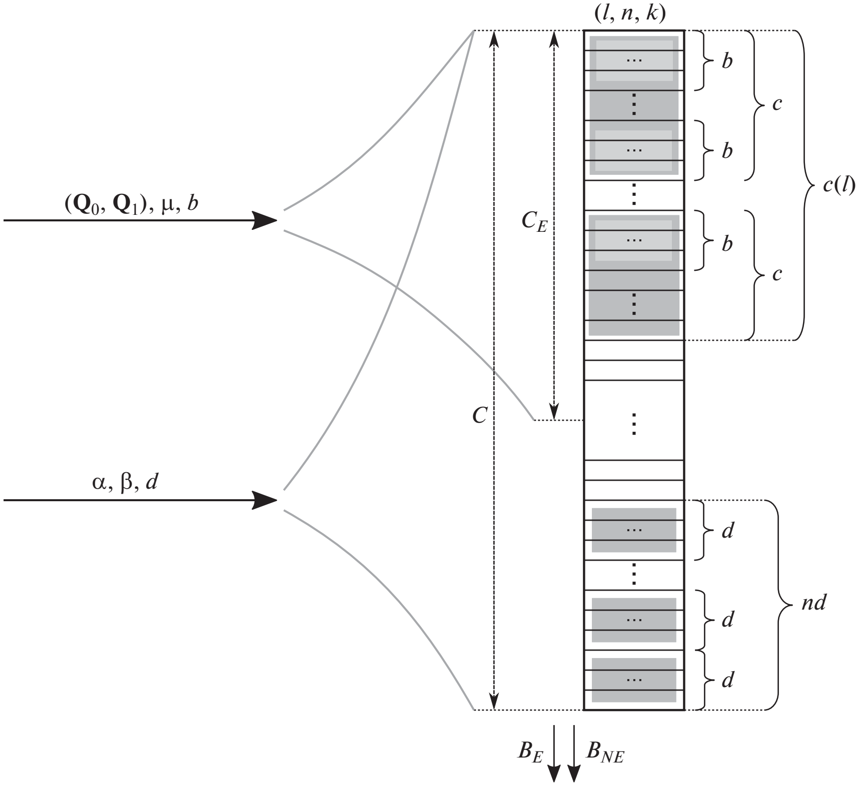

Рис. 1. Система массового обслуживания с эластичными и неэластичными заявками.

ме, и описывают соединения МТС. Заявки второго типа – неэластичные – обслуживаются с постоянной скоростью и соответствуют соединениям MBB.

Поток эластичных заявок является марковским, или MAP-потоком (Markovian Arrival Process, подробнее см., например, [8–10]), и задан двумя квадратными матрицами $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{Q}_1$ порядка K, $\mathbf{Q}_1 \geqslant 0$. Матрица $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$ представляет собой инфинитезимальную матрицу управляющей марковским потоком цепи Маркова (ЦМ) с непрерывным временем $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$, причем $\mathbf{Q}_0$ содержит интенсивности ее переходов без генерации заявок, тогда как $\mathbf{Q}_1$ описывает переходы с генерацией заявок. Будем считать, что матрица $\mathbf{Q}_1$ отлична от нулевой, а управляющая цепь $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ является неприводимой. Обозначим через $\mathbf{1}$ вектор-столбец из единиц и через $\mathbf{0}$ — вектор-строку из нулей соответствующей контексту размерности. Вектор-строка $\mathbf{q}$ стационарных вероятностей состояний ЦМ $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ находится как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{qQ} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q1} = 1$. Средняя интенсивность потока дается выражением

(1) $$\lambda = \mathbf{q}\mathbf{Q}_1\mathbf{1},$$

дисперсия длин интервалов между поступлениями равна

(2) $$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda}\mathbf{q}(-\mathbf{Q}_0)^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda^2},$$

а коэффициент корреляции длин последовательных интервалов между поступлениями находится по формуле

$$r = \frac{\frac{1}{\lambda} - \mathbf{q}\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{1}}{\frac{1}{\lambda} + 2\mathbf{q}\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{1}}. \tag{3}$$

Длины эластичных заявок (т.е. требуемые длительности обслуживания с единичной скоростью) являются независимыми случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметром μ. Во время своего пребывания в системе каждая эластичная заявка занимает не менее $b > 0$ единиц ресурса.

Заявки второго типа – неэластичные – образуют пуассоновский поток интенсивности α и обслуживаются с постоянной скоростью в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром β. Каждая принятая на обслуживание неэластичная заявка получает ровно d единиц ресурса системы.

Пусть общий объем ресурсов СМО для обслуживания заявок равен C, из которых $C_E \leqslant C$ единиц могут выделяться заявкам обоих типов, а $C - C_E$ единиц доступны только неэластичным заявкам (часть ресурсов резервируется для трафика MBB). Для обслуживания эластичных заявок ресурсы выделяются блоками по $c \geqslant b$ единиц, что соответствует выделению ресурсов агрегатору. Обозначим через

$$M = \lfloor c/b \rfloor = \max\{y \in \mathbb{N} : y \leqslant c/b\}$$

максимальное число эластичных заявок, которые могут обслуживаться одновременно одним блоком ресурсов размера c. Тогда если в системе находятся l эластичных заявок, то объем занимаемых ими ресурсов равен

$$c(l) = c \cdot \lceil l/M \rceil = c \cdot \min\{y \in \mathbb{N} : y \geqslant l/M\}.$$

Этот объем ресурсов поровну делится между эластичными заявками, находящимися в СМО, т.е. скорость обслуживания каждой эластичной заявки равна $\frac{c(l)}{l}$.

Далее, если в СМО, в которой обслуживаются l эластичных заявок, поступает $(l+1)$-я эластичная заявка, то возможен один из следующих вариантов:

— если в момент поступления заявки $c(l+1) = c(l)$, то заявка принимается на обслуживание без выделения дополнительных ресурсов, при этом объем ресурсов, занятых эластичными заявками, перераспределяется поровну между $l+1$ заявками и скорость обслуживания снижается;

— если в момент поступления заявки $c(l) < c(l+1) \leqslant C_E$ и в СМО имеются c свободных единиц ресурса, то заявка принимается на обслуживание с выделением ресурсного блока размером c единиц, при этом $c(l+1)$ единиц ресурса поровну перераспределяются между эластичными заявками в системе и скорость их обслуживания возрастает;

— если в момент поступления заявки $c(l+1) > c(l)$ и при этом $c(l+1) > C_E$ и/или в СМО нет свободных c единиц ресурса, то поступившая заявка теряется, не оказывая влияния на дальнейшее функционирование СМО.

Принятая в СМО эластичная заявка обслуживается с переменной скоростью до тех пор, пока ее остаточная длина не будет равна нулю, после чего покидает систему. В момент ухода эластичной заявки ресурсы перераспределяются между оставшимися $l-1$ эластичными заявка следующим образом:

— если $c(l-1) = c(l)$, то ресурсы не высвобождаются и $c(l)$ единиц ресурсов поровну делятся между оставшимися $l-1$ эластичными заявками;

— если $c(l-1) < c(l)$, то ресурсный блок объемом c единиц высвобождается и $c(l-1)$ единиц ресурса системы перераспределяется поровну между оставшимися $l-1$ эластичными заявками.

Неэластичная заявка принимается на обслуживание, если в момент ее поступления в СМО имеется хотя бы d свободных единиц ресурса. Заявка занимает этот объем ресурсов на время обслуживания и высвобождает в момент выхода из СМО. Если в момент поступления неэластичной заявки объем свободных ресурсов системы меньше d, то заявка теряется, не оказывая влияния на дальнейшее функционирование системы.

3. Стационарное распределение вероятностей состояний

Обозначим через $S = \lfloor C_E/c \rfloor$ максимальное число ресурсных блоков, которые могут быть выделены эластичным заявкам. Тогда максимально возможное число эластичных заявок в СМО равно $L = MS$. Введем еще обозначение для максимального числа неэластичных заявок в системе, в которой уже обслуживаются l эластичных заявок:

$$N(l) = \left\lfloor \frac{C - c(l)}{d} \right\rfloor, \quad 0 \leqslant l \leqslant L. \tag{4}$$

Теперь пусть $l(t) \in \{0, \dots, L\}$ и $n(t) \in \{0, \dots, N(0)\}$ — соответственно числа эластичных и неэластичных заявок в СМО, а $k(t) \in \{1, \dots, K\}$ — состояние управляющей марковским потоком ЦМ в момент времени $t \geqslant 0$. Тогда стохастическое поведение рассматриваемой системы можно описать трехмерной ЦМ с непрерывным временем $\{X(t) = (l(t), n(t), k(t))\,,\ t \geqslant 0\}$ над пространством состояний

$$\mathcal{X} = \{(l, n, k) : 0 \leqslant l \leqslant L, n \geqslant 0, c(l) + nd \leqslant C, 1 \leqslant k \leqslant K\}\,. \tag{5}$$

Расположим состояния ЦМ $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ в лексикографическом порядке и обозначим через $\mathbf{A}$ ее матрицу интенсивностей переходов. Обозначим через $\mathbf{I}$ единичную матрицу порядка K и доопределим функцию $N(l)$, заданную в (4), положив $N(l) = N(L)$ при $l > L$.

Л е м м а 1. *Инфинитезимальная матрица* $\mathbf{A}$ *имеет блочно-трехдиагональную структуру:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{\Lambda}_0 & & & \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{D}_1 & \mathbf{\Lambda}_1 & 0 & \\ & \mathbf{M}_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{D}_{L-1} & \mathbf{\Lambda}_{L-1} \\ & 0 & & \mathbf{M}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Блоки, расположенные на пересечении i-й блочной строки и j-го блочного столбца, представляют собой блочные матрицы блочных размеров $(N(i-1)+1) \times (N(j-1)+1)$, составленные из квадратных матриц порядка K. Диагональные блоки матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\mathbf{D}_l = \begin{cases} \mathbf{D}_{l,1} & \text{при } N(l) = N(l+1), \\ [\mathbf{D}_{l,1} \quad \mathbf{D}_{l,2}] & \text{при } N(l) > N(l+1), \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}_{l,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} & \alpha\mathbf{I} & & & & \\ \beta\mathbf{I} & \mathbf{F}_{l,1} & \alpha\mathbf{I} & & 0 & \\ & 2\beta\mathbf{I} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \mathbf{F}_{l,N(l+1)-1} & \alpha\mathbf{I} & \\ & & & N(l+1)\beta\mathbf{I} & \mathbf{F}_{l,N(l+1)} & \\ & 0 & & & (N(l+1)+1)\beta\mathbf{I} & \\ & & & & 0 & \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant l < L,$$

$$\mathbf{D}_{l,2} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \alpha\mathbf{I} & & & & & \\ \mathbf{G}_{l,N(l+1)+1} & \alpha\mathbf{I} & & & 0 & \\ (N(l+1)+2)\beta\mathbf{I} & \mathbf{G}_{l,N(l+1)+2} & \alpha\mathbf{I} & & & \\ & (N(l+1)+3)\beta\mathbf{I} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \mathbf{G}_{l,N(l)-1} & \alpha\mathbf{I} & \\ & 0 & & N(l)\beta\mathbf{I} & \mathbf{G}_{l,N(l)} & \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant l < L,$$

$$\mathbf{D}_{L,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{L,0} & \alpha\mathbf{I} & & & \\ \beta\mathbf{I} & \mathbf{G}_{L,1} & \alpha\mathbf{I} & 0 & \\ & 2\beta\mathbf{I} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{G}_{L,N(L)-1} & \alpha\mathbf{I} \\ & 0 & & N(L)\beta\mathbf{I} & \mathbf{G}_{L,N(L)} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{F}_{l,j} = \begin{cases} \mathbf{Q}_0 - (\alpha + j\beta + c(l)\mu)\mathbf{I} & \text{при } j \neq N(l), \\ \mathbf{Q}_0 - (N(l)\beta + c(l)\mu)\mathbf{I} & \text{при } j = N(l) \end{cases}$$

и

$$\mathbf{G}_{l,j} = \mathbf{F}_{l,j} + \mathbf{Q}_1.$$

Под- и наддиагональные блоки матрицы $\mathbf{A}$ являются блочными диагональными прямоугольными матрицами вида

$$\mathbf{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} c(l)\mu\mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & c(l)\mu\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство основано на анализе переходов ЦМ $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ за бесконечно малый интервал времени. Переходы происходят в результате наступления следующих событий:

— Принятие на обслуживание эластичной заявки. Поступление эластичных заявок происходит при переходах управляющей ЦМ $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$, сопровождающихся генерацией заявок. Интенсивности таких переходов содержит матрица $\mathbf{Q}_1$. В матрице $\mathbf{A}$ данные интенсивности объединены в блоки $\mathbf{\Lambda}_l$, $l = 0, \dots, L-1$, имеющие блочные размеры $(N(l)+1) \times (N(l+1)+1)$ и, следовательно, являющиеся квадратными при $N(l+1) = N(l)$. Ненулевые внедиагональные элементы $\mathbf{\Lambda}_l$ являются интенсивностями переходов из состояния (l, n, k) в состояние $(l+1, n, k^*)$, где $k \neq k^*$. Диагональные элементы $\mathbf{\Lambda}_l$ соответствуют переходам из (l, n, k) в $(l+1, n, k)$.

— Окончание обслуживания эластичной заявки вызывает переход из состояния (l,n,k) в состояние $(l-1,n,k)$. Интенсивности данных переходов $c(l)\mu$ объединены в блоки $\mathbf{M}_l$, $l = 1, \dots, L$, блочного размера $(N(l)+1) \times (N(l-1)+1)$. Блоки являются диагональными матрицами, квадратными при $N(l) = N(l-1)$.

— Принятие на обслуживание неэластичной заявки вызывает переход из состояния (l, n, k) в состояние $(l, n+1, k)$. Интенсивности данных переходов α содержат наддиагональные подблоки $\alpha\mathbf{I}$ блоков $\mathbf{D}_l$, $l = 0, \dots, L$.

— Окончание обслуживания неэластичной заявки вызывает переход из (l, n, k) в $(l, n-1, k)$. Интенсивности данных переходов $n\beta$ объединены в поддиагональные подблоки блоков $\mathbf{D}_l$, $l = 0, \dots, L$.

— Переход ЦМ $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ без генерации заявки (интенсивности $\mathbf{Q}_0$) или с генерацией заявки, но в таком состоянии системы, где нет свободных ресурсов для ее принятия на обслуживание (интенсивности $\mathbf{Q}$), вызывает переход процесса $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ из состояния (l, n, k) в (l, n, k^*), $k^* \neq k$. Данные интенсивности содержатся в диагональных подблоках блоков $\mathbf{D}_l$, $l = 0, \dots, L$, причем подблоки $\mathbf{F}_{l,j}$ соответствуют переходам $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ без генерации заявки в системе, где достаточно ресурсов для принятия заявки, тогда как подблоки $\mathbf{G}_{l,j}$ соответствуют любым переходам $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ в системе, где ресурсов для принятия эластичной заявки недостаточно.

Диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны, и их абсолютные значения соответствуют интенсивностям выхода процесса $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ из соответствующего состояния. Поскольку за бесконечно малый промежуток времени не может произойти более одного из перечисленных выше событий, остальные элементы матрицы $\mathbf{A}$ равны нулю. Лемма 1 доказана.

Так как при сделанных предположениях ЦМ $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ регулярна и неприводима, а ее пространство состояний $\mathcal{X}$ конечно, то существует стационарное распределение вероятностей состояний данного процесса. Представим его в векторном виде в соответствии с разбиением (6) матрицы интенсивностей переходов $\mathbf{A}$ на блоки: $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_L)$, где $\mathbf{p}_l = (\mathbf{p}_{l,0}, \mathbf{p}_{l,1}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{p}_{l,N(L)})$, $l = 0, \ldots, L$, и $\mathbf{p}_{l,n} = (p_{l,n,1}, p_{l,n,2}, \ldots, p_{l,n,K})$, $n = 0, \ldots, N(l)$. Стационарные вероятности $\mathbf{p}$ удовлетворяют системе уравнений равновесия

$$\mathbf{pA} = \mathbf{0} \tag{10}$$

с условием нормировки $\mathbf{p1} = 1$. В случаях когда размерность данной системы невелика, ее легко решить стандартными методами с помощью компьютера. В противном случае можно воспользоваться специальным эффективным алгоритмом, приведенным в следующем разделе и представляющим собой частный случай блочного метода исключения Гаусса.

4. Алгоритм вычисления стационарного распределения

Разобьем матрицы $\mathbf{\Lambda}_l$, $l = 0, \ldots, L-1$, в соответствии с разбиением нижележащих блоков $\mathbf{D}_{l+1}$ следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda}_l = \begin{cases} \mathbf{\Lambda}_{l,1} & \text{при } N(l+1) = N(l+2), \\ [\mathbf{\Lambda}_{l,1} \quad \mathbf{\Lambda}_{l,2}] & \text{при } N(l+1) > N(l+2), \end{cases} \tag{11}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{l,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_1 \\ & & \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_{l,2} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ \mathbf{Q}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_1 \\ & 0 & \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{\Lambda}_{l,1}$ имеет $N(l+1)+1$ блочных столбцов.

Лемма 2. Компоненты $\mathbf{p}_l$, $l = 0, \ldots, L$, *вектора – решения СУР* (10) *связаны соотношениями*

$$\mathbf{p}_l = \mathbf{p}_0 \mathbf{H}_l, \quad l = 1, \ldots, L, \tag{12}$$

где матрицы $\mathbf{H}_l$, $l = 1, \ldots, L$, *размеров* $K(N(0)+1) \times K(N(l)+1)$ *вычисляются рекуррентно по формулам:*

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{c(1)\mu}\mathbf{D}_{0,1},$$

$$\mathbf{H}_{l+1} = -\frac{1}{c(l+1)\mu}\left(\mathbf{H}_{l-1}\mathbf{\Lambda}_{l-1,1} + \mathbf{H}_l \mathbf{D}_{l,1}\right), \quad l = 1, 2, \ldots, L-1.$$

Вектор $\mathbf{p}_0$ *является единственным решением системы линейных уравнений*

$$\mathbf{p}_0\mathbf{Z} = \mathbf{z}, \tag{13}$$

в которой вектор-строка $\mathbf{z}$ *получается заменой последних* K *элементов нулевого вектора-строки длины* $K(N(0)+1)$ *вектором* $\mathbf{q}$, *тогда как матрица* $\mathbf{Z}$ *является невырожденной квадратной матрицей порядка* $K(N(0)+1)$ *и вида* $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_L]$, *где* $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{D}_{0,2}$, $\mathbf{Z}_l = \mathbf{H}_{l-1}\mathbf{\Lambda}_{l-1,2} + \mathbf{H}_l\mathbf{D}_{l,2}$, $l = 1, \ldots, L-1$, *а матрица* $\mathbf{Z}_L$ *получена заменой последних* K *столбцов* $\mathbf{H}_{L-1}\mathbf{\Lambda}_{l-1} + \mathbf{H}_L\mathbf{D}_L$ *матрицей* $\sum_{l=0}^{L}\mathbf{H}_l\,(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I})$. (*Символ* $\otimes$ *здесь обозначает произведение Кронекера.*)

Доказательство. Используя блочную структуру матрицы $\mathbf{A}$ и учитывая специальный вид ее поддиагональных блоков $\mathbf{M}_l$, систему уравнений (10) можно записать в виде:

$$\mathbf{p}_0\mathbf{D}_{0,1} + c(1)\mu\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \tag{14a}$$

$$\mathbf{p}_0\mathbf{D}_{0,2} = \mathbf{0}, \tag{14b}$$

$$\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{\Lambda}_{l-1,1} + \mathbf{p}_l\mathbf{D}_{l,1} + c(l+1)\mu\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{0}, \quad l = 1, \ldots, L-1, \tag{14c}$$

$$\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{\Lambda}_{l-1,2} + \mathbf{p}_l\mathbf{D}_{l,2} = \mathbf{0}, \quad l = 1, \ldots, L-1, \tag{14d}$$

$$\mathbf{p}_{L-1}\mathbf{\Lambda}_{L-1,2} + \mathbf{p}_L\mathbf{D}_L = \mathbf{0}. \tag{14e}$$

Из уравнений (14a) и (14c) данной системы получаются рекуррентные соотношения (12), тогда как уравнения (14b), (14d) и (14e) составляют систему (13) с условием нормировки $\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{N(l)} p_{l,n,k} = \mathbf{q}_k$, $k = 1, \ldots, K$. Лемма 2 доказана.

5. Вероятностно-временные характеристики

Зная стационарное распределение вероятностей состояний системы, легко получить набор важных для приложений вероятностно-временных характеристик. В частности, вероятности потерь эластичных и неэластичных заявок равны соответственно:

$$B_E = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{n=N(l+1)+1}^{N(l)}\mathbf{p}_{l,n}\mathbf{Q}_1\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{N(L)}\mathbf{p}_{L,n}\mathbf{Q}_1\mathbf{1}\right), \tag{15}$$

$$B_{NE} = \sum_{l=0}^{L}\mathbf{p}_{l,N(l)}\mathbf{1}. \tag{16}$$

Среднее число занятых единиц ресурса системы можно получить по формуле

$$\bar{c} = \sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{N(l)}(dn + c(l))\mathbf{p}_{l,n}\mathbf{1}. \tag{17}$$

Средние числа эластичных и неэластичных заявок в СМО даются соответственно выражениями:

$$N_E = \sum_{l=1}^{L} \sum_{n=0}^{N(l)} l\mathbf{p}_{l,n}\mathbf{1}, \tag{18}$$

$$N_{NE} = \sum_{l=0}^{L} \sum_{n=1}^{N(l)} n\mathbf{p}_{l,n}\mathbf{1}. \tag{19}$$

Для нахождения среднего времени обслуживания эластичной заявки применима формула Литтла:

$$T_E = \frac{N_E}{\lambda(1 - B_E)}. \tag{20}$$

6. Численный анализ

В данном разделе рассмотрим систему со следующими структурными параметрами: $C = 200$, $C_E = 180$, $d = 10$ и $b = 1$. Положим $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 10^{-4}$ и $\mu = 0{,}05$. В качестве входящего потока эластичных заявок рассмотрим примеры потоков, предложенные С. Чакраварти в [10], а именно: некоррелированные пуассоновский, гиперэкспоненциальный и Эрланга, отрицательно коррелированный марковский (MAP-NC) и положительно коррелированный марковский (MAP-PC) с параметрами, приведенными в таблице, а также параметризованный марковский поток вида

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100a \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\pi_1 & 0 & 0 & 0 & a(1-\pi_1) \\ 100a(1-\pi_2) & 0 & 0 & 0 & 100a\pi_2 \end{bmatrix}.$$

Поток вида (21) (будем кратко обозначать его MAP-PAR), условно говоря, имеет два режима функционирования: как поток Эрланга порядка четыре и интенсивности $a/4$ и как пуассоновский поток интенсивности $100a$. Параметры π_1 и π_2 определяют переходы между режимами: если поток находится в режиме потока Эрланга, то после поступления заявки с вероятностью π_1 поток останется в данном режиме, а с дополнительной вероятностью перейдет в режим пуассоновского потока. Аналогично π_2 является вероятностью после поступления заявки остаться в режиме пуассоновского потока. Марковский поток MAP-PAR построен таким образом, что, варьируя параметры π_1 и π_2, Входящие потоки эластичных заявок

Обозначение	$\mathbf{Q}_0$	$\mathbf{Q}_1$	r	σ
EXP(1)	$[-1]$	$[1]$	0	1
HYPEXP	$\begin{bmatrix} -1{,}9 & 0 \\ 0 & -0{,}19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1{,}71 & 0{,}19 \\ 0{,}171 & 0{,}019 \end{bmatrix}$	0	2,24472
ERLANG	$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0,44721
MAP-NC	$\begin{bmatrix} -1{,}00243 & 1{,}00243 & 0 \\ 0 & -1{,}00243 & 0 \\ 0 & 0 & -225{,}797 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}01002 & 0 & 0{,}99241 \\ 223{,}539 & 0 & 2{,}258 \end{bmatrix}$	–0,48891	1,40952
MAP-PC	$\begin{bmatrix} -1{,}00243 & 1{,}00243 & 0 \\ 0 & -1{,}00243 & 0 \\ 0 & 0 & -225{,}797 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}99241 & 0 & 0{,}01002 \\ 2{,}258 & 0 & 223{,}539 \end{bmatrix}$	0,48891	1,40952

можно варьировать значения коэффициента корреляции (3) при фиксированной средней интенсивности λ. При этом значение параметра a получается из (1) по формуле

$$a = \lambda \frac{0{,}01(1-\pi_1) + 4(1-\pi_2)}{1-\pi_1+1-\pi_2}. \tag{22}$$

Средняя интенсивность всех потоков таблицы равна единице; σ обозначает среднеквадратичное отклонение длин интервалов между поступлением заявок.

На основе результатов численного анализа в [10, 11] подчеркивается важная роль корреляции (и особенно положительной корреляции) интервалов между поступлением заявок потока, оцениваемой как коэффициент корреляции длин последовательных интервалов (3). С. Чакраварти в [10] на численных примерах показал существенное различие характеристик потока и производительности СМО MAP|M|5 при негативной и позитивной корреляции во входящем MAP-потоке. В [11, с. 280–290, 393–395] для ряда СМО более сложной структуры замечен эффект ухудшения показателей производительности системы с ростом коэффициента корреляции входящего MAP-потока.

На рис. 2 представлена зависимость вероятности потерь (15) эластичных заявок от параметра c. На рис. 2 видно, что вероятности потерь эластичных заявок действительно оказываются существенно выше для входящих марковских потоков с положительным коэффициентом корреляции $r > 0$ (рис. 2,*б*), тогда как для потоков с отрицательной корреляцией $r < 0$ (рис. 2,*a*) значения вероятности потерь ниже и близки к вероятности потерь при простейшем входящем потоке той же интенсивности. Здесь поток MAP-PAR имеет характеристики $r = -0{,}49804$, $\sigma = 1{,}1129$ при $\pi = (0{,}21; 0{,}01)$ (рис. 2,*a*) и $r = 0{,}47697$, $\sigma = 6{,}36608$ при $\pi = (0{,}61; 0{,}99)$ (рис. 2,*б*).

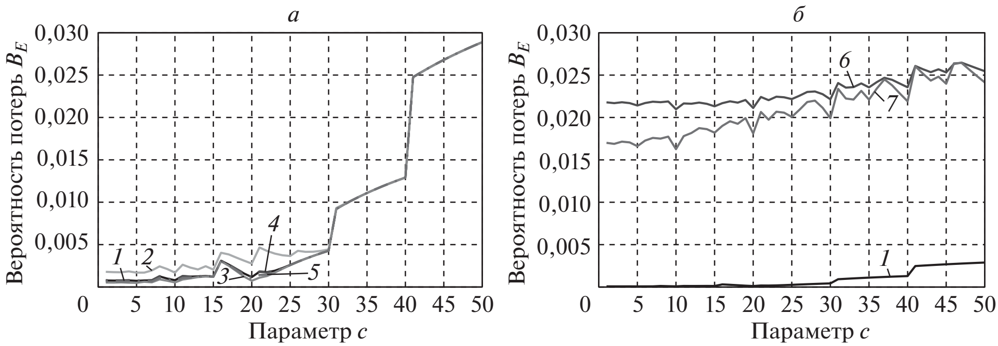

Рис. 2. Вероятность потерь эластичных заявок B_E как функция от c для: *1* – EXP(1), *2* – HYPEXP, *3* – ERLANG, *4* – MAP-NC, *5* – MAP-PAR при $\pi = (0{,}21; 0{,}01)$, *6* – MAP-PC, *7* – MAP-PAR при $\pi = (0{,}61; 0{,}99)$.

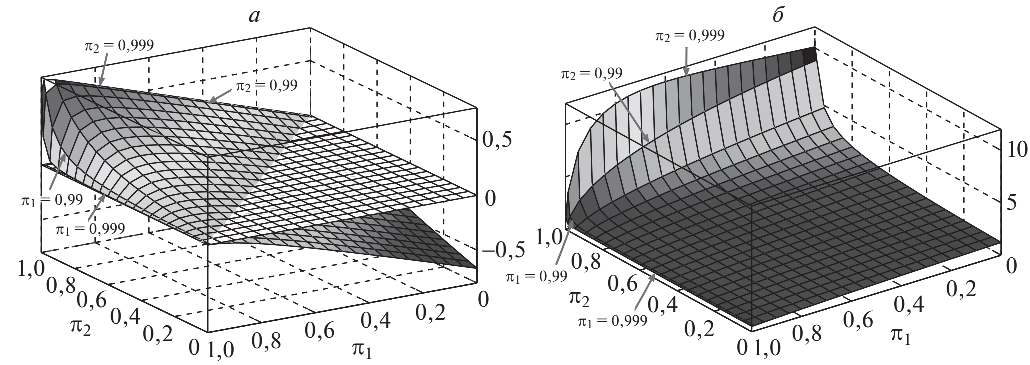

Рис. 3. Характеристики марковского потока MAP-PAR (21) при $\lambda = 1$.

Теперь зафиксируем $c = 15$ и рассмотрим вероятности потерь в СМО с входящим потоком MAP-PAR при различных значениях параметров $0 \leqslant \leqslant \pi_1, \pi_2 < 1$. На рис. 3 показаны коэффициент корреляции r (рис. 3,*а*) и среднеквадратичное отклонение σ (рис. 3,*б*) для данного потока при $\lambda = 1$. Отметим, что при приближении π_2 к единице имеет место резкий рост дисперсии потока, тогда как коэффициент корреляции плавно возрастает с ростом π_2, меняя знак при $\pi_2 = 1 - \pi_1$.

На рис. 4 представлена вероятность потерь эластичных заявок B_E как функция от коэффициента корреляции r. Значения обоих характеристик получены для следующей последовательности значений параметра π_2: 0,1, $0{,}2, \ldots, 0{,}9, 0{,}91, \ldots, 0{,}99, 0{,}999, 0{,}99999$. Для всех рассмотренных π_1 вероятность потерь резко увеличивается, приближаясь к $\pi_2 = 0{,}99$, однако падает уже при $\pi_2 = 0{,}999$. При этом, как видно на рис. 4,*а*, коэффициент корреляции r монотонно возрастает с ростом π_2.

Таким образом, как показывает рис. 4, само по себе значение (и даже знак) коэффициента корреляции потока не позволяет для исследуемой СМО предсказать поведение вероятности потерь. В частности, для $\pi_1 = 0$ рост происходит при отрицательных значениях коэффициента корреляции, а при высоких r наблюдаются как высокие так и низкие значения B_E. Вообще го-

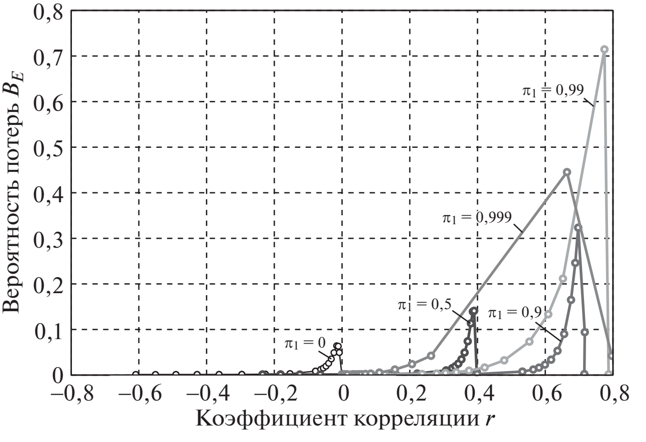

Рис. 4. Вероятность потерь эластичных заявок B_E как функция от коэффициента корреляции r.

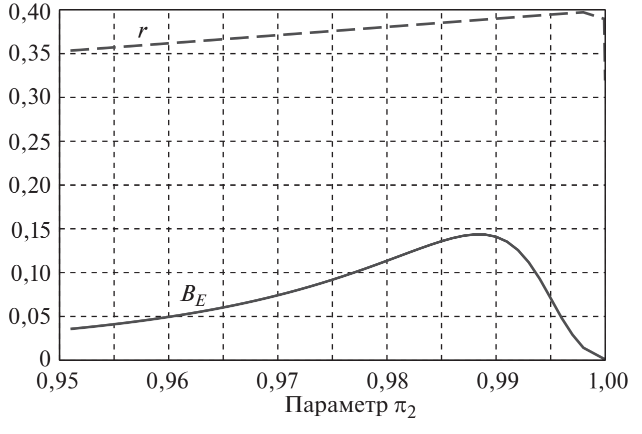

Рис. 5. Зависимость вероятности B_E и коэффициента корреляции r от параметра π_2 при $\pi_1 = 0{,}5$.

воря, только пользуясь данными графиков рис. 4, можно подобрать такую последовательность пар $(\pi_1; \pi_2)$, на которой коэффициент корреляции будет возрастать, а вероятность потерь – убывать.

На рис. 5 отдельно представлена зависимость вероятности потерь эластичных заявок B_E и коэффициента корреляции r от параметра π_2 при π_2 близких к единице, т.е. в том диапазоне, где вероятность потерь достигает максимума. Здесь рассмотрен случай $\pi_1 = 0{,}5$. На графике отчетливо видно, что, в частности, на отрезке $[0{,}99; 0{,}995]$ вероятность потерь резко убывает, тогда как коэффициент корреляции потока продолжает свой рост.

Заметим, что потоки MAP-NC и MAP-PC, предложенные в [10] для иллюстрации роли коэффициента корреляции, аналогично потоку MAP-PAR (21) представимы в виде

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a\gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a\pi_1 & 0 & a(1-\pi_1) \\ a\gamma(1-\pi_2) & 0 & a\gamma\pi_2 \end{bmatrix},$$

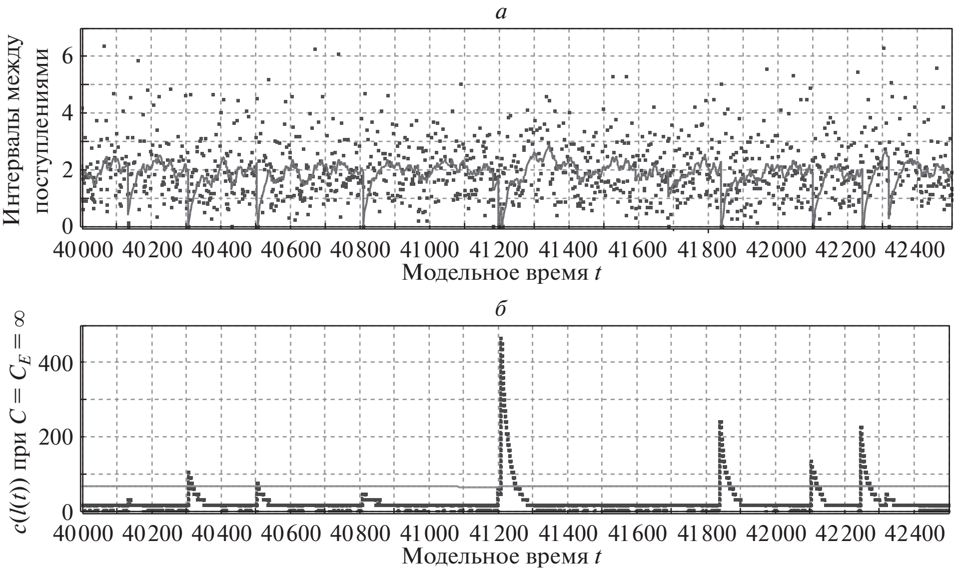

Рис. 6. Нагрузка от эластичного трафика в СМО с MAP-PAR при $(\pi_1, \pi_2) = (0{,}99; 0{,}99)$.

