



Российская Академия Наук

А АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

8

АВГУСТ

Москва

2021

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноушко Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2021 г. П.А. МУХАЧЁВ (petr.mukhachev@skoltech.ru),
Т.Р. САДРЕТДИНОВ (tagir.sadretdinov@skoltech.ru),
Д.А. ПРИТЫКИН, канд. физ.-мат. наук (d.pritykin@skoltech.ru),
А.Б. ИВАНОВ, д-р философии (anton.ivanov2@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва),
С.В. СОЛОВЬЕВ, канд. техн. наук (sergey.soloviev@scsc.ru)
(Публичное акционерное общество “Ракетно-космическая корпорация “Энергия”,
Королев, Московская обл.)

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ДАННЫМ ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Приводится обзор основных достижений в области методов интеллектуального анализа данных о техническом состоянии космических аппаратов (КА). Основной акцент делается на анализе телеметрической информации (ТМИ), позволяющем идентифицировать нехарактерные для нормальной работы состояния КА и предсказывать возможные сбои в работе КА или его составных частей. Рассмотрены основные этапы, необходимые для создания систем мониторинга состояния КА общего назначения, подробно представлены методы обнаружения аномалий в ТМИ с учетом специфики КА и проанализированы известные авторам публикации по этой тематике. Приведены примеры внедрения таких систем в центрах управления полетами разных стран. Обсуждаются перспективные направления развития методов анализа технического состояния сложных систем, которые актуальны для решения задач в космической технике, а также отмечаются основные факторы, препятствующие развитию методов машинного обучения для анализа телеметрической информации.

Ключевые слова: интеллектуальный анализ данных, поиск аномалий, управление полетом, техническая диагностика, телеметрическая информация.

DOI: 10.31857/S0005231021080018

1. Введение

Космические аппараты (КА) и их составные части проектируются с учетом большого количества факторов: выполняемой программы полета, внешней среды, других систем, с которыми предстоит взаимодействие, и возможных управляющих воздействий. Однако неизбежные погрешности проектирования, моделирования и верификации не позволяют создать точные модели каждой из составных частей и КА в целом, и всех его возможных отказов в реальном космическом полете. Таким образом, во время функционирования КА могут возникать различного рода непредвиденные ситуации, приводящие к сбоям в работе составных частей КА, и ситуации, не просчитывавшиеся при создании КА и планировании программы полета.

Общий подход к обнаружению, локализации и устранению неисправностей (fault detection, isolation and recovery FDIR) призван обеспечить бесперебойное выполнение функций КА [1]. Этот подход предполагает обеспечение резервирования, применение систем автоматического управления, осуществляющих диагностику и запускающих процедуры восстановления, а также

тщательное изучение выявленных отказов, непредвиденных ситуаций и соответствующую корректировку программы полета.

В работах [2, 3] отмечается, что в настоящее время основными способами контроля технического состояния КА являются мониторинг пороговых значений и постоянный контроль ключевых телеметрических параметров (ТМП) оператором [2, 3]. Однако время специалиста дорого, а в его поле зрения могут постоянно находиться лишь несколько ТМП. В то же время число ТМП в КА часто достигает нескольких тысяч, к примеру космический аппарат GOCE имел 1300 ТМП, а в более крупных КА число ТМП может доходить до 50 тысяч [4], что делает невозможным ручной контроль параметров оператором. Мониторинг пороговых значений, вообще говоря, не позволяет обнаружить приближение нештатной ситуации (НШС) или выделить нехарактерное поведение КА. С развитием проектов по развертыванию мега-группировок автоматизация и интеллектуализация процесса мониторинга технического состояния спутников становятся еще более актуальными [5, 6].

Как показывает практика, нехарактерное поведение значений ТМП представляет интерес, поскольку часто предшествует сбоям в работе тех или иных составных частей КА. Такое anomальное поведение обычно не детектируется стандартными методами мониторинга пороговых значений. Задача поиска аномалий в телеметрической информации (ТМИ) очень сложна. Как правило, об аномалиях не хватает исторической информации, а появление аномалий не всегда предвещает отказ. Аномалии могут быть вызваны случайными сбоями в работе датчиков или канала передачи информации, нехарактерными ситуациями как безвредными, так и потенциально опасными для работы КА; они не имеют четкой границы, номинальное состояние может эволюционировать в процессе эксплуатации КА, а понятие аномалии будет отличаться для разных составных частей. Тем не менее задача обнаружения аномалий в ТМИ важна для последующей диагностики и анализа функционирования КА.

Для обнаружения аномалий используют два основных подхода. Первый предполагает наличие модели, которая явным количественным образом описывает работу системы. В этом случае несоответствие поведения системы и модели может служить индикатором неисправности. С одной стороны, такой подход позволяет явным образом моделировать неисправности и их последствия, с другой стороны, очевидным недостатком является сложность создания лежащих в его основе моделей. Второй подход заключается в применении методов машинного обучения, с помощью которых можно создавать модели работы системы на основе имеющихся данных. В [3, 6] подчеркивается важность развития таких систем для анализа технического состояния КА [3, 6]. В случае когда база данных обширна, на основе таких моделей могут быть созданы экспертные системы для диагностики КА. Обзору последних достижений в области применения методов машинного обучения для анализа состояния КА и посвящена настоящая статья.

Автоматизации обнаружения аномалий в данных из различных областей в последнее время было посвящено множество обзорных публикаций, освещающих как общие, так и более узкие тематики. Среди них можно выделить Chandola [7], Pimentel [8] и Wang [9], которые группируют методы по основным предположениям о природе анализируемых данных, дают оценки вычислительной сложности применяемых алгоритмов и перечисляют основные их

практические приложения. Chalapathy и соавт. [10] подробнее рассматривают методы, основанные на применении искусственных нейронных сетей и глубокого обучения. Zimek [11] и Thudumu [12] обсуждают особенности анализа данных с очень большой размерностью. Gavrilovski [13], Khan и Yairi [14], Basora [15] сделали обзоры по применениям методов поиска аномалий, в том числе в авиационной отрасли.

Несмотря на наличие перечисленных выше публикаций, насколько известно авторам настоящей статьи, на данный момент не существует обзора, раскрывающего современное состояние методов интеллектуального анализа данных космической техники. Настоящий обзор заполняет этот пробел, учитывает специфику, связанную именно с космической техникой, и возможные методы анализа ТМИ, выделяя направления, необходимые для дальнейшего развития и обозначая наиболее перспективные методы.

Обзор состоит из восьми разделов. В разделе 2 описаны основные используемые определения и постановки задачи с точки зрения анализа данных. Различные методы выделения признаков для улучшения работы алгоритмов обсуждаются в разделе 3. Раздел 4 посвящен классификации методов обнаружения аномалий и основным примерам их использования. Раздел 5 обсуждает, каким образом принимаются решения об отнесении некоторого состояния системы к аномальным, если используемые методы анализа данных не классифицируют состояния, а отображают их на непрерывный интервал числовой оси. В разделе 6 описаны методы определения качества работы алгоритмов, основанных на данных. В разделе 7 обсуждаются применения систем, основанных на данных, в различных центрах управления полетами на постоянной основе, перечислены открытые источники данных, на которых возможно проверять работу некоторых алгоритмов, а также обсуждаются перспективные методы анализа данных. Наконец, в разделе 8 кратко сформулированы основные результаты данной статьи.

2. Основные понятия

2.1. Аномалии и выбросы в телеметрической информации

В литературе термины *выброс* (outlier) и аномалия часто употребляются в одном значении, и четкого разграничения не существует, поскольку исследователи из разных областей используют разную терминологию. Тем не менее, как отметил Pimentel [8], выбросами часто называют малую часть нормальных данных, которые лежат далеко от большинства по-настоящему нормальных данных. Таким образом, поиск выбросов сосредоточен на выделении именно таких данных, которые могут существенно ухудшать работу некоторых алгоритмов.

Некоторые исследователи используют термин “*новая информация*” (novelty) для обозначения данных, которые не соответствуют модели, построенной с использованием данных, априори считающихся нормальными. В этот класс уже не будут входить случайные выбросы, о которых изложено в предыдущем абзаце, если они присутствуют в модели “нормальных” данных.