при $\gamma = 225{,}25$, $\pi = (0{,}01; 0{,}01)$ в случае MAP-NC, $\pi = (0{,}99; 0{,}99)$ в случае MAP-PC. Значение a получается при $\lambda = 1{,}000212$ по формуле

$$a = \lambda \frac{\gamma^{-1}(1 - \pi_1) + 2(1 - \pi_2)}{1 - \pi_1 + 1 - \pi_2},$$

а зависимости коэффициента корреляции и среднеквадратичного отклонения данного потока от пары параметров (π_1, π_2) качественно повторяют графики рис. 3. Кроме того, выводы в [11] о связи показателей производительности СМО с корреляцией во входящем потоке для MAP-потока сделаны на основе расчетов, выполненных для серии из трех потоков с одинаковой средней интенсивностью и возрастающими коэффициентами корреляции. Эти потоки также имеют по одному относительно большому диагональному элементу в матрице $\mathbf{Q}_1$, причем данные элементы, как и корреляция, возрастают от первого потока к третьему.

Чтобы лучше понять природу колебаний нагрузки, приводящих к росту вероятности потерь в системе, и выявить их связь с корреляцией в потоке, обратимся к результатам имитационного моделирования, представленным на рис. 6–8. Результаты получены с помощью специально разработанной в среде OMNeT++ модели рассматриваемой СМО, которая подробно описана в [12]. На графиках показаны фрагменты реализации имитационной модели, а именно: интервалы между поступлениями эластичных заявок (рис. 6,*а*, 7,*а* и 8,*а*; непрерывной линией показано скользящее среднее значение) и соответствующая мгновенная предложенная нагрузка, измеряемая как число занятых эластичными заявками единиц ресурса в системе неограниченной емкости (рис. 6,*б*, 7,*б* и 8,*б*; непрерывной линией показано среднее значение). Здесь, как и ранее, $c = 15$, а в качестве входящего потока эластичных заявок взят MAP-PAR (21) с $\lambda = 1$ и различными значениями параметров (π_1, π_2).

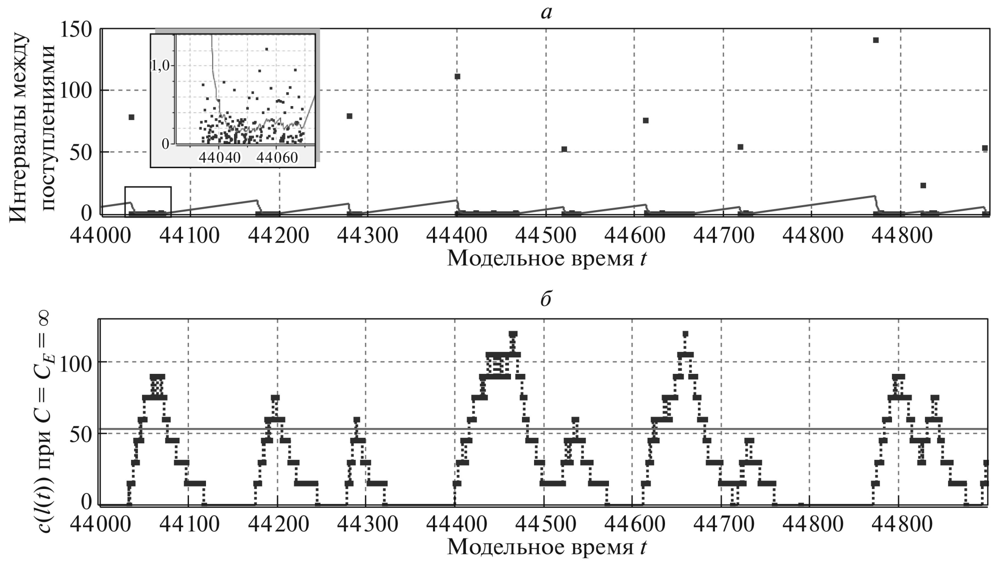

Рис. 7. Нагрузка от эластичного трафика в СМО с MAP-PAR при $(\pi_1, \pi_2) = (0; 0{,}99)$.

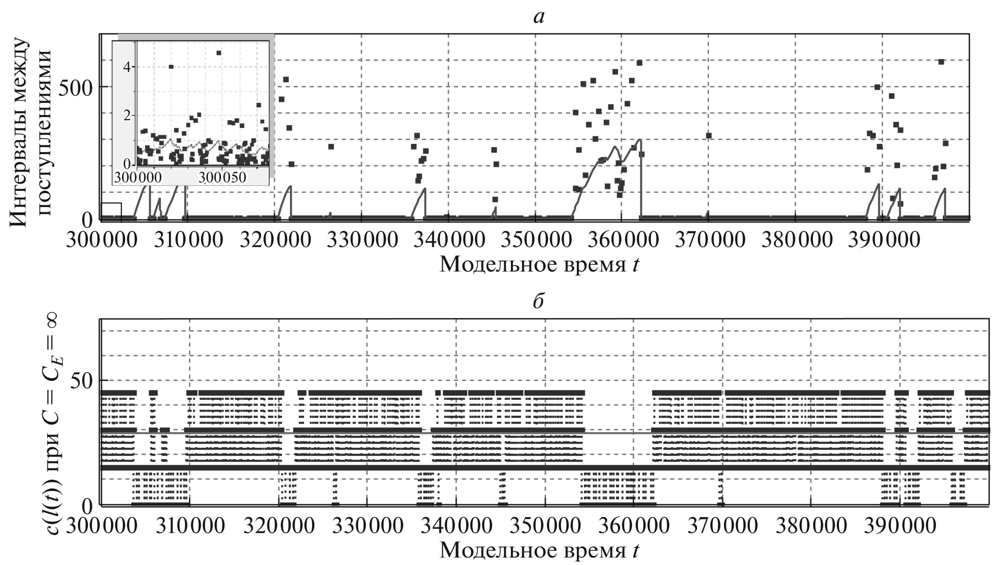

Рис. 8. Нагрузка от эластичного трафика в СМО с MAP-PAR при $(\pi_1, \pi_2) = (0{,}9; 0{,}9999)$.

На рис. 6 представлен фрагмент реализации модели при $(\pi_1, \pi_2) = (0{,}99; 0{,}99)$, $a = 2{,}005$. Поток имеет характеристики $r = 0{,}6522367$ и $\sigma = 1{,}2196604$. В точках, где скользящее среднее опускается к нулю, заявки поступают сериями с очень коротким интервалом. Например, около $t = 41838$ в систему поступает серия из 251 заявки за период $\Delta t \approx 1{,}3$. Это объясняется относительно большим значением нижнего диагонального элемента матрицы $\mathbf{Q}_1$, который равен $Q^1_{K,K} = 100a\pi_2 = 198{,}495$. Такой характер поступления заявок, с одной стороны, порождает существенные всплески нагрузки, а с другой – отражается на коэффициенте корреляции. При относительно большой стационарной вероятности соответствующего состояния управляющей марковским потоком цепи q_K (здесь $q_K = 0{,}0024938$) данные всплески нагрузки происходят достаточно часто, чтобы также отразиться на стационарной вероятности потерь, которая в системе ограниченной емкости с данным потоком равна $B_E = 0{,}211593$.

На рис. 7 показан фрагмент реализации модели при $(\pi_1, \pi_2) = (0; 0{,}99)$, $a = 0{,}049505$. Здесь также имеют место всплески нагрузки, однако связаны они с наличием одиночных длительных интервалов между поступлениями (вызванных прохождением управляющей потоком ЦМ через первые четыре состояния) и компенсирующими эти интервалы периодами более концентрированного поступления заявок (скользящее среднее опускается к 0,2). В данном случае $Q^1_{K,K} = 4{,}9009901$ и $q_K = 0{,}2$. Поскольку длительные интервалы – одиночные, корреляция в потоке слабо отрицательная: $r = -0{,}0079719$; среднеквадратичное отклонение велико и составляет $\sigma = 8{,}9376059$. Стационарная вероятность потерь в системе ограниченной емкости с данным потоком равна $B_E = 0{,}049382$.

Наконец, на рис. 8 показан фрагмент реализации модели при $(\pi_1, \pi_2) = (0{,}9; 0{,}9999)$, $a = 0{,}013986$, иллюстрирующий поток с высокой корреляцией ($r = 0{,}7154592$), но отсутствием всплесков нагрузки, приводящих к потерям. Здесь длительные периоды нагрузки средней интенсивности (скользящее среднее около 0,75) сменяются периодами очень слабой нагрузки. В результате вероятность потерь в системе ограниченной емкости с данным потоком сопоставима с показателем в системе с пуассоновским потоком и равна $B_E = 0{,}002305$ (сравним $B_E^{EXP(1)} = 0{,}001228$). Большое значение коэффициента корреляции вызвано не сериями малых интервалов между поступлениями, как на рис. 6, а сериями больших интервалов. Среднеквадратичное отклонение составляет $\sigma = 10{,}107635$, $Q^1_{K,K} = 1{,}3984615$, $q_K = 0{,}7142857$.

Добавим, что приведенный в разделе 4 статьи алгоритм дает существенный выигрыш во времени вычисления и размерности задачи, однако в ряде интересных для приложений диапазонов нагрузочных параметров система (13) оказывается плохо обусловленной. Поэтому часть значений вероятностно-временных характеристик на рис. 2, 4 и 5 были получены путем численного решения непосредственно системы (10).

7. Заключение

В статье представлена система массового обслуживания с неэластичными и эластичными заявками для анализа совместной передачи трафика МВВ и МТС с агрегацией последнего и резервированием ресурсов. На численном примере исследована связь коэффициента корреляции последовательных интервалов между поступлением заявок в марковском потоке с вероятностью потерь в СМО. Показано, что всплески предложенной нагрузки, приводящие к потерям, могут иметь место как при положительной, так и при отрицательной корреляции, и что возможно отсутствие всплесков нагрузки при высокой корреляции во входящем потоке. Таким образом, в рассматриваемой СМО коэффициент корреляции в марковском входящем потоке не может являться надежным индикатором уровня производительности системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ericsson* 5G systems: Enabling the transformation of industry and society. Ericsson white paper, 2017. https://www.ericsson.com/en/white-papers/5g-systems-enabling-the-transformation-of-industry-and-society
2. *Zhan W., Dai L.* Massive Random Access of Machine-to-Machine Communications in LTE Networks: Modeling and Throughput Optimization // IEEE Trans. Wireless Communications. 2018. V. 17. No. 4. P. 2771–2785.
3. *Mancuso V., Castagno P., Sereno M., Marsan M.A.* Slicing Cell Resources: The Case of HTC and MTC Coexistence // IEEE INFOCOM 2019 – IEEE Conf. on Computer Communications. Paris, France. 2019. P. 667–675.
4. *Dawy Z., Saad W., Ghosh A., Andrews J.G., Yaacoub E.* Towards Massive Machine Type Cellular Communications // IEEE Wireless Commun. 2017. V. 24. No. 1. P. 120–128.
5. *Kim D.M., Sørensen R., Mahmood K., Østerbø O., Zanella A., Popovski P.* Data Aggregation and Packet Bundling of Uplink Small Packets for Monitoring Applications // IEEE Network. 2017. V. 31. No. 6. P. 32–38.
6. *Lin C.-Y., Kao H.-W., Tsai M.-H., Chang H.-L.* Gateway-Assisted Two-Stage Radio Access for Machine Type Communication in LTE-Advanced Network // Comput. Commun. 2017. No. 105. P. 79–88.
7. *Gharbieh M., Bader A., ElSawy H., Alouini M.-S., Adinoyi A.* The Advents of Device-to-Device Relaying for Massively Loaded 5G Networks // GLOBECOM 2017 – 2017 IEEE Global Communications Conf. 2017. P. 1–7.
8. *Lucantoni D.M.* New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process // Comm. Statist. Stoch. Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
9. *Наумов В.А.* Марковские модели потоков требований / Сб. Системы массового обслуживания и информатика. М.: Изд-во УДН, 1987. С. 67–73.
10. *Chakravarthy S.R.* Markovian arrival processes / Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. John Wiley & Sons, Inc., 2010.
11. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018.
12. *Yarkina N., Samouylov K., Vishnevskiy V.* Analysis of Resource Sharing Between MBB and MTC Sessions with Data Aggregation Using Matrix-Analytic Methods and Simulation // 21st Int. Conf. DCCN 2018. Moscow, Russia, September 17–21, 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 22.07.2019

После доработки 13.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2020 г. А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук (a.u.aleksandrov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург),
А.Д. СЕМЕНОВ (sashkasem@mail.ru)
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет)

ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ НЕ МЕШАЮТ РАЗМЕЩАТЬ АГЕНТОВ НА ОТРЕЗКЕ: ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ[1]

Рассматривается задача развертывания агентов на отрезке прямой в дискретном времени при наличии запаздывания в каналах связи и переключений и при отсутствии информации о значении запаздывания и о законе переключения. Показано, что ни запаздывания, ни переключения не влияют на сходимость состояний агентов к равномерному размещению на отрезке. Теоретические результаты иллюстрируются численным моделированием. Доказательства основаны как на известных, так и на новых подходах к анализу устойчивости позитивных систем.

Ключевые слова: мультиагентные системы, равномерное размещение, позитивные системы, запаздывание, переключения.

DOI: 10.31857/S0005231020040066

1. Введение

Уже более двух десятилетий задачи сетевого (кооперативного, мультиагентного) управления привлекают внимание исследователей [1–4]. Одна из простых на первый взгляд, но нетривиальных задач связана с равноудаленным развертыванием агентов на сегменте прямой (отрезке) [5–9]. Близкие вопросы рассматривал еще Ж. Дарбу в 1878 г. [10]. В [5] и в ряде последующих работ [6–9] устанавливаются условия достижения цели в случае агентов в виде простых интеграторов. В [8, 9] предлагаются алгоритмы, обеспечивающие размещение агентов за фиксированное время. В [3, 11] также рассматривался случай моделей агентов более высокого порядка (двойные интеграторы, унициклы и др.). Консенсусные протоколы развертывания агентов изучаются в [12] и в многочисленных статьях, ссылающихся на [12]. В [12] предложен

[1] Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146-а).

алгоритм оптимального размещения датчиков в подмножестве $\mathbb{R}^N$ на основе разбиений Вороного. В случае $N = 1$ алгоритм [12] совпадает с алгоритмом [5].

Естественным обобщением является изучение достижимости цели управления при различных усложняющих обстоятельствах, например помехи, недостаток информации, ограничения и т.д. Среди них коммуникационные запаздывания и переключения играют важную роль, поскольку они моделируют реальные инженерные проблемы, типичные для сетевых систем.

Анализ возможности развертывания агентов на сегменте в дискретном времени с учетом запаздывания и переключений и является целью этой статьи. Важным моментом является то, что во многих случаях информация о значении запаздывания и информация о законе переключения отсутствуют. Поэтому предполагается, что запаздывания произвольны, хотя и постоянны. Оказалось, что ни значения запаздывания, ни переключения не влияют на сходимость состояний агентов к эквидистантному размещению на отрезке. Этот теоретический результат иллюстрируется численным моделированием. Доказательства опираются как на известные, так и на недавние подходы к анализу устойчивости позитивных систем [13–16].

Следует заметить, что аналогичная задача исследовалась в [17] для случая, когда динамика агентов моделируется дифференциальными уравнениями. Однако хорошо известно, что если непрерывная модель обладает определенным динамическим свойством, то из этого, вообще говоря, не следует, что такое свойство имеется и у соответствующей дискретной модели. В частности, в [18] отмечалось: “Большинство существующих результатов о синхронизации в сетях агентов общего вида имеет дело с непрерывной моделью времени. При этом многие свойства агентов, на которых было построено обоснование синхронизации в таких сетях, в дискретном случае в принципе не могут иметь места. Более того, в отличие от непрерывного времени, даже в сетях идентичных агентов с линейной динамикой консенсус не всегда может быть достигнут при помощи линейного алгоритма управления. Таким образом, сети с дискретным временем демонстрируют принципиальные отличия от сетей с непрерывным временем.”

Это мотивирует вопрос: “распространимы ли результаты, полученные в [17] для непрерывных моделей, на случай дискретного времени?” В настоящей работе проводится такое исследование с определенной модификацией подходов, применявшихся в [17].

Отметим также, что проблема робастности консенсусных протоколов к коммуникационным запаздываниям изучалась для дискретных моделей в [19, 20]. Было доказано, что свойство удержания группы в выпуклой оболочке “лидеров” не теряется при наличии коммуникационных запаздываний.

Однако задача, исследовавшаяся в указанных работах, отличается от задачи, решаемой в настоящей статье. Кроме того, в [19, 20] имеется довольно сильное ограничение на коммуникационную топологию: предполагается, что каждый агент получает сигнал хотя бы от одного из лидеров. В задаче, рассматриваемой в данной статье, такого ограничения нет.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведена постановка задачи. Некоторые вспомогательные факты о положительных системах представлены в разделе 3. В разделе 4 приведены основные результаты работы. Поведение замкнутой системы иллюстрируется результатами численного моделирования в разделе 5.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу равномерного размещения на отрезке группы мобильных агентов, функционирующих в дискретном времени. Под агентами понимаются пронумерованные точки на прямой, которые способны менять свое расположение.

Через $x_i(k)$ обозначим координату положения i-го агента в момент времени k, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, n$. Будем считать, что динамика агентов описывается разностными уравнениями

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $u_i = u_i(k)$ — дискретный закон управления (протокол). Заметим, что дискретные мультиагентные системы вида (1) рассматривались, например, в [3].

Пусть на прямой задан отрезок $[a, b]$. Требуется выбрать протокол, обеспечивающий сходимость при $k \to \infty$ положений агентов к равномерному размещению на отрезке. При построении протокола предполагаем, что каждому i-му агенту доступна информация о расстояниях до одного из его соседей слева (до агента с номером меньшим, чем i) и до одного из его соседей справа (до агента с номером большим, чем i), при этом в число соседей включаются и два статичных агента с индексами 0 и $n+1$ (считаем, что $x_0(k) = a$, $x_{n+1}(k) = b$, $k = 0, 1, \dots$).

Известно (см. [5, 6]), что если каждый i-й агент получает информацию о его расстояниях до ближайших соседей (до агентов с номерами $i-1$ и $i+1$), то управления можно выбрать в виде

$$u_i(k) = \frac{1}{2}\left((x_{i-1}(k) - x_i(k)) + (x_{i+1}(k) - x_i(k))\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{1}{2}(x_{i-1}(k) + x_{i+1}(k)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Замечание 1. Следует отметить, что в [6] рассматривался случай, когда динамика агентов задается уравнениями

$$x_i(k+1) = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

а каждый агент знает положения двух своих ближайших соседей. Предлагалось использовать управление вида

$$u_i(k) = \frac{1}{2}(x_{i-1}(k) + x_{i+1}(k)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Однако, если подставить управление (5) в систему (4), то придем к той же самой замкнутой системе (3).

В [5, 6] на основе анализа спектра матрицы системы (3) доказано, что эта система имеет асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\tilde{x} = a(1, \dots, 1)^\top + \frac{b-a}{n+1}(1, \dots, n)^\top. \tag{6}$$

Это положение равновесия соответствует равномерному размещению агентов на отрезке $[a, b]$.

Цель данной работы — исследование влияния коммуникационного запаздывания и переключения связей в коммуникационном графе (замены сигналов от ближайших соседей в уравнениях (3) сигналами от других агентов) на сходимость агентов к равномерному размещению. Отметим, что данная проблема является нетривиальной, поскольку хорошо известно, что введение запаздывания и переключений режимов функционирования в широком классе случаев приводит к потере устойчивости (см. [21, 22]).

Тем не менее в настоящей статье будут построены протоколы, для которых асимптотическая устойчивость положения равновесия (6) изучаемой мультиагентной системы сохраняется при любом постоянном коммуникационном запаздывании и при любом законе переключения топологии связей.

3. Некоторые свойства дискретных линейных позитивных систем

В данном разделе приведем известные условия устойчивости дискретных линейных позитивных систем, которые далее будут использоваться для решения поставленной задачи.

Динамическая система называется позитивной, если ее движения с неотрицательными начальными условиями остаются неотрицательными при возрастании времени [13, 23]. Такие системы широко и эффективно используются для моделирования биологических, экономических, химических процессов, а также в задачах сетевого управления (см., например, [13, 23–28]).

Пусть задана линейная стационарная система в дискретном времени

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{7}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы, A — постоянная матрица.

Известно [23], что система (7) позитивна тогда и только тогда, когда матрица A является неотрицательной.

У т в е р ж д е н и е 1 [25]. *Пусть A — неотрицательная матрица. Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

а) *система* (7) *асимптотически устойчива;*

б) *все собственные числа матрицы A по модулю меньше единицы;*

в) *существует вектор $\xi > 0$ такой, что*

$$A\xi < \xi; \tag{8}$$

г) *существует вектор $\eta > 0$ такой, что*

$$A^\top \eta < \eta; \tag{9}$$

д) *существует диагональная положительно определенная матрица* D *такая, что матрица* $A^\top DA - A$ *отрицательно определена.*

Здесь и далее неравенства для векторов понимаются покомпонентно.

С использованием утверждения 1 нетрудно показать (см. [25]), что для асимптотически устойчивой системы (7) функции Ляпунова можно построить по следующим формулам:

$$V_1(x) = \max_{i=1,\dots,n} \frac{|x_i|}{\xi_i}, \quad V_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |x_i|, \quad V_3(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\eta_i} x_i^2, \tag{10}$$

где ξ_i и η_i — компоненты положительных векторов ξ и η, для которых выполнены неравенства (8) и (9) соответственно.

Далее рассмотрим позитивную систему с переключениями

$$x(k+1) = A^{(\sigma)} x(k) \tag{11}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x(k+1) = A^{(s)} x(k), \quad s = 1, \dots, N. \tag{12}$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(k) : \{0, 1, 2, \dots\} \mapsto \{1, \dots, N\}$ — функция, определяющая порядок активности подсистем (закон переключения), а $A^{(1)}, \dots, A^{(N)}$ — постоянные неотрицательные матрицы.

Утверждение 2 [25, 29]. *Если существует вектор* $\xi > 0$ *такой, что*

$$A^{(s)} \xi < \xi, \quad s = 1, \dots, N,$$

то система (11) *асимптотически устойчива при любом законе переключения.*

Нетрудно проверить (см. [29]), что при выполнении условия утверждения 2 для семейства (12) в качестве общей функции Ляпунова можно использовать первую из функций (10).

Рассмотрим теперь линейную дискретную систему с запаздыванием

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-r). \tag{13}$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, A и B — постоянные матрицы, r — целое неотрицательное запаздывание.

Известно [13], что система (13) позитивна тогда и только тогда, когда A и B — неотрицательные матрицы.

Утверждение 3 [25]. *Пусть* A *и* B *— неотрицательные матрицы. Тогда для того, чтобы система* (13) *была асимптотически устойчива при любом целом неотрицательном значении запаздывания* r, *необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы* $A + B$ *были по модулю меньше единицы.*

Замечание 2. В [14–16, 30] были предложены различные подходы к построению функционалов Ляпунова–Красовского для позитивных систем вида (13).

4. Основные результаты

4.1. Построение протокола более общего вида

Будем считать, что каждый агент получает сигналы от некоторого соседа слева и некоторого соседа справа (не обязательно ближайших соседей). Под соседством будем понимать соседство по номеру. При этом предполагаем, что каждый агент знает, сколько агентов расположено между ним и тем соседом, от которого поступает сигнал, однако ему недоступна информация об общем количестве агентов в системе. Например, может иметь место ситуация, когда каждый агент знает свой номер и сообщает его своим соседям.

Тогда закон управления можно выбрать в виде

$$u_i(k) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}(x_{m_i}(k) - x_i(k)) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}(x_{l_i}(k) - x_i(k)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь $0 \leqslant m_i < i$, $i < l_i \leqslant n + 1$.

Подставляя управления (14) в уравнения (1), приходим к системе

$$x_i(k+1) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\, x_{m_i}(k) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\, x_{l_i}(k), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Т е о р е м а 1. *Состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (15).

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2–4 приведены в Приложении.

4.2. Система с коммуникационным запаздыванием

Предположим теперь, что сигналы от соседей поступают с некоторым запаздыванием. Тогда закон управления принимает вид

$$u_i(k) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}(x_{m_i}(k-r) - x_i(k)) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}(x_{l_i}(k-r) - x_i(k)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i < i$, $i < l_i \leqslant n + 1$, r — целое неотрицательное запаздывание.

Рассмотрим соответствующую замкнутую систему

$$x(k+1) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\, x_{m_i}(k-r) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\, x_{l_i}(k-r), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Т е о р е м а 2. *При любом целом неотрицательном значении запаздывания состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (16).

З а м е ч а н и е 3. Нетрудно проверить, что сходимость агентов к равномерному размещению будет иметь место и в случае, когда сигналы от разных объектов поступают с разными значениями запаздывания.

4.3. Система с переключающимися связями

Рассмотрим систему с переключающимся коммуникационным графом. Считаем, что связи между агентами могут включаться и выключаться в произвольные моменты времени. При потере связи с соседом слева (справа) агент выбирает какого-то другого соседа слева (справа).

Тогда закон управления имеет вид

$$u_i(k) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{m_i^{(\sigma)}}(k) - x_i(k)\Big) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{l_i^{(\sigma)}}(k) - x_i(k)\Big), \\ i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i^{(\sigma)} < i$, $i < l_i^{(\sigma)} \leqslant n+1$, а $\sigma = \sigma(k)$ — закон переключения.

Получим замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{m_i^{(\sigma)}}(k) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{l_i^{(\sigma)}}(k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(s)} - i}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}} x_{m_i^{(s)}}(k) + \frac{i - m_i^{(s)}}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}} x_{l_i^{(s)}}(k), \\ i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Теорема 3. *При любом законе переключения состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (17).

4.4. Система с переключающимися связями и коммуникационным запаздыванием

Покажем теперь, что сходимость агентов к равномерному размещению сохраняется и при одновременном влиянии коммуникационного запаздывания и переключения связей в коммуникационном графе.

Пусть закон управления имеет вид

$$u_i(k) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{m_i^{(\sigma)}}(k-r) - x_i(k)\Big) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{l_i^{(\sigma)}}(k-r) - x_i(k)\Big), \\ i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i(\sigma) < i$, $i < l_i(\sigma) \leqslant n+1$, r — целое неотрицательное запаздывание, а $\sigma = \sigma(k)$ — закон переключения.

Получим замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{m_i^{(\sigma)}}(k-r) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{l_i^{(\sigma)}}(k-r), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(s)} - i}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}}\, x_{m_i^{(s)}}(k-r) + \frac{i - m_i^{(s)}}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}}\, x_{l_i^{(s)}}(k-r), \tag{20}$$
$$i = 1,\dots,n, \quad s = 1,\dots,N.$$

Теорема 4. При любом целом неотрицательном значении запаздывания и при любом законе переключения состояние (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (19).

Замечание 4. Теорему 4 нетрудно обобщить на случай, когда сигналы от разных объектов поступают с разными значениями запаздывания.

Замечание 5. Предложенные в настоящем разделе подходы могут применяться и в случае, когда агенты и отрезок заданы в пространстве произвольной размерности, при условии, что протоколы управления покоординатно развязаны, т.е.

$$x_i(k+1) = u_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $x_i(k), u_i \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$.

Замечание 6. С использованием подхода, предложенного в [6], результаты настоящей статьи можно распространить на задачу равномерного размещения агентов на окружности.

5. Пример

Рассмотрим мультиагентную систему, состоящую из семи агентов ($n = 7$), динамика которых моделируется уравнениями (1). Требуется равномерно разместить этих агентов на отрезке $[0,1]$.

Будем считать, что величина запаздывания $r = 5$, а $x(k) = (0{,}3; 0{,}22; 0{,}55; 0{,}45; 0{,}65; 0{,}95; 0{,}6)^\top$ при $k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

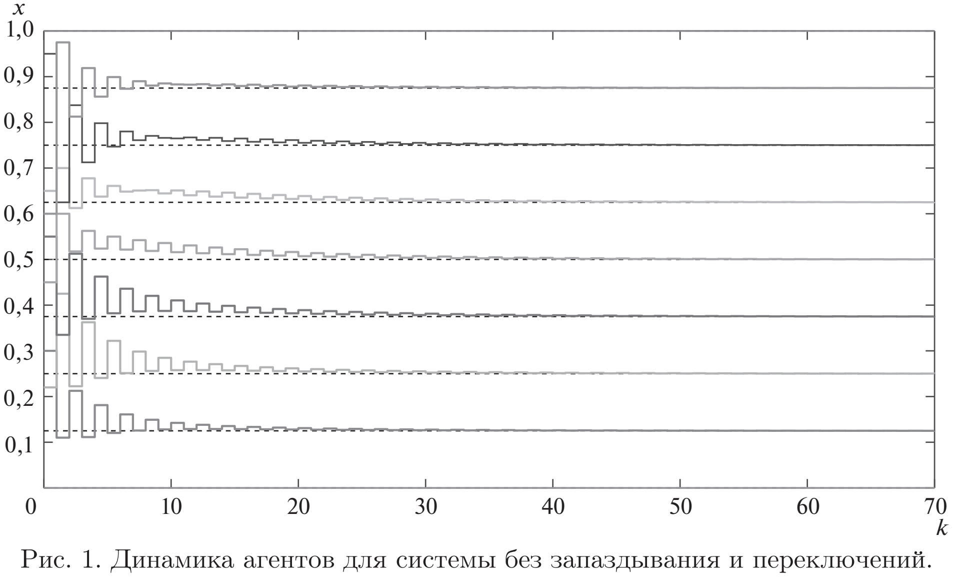

Рис. 1. Динамика агентов для системы без запаздывания и переключений.

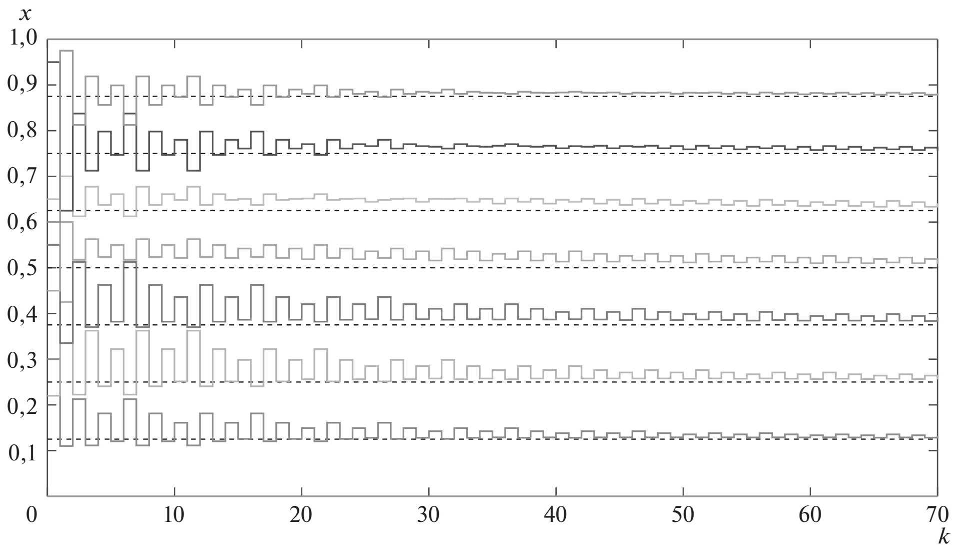

Рис. 2. Динамика агентов для системы с запаздыванием.

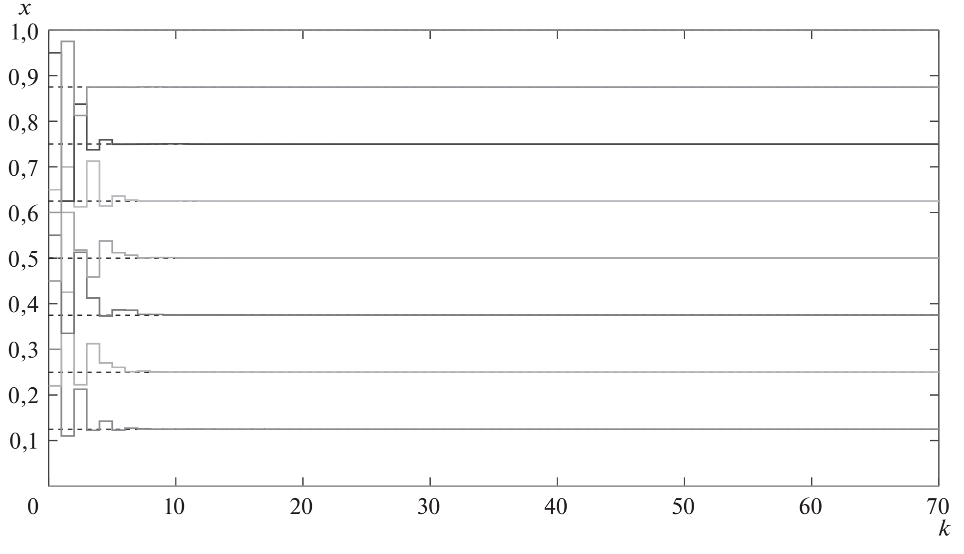

Рис. 3. Динамика агентов для системы с переключениями.

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1–4.

Рисунок 1 соответствует случаю, когда в системе отсутствуют запаздывания и переключения, каждый агент получает информацию от своих ближайших соседей, а управления определяются по формуле (2).