В [7] аномалии подразделяются на точечные, контекстные и коллективные. Точечные аномалии характеризуются выбросом единственного экземпляра из своего окружения и являются самыми простыми для обнаружения. Контекстные аномалии представляют собой ситуации, появление которых зависит от

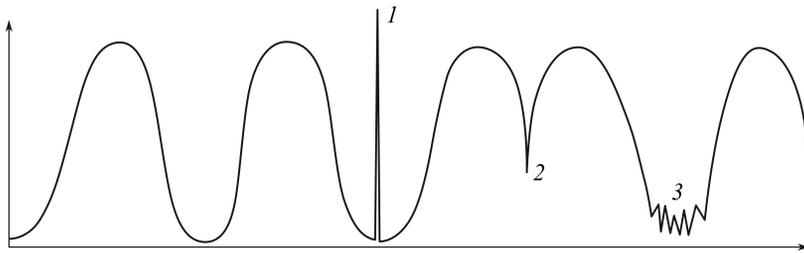


Рис. 1. Типы аномалий: 1 — точечная, 2 — контекстная, 3 — коллективная.

некоторого внешнего контекста или других переменных, без учета которых они не будут считаться аномальными. Коллективные аномалии характерны для временных рядов или других упорядоченных данных. Они имеют место, если несколько ближайших точек образуют аномальное поведение, но не могут считаться аномальными по отдельности (рис. 1).

Телеметрическая информация (ТМИ) представляет собой показания бортовых датчиков КА и программные события, циркулирующие в контуре управления и передаваемые на землю. Общая структура потоков информации в контуре управления космическим аппаратом приведена в [16]. Показания датчиков чаще всего структурируются во временные ряды, которые могут быть неравномерными (или неэквидистантными), т.е. с переменным шагом по времени, причем шаг может быть различным для разных телеметрических параметров (ТМП). ТМИ является основным источником информации о состоянии КА и в этом смысле ТМИ наиболее полна и достоверна. На основании анализа ТМИ делаются заключения о техническом состоянии КА и его составных частей и принимаются решения о планировании дальнейшего полета. Далее сосредоточимся на анализе ТМИ, представленной в виде многомерных временных рядов, и опустим рассуждения об анализе программных событий.

ТМИ принимается и обрабатывается системой мониторинга, реализованной бортовыми и наземными системами. Эта система реализует различные алгоритмы для извлечения полезной информации о состоянии КА и, при необходимости, последующего совершения корректирующего воздействия или оповещения оператора для принятия решения о таком воздействии.

2.2. Возможные постановки

Можно выделить следующие крупные классы алгоритмов для анализа состояния технических систем: основанные на данных и основанные на моделях. Алгоритмы, основанные на моделях, характеризуются тем, что они требуют наличия заранее созданной разработчиком явной схемы и, в отличие от алгоритмов, основанных на данных, не имеют широкой возможности к адаптации на основе исторической информации о работе системы [17]. Алгоритмы, основанные на данных, в свою очередь требуют достаточно большого корпуса исторической информации для подбора коэффициентов модели (обучения) и валидации правильности ее работы.

В общем виде задачу технической диагностики можно поставить следующим образом. Для краткости введем обозначения: $Z(t)|t = t_0$ — состояние системы в определенный момент времени, $Y = y(Z(t))$ — некоторый дискретный

набор классов оценки качества работы системы либо такая оценка по непрерывной шкале, $X(t) = f(Z(t)) + \xi$ – набор видимых наблюдений показаний различных датчиков. Как правило, функция f известна с некоторой точностью в соответствии со спецификацией рассматриваемого датчика, однако это не всегда так. Вектор ξ представляет собой набор остаточных ошибок измерения. Общая постановка заключается в восстановлении значения Y по X , т.е. в нахождении как можно более точной аппроксимации некоторой функции $g : Y = g(X)$. Функция f не всегда обратима, а ошибки ξ не всегда могут быть точно описаны, поэтому в общем виде задача не имеет строгого решения.

Далее подробно обсудим методы, основанные на данных. Они имеют большое практическое значение, поскольку применимы к системам, в которых формальное описание работы представляет существенные трудности. Постановки задачи машинного обучения в самом общем виде можно сформулировать так [18]:

– обучение с учителем или контролируемое обучение. Пусть известна некоторая обучающая выборка $D = \{(x^n, y^n), n = 1, \dots, N\}$. Задача заключается в восстановлении функции f , такой что предсказание $f(x^*) = y^*$ будет точным на новом экземпляре (x^*, y^*) из тестовой выборки. При этом критерий точности определяется заданной функцией ошибок;

– обучение без учителя или неконтролируемое обучение. Пусть дан некоторый корпус данных $D = \{x^n, n = 1, \dots, N\}$. Задача стоит в том, чтобы описать эти данные некоторым более компактным образом, который определяется некоторой целевой функцией.

Совокупность обучающей и тестовой выборок называют корпусом данных (dataset). Совокупность векторов y^n называют разметкой. Задача обучения с учителем будет называться классификацией, если область значений y^n дискретна, и регрессией, если область значений y^n непрерывна.

Поскольку на практике истинное состояние КА часто не поддается непосредственному наблюдению, обычно предполагается, что показания датчиков достаточно точно определяют состояние, и задачи мониторинга технического состояния сводятся к следующим постановкам:

1) классификация состояний и их последовательностей. В этом случае $Y \in \mathbb{N}$ дискретна и имеется некоторое количество наблюдений $Y = g(Z(t_i))$;

2) выделение аномалий. В этой постановке $Y = \{0, 1\}$ и известны наблюдения только одного из двух классов $Z : g(Z) = 0$;

3) поиск выбросов. При этом необходимо оценить значение $g(Z)$ на основании только наблюдений X при отсутствии наблюдений Y ;

4) ранжирование результатов по важности (степени аномальности), также называемое скоринг. Эта задача характеризуется непрерывной областью значений $Y \in \mathbb{R}$;

5) прогноз состояния КА: нахождение значений ТМП $X(t_1 + n)$, оценки качества работы $Y = y(X(t_1 + n))$ или непосредственно состояния системы $Z(t_1 + n)$ на основании истории значений ТМП $\{X(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$;

6) оценка остаточного ресурса КА или его частей аналогична предыдущей постановке, однако в этом случае, как правило, представляет интерес более долгосрочный прогноз.

В задаче поиска выбросов алгоритму дается неразмеченный корпус данных, среди которых требуется выделить маловероятные состояния или их последовательности, т.е. эта постановка является задачей обучения без учителя. Однако при поиске аномалий эти методы могут давать большую долю ложных положительных и ложных отрицательных результатов, поскольку не каждая аномалия представляет из себя выброс и не каждый выброс можно считать аномалией. В [7, 8] отмечается, что эта постановка в основном применяется для избавления от случайных редких шумов и выбросов, поскольку при этом исходные данные содержат в себе очень мало информации о правильности функционирования КА.

При поиске аномалий эта постановка может применяться для локализации найденной аномалии или для предоставления оператору более подробной информации о штатном функционировании КА. Как правило, в этой постановке используются методы контролируемого обучения (или, что то же самое, обучение с учителем). Контролируемое обучение заключается в нахождении аппроксимации неизвестной функции по набору ее наблюдаемых значений. Задача классификации в этом случае представляет собой нахождение функции с дискретной областью значений.

В задаче классификации обучающая выборка X состоит из предварительно размеченных данных: каждое состояние или ситуация X_i принадлежит одному или нескольким из отдельных классов Y_i . В процессе работы алгоритм относит каждую новую ситуацию к тому классу, которому она принадлежит с наибольшей вероятностью.

При поиске аномалий обучающая выборка, как правило, состоит только из представителей одного класса — нормальной работы системы. В некоторых постановках в обучающей выборке может находиться сравнительно малое количество представителей аномальной работы. При работе алгоритм выделяет ситуации, которые не похожи на те, что встречались в обучающей выборке.