На рис. 2 приведены графики компонент решения системы с коммуникационным запаздыванием. Считаем, что управления имеют вид

$$u_i(k) = \frac{1}{2}\left((x_{i-1}(k-5) - x_i(k)) + (x_{i+1}(k-5) - x_i(k))\right), \quad i = 1, \ldots, 7.$$

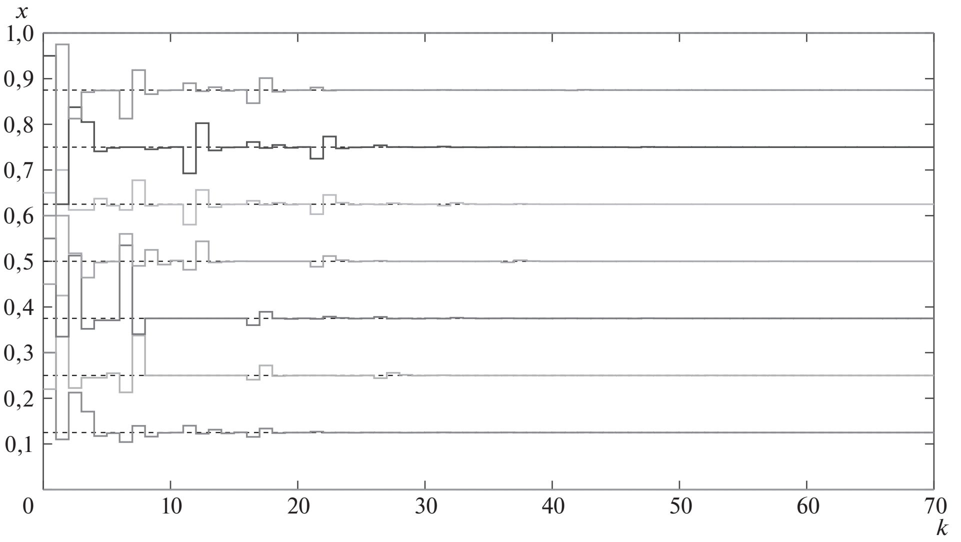

Рис. 4. Динамика агентов для системы с запаздыванием и переключениями.

Далее предполагаем, что в системе отсутствуют запаздывания, но происходят переключения коммуникационной топологии. В качестве начальной выбирается топология, соответствующая сигналам от ближайших соседей. Количество итераций между последовательными моментами переключений случайным образом выбираются из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Графики компонент решения соответствующей замкнутой системы представлены на рис. 3.

Рисунок 4 соответствует системе с переключающимися связями и коммуникационным запаздыванием.

Результаты моделирования согласуются с полученными в статье теоретическими выводами. Введение в систему запаздывания и переключений не нарушает сходимости агентов к равномерному размещению.

6. Заключение

Рассмотрена задача развертывания агентов по отрезку прямой в дискретном времени при наличии запаздывания в каналах связи и переключений и при отсутствии информации о значении запаздывания и о законе переключения. Показано, что ни запаздывание, ни переключения не влияют на факт сходимости состояний агентов к равномерному (эквидистантному) размещению на отрезке. Теоретические результаты иллюстрируются численным моделированием. Доказательства основаны как на известных, так и на новых подходах к анализу устойчивости позитивных систем. Хотя в статье рассматривается идеализированная задача, полученные при ее решении результаты могут быть распространены на более сложные и практически важные ситуации.

В качестве возможных направлений дальнейших исследований можно указать на нахождение оценок скорости сходимости агентов к равномерному размещению, а также на распространение полученных результатов на системы с переменным запаздыванием.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Нетрудно проверить, что вектор (6) является положением равновесия системы (15).

Запишем эту систему в векторной форме

$$x(k+1) = Ax(k) + c,$$

где c – постоянный вектор, A – постоянная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, причем $a_{im_i} = (l_i - i)/(l_i - m_i)$, если $m_i \neq 0$, $a_{il_i} = (i - m_i)/(l_i - m_i)$, если $l_i \neq n+1$, а остальные элементы i-й строки равны нулю, $i = 1, \ldots, n$.

С помощью замены переменных

$$y(k) = x(k) - \tilde{x} \tag{П.1}$$

получаем систему в отклонениях

$$y(k+1) = Ay(k), \tag{П.2}$$

которая является позитивной.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$, где

$$\xi_i = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{П.3}$$

Выберем некоторое $i \in \{1, \ldots, n\}$ и скалярно умножим i-ю вектор-строку матрицы A на вектор ξ. Если $m_i \neq 0$ и $l_i \neq n+1$, то справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\xi_{m_i} + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\xi_{l_i} =$$
$$= \xi_i + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\left(\frac{1}{2^i} + \ldots + \frac{1}{2^{l_i - 1}}\right) - \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\left(\frac{1}{2^{m_i}} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}}\right) =$$
$$= \xi_i + \frac{2^{1-i}}{l_i - m_i}\left((i - m_i)\left(1 - 2^{i - l_i}\right) - (l_i - i)\left(2^{i - m_i} - 1\right)\right) =$$
$$= \xi_i + \frac{2^{1-i}}{l_i - m_i}\left((l_i - m_i)\left(1 - 2^{i - l_i}\right) - (l_i - i)\left(2^{i - m_i} - 2^{i - l_i}\right)\right) =$$
$$= \xi_i + 2^{1 - l_i}(l_i - i)\left(\frac{2^{l_i - i} - 1}{l_i - i} - \frac{2^{l_i - m_i} - 1}{l_i - m_i}\right).$$

Заметим, что $l_i - m_i > l_i - i$, а последовательность $\{(2^k - 1)/k\}$ строго возрастает. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j < \xi_i. \tag{П.4}$$

Очевидно, что неравенство (П.4) выполняется и в случаях, когда $m_i = 0$ или $l_i = n + 1$. Таким образом, получаем

$$A\xi < \xi. \tag{П.5}$$

Применяя утверждение 1, приходим к выводу, что система (П.2) асимптотически устойчива. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для системы (16) соответствующая система в отклонениях представима в виде

$$y(k+1) = Ay(k-r), \tag{П.6}$$

где матрица A совпадает с матрицей системы (П.2). С использованием неравенства (П.5) и утверждений 1 и 3 получаем, что система (П.6) асимптотически устойчива при любом целом неотрицательном запаздывании. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Производя в (17) замену переменных (П.1), получаем систему с переключениями

$$y(k+1) = A^{(\sigma)}y(k) \tag{П.7}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$y(k+1) = A^{(s)}y(k), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{П.8}$$

Здесь $A^{(s)} = \{a_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1}^{n}$ — постоянные матрицы такие, что

$$a_{im_i^{(s)}}^{(s)} = \left(l_i^{(s)} - i\right) / \left(l_i^{(s)} - m_i^{(s)}\right),$$

если $m_i^{(s)} \neq 0$, $a_{il_i^{(s)}}^{(s)} = (i - m_i^{(s)})/(l_i^{(s)} - m_i^{(s)})$, если $l_i^{(s)} \neq n+1$, а остальные элементы i-й строки равны нулю, $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, N$.

Пусть компоненты положительного вектора ξ определяются по формуле (П.3). Тогда (см. доказательство теоремы 1) справедливы соотношения

$$A^{(s)}\xi < \xi, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{П.9}$$

Применяя утверждение 2, приходим к выводу, что система (П.7) асимптотически устойчива при любом законе переключения. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В данном случае с помощью замены переменных (П.1) получаем систему с переключениями и запаздыванием

$$y(k+1) = A^{(\sigma)}y(k-r) \tag{П.10}$$

и соответствующее семейство подсистем

$$y(k+1) = A^{(s)}y(k-r), \quad s = 1, \ldots, N.$$

Здесь матрицы $A^{(s)}$ совпадают с матрицами подсистем семейства (П.8).

Далее вводим расширенный вектор состояния $z(k) = (y^\top(k), y^\top(k-1), \ldots$ $\ldots, y^\top(k-r))^\top$. Тогда система (П.10) может быть записана в виде

$$z(k+1) = C^{(\sigma)} z(k), \tag{П.11}$$

где

$$C^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{(s)} \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, N,$$

а I_n — единичная матрица порядка n.

Пусть $\zeta = (\zeta_1^\top, \ldots, \zeta_{r+1}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n(r+1)}$. Здесь $\zeta_j = \xi + \delta(j-1)\nu$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, r+1$, а компоненты положительного вектора ξ определяются по формуле (П.3), $\nu = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$, δ — положительный параметр.

Учитывая выполнение неравенств (П.9), получаем, что при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$C^{(s)}\zeta < \zeta, \quad s = 1, \ldots, N.$$

Следовательно (см. утверждение 2), система (П.11) асимптотически устойчива при любом законе переключения. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ren W., Cao W.* Distributed Coordination of Multi-Agent Networks. London: Springer-Verlag, 2011.
2. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton and Oxford: Princeton Univ. Press, 2010.
3. *Martinez S., Bullo F.* Optimal sensor placement and motion coordination for target tracking // Automatica. 2006. V. 42. P. 661–668.
4. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

   Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and Methods of Network Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.
5. *Wagner I.A., Bruckstein A.M.* Row Straightening via Local Interactions // Circuits Syst. Signal Process. 1997. V. 16. No. 2. P. 287–305.
6. *Щербаков П.С.* Управление формациями. Схема Ван Лоуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. 2010. Вып. 30.1. С. 681–696.

   Shcherbakov P.S. Formation Control. The Van Loan Scheme and Other Algorithms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 681–696.
7. *Квинто Я.И., Парсегов С.Э.* Равноудаленное расположение агентов на отрезке. Анализ алгоритма и его обобщения // АиТ. 2012. № 11. С. 30–41.

   Kvinto Y.I., Parsegov S.E. Equidistant Arrangement of Agents on Line. Analysis of the Algorithm and Its Generalization // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1784–1793.

8. *Parsegov S.E., Polyakov A.E., Shcherbakov P.S.* Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment // Proc. 51st IEEE Conf. Decision Control. 2012. P. 7732–7737.

9. *Парсегов С.Е., Поляков А.Е., Щербаков П.С.* Достижение равноудаленного распределения агентов на отрезке за заданное время // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 524–528.

10. *Darboux J.G.* Sur un probleme de geometrie elementaire // Bull. Sci. Math. 1878. V. 2. No. 1. P. 298–304.

11. *Проскурников А.В., Парсегов С.Э.* Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // АиТ. 2016. № 7. С. 152–165.

    Proskurnikov A.V., Parsegov S.E. Problem of Uniform Deployment on a Line Segment for Second-Order Agents // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 7. P. 1248–1258.

12. *Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F.* Coverage control for mobile sensing networks // IEEE Trans. Robot. Autom. 2004. V. 20. No. 2. P. 243–255.

13. *Farina L., Rinaldi S.* Positive linear systems: theory and applications. New York: Wiley, 2000.

14. *Hofbauer J., So J.W.* Diagonal Dominance and Harmless Off-Diagonal Delays // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 2675–2682.

15. *Wu L., Lam J., Shu Z., Du B.* On Stability and Stabilizability of Positive Delay Systems // Asian J. Control. 2009. V. 11. No. 2. P. 226–234.

16. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory Appl. 2018. V. 12. No. 6. P. 812–818.

17. *Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A.* Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter // IEEE Trans. Autom. Control. Feb. 2020. V. 65. Is. 2. P. 794–800. DOI: 10.1109/TAC.2019.2918995

18. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури–Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // АиТ. 2018. № 6. С. 119–139.

    Proskurnikov A.V., Matveev A.S. Tsypkin and Jury–Lee Criteria for Synchronization and Stability of Discrete-time Multiagent Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1057–1073.

19. *Lin P., Ren W.* Constrained consensus in unbalanced networks with communication delays // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 3. P. 775–781.

20. *Xiong Q., Lin P., Ren W., Yang Ch., Gui W.* Containment control for discrete-time multiagent systems with communication delays and switching topologies // IEEE Trans. Cybernet. 2019. V. 49. No. 10. P. 3827–3830.

21. *Niculescu S.* Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Lecture Notes in Control and Information Science. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.

22. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. No. 4. P. 545–592.

23. *Berman A., Plemmons R.J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1994.

24. *Blanchini F., Colaneri P., Valcher M.E.* Switched positive linear systems // Foundat. Trends Syst. Control. 2015. V. 2. No. 2. P. 101–273.

25. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston: Birkhauser, 1999.

26. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Platonov A.V.* Ultimate Boundedness Conditions for a Hybrid Model of Population Dynamics // Proc. 21st Mediterranean Conf. Control Autom. 2013. P. 622–627.

27. *Valcher M.E., Zorzan I.* On the consensus of homogeneous multiagent systems with positivity constraints // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 62. No. 10. P. 5096–5110.

28. *Shorten R.N., Wirth F., Leith D.* A positive systems model of TCP-like congestion control // IEEE Trans. Networking. 2006. V. 14. No. 3. P. 616–629.

29. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // АиТ. 2016. № 5. С. 37–49.

    Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V. On Stability of Solutions for a Class of Nonlinear Difference Systems with Switching // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 779–788.

30. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for discrete-time positive systems with delay // Syst. Control Lett. 2014. V. 63. P. 63–67.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 17.02.2019

После доработки 07.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019

© 2020 г. А.А. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
О.Г. АНДРИАНОВА, канд. физ.-мат. наук (andrianovaog@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ[1]

Рассматриваются задачи синтеза робастных статических регуляторов для дискретных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями, на вход которых поступают случайные возмущения. Рассматриваемые регуляторы стабилизируют объект управления для всех возможных значений неопределенности из рассматриваемого множества параметров и обеспечивают желаемый уровень подавления случайных внешних возмущений. Приводится численный пример.

Ключевые слова: робастное управление, матричные неравенства, выпуклая оптимизация, средняя анизотропия, параметрические неопределенности.

DOI: 10.31857/S0005231020040078

1. Введение

Задачи синтеза статических регуляторов для линейных стационарных систем стали объектом широкого исследования в конце 1990-х — начале 2000-х гг. [1–3]. Основным недостатком данной группы методов являлось то, что они имели дело с системами с точно известными параметрами и не учитывали возможные параметрические неопределенности, которые неизбежно присутствуют в математической модели системы. Методы синтеза, разработанные для полностью определенных систем не могли гарантировать заданный показатель качества или даже устойчивость замкнутой системы в случае, если параметры реального объекта отклонялись от параметров модели. Как следствие, при синтезе систем управления робастность приобрела огромную важность. Это привело к появлению цикла работ, посвященных синтезу робастных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями. Особое внимание в публикациях уделялось рассмотрению задач подавления внешних возмущений для систем с политопическими и ограниченными по норме неопределенностями. Целью управления в таких задачах являлось обеспечение робастной устойчивости замкнутой системы и желаемого качества процессов, протекающих в системе, с учетом действующих на систему

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-38-00076).

внешних возмущений. Решению таких задач робастного управления посвящены публикации [4, 5].

Для линейных стационарных систем наиболее известными методами решения задач подавления внешних возмущений, в которых критерием качества является норма передаточной функции замкнутой системы от возмущения к управляемому выходу, являются $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийный подходы. Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять тот или иной класс внешних возмущений, действующих на систему.

Так, $\mathcal{H}_2$ регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Задача построения робастного $\mathcal{H}_2$ управления была решена, например, в [6].

В случае $\mathcal{H}_\infty$ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия). Решение задач субоптимального управления по состоянию для дискретных систем с ограниченными по норме неопределенностями приведено в [5, 7]. Задачи управления по выходу были решены в [8, 9], а решения аналогичных задач для неопределенных систем с задержками по времени можно найти в [9, 10]. Главным недостатком $\mathcal{H}_\infty$ подхода является то, что минимум ищется по всем частотам. Регуляторы, полученные с использованием $\mathcal{H}_\infty$ подхода, как правило, излишне консервативны, что приводит к большим энергетическим затратам на реализацию закона управления исполнительным устройством. Для преодоления этого недостатка могут быть использованы смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы или так называемый метод формирования контура [11]. Метод формирования контура заключается в использовании дополнительных фильтров, отсекающих определенный диапазон частот. Однако такой подход является строго индивидуальным для каждого объекта и требует глубокого исследования. Смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы позволяют минимизировать $\mathcal{H}_\infty$ норму передаточной функции от возмущения к одному управляемому выходу с ограничением на $\mathcal{H}_2$ норму передаточной функции от возмущения к другому выходу. Смешанный $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ подход к управлению системами с неопределенностями был применен в [12].

Аналогично теории $\mathcal{H}_\infty$ управления анизотропийная теория изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений. В отличие от перечисленных выше подходов анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов [13–16]. Были преодолены недостатки LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов [17]. Применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов [18]. При этом случаи $\mathcal{H}_2$ и

$\mathcal{H}_\infty$ управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Основываясь на изложенном, разработка и развитие теории робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенных систем является важной проблемой. Задача синтеза робастных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями и анизотропийным критерием качества была впервые решена в [19, 20], где параметры регулятора определялись из решения связанных между собой нелинейных матричных уравнений, что приводило к значительным сложностям при численной реализации разработанной методики. Данный недостаток был преодолен при применении матричных неравенств. Условия синтеза статических и динамических регуляторов на основе методов выпуклой оптимизации были сформулированы в [18, 21]. Решение одной из задач робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенной дискретной системы на основе матричных неравенств и с использованием методов выпуклой оптимизации можно найти в [22]. Публикация [22] посвящена синтезу субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию для систем с дробно-линейными параметрическими неопределенностями. Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора для системы с ограниченными по норме неопределенностями в рассматриваемой в настоящей статье постановке с использованием матричных неравенств ранее была решена только в классе алгебро-разностных или дескрипторных систем [23]. Можно показать, что в определенных случаях параметрические неопределенности объекта управления можно представить как в виде дробно-линейных, так и в виде ограниченных по норме неопределенностей, рассмотренных в настоящей статье. Однако данные классы не тождественны. Отсутствие на текущий момент удобных вычислительных методик синтеза робастных анизотропийных регуляторов для параметрически неопределенных обыкновенных (разностных) систем в рассматриваемой постановке и необходимость разработки такой теории явилось главным мотивирующим фактором при написании данной статьи. Авторами рассматриваются задачи синтеза робастного анизотропийного управления для обыкновенной дискретной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. При этом решаются два типа задач: при полном измерении вектора состояния и при синтезе статического регулятора по выходу.

Данная статья имеет следующую структуру. В разделе 2 даны основные сведения из теории анизотропийного управления. В разделе 3 приводится подробная постановка решаемых задач. Раздел 4 посвящен решению поставленных задач. Численные эксперименты приведены в разделе 5.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $\mathbb{R}^{m\times n}$ – множество матриц размеров $m \times n$ с вещественными коэффициентами; I_n – единичная матрица размеров $n \times n$; Z^* – эрмитово сопряжение матрицы $Z = [z_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$: $Z^* = [z^*_{ji}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$; $\rho(A)$ – спектральный радиус квадратной матрицы A: $\rho(A) = \max_j |\lambda_j(A)|$; $\overline{\sigma}(A)$ – максимальное сингулярное число матрицы A: $\overline{\sigma}(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$; $\mathrm{sym}\,(A) = A + A^\top$; $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания; $\widehat{\mathcal{F}}(\omega) = \lim_{\rho\to 1-0} \mathcal{F}(\rho e^{i\omega})$ – угловое граничное значение комплекснозначной матричной функции.

2. Основные теоретические сведения

Для дальнейшего изложения и решения поставленных выше задач понадобятся некоторые теоретические сведения, которые рассмотрим в настоящем разделе. К таким сведениям относятся понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии случайной последовательности и анизотропийная норма системы [13–16]. Кроме того, приведем формулировки некоторых теорем из анизотропийного анализа обыкновенных дискретных систем, используемые для преобразования матричных неравенств.

Будем полагать, что входной сигнал $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является стационарной гауссовской последовательностью случайных m-мерных векторов. Составим из элементов последовательности W на отрезке $[0, N-1]$ случайный вектор $W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0^\top & \cdots & w_{N-1}^\top \end{bmatrix}^\top$. Предполагается, что вектор $W_{0:N-1}$ абсолютно непрерывно распределен для каждого $N > 0$.

Определение 1. *Анизотропией $\mathbf{A}(W_{0:N-1})$ случайного вектора $W_{0:N-1}$ называют минимальное значение относительной энтропии по отношению к гауссовским распределениям в $\mathbb{R}^{mN}$ с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей.*

Анизотропию вектора можно вычислить по формуле

$$\mathbf{A}(W_{0:N-1}) = \frac{mN}{2} \ln\left(\frac{2\pi e}{mN}\mathbf{E}(|W_{0:N-1}|^2)\right) - h(W_{0:N-1}),$$

где $h(W_{0:N-1}) = \mathbf{E}[-\ln f_N(W_{0:N-1})] = -\int_{\mathbb{R}^{mN}} f_N(w)\ln f_N(w)dw$ – дифференциальная энтропия, $f_N : \mathbb{R}^{mN} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – плотность распределения вероятностей вектора $W_{0:N-1}$.

Определение 2. *Средней анизотропией последовательности W называют среднюю интенсивность анизотропии в единицу времени:*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим устойчивую линейную дискретную систему $\mathcal{F}$, заданную в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \tag{2.2}$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \tag{2.3}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – стационарная гауссовская последовательность m-мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ ($a \geqslant 0$) и нулевым средним, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – выход системы.

Для заданной системы $\mathcal{F}$ с входным сигналом $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ среднеквадратичный коэффициент усиления определен в виде

$$Q(\mathcal{F}, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}, \tag{2.4}$$

где $\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|y(k)|^2}$ – мощностная норма последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Определение 3. Для заданной величины $a \geqslant 0$ анизотропийной нормой системы $\mathcal{F}$ называют

$$|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(\mathcal{F}, W). \tag{2.5}$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a$ задает стохастический коэффициент усиления системой $\mathcal{F}$ входного сигнала W.

Рассмотрим два предельных случая для значения средней анизотропии [13, 14]. Если $\overline{\mathbf{A}}(W) = 0$, то анизотропийная норма системы $\mathcal{F}$ равна $|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_0 = \frac{\|\mathcal{F}\|_2}{\sqrt{m}}$. Имеет место соотношение $\lim_{a\to\infty} |\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a = \|\mathcal{F}\|_\infty$.

При решении задачи анизотропийного анализа для обыкновенной системы с точно известными параметрами можно воспользоваться теоремами из [24, 25] соответственно.

Теорема 1. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма системы (2.2)–(2.3) *ограничена величиной γ, т.е.*

$$|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a < \gamma,$$

если существует скаляр $\eta > \gamma^2$ и $(n\times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, удовлетворяющие условиям:

$$\eta - \Big(e^{-2a}\det(\eta I_m - B^\top \Phi B - D^\top D)\Big)^{1/m} < \gamma^2, \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} A^\top \Phi A - \Phi + C^\top C & A^\top \Phi B + C^\top D \\ B^\top \Phi A + D^\top C & B^\top \Phi B + D^\top D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{2.7}$$

Теорема 2. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма системы (2.2)–(2.3) *ограничена величиной γ, если существует $\eta > \gamma^2$, $n\times n$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$ и $(n\times n)$-матрица Y такие, что выполнены неравенства:*

$$\eta - \Big(e^{-2a}\det(\eta I_m - B^\top \Phi B - D^\top D)\Big)^{1/m} < \gamma^2, \tag{2.8}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^\top & YA & YB & \Phi^\top - Y^\top - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^\top Y^\top & -\Phi & 0 & A^\top Y^\top & C^\top \\ B^\top Y^\top & 0 & -\eta I_m & B^\top Y^\top & D^\top \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^\top & YA & YB & -Y - Y^\top & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \tag{2.9}$$

Рассмотренные теоремы 1 и 2 будут использованы далее при решении задачи синтеза робастных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями.

3. Постановка задачи управления

Перейдем к постановке задачи синтеза робастных анизотропийных регуляторов. Будем рассматривать дискретные системы, заданные в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = A^{\Delta}x(k) + B_w^{\Delta}w(k) + B_u u(k), \tag{3.1}$$

$$y(k) = C_y^{\Delta}x(k) + D_{yw}^{\Delta}w(k), \tag{3.2}$$

$$z(k) = C_z^{\Delta}x(k) + D_{zw}^{\Delta}w(k) + D_{zu}u(k), \tag{3.3}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ – управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ – управляемый выход, $A^{\Delta} = A + M_A\Delta N_A$, $B_w^{\Delta} = B_w + M_B\Delta N_B$, $C_z^{\Delta} = C_z + M_C\Delta N_C$, $C_y^{\Delta} = C_y + M_{Cy}\Delta N_{Cy}$, $D_{yw}^{\Delta} = D_{yw} + M_{Dy}\Delta N_{Dy}$, $D_{zw}^{\Delta} = D_{zw} + M_D\Delta N_D$. Матрицы A, B_w, B_u C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{Cy}, N_{Cy}, M_{Dy} и N_{Dy} – постоянные соответствующих размеров. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{q\times q}$ – неизвестная, ограниченная по спектральной норме $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, т.е. $\Delta^{\top}\Delta \leqslant I_q$.

Замечание 1. В случае если в уравнениях (3.1)–(3.2) выполнены равенства $M_A = M_B$, $N_A = N_C$, $N_B = N_D$, $M_C = M_D$, то данная система может быть записана через дробно-линейные неопределенности [22]. В противном случае получить эквивалентное представление через дробно-линейные неопределенности невозможно.

Сформулируем две задачи управления, которые будут решены далее.

Задача 1 (задача синтеза статического регулятора по состоянию). Будем полагать, что $D_{zu} = 0$ и $p_1 \leqslant m$. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти управление по состоянию в виде

$$u(k) = Fx(k), \qquad F \in \mathbb{R}^{m_1\times n}, \tag{3.4}$$

которое стабилизирует систему (3.1)–(3.3) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $\|\!|\mathcal{F}_{cl}^{sf}|\!\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Задача 2 (задача синтеза статического регулятора по выходу). Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде статической обратной связи по выходу

$$u(k) = Ky(k), \qquad K \in \mathbb{R}^{m_1\times p_1}, \tag{3.5}$$

который стабилизирует систему (3.1)–(3.3) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $\|\!|\mathcal{F}_{cl}^{out}|\!\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Решение сформулированных задач будет рассмотрено в разделе 4.

4. Основные результаты

4.1. Синтез робастного анизотропийного регулятора по состоянию

Для задачи 1 система (3.1)–(3.3), замкнутая управлением (3.4), определяется выражениями:

$$x(k+1) = \left(A^{\Delta} + B_u F\right) x(k) + B_w^{\Delta} w(k), \tag{4.1}$$

$$z(k) = C_z^{\Delta} x(k) + D_{zw}^{\Delta} w(k). \tag{4.2}$$

Для решения задачи синтеза запишем двойственную систему для системы (4.1)–(4.2). Она имеет вид:

$$x'(k+1) = \left(A^{\Delta} + B_u F\right)^{\top} x'(k) + \left(C_z^{\Delta}\right)^{\top} w'(k), \tag{4.3}$$

$$z'(k) = \left(B_w^{\Delta}\right)^{\top} x'(k) + \left(D_{zw}^{\Delta}\right)^{\top} w'(k). \tag{4.4}$$

Следует отметить, что для $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм в линейных системах выполняется условие двойственности, т.е. $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ нормы исходной и двойственной систем совпадают. К сожалению, анизотропийная норма подобным свойством не обладает, однако в случае когда $p_1 \leqslant m$, требования, предъявляемые к величине анизотропийной нормы исходной замкнутой системы, могут быть выполнены и для системы, двойственной к ней.

Такая возможность согласуется с асимптотическим поведением анизотропийной нормы [26]:

$$\left\|\mathcal{F}\right\|_a \big|_{a\to+0} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathcal{F}\|_2 \left(1 + \sqrt{a\left(\frac{\|\mathcal{F}\|_4^4}{\|\mathcal{F}\|_2^4} - \frac{1}{m}\right)} + o(\sqrt{a})\right), \tag{4.5}$$

$$\left\|\mathcal{F}\right\|_a \big|_{a\to+\infty} = \|\mathcal{F}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2}{m}(a + J + o(1))\right)\right), \tag{4.6}$$

где $J = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\left(I_m - \|\mathcal{F}\|_\infty^{-2}\widehat{\mathcal{F}}^*(\omega)\widehat{\mathcal{F}}(\omega)\right) d\omega$ – энтропийный интеграл.

Из выражений (4.5) и (4.6) следует, что при $p_1 \leqslant m$ справедливо неравенство $\left\|\mathcal{F}_{cl}\right\|_a \leqslant \left\|\mathcal{F}'_{cl}\right\|_a$ как при $a \to +0$, так и при $a \to +\infty$. Кроме того, исходя из вида графика анизотропийной нормы системы в зависимости от уровня средней анизотропии входного возмущения и на основе ряда вычислительных экспериментов, можно выдвинуть гипотезу о том, что взаимное расположение анизотропийных норм сопряженных систем в случае $p_1 \leqslant m$ сохраняется на всем интервале $a \in [0;\ +\infty)$.

Отметим, что если $p = m$, анизотропийные нормы двойственной и исходной систем равны, т.е. $\left\|\mathcal{F}_{cl}\right\|_a = \left\|\mathcal{F}_{cl}^{dual}\right\|_a$.

Введем обозначение $F \cdot Y^{\top} = \Lambda^{\top}$, т.е. $F = \Lambda^{\top} Y^{-\top}$. Подставим матрицы двойственной системы в неравенство (2.9) из теоремы 2 и вынесем в отдельное слагаемое комбинацию с Δ:

$$\Omega + \mathrm{sym}\,(M_1 \Delta N_1) < 0, \tag{4.7}$$

где

$$
(4.8) \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & 0 \\ * & -\Phi & 0 & AY^\top + B_u\Lambda^\top & B_w \\ * & * & -\eta I_{p_1} & C_zY^\top & D_{zw} \\ * & * & * & -Y-Y^\top & 0 \\ * & * & * & * & -I_m \end{bmatrix},
$$

$$
\Omega_{11} = -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^\top, \quad \Omega_{12} = YA^\top + \Lambda B_u^\top, \quad \Omega_{13} = YC_z^\top, \quad \Omega_{14} = \Phi - Y^\top - \frac{1}{2}Y,
$$

$$
(4.9) \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & 0 & M_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_AY^\top & 0 & 0 & N_BY^\top & 0 \\ N_CY^\top & 0 & 0 & N_CY^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.
$$

Согласно лемме П.1 (см. Приложение), для выполнения неравенства (4.7) требуется существование такого $\varepsilon_1 > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$
(4.10) \qquad \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top + \frac{1}{\varepsilon_1} N_1^\top N_1 < 0.
$$

Неравенство (2.8) из теоремы 2 для некоторой $\Psi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ можно записать в виде системы [18]

$$
(4.11) \qquad \begin{cases} \eta - \left(e^{-2a}\det(\Psi)\right)^{1/m} < \gamma^2, \\ \eta I_m - B^\top \Phi B - D^\top D > \Psi. \end{cases}
$$

Запишем аналог (4.11) для системы (4.3)–(4.4). В этом случае введем матрицу $\Psi \in \mathbb{R}^{p_1\times p_1}$ и получим

$$
(4.12) \qquad \begin{cases} \eta - \left(e^{-2a}\det(\Psi)\right)^{1/p_1} < \gamma^2, \\ \eta I_{p_1} - C_z^\Delta \Phi \left(C_z^\Delta\right)^\top - D_{zw}^\Delta \left(D_{zw}^\Delta\right)^\top > \Psi. \end{cases}
$$

Последнее неравенство системы (4.12) можно переписать в виде

$$
\eta I_{p_1} - \Psi - C_z^\Delta \left(-\Phi^{-1}\right)^{-1} \left(C_z^\Delta\right)^\top - D_{zw}^\Delta (-I)^{-1} \left(D_{zw}^\Delta\right)^\top > 0,
$$

где $\left(-\Phi^{-1}\right)^{-1} < 0$. Дважды применив лемму П.2 (см. Приложение) к последнему неравенству и обозначив $\Pi = \Phi^{-1}$, получим, что

$$
(4.13) \qquad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta & D_{zw}^\Delta \\ * & -\Pi & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix} < 0.
$$

Теперь можно сформулировать теорему 3, дающую достаточные условия для построения робастного субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Теорема 3. Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 1 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(p_1 \times p_1)$-матрица $\Psi > 0$, $(n \times n)$-матрица Y и $(n \times m_1)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства

$$\left[\begin{array}{cc} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I \end{array}\right] < 0, \tag{4.14}$$

$$\eta - \left(e^{-2a} \det(\Psi)\right)^{1/p_1} < \gamma^2, \tag{4.15}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{array}\right] < 0, \tag{4.16}$$

причем

$$\Phi\Pi = I_n. \tag{4.17}$$

Матрица Ω задается выражением (4.8), *матрицы M_1 и N_1 определяются из выражения* (4.9), *а*

$$\mho = \left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z & D_{zw} \\ * & -\Pi & 0 \\ * & * & -I_m \end{array}\right], \quad M_2 = \left[\begin{array}{cc} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \; N_2 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & N_C & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{array}\right].$$

Неизвестная матрица в управлении может быть найдена по формуле

$$F = \Lambda^\top Y^{-\top}.$$

Для доказательства теоремы 3 представим слагаемое $\frac{1}{\varepsilon_1} N_1^\top N_1$ в форме $(-N_1^\top)(-\varepsilon_1 I)^{-1} N_1$. Очевидно, что $(-\varepsilon_1 I) < 0$. Применяя преобразование из леммы П.2 для неравенства (4.10), получаем неравенство (4.14). Неравенство (4.16) получается из неравенства (4.13) путем выделения слагаемых, содержащих Δ, и применения леммы П.1.

Если параметрические неопределенности представлены не только в матрице A^Δ, то условия теоремы 3 являются невыпуклыми и требуют поиска взаимнообратных матриц. Для того чтобы избежать поиска взаимнообратных матрицы, предложим следующий выход. Введем невырожденную неизвестную матрицу $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и рассмотрим матрицу

$$W = \left[\begin{array}{ccc} I_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array}\right].$$

Умножим неравенство (4.13) слева и справа на W и $W^\top$ соответственно и получим, что

$$\left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta G^\top & D_{zw}^\Delta \\ * & -G\Pi G^\top & 0 \\ * & * & -I_m \end{array}\right] < 0. \tag{4.18}$$

Принимая во внимание, что $\Pi = \Phi^{-1}$ и $\Phi > 0$, получаем справедливое неравенство

$$-(G - \Phi)\Phi^{-1}(G - \Phi)^\top \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$-G\Pi G^\top \leqslant -G - G^\top + \Phi.$$

Выполним замену выражения $(-G\Pi G^\top)$ на выражение $(-G - G^\top + \Phi)$ в неравенстве (4.18). Затем применим к неравенству (4.18) леммы П.1 и П.2 и получим новые условия синтеза робастного анизотропийного регулятора в форме обратной связи по состоянию, которые можно сформулировать в теореме 4.