Кроме того, начинают появляться алгоритмы, способные к активному обучению. Эти алгоритмы обучаются в полуконтролируемом режиме, т.е. когда разметка данных доступна не для всех X_i , и способны запросить у пользователя разметку, когда это необходимо [19, 20]. Такие алгоритмы подходят для очень больших баз данных, когда полная ручная разметка при создании корпуса данных невозможна. Этот класс алгоритмов появился сравнительно недавно и требует дальнейшего изучения.

2.3. Основные этапы анализа телеметрической информации

Несмотря на последние успехи в создании математического аппарата и алгоритмов интеллектуального анализа данных, человек все еще должен выбрать алгоритм и адаптировать его под стоящую перед ним задачу и ее особенности. Методология ASUM-DM [21] выделяет шесть основных этапов проекта по работе с данными: анализ предметной области, разработка, создание и настройка рабочей модели, ввод в эксплуатацию, эксплуатация и оптимизация, управление проектом.

При создании рабочей модели и настройке ее параметров важно знать объективное качество ее работы по сравнению с другими моделями и оператором. Для оценки качества требуется эталонная разметка данных, которая



Рис. 2. Основные этапы анализа ТМИ.

часто отсутствует в реальных задачах. Обычно при отсутствии объективного критерия качества работы модели или алгоритма, основанного на данных, обоснование правильности его работы носит спекулятивный характер. Этот феноменологический принцип верификации в корне отличается от верификации модельно-ориентированных систем, где правильность работы показывается верностью изначальных предположений и логических умозаключений.

На этапе эксплуатации системы мониторинга (рис. 2) анализу обычно предшествуют выделение и, при наличии механизмов, восстановление достоверной ТМИ (отсеивание случайных выбросов) и изменение частоты дискретизации, для чего необходимо знание о характеристиках датчика и природе измеряемой величины. После этого производится анализ с использованием различных алгоритмов, речь о которых пойдет далее. Анализ также можно разделить на несколько этапов:

- 1) формирование набора параметров (признаков), с которыми непосредственно будет работать алгоритм интеллектуального анализа данных;
- 2) построение или уточнение модели;
- 3) ее применение для получения результата.

Выделение признаков может происходить как силами экспертов, так и автоматически, однако для автоматического выделения признаков, как правило, требуется большой объем обучающих данных, а построенную модель сложнее интерпретировать. В этом случае этап выделения признаков не выражен явно, так как происходит во время построения и применения алгоритмов. Так, например, происходит в случае использования глубоких нейронных сетей.

Последним этапом производится постобработка результатов анализа для формирования отчетов и их вывода на экран оператора.

3. Формирование набора параметров для анализа

В контексте задач машинного обучения любые измеримые или вычислимые характеристики объекта исследования, которые каким-либо образом помогают в решении задачи, принято называть признаками. Например, при определении текущего состояния КА признаками могут считаться значения ТМП, параметры космической погоды и т.п. В сложных задачах бывает важно выделить вспомогательные признаки, которые являются некоторой функцией исходных и помогают улучшить результат и/или уменьшить вычислительную сложность. При автоматическом выделении признаков, как это происходит при применении глубоких нейронных сетей, признаки могут быть лишены конкретного физического смысла и являться только математической функцией исходных данных.

Выделение признаков не является самостоятельным способом поиска аномалий или определения технического состояния КА, но имеет большое значение, особенно при анализе многомерных временных рядов в сложных системах, где встречается большое количество как взаимосвязанных ТМП и резервированных датчиков, так и ТМП, которые не имеют отношения к выделению тех или иных типов аномалий, вносят шумы и затрудняют их поиск. Правильное выделение признаков из исходных данных может значительно облегчить задачу поиска аномалий, улучшить показатели работы алгоритма и его интерпретируемость. В большинстве случаев выбор ТМП, по которым будет осуществляться контроль состояния, происходит при помощи эксперта.

Suo и соавт. в [22] ввели понятие нечеткого Байесовского риска для выбора подмножества переменных для дальнейшей классификации. В [22] показано, что при использовании функции потерь определенного вида возможно построить жадный алгоритм для выбора подпространства, в котором отделение классов друг от друга будет оптимальным с точки зрения этой метрики. Вычислительная сложность алгоритма составила $O(knm^2)$, где k — число выбранных ТМП, n — число классов, m — число точек. В [22] были использованы разменные результаты численного моделирования системы энергоснабжения (СЭП) для демонстрации работы алгоритма и сравнения с алгоритмами ReliefF [23], mRMR [24], NRS [25] и другими.

Для анализа периодических сигналов, особенно высокочастотных, в качестве представления сигнала часто используют дискретное преобразование Фурье, вейвлет-преобразования [26]. При анализе многомерных временных рядов большое значение имеют техники понижения размерности, такие как метод главных компонент, факторный анализ, а также экспертный выбор и создание информативных признаков, поскольку они могут значительно уменьшить вычислительные ресурсы, необходимые для проведения анализа.

Масштабная работа по исследованию качества выделения аномалий в зависимости от выбранных признаков на одномерных временных рядах была проведена Vargeure в [27]. Авторы настоящей статьи исследовали признаки, выделенные с помощью преобразования Фурье, вейвлет-преобразований, собственных функций Гауссова ядра, метода главных компонент, периодограмм, и методы выявления аномалий, основанные на расстоянии и локальной плотности (подраздел 4.1), а также метод опорных векторов (подраздел 4.4). В [27] использованы искусственно сгенерированные данные, а также реальные данные для валидации результатов (1700 ТМП, собранных более чем за 12 лет). В статье приведены практические выводы об используемых методах и признаках.

С другой стороны, O’Meara и Schlag [28] показали, что использование признаков, заданных вручную с учетом физики наблюдаемого процесса, способно значительно улучшить качество предсказаний и поиска аномалий. К тому же выводу приходит Gowda в [29]: “Выделение признаков является практически решающим фактором. Оно имеет большее значение, чем использование тех или иных моделей машинного обучения” — пишет он. Gowda использовал данные ТМИ Mars Express [30] для построения предсказательной модели потребления системы обеспечения теплового режима (СОТР).

4. Методы анализа телеметрической информации и примеры их применения

Многие публикации [7, 8, 15] выделяют следующие типы алгоритмов, которые основаны на базовых предположениях о нормальных и аномальных данных:

- 1) основанные на расстоянии:
 - а) основанные на анализе графа соседства,
 - б) основанные на кластеризации;
- 2) статистические:
 - а) параметрические:
 - смесь распределений,
 - стохастические процессы;
 - б) непараметрические;
- 3) классификационные,
- 4) основанные на реконструкции,
- 5) ансамблевые.

На рис. 3 изображены классификация и типичные представители классов алгоритмов. Отметим, что несмотря на то что представленная классификация включает многие алгоритмы, она не может считаться полной и учитывающей все аспекты существующих алгоритмов.

Большая часть этих методов специально не приспособлена для анализа временных рядов, однако может быть адаптирована соответствующим выбором признаков или применена к отдельным состояниям без использования последовательной структуры временного ряда.

Кроме того, во многих системах не все ТМП несут полезную информацию для поиска определенных типов отказов. Например, ТМП одной из составных частей КА будут нести мало информации о работоспособности другой. Поэтому для уменьшения потенциально затрачиваемых ресурсов и увеличения точности поиска могут применяться различные техники выбора признаков (см. раздел 3).

При выборе алгоритма и его параметров необходимо пользоваться объективными критериями оценки качества алгоритмов, а также сравнивать качество алгоритмов с качеством работы оператора (см. раздел 6).

Для удобства рассмотренные статьи собраны в Приложении.

4.1. Методы на основе анализа графа соседства

Методы, основанные на ближайших соседях, исходят из гипотезы о том, что точки, характеризующие нормальные состояния, располагаются близко друг к другу, в то время как аномальные данные находятся далеко от нормальных в некотором пространстве признаков. Изначально в качестве степени аномальности использовалось расстояние до K -го ближайшего соседа. Методы этой группы отличаются друг от друга тем, что они определяют понятие соседства разными способами.

Bay и Schwabacher в [31] предложили метод ORCA, показав, что в некоторых случаях частичным отсеканием поиска можно оптимизировать метод ближайших соседей до почти линейного масштабирования.

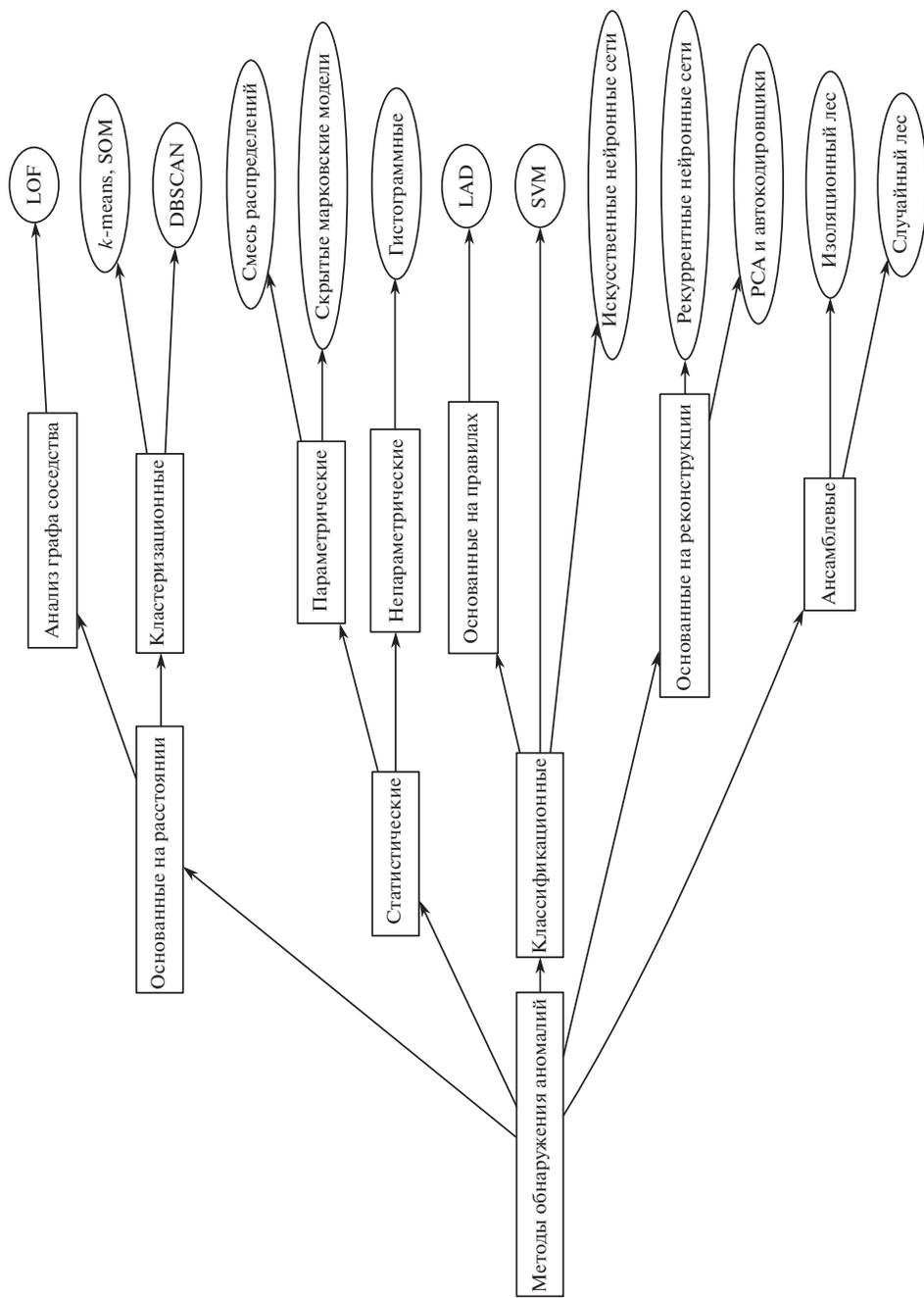


Рис. 3. Классификация алгоритмов, применяющихся для поиска аномалий и некоторые примеры соответствующих классов.

К этому классу можно отнести и методы, которые используют локальную плотность точек. Метод локального уровня выброса (Local Outlier Factor, LOF) [32] основан на вычислении локальной плотности вокруг точки и вокруг ее соседей:

$$LOF_{kNN}(p) = \left(\frac{\sum_{o \in kNN(p)} \frac{lrd_{kNN}(o)}{lrd_{kNN}(p)}}{|N_{kNN}(p)|} \right)^{-1}.$$

Значение LOF представляет собой обратную локальную доступную плотность точки по отношению к средней локальной доступной плотности ее соседей, где локальная доступная плотность (local reachability density)

$$lrd_{kNN}(p) = \frac{|N_{kNN}(p)|}{\sum_{o \in kNN(p)} RD_{kNN}(p, o)}$$

обратна среднему расстоянию доступности $RD_k(p, o) = \max(d_k(o), d(p, o))$ точки по k ее ближайших соседей. Отметим, что $N_{kNN}(p)$ может быть больше k , если есть несколько точек, равноудаленных от точки p .

Значение $LOF_{kNN}(p)$ можно интерпретировать как изолированность рассматриваемой точки p по сравнению с изолированностью k своих ближайших соседей. Для этого метода необходимо эмпирически задать число ближайших точек, которые считаются соседями рассматриваемой. Метод LOCI (local correlation integral) работает похожим образом и частично решает проблему ручного задания числа соседей, заменяя этот параметр расстоянием, точки внутри которого считаются соседями. Отношение k -го соседства в общем случае не является симметричным, поэтому многие методы используют отношения обратного и симметричного соседства для определения выбросов.

Von Brunken в [33] переработал метод LOF, предложив использовать локальную оценку естественной размерности данных (Intrinsic Dimension) [34, 35] в качестве оценки плотности. Новый метод был назван IDOS (Intrinsic Dimension Outlier Score) и показал очень хорошие результаты по сравнению с другими современными методами: LOF, SOD [36] и FastABOD [37] – на различных корпусах данных, при этом требуя меньших вычислительных ресурсов.

Некоторые алгоритмы также используют ядерные методы для оценки плотности [38], как это происходит в статистических методах для оценки плотности распределения. Например, одна из последних публикаций [39] предлагает оценивать степень выброшенности точки с использованием ядерной оценки плотности вероятности на основе соседей рассматриваемой точки.

Чаще всего для этих методов выбирают евклидово расстояние в некотором пространстве признаков. Однако существуют и другие варианты выбора расстояния, например, манхеттенское расстояние, или, что то же самое, метрика L_1 , или расстояние динамического преобразования временной шкалы (dynamic time warping, DTW) [40] в случае сравнения временных рядов.

Преимущества методов на основе анализа графа соседства:

– работу этих методов сравнительно просто интерпретировать;

— многие алгоритмы работают без учителя и могут быть адаптированы под полуконтролируемое обучение;

— их просто адаптировать под новые типы данных: для этого достаточно задать на них метрику;

— некоторые модификации хорошо масштабируются по времени, необходимому на вычисления на пространство большой размерности.

Недостатки методов на основе анализа графа соседства:

— эти алгоритмы опираются на метрику, поэтому может быть сложно иметь дело с категорийными переменными и сложными типами данных, например графами;

— они плохо масштабируются на большие объемы данных;

— сложно адаптировать к временным рядам;

— многие методы опираются на расстояние, поэтому их эффективность снижается на пространстве большой размерности;

— если у аномальных точек много соседей любого типа, получим ложно-положительный результат.

Главным недостатком этих методов является необходимость составления графа соседства, которое требует вычисления расстояния между каждыми двумя точками в выборке, и поэтому большинство алгоритмов этого класса масштабируются как $O(N^2)$. Эта зависимость не позволяет эффективно ими пользоваться на больших выборках.