Теорема 4. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 1 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, невырожденная $(n \times n)$-матрица G, $(p_1 \times p_1)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(n \times m_1)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства* (4.14) *и* (4.15), *параметры Ω, M_1 и N_1 которых определяются выражениями* (4.8) *и* (4.9) *соответственно, а также справедливо неравенство*

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.19}$$

где

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z G^\top & D_{zw} \\ * & -G - G^\top + \Phi & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_C G^\top & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.$$

Обе теоремы 3 и 4 дают достаточные условия существования статической обратной связи по состоянию, решающей задачу синтеза робастного анизотропийного регулятора для систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. В отличие от теоремы 3 теорема 4 не требует поиска взаимнообратных матриц. При этом число неизвестных переменных увеличивается на $\frac{n(n-1)}{2}$.

Если неопределенность содержится только в матрице A^Δ системы (3.1)–(3.3), то неравенство (4.19) сводится к виду

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} + C_z \Phi C_z^\top & D_{zw} \\ D_{zw}^\top & -I_m \end{bmatrix} < 0.$$

В данном случае использование теоремы 3 для синтеза робастного регулятора по состоянию становится более предпочтительным, так как условия являются выпуклыми и отсутствует необходимость поиска взаимнообратных матриц, а число неизвестных переменных меньше по сравнению с условиями теоремы 4.

Система (3.1), (3.3), замкнутая управлением (3.5), имеет представление в пространстве состояний:

$$x(k+1) = \left(A^{\Delta} + B_u K C_y^{\Delta}\right) x(k) + \left(B_w^{\Delta} + B_u K D_{yw}^{\Delta}\right) w(k), \tag{4.20}$$

$$z(k) = \left(C_z^{\Delta} + D_{zu} K C_y^{\Delta}\right) x(k) + \left(D_{zw}^{\Delta} + D_{zu} K D_{yw}^{\Delta}\right) w(k). \tag{4.21}$$

Решение задачи 2 дается в теореме 5.

Т е о р е м а 5. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 2 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(m_1 \times p)$-матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:*

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.22}$$

$$\eta - \left(e^{-2a} \det(\Psi)\right)^{1/m} < \gamma^2, \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.24}$$

причем

$$\Phi \Pi = I_n. \tag{4.25}$$

Здесь

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{Cy} & 0 & M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Cy} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Достаточные условия для построения статического регулятора по выходу получаются напрямую, если записать условия теоремы 1 для системы (4.20)–(4.21). Все преобразования матричных неравенств аналогичны преобразованиям из подраздела 4.1 и не требуют повторения.

Замечание 2. Регулятор, доставляющий минимум анизотропийной норме, может быть найден с использованием следующей оптимизационной процедуры: найти $\xi_* = \inf \xi$, где $\xi = \gamma^2$, на множестве $\{\eta,\ \xi,\ \Phi,\ \Pi,\ \Psi,\ Y,\ K,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$, удовлетворяющее (4.22)–(4.24) и $\Phi\Pi = I_n$. Если минимальное значение ξ_* найдено, тогда анизотропийная норма замкнутой системы может быть приближенно вычислена:

$$\| \mathcal{F}_{cl}^{out} \|_a \approx \sqrt{\xi_*}. \tag{4.26}$$

Аналогичные оптимизационные процедуры могут быть использованы при нахождении регуляторов на основе теорем 3 и 4.

Для численной реализации методики синтеза робастных регуляторов из теоремы 5, требующих поиска взаимнообратных матриц, с использованием пакетов Yalmip и SeDuMi, можно привести алгоритм, построенный на основе результатов из [27].

Алгоритм.

Шаг 1. Задаем счетчик $j = 0$, выбираем некоторые матрицы $G_1 = G_1^\top$ и $G_2 = G_2^\top$.

Шаг 2. Решаем оптимизационную задачу

$$\{\lambda_*, \xi_*\} = \min\{\lambda + \xi\}$$

на множестве переменных

$$\{\eta,\ \xi,\ \lambda,\ \Phi,\ \Pi,\ \Psi,\ Y,\ K,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\},$$

которые удовлетворяют неравенствам (4.22)–(4.24) и

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & G_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ G_1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} G_2 & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} G_2 \\ I_n \end{array}\right] - \lambda I_{2n} < 0, \tag{4.27}$$

$$\left[\begin{array}{cc} -\Phi & I_n \\ I_n & -\Pi \end{array}\right] - \lambda I_{2n} < 0. \tag{4.28}$$

Шаг 3. Если $\lambda_* < \delta$, где δ — заданная точность, то

$$\| \mathcal{F}_{cl}^{out} \|_a \approx \sqrt{\xi_*},$$

алгоритм останавливается и полученное значение K является искомым регулятором. Если заданная точность не достигнута, то алгоритм переходит на шаг 4.

Шаг 4. Задаем $G_1 = -\Pi_j^{-1}$, $G_2 = -\Phi_j^{-1}$, $j = j + 1$. Переходим на шаг 2.

5. Численный пример

Рассмотрим систему:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}13 & -0{,}18 & -0{,}66 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = 0,$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Неопределенности в системе заданы через коэффициенты:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix}^\top, \quad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}^\top, \quad N_B = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix},$$

$$M_C = M_D = 0{,}2, \quad N_C = \begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_D = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}08 \end{bmatrix},$$

$$M_{Cy} = M_{Dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad N_{Cy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{Dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Номинальная система является неустойчивой. Для поиска взаимнообратных матриц был выбран алгоритм, предложенный в [27]. Точность поиска взаимнообратных матриц равна $\epsilon = 10^{-7}$.

При решении задачи синтеза была минимизирована анизотропийная норма замкнутой системы для заданного уровня средней анизотропии a (см. замечание 1). После того как решение было найдено, проводился анализ замкнутой системы. Так как неопределенность в данном примере является скалярной величиной, то был использован метод оценки анизотропийной нормы из [18] на сетке с шагом $h = 0{,}01$ на отрезке $\Delta \in [0;\ 1]$. Наибольшее значение нормы принималось в качестве наихудшего случая. Результаты численных экспериментов сведены в таблицу.

Результаты численных экспериментов

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,5	1	3	100
$\lVert\mathcal{F}_{cl}\rVert_a$ на основе теоремы 3	0,7591	1,0535	1,5464	1,8435	2,1973	2,2472
$\lVert\mathcal{F}_{cl}\rVert_a$ на основе теоремы 4	0,7602	1,0489	1,5379	1,8435	2,1978	2,2494
$\lVert\mathcal{F}_{cl}\rVert_a$ на основе теоремы 5	1,9496	3,3980	5,0720	5,8894	6,6922	6,7993

Как видно из полученных результатов, управление в виде статической обратной связи по состоянию дает наилучший результат. При этом анизотропийная норма замкнутой системы с регулятором, полученным из условий теоремы 3, дает практически такой же результат, как и с использованием теоремы 4, а вычислительные затраты при использовании теоремы 4 значительно меньше.

6. Заключение

В статье получены условия для синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде статической обратной связи по выходу и по состоянию.

Рассматриваемые системы имеют ограниченные по норме параметрические неопределенности. Решается задача робастной стабилизации замкнутой системы при наличии неопределенностей и случайных внешних возмущений с известным уровнем средней анизотропии. Критерием качества функционирования замкнутой системы выступает анизотропийная норма, имеющая смысл коэффициента усиления от случайного внешнего возмущения к управляемому выходу. Полученные условия гарантируют ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы и ее устойчивость для всех возможных параметров системы из заданного класса. Условия сформулированы в виде матричных неравенств и легко реализуются в численном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1 (лемма Питерсена [28]). *Пусть матрицы $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ ненулевые, а матрица G симметрическая, т.е. $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \leqslant 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$: $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, если существует скаляр $\varepsilon > 0$ такой, что

$$G + \varepsilon M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \leqslant 0.$$

Лемма П.2 (лемма о дополнении Шура). *Пусть $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^\top & X_{22} \end{bmatrix}$ – симметрическая матрица, ее компоненты X_{11} и X_{22} – тоже симметрические матрицы.*

Если $X_{11} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{22} - X_{12}^\top X_{11}^{-1} X_{12} > 0.$$

Если $X_{22} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^\top > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yaesh I., Shaked U.* Minimum Entropy Static Feedback Control with an $\mathcal{H}_\infty$-norm Performance Bound // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. AC-42. P. 853–858.
2. *Peres P.L.D., Geromel J.C., Souza S.R.* $\mathcal{H}_\infty$ control Design by Static Output-Feedback // Proc. IFAC Sympos. on Robust Control Design. Rio de Janeiro, Brasil. 1994. P. 243–248.
3. *Leibfritz F.* An LMI-based Algorithm for Designing Suboptimal Static $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Controllers // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 39. P. 1711–1735.
4. *Casavola A., Famularo D., Franz G.* Robust Constrained Predictive Control of Uncertain Norm-Bounded Linear Systems // Automatica. 2004. V. 40. P. 1865–1876.

5. *Boukas H., Shi P.* $\mathcal{H}_\infty$ control for Discrete-Time Linear Systems with Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Automatica. 2004. V. 35. P. 1625–1631.
6. *Lai C.-T., Fang C.-H., Kau S.-W., Lee C.-H.* Robust $\mathcal{H}_2$ control of Norm-Bounded Uncertain Continuous-Time System — an LMI Approach // Proc. 2004 IEEE Int. Sympos. on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, Taiwan. September 2004. P. 243–248.
7. *Kim S.W., Seo C.J., Kim B.K.* Robust and Reliable $\mathcal{H}_\infty$ controllers for Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainty and Actuator Failure // Int. J. Syst. Sci. 1999. V. 30. No. 12. P. 1249–1258.
8. *Wang S.-Y., Gao Z.-F., He H.-K.* Observer-Based Robust $\mathcal{H}_\infty$ control of a Class of Discrete Time Systems with State Uncertainties // Proc. 8th Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics. Baoding. July 2009. P. 1949–1953.
9. *Xu S., Chen T.* Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for Uncertain Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via Exponential Output Feedback Controllers // Syst. Control Lett. 2004. V. 51. P. 171–183.
10. *Yu L., Gao F.* Robust $\mathcal{H}_\infty$ control of Discrete-Time Linear Systems with Delayed State and Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney. Australia. December 2000. P. 2754–2755.
11. *McFarlane D., Glover K.* A Loop-Shaping Design Procedure Using $\mathcal{H}_\infty$ synthesis // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37 (6). P. 759–769.
12. *Shi G., Liu X.* Robust Mixed-Norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Regulation for Uncertain Discrete-Time Systems via State Feedback // IEEE TENCON'93. 1993. P. 474–477.
13. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Dokl. Math. 1995. V. 51. P. 388–390.
14. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // Proc. 13th IFAC World Congr. San-Francisco, USA. 1996. P. 179–184.
15. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time-Invariant Control Systems // Int. J. Control. 2001. V. 74 (1). P. 28–42.
16. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.

    Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-Based Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
17. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization Problem // Proc. 13th IFAC World Congr. San-Francisco, USA. 1996. P. 427–432.
18. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропийного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации // Дисс. ... д-ра техн. наук. М.: 2012.
19. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A.* State-Space Solution to Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization Problem with Uncertainty // IFAC Proc. Volumes. 2005. V. 38 (1). P. 429–434.
20. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Решение задачи стохастической $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации для линейной дискретной системы с неопределенностью // АиТ. 2006. № 8. С. 112–142.

    Kurdyukov A.P., Maksimov E.A. Solution of the Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-Optimization Problem for Discrete Time Linear Systems under Parametric Uncertainty // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1283–1310.

21. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Анизотропийное субоптимальное управление для систем с дробно-линейной неопределенностью // АиТ. 2018. № 6. С. 172–190.

Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P. Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1100–1116.

22. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Upper Estimate of Anisotropic Norm of Uncertain System with Application to Stochastic Robust Control // Int. J. Control. 2018. V. 91 (11). P. 2411–2421.

23. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer Int. Publishing. 2018.

24. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities // Dokl. Math. 2011. V. 48. No. 3. P. 895–898.

25. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2016. № 10. С. 40–56.

Belov A.A., Andrianova O.G. Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1741–1755.

26. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем // АиТ. 1999. № 3. С. 78–87.

Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Asymptotics of the Anisotropic Norm of Linear Time-Independent Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 3. P. 359–366.

27. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // АиТ. 2005. № 1. С. 82–99.

Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Controllers on the Basis of a Solution of Linear Matrix Inequalities and a Search Algorithm for Reciprocal Matrices // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 1. P. 74–91.

28. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 04.02.2019

После доработки 28.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Управление в технических системах

© 2020 г. **В.В. АВЕТИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vavetisyan@ysu.am)**
(Ереванский государственный университет)

УПРАВЛЯЕМЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ЗАТРАТАХ СВЕТОВОЙ ЭНЕРГИИ[1]

Рассматривается задача оптимального управления пространственным движением динамического объекта с целью поиска подвижного объекта, совершающего простое движение в прямоугольной области на плоскости. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал, учитывающий энергозатрату источника света, расположенного на ищущем объекте. Искомый объект считается обнаруженным при попадании в световой квадрат заданной освещенности. Предложен способ управления движением ищущего объекта, а также соответствующий закон изменения электрического тока в цепи источника света, обеспечивающие обнаружение искомого объекта за гарантированное время поиска при минимальной световой энергозатрате.

Ключевые слова: динамический поиск, подвижной объект, оптимальное управление, световая энергозатрата.

DOI: 10.31857/S000523102004008X

1. Введение

Во многих задачах поиска целевого объекта обнаружение осуществляется с помощью информационной области чувствительности [1]. В качестве таковой можно рассматривать освещенную источником света область, которую можно перемещать в пространстве с целью обнаружения искомого объекта при его попадании в эту область [2]. В случае подвижного искомого объекта в ограниченной области для решения задачи поиска применяется подход [3], состоящий в построении управлений, при которых, двигаясь по соответствующим траекториям, ищущий объект осуществляет просмотр, заметая полосы, покрывающие всю область поиска. При определенных условиях на параметры поисковой системы такой подход выделяет множество управлений, гарантирующих успешное завершение поиска целевого объекта как подвижного [4, 5], так и неподвижного [6, 7]. В связи с этим целесообразно рассматривать задачу об оптимальном выборе гарантирующего управления. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал, учитывающий энергозатрату электрического точечного источника света, расположенного на ищущем объекте [2]. В отличие от [1–7] в настоящей работе ищущий объект управляется

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета по науке МОН РА, грант № 18T-2C127.

по ускорению, а областью освещения является квадрат. Предложен способ управления движением ищущего объекта и закон изменения электрического тока в цепи источника света, при которых искомый объект обнаруживается за гарантированное время поиска с минимальным потреблением световой энергии.

2. Постановка задачи

Рассматривается система из двух управляемых точечных объектов X (ищущего) и Y (искомого), движение которых описывается следующими уравнениями, начальными условиями и ограничениями:

$$X\colon\ \ddot{x}_1 = w_1, \quad \ddot{x}_2 = w_2, \quad \ddot{x}_3 = w_3 - g, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3,$$

$$|w_1(t)| \le W, \quad |w_2(t)| \le W, \quad |w_3(t)| \le W_3, \quad W_3 > g, \tag{2.1}$$

$$x(t) \in D^{(3)} = \{(x_1, x_2, x_3)\ :\ \ 0 \le x_i \le a_i,\ i = 1,2,3\}, \quad t \ge 0,$$

$$\begin{gathered} Y:\quad \dot{y}_i = v_i, \quad y_i(0) = y_i^0, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \le V, \quad i = 1,2, \\ y(t) \in D^{(2)} = \{(x_1, x_2)\colon\ 0 \le x_i \le a_i,\ i = 1,2\}, \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где x_i, y_i – координаты положения объектов X, Y; w_i и v_i – компоненты векторов управляющего ускорения w и управляющей скорости v объектов X и Y соответственно, которые являются кусочно-непрерывными функциями от времени; W, W_3, V, a_i – заданные постоянные, g – ускорение свободного падения.

Наличие ограничений на компоненты управляющего ускорения в (2.1) вызвано тем, что на практике, в робототехнике, многие управляемые манипуляционные системы [8] работают в трех взаимно перпендикулярных направлениях и управление движением по отдельным направлениям осуществляется тремя независимыми двигателями. Каждый двигатель создает ограниченное силовое воздействие, порождающее ограниченное по абсолютной величине ускорение, которое управляет движением по соответствующей координате.

Пусть объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях и параметрах (2.1), (2.2) за исключением начальных координат $y_i(0) = y_i^0$ и текущей скорости $v(t)$ объекта Y. Предположим, что для определения точных координат Y у объекта X имеется специальное устройство в виде четырехугольной правильной пирамиды, на вершине которой расположен изотропный точечный источник света. Излучаемые из источника световые лучи ограничиваются внутри пирамиды, вследствие чего на горизонтальной плоскости поиска образуется подвижная и изменяющийся по размеру область освещенности следующего вида:

$$\begin{gathered} \mathrm{K}(x(t)) = \left\{(\zeta_1, \zeta_2) \in D^{(2)}\colon\ |\zeta_{1,2} - x_{1,2}(t)| \le l = Cx_3(t),\ C = \operatorname{tg}\gamma/\sqrt{2}\right\}, \\ x(t) \in D^{(3)}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Область(2.3) – квадрат с центром в точке $O(x_1(t), x_2(t)) \in D^{(2)}$ и со стороной длины $2l$; γ, $0 < \gamma < \pi/2$ – половина угла раствора световых лучей,

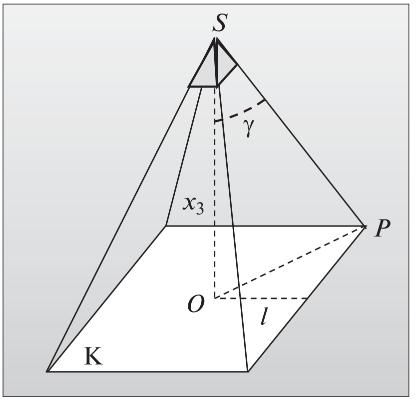

Рис. 1. Пирамида с квадратным основанием освещенности.

исходящих из точечного источника и образующих противоположные ребра лучевой пирамиды (рис. 1).

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в квадрат освещенности

$$y(t) \in \mathrm{K}(x(t)). \tag{2.4}$$

Искомый объект при попадании его в световой квадрат (2.3) может быть обнаружен или распознан только при достаточной постоянной освещенности E, характеризующей пороговое значение видимости искомого объекта.

В случае (2.3) минимальная достаточная освещенность определяется следующим образом. Согласно [9] освещенность в определенной точке на плоскости вычисляется по формуле

$$E_P = I \cos\gamma/(SP)^2, \tag{2.5}$$

где I – сила света источника S в направлении точки измерения P на плоскости, SP – расстояние между источником света и этой точкой, γ – угол между направлением падения света и перпендикуляром к этой плоскости.

Из (2.5) следует, что для квадратной области (2.3) при заданных x_3 и γ освещенность максимальна в наиболее близкой к источнику точке, в центре квадрата: $E_O = E_{\max} = I/x_3^2$ и минимальна в наиболее удаленных, в угловых точках квадрата:

$$E = E_{\min} = \xi I/x_3^2, \quad \xi = \cos^3\gamma. \tag{2.6}$$

Величину $E = E_{\min}$ (2.6) будем считать постоянной и заданной.

Используя соотношение $Q = \eta I$ [9], где η – коэффициент пропорциональности (коэффициент удельной мощности) между мощностью световой энергии Q, которую можно считать равной электрической мощности потребляемой источником света, и силой света I, величину минимальной освещенности E (2.6) можно вычислять как мощность энергии светового излучения, падающего на плоскость:

$$E = \xi I / x_3^2 = \xi Q / \eta x_3^2. \tag{2.7}$$

Из (2.7) имеем

$$Q = E\eta x_3^2 / \xi. \tag{2.8}$$

Интеграл от этой функции при постоянных E, η, ξ

$$J = \int_0^T Q\, dt = E\eta\xi^{-1} \int_0^T x_3^2 dt \tag{2.9}$$

дает величину потребляемой энергии источником света в течение промежутка времени освещения $[0,\, T]$. Функционал (2.9) характеризует энергозатраты в процессе поиска световым устройством и в соответствии с (2.1) является функцией от w_3.

Согласно закону Джоуля – Ленца величину электрической энергии, потребляемой источником света в течение времени $[0,\, T]$ освещения, можно выразить следующим образом:

$$J = \int_0^T Q dt = \int_0^T j^2 R dt, \quad Q = j^2 R, \quad 0 \leq j(t) \leq j_0, \quad t \in [0,\, T]\,, \tag{2.10}$$

где j – действующее значение тока, проходящего через источник света, j_0 – максимально допустимое действующее значение тока, а R – активное сопротивление в цепи источника света.

Из (2.8), (2.10) получаем зависимость действующего значения электрического тока j от расстояния x_3 точечного источника света до центра светового квадрата:

$$\begin{gathered} j(t) = \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}}\, x_3(t), \quad x_3(t) > 0, \\ 0 \leq j(t) \leq \min\left(j_0,\, \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}}\, a_3\right), \quad t \in [0,\, T]\,. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Соотношение (2.11) с учетом третьего уравнения (2.1) определяет связь между управляющей функцией $w_3 = w_3(t)$ и $j = j(t)$.

Замечание. Так как область поиска в (2.2) имеет форму прямоугольника $D^{(2)}$, то рассмотрение квадрата (2.3) в качестве области обнаружения (освещенности) с практической точки зрения представляется естественным. Такой выбор в отличие от круга обнаружения, рассмотренного например в [2–5], оправдан тем, что перемещение квадрата освещенности внутри области поиска – прямоугольника по прямолинейным траекториям, параллельным сторонам прямоугольника, позволяет ищущему объекту осуществить просмотр, заметая при этом полосы, покрывающие всю область поиска без зазоров.

В связи с вышесказанным в качестве допустимых управлений для ищущего объекта будем рассматривать класс таких управляющих ускорений $w(t)$ с кусочно-постоянными компонентами, удовлетворяющих наложенным ограничениям (2.1), которым отвечают ломаные траектории, состоящие из отрезков, параллельных сторонам прямоугольника.

Задача 1. Найти начальное положение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in D^{(3)}$, число $T > 0$, допустимое управление $w(t)$, $0 \le t \le T$ объекта X и соответствующий закон изменения электрического тока в цепи источника света $j = j(t)$, $0 \le t \le T$, для которых при любом начальном положении $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in D^{(2)}$ и любом кусочно-непрерывном управлении $v(t)$, $0 \le t \le T$ объекта Y гарантируется выполнение условия (2.4) в некоторый момент $t \in [0, T]$ при минимальной световой энергозатрате (2.9).

3. Описание способа поиска

Опишем сначала предлагаемый способ управления, а затем укажем условия на входящие в него параметры, при которых решается задача 1. Пусть в начальный момент $t_0 = 0$ объект X находится в точке

$$
\begin{gathered}
x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad x_1^0 = x_2^0 = l_0, \quad x_3^0 = C^{-1} l_0, \\
0 < x_3^0 \le a_3, \quad l_0 \le C a_3 < \min(a_1,\, a_2)/2 = a_2/2.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Рассмотрим исходящую из этой точки пространственную ломаную, проекция $L_{0,N} = L_0 L_1 \ldots L_N$ которой на прямоугольное основание $D^{(2)}$ изображена на рис. 2.

Двигаясь по ломаной $L_{0,N}$ в направлении, показанном на рис. 2, центр квадрата К со стороной постоянной длины $2l_0$ осуществляет сканирование прямоугольника с шагом h, $0 < h < 2l_0$ по оси x_1, оставляя с каждой стороны (верхней и нижней) прямоугольника полосы с шириной l_0. Зададим управление плоским движением X (1.1) ($w_3(t) \equiv g$, $t \ge 0$) так, чтобы перемещение центра квадрата освещенности по отрезку $L_{k-1} L_k$ происходило оптимальным

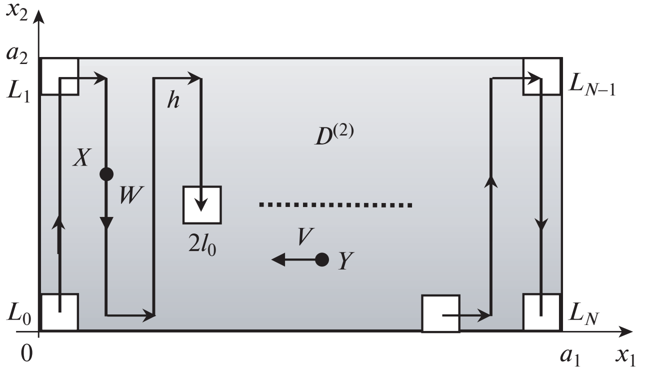

Рис. 2. Способ перемещения центра квадрата освещенности.

по быстродействию образом. Управления w_1, w_2, обеспечивающие перемещения центра квадрата из одной вершины $L_{k-1}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)})$ с нулевой скоростью $\dot{x}_1^{(k-1)} = \dot{x}_2^{(k-1)} = 0$ в последующую вершину $L_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ с нулевой скоростью $\dot{x}_1^{(k)} = \dot{x}_2^{(k)} = 0$ по прямолинейным отрезкам $L_{k-1}L_k$, определяются из решения двухточечной задачи оптимального быстродействия [10]:

по вертикальным участкам $L_{k-1}L_k$

$$
\begin{gathered}
w_1^*(t) = 0, \quad w_2^*(t) = W \operatorname{sign}\left\{(t'/2 - t)\Delta x_2\right\}, \quad t_{k-1} \le t \le t_k, \\
t_k = t_{k-1} + t', \quad t' = 2\left(|\Delta x_2|\, W^{-1}\right)^{1/2}, \quad k = 2n+1, \quad n = 0, 1, \ldots, (N-1)/2, \\
\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} > 0, \quad x_2^{(k)} = a_2 - l_0, \quad x_2^{(k-1)} = l_0; \\
k = 4p+1, \quad p = 0, 1, \ldots, P \le (N-1)/2, \\
\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} < 0, \quad x_2^{(k)} = l_0, \quad x_2^{(k-1)} = a_2 - l_0; \\
k = 4q+3, \quad q = 0, 1, \ldots, Q \le (N-1)/2, \\
t_0 = 0, \quad P, Q \text{ – целые числа}, \quad N \text{ – нечетное целое число},
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

по горизонтальным участкам $L_{k-1}L_k$

$$
\begin{gathered}
w_1^*(t) = W \operatorname{sign}\left\{(t''/2 - t)\Delta x_1\right\}, \quad w_2^*(t) = 0, \quad t_{k-1} \le t \le t_k, \\
t_k = t_{k-1} + t'', \quad t'' = 2\left(\Delta x_1 W^{-1}\right)^{1/2}, \quad k = 2n, \quad n = 1, \ldots, (N-1)/2, \\
\Delta x_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} = h, \quad k = 2n, \quad n = 1, \ldots, (N-3)/2, \\
\Delta x_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \le h, \quad k = N-1, \quad N \text{ – нечетное целое число.}
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Согласно (3.2) перемещение центра квадрата освещенности по вертикальным участкам $L_{k-1}L_k$ (рис. 2) в сторону возрастания координаты x_2: $\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} > 0$ происходит на интервалах времени $t_{k-1} \le t \le t_k$, $k = 4p+1$, $p = 0, 1, \ldots, P \le (N-1)/2$, а в сторону уменьшения x_2: $\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} < 0$ – на интервалах времени $t_{k-1} \le t \le t_k$, $k = 4q+3$, $q = 0, 1, \ldots, Q \le (N-1)/2$. Поэтому на интервалах $t_{k-1} \le t \le t_k$, когда $\Delta x_2 > 0$, имеем $w_2^*(t) = W$ при $t_{k-1} \le t < t'/2$ и $w^*(t) = -W$ при $t'/2 \le t \le t_k$, а когда $\Delta x_2 < 0$, имеем $w_2^*(t) = -W$ при $t_{k-1} \le t < t'/2$ и $w^*(t) = W$ при $t'/2 \le t \le t_k$. Здесь $t'/2 = (t_k - t_{k-1})/2$ – момент переключения управляющего ускорения $w^*(t)$ от значения W к значению $-W$ или наоборот.

Формулу (3.3) можно пояснить аналогичным образом с той разницей, что в ней учитывается, что перемещение центра квадрата освещенности по горизонтальным участкам $L_{k-1}L_k$ происходит только в сторону возрастания координаты x_1 (рис. 2): $\Delta x_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} > 0$.

Соответствующий закон изменения электрического тока в цепи источника света $j = j(t)$ определяется согласно соотношению (2.11):

$$
j(t) \equiv \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}}\, x_3^0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.4}
$$

Как следует из (3.2), (3.3), оптимальные времена перемещения одинаковы по каждому вертикальному участку и по каждому горизонтальному участку длины h и вычисляются соответственно следующим образом:

$$t' = 2\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}}, \quad t'' = 2\sqrt{hW^{-1}}. \tag{3.5}$$

4. Гарантированный поиск при минимальной затрате световой энергии

Перейдем к определению параметров l_0, h. Сначала положим $h = 0$ и независимо от траекторий рис. 2 рассмотрим прямолинейное вертикальное перемещение центра квадрата из положения $(2l_0, l_0)$ покоя в конечное положение $(2l_0, a_2 - l_0)$ покоя, а затем обратное перемещение в исходное положение покоя при управляющих ускорениях (3.2). Выясним, при каких условиях объект Y может пересечь ось $x_1 = l_0$, избежав обнаружения.

Пусть перед рассматриваемым перемещением центра квадрата освещенности объект Y занимает положение $y_1 \geq 3l_0 + \varepsilon$, $y_2 = 0$ ($\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число) на нижней стороне прямоугольника, вне квадрата освещенности. Тогда объекту Y легче всего пересечь ось $x_1 = l_0$ незамеченным, если он будет двигаться по нижней стороне прямоугольника с максимальной по модулю скоростью ($v_1 = -V$, $v_2 = 0$) в направлении оси $x_1 = l_0$. При этом он будет располагать наибольшим временем, равным $2t' = 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}}$, до очередного возвращения центра квадрата на положение $(2l_0, l_0)$.

Объект Y может избежать обнаружения при условии $4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} > > (2l_0 + \varepsilon)V^{-1}$, где $(2l_0 + \varepsilon)V^{-1}$ – время перемещения Y по оси $x_2 = 0$ на расстояние $2l_0 + \varepsilon$.

При противоположном строгом неравенстве

$$4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} < (2l_0 + \varepsilon)V^{-1} \tag{4.1}$$

X осуществит обнаружение Y, если последний пересечет ось $x_1 = l_0$.

Неравенство (4.1) заведомо выполнено, если выполнено более простое условие

$$2t' = 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} < 2l_0V^{-1}. \tag{4.2}$$

Разрешая (4.2) относительно l_0 и учитывая условие (3.1), определим диапазон изменения параметра l_0, при котором неравенство (4.2) выполняется:

$$l_{\min} = -4V^2W^{-1} + \sqrt{16V^4W^{-2} + 4V^2W^{-1}a_2} < l_0 \leq Ca_3. \tag{4.3}$$

Пусть поиск проводится так, как описано в разделе 3, и выполняется неравенство (4.2), т.е. l_0 удовлетворяет условию (4.3). Перейдем к определению условия на h, $h < 2l_0$, при котором описанный способ поиска решает задачу 1.

Рассмотрим перемещение центра квадрата освещенности по ломаной $L_{0,3} = L_0L_1L_2L_3$ с вершинами

$$L_0 = (l_0, l_0), \quad L_1 = (l_0, a_2 - l_0), \quad L_2 = (l_0 + h, a_2 - l_0), \quad L_3 = (l_0 + h, l_0) \tag{4.4}$$

при управлениях (3.2), (3.3):

$$w(t) = \begin{cases} w_1(t) \equiv 0, & w_2(t) = w_2^*(t), \quad t \in [0, t_1), \\ w_1(t) = w_1^*(t), & w_1(t) \equiv 0, \quad t \in [t_1, t_2), \\ w_1(t) \equiv 0, & w_2(t) = -w_2^*(t), \quad t \in [t_2, t_3), \end{cases}$$

где t_1, t_2, t_3 определяются с помощью (3.5): $t_1 = t'$, $t_2 = t' + t''$, $t_3 = 2t' + t''$.

По аналогии со случаем $h = 0$, чтобы избежать обнаружения, объект Y должен достичь оси $x_1 = 0$ так, чтобы все время было выполнено $y(t) \notin \mathrm{K}(x(t))$, $t \in [0, t_3]$. Объекту Y легче быть необнаруженным, если в начальный момент времени он находится в положении $(2l_0 + \varepsilon, 0)$ ($\varepsilon > 0$ – сколь угодное малое число), вне квадрата обнаружения и движется по нижней стороне прямоугольника $D^{(2)}$ в сторону оси $x_1 = 0$ с максимальной по модулю скоростью ($v_1 = -V$, $v_2 = 0$). При этом Y имеет наибольшее время, равное $t_3 = 2t' + t''$, между перемещениями центра квадрата вверх и вниз при сканировании шагом h.

Следовательно, чтобы осуществить обнаружение искомого объекта, ищущий объект при движении по верхней горизонтальной стороне прямоугольника должен выбрать величину шага перемещения h, так чтобы имело место неравенство

$$4\sqrt{(a_2 - 2l_0 - \varepsilon)W^{-1}} + 2\sqrt{hW^{-1}} \leq (2l_0 + \varepsilon - h)V^{-1},$$

которое заведомо выполняется, если выполняется более сильное неравенство

$$4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} + 2\sqrt{hW^{-1}} \leq (2l_0 - h)V^{-1}, \quad h < 2l_0. \tag{4.5}$$

При условии (4.5) искомый объект не может с максимальной по модулю скоростью V пройти расстояние длиной $2l_0 - h$ на оси $x_2 = 0$ будучи не обнаруженным за время перемещения центра квадрата по ломаной $L_{0,3}$.