Применения методов на основе анализа графа соседства

О’Меара и соавт. в [41] на основе метода IDOS создали систему мониторинга АТНМоS (Automated Telemetry Health Monitoring System), которая используется в немецком центре управления полетами (GSOC). Эта система дополняет метод IDOS автоматическим подбором порогового значения аномальности точки для заданной базы номинальных значений ТМП. Получившийся в [41] метод был назван OPVID. Он дает возможность анализировать много подсистем и большое количество ТМП без значительного вмешательства оператора в процесс обучения системы. В рассмотренном в [41] примере была показана способность алгоритма выделять аномалии в исходных данных, а также сравнили работу OPVID с алгоритмом, предложенным Martinez-Heras в [42], получив значительно меньшее количество ложных положительных срабатываний. Schlag и О’Меара [43] позже провели подробную эмпирическую проверку качества работы OPVID на различных корпусах данных с использованием как вручную созданных признаков, так и полученных с помощью автоэнкодера, где показали хорошее качество работы OPVID по сравнению с LOF и LoOP.

4.2. Методы, основанные на кластеризации

Кластеризация в общем виде используется для группировки похожих элементов. Большая часть алгоритмов кластеризации не предназначена специально для поиска выбросов или аномалий, однако они могут использовать структуру имеющихся данных и на ее основе выделить аномалии по определенному критерию. В основном эти методы могут обучаться в неконтролируемом или полуконтролируемом режиме. Chandola [7] выделяет три класса

алгоритмов поиска аномалий, основанных на кластеризации, исходя из гипотез о том, что представляют собой аномалии в исходных данных:

1) нормальные данные принадлежат какому-либо кластеру, а аномалии никаким кластерам не принадлежат. В этом случае можно использовать алгоритмы кластеризации, которые не требуют принадлежности каждой точки к кластеру, например DBSCAN, ROCK [44], SNN (shared nearest neighbours) [45] и их модификации;

2) нормальные данные лежат близко к одному из выделенных центроидов, в то время как аномальные расположены далеко от них. В этом классе можно использовать методы, которые вычисляют центроид кластера, такие как метод k -средних, самоорганизующиеся карты (self-organizing maps, SOM) [46]. Кластеризация методом k -средних является самым популярным алгоритмом в этом классе;

3) нормальные данные принадлежат крупным плотным кластерам, а аномалии образуют маленькие или редкие кластеры. К этому подклассу относятся такие алгоритмы, как FindCBLOF [47], CD-trees [48].

Алгоритмы DBSCAN, ROCK и SNN основаны на исследовании графа соседства. Алгоритм DBSCAN требует установить расстояние соседства и основан на исследовании непосредственной доступности друг к другу точек получившегося графа соседства. В этом смысле DBSCAN тесно связан с предыдущей группой методов. Алгоритм способен выделять ядро кластера — точки, которые имеют по меньшей мере n соседей, точки, относящиеся к кластеру, но не являющиеся ядром, и выбросы.

Алгоритмы ROCK и SNN (Shared Nearest Neighbours) используют понятие связи, которое представляет собой количество потенциальных общих соседей между двумя кластерами, или, что то же самое, количество возможных связей длины два между кластерами в графе соседства. Алгоритм ROCK разработан для случаев, когда необходимо кластеризовать векторы из категориальных переменных, и может использовать неметрическую функцию сходства, которая основана на таблице сходства. В этом методе для кластеризации предлагается считать каждую точку отдельным кластером и используют рекурсивный механизм их объединения. Таким образом, в отличие от k -средних ROCK не требует задания числа кластеров. Использование количества общих соседей для вычисления сходства двух векторов смягчает проблемы, связанные с большой размерностью данных и уменьшающейся плотностью.

Метод k -средних, k -medoids и самоорганизующиеся карты широко известны. Они используют понятие центроида и группируют элементы на основании удаленности от него, после чего меняют координаты центроида на центр масс принадлежащих ему элементов. При применении этих алгоритмов аномальными считают данные, лежащие далеко от обнаруженных центроидов.

Третий подкласс алгоритмов производит кластеризацию одним из существующих алгоритмов кластеризации, после чего объявляет некоторые кластеры аномальными на основе таких критериев, как, например, плотность кластера, количество точек в нем или по некоторой существующей разметке. Алгоритм FindCBLOF [47] — модифицированный для кластеризации алгоритм, основанный на локальной плотности точек.

Преимущества методов, основанных на кластеризации:

- 1) могут обучаться без учителя;
- 2) могут работать с разными типами данных;
- 3) хорошо подходят к небольшим сферическим датасетам.

Недостатки методов, основанных на кластеризации:

1) аномалии бинарны, т.е. алгоритмы не присваивают значения аномальности;

2) многие методы чувствительны к начальному выбору числа кластеров, однако при анализе временного ряда в реальном времени число кластеров невозможно узнать заранее;

3) многие методы опираются на расстояние, и потому их эффективность снижается на пространстве большой размерности;

4) методы, основанные на центроидах, чувствительны к их начальным расположениям, страдают от проклятия размерности в очень больших датасетах, чувствительны к выбросам.

Применения методов, основанных на кластеризации

Iverson в [49] представил алгоритм, который назвал индуктивной системой мониторинга (inductive monitoring system, IMS). За основу Iverson взял алгоритм k -средних и предложил механизм увеличения числа выделяемых кластеров в процессе анализа данных. Для этого используется пороговое значение удаленности вновь наблюдаемой точки от уже существующих кластеров. Алгоритм обучается на данных номинальных режимов работы и предполагается, что точки, лежащие вдали от выделенных центров кластеров, являются аномальными. Системы, основанные на IMS, использовались для мониторинга состояния гиродинов и системы обеспечения теплового режима на международной космической станции [50]. Похожие принципы для построения системы контроля состояния наноспутника предлагает Singh в [51].

Chen и соавт. в [52] использовали данные наземного эксперимента с измерениями вибраций в подшипниках управляющих двигателей-маховиков (УДМ), чтобы отличить нормально функционирующие подшипники от подшипников с проблемами во внешнем кольце или сепараторе. В этом исследовании в качестве признаков использована корреляционная размерность показаний акселерометров. Для улучшения результатов они применяют k -medoid кластеризацию последовательно два раза: на данных корреляционной размерности и на полученных центрах кластеров в результате первой кластеризации. Результаты были валидированы на экспериментальных данных и показали хорошую различающую способность алгоритма.

Suo и соавт. в [53], предложили метод сеточной кластеризации на основе соседства и верифицировали работу метода на данных численного моделирования системы электропитания (СЭП). Алгоритм использует заранее определенный шаг сетки для определения соседних точек и использует полученную сеточную плотность для оптимизации квадратичной по количеству точек сложности классических методов, основанных на расстоянии до соседей.

4.3. Статистические методы

Статистические (или вероятностные) методы применяют в том предположении, что нормальные и аномальные данные имеют статистически разные плотности распределения вероятностей, по которым их можно различить. Основным достоинством этих методов является то, что, помимо вероятности отнесения ситуации к тому или иному классу, они позволяют вычислить и доверительные интервалы получившихся оценок. Однако в случае задачи поиска аномалий существует проблема определения пороговой вероятности, начиная с которой состояние нужно считать аномальным.

Существуют следующие подклассы статистических методов:

Параметрические методы:

- 1) смесь гауссовых распределений (Gaussian Mixture Model, GMM),
- 2) фильтры Калмана,
- 3) скрытые марковские модели,
- 4) ARIMA (autoregressive integrated moving average);

Непараметрические методы:

- 1) ядерные оценки плотности,
- 2) гистограммные.

Параметрические методы делают некоторое предположение о распределении наблюдаемых величин. Фильтры Калмана предполагают существование фиксированного набора параметров, образующих оцениваемый вектор состояния системы, который эволюционирует по известному закону (с точностью до аддитивно входящей в этот закон нормально распределенной случайной переменной). Также предполагается заданной модель наблюдения, в соответствии с которой данные измерений связаны с вектором состояния известной функцией (опять же с точностью до нормально распределенной случайной переменной). Различные модификации фильтра Калмана применяются и для оценки матрицы ковариации ошибки предсказываемых параметров. В случае если фактическое измерение произошло в области с низкой плотностью вероятности, точка помечается как аномальная.

Скрытые марковские модели работают аналогичным образом в дискретном пространстве переменных и позволяют задать функции в табличном виде.