Разрешая (4.5) относительно h, получим диапазон изменения величины шага, при котором описанный способ поиска гарантирует обнаружение подвижного объекта Y:

$$\begin{gathered} 0 < h \leq h_{\max}, \\ h_{\max} = \Big(-VW^{-1/2} + (V^2W^{-1} + 2l_0 - 4V(a_2 - 2l_0)^{1/2}W^{-1/2})^{1/2}\Big)^2 < 2l_0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Рассмотрим следующую положительную функцию N_1 от l_0 и h:

$$N_1(l_0,\, h) = (a_1 - 2l_0)h^{-1}, \quad l_{\min} < l_0 \leq Ca_3, \quad 0 < h \leq h_{\max} < 2l_0. \tag{4.7}$$

Функция (4.7) по h монотонно убывающая. Следовательно,

$$\min_{0 < h \leq h_{\max}} N_1(l_0,\, h) = (a_1 - 2l_0)h_{\max}^{-1} = N_1(l_0). \tag{4.8}$$

Обозначим:

$$R_0 = \{\, l_0 \in (l_{\min},\, Ca_3] : \quad N_1(l_0) = [N_1(l_0)]\,\}, \tag{4.9}$$

где символ $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа. Для значений $l_0 \in R_0$ целое число $1 + N_1(l_0)$ определяет то количество вертикальных перемещений с шагом сканирования $h_{\max}$ (4.6), при котором движение центра квадрата по ломаной $L_{0,N}$, $N = 2N_1(l_0) + 1$ заканчивается в точке $(a_1 - l_0,\, l_0)$, если $N_1(l_0)$ – нечетное целое число, и в точке $(a_1 - l_0,\, a_2 - l_0)$, если $N_1(l_0)$ – четное целое число.

С учетом этого, используя (3.5), (4.8), функционал (2.9) на множестве (4.9) можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
J(l_0) = (E\eta\xi^{-1}C^{-2})L(l_0)T(l_0), \quad l_0 \in R_0, \\
L(l_0) = l_0^2, \quad T(l_0) = t_1'(l_0) + (t_1'(l_0) + t_2'(l_0))N_1(l_0),
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

где $T(l_0)$ определяет гарантированное время поиска.

Таким образом, задача 1 сводится к нахождению параметра $l_0^* \in R_0$, доставляющего минимум в задаче

$$
\bar{J}^* = \bar{J}(l_0^*) = \min_{l_0 \in R_0} L(l_0)T(l_0). \tag{4.11}
$$

Функции $L(l_0)$ и $T(l_0)$ на множестве R_0 принимают соответственно монотонно возрастающие и монотонно убывающие дискретные значения. Минимум в (4.11) в зависимости от соотношений между параметрами может достигаться как во внутренней, так и в крайних точках множества (4.9). С учетом этого проведены численные расчеты определения l_0^* при различных значениях параметров задачи. В частности, при $a_1 = 200$ м, $a_2 = 100$ м, $a_3 = 20$ м, $C = 1$, $W = 1$ м/с^2, $V = 0{,}25$ м/с минимальное значение $\bar{J}^* = 47271{,}4$ м^{2}с достигается во внутренней точке R_0: $l_0^* = 4{,}35$ м. Соответствующее количество полных перемещений с шагом сканирования $h_{\max} = 8{,}24$ м (4.6) равно $N_1 = 22$ (4.8), а гарантированное время поиска – $T = 541{,}07$ с (4.10). Электрический ток в цепи источника света и минимальная величина энергии, потребляемой источником света, определяются из (3.4), (4.10) при конкретных значениях параметров R, E, η, ξ.

5. Заключение

Предложен простой способ управления движением динамического объекта в задаче поиска подвижного объекта в прямоугольной области с помощью квадратной области постоянного размера и заданной освещенности. Получено условие, гарантирующее успешное завершение поиска. Предложен алгоритм нахождения оптимального размера квадрата освещенности, при котором искомый объект обнаруживается за гарантированное время поиска при минимальной световой энергозатрате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хорн Б.К.П.* Зрение роботов. М.: Мир, 1989.
2. *Аветисян В.В., Мартиросян С.Р.* Гарантированный поиск целевого объекта электромеханической системой при минимальных световых энергозатратах // Изв. РАН. ТСУ. 2009. № 5. С. 151–164.

3. *Черноусько Ф.Л.* Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 3–12.
4. *Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В.* Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // ФПМ. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 827–862.
5. *Аветисян В.В., Меликян Т.Т.* О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. ТСУ. 1999. № 2. С. 31–39.
6. *Аветисян В.В.* Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. ТСУ. 2002. № 1. С. 62–69.
7. *Аветисян В.В.* Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. ТСУ. 2006. № 6. С. 160–168.
8. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы. М: Наука, 1989.
9. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука, 1970.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 07.04.2019

После доработки 13.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. **К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук (kamil_aydazade@rambler.ru)**
В.А. ГАШИМОВ (vugarhashimov@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ И КОНТРОЛЯ

Рассмотрена задача синтеза сосредоточенных управлений процессом нагрева пластины, при этом оптимизируются места размещения источников тепла и контроля состояния. Для ее численного решения с применением эффективных методов оптимизации первого порядка получены формулы для градиента целевого функционала. Приведены результаты компьютерных экспериментов. Предлагаемый подход может быть использован при проектировании систем автоматического управления и регулирования многими другими процессами и объектами с распределенными параметрами.

Ключевые слова: тонкая пластина, нагрев, синтез управления, сосредоточенный источник, точка контроля, нагруженное дифференциальное уравнение, метод проекции градиента.

DOI: 10.31857/S0005231020040091

1. Введение

Рассматривается задача управления с обратной связью объектами с распределенными параметрами на примере процесса нагрева точечными источниками тепла тонкой пластины, на которой установлены датчики температуры. Результаты замеров температуры в точках контроля используются для формирования текущих значений точечных управляющих воздействий. При этом оптимизируются точки расположения сосредоточенных источников тепла и контроля за состоянием процесса. В случае когда замеры состояния процесса можно производить лишь в дискретные моменты времени, возможна оптимизация моментов времени проведения замеров.

В конце XIX – начале XX столетия были проведены важные исследования и разработаны устройства для регулирования промышленных процессов и технических объектов. Существенный вклад внесли известные ученые Дж.К. Максвелл, Э.Дж. Раус, И.А. Вышнеградский, А. Гурвиц, А.М. Ляпунов и другие ученые и инженеры. В связи с проблемами в области ракетостроения и развитием вычислительных и измерительных средств исследования Л.С. Понтрягина [1], Р.Э. Беллмана [2], А.М. Летова [3] и других ученых [4, 5] в области систем управления с обратной связью объектами с сосредоточенными параметрами нашли широкое применение в автоматических системах управления различными техническими и промышленными объектами. В последующие годы активно проводились исследования по распространению имеющихся подходов и методов [2, 6, 7] для систем с сосредоточенными параметрами на управление объектами с распределенными параметрами, в том числе с использованием обратной связи [6, 8]. Результаты были использованы при проектировании систем управления и регулирования как техническими объектами [6, 7], так и сложными промышленными процессами [6, 9, 10]. Задачи синтеза управления для объектов с распределенными параметрами, несмотря на определенные достигнутые успехи, пока не получили достаточно широкого применения. Это связано как с проблемами теоретического характера (с исследованием вопросов управляемости, наблюдаемости [8], разработкой эффективных численных методов оптимизации управления соответствующими процессами [11, 12]), так и с проблемами технической реализации систем управления этими объектами с обратной связью (обусловленные пространственной протяженностью, невозможностью получения в достаточной степени оперативной и точной информации о текущем состоянии со всех точек объекта, а также невозможностью своевременной реализации управляющих воздействий, распределенных во всех или в некоторых точках объекта, и другими причинами). Работы в этом направлении актуальны, и в настоящее время для многих объектов с распределенными параметрами с использованием различных принципов, вычислительных методов и технических средств телемеханического контроля разрабатываются или уже функционируют системы автоматического управления и регулирования [10, 13, 14]. Отметим публикацию [15], в которой приведены подробные комментарии к современному состоянию различных аспектов теории управления и достаточно обширная библиография.

Рассмотренная в данной статье постановка задачи синтеза управляющих воздействий отличается тем, что, во-первых, оптимизируются места размещения управляющих сосредоточенных источников и точек контроля за состоянием объекта, а в случае дискретных во времени замеров могут оптимизироваться и моменты времени проведения замеров. Во-вторых, некоторые параметры процесса (начальное состояние и температура внешней среды) точно неизвестны, а заданы множества их возможных значений. В-третьих, используя линейную обратную связь управляющих воздействий от замеренных состояний объекта в точках контроля, задача синтеза управления сосредоточенными источниками приведена к задаче параметрического оптимального управления (в предлагаемом подходе размерность вектора постоянных параметров синтезируемых управлений определяется в основном удвоенным произведением числа точечных источников и точек контроля, а для задач синтеза управления объектами с распределенными параметрами, учитывая, что они не требуют решения в оперативном режиме, такую размерность можно считать вполне приемлемой).

Предлагаемые в статье постановка задачи и подход к синтезу сосредоточенных управлений процессом нагрева пластины могут быть использованы в системах управления с обратной связью многими другими технологическими процессами, техническими объектами с распределенными параметрами с сосредоточенными воздействиями, описываемыми другими типами дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза управления нагревом тонкой пластины точечными источниками, описываемая начально-краевой задачей:

$$u_t(x,t) = a^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u(x,t)) - \lambda_0 \left[u(x,t) - \theta\right] + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta_i(t)\delta(x - \eta^i), \tag{2.1}$$

$$(x,t) \in Q = \left\{(x,t) : x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathrm{R}^2, t \in [0,T]\right\},$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \mathrm{const} \in \Phi, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = \lambda \left[u(x,t) - \theta\right], \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Здесь a, λ_0, λ – заданные значения параметров процесса; Ω – область, занимаемая пластиной с границей Γ, n – внутренняя нормаль к Γ. В частности, предположим, что Ω имеет прямоугольную форму

$$\Omega = \left\{x \in \mathrm{R}^2 : \underline{a_1} \le x_1 \le \overline{a_1}, \underline{a_2} \le x_2 \le \overline{a_2}\right\},$$

$\underline{a_i}$, $\overline{a_i}$, $i = 1,\, 2$, – заданы.

Функция $u(x,t)$, определяющая значение температуры пластины в точке $x \in \Omega$ в момент времени t, является обобщенным единственным решением задачи (2.1)–(2.3), см. [16, гл. 3; 17, гл. 3], а именно: для произвольной функции $\zeta\,(x,t) \in H^{2,1}\,(Q)$, такой что $\zeta\,(x,T) = 0$, $x \in \Omega$, $\partial\zeta\,(x,t)\,/\partial \mathrm{n} = \lambda\zeta\,(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in [0,T]$, имеет место равенство

$$\int\limits_Q u(x,t)\left(-\zeta_t(x,t) - a^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\zeta(x,t)) + \lambda_0\zeta(x,t)\right)dxdt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_c} \int\limits_0^T \vartheta_i(t)\zeta(\eta^i,t)dt + \iint\limits_\Omega \zeta(x,0)\varphi\,(x)\,dx + \theta\int\limits_Q \zeta(x,t)dxdt.$$

Будем считать, что начальная температура пластины во всех точках одинакова, но точно неизвестна. Известны множество (диапазон) $\Phi \subset \mathrm{R}$ возможных начальных состояний и соответствующая функция плотности $\rho_\Phi(\varphi)$ такая, что

$$\rho_\Phi(\varphi) \ge 0, \quad \varphi \in \Phi, \quad \int\limits_\Phi \rho_\Phi(\varphi) = 1.$$

Аналогично температура внешней среды $\theta = \mathrm{const}$ точно неизвестна, а заданы множество ее возможных значений $\Theta \subset \mathrm{R}$ и соответствующая функция плотности $\rho_\Theta(\theta)$, такая что:

$$\rho_\Theta(\theta) \ge 0, \quad \theta \in \Theta, \quad \int\limits_\Theta \rho_\Theta(\theta) = 1.$$

Кусочно-непрерывные функции $\vartheta_i(t)$ определяют мощности источников, сосредоточенных в точках пластины $\eta^i = \left(\eta_1^i, \eta_2^i\right) \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N_c$, и осуществляющих ее нагрев. Для определенной в области Ω двумерной функции Дирака $\delta(x)$ при произвольных интегрируемой функции $f(x)$ и точки $\bar{x} \in \Omega$ имеют место равенства:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x)\delta(x - \bar{x})dx = f(\bar{x}), \quad \iint\limits_{\Omega} \delta(x)dx = 1. \tag{2.4}$$

Пусть допустимые значения управляющих воздействий определены, например, так:

$$\underline{\vartheta_i} \le \vartheta_i(t) \le \overline{\vartheta_i}, \quad i = 1, \ldots, N_c, \quad t \in [0, T], \tag{2.5}$$

где $\underline{\vartheta_i}$, $\overline{\vartheta_i}$ – заданные величины, $i = 1, \ldots, N_c$.

Точки размещения $\eta = \left(\eta^1, \ldots, \eta^{N_c}\right)$ источников тепла должны удовлетворять естественному условию:

$$\eta^i = \left(\eta_1^i, \eta_2^i\right) \in \Omega, \quad \underline{a_1} \le \eta_1^i \le \overline{a_1}, \quad \underline{a_2} \le \eta_2^i \le \overline{a_2}, \quad i = 1, \ldots, N_c. \tag{2.6}$$

Критерий качества управления определим функционалом

$$J(\vartheta, \eta) = \int\limits_{\Phi} \int\limits_{\Theta} I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi, \tag{2.7}$$

$$I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta) = \tag{2.8}$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \mu(x)\left[u(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta) - U(x)\right]^2 dx + \varepsilon \left\|\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)\right\|^2_{L_2^{N_c}[0,T]}.$$

Здесь $\mu(x) \ge 0$, $x \in \Omega$, – заданная весовая функция. В (2.8) второе слагаемое используется для регуляризации функционала, $\varepsilon > 0$, $\hat{\vartheta}(t)$ – параметры регуляризации, назначаемые согласно известным схемам [11, 18].

Функционал (2.7) характеризует качество управления процессом нагрева в среднем по всем возможным начальным температурам пластины и температурам внешней среды, $u\left(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta\right)$ – решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при точечных управляющих воздействиях $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_{N_c}(t))$, размещенных соответственно в точках $\eta^i = \left(\eta_1^i, \eta_2^i\right)$, $i = 1, \ldots, N_c$, с начальным условием $u(x, 0) = \varphi$, $x \in \Omega$ при температуре внешней среды θ.

Задача управления процессом нагрева пластины заключается в определении оптимальных относительно функционала (2.7) допустимых значений управляющих воздействий $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_{N_c}(t))$ – мощностей сосредоточенных (точечных) источников и мест их расположения $\eta = \left(\eta^1, \ldots, \eta^{N_c}\right)$.

Обозначим через $W(x, t; \vartheta, \eta)$ множество всех решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при всевозможных допустимых начальных температурах $\varphi \in \Phi$ и значениях внешних температур $\theta \in \Theta$. Тогда $W(x, t; \vartheta, \eta)$ представляет собой “пучок” решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.3), полученных при использовании точечных управляющих воздействий $\vartheta(t)$, размещенных в точках η при всевозможных $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$. В таком случае функционал (2.7) характеризует качество выбора оптимизируемой пары (ϑ, η) при одновременном управлении всем пучком траекторий решений (2.1)–(2.3).

Пусть управление процессом нагрева пластины осуществляется с учетом того, что в N_o точках ξ^j пластины,

$$\xi^j = \left(\xi_1^j, \xi_2^j\right) \in \Omega, \quad \underline{a_1} \le \xi_1^j \le \overline{a_1}, \quad \underline{a_2} \le \xi_2^j \le \overline{a_2}, \quad j = 1, \dots, N_o, \tag{2.9}$$

проводятся замеры текущей температуры непрерывно во времени

$$u_{\xi^j}(t) = u(\xi^j, t), \quad \xi^j \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, N_o, \tag{2.10}$$

или дискретно в заданные моменты времени

$$u_{\xi^j}^s = u(\xi^j, \tau_s), \quad \xi^j \in \Omega, \quad \tau_s \in [0, T], \quad s = 0, \dots, N_t, \quad j = 1, \dots, N_o. \tag{2.11}$$

Формирование значений температуры точечных управляющих воздействий $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, при наблюдении вида (2.10) будем осуществлять по закону линейной обратной связи в виде

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c. \tag{2.12}$$

Здесь k_i^j – коэффициент усиления для i-го источника с учетом значения температуры в j-й точке замера; z_i^j – номинальное значение температуры пластины в j-й точке замера, которое должно поддерживаться i-м источником. В задачах синтеза управления объектами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, в качестве аналога номинального значения используется вектор конечного состояния, к которому должен быть приведен объект. Для рассматриваемой задачи параметры z_i^j определяются значениями в точках наблюдения функции $U(x)$, участвующей в целевом функционале, т.е. значениями $U\left(\xi^j\right)$, $j = 1, \dots, N_o$. Но эти значения в случае некоторых функций $U(x)$ могут быть неоптимальными для z_i^j относительно целевого функционала, поэтому z_i^j, $i = 1, \dots, N_c$, $j = 1, \dots, N_o$, включены в число оптимизируемых параметров задачи.

Введем обозначения для матриц $K = \left(\left(k_i^j\right)\right)$, $Z = \left(\left(z_i^j\right)\right)$, $i = 1, \dots, N_c$, $j = 1, \dots, N_o$.

В случае если замеры в контролируемых точках осуществляются лишь в заданные дискретные моменты времени $\tau_s \in [0, T]$, $s = 0, \dots, N_t$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{N_t+1} = T$, то формирование мощностей точечных источников $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, будем осуществлять по закону линейной обратной связи в виде

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j\right], \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 0, \dots, N_t, \quad i = 1, \dots, N_c. \tag{2.13}$$

Ясно, что управляющие воздействия (2.12) являются непрерывными функциями времени, а управляющие воздействия (2.13) во времени кусочно-постоянны, причем смена значений управлений осуществляется после замеров состояния процесса в контролируемых точках пластины.

Подставим выражение (2.12) для управления при непрерывном наблюдении (2.10) в дифференциальное уравнение (2.1):

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad} u(x,t)) - \lambda_0\,[u(x,t)-\theta] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j,t) - z_i^j\right]\delta(x-\eta^i), \quad (x,t)\in Q. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Из-за участия в правой части уравнения (2.14) значений искомой функции в некоторых точках области, в данном случае в точках ξ^j, $j=1,\ldots,N_o$, такие уравнения относят к нагруженным дифференциальным уравнениям. Исследования различных аспектов таких уравнений проведены автором публикации [19] и его учениками. В частности, в [20] для численного решения нагруженных краевых задач исследованы условия применимости схем конечно-разностных методов и порядки аппроксимации, а в [21, 22] предложены методы решения получаемых конечно разностных задач, учитывающие специфическую структуру таких задач.

Используя в уравнении (2.1) выражение управления (2.11) с дискретной обратной связью, получим:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad} u(x,t)) - \lambda_0\,[u(x,t)-\theta] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j,\tau_s) - z_i^j\right]\delta(x-\eta^i), \\ & x\in\Omega, \quad t\in[\tau_s,\tau_{s+1}), \quad s=0,\ldots,N_t, \quad i=1,\ldots,N_c, \\ & u(x,\tau_s-0) = u(x,\tau_s) = u(x,\tau_s+0), \quad s=0,\ldots,N_t, \quad x\in\Omega. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Теперь сформулируем рассматриваемую в данной статье основную задачу.

Требуется определить оптимальные в смысле функционала (2.7), (2.8) допустимые места размещения сосредоточенных управляющих источников тепла η^i, $i=1,\ldots,N_c$, и точек обратной связи – замеров состояния $\xi = (\xi^1,\ldots,\xi^{N_o})$, удовлетворяющие условиям (2.6), (2.9), и допустимые значения параметров обратной связи K, Z, при которых удовлетворяются условия (2.5).

Исходя из технических и технологических соображений будем предполагать, что расстояния между точками расположения источников и замеров должны быть не меньше заданной величины d, т.е.

$$\left(\xi_1^j - \eta_1^i\right)^2 + \left(\xi_2^j - \eta_2^i\right)^2 \ge d^2, \quad i=1,\ldots,N_c, \quad j=1,\ldots,N_o. \tag{2.16}$$

Таким образом, оптимизируемыми параметрами в рассматриваемой задаче являются постоянные параметры $\eta\in \mathrm{R}^{2N_c}$, $\xi\in\mathrm{R}^{2N_o}$, $K,Z\in\mathrm{R}^{N_cN_o}$, общее число которых составляет $n=2(N_cN_o+N_o+N_c)$. Все оптимизируемые в задаче векторы параметров объединим в один, введя обозначение

$y = (K, Z, \xi, \eta) \in \mathrm{R}^n$. Учитывая это обозначение, функционал (2.7), (2.8) запишем в виде

$$J(y) = \int\limits_{\Phi} \int\limits_{\Theta} I(y; \varphi, \theta) \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \tag{2.17}$$

$$I(y; \varphi, \theta) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x)[u(x, T; y, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \left\| y - \hat{y} \right\|^2_{\mathrm{R}^n}, \tag{2.18}$$

а решение начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) при каком-либо допустимом векторе параметров y, начальном условии φ и температуре внешней среды θ обозначим через $u(x, t; y, \varphi, \theta)$. Здесь $\hat{y}$, $\varepsilon > 0$ – параметры регуляризации, назначаемые, как уже замечано на с. 123, с использованием известных алгоритмов [11, 18].

Возможно рассмотрение задачи управления с дискретной по времени обратной связью (2.11) при условии, что значения моментов времени $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{N_t})$ являются оптимизируемыми параметрами задачи синтеза управления, при этом должны быть выполнены условия

$$\tau_s < \tau_{s+1}, \quad s = 0, \ldots, N_t.$$

В этом случае размерность оптимизируемых параметров $y = (K, Z, \xi, \eta, \tau)$ в целом в задаче синтеза управления будет равна $n + N_t$.

Поставленную задачу синтеза управляющих воздействий можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами. Особенности задачи управления: 1) нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными; 2) функционал, характеризующий поведение пучка решений начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) ((2.15), (2.2), (2.3) в случае дискретной обратной связи (2.11)) с заданными множествами возможных начальных условий и параметров внешней среды; 3) участие в дифференциальном уравнении функции Дирака; 4) оптимизируемым в задаче оптимального управления является конечномерный вектор.

Важно отметить еще одну особенность полученной задачи синтеза управляющих процессом параметров. Как видно из дифференциальных уравнений (2.14) и (2.15), оптимизируемые параметры участвуют в этих уравнениях нелинейно. Отсюда следует нелинейность зависимости $u(x, t; y, \varphi, \theta)$ от параметров y, а следовательно, целевые функционалы (2.7), (2.8) не являются квадратичными по синтезируемым параметрам. Поэтому, несмотря на выпуклость функционала исходной первоначальной задачи оптимального управления по $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \ldots, N_c$, рассматриваемая задача в общем случае может быть невыпуклой, многоэкстремальной. В связи с этим при решении задачи необходимо использовать какие-либо стратегии отыскания глобального оптимума. Например, проводить многократное решение оптимизационной задачи с различными начальными значениями синтезируемых параметров или же при применении локальных методов оптимизации, исходя из экспертной информации, использовать “хорошие” начальные приближения для оптимизируемых параметров.

3. Подход и формулы для численного решения задачи

Для численного решения полученной параметрической задачи оптимального управления предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка. Сначала рассмотрим случай задачи синтеза управления (2.12) с непрерывной обратной связью (2.10).

Ограничения (2.5) на управляющие воздействия запишем, используя (2.12), в виде

$$\underline{\vartheta_i} \le \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j\right] \le \overline{\vartheta_i}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, N_c, \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$g_i(t; y) = \left|g_i^0(t; y)\right| - \frac{\overline{\vartheta_i} - \underline{\vartheta_i}}{2},$$

$$g_i^0(t; y) = \frac{\overline{\vartheta_i} + \underline{\vartheta_i}}{2} - \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j\right], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, N_c.$$

Тогда ограничение (3.1) можно записать так:

$$g_i(t; y) \le 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, N_c. \tag{3.2}$$

К этим ограничениям добавим $N_c N_o$ условий из (2.16), введя обозначения

$$\begin{gathered} g_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot; y) = d^2 - \left(\xi_1^j - \eta_1^i\right)^2 - \left(\xi_2^j - \eta_2^i\right)^2 \le 0, \\ i = 1, \ldots, N_c, \quad j = 1, \ldots, N_o. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Общее число ограничений в (3.2), (3.3) равно $N = N_c (N_o + 1)$.

Для учета ограничения (3.2) в задаче синтеза параметров y используем метод внешнего штрафного функционала, добавив к функционалу (2.17), (2.18) штрафной член за нарушение ограничений (3.2) и (3.3):

$$\tilde{J}(y) = \int\limits_{\Phi} \int\limits_{\Theta} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \tag{3.4}$$

$$\tilde{I}(y; \varphi, \theta) = I(y; \varphi, \theta) + I_{\text{штр}}(y), \tag{3.5}$$

$$I_{\text{штр}}(y) = \sum_{i=1}^{N_c} \Re_i \int\limits_0^T [g_i^+(t; y)]^2 dt + \sum_{i=N_c+1}^{N} \Re_i [g_i^+(\cdot; y)]^2.$$

Функционал (3.4) минимизируется многократно при условии, что коэффициенты штрафа $\Re_i$, $i = 1, \ldots, N$, стремятся к $+\infty$. Обозначение $g_i^+(\cdot)$ означает, что $g_i^+(\cdot) = g_i(\cdot)$, если $g_i(\cdot) > 0$ и $g_i^+(\cdot) = 0$, если $g_i(\cdot) \le 0$.

Далее будет использоваться функция $\mathrm{sgn}(\cdot)$, равная (–1) при отрицательных значениях аргумента, нулю – при аргументе равном 0 и 1 – для положительних значений аргумента.

При минимизации штрафного функционала (3.5) учет позиционных ограничений (2.6), (2.9), учитывая их простоту, будет проводиться с использованием оператора проектирования на множество, заданное этими ограничениями.

В целом, для решения задачи оптимального синтеза параметров обратной связи y предлагается использовать итерационные методы минимизации с комбинированием методов штрафной функции и проективных методов.

В частности, может быть использован метод проекции градиента штрафной функции, который запишем в виде

$$y^{m+1} = P_{(2.6),(2.9)}[y^m - \alpha_m \mathrm{grad}_y \tilde{J}(y^m)], \quad m = 0, 1, \dots \tag{3.6}$$

Здесь $\mathrm{grad}_y \tilde{J}(y^m)$ – градиент штрафного функционала (3.4), (3.5), $\alpha_m \geq 0$ – величина шага в направлении антиградиента функционала $\tilde{J}(y)$, $P_{(2.6),(2.9)}[\cdot]$ – оператор проектирования на позиционные ограничения (2.6) и (2.9) [11].

Ясно, что основным элементом, необходимым для реализации процедуры (3.6), является градиент функционала $\tilde{J}(y)$. Компоненты градиента штрафного функционала по параметрам непрерывной обратной связи в случае непрерывных множеств возможных начальных состояний Φ и температур внешней среды Θ определяются в теореме 1.

Т е о р е м а 1. *Компоненты градиента штрафного функционала* (3.4), (3.5) *в задаче* (2.14), (2.2), (2.3), (2.6), (2.9) *по синтезируемым параметрам при непрерывной обратной связи* (2.10) *определяются формулами:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} = \int_\Phi \int_\Theta \Bigg\{ -\int_0^T \left(\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \mathrm{sgn}(g_i^0(t; y))\right) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \\ + 2\varepsilon \left(k_i^j - \hat{k}_i^j\right) \Bigg\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} = \int_\Phi \int_\Theta \Bigg\{ k_i^j \int_0^T \left(\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \mathrm{sgn}(g_i^0(t; y))\right) dt + \\ + 2\varepsilon \left(z_i^j - \hat{z}_i^j\right) \Bigg\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} = \int_\Phi \int_\Theta \Bigg\{ -\sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \int_0^T u_{x_\gamma}(\xi^j, t) \left(\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \mathrm{sgn}(g_i^0(t; y))\right) dt + \\ +4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} \left(\eta_\gamma^i - \xi_\gamma^j\right) g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot; y) +\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$
+ 2\varepsilon \left(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j\right) \Bigg\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,
$$

$$
\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} = \int\limits_\Phi \int\limits_\Theta \Bigg\{ -\sum_{j=1}^{N_o} \int\limits_0^T \psi_{x_\gamma}(\eta^i, t) k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j\right] dt +
$$

$$
+ 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} \left(\xi_\gamma^j - \eta_\gamma^i\right) g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot; y) + \tag{3.10}
$$

$$
+ 2\varepsilon \left(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i\right) \Bigg\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,
$$

$i = 1, \ldots, N_c$, $j = 1, \ldots, N_o$, $\gamma = 1{,}2$. Функция $\psi(x,t) = \psi(x,t; y, \varphi, \theta)$ при текущем векторе параметров y, допустимых начальном условии φ и температуре внешней среды θ является обобщенным решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$
\psi_t(x,t) = -a^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\psi(x,t)) + \lambda_0 \psi(x,t) -
$$

$$
- \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \left(\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \mathrm{sgn}\left(g_i^0(t; y)\right)\right) \delta(x - \xi^j), \quad (x,t) \in Q, \tag{3.11}
$$

$$
\psi(x,T) = -2\mu(x)[u(x,T;y) - U(x)], \quad x \in \Omega, \tag{3.12}
$$

$$
\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = \lambda \psi(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{3.13}
$$

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в Приложении.

Существование и единственность обобщенных решений задач (3.11)–(3.13) и (2.14), (2.2), (2.3) при принятых предположениях на функции, участвующие в задачах, при размерности пространственной переменной ≤ 3 показаны в [16, 7].

Для задачи синтеза параметров управления с оптимизируемыми дискретными моментами времени обратной связи вида (2.13) в теореме 2 приведены формулы для градиента штрафного функционала (3.4), (3.5).

Т е о р е м а 2. *Компоненты градиента штрафного функционала* (3.4), (3.5) *в задаче* (2.15), (2.2), (2.3) *по синтезируемым параметрам при дискретных наблюдениях* (2.13) *определяются формулами:*

$$
\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} = \int\limits_\Phi \int\limits_\Theta \Bigg\{ -\sum_{s=0}^{N_t} [u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j] \left(\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \mathrm{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right) +
$$

$$
+ 2\varepsilon \left(k_i^j - \hat{k}_i^j\right) \Bigg\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,
$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j}=\int\limits_{\Phi}\int\limits_{\Theta}\left\{k_i^j\sum_{s=0}^{N_t}\left(\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}}\psi(\eta^i,t)dt+2\Re_i g_i^+(\tau_s;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(\tau_s;y))\right)+\right.$$

$$\left.+2\varepsilon\left(z_i^j-\hat{z}_i^j\right)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_\gamma^j}=\int\limits_{\Phi}\int\limits_{\Theta}\left\{-\sum_{s=0}^{N_t}u_{x_\gamma}(\xi^j,\tau_s)\sum_{i=1}^{N_c}k_i^j\left(\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}}\psi(\eta^i,t)dt+2\Re_i g_i^+(\tau_s;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(\tau_s;y))\right)+\right.$$

$$+4\sum_{i=1}^{N_c}\Re_{N_c+(i-1)N_o+j}\left(\eta_\gamma^i-\xi_\gamma^j\right)g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot;y)+$$

$$\left.+2\varepsilon\left(\xi_\gamma^j-\hat{\xi}_\gamma^j\right)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i}=\int\limits_{\Phi}\int\limits_{\Theta}\left\{-\sum_{s=0}^{N_t}\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}}\psi_{x_\gamma}(\eta^i,t)dt\sum_{j=1}^{N_o}k_i^j\left[u(\xi^j,\tau_s)-z_i^j\right]+\right.$$

$$\left.+4\sum_{i=1}^{N_c}\Re_{N_c+(i-1)N_o+j}(\xi_\gamma^j-\eta_\gamma^i)g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot;y)+2\varepsilon(\eta_\gamma^i-\hat{\eta}_\gamma^i)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi,$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \tau_s}=\int\limits_{\Phi}\int\limits_{\Theta}\left\{-\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}k_i^j\left(\psi(\eta^i,\tau_s)\left[u\left(\xi^j,\tau_{s-1}\right)-u\left(\xi^j,\tau_s\right)\right]+\right.\right.$$

$$+\left(a^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,u(\xi^j,\tau_s)\right)-\lambda_0\left[u(\xi^j,\tau_s)-\theta\right]\right)\times$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}}\psi\left(\eta^i,t\right)dt+2\Re_i g_i^+(\tau_s;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(\tau_s;y))\right]+2\varepsilon(\tau_s-\hat{\tau}_s)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi,$$

$i=1,\ldots,N_c$, $j=1,\ldots,N_o$, $\gamma=1,2$, $s=1,\ldots,N_t$. *Функция* $\psi(x,t)=$ $=\psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ *при текущем векторе параметров* y *и допустимых начальном условии* φ *и температуре внешней среды* θ *является обобщенным решением сопряженной начально-краевой задачи:*

$$\psi_t(x,t)=-a^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\psi(x,t)\right)+\lambda_0\psi(x,t)-$$

$$(3.14)\quad -\sum_{j=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_c}k_i^j\left(\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}}\psi(\eta^i,t)dt+2\Re_i g_i^+(\tau_s;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(\tau_s;y))\right)\delta(x-\xi^j,t-\tau_s),$$

$$x\in\Omega,\quad t\in[\tau_s,\tau_{s+1}),\quad s=0,\ldots,N_t,$$

$$(3.15)\qquad \psi(x,T)=-2\mu(x)[u(x,T;y)-U(x)],\quad x\in\Omega,$$

$$(3.16)\qquad \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = \lambda\psi(x,t), \quad x\in\Gamma, \quad t\in[\tau_s,\tau_{s+1}), \quad s=0,\ldots,N_t.$$

4. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты решения тестовой задачи управления процессом пластины с непрерывной обратной связью. В задаче использовались следующие значения параметров:

$$a^2 = 1, \quad T = 1, \quad \lambda_0 = \lambda = 0{,}01, \quad \underline{a_1} = \underline{a_2} = 0, \quad \overline{a_1} = \overline{a_2} = 1, \quad N_c = N_o = 2,$$
$$\mu(x)=1, \quad U(x)=10, \quad x\in\Omega, \quad \underline{\vartheta_i}=-5, \quad \overline{\vartheta_i}=20, \quad i=1,\ldots,N_c, \quad d=0{,}05,$$
$$\Phi = [0{,}2;\ 0{,}5]\,, \quad \Theta = [6{,}2;\ 6{,}5]\,, \quad \rho_\Phi(\varphi) = \rho_\Theta(\theta) = 10/3, \quad \varphi\in\Phi, \quad \theta\in\Theta.$$

Приведем общее описание алгоритма решения задачи синтеза вектора параметров y, размерность которого в данном случае равна $n = 2(N_cN_o + N_o + N_c) = 16$. При выбранных коэффициентах штрафа $\Re_i$ и параметрах регуляризации ε, $\hat{y}$ для реализации процедуры (3.5), на каждой итерации которой при текущих значениях оптимизируемых параметров y^m при всех возможных значениях $\varphi\in\Phi$ и $\theta\in\Theta$ выполняются шаги: 1) решается прямая начально-краевая задача (2.14), (2.2), (2.3); 2) решается сопряженная задача (3.11)–(3.13); 3) вычисляются компоненты (3.7)–(3.10) градиента штрафной функции; 4) в направлении спроектированного антиградиента функционала на позиционные ограничения (2.6), (2.9) проводится одномерная минимизация по $\alpha \geq 0$:

$$\alpha_m = \min_{\alpha\geq 0} \tilde{J}\left(P_{(2.6),(2.9)}[y^m - \alpha \mathrm{grad}_y \tilde{J}(y^m)]\right), \quad m = 0,\ 1,\ \ldots$$

Эти шаги совершаются до тех пор, пока не выполнится какой-либо критерий останова. Например, шаг α_m или изменение значения функционала на двух последовательных итерациях меньше заданной малой величины. Далее, согласно известным подходам, используя полученные значения параметров y^*, изменяются параметры регуляризации ε, $\hat{y}$ [11, 18] (в частности, уменьшается (делится на пять) ε, а за $\hat{y}$ принимается полученное оптимальное значение вектора y^*) и проводится процедура (3.6) до выполнения критерия останова. После трех корректировок параметров регуляризации коэффициенты штрафа $\Re_i$, начиная со значений $\Re_i = \Re^1$, $i = 1,\ldots,N_c$, $\Re_i = \Re^2 = 10^3\Re^1$, $i = N_c+1,\ldots,N$, $\Re^1 = 1$, увеличивались в пять раз, т.е. $\Re_i = 5\Re_i$, $i = 1,\ldots,N$, и повторялись все приведенные выше операции. Коэффициент штрафа увеличивается до тех пор, пока оптимизируемые значения параметров y, полученные для двух последовательных значений коэффициента штрафа, изменяются на величину, превышающую заданную требуемую точность решения всей задачи.

Для решения двухмерных прямой (2.14), (2.2), (2.3) и сопряженной (3.11)–(3.13) нелокальных начально-краевых задач использовалась неявная схема метода переменных направлений с шагами по пространственным переменным $h_{x_1} = h_{x_2} = 0{,}01$, а по переменной во времени – $h_t = 0{,}005$ [23]. Для аппроксимации двухмерной δ-функции Дирака использовалась функция типа

Гаусса:

$$\delta_{\sigma_x}=\begin{cases}0, & |x_1|>3\sigma_{x_1}\ \text{или}\ |x_2|>3\sigma_{x_2},\\ \dfrac{1}{2\pi\sigma_x}\exp\left(-\left(\dfrac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2}+\dfrac{x_1^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right)\right), & |x_1|\le 3\sigma_{x_1}\ \text{и}\ |x_2|\le 3\sigma_{x_2},\end{cases}$$

где

$$\sigma_x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-3\sigma_{x_1}}^{3\sigma_{x_1}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2}\right)dx_1\int\limits_{-3\sigma_{x_2}}^{3\sigma_{x_2}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_{x2}^2}\right)dx_2.$$

Несложно проверить, что имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x\right)dx_1dx_2=\int\limits_{-3\sigma_{x_1}}^{3\sigma_{x_1}}\int\limits_{-3\sigma_{x_2}}^{3\sigma_{x_2}}\delta_{\sigma_x}\left(x\right)dx_1dx_2=1.$$

При численных расчетах величина σ_{x_i} выбиралась равной h_{x_i}, $i=1{,}2$ (т.е. значение δ-функции “размазывалось” по девяти соседним квадратам). Такая аппроксимация δ-функции Дирака, как известно [24], сглаживает зависимость целевого функционала $\tilde{J}\left(y\right)$ от оптимизируемых координат распо-

Результаты решения задачи для начальных приближений y_1^0 и y_2^0

y^0	$\Re^1;\Re^2$	m	K	Z	ξ^1	ξ^2	η^1	η^2	$\tilde{J}\left(y\right)$
y_1^0	1;10^3	0	−5,85 −3,48 −4,74 −6,15	14,91 11,45 16,84 12,38	0,6900 0,6500	0,4200 0,4700	0,8500 0,8600	0,2300 0,2300	102,40
		15	−3,40 −1,32 3,23 −2,72	9,55 9,35 14,72 14,24	0,6616 0,7714	0,3368 0,3469	0,7416 0,6914	0,2568 0,2669	2,4468
		25	−3,29 −1,33 2,46 −3,59	9,56 9,35 14,72 14,25	0,8178 0,7654	0,3377 0,3482	0,7378 0,6854	0,2577 0,2682	0,6928
	25;$25\cdot10^3$	0	−2,28 0,03 2,37 −3,65	10,01 9,24 15,12 13,53	0,8049 0,9264	0,6182 0,6375	0,8849 0,8464	0,3332 0,3407	0,0218
		15	−2,12 0,18 2,44 −3,59	10,13 9,24 15,07 13,62	0,8017 0,9336	0,6008 0,6374	0,8817 0,8536	0,3310 0,3386	0,0136
		22	−2,09 0,21 2,46 −3,58	10,16 9,23 15,02 13,68	0,7935 0,9400	0,5650 0,6197	0,8827 0,8579	0,3493 0,3284	0,0092
y_2^0	1;10^3	0	−2,12 1,24 2,38 2,58	8,50 7,40 7,70 9,50	0,6300 0,5200	0,8400 0,6800	0,4600 0,8500	0,2400 0,2400	15948
		10	−3,44 0,31 1,31 1,67	8,65 7,31 7,58 9,37	0,5331 0,3599	0,8700 0,8700	0,9500 0,9500	0,0500 0,1247	4,2100
		20	−2,21 −0,12 0,56 2,02	9,70 7,30 7,45 9,09	0,5331 0,3599	0,8700 0,8700	0,9500 0,9500	0,0500 0,1247	0,6159
	25;$25\cdot10^3$	0	−1,82 0,05 −0,39 1,42	9,86 7,30 7,10 7,58	0,6034 0,3506	0,9474 0,9496	0,8674 0,8696	0,3770 0,4757	0,0544
		35	−1,86 0,29 −0,69 1,15	9,54 7,30 6,98 7,83	0,4906 0,2650	0,9494 0,9488	0,8675 0,8672	0,3826 0,4624	0,0011
		45	−1,87 0,30 −0,77 1,10	9,49 7,33 6,99 7,82	0,4911 0,2250	0,9485 0,9482	0,8683 0,8682	0,3825 0,4637	0,0004

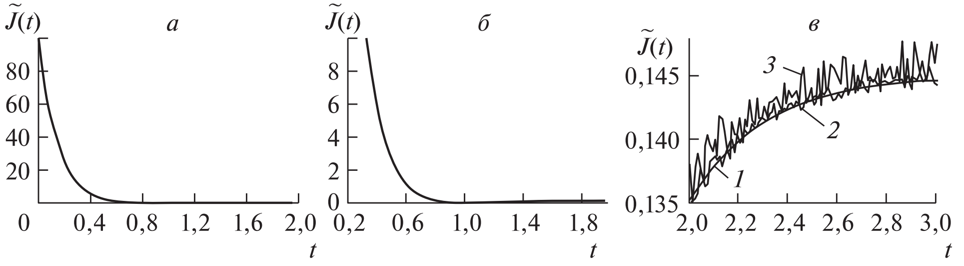

Рис. 1. Графики функции $\tilde J\,(y)$: *а* – при точных замерах; *б* и *в* – при наличии погрешностей в замерах (*1* – 0 %; *2* – 2 %; *3* – 5 %).

ложения источников и параметров обратной связи (контроля), $\eta^i = \left(\eta_1^i, \eta_2^i\right)$, $i = 1, \ldots, N_c$, $\xi^j = \left(\xi_1^j, \xi_2^j\right)$, $j = 1, \ldots, N_o$, являющихся аргументами δ-функций в прямой и сопряженной начально-краевых задачах.

В таблице приведены значения оптимизируемых параметров на некоторых итерациях и на последних y_1^* и y_2^*, полученные из двух различных начальных значений y_1^0 и y_2^0: $y_1^0 = ((-5{,}85, -3{,}48, -4{,}74, -6{,}15), (14{,}91, 11{,}45, 16{,}84, 12{,}38),$ $(0{,}69, 0{,}65, 0{,}42, 0{,}47), (0{,}85, 0{,}86, 0{,}23, 0{,}23))$, $y_2^0 = ((-2{,}12, 1{,}24, 2{,}38, 2{,}58),$ $(8{,}50, 7{,}40, 7{,}70, 9{,}50), (0{,}63, 0{,}52, 0{,}84, 0{,}68), (0{,}46, 0{,}85, 0{,}24, 0{,}24))$ – при различных двух значениях $\Re^1$, $\Re^2$ для коэффициентов штрафа $\Re_i = \Re^1$, $i = 1, \ldots, N_c$ и $\Re_i = \Re^2$, $i = N_c + 1, \ldots, N$ и значениях параметров регуляризации $\varepsilon = 0{,}01$, $\hat y = ((-2,\ 0{,}7,\ 0{,}71,\ -2{,}38),\ (7{,}96,\ 5{,}83,\ 7{,}68,\ 9{,}72),\ (0{,}50,\ 0{,}05,$ $0{,}95,\ 0{,}08),\ (0{,}42,\ 0{,}76,\ 0{,}41,\ 0{,}71))$. Элементы матриц K, Z (размеров 2×2) приведены по столбцам.

На рис. 1,*а* приведен график функции

$$\tilde J(t) = \int\limits_\Phi \int\limits_\Theta \left\{ \iint\limits_\Omega \mu(x)[u(x, T; y^*, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx \right\} \rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \tag{4.1}$$

где $u\,(x, t; y^*, \varphi, \theta)$ – решение начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) при полученных оптимальных параметрах обратной связи y_1^* и $\varphi = 0{,}3$, $\theta = 6{,}3$.

Функционал (4.1) характеризует интегральную по всей пластине величину суммарного отклонения всех траекторий пучка $W\,(x, t; y^*, \varphi, \theta)$ от заданной функции распределения $U\,(x)$, $x \in \Omega$, определяющей желаемую температуру пластины.

На рис. 1,*б* и 1,*в* приведены графики функции (4.1), полученные при оптимальных параметрах обратной связи y_1^* при наличии погрешностей в замерах текущего состояния $u_{\xi^j}\,(t)$, $j = 1, \ldots, N_o$. Замеры с погрешностями задавались формулой

$$\tilde u_{\xi^j}\,(t) = u_{\xi^j}\,(t) \left\lfloor 1 + \chi^j\,(t) \right\rfloor, \quad j = 1, \ldots, N_o,$$

где значения $\chi^j\,(t) \in [-\nu, \nu]$ определялись датчиком случайными чисел, распределенных по равномерному закону, значение ν соответствует уровню помех ($\nu = 0$ означает, что замеры проводились точно). Значения ν в экспери-

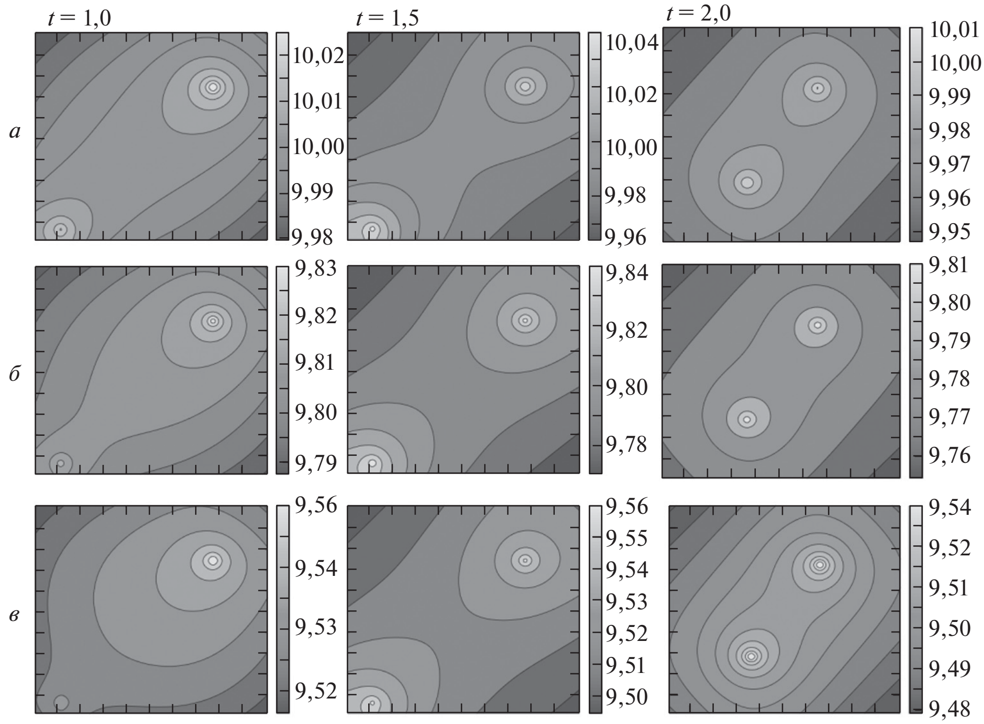

Рис. 2. Линии уровня функции распределения температуры $u\,(x, t; y^*; 0{,}3;\ 6{,}3)$ на пластине при $t = 1; 1{,}5; 2$ при замерах: *а* – без помех $\chi = 0\,\%$; с помехами *б* – $\chi = 2\,\%$ и *в* – $\chi = 5\,\%$.

ментах принимались равным 0,02 и 0,05, что соответствовало величинам погрешности замеров в 2 % и 5 %. Как видно из рис. 1,*б* и 1,*в*, траектория $\tilde{J}\,(t)$ и, следовательно, сам процесс нагрева достаточно устойчивы к погрешностям замера, причем эта устойчивость сохраняется при управлении процессом и при $t \geq T$. На рис. 1,*б* из-за малого масштаба значения функции $\tilde{J}\,(t)$ при $t \in [0;\ 2]$ при разных уровнях помех практически не различаются. Поэтому на рис. 1,*в* для $t \geq 2$ масштаб для оси значений функции увеличен.

Важно заметить следующее. Исходная задача синтеза управления решалась при $T = 1$, т.е. для временного отрезка $[0; 1]$. Тем не менее найденные оптимальные параметры обратной связи y^* таковы, что температура $U\,(x)$, $x \in \Omega$, как это видно из рис. 1, достаточно точно поддерживается и при $t > T$.

Это означает, что при $t > T$ синтезированное управление с обратной связью функционирует в режиме автоматического регулирования процессом нагрева. Изложенное подтверждается приводимыми на рис. 2 линиями уровня функции распределения температуры на пластине, полученными при синтезированных значениях параметров обратной связи. Как видно из рисунков, температура на пластине поддерживается с достаточной точностью (согласованной с точностями проводимых замеров и решений вспомогательных задач) в окрестности желаемой температуры $U\,(x) = 10$, $x \in \Omega$ и при $t > T = 1$, хотя задача синтеза решалась на временно́м отрезке $[0;\ 1]$.

5. Заключение

В статье для процесса управления нагревом тонкой пластины заданным числом точечных источников тепла предложен подход к синтезу управления и оптимальному размещению как источников, так и точек контроля (обратной связи) за состоянием объекта.

Синтезируемое управление в текущий момент времени ищется в виде линейной комбинации от замеренных значений температуры в точках контроля, количество которых задано.

В целом, рассматриваемая задача приводится к задаче параметрического оптимального управления. В задаче оптимизируемыми являются координаты размещения на пластине точечных источников, точек контроля, коэффициенты усиления и номинальные значения температуры в точках контроля. Рассмотрен случай, когда обратная связь осуществляется лишь в дискретные моменты времени, которые могут быть оптимизируемыми параметрами задачи.

Для численного решения задачи с использованием итерационных методов оптимизации первого порядка получены формулы для компонент градиента целевого функционала по всем оптимизируемым параметрам синтезируемого управления.

Приведены результаты численных экспериментов на тестовой задаче, исследовано влияние погрешностей в измерениях текущего состояния в точках обратной связи на качество управления процессом нагрева пластины.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из независимости начальной температуры пластины φ и температуры внешней среды θ от синтезируемых управляющих параметров y следует справедливость соотношения

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}_y \tilde{J}(y) = \operatorname{grad}_y \int\limits_{\Phi} \int\limits_{\Theta} \tilde{I}(y;\varphi,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi = \\ = \int\limits_{\Phi} \int\limits_{\Theta} \operatorname{grad}_y \tilde{I}(y;\varphi,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_\Phi(\varphi)d\theta d\varphi.\end{gathered} \tag{П.1}$$

Поэтому займемся получением формул для компонент градиента целевого функционала $\tilde{I}(y;\varphi,\theta)$, определенного из (3.5), при каких-либо произвольно выбранных допустимых значениях $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$.

В уравнение (2.14) введем обозначение для управляющего слагаемого

$$V(x,t;y) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j,t) - z_i^j] \delta(x - \eta^i).$$

Тогда уравнение (2.14) запишем в виде

$$u_t(x,t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x,t)) - \lambda_0 [u(x,t) - \theta] + V(x,t;y), \quad (x,t) \in Q. \tag{П.2}$$

Для получения формул для компонент градиента $\tilde{I}(y;\varphi,\theta)$ используем метод приращения аргументов [11].

Правую часть уравнения (П.2) перенесем влево и получим равенство, равное нулю. Левую часть полученного равенства умножим на пока произвольную функцию $\psi(x,t)$ и, проинтегрировав по области Ω и $t\in[0,T]$, прибавим к функционалу $\tilde{I}(y;\varphi,\theta)$, значение которого не изменится:

$$\tilde{I}(y;\varphi,\theta)=\tilde{I}(y;\varphi,\theta)+ \tag{П.3}$$
$$+\iiint\limits_{Q}\psi(x,t)\left(u_t(x,t)-a^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}u(x,t)\right)+\lambda_0\left[u(x,t)-\theta\right]-V(x,t;y)\right)dxdt.$$

Пусть управление $V(x,t;y)$ за счет изменения вектора синтезируемых параметров y получило приращение $\Delta V(x,t;y)=V(x,t;y+\Delta y)-V(x,t;y)$. Соответственно некоторое приращение $\Delta u(x,t)$ получит и решение начально-краевой задачи (П.2), (2.2), (2.3):

$$\Delta u(x,t)=u(x,t;y+\Delta y)-u(x,t;y).$$

Ясно, что функция $\Delta u(x,t)$ должна удовлетворять условиям начально-краевой задачи:

$$\Delta u_t(x,t)=a^2\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Delta u(x,t))-\lambda_0\Delta u(x,t)+\Delta V(x,t;y),\quad (x,t)\in Q, \tag{П.4}$$
$$\Delta u(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{П.5}$$
$$\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial \mathrm{n}}=\lambda\Delta u(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad t\in[0,T]. \tag{П.6}$$

Тогда функционал $\tilde{I}(y;\varphi,\theta)$ получит приращение, которое после интегрирования по частям с учетом (П.3)–(П.6), несложных преобразований и группировки можно представить в виде:

$$\Delta\tilde{I}(y;\varphi,\theta)=\iint\limits_{\Omega}\left(\psi(x,T)+2\mu(x)[u(x,T;y)-U(x)]\right)\Delta u(x,T;y)dx-$$
$$-a^2\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma}\left[\lambda\psi(x,t)-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\mathrm{n}}\right]dxdt-\iiint\limits_{Q}\Bigg[\psi_t(x,t)+a^2\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\psi(x,t)\right)-$$
$$-\lambda_0\psi(x,t)+\sum_{j=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_c}k_i^j\left(\psi(\eta^i,t)+2\Re g_i^+(t;y)\mathrm{sgn}\left(g_i^0(t;y)\right)\right)\delta(x-\xi^j)\Bigg]dxdt+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Bigg[-\int\limits_0^T\left(\psi(\eta^i,t)+2\Re g_i^+(t;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(t;y))\right)[u(\xi^j,t)-z_i^j]dt+$$
$$+2\varepsilon\left(k_i^j-\hat{k}_i^j\right)\Bigg]\Delta k_i^j+$$

$$
+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\left[\int\limits_0^T \left(\psi(\eta^i,t)+2\Re g_i^+(t;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(t;y))\right)k_i^j dt + 2\varepsilon\left(z_i^j-\hat{z}_i^j\right)\right]\Delta z_i^j +
$$

$$
+\sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{j=1}^{N_o}\left[-\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T u_{x_\gamma}(\xi^j,t)k_i^j\left(\psi(\eta^i,t)+2\Re g_i^+(t;y)\mathrm{sgn}(g_i^0(t;y))\right)dt+\right.
$$

$$
\left.+4\sum_{i=1}^{N_c}\Re_{N_c+(i-1)N_o+j}\left(\eta_\gamma^i-\xi_\gamma^j\right)g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot;y)+2\varepsilon\left(\xi_\gamma^j-\hat{\xi}_\gamma^j\right)\right]\Delta\xi_\gamma^j +
$$

$$
+\sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_c}\left[-\sum_{j=1}^{N_o}\int\limits_0^T \psi_{x_\gamma}(\eta^i,t)k_i^j[u(\xi^j,t)-z_i^j]dt+\right.
$$

$$
\left.+4\sum_{j=1}^{N_o}\Re_{N_c+(i-1)N_o+j}\left(\xi_\gamma^j-\eta_\gamma^i\right)g^+_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot;y)+2\varepsilon\left(\eta_\gamma^i-\hat{\eta}_\gamma^i\right)\right]\Delta\eta_\gamma^i +
$$

$$
+o\left(\|\Delta u(x,t)\|_{L_2(Q)}\right)+o\left(\|\Delta y\|_{R^n}\right).
$$

Учитывая произвольность функции $\psi(x,t)$, потребуем от нее, чтобы она была решением сопряженной начально-краевой задачи (3.11)–(3.13). Тогда главные части приращения функционала при приращениях компонент вектора y будут искомыми компонентами соответствующих производных функционала [11]. Отсюда следует справедливость формул (3.6)–(3.9). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 во многом совпадает с доказательством теоремы 1. Согласно (2.13) управляющие воздействия $\vartheta_i(t)$, $i=1,\ldots,N_c$, постоянны на временны́х полуинтервалах $t\in[\tau_s,\tau_{s+1})$, $s=0,\ldots,N_t$, и смена зависимости $\vartheta_i(t)$ от состояния пластины в наблюдаемых точках происходит в моменты времени τ_s, $s=1,\ldots,N_t$. Поэтому при доказательстве теоремы 2 интервал $(0,T)$ разбивается на полуинтервалы $[\tau_s,\tau_{s+1})$, $s=0,\ldots,N_t$, а для каждого полуинтервала проводятся такие же выкладки, что и при доказательстве теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории управления. М.: ИЛ, 1962.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441. 1960. № 5. С. 561–568. 1960. № 6. С. 661–665. 1961. № 4. С. 425–435.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

6. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
8. *Egorov A.I.* Optimal stabilization of the distributed parameter systems. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1975.
9. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.
10. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company, 1981.
11. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
12. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // АиТ. 2017. № 9. С. 49–66.

    Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. Optimizing Placement of the Control Points at Synthesis of the Heating Prosess Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
13. *Ахметзянов А.В.* Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // АиТ. 2008. № 1. С. 3–15.

    Akhmetzyanov A.V. Computational Aspects in Controlling Filtration of Fluids and Gases in Porous Media // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 1. P. 1–12.
14. *Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н.* Проблемы оптимального управления фильтрацией грунтовых вод // АиТ. 1999. № 8. С. 51–60.

    Akhmetzyanov A.V., Kulibanov V.N. Problems of Optimal Control of Percolation of Subterranean Water // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 8. Part 1. P. 1097–1105.
15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
16. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

    Lions J.-L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes at application. V. 1. Paris, 1968.
17. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

    Lions J.-L. Control optimal de sistemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Paris. Dunod Ganthier-Villars, 1969.
18. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Kluwer Acad. Publishers, Netherlands, 1996.
19. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012.
20. *Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафишев М.Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.

    Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.X. Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving Them by Finite Difference Methods // Comp. Math. Math. Phys. 2008. V. 48. No. 9. P. 1581–1590.
21. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 99–112.

Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations // Comp. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.

22. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О решении краевых задач с неразделенными многоточечными интегральными условиями // Диф. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1152–1162.

    Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the Solution of Boundary Value Problems with Non Separated Multipoint and Integral Conditions // Differential Equations. 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.

23. *Aida-zade K.R., Handzel A.V.* An Apprach to Lumped Control Synthesis in Distributed Systems // Int. J. Appl. Comput. Math. 2007. No. 1. P. 69–79.

24. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 20.11.2018

После доработки 10.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. А.А. ГОЛОВАН, д-р физ.-мат. наук (aagolovan@yandex.ru), А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com) (Лаборатория управления и навигации механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова)

ПРИМЕНЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ПОДХОДА К ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ[1]

Гарантирующий подход применяется к задаче совместной калибровки блока ньютонометров и высокоточного стенда. Получен оптимальный план калибровки с минимальным суммарным числом угловых положений стенда. Построены оптимальные гарантирующие оценки искомых параметров. Поскольку точно реализовать нужные положения стенда часто затруднительно, обсуждается процедура, позволяющая учесть ошибки, возникающие из-за неточности установок стенда в требуемые положения.

Ключевые слова: гарантирующий подход к оцениванию, блок ньютонометров, калибровка.

DOI: 10.31857/S0005231020040108

1. Введение

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые появился в публикациях [1–3] (см. также [4]) и впоследствии был развит в [5–8]. Гарантирующий подход традиционно имеет свои приложения в космической баллистике. В данной статье показано, что при небольшой модификации область применения этого подхода намного шире.

В [9, 10] при помощи гарантирующего подхода исследовалась задача калибровки блока ньютонометров на стендах с грубой информацией об угловом положении стенда (с ошибками порядка десятков угловых минут).

В данной статье рассматривается применение гарантирующего подхода к задаче калибровки блока ньютонометров на прецизионных стендах, когда измерения угловых положений стенда весьма точны (с флуктуационными ошибками порядка нескольких угловых секунд). В этом случае математическая модель соответствующей задачи оценивания существенно отличается от моделей в [9, 10]; в частности, в настоящей статье измерения состоят из трех функций, а в предыдущих – из одной. Следовательно, оптимальные планы измерений также существенно отличаются. Отметим, что после осреднения показаний блока ньютонометров помеха в соответствующей задаче оценивания состоит из суммы остаточной ошибки электромеханического контура блока и отброшенных квадратичных членов. Эта величина не имеет ни четкой параметрической модели, ни стабильного спектра. Еще более важно, что решение

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00054-а).

задачи оптимального гарантирующего оценивания из всей совокупности измерений выделяет ограниченное число наиболее информативных измерений. Таким образом, заодно решается и задача оптимального планирования экспериментов. Поэтому применение гарантирующего подхода для решения задачи калибровки очень адекватно рассматриваемой проблеме.

Опишем прикладное содержание проблемы. Одним из основных сенсоров инерциальной навигационной системы [11, 12] является блок из трех ньютонометров, измеряющий удельную силу, действующую на условную чувствительную массу блока со стороны объекта, на котором он установлен. Согласно второму закону Ньютона эта сила равна разности между абсолютным ускорением чувствительной массы (центра объекта) и гравитационным ускорением. В технике эта величина называется кажущимся ускорением. При статических испытаниях она равна ускорению силы тяжести (с обратным знаком). Хорошо известно, что блок ньютонометров нуждается в калибровке перед его основным использованием. Вопросами калибровки традиционно занимаются во многих специализированных предприятиях и научных заведениях. Калибровке блока ньютонометров (в технике они часто называются акселерометрами) посвящено необъятное количество публикаций (см., например, [10, 13–31]). Часто в них исследуются технологические особенности процесса калибровки, но строгие математические постановки задач редки. В известных авторам публикациях вопросы минимизации числа угловых положений стенда излагаются скупо (кроме [9, 10]) и исходят из эвристических соображений. Нередко после составления модели и упоминания о методе максимального правдоподобия все остальное доверяется стандартным пакетам программ, максимизирующим функцию правдоподобия без должного анализа задачи оценивания. Иногда соответствующие задачи оптимизации являются невыпуклыми, что крайне осложняет их численное решение.

Простые “инженерные” алгоритмы стендовой калибровки блока ньютонометров очень наглядны: надо поставить (при помощи стенда) ньютонометры вверх и вниз и что-то сложить или вычесть и разделить пополам. При этом обычно предполагается, что угловые и геометрические погрешности прецизионных стендов малы настолько, что ими можно пренебречь. Однако анализ разнообразных источников погрешностей блока и самого стенда показывает, что, на первый взгляд, тривиальная процедура калибровки не так проста. Кроме того, представляется разумным включать в состав оцениваемых параметров возможные геометрические погрешности (перекосы осей вращения, негоризонтальность основания из-за просадки фундамента), инструментальные погрешности (систематические ошибки измерения углов поворота) номинально высокоточного стенда с одновременным решением и задачи калибровки, и задачи функциональной диагностики стенда. Это обстоятельство дополняет традиционную постановку задачи калибровки. Однако она становится многопараметрической. При высоких размерностях выбор плана экспериментов не очевиден. Учет погрешностей высокоточных стендов – относительно новое направление в калибровке; при этом вопрос о минимизации суммарного числа угловых положений стенда в публикациях, насколько авторам известно, математически четко не исследовался.

В [16] описана инженерная задача калибровки с учетом погрешностей номинально высокоточного стенда и при помощи анализа соответствующей вариационной задачи для каждого оцениваемого параметра найдены некоторые оптимальные угловые положения стенда. Суммарное количество положений стенда при этом равнялось 15 – числу неизвестных параметров. Проведение каждого калибровочного эксперимента является технологически сложной процедурой, поэтому весьма желательно сократить число экспериментов. В данной статье рассмотрен вопрос о минимизации общего числа положений стенда при оценке всех параметров. При помощи построения соответствующей двойственной задачи показано, что суммарное число угловых положений стенда можно сократить до 10 (но не менее). На первый взгляд, такой вывод может показаться парадоксальным: ведь по 10 измерениям нельзя определить 15 параметров. Дело в том что при каждом положении стенда имеются три измерения, и поэтому суммарное число измерений равно 30.

2. Постановка задачи оценивания

Опишем кратко двухстепенной стенд [16]. Его конкретные реализации могут быть различными, но математическая схема одна и та же. Примером может служить стенд фирмы “Acutronic” [32]. Основание стенда неподвижно относительно Земли. Внешняя ось стенда из-за неточности установки основания отклонена от горизонтальной плоскости на малый угол κ. Внешняя рама стенда может поворачиваться относительно основания вокруг внешней оси на угол α_{tr}; внутренняя рама может поворачиваться относительно внешней рамы вокруг внутренней оси на угол β_{tr}. Углы поворота рам измеряются на фоне помех:

$$\alpha = \alpha_{tr} + \Delta\alpha + \Delta\alpha_{fl}, \quad \beta = \beta_{tr} + \Delta\beta + \Delta\beta_{fl},$$

где α, β – результаты измерений, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ – неизвестные одинаковые для всех измерений константы, $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$ – неизвестные непараметрические (флуктуационные) составляющие, разные для разных измерений углов. Так как стенд предполагается высокоточным, то составляющими $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$ всюду в дальнейшем будем пренебрегать. Это обстоятельство отличает высокоточный стенд от грубого стенда, при использовании которого нельзя пренебрегать величинами этого типа.

При $\alpha_{tr} = 0$ внутренняя ось направлена (почти) по географической вертикали; отклонение внутренней оси от вертикальной плоскости, образованной внешней осью и географической вертикалью, вследствие негоризонтальности основания обозначается малым углом α^*. Указанные оси пересекаются в точке M^b и могут не быть в точности ортогональны; малый угол их неортогональности обозначим через ϵ. С внутренней рамой жестко свяжем систему координат $M^b j$ следующим образом. Ось $M^b j_3$ направлена по внутренней оси. Ось $M^b j_1$ при $\beta_{tr} = 0$ лежит в плоскости, образованной внешней и внутренней осями, ортогональна $M^b j_3$ и близка к внешней оси. Ось $M^b j_2$ образует с $M^b j_1$ и $M^b j_3$ правый ортогональный трехгранник.

С блоком ньютонометров свяжем правый ортогональный трехгранник Mz, по осям которого в идеале должны располагаться оси чувствительности ньютонометров (точка M является центром блока). Этот трехгранник называется приборным. Блок ньютонометров устанавливается на планшайбу, жестко прикрепленную к внутренней раме так, чтобы оси Mz как можно точнее были направлены по осям трехгранника $M^b j$. Погрешность установки Mz относительно $M^b j$ характеризуется неизвестным вектором малого поворота $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\mathsf{T}$. Неточность в знании ускорения силы тяжести в точке проведения испытаний обозначим через Δg.

Пусть $\langle f'_z \rangle$ – известные осредненные показания блока ньютонометров в некотором неподвижном относительно Земли угловом положении, α, β – результат измерения углов поворота внешней и внутренней рам стенда, $\tilde{f}_z(\alpha, \beta)$ – предсказанные по непосредственному измерению углов поворота рам стенда показания блока (точно вычисляемые). Тогда измерения $z(\alpha, \beta)$ для соответствующей задачи оценивания формируются как нормированная разность сигналов $\langle f'_z \rangle$ и $\tilde{f}_z(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
z(\alpha, \beta) = g^{-1} \left\{ \langle f'_z \rangle - \tilde{f}_z(\alpha, \beta) \right\} = \\
= g^{-1} \Big\{ (E + \Gamma) \left(-g_z(\alpha, \beta, q_b) \right) + \Delta f^0 - \left(-\tilde{g}_z(\alpha, \beta) \right) \Big\} + \varrho(\alpha, \beta),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где (см. [10, 16]) g – модельное значение ускорения силы тяжести, $E \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – единичная матрица, Γ – матрица погрешностей блока (характеризуемая ошибками масштабных коэффициентов и несоосностью ньютонометров), Δf^0 – систематические смещения показаний блока, $g_z(\alpha, \beta, q_b)$ – истинное значение вектора ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, $q_b = (\kappa, \epsilon, \Delta\alpha, \Delta\beta, \alpha^*, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta g/g)^\mathsf{T}$ – вектор параметров погрешностей стенда, $\tilde{g}_z(\alpha, \beta)$ – точно вычисляемый по измерениям углов прогнозируемый вектор ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, $\varrho(\alpha, \beta)$ – флуктуационная составляющая ошибок измерений. Определение величин Γ и Δf^0 составляет цель калибровки.