Модель ARIMA аппроксимирует экспериментальные данные зависимостью

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i\right) (1 - L)^d X_t = \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i\right) \varepsilon_t,$$

которая имеет короткое обозначение $ARIMA(p, d, q)$, где X_t — временной ряд; L^i — оператор эволюции; ε_t — независимые случайные переменные, взятые из $N(0, \sigma)$; p, d, q — параметры авторегрессионной (AR), интегральной (I) моделей и модели бегущего среднего (MA) соответственно; ϕ_i и θ_i — параметры модели. Частными случаями этой модели являются:

- $ARIMA(0,0,n)$ — скользящее среднее в окне шириной n ,
- $ARIMA(0,n,0)$ означает, что n -я производная временного ряда является постоянной,

— ARIMA($n,0,0$) — авторегрессия по n предыдущим состояниям.

Гистограммные методы являются способом оценки функции вероятности для категориальных или дискретных переменных, которые работают путем простого подсчета и нормировки. Ядерная оценка плотности вероятности — естественное обобщение этого метода для оценки непрерывных функций распределения.

Достоинства статистических методов:

- хорошая математическая обоснованность;
- модель не требует много памяти для хранения.

Недостатки статистических методов:

- возникновение проблем при несоответствии экспериментальных данных сделанным предположениям о функции распределения;
- малая эффективность при небольшом количестве данных или большой размерности;
- непараметрические методы не могут эффективно обрабатывать взаимосвязи между переменными.

Применения статистических методов

Azevedo и соавт. в [54] применяют алгоритмы кластеризации k -средних и expectation maximization, предполагая, что нормальные данные представляют собой смесь нормальных распределений. Они показали, что оба алгоритма достаточно чувствительны, чтобы обнаружить аномалию, связанную со слишком большим зарядом аккумуляторной батареи, за шесть часов до превышения порогового значения.

Rahimi и соавт. в [55] представили подход, основанный на сигма-точечном фильтре Калмана для определения аномалий в управляющих двигателях-маховиках (УДМ). Аномальное функционирование системы детектируется при выходе значений контролируемых ТМП за три среднеквадратичных отклонения, вычисленных в окне некоторой наперед заданной ширины. В случае аномального функционирования в [55] предлагается адаптировать алгоритм фильтрации, изменяя соответствующие аномальным значениям контролируемых параметров диагональные элементы матрицы ковариации ошибок. Демонстрируется работа алгоритма на модели УДМ в случае разных сценариев нештатной работы (при модельных аномалиях во входном напряжении УДМ). Показано, что разработанный алгоритм способен детектировать указанные модельные аномалии, при этом оценка контролируемых параметров УДМ остается удовлетворительной, что позволяет поддерживать функционирование системы.

Yaiği и соавт. в [56] предложили алгоритм, который объединяет вероятностный анализ главных компонент непрерывных переменных и вероятности дискретных состояний, расширив, таким образом, подход к моделированию распределения, предложенный Tipping и Bishop в [57]. В результате анализа получается временной ряд с оценкой аномальности исходных данных. В [56] используются данные японского спутника JAXA SDS-4, включая его системы ориентации и стабилизации (СОС), электропитания (СЭП), обеспечения теплового режима (СОТР). В результате анализа можно было отличить друг от друга разные режимы работы КА, а также выявить аномалию в работе СОС.

Также в [56] обсуждаются различные варианты предварительной обработки исходных данных.

Adnanе и соавт. в [58] демонстрируют модификацию обобщенного фильтра Калмана для улучшения оценки состояния в контуре СОС при различных сценариях ошибок в измерениях магнитометра. Показано, что предложенный алгоритм способен в реальном времени определять и оценивать ошибки магнитометра. Алгоритм был протестирован на данных моделирования микроспутника высокой точности.

Ahmed и соавт. в [59] предложили применить метод Каплана—Мейера [60] после предварительной классификации, основанной на логическом анализе данных (LAD). В [59] используется датасет от NASA Ames Prognostics для классификации аккумуляторных батарей по их состоянию на основе емкости и показали, что этот способ улучшает результат оценки вероятности отказа по сравнению только с методом Каплана—Мейера.

4.4. Классификационные методы

Классификационные методы исходят из общего предположения о том, что может быть создан классификатор, который способен надежно отделять нормальные состояния от аномальных в заданном пространстве признаков. В основном эти методы служат для идентификации известных аномалий. К классификационным методам можно отнести следующие типы алгоритмов:

1) основанные на методе опорных векторов, в том числе с использованием ядерных функций,

2) основанные на нейронных сетях,

3) основанные на правилах,

4) основанные на байесовских сетях.

Все эти алгоритмы работают в режиме обучения с учителем, поэтому требуют размеченных данных для обучения.

Метод опорных векторов (support vector machine, SVM) ищет гиперплоскость в пространстве признаков, способную разделить обучающую выборку на два класса. Этот метод может быть адаптирован для обнаружения нелинейной границы при помощи механизма ядерной функции. Весьма популярным является классификация методом k ближайших соседей (k nearest neighbours, k NN).

Для классификации также могут быть использованы различные типы нейронных сетей, такие как сети прямого распространения (их также называют MLP, multilayer perceptron), рекуррентные сети, в том числе с GRU (gated recurrent unit) из [61] или LSTM (long short-term memory) из [62] нейронами, сверточные сети (convolutional neural net, CNN), а также другие типы, используемые самостоятельно или последовательно с другими алгоритмами.

Методы, основанные на правилах, включают в себя поиск ассоциативных правил [63], логический анализ данных (logical analysis of data, LAD) и основанные на них методы. К ним иногда относят методы, основанные на решающих деревьях. При этом на обучающей выборке строится некоторое интерпретируемое правило. Данные, ему не подчиняющиеся, считаются аномальными. Все методы, основанные на Байесовских сетях, делают оценку постериорной вероятности наблюдения метки определенного класса. Простой

Байесовский классификатор является самым простым и самым популярным методом этой группы. Базовая техника предполагает независимость переменных друг от друга. Однако возможно ее обобщение с использованием более сложных байесовых сетей.

Часто к классификационным методам относят методы одноклассовой классификации. Они характеризуются тем, что в обучающей выборке присутствуют представители только одного класса, а в случае поиска аномалий — представители нормальной работы системы. Алгоритм строит границу области, в которую попадают все эти представители, а объекты вне этой области считаются аномальными. Наиболее часто применяемым методом этой категории является ОС-SVM (one-class support vector machine) [64].

Das и Mattews в [65] разработали метод MKAD (Multiple Kernel Anomaly Detection), который комбинирует в одном ядре метрику LCS (longest common subsequence) из [66] для дискретных переменных и ядро на основе SAX (symbolic aggregate approximation) из [67] представления непрерывных переменных для одноклассовой классификации методом ОС-SVM. В [65] продемонстрировано преимущество предложенной схемы над алгоритмами ORCA и SequenceMiner при поиске значимых отклонений в полетных данных.

Преимущества классификационных методов:

- возможно использование готовых алгоритмов классификации;
- достаточно быстрая работа созданных моделей.

Недостатки классификационных методов:

- классификационные методы опираются на эталонную разметку в обучающей выборке, которая далеко не всегда доступна;
- присваивают только дискретную метку, что усложняет ранжирование результатов.

Применения классификационных методов

Ke Li и соавт. исследовали различные методы классификации временных рядов. В [68] используется алгоритм fuzzy c-means и выделение признаков с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA), которые могут использоваться для облегчения разметки данных оператором, после чего применили модификацию метода опорных векторов WPSVM (weighted proximal support vector machine) для классификации сигналов системы электропитания космического аппарата (КА) на нормальные и аномальные. Было изучено качество работы алгоритма при разных подходах к многоклассовой классификации методом опорных векторов: разграничение классов попарно и один из классов с остальными, а также сравнили WPSVM с работой наивного Байесовского классификатора и метода К ближайших соседей (kNN). Кроме того, было показано, что быстродействие WPSVM позволяет использовать его в режиме реального времени. В [69] исследован способ выделения признаков на основе глубокой сети доверия (deep belief network) и последующую классификацию с помощью случайного леса. Предварительно была произведена фильтрация данных с помощью вейвлет-преобразования. Для сравнения в [69] приведены также результаты классификации другими алгоритмами: kNN, SVM, наивным Байесовым классификатором с использованием нескольких методов выделения признаков: PCA, многоуровневых автокодировщиков (stacked autoencoder), а также на исходных данных.

Воронцов в [70] предложил использовать сеть прямого распространения для классификации режимов работы СОТР и СЭП. На выборке из 50 тестов была продемонстрирована работа алгоритма и достигнута частота ложных положительных и ложных отрицательных срабатываний до 20 и 10 % соответственно.

Nassar, Hussein и соавт. в [71, 72] сравнили два алгоритма, обучающихся с учителем: дискриминантный анализ при помощи частных наименьших квадратов (partial least squares discriminant analysis, PLS-DA), ядерный метод опорных векторов (kernel support vector machine, KSVM) и результаты расчета в коммерческом пакете. В работах [71, 72] заявляется что подход, основанный на PLS-DA, отделяет аномальные данные лучше, чем PCA, который только ищет направление максимальной изменчивости в данных. Система была протестирована на 16 ТМП системы ориентации и стабилизации КА.

Fuertes и соавт. в [73] представили ограничения классических подходов поиска аномалий по пороговым значениям и описали созданный программный продукт NOSTRADAMUS, который использовался для контроля ТМИ аппарата CNES. Этот продукт уменьшает размерность данных и производит одноклассовую классификацию методом опорных векторов. Авторы описали примеры использования этой системы на ошибках СОТР и осцилляциях показаний звездного датчика. Кроме того, они сравнили методы ОС-SVM, kNN и LOF, кратко описали достоинства и недостатки этих методов. В заключение авторы описали концепцию работы, функционал и архитектуру выбранного решения для внедрения и большей автоматизации работы операторов.

Galal и соавт. в [74] использовали метод главных компонент и байесовский классификатор на ТМИ аккумуляторной батареи КА. Для разметки аномальных данных они использовали режим штатной проверки работоспособности СЭП, поскольку в этом режиме батарея испытывает аномально большие для нормальной работы нагрузки. Для валидации использовались данные деградировавшей после аварии аккумуляторной батареи. В [74] удалось понизить размерность исходных данных с 30 до 5 без существенных потерь в качестве классификации и достигнуть точности 0,95 по метрике AUC ROC.

На данных ТМИ СЭП космического аппарата EgyptSat-1 Ibrahim и соавт. [75] применили SVM регрессию из [76] для предсказания поведения временного ряда и продолжили работать над интерпретируемостью результата с использованием метода под названием логический анализ данных (logical analysis of data, LAD) [77], который тренируется на результатах K-means кластеризации. Комбинируя этот подход с анализом дерева отказов, в [75] оценили наиболее вероятную причину возникновения отказа для расследования возможных причин потери КА EgyptSat.

К сожалению, во многих публикациях авторы приводят только метрику правильности классификации и не указывают показатели точности и полноты распознавания каждого класса или матрицы ошибок. Именно эти показатели являются критически важными для практических применений и анализа результатов при несбалансированных выборках, которые имеют место при работе с отказами и аномалиями. Кроме того, эти метрики обычно применяются к неструктурированным данным, а их применение к временным рядам имеет некоторые особенности.

4.5. Методы, основанные на реконструкции

Методы, основанные на реконструкции, предполагают, что можно построить некоторую модель данных. Сравнивая текущие показания датчиков с данными, рассчитанными с помощью этой модели, можно обнаружить аномалию. Другими словами, основанные на реконструкции методы используют ошибку реконструкции данных для разделения их на нормальные и аномальные. Обученный на нормальных данных алгоритм будет давать существенную ошибку восстановления на аномальных данных.

Можно условно разделить эти методы на методы, основанные на восстановлении сигнала, и на методы, основанные на предсказании.

Методы первого класса, по сути, предполагают, что в каждом состоянии показания датчиков связаны некоторой зависимостью, поэтому могут быть полностью описаны меньшим количеством переменных. Одним из самых популярных методов является метод главных компонент (РСА), в том числе с использованием ядерных функций. К этому классу также относятся методы, основанные на автокодировщиках.

Методы, основанные на предсказании, предполагают, что исходя из данных можно построить модель их эволюции при номинальном режиме работы. К таким методам можно отнести различные типы нейронных сетей, в том числе рекуррентные, прямого распространения и генеративные.

Преимущества методов, основанных на реконструкции:

- облегчают проблемы, связанные с многомерными данными, поскольку автоматически понижают их размерность;
- могут быть использованы в режиме неконтролируемого обучения.

Недостатки методов, основанных на реконструкции:

- полезны только в случае, если в некотором пространстве признаков аномалии отделимы;
- обычно имеют высокую вычислительную сложность.

Применения методов, основанных на реконструкции

Абрамов и соавт. в [78] предложили использовать нейронную сеть прямого распространения для рекурсивного предсказания временного ряда, после чего были использованы пороговые методы для обнаружения аномалий в предсказанном временном ряде. Этим методом была предсказана работа системы на 4 мин и достигнута точность предсказания нештатной ситуации в 0,887 при полноте 0,938.

О’Меага и соавт. [28] исследовали возможности нейронных сетей прямого распространения для предсказания временного ряда из агрегированной за виток статистики ТМП и детектировали появление аномалий по рассогласованию значений измеренных параметров с предсказанными. Кроме того, в [28] были исследованы возможности поиска аномалий системой АТНМоС с помощью признаков, выделенных с помощью автокодировщика, а также в сочетании с признаками, заданными вручную. В первой части [28] удалось корректно предсказать поведение агрегированных параметров на три витка вперед. Во второй части было показано, что для надежного выделения аномалий признаки, заданные вручную, играют большую роль при обнаружении аномалий.

Martinez-Heras и Donati в [79] использовали глубокий автокодировщик для поиска аномалий в телеметрии КА Mars Express и предположили, что рекуррентные нейронные сети могут быть использованы для определения пороговых значений.

Petković и соавт. [80] предлагают метод конвейерной обработки (batch processing) для предсказания потребления системы обеспечения теплового режима на КА Mars Express. Они использовали ручное выделение признаков и ансамблевые методы, такие как случайный лес и градиентный бустинг на решающих деревьях, для создания предиктивной модели. Их модель использовалась для распределения энергии на научные эксперименты. В [80] отмечается, что модель может использоваться для поиска аномалий по разладке предсказанного и измеренного энергопотребления.

Ibrahim и соавт. [81] сравнили различные методы глубокого обучения на ТМИ, полученной от одной из составных частей КА EgyptSat. Они использовали различные архитектуры, такие как ARIMA, MLP (Multilayer perceptron), RNN, LSTM, GRU, DLSTM и DGRU, для предсказания поведения временного ряда. Сравнение производилось по метрикам качества точности предсказания: среднеквадратичной ошибке, средней абсолютной ошибке, коэффициенту корреляции, метрике r^2 и времени обучения. В результате был сделан вывод, что для КА с небольшим временем активного существования, около 3–5 лет, лучше подходят более простые методы, такие как ARIMA, для предсказания временного ряда во время штатной работы.

Omrán и Murtada исследовали возможности извлечения признаков для классификации отказов при помощи метода Прони. В [82] была использована рекуррентную нейронную сеть, натренированную на признаках, выделенных с помощью метода Прони для поиска аномалий в работе маховиков. В качестве исходных данных были использованы данные высокоточного численного моделирования. После этого была использована простая сеть прямого распространения для классификации найденных аномалий на известные классы нештатной работы рассматриваемой подсистемы. В результате алгоритм был способен корректно определять все виды моделируемых неисправностей и корректно выделять ранее неизвестные ему режимы работы с точностью, близкой к 100% и превосходящей точность таких алгоритмов, как ARMA, PCA и SVM. В [83] были исследованы возможности метода Прони для извлечения признаков и последующей идентификации отказов солнечной батареи и устойчивости такого алгоритма к шуму. В качестве исходных данных использовались данные численного моделирования. С помощью сети прямого распространения в [83] были затем идентифицированы десять различных видов отказов в шумных данных.

Shin и Tariq в [84] описали систему, внедренную для мониторинга состояния КА KOMPSAT-2 в Korea Aerospace Research Institute (KARI). Как и в [28], были использованы статистически агрегированные по каждому ТМП за каждые 10 мин признаки: среднее, максимальное и минимальное, медианное значение, среднюю энергию сигнала и т.п. В отличие от [28], эти данные обрабатывались как тензор третьего порядка, используя CANDECOMP/PARAFAC разложение из [85]. После этого была применена кластеризация на строках одной из матриц в разложении, чтобы зарегистрировать момент воз-

никновения аномалии. В заключительной части анализа был применен метод определения динамического порога, предложенный Hundman в [86].

Pilastre [87] предложил метод обнаружения аномалий, основанный на разреженном линейном представлении отрезков сигнала. Метод работает с временными рядами с дискретными и непрерывными ТМП и работает в два этапа. На первом этапе находятся представление проекции только дискретных переменных и соответствующий этим дискретным переменным словарь непрерывных переменных. В случае, если такое представление может быть найдено, второй этап конструирует непрерывный сигнал из линейной комбинации компонент словаря непрерывных переменных. Детектирование аномалии возможно на первом этапе, если представление дискретных переменных из словаря невозможно, и на втором этапе, если ошибка реконструкции сигнала превышает заданный порог.

4.6. Ансамблевые методы

Ансамблевые методы подробно обсуждались Aggarwal [88]. К ним прежде всего относятся различные мета-алгоритмы, т.е. алгоритмы, использующие и комбинирующие другие алгоритмы в своей работе. Можно выделить две категоризации ансамблевых методов: по независимости компонент и по их типу.

В ансамблях с независимыми компонентами различные алгоритмы применяются на разных частях исходных данных или их разных компонентах, после чего комбинируются для получения более устойчивого результата. Случайный лес является типичным представителем этого класса. При последовательном построении ансамбля каждый следующий алгоритм зависит от результата предыдущего. Это происходит, например, при использовании градиентного бустинга.

В категоризации по типу компонент Aggarwal выделяет ансамбли, ориентированные на модели, и ансамбли, ориентированные на данные. Первые агрегируют результаты различных по своей природе базовых алгоритмов. При этом возникают проблемы, связанные с различными типами результатов каждого из алгоритмов. Например, результатом одного алгоритма может быть значение от (-1) до 1 , а результатом другого – условная вероятность выброса.

Ансамбли, ориентированные на данные, могут использовать часть данных для построения каждой предсказательной модели, после чего агрегировать их результаты для получения более устойчивого результата. Случайный лес – представитель этого класса алгоритмов.

Преимущества ансамблевых методов:

– в некоторых случаях возможно сочетать преимущества различных методов;

– в случае независимых компонент ансамбля алгоритмы легко масштабируются на многопроцессорные вычисления.

Недостатки ансамблевых методов:

– как правило, высокая вычислительная сложность из-за необходимости строить несколько моделей.

Применения ансамблевых методов

Carlton и соавт. в [89] использовали статистические подходы для поиска интересных их точек временного ряда, после чего группировали резуль-

таты по одинаковым компонентам в разных КА или по разным компонентам одного КА исходя из близости найденных точек по времени. Если точек в одной или нескольких группах в какой-то момент оказывалось много, то этот момент времени получал большой показатель аномальности и соответствующие данные выводились на экран оператора. В [89] была проведена валидация этого подхода с использованием данных с телекоммуникационных спутников Intelsat и Inmarsat и базы данных SpaceTrak¹.

Nozari и соавт. в [90] предложили анализировать при помощи нейронной сети прямого распространения результаты различных классификаторов и продемонстрировали работу сети на методе опорных векторов, PLS (partial least squares), случайном лесе с использованием данных о работе УДМ.

5. Определение пороговых значений

В результате применения многих из описанных методов, в частности статистических методов или методов, основанных на реконструкции, получается временной ряд с оценкой аномальности соответствующего состояния. Однако при этом возникает упомянутая проблема определения порогового значения аномальности, начиная с которого необходимо предупреждать оператора о возможном приближении нештатной ситуации. Часто это происходит путем эмпирического определения некоторого порогового значения, исходя из информации об уже известных отказах и выбирая соотношение между количеством ложных положительных и ложных отрицательных ответов.

Как правило, длительная работа на режимах, близких к пороговым, является признаком аномальных процессов. Тем не менее поиск аномалий с использованием пороговых значений не способен выявить такие режимы работы. Hundman и соавт. [86] предложили метод динамического определения порогового значения при анализе временных рядов, который способен справиться с этой проблемой. В [86] было предложено определять пороговое значение в зависимости от длительности и величины ошибки предсказания сигнала, а также механизм фильтрации ложных положительных результатов. Работа алгоритма была продемонстрирована с использованием Numenta Anomaly Benchmark, а также данных КА Soil Moisture Active Passive (25 ТМП) и Mars Science Laboratory (55 ТМП).

Pang [91] предложил критерий ширины покрытия (coverage width criterion) для вычисления порогового значения аномальности состояния как гиперпараметра модели при использовании вероятностных моделей. Эффективность данного метода была проверена на ТМИ системы электропитания КА Fengyun.

6. Метрики качества методов

Для задач классификации и кластеризации типичными мерами качества алгоритма являются точность (precision) и полнота (recall):

$$\text{Точность} = \text{ИП} / (\text{ИП} + \text{ЛП}),$$

$$\text{Полнота} = \text{ИП} / (\text{ИП} + \text{ЛО}),$$

¹ <https://www.seradata.com/products/spacetrak/>

где ИП – истинные положительные, ЛО – ложные отрицательные, ЛП – ложные положительные результаты классификации. Таким образом, точность отражает долю правильных ответов из всех точек, которые система отнесла к данному классу, а чувствительность, которую также называют полнотой, отражает долю правильно классифицированных точек из всех точек данного класса. Как правило, совместное улучшение этих показателей оказывается невозможным, и необходимо выбирать баланс между ними для каждой задачи. Например, в очень крупных системах с большой устойчивостью можно пожертвовать точностью. В то время как если цена ошибки очень высока, то необходимо оптимизировать чувствительность ценой появления большего количества ложных положительных результатов. Точность и полноту часто комбинируют в F-меру, которая определяется как их среднее геометрическое.

Эти метрики предназначены для анализа классификации отдельных объектов, однако они не полностью применимы к временным рядам, поскольку игнорируют их структуру. Lavin и соавт. [92] предложили метрику *Numenta anomaly benchmark*, которая в некоторой мере учитывает последовательную структуру временного ряда и вознаграждает раннее обнаружение аномалий. В [92] предполагается, что идеальный детектор обладает следующими свойствами:

- 1) выделяет все аномалии в данных,
- 2) выделяет аномалии как можно раньше, в идеале – до того, как их заметит человек,
- 3) не дает ложных срабатываний,
- 4) работает с данными в реальном времени,
- 5) полностью автоматизирован для работы с разными наборами данных.

Исходя из этих требований окно заданной ширины вокруг точечной аномалии, в котором срабатывание детектора вознаграждается, а срабатывание вне этого окна считается ложным и штрафуются. Таким образом, эта метрика работает с аномалиями как с точечными, но учитывает временную структуру данных. В дополнение к этим методам вычисления метрик в работе [92] представлен корпус данных *Numenta NAB Data Corpus*², который содержит одномерные временные ряды из различных областей, таких как информационные и коммуникационные технологии, системы кондиционирования в зданиях и др. Эти данные имеют эталонную разметку и алгоритмы для оценки эффективности поиска аномалий.

Lee и Tatbul [93] предложили настраиваемые метрики качества поиска аномалий во временных рядах, которые обобщают понятия точности и полноты для множеств. Эти метрики учитывают частичное пересечение идентифицированных и настоящих аномалий путем введения функций, которые некоторым образом штрафуют разные виды неточностей определения аномальных интервалов. Эта метрика может учитывать специфику решаемой задачи путем введения других функций для штрафа за ошибки и вознаграждения за найденные аномалии. При этом путем выбора определенных функций вознаграждений и штрафов эта метрика может быть сведена к метрике, предложенной в [92], и потому является более общей.

² <https://github.com/numenta/NAB/tree/master/data/>

Отметим, что для корректной оценки качества и количественного сравнения работы различных алгоритмов обе метрики требуют наличия эталонной разметки аномалий.

7. Применения и перспективы развития в