Линеаризуя невязки (1) относительно параметров погрешностей стенда и блока, можно получить, что компоненты невязки

$$
\overset{(p)}{z}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1, \quad p = 1, 2, 3,
$$

связаны с неизвестными оцениваемыми параметрами

$$
(q_1, \dots, q_{15})^\mathsf{T} = q \in \mathbb{R}^{15},
$$

представляющими собой физически содержательные линейные комбинации погрешностей параметров блока и неточностей стенда, следующими соотношениями:

$$
\overset{(p)}{z}(\alpha, \beta) = \overset{(p)}{H}{}^\mathsf{T}(\alpha, \beta)\, q + \overset{(p)}{\varrho}(\alpha, \beta), \quad p = 1, 2, 3, \tag{2}
$$

где известные векторы $\overset{(p)}{H}(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{15}$ определяются формулами

$$\overset{(1)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} -\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ -\cos\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \overset{(2)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \sin\beta\\ -\cos\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \cos\alpha\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \overset{(3)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} 0\\ \sin\alpha\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\\ 1\end{pmatrix},\tag{3}$$

наблюдаемые комбинации параметров имеют вид:

$$\begin{array}{lll} q_1=\kappa, & q_2=\Delta\alpha+\alpha^*, & q_3=\epsilon,\\ q_4=\Gamma_{13}-\theta_2, & q_5=\Gamma_{11}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_6=\Gamma_{12}-\Delta\beta+\theta_3,\\ q_7=\dfrac{\Delta f_1^0}{g}, & q_8=\Gamma_{23}+\theta_1, & q_9=\Gamma_{21}+\Delta\beta-\theta_3,\\ q_{10}=\Gamma_{22}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_{11}=\dfrac{\Delta f_2^0}{g}, & q_{12}=\Gamma_{31}+\theta_2,\\ q_{13}=\Gamma_{32}-\theta_1, & q_{14}=\Gamma_{33}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_{15}=\dfrac{\Delta f_3^0}{g}, \end{array}\tag{4}$$

а $\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)$ – неизвестные ошибки измерений (также безразмерные), которые могут принимать произвольные значения, но при этом ограничены по абсолютной величине известной константой σ:

$$|\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)|\leqslant\sigma,\quad p=1,2,3.\tag{5}$$

Будем считать, что стенд можно поставить во все допустимые положения, т.е. углы α и β могут принимать любые значения из отрезка $[0,2\pi]$. Таким образом, соотношения (2)–(5) описывают всевозможные показания блока ньютонометров при континууме его угловых положений. Требуется по всем измерениям $\{\overset{(p)}{z}(\alpha,\beta)\}$ определить все компоненты вектора параметров q.

3. Метод гарантирующего оценивания

Опишем кратко метод гарантирующего оценивания в априорной постановке [1–8] в форме, применимой для решения задачи калибровки. Рассмотрим три группы измерений (2), где известные непрерывные по (α,β) векторы

$\overset{(p)}{H}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^m$, $m = 15$, определяются формулами (3), а помехи $\overset{(p)}{\varrho}(\alpha, \beta)$ из (5) являются всюду определенными на $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ интегрируемыми по Лебегу функциями.

Пусть $a \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор. В рассматриваемом случае $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ – один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^m$ с единицей на ν-м месте. Рассмотрим линейные оцениватели для $l = a^{\mathsf{T}} q$ вида

$$(6) \qquad \tilde{l} = \sum_{p=1}^{3} \left\{ \int \overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha, \beta) \overset{(p)}{z}(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta + \sum_{s=1}^{M_p} \overset{(p)}{\Phi}_s \overset{(p)}{z}\left(\overset{(p)}{\alpha}_s, \overset{(p)}{\beta}_s \right) \right\},$$

где $\overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha, \beta)$ – некоторые весовые функции, интегрируемые по Лебегу, а $\overset{(p)}{\Phi}_s$, $\overset{(p)}{\alpha}_s$, $\overset{(p)}{\beta}_s$, $s = 1, \ldots, M_p$, – некоторые числа и значения углов из $[0, 2\pi]$. В отличие от широко распространенной формы оценивателя этот оцениватель содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от отдельных значений измерений в некоторых точках.

Для сокращения записи будем условно писать, что

$$\tilde{l} = \sum_{p=1}^{3} \left\{ \int \overset{(p)}{\Phi}(\alpha, \beta) \overset{(p)}{z}(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \right\},$$

$$\overset{(p)}{\Phi}(\alpha, \beta) = \overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha, \beta) + \sum_{s=1}^{M_p} \overset{(p)}{\Phi}_s\, \delta\left((\alpha, \beta) - \left(\overset{(p)}{\alpha}_s, \overset{(p)}{\beta}_s \right) \right),$$

где $\delta((\alpha, \beta) - (\alpha_s, \beta_s))$ – дельта-функция Дирака:

$$\int f(\alpha, \beta) \delta((\alpha, \beta) - (\alpha_s, \beta_s)) d\alpha\, d\beta = f(\alpha_s, \beta_s).$$

Величина

$$\sup_{q \in \mathbb{R}^m,\, |\varrho(\alpha, \beta)| \leqslant \sigma} |\tilde{l} - l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки; здесь и далее укороченная запись $|\varrho(\alpha, \beta)| \leqslant \sigma$ означает выполнение условия (5).

При выбранном оценивателе это максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов. Будем искать весовые коэффициенты $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha, \beta)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки, т.е. получаемые из решения следующей минимаксной задачи:

$$\inf_{\Phi(\alpha, \beta)} \sup_{q \in \mathbb{R}^m,\, |\varrho(\alpha, \beta)| \leqslant \sigma} |\tilde{l} - l|.$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания. Таким образом, для решения задачи калибровки и диагностики стенда нужно решить m отдельных задач. Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценивателей в дополнение к линейным оценивателям вида (6) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [8]. Другими словами, можно ограничиться линейными оценивателями.

Явно вычисляя верхнюю грань в формуле предыдущего абзаца, можно показать, что эта задача сводится к вариационной задаче вида

$$\inf_{\Phi(\alpha,\beta)} \sigma \sum_{p=1}^{3} \int |\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)|\, d\alpha\, d\beta \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{H}(\alpha,\beta)\, \overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta = a. \tag{8}$$

Величина функционала (7) определяет гарантированную ошибку оценки. Условия (8) называются условиями несмещенности, так как при их выполнении в отсутствие ошибок измерений оценка $\tilde{l}$ совпадает с l. Поскольку константа σ входит только множителем перед функционалом, то в дальнейшем при анализе (7), (8) будем считать $\sigma = 1$.

Теорема 1. *Если векторы* $\overset{(p)}{H}(\alpha,\beta)$ *непрерывны на* $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, *то решение задачи* (7), (8) *существует и по крайней мере одно решение* $\{\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)\}_{p=1}^3$ *является импульсной функцией с не более чем* m *импульсами:*

$$\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta) = \sum_{s=1}^{m_p} \overset{(p)}{\Phi}{}^0_s \delta\left((\alpha,\beta) - \left(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\, \overset{(p)}{\beta}{}^0_s\right)\right), \quad p = 1,2,3, \quad \sum_{p=1}^{3} m_p \leqslant m.$$

Именно это обстоятельство и требует вводить импульсные оцениватели в число допустимых.

3.1. Двойственная задача

Соответствующая задаче (7), (8) двойственная задача имеет вид [7, 10]

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m} a^{\mathsf{T}}\lambda \tag{9}$$

при ограничениях

$$|\overset{(p)}{H}{}^{\mathsf{T}}(\alpha,\beta)\lambda| \leqslant 1, \quad (\alpha,\beta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi], \quad p=1,2,3. \tag{10}$$

При этом исходная проблема (7), (8) называется прямой. Двойственная задача полезна, например, следующим обстоятельством.

Теорема 2. Пусть λ^0 – решение задачи (9), (10). *Оптимальный оцениватель $\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)$ отличен от нуля лишь в тех точках (α,β), для которых $|\overset{(p)}{H}{}^{\mathsf{T}}(\alpha,\beta)\lambda^0|=1$.*

Еще удобнее для анализа исходной вариационной проблемы (7), (8) вместо двойственной задачи (9), (10) рассматривать эквивалентную ей задачу о нахождении так называемого обобщенного чебышевского полинома.

При оценивании координаты q_ν обобщенным полиномом относительно переменных (α,β) с коэффициентами y_s называется тройка обобщенных полиномов

$$\overset{(p)}{H}_\nu(\alpha,\beta)+\sum_{s\in\{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m\}} y_s\overset{(p)}{H}_s(\alpha,\beta),\quad p=1,2,3. \tag{11}$$

Задача о нахождении обобщенного чебышевского полинома состоит в определении такого обобщенного полинома с коэффициентами y_s^0, который имеет наименьшее уклонение от нуля, т.е. является решением задачи вида

$$L_\nu=\min_{y_1,\dots,y_{\nu-1},y_{\nu+1},\dots,y_m}\ \max_{p=1,2,3}\ \max_{(\alpha,\beta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\Bigg|\overset{(p)}{H}_\nu(\alpha,\beta)+ \\ +\sum_{s\in\{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m\}} y_s\overset{(p)}{H}_s(\alpha,\beta)\Bigg|. \tag{12}$$

Обобщенный чебышевский полином имеет важное свойство.

Теорема 3. Оптимальный оцениватель $\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)$ отличен от нуля лишь в тех точках (α,β), для которых компоненты обобщенного чебышевского полинома принимают значение $\pm L_\nu$. При этом величина L_ν^{-1} равна оптимальному значению исходной вариационной задачи (7), (8).

Таким образом, если найти обобщенный чебышевский полином и определить точки $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$, в которых его компоненты для $p=1,2,3$ достигают значения $\pm L_\nu$, то оптимальный оцениватель можно найти из условий несмещенности (8), записанных только для точек $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$.

Теорема 4. Пусть для оценивателя $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$, который удовлетворяет условиям несмещенности (8), *и для коэффициентов $\{y_s\}$, $s=1,\dots$ $\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m$, значение функционала* (7) *равно $L_\nu^{-1}(y)$, где $L_\nu(y)$ есть уклонение от нуля обобщенного полинома* (11). *Тогда $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$ есть решение прямой задачи* (7), (8), *а $\{y_s\}$ – решение задачи* (12).

Теорема 1 показывает, что решение задачи оптимального гарантирующего оценивания сосредоточено в не более чем m точках, определяющих угловые положения стенда. Следовательно, при применении гарантирующего подхода заодно решается проблема выбора оптимального плана измерений. Это принципиально важно для задачи калибровки, так как *из решения задачи гарантирующего оценивания сразу следует план калибровки.*

Теорема 3 позволяет предложить конструктивный алгоритм решения задачи оптимального гарантирующего оценивания. Нужно: а) найти обобщенный чебышевский полином и определить точки $(\overset{(p)}{\alpha}{}_s^0, \overset{(p)}{\beta}{}_s^0)$; б) по этим точкам из условий несмещенности (8) определить соответствующие весовые коэффициенты.

Теорема 4 также предоставляет способ решения задачи (7), (8). В качестве гипотезы допустим, что набор $\{y_s\}$, $s = 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, m$, доставляет решение задачи (12). Тогда в соответствии с теоремой 3 точки, в которых обобщенный полином достигает наибольшего уклонения (со знаком $\pm$), есть точки, в которых оцениватель отличен от нуля. При этом соответствующие весовые коэффициенты определяются из условий несмещенности (если они совместны). Если же значение функционала прямой задачи (7) на выбранном оценивателе равно $L_\nu^{-1}(y)$, то получены решения для обеих задач (7), (8) и (12).

Доказательства теорем 1–3 основаны на теории двойственности выпуклых вариационных задач [33–35] и аналогичны доказательствам схожих теорем в [7, 10]. Главным здесь является компактность области интегрирования (отрезок и сфера в [7, 10] и квадрат в (7), (8)), а отличия состоят в относительно громоздких, но технических деталях. Доказательство теоремы 4 непосредственно следует из общих результатов теории двойственности [33–35].

4. Нахождение оптимальных решений

Найдем аналитическое решение задач (7), (8) при $a = e^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m$; $m = 15$. Будет показано, что минимальное общее число экспериментов равно 10.

4.1. Оценивание q_3

Начнем анализ с третьей компоненты q_3: $a = e^{(3)}$. Этот случай относительно прост для исследования и, к тому же, к нему сводится исследование многих других компонент вектора q. Решим эту задачу при помощи теоремы 4 так, как это указано в конце раздела 3. Предположим, что соответствующий обобщенный чебышевский полином имеет нулевые коэффициенты y_1, y_2, $y_4, \ldots, y_m$, т.е. он определяется тройкой функций $\overset{(p)}{H}_3(\alpha, \beta)$, $p = 1, 2, 3$, и, следовательно, $L_3(0) = 1$. Согласно теореме 3 оптимальными положениями могут быть только те, в которых векторы $\overset{(p)}{H}_3(\alpha, \beta)$ принимают максимальные по абсолютной величине значения. В данном случае это коэффициенты $(-\cos\alpha\cos\beta)$ и $\cos\alpha\sin\beta$. Тогда ясно, что для первой группы измерений ($p = 1$) нужно рассматривать только положения $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π), а для второй группы ($p = 2$) — $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{3\pi}{2})$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Соответствующая система уравнений несмещенности примет вид

$$\overset{(1)}{H}(0,0)\overset{(1)}{\Phi}_1+\overset{(1)}{H}(0,\pi)\overset{(1)}{\Phi}_2+\overset{(1)}{H}(\pi,0)\overset{(1)}{\Phi}_3+\overset{(1)}{H}(\pi,\pi)\overset{(1)}{\Phi}_4+ \tag{13}$$
$$+\overset{(2)}{H}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_1+\overset{(2)}{H}\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_2+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_3+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_4=e^{(3)}.$$

Несмотря на то что число уравнений больше числа неизвестных, система (13) совместна, и ее решение определяется двумя однопараметрическими семействами (в зависимости от ξ и η):

$$\begin{gathered}\overset{(1)}{\Phi}_1=\xi-\frac{1}{4},\quad \overset{(1)}{\Phi}_2=\frac{1}{4}-\xi,\quad \overset{(1)}{\Phi}_3=\frac{1}{4}+\eta,\quad \overset{(1)}{\Phi}_4=-\frac{1}{4}-\eta,\\ \overset{(2)}{\Phi}_1=\xi,\quad \overset{(2)}{\Phi}_2=-\xi,\quad \overset{(2)}{\Phi}_3=\eta,\quad \overset{(2)}{\Phi}_4=-\eta.\end{gathered} \tag{14}$$

Значение функционала равно

$$2\left|\xi-\frac{1}{4}\right|+2\left|\xi\right|+2\left|\eta+\frac{1}{4}\right|+2\left|\eta\right|.$$

Легко показать, что минимальное значение функционала равно $1=L_3^{-1}(0)$ и достигается при любых ξ, η из промежутков

$$0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4}\leqslant\eta\leqslant 0. \tag{15}$$

По теореме 4 соотношения (14), (15) определяют все решения прямой задачи для случая $a=e^{(3)}$, а обобщенный полином имеет вид $\overset{(p)}{H}_3(\alpha,\beta)$, $p=1,2,3$.

Таким образом, возможны 9 вариантов решений, соответствующих следующим множества значений ξ, η:

$$\begin{gathered}\xi=0,\,\eta=-\frac{1}{4};\quad \xi=0,\,\eta=0;\quad \xi=\frac{1}{4},\,\eta=-\frac{1}{4};\\ \xi=\frac{1}{4},\,\eta=0;\quad \xi=0,\,-\frac{1}{4}<\eta<0;\quad 0<\xi<\frac{1}{4},\,\eta=-\frac{1}{4};\\ 0<\xi<\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}<\eta<0;\quad 0<\xi<\frac{1}{4},\,\eta=0;\quad \xi=\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}<\eta<0.\end{gathered}$$

Рассмотрим первые четыре варианта. Они выделяют следующие наборы угловых положений и соответствующие им оценки:

$$\underbrace{(0,0),\ (0,\pi)}_{\text{(1) группа}},\quad \underbrace{\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)}_{\text{(2) группа}}; \tag{16}$$

$$\tilde{q}_3=\frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0)+\overset{(1)}{z}(0,\,\pi)-\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)+\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right];$$

$$(17)\qquad \underbrace{(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)}_{(1)\text{ группа}};$$

$$\tilde{q}_3=\frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0)+\overset{(1)}{z}(0,\,\pi)+\overset{(1)}{z}(\pi,\,0)-\overset{(1)}{z}(\pi,\,\pi)\right];$$

$$(18)\qquad \underbrace{\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)}_{(2)\text{ группа}};$$

$$\tilde{q}_3=\frac{1}{4}\left[\overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{3\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)+\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right];$$

$$(19)\qquad \underbrace{(\pi,0),\ (\pi,\pi)}_{(1)\text{ группа}},\quad \underbrace{\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}_{(2)\text{ группа}};$$

$$\tilde{q}_3=\frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(\pi,\,0)-\overset{(1)}{z}(\pi,\,\pi)+\overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)-\overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Нетрудно показать, что для остальных пяти вариантов (ξ,η) соответствующие наборы угловых положений включают в себя по крайней мере один из первых четырех. Поэтому с точки зрения минимизации суммарного количества положений их можно не рассматривать.

Итак, проведен полный анализ случая оценивания q_3. Из этого анализа следует, что один из четырех наборов положений (16), (17), (18) и (19) *обязательно* войдет в итоговый набор экспериментов.

4.2. Оценивание остальных компонент q

4.2.1. Оценивание q_1

Вновь используем теоремы 3 и 4, предполагая, что при $a=e^{(1)}$ $y_2=\ldots$ $\ldots=y_m=0$. Тогда обобщенный полином определяется функциями: $\overset{(p)}{H}_1(\alpha,\beta)$, $p=1,2,3$, с соответствующими компонентами вида $(-\cos\beta)$ и $\sin\beta$. Следовательно для оценивания первой компоненты q_1 следует использовать континуум пар углов (α,β), в которых второй угол принимает четыре значения: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ и π; при этом будут задействованы векторы из первой и второй группы: $p=1$ и $p=2$. Однако в силу континуальности исследовать возможные варианты так же, как и для q_3, здесь затруднительно. Поэтому применение теоремы 3 не дает результата.

Вместе с тем можно использовать информацию, полученную при рассмотрении q_3, именно: можно показать, что любого из наборов (16), (17), (18) или (19) достаточно для оценивания параметра q_1. Покажем это, например, для (16), а для остальных наборов это делается аналогично.

Для набора (16) условия несмещенности примут вид

$$\overset{(1)}{H}(0,0)\,\overset{(1)}{\Phi}_1+\overset{(1)}{H}(0,\pi)\,\overset{(1)}{\Phi}_2+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_1+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_2=e^{(1)}.$$

Эта система совместна, а ее решение, очевидно, определяется равенствами $\overset{(1)}{\Phi}_1 = -\overset{(1)}{\Phi}_2 = -\frac{1}{4}$ и $\overset{(2)}{\Phi}_1 = -\overset{(2)}{\Phi}_2 = \frac{1}{4}$. При этом значение функционала равно $1 = L_1^{-1}(0)$, т.е. по теореме 4 является оптимальным. Соответствующая оптимальная оценка определяется выражением

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,0) + \overset{(1)}{z}(0,\pi) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Итак, оценка для q_1 строится на уже найденных необходимых наборах (16), (17), (18) и (19). Поэтому новые наборы не нужны.

Те же самые рассуждения, что и для q_1, справедливы и при оценивании параметров q_2, q_4, q_7, q_8, q_{14} и q_{15}. Таким образом, все эти параметры оцениваются на одних и тех же планах, порожденных базовым параметром q_3.

4.2.2. Оценивание параметров q_5, q_6, q_9–q_{13}

Совершенно аналогично можно показать, что базовыми параметрами являются и параметры q_6, q_9, q_{12}, q_{13}, для каждого из которых выделяются по два необходимых набора угловых положений. Они получаются из тех же соображений, что и для q_3. При этом на обязательных планах q_{12} можно оценить q_5, а на обязательных планах q_{13} можно оценить q_{10} и q_{11}.

Тем самым, решены все задачи (7), (8) для $\nu = 1, \ldots, 15$, опираясь при этом на теорию двойственности.

4.3. Необходимые положения стенда

Проведенное выше исследование необходимых положений стенда показывает, что для минимизации числа положений стенда достаточно ориентироваться на базовые параметры q_3, q_6, q_9, q_{12} и q_{13}. Их необходимые положения представлены в табл. 1.

При сопоставлении планов для базового параметра q_{12} с планами для базового параметра q_9 и планов для базового параметра q_{13} с планами для

Таблица 1. Необходимые положения стенда для базовых параметров

Базовые параметры	Планы экспериментов
q_3	$(0,0)$, $(0,\pi)$, $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) или $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(\pi,0)$, (π,π), $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$
q_{12}	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$
q_{13}	$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$
q_6	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$
q_9	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Таблица 2. Варианты наборов с 10 суммарными положениями стенда

Группы параметров	Необходимые наборы угловых положений
$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$ $q_7,\ q_8,\ q_{14},\ q_{15}$	$*\ \ (0,0),\ (0,\pi),\ \left(\pi,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$ или $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $(\pi,0),\ (\pi,\pi),\ \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$
$q_5,\ q_9,\ q_{12}$	$*\ \ \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
$q_6,\ q_{10},\ q_{11},\ q_{13}$	$*\ \ \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right),\ \left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},0\right),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},0\right),\ \left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right)$

базового параметра q_6 из табл. 1 следует, что существует много вариантов наборов необходимых экспериментов (по крайней мере 64) из 10 положений. Использовать меньше, чем 10 положений, очевидно, нельзя. Эти варианты указаны в табл. 2.

Для каждой группы параметров возьмем, например, наборы, отмеченные $*$. На этих экспериментах и построим требуемые оптимальные гарантированные оценки в порядке, соответствующем указанным выше группам (оптимальные гарантированные ошибки этих оценок равны σ):

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}(\pi,\,\frac{3\pi}{2}) - \overset{(2)}{z}(0,\,0) + \overset{(2)}{z}(0,\,\pi)\right],$$

$$\tilde{q}_3 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_4 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_7 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) + \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) + \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_8 = \frac{1}{4}\left[\overset{(2)}{z}(0,\,0) + \overset{(2)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{14} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,\,0) - \overset{(3)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{15} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,\,0) + \overset{(3)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{5} = \frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{9} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\frac{3\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{12} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{6} = \frac{1}{2}\left[-\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right) + \overset{(1)}{z}\left(\frac{3\pi}{2},\,\pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{10} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,0\right) - \overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{11} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,0\right) + \overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{13} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,0\right) - \overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)\right].$$

Отметим, что в дополнение к компонентам q представляют интерес оценки для перекосов осей блока [10]:

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = q_6 + q_9, \quad \Gamma_{13} + \Gamma_{31} = q_4 + q_{12} \quad \text{и} \quad \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = q_8 + q_{13}.$$

В [16] показано, что оптимальные оценки для этих трех комбинаций имеют вид

$$\widetilde{(q_6 + q_9)} = \tilde{q}_6 + \tilde{q}_9, \quad \widetilde{(q_4 + q_{12})} = \tilde{q}_4 + \tilde{q}_{12} \quad \text{и} \quad \widetilde{(q_8 + q_{13})} = \tilde{q}_8 + \tilde{q}_{13}.$$

Это свойство аддитивности, привычное для оценок, полученных по методу наименьших квадратов, для метода гарантирующего оценивания в общем случае неверно.

5. Субоптимальный набор измерений

Для оценивания каждой компоненты вектора q, т.е. для $a = e^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots$ $\ldots, m$, требуется решить m отдельных задач (7), (8). Решение каждой из этих задач в соответствии с теоремой 1 определяет оптимальные угловые положения $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\, \overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$, $s = 1, \ldots, m_p$, $p = 1, 2, 3$, суммарное количество которых не превышает m. В совокупности для всех компонент q соответствующие решения из континуума $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ выделяют $S \leqslant m^2$ пар угловых положений, составляющих суммарный оптимальный план измерений.

Для дальнейших рассмотрений упростим обозначения. Оптимальным угловым положениям соответствуют оптимальные измерения. Обозначим совокупность всех оптимальных измерений через $\mathcal{Z}_0 = (z_{i_1^0}, \ldots, z_{i_S^0})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^S$, соответствующие им векторы – через $\mathcal{H}_0 = (H_{i_1^0}, \ldots, H_{i_S^0})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{m \times S}$, а помехи – через $\mathcal{P}_0 = (\varrho_{i_1^0}, \ldots, \varrho_{i_S^0})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^S$. Тогда в матричной форме совокупность оптимальных измерений можно представить в виде

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{H}_0^\mathsf{T} q + \mathcal{P}_0.$$

Обозначим оптимальные оцениватели для q_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, через $\Psi^{(\nu)} \in \in \mathbb{R}^S$, т.е.

$$\tilde{q}_\nu = \Psi^{(\nu)\mathsf{T}} \mathcal{Z}_0,$$

причем в силу условий несмещенности (8)

$$\mathcal{H}_0 \Psi^{(\nu)} = e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

и каждый $\Psi^{(\nu)}$ содержит не более m отличных от нуля компонент.

Если исследователь в состоянии реализовать указанные измерения (в рассматриваемом случае безупречно установить стенд в строго оптимальные положения), то задача полностью решена. Однако установить стенд точно в заданные положения не всегда технически легко. Часто его можно установить в некоторые близкие положения. Тогда в матричной форме набор субоптимальных измерений представим в виде

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H}^\mathsf{T} q + \mathcal{P}, \tag{21}$$

где $\mathcal{Z}$ – вектор, составленный их субоптимальных измерений, $\mathcal{P} = (\varrho_{i_1}, \ldots \ldots, \varrho_{i_S})^\mathsf{T}$ – вектор помех, $\mathcal{H} = (H_{i_1}, \ldots, H_{i_S})$; при этом векторы $H_{i_1}, \ldots, H_{i_P}$ соответствуют углам, близким к оптимальным, и поэтому близки к оптимальным векторам $H_{i_1^0}, \ldots, H_{i_P^0}$. По аналогии можно попытаться сформировать оценки, соответствующие близким планам, но с теми же оптимальными оценивателями:

$$\tilde{q}'_\nu = \Psi^{(\nu)\mathsf{T}} \mathcal{Z}. \tag{22}$$

Однако для близких планов условия несмещенности, вообще говоря, уже не выполняются:

$$\mathcal{H} \Psi^{(\nu)} \neq e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Тогда, как легко показать, гарантированные ошибки оценок (22) бесконечны, и поэтому оценки (22) непригодны.

Выходом из этой ситуации является следующий прием. Введем матрицу $\mathcal{D}$ порядка $m \times S$, образованную оптимальными оценивателями для всех компонент:

$$\mathcal{D} = \left(\Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(m)}\right)^\mathsf{T}$$

и умножим на нее слева уравнения (21). Тогда получим систему m уравнений относительно m неизвестных q:

$$\mathcal{D}\mathcal{Z} = \mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}} q + \mathcal{D}\mathcal{P}.$$

Матрица $\mathcal{H}$ близка к $\mathcal{H}_0$, для которой выполнены условия несмещенности (20): $\mathcal{D}\mathcal{H}_0^{\mathsf{T}} = E_m$, где E_m – единичная матрица порядка m. Поэтому квадратная матрица $\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}$ близка к единичной и, следовательно, невырожденна, и оценки q_ν можно построить следующим образом:

$$(23)\qquad \begin{gathered} \tilde{q}_\nu^* = e^{(\nu)\mathsf{T}} \tilde{q}^*, \quad \tilde{q}^* = \left(\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \mathcal{D}\mathcal{Z}, \\ \text{т.е.}\ \ \tilde{q}_\nu^* = \tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}} \mathcal{Z}, \quad \tilde{\Psi}^{(\nu)} = \mathcal{D}^{\mathsf{T}} \left(\left(\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \right)^{\mathsf{T}} e^{(\nu)}. \end{gathered}$$

При этом, очевидно, $\tilde{\Psi}^{(\nu)} \approx \Psi^{(\nu)}$.

Построенные выше оценки $\tilde{q}_\nu^*$ являются несмещенными, так как в силу (23) очевидно, что

$$(24)\qquad \mathcal{H}\tilde{\Psi}^{(\nu)} = e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Вычислим гарантированные ошибки оценок q_ν, полагая, что в задаче калибровки все ошибки измерений ограничены одной величиной – единицей ($\sigma = 1$). Учитывая условия несмещенности (24) и вводя обозначения для компонент оценивателей $\tilde{\Psi}^{(\nu)} = \left(\tilde{\Psi}_1^{(\nu)}, \ldots, \tilde{\Psi}_S^{(\nu)}\right)^{\mathsf{T}}$, получим равенства:

$$\max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma,\ k=1,\ldots,S\}} \left|\tilde{q}_\nu^* - q_\nu\right| = \max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma,\ k=1,\ldots,S\}} \left|\tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{Z} - e^{(\nu)\mathsf{T}} q\right| =$$
$$= \max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma, k=1,\ldots,S\}} \left|\left(\mathcal{H}\tilde{\Psi}^{(\nu)} - e^{(\nu)}\right)^{\mathsf{T}} q + \tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{P}\right| =$$
$$= \max_{\{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma, k=1,\ldots,S\}} \left|\tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{P}\right| = \sum_{k=1}^{S} \left|\tilde{\Psi}_k^{(\nu)}\right|.$$

В силу близости $\tilde{\Psi}^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$ последнее выражение близко к величине $\sum_{k=1}^{S} |\Psi_k^{(\nu)}|$, равной оптимальному гарантированному значению ошибки оценки каждой компоненты q_ν. Таким образом, построение оценок искомых параметров по реализуемым формулам (23) приводит к почти оптимальным оценкам.

6. О необходимости учитывать погрешности стенда

Выше получены оптимальные гарантирующие оценки параметров блока ньютонометров в предположении неидеальности стенда. Возникает вопрос: если при построении алгоритма оценивания не производить его диагностику, условно полагая его идеальным, то нельзя ли получить оценки параметров блока более простым способом, исходя из модели, учитывающей только погрешности самого блока, которые и при неидеальном стенде были бы достаточно точными.

Нетрудно увидеть, что если не принимать во внимание погрешности стенда (другими словами, полагая в (2) $q_1 = q_2 = q_3 = 0$), то задача оценивания (7), (8) декомпозируется на три независимых задачи гарантирующего оценивания – отдельную для каждого ньютонометра. Среди оптимальных для упрощенной модели оценок некоторые оценки могут оказаться оптимальными и для полной системы, а какие-то существенно неоптимальными и смещенными (т.е. условия (8) будут нарушены): ошибки стенда напрямую переходят в ошибки оценок блока, увеличивая их по сравнению с оптимальными. Однако заранее, без анализа полной системы, выяснить, какая оценка является несмещенной при неидеальном стенде, а какая – смещенной, невозможно. Поэтому при оценке погрешностей блока ньютонометров учитывать неидеальность стенда необходимо. При этом можно установить, что усложнение модели за счет учета неидеальности стенда не приводит к увеличению ошибок определения погрешностей блока.

7. Другие способы установки блока ньютонометров на планшайбу

Назовем описанное выше положение блока ньютонометров на планшайбе базовым. Возможны и другие варианты установки блока. В них оси блока ньютонометров совпадают с осями в базовом положении, но при других нумерации и направлении осей. Это соответствует ортогональной матрице Q, состоящей из нулей и единиц (со знаком плюс или минус); определитель матрицы Q равен единице. Далее будет показано, что новые результирующие соотношения не нужно выводить заново с самого начала, а можно получить их, немного модифицируя полученные выше базовые соотношения.

Опишем новый вариант установки блока на планшайбу, искусственно представляя, что сначала блок был установлен на планшайбу (с некоторой небольшой погрешностью) в соответствии с базовым, а потом дополнительно *точно* повернут в соответствии с матрицей Q. При этом $\chi'' = Q\,\chi'$, $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$, где χ' – координаты произвольного вектора в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, установленного в соответствии с базовым вариантом, а χ'' – координаты этого же вектора в проекциях на оси Mz в его новом положении.

Пусть $z(\alpha,\beta)$ – нормированная невязка показаний блока ньютонометров в новом положении, $\varrho(\alpha,\beta)$ – флуктуационная погрешность блока ньютонометров в новом положении. Тогда, очевидно, для нового положения блока имеет место следующее соотношение, аналогичное (1):

$$
\begin{aligned}
z(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{\langle f'\rangle - \tilde f(\alpha,\beta)\right\} + \varrho(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{\langle f'\rangle - Q\tilde f_z(\alpha,\beta)\right\} + \varrho(\alpha,\beta) = \\
= g^{-1}\Big\{(E+\Gamma)\,Q\,\left(-g_z(\alpha,\beta,q_b)\right) + \Delta f^0 - Q\,\left(-\tilde g_z(\alpha,\beta)\right)\Big\} + \varrho(\alpha,\beta),
\end{aligned}
$$

где: $\langle f'\rangle$ — известные осредненные показания блока в новом положении; $\tilde f(\alpha,\beta)$ — предсказанные по измерениям углов α,β показания блока в новом положении; $\tilde{f}_z(\alpha,\beta)$ — предсказанные показания блока в базовом положении; Γ, Δf_z^0 — параметры погрешностей блока; $g_z(\alpha,\beta,q_b)$ – как и ранее, истинное значение вектора ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz в базовом положении; $q_b = (\kappa, \epsilon, \Delta\alpha, \Delta\beta, \alpha^*, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta g/g)^{\mathsf{T}}$— как и ранее, параметры погрешностей стенда; $\tilde{g}_z(\alpha,\beta)$ — как и ранее, точно вычисляемый по измерениям углов прогнозируемый вектор ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz в базовом положении.

Тогда, очевидно,

$$Q^{-1}z(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{Q^{-1}\langle f'\rangle - \tilde{f}_z(\alpha,\beta)\right\} + Q^{-1}\varrho(\alpha,\beta) =$$
$$= g^{-1}\{(E + Q^{-1}\Gamma Q)(-g_z(\alpha,\beta,q_b)) + Q^{-1}\Delta f^0 - (-\tilde{g}_z(\alpha,\beta))\} + Q^{-1}\varrho(\alpha,\beta). \tag{25}$$

Формула (25) одинакова по структуре со вторым равенством в (1) и полностью совпадает с ним при заменах:

$$z \to Q^{-1}z, \quad \Gamma \to Q^{-1}\Gamma Q, \quad \Delta f^0 \to Q^{-1}\Delta f^0, \quad \varrho \to Q^{-1}\varrho; \tag{26}$$

при этом исходные элементы меняют свое расположение соответственно Q.

Таким образом, используя известную из предыдущих рассуждений зависимость (2) итоговых показаний от погрешностей стенда и блока, получена аналогичная зависимость для нового положения блока ньютонометров. При этом в качестве удобных итоговых измерений берется величина $Q^{-1}z(\alpha,\beta)$. Тогда при помощи представленной выше методики оцениваются величины $Q^{-1}\Gamma Q$ и $Q^{-1}\Delta f^0$. Опишем это более подробно.

При новом варианте установки блока ньютонометров физически осмысленно поступить следующим образом. Сначала надо перейти от системы координат $M^b j$ к новой системе координат $M^b k$, по осям которой в идеале должен быть установлен блок ньютонометров. Матрица ориентации $M^b k$ относительно $M^b j$ определяется известной матрицей Q. Затем, в силу суммарной погрешности установки планшайбы по осям $M^b k$ и блока на планшайбу, образуется неточность в угловой ориентации приборного трехгранника Mz относительно $M^b k$. Эта неточность описывается матрицей $(E + \hat{\theta}^k)$, где $\theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \theta_3^k)^{\mathsf{T}}$ – неизвестный вектор малого поворота Mz относительно $M^b k$, а $\hat{\theta}^k$ – соответствующая ему кососимметрическая матрица.

Вначале этот переход был формализован искусственно: сначала ориентация $M^b j$ была чуть изменена при помощи неизвестного вектора малого поворота θ с неявным построением нового трехгранника $M^b j(\theta)$, а потом точным известным поворотом, определяемым матрицей Q, было получено истинное положение приборного трехгранника Mz.

Поэтому кососимметрические матрицы $\hat{\theta}^k$ и $\hat{\theta}$, соответствующие векторам малых поворотов θ^k и θ, связаны соотношением

$$Q(E + \hat{\theta}) = (E + \hat{\theta}^k)Q, \quad \hat{\theta}^k = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3^k & -\theta_2^k \\ -\theta_3^k & 0 & \theta_1^k \\ \theta_2^k & -\theta_1^k & 0 \end{pmatrix}$$

(матрица $\hat{\theta}$ определяется аналогично), откуда

$$\hat{\theta} = Q^{-1}\hat{\theta}^k Q. \tag{27}$$

Следовательно, при новом положении блока в основных формулах (4), связывающих непосредственно оцениваемые параметры q с ошибками блока ньютонометров и стенда, надо сделать замены (26), (27).

Тогда с учетом формул (4) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\kappa = q_1, \quad \Delta\alpha + \alpha^* = q_2, \quad \epsilon = q_3, \quad \begin{pmatrix} \Delta f_1^0 \\ \Delta f_2^0 \\ \Delta f_3^0 \end{pmatrix} = g\,Q \begin{pmatrix} q_7 \\ q_{11} \\ q_{15} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \left(\Gamma + \hat{\theta}^k\right) = Q \begin{pmatrix} q_5 & q_6 & q_4 \\ q_9 & q_{10} & q_8 \\ q_{12} & q_{13} & q_{14} \end{pmatrix} Q^{-1} + E\frac{\Delta g}{g} - QNQ^{-1}\Delta\beta, \\ N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{29}$$

Формулы (28) и (29) являются основой для построения оценок погрешностей блока ньютонометров и ошибок стенда при небазовом положении блока. Обычно принимается одно из стандартных соглашений относительно Γ: считается, что матрица Γ является либо нижнетреугольной, либо симметричной. Кроме того, элементы $E\frac{\Delta g}{g}$ много меньше диагональных элементов Γ, а два ненулевых, внедиагональных элемента $QNQ^{-1}\Delta\beta$ много меньше соответствующих элементов $\hat{\theta}^k$; поэтому ими можно пренебречь. Тогда, подставляя в (28), (29) вместо компонент q их оценки, найденные при помощи базового алгоритма, подробно описанного выше, легко построить оценки для погрешностей стенда κ, $\Delta\alpha + \alpha^*$, ϵ, систематических смещений Δf_1^0, Δf_2^0, Δf_3^0 и элементов матрицы $\Gamma + \hat{\theta}^k$. Используя стандартные соглашения относительно Γ и кососимметричность $\hat{\theta}^k$, по оценке $\Gamma + \hat{\theta}^k$ легко однозначно оценить элементы Γ и величины θ_1^k, θ_2^k и θ_3^k.

8. Заключение

В статье подробно описано применение метода гарантирующего оценивания для получения минимального числа угловых положений при калибровке блока ньютонометров на номинально высокоточном стенде. Показано, что минимальное число положений стенда равно 10. Получен итоговый минимальный план калибровки, и построены оптимальные гарантирующие оценки параметров. Исследован случай неточной реализации оптимальных угловых положений. Приведены формулы пересчета при общем положении блока ньютонометров на планшайбе. Применение предложенного подхода к реальной задаче калибровки с диагностикой стенда показало высокую эффективность метода гарантирующего оценивания. Этот метод может быть использован для решения многих задач оценивания, когда число измерений должно быть минимизировано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН, 2010.
5. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
6. *Белоусов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.
7. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
8. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business Media, B.V., 2013.
9. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8–14.
10. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
11. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
12. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. М.: МАКС Пресс, 2011.
13. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13–27.
14. *Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю.* Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов / Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2009. Т. 1. С. 212–223.
15. *Веремеенко К.К., Галай И.А.* Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Электрон. журн. “Тр. МАИ”. 2013. № 63.
16. *Голован А.А., Матасов А.И.* Гарантирующий подход для определения оптимального плана калибровки // Фундамент. и прикл. мат. 2018. Т. 22. № 2. С. 133–145.
17. *Гусинский В.З., Лесючевский В.М., Литманович Ю.А., Столбов А.А.* Алгоритм калибровки трехосного блока ньютонометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. 2000. № 4 (31). С. 86.

18. *Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Формализация последовательной схемы калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // АиТ. 2018. № 1. С. 66–83.

Derevyankin A.V., Matasov A.I. Formalizing a Sequential Calibration Scheme for a Strapdown Inertial Navigation System // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 52–66.

19. *Драницына Е.В.* Калибровка измерительного модуля по навигационному решению БИНС: выбор плана движений стенда / Сб. матер. XXIV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2017. С. 235–240.

20. *Егоров Ю.Г., Попов Е.А.* Исследование минимально избыточных программ калибровки триады акселерометров // Авиакосмическое приборостроение. 2016. № 6. С. 3–8.

21. *Емельянцев Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2016.

22. *Ермаков В.С., Дунаев Д.А., Широков А.А. и др.* Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Аэрокосмич. техника. Вестн. ПГТУ. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2004. № 18. С. 25–30.

23. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. матер. Юбилейной XV СПб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ "ЦНИИ Электроприбор", 2008. С. 145–154.

24. *Сазонов И.Ю., Шаймарданов И.Х.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы на микромеханических датчиках ньютонометров и гироскопов / Вопросы оборонной техники. Науч.-техн. сб. Сер. 9 "Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы". М.: Информтехника, 2010. № 3. С. 73–82.

25. *Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y.* Systematic Calibration for Ultra-High Accuracy Inertial Measurement Unit // Sensors. 2016. 16 (940).

26. *Moon-Sik Kim, Si-Bok Yu, Kwang-Soo Lee.* Development of High-Precision Calibration Method for Inertial Measurement Unit // Int. J. Precision Engineer. Manufactur. 2014. V. 15. No. 3. P. 567–575.

27. *Panahandeh G., Skog I., Jansson M.* Calibration of the Accelerometer Triad of an Inertial Measurement Unit, Maximum Likelihood Estimation and Cramer-Rao bound // Proc. Int. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Zurich, Switzerland, 2010.

28. *Paternain S., Tailanian M., Canetti R.* Calibration of an Inertial Measurement Unit // Proc. 16th Int. Conf. on Advanced Robotics, 2013.

29. *Secer G., Barshan B.* Improvements in Deterministic Error Modeling and Calibration of Inertial Sensors and Magnitometers // Sensors Actuat. A. 2016. (247). P. 522–538.

30. *Syed Z.F., Aggarwal P., Goodall C., Niu X., El-Sheimy N.* A New Multi-Position Calibration Method for MEMS Inertial Navigation Systems // Meas. Sci. Technol. 2007. No. 18. P. 1897–1907.

31. *Xu Y., Wang Y., Su Y., Zhu X.* Research on the Calibration Method for Micro Inertial Measurement Unit for Engineering Applications // IEEE Sens. J. 2016. ID 9108197.

32. Ресурс www.acutronic.com/ru/produkcija/2-osevye-stendy.html.

33. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.

34. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Кн. дом "Либроком", 2011.

35. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 16.01.2019

После доработки 09.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. **Ю.И. ПАРАЕВ, д-р техн. наук (paraev@mail.ru), К.О. ПОЛУЭКТОВА (poluekt.kseni@mail.ru)**
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНОГО КАПИТАЛА И ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Получено аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения накоплений на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: односекторная экономика, основной капитал, трудовые ресурсы, накопления, оптимальное управление, динамическое программирование.

DOI: 10.31857/S000523102004011X

1. Введение

Проблема управления односекторной экономикой возникла в [1, 2]. К настоящему времени ей посвящено большое количество публикаций, в которых рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (например, [3–7]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом какихлибо случайных возмущений, действующих в процессе производства.

Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами: основным капиталом и трудовыми ресурсами. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курса валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Трудовые ресурсы могут изменяться случайным образом за счет экономических факторов, по демографическим причинам, из-за миграции населения и т.п. В [8] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения накоплений (непроизводственного потребления, благосостояния и т.п.) на заданном периоде производства. Решение задачи проводится с помощью метода динамического программирования.

2. Постановка задачи

За исходную модель задачи выбирается модель из [2]. Но в нее вносятся некоторые изменения и дополнения для более четкого и удобного, по мнению авторов, изложения материала. Состояние экономики определяется величинами $K(t)$ – основной капитал, $L(t)$ – трудовые ресурсы и производственной функцией $Y(K,L)$. Качество управления экономикой определяется величиной накоплений $C(t)$, полученных в течение отрезка времени $[0,t]$. Значение $Y(K,L)$ есть валовый продукт, произведенный в единицу времени. Поэтому $Y(K,L)\Delta t$ есть валовый продукт, произведенный за время Δt. Управление экономикой состоит в том, что на каждом временно́м отрезке длиной Δt часть этого продукта $uY\Delta t$ идет на увеличение основного капитала, а часть $(1-u)Y\Delta t$ – на увеличение накоплений $C(t)$. Таким образом, управляющим параметром является коэффициент u, который определяет долю валового продукта, которая идет на увеличение основного капитала. При этом всегда

$$0 \le u \le 1. \tag{1}$$

Для переменных $K(t)$, $C(t)$ и $L(t)$ можно записать дифференциальные уравнения [6]

$$\begin{aligned} \dot{K} &= uY(K,L) - \lambda K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1-u)Y(K,L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L, \quad L(0) = L_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda\,(\ge 0)$ – коэффициент амортизации, $\rho\,(\ge 0)$ – норма дисконтирования, ν – темп изменения трудовых ресурсов. Здесь $\lambda K(t)$ – темп потери капитала за счет амортизации; $u(t)Y(K(t),L(t))$ – темп увеличения капитала за счет доли валового продукта (инвестиций); $\rho C(t)$ и $(1-u(t))Y(K(t),L(t))$ – темп увеличения накоплений за счет дисконтирования и за счет доли валового продукта соответственно.

В стохастическом случае в уравнения (2) нужно добавить какие-то случайные воздействия. В данной статье предлагается следующая модель стохастической односекторной экономики:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= uY(K,L) - \lambda K(t) + \sigma_K K \xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1-u)Y(K,L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L + \sigma_L L \xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\xi_K(t)$ и $\xi_L(t)$ – стандартные независимые между собой белые гауссовские шумы, σ_K и σ_L – соответствующие коэффициенты волатильности. Такое включение в модель случайных воздействий достаточно традиционно в экономико-математических задачах [9–11].

Как обычно, для дальнейшего исследования вводятся удельные переменные: $k(t) = K(t)/L(t)$ – фондовооруженность труда и $c(t) = C(t)/L(t)$ – удельные накопления, т.е. накопления, приходящиеся на одного работника, а также функция $F(k) = Y/L$ – производительность труда (валовый продукт на одного работника).

В детерминированном случае для этих переменных на основании (2) получаются уравнения

$$\begin{gathered} \dot{k} = -\mu k + uF(k), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} = \delta c + (1-u)F(k), \quad c(0) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\mu = \lambda + v$, $\delta = \rho - v$. Далее будем считать, $\mu = \lambda + v > 0$ и $\delta = \rho - v > 0$. Это означает, что если трудовые ресурсы возрастают ($v > 0$), то темп их роста не может превышать норму дисконтирования ρ. Если трудовые ресурсы убывают ($v < 0$), то темп их убывания не может превышать коэффициента амортизации λ. Иначе возникают "экзотические" варианты.

Детерминированная задача: *для уравнений* (4) *в течение заданного конечного планируемого периода производства* $[0, T]$ *найти такое кусочно-непрерывное управление* $u(t)$ *с учетом* (1), *при котором величина* $C(T)$ *максимальна.*

В стохастическом случае для удельных переменных из (3) с помощью формулы Ито получаются следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \dot{k} = -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} = \delta c + (1-u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и далее

$$\mu = \lambda + v + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2, \quad \delta = \rho - v + \sigma_L^2, \quad k_0 = K_0/L_0.$$

Стохастическая задача: для уравнений (5) *в течение заданного отрезка времени* $[0, T]$ *найти такое кусочно-непрерывное управление* $u(t)$ *с учетом* (1), *при котором среднее значение величины* $c(T)$ *максимально.*

Далее будет использоваться производственная функция Кобба–Дугласа $Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, где A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам, $\beta = 1 - \alpha$ – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам ($\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$). Отсюда следует, что $F(k) = Y/L = Ak^\alpha > 0$.

3. Решение стохастической задачи

Для решения задачи используется метод динамического программирования. Введем функцию Беллмана $s(k, c; t, T)$ – среднее значение величины $c(T)$ при условии, что процесс продолжается на отрезке $[t, T]$ с начальными условиями $k(t) = k$ и $c(t) = c$ и на этом отрезке применяется оптимальное управление. Таким образом, величина $J = s(k_0, 0; 0, T)$ есть максимальное среднее значение величины $c(T)$ для данной задачи. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана [12]:

$$
(6)\qquad \begin{gathered}
-\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial t} = \max_{0\le u(t)\le 1}\left\{\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial k}(uF(k)-\mu k)+\right.\\
\left.+\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial c}(\delta c+(1-u)F(k))+G(s(k,c;t,T))\right\},\quad s(k,c;T,T)=c,
\end{gathered}
$$

где

$$
(7)\qquad G(s)=\frac{1}{2}(\sigma_K^2+\sigma_L^2)k^2\frac{\partial^2 s}{\partial k^2}+\sigma_L^2 kc\frac{\partial^2 s}{\partial k\partial c}+\frac{1}{2}\sigma_L^2c^2\frac{\partial^2 s}{\partial c^2}
$$

– гессиан функции $s(k,c;t,T)$. Уравнение (6) – детерминированное. Здесь и далее переменные k и c – просто аргументы функции, а не случайные процессы. Из решения (6) получается решение задачи. Существование этого решения означает существование решения стохастической задачи. Далее при решении отрезок $[0,T]$ разбивается на три временны́х отрезка, на каждом из которых записывается свое уравнение в частных производных (6). Затем решения этих уравнений сшиваются. Можно показать, что эти решения существуют и единственны [13].

Уравнение (6) перепишем в виде

$$
(8)\qquad \begin{gathered}
-\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial t}=\\
=\max_{0\le u(t)\le 1}\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial k}-\frac{\partial s}{\partial c}\right)uF(k)-\mu k\frac{\partial s}{\partial k}+\frac{\partial s}{\partial c}(\delta c+F(k))+G(k,c)\right\}.
\end{gathered}
$$

Максимум правой части этого уравнения по u с учетом (1) достигается при

$$
(9)\qquad u(t)=\begin{cases}
1, & \text{если}\quad \dfrac{\partial s}{\partial k}>\dfrac{\partial s}{\partial c},\\[2mm]
u_{\text{ос}}, & \text{если}\quad \dfrac{\partial s}{\partial k}=\dfrac{\partial s}{\partial c},\\[2mm]
0, & \text{если}\quad \dfrac{\partial s}{\partial k}<\dfrac{\partial s}{\partial c}.
\end{cases}
$$

Здесь $u_{\text{ос}}$ – так называемое особое управление [14, 15], которое будет определено ниже. В рассматриваемой задаче отрезок времени, в течение которого имеет место особое управление, соответствует участку сбалансированного равновесного состояния экономики и называется *магистралью*.

Можно допустить, что если коэффициенты σ_K и σ_L малы, то решение стохастической задачи будет близко к решению детерминированной задачи, которая с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [6]. Если период производства $[0,T]$ достаточно велик, то основное решение состоит в том, что отрезок $[0,T]$ точками t_1 и t_2 $(0<t_1<t_2<T)$ разбивается на три отрезка: $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$ и $[t_2,T]$ длительностью $r_1=t_1$,

$r_2 = t_2 - t_1$ и $r_3 = T - t_2$ соответственно. Отрезок $[0, t_1]$ соответствует выходу (если $k_0 < k_{\text{ос}}$ при $u = u_1 = 1$) или сходу (если $k_0 > k_{\text{ос}}$ при $u = u_1 = 0$) на магистраль; отрезок $[t_1, t_2]$ – магистрали (предполагается, что она существует); отрезок $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали $k = k_{\text{ос}} = \text{const}$, причем

$$k_{\text{ос}}^{\beta} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu} \quad \text{и} \quad u_{\text{ос}} = \frac{\mu k}{F}. \tag{10}$$

На заключительном отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. Таким образом, согласно (9) структура оптимального управления имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ u_{\text{ос}} & \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \tag{11}$$

Фактически получается, что решение детерминированной задачи сводится к нахождению значений t_1 и t_2. Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малых коэффициентах σ_K и σ_L решение будет близко к решению детерминированной задачи, т.е. структура оптимального управления имеет такой же вид (11). Таким образом, решение стохастической задачи также сводится к нахождению значений t_1 и t_2. Заметим, что при решении детерминированной задачи методом динамического программирования уравнение Беллмана имеет вид (6) при $G(s) = 0$. Оно является однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и может решаться методом характеристик [16]. Его решение (оно не приводится) дает определенные сведения о свойствах решения уравнения (6). Уравнение (6) при заданном управлении u является неоднородным уравнением второго порядка, причем неоднородное слагаемое $G(s)$ есть гессиан функции Беллмана. Это обстоятельство с учетом свойств функции $F(k)$ позволяет получить аналитические решения.

Как обычно, решение уравнения (6) или (8) начнем с правого конца. Обозначим через $s_1(k, c; t, T)$, $s_2(k, c; t, T)$ и $s_3(k, c; t, T)$ функции Беллмана, если момент t относится к отрезкам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$ соответственно. Обозначим также $k_i = k(t_i)$ и $c_i = c(t_i)$, $i = 1, 2$.

4. Сход с магистрали

На отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial s_3(k,c;t,T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k,c;t,T)}{\partial k} + \frac{\partial s_3(k,c;t,T)}{\partial c}(\delta c + F(k)) + G(k,c), \\ s_3(k,c;T,T) = c. \end{gathered} \tag{12}$$

Пользуясь методом разделения переменных, его решение будем искать в виде

$$s_3(k, c; t, T) = c e^{\delta(T-t)} + F(k) w(t, T), \tag{13}$$

где $w(t,T)$ – искомая функция, причем такая, что $w(T,T)=0$. Подставляя (13) в (7) и (12) и сокращая подобные слагаемые, получаем, что

$$-F(k)\dot{w}(t,T) = -\mu k F'(k) w(t,T) + e^{\delta(T-t)}F(k) + \sigma k^2 F''(k) w(t,T),$$

где $\sigma = (\sigma_K^2 + \sigma_L^2)/2$. Параметр σ можно назвать *общим коэффициентом волатильности*. Учитывая, что

$$F(k) = Ak^\alpha, \quad F'(k) = \alpha A k^{\alpha-1} = \alpha \frac{F(k)}{k}, \quad F''(k) = \alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2} = -\alpha\beta\frac{F(k)}{k^2},$$

из последнего выражения получаем

$$-F(k)\dot{w}(t,T) = -\alpha\mu F(k) w(t,T) - \alpha\beta\sigma F(k) w(t,T) + F(k)e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив здесь на $F(k)$, приходим к уравнению

$$-\dot{w}(t,T) = -\vartheta w(t,T) + e^{\delta(T-t)}, \quad w(T,T) = 0,$$

где $\vartheta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$. Решение этого уравнения имеет вид

$$w(t,T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\vartheta(T-t)}}{\delta + \vartheta}. \tag{14}$$

Поскольку рассматриваемая задача – терминальная, то на оптимальной траектории $\{k(t), c(t)\}$ функция Беллмана должна быть постоянной. Поэтому полная производная по t функции $s_3(k,c;t,T)$, определенной в (13), должна равняться нулю. Как показывает анализ, чтобы последнее выполнялось, на отрезке $[t_2, T]$ оптимальные переменные $k(t)$ и $c(t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\dot{k} = -\frac{\vartheta}{\alpha}k, \quad \dot{c} = c\delta + F(k). \tag{15}$$

5. Магистраль

Как следует из (9), на магистрали должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial k} \equiv \frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial c}. \tag{16}$$

При этом уравнение (8) принимает вид

$$-\frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_2}{\partial k} + \frac{\partial s_2}{\partial c}(\delta c + F(k)) + G(k,c). \tag{17}$$

Решение (17) будем искать в виде

$$s_2(k,c;t,T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + B, \tag{18}$$

где $H(k)$ – искомая функция, B – какая-то константа. Подставляя (18) в (7) и (17), сокращая на $\exp\{\delta(t_2 - t)\}$ и приводя подобные члены, получаем

$$\delta H(k) = -\mu k H'(k) + F(k) + \sigma k^2 H''(k). \tag{19}$$

Из подстановки (18) в (16) следует, что функция $H(k)$ должна удовлетворять условию $H'(k) = 1$. Если последнее условие выполняется, то и $H''(k) = 0$. Поэтому из (19) следует, что

$$H(k) = \frac{F - \mu k}{\delta}. \tag{20}$$

К выражению (20) еще раз применим требование $H'(k) = 1$. Получаем, что

$$H'(k) = \frac{\alpha A k^{\alpha-1} - \mu}{\delta} = 1.$$

Отсюда следует выражение (10) для $k = k_{\text{ос}}$. Как уже отмечено, функция Беллмана должна быть постоянной. Поэтому полная производная по t функции $s_2(k, c; t, T)$, определенной в (18), должна равняться нулю. Отсюда можно получить, что переменная $k(t)$ должна удовлетворять уравнению (5) при $\sigma_K = \sigma_L = 0$. А так как на отрезке $[t_1, t_2]$ $k = k_{\text{ос}} = \text{const}$, то отсюда следует выражение (10) для $u_{\text{ос}}$.

Константа B в (18) определяется из условия $s_2(k_2, c_2; t_2, T) = s_3(k_2, c_2; t_2, T)$. Подставляя сюда (13), (14) и (18), получаем

$$B = B(t_2) = (Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - Q(k_2)e^{-\vartheta(T-t_2)}, \tag{21}$$

где

$$Q(k) = \frac{F(k)}{\delta + \vartheta}.$$

Здесь и далее $k = k_{\text{ос}}$. Подставляя (21) в (18), получаем выражение для $s_2(k, c; t, T)$. Видно, что эта функция зависит от параметра t_2, который пока не определен. Естественно выбрать его так, чтобы достигался максимум функции $s_2(k, c; t, T)$ или, что то же самое, функции $B(t_2)$. Вычислим первую производную этой функции по t_2 и приравняем ее к нулю

$$\frac{d}{dt_2} = -\delta(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - \vartheta Q(k_2)e^{-\vartheta(T-t_2)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$e^{-(\delta+\vartheta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}{\vartheta Q(k_2)} \tag{22}$$

и

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln\left(\frac{\vartheta Q(k_2)}{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}\right). \tag{23}$$

Анализ второй производной функции $B(t_2)$ показывает, что при условии (22) она всегда отрицательна и, следовательно, эта функция имеет максимум. Подставляя (22) в (18), получаем окончательно, что на отрезке $[t_1, T]$

$$(24)\quad J = s_2(k_1, c_1; t_1, T) = (c_1 + H(k_1))e^{\delta(T-t_1)} + \frac{\vartheta+\delta}{\vartheta}(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)}.$$

Здесь $k_1 = k_2 = k_{\text{ос}}$. Так как функция Беллмана на оптимальной траектории постоянна, то выражение (24) определяет максимальное среднее значение непроизводственного потребления на отрезке $[0, T]$. Только сюда следует добавить значения c_1 и t_1, которые определяются далее при анализе отрезка $[0, t_1]$.

6. Выход на магистраль

На отрезке $[0, t_1]$ имеют место два варианта, связанных с соотношением между $k(0)$ и $k_{\text{ос}}$.

1-й вариант. При $k(0) < k_{\text{ос}}$ на отрезке $[0, t_1]$ $u = 1$. Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$(25)\quad -\frac{\partial s_1(k,c;t,T)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k,c;t,T)}{\partial k}(F(k) - \mu k) + \delta c\frac{\partial s_1(k,c;t,T)}{\partial c} + G(k,c).$$

Согласно (4) при $u = 1$ на отрезке $[0, t_1]$ накопления отсутствуют, т.е. $C(t) \equiv 0$. Следовательно, $c(t) = C(t)/L(t) \equiv 0$. Поэтому $s_1(k, c; t, T) = \text{const}$ и $G(k, c) = 0$. С другой стороны, при $G(k, c) = 0$ уравнение (25) является однородным уравнением в частных производных первого порядка, которое решается методом характеристик [16]. Соответствующие характеристические уравнения имеют вид:

$$\dot{k} = -\mu k + F(k), \quad k(0) = k_0,$$
$$\dot{c} = \delta c, \quad c(0) = 0.$$

Отсюда следует, что на отрезке $[0, t_1]$ $c(t) \equiv 0$, а решение первого уравнения имеет вид

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu}\left(1 - e^{-\beta\mu t}\right) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t}.$$

Это решение получается в результате подстановки:

$$k(t) = \exp\{y(t) + z(t)\},$$

где $y(t)$ и $z(t)$ – произвольные функции. Момент t_1 определяется из условия $k(t_1) = k_{\text{ос}}$ или из выражения

$$\frac{A}{\mu}\left(1 - e^{-\beta\mu t_1}\right) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t_1} = k_{\text{ос}}^\beta\,.$$

Отсюда

$$t_1 = r_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln \left(\frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{\text{ос}}^\beta} \right). \tag{26}$$

Значения $c_1 = 0$ и t_1 следует подставить в (24).

2-й вариант. При $k(0) > k_{\text{ос}}$ на отрезке $[0, t_1]$ $u = 0$. Поэтому функция $s_1(k, c; t, t_1)$ удовлетворяет уравнению (12). Повторяя приведенное ранее решение уравнения (12), можно найти эту функцию. Однако главное состоит в том, что на отрезке $[0, t_1]$ оптимальные переменные $k(t)$ и $c(t)$ должны удовлетворять уравнениям (15). Отсюда получаем

$$k(t_1) = k_0 e^{-\vartheta t_1/\alpha}, \quad c(t_1) = F(k_0) \frac{e^{\delta t_1} - e^{-\vartheta t_1}}{\delta + \vartheta}.$$

Момент t_1 находится из условия $k(t_1) = k_{\text{ос}}$. Это дает, что

$$t_1 = r_1 = \frac{\alpha}{\vartheta} \ln \frac{k_0}{k_{\text{ос}}}. \tag{27}$$

Значения $c(t_1)$ и t_1 следует подставить в (24).

Отметим, что для существования магистрали необходимо, чтобы $r_2 = T - r_1 - r_3 > 0$. Поэтому отрезок $[0, T]$ должен быть достаточно велик.

7. Иллюстративный пример

На рис. 1 и 2 приведены результаты моделирования уравнений (5) при $A = 1$, $\alpha = \beta = 0{,}5$, $\mu = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$, $T = 12$. Отдельно рассмотрены случаи, когда $k(0) < k_{\text{ос}}$ и когда $k(0) > k_{\text{ос}}$. На этих рисунках кривая *1* соответствует случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0$ (детерминированный вариант), кривая *2* – случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0{,}25$, кривая *3* – случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0{,}5$.

Видно, что с увеличением коэффициентов волатильности происходит больший разброс траекторий.

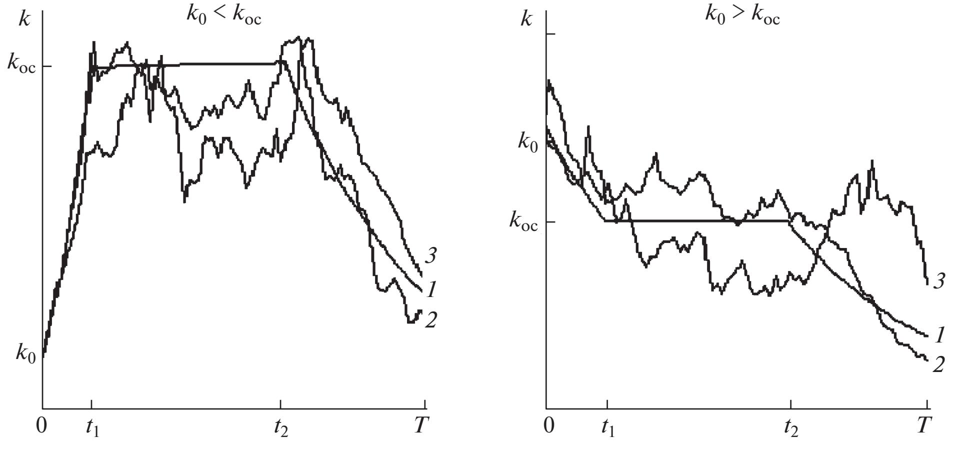

Рис. 1. Изменение фондовооруженности труда во времени.

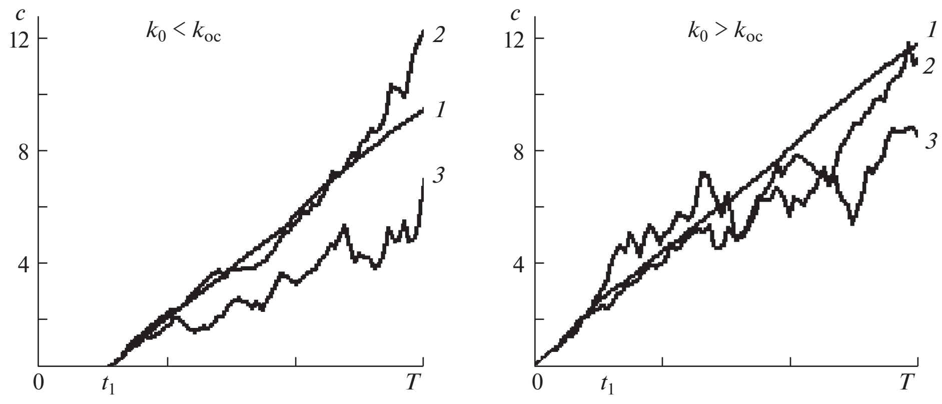

Рис. 2. Изменение удельных накоплений во времени.

8. Заключение

В заключение рассмотрим, как влияют коэффициенты волатильности σ_K и σ_L на результат решения задачи.

1. Решение зависит только от общего коэффициента волатильности σ.

2. Структура управления (11), полученная в предположении малости, в силу непрерывности решения остается справедливой и при больших σ.

3. Значение фондовооруженность труда на магистрали не зависит от σ.

4. Поскольку $\vartheta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$, то, как видно из (23) и (27), параметр σ влияет на длину отрезка $[0, t_1]$ в случае, когда $k(0) > k_{\text{oc}}$, т.е. там, где $u = 0$. При этом с ростом σ длины этих отрезков убывают до нуля пропорционально $1/\sigma$. Можно проверить, что при увеличении параметра σ величина максимального среднего значения J убывает. Это объясняется тем, что при увеличении σ уменьшаются отрезок, где $u = 0$, и увеличивается отрезок $[t_1, t_2]$ $(r_2 = T - r_1 - r_3,)$ где прирост накоплений меньше $(u_{\text{oc}} < 1)$, чем на отрезках, где $u = 0$.

5. В пределе при $\sigma \to \infty$ получаем следующее. Если $k(0) > k_{\text{oc}}$, то весь отрезок $[0, T]$ состоит из магистрали. Если $k(0) < k_{\text{oc}}$, то на отрезке $[0, t_1]$ $u = 1$, а на отрезке $[t_1, T]$ – магистраль. Соответствующие значения величины J можно получить из (24) путем предельного перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

3. *Лобанов С.Г.* К теории оптимального экономического роста // Эконом. журн. ВШЭ. 1999. № 1. С. 28–41.

4. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // АиТ. 2008. № 9. С. 140–155.

Demin N.S., Kuleshova E.V. Control of Single-sector Economy over a Finite Time Interval with Allowance for Employer Consumption // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 9. P. 1576–1590.

5. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 5–23.
6. *Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю.* Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 5–15.
7. *Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н.* Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикл. математика и информатика. Тр. факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Т. 44. С. 5–21. М.: МАКС Пресс, 2013.
8. *Соловьев В.И.* Стохастические методы в экономике и финансах. М.: ГУУ, 2000.
9. *Merton R.C.* Life Time Portfolio Selection under Uncertainity: the Continuous Time Case // Rev. Econ. Stat. 1969. V. 51. No. 3. P. 47–257.
10. *Merton R.C.* An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty // Rev. Econ. Stu. 1975. V. 42. No. 3. P. 375–393.
11. *Merton R.C., Samuelson P.A.* Continuous-time Finance. Cambridge: Blackwell, 1990.
12. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
13. *Курант Р.* Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
14. *Параев Ю.И.* Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // АиТ. 1962. № 9. С. 1202–1209.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
16. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: ГИФМЛ, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 11.07.2018

После доработки 27.02.2019

Принята к публикации 18.07.2019

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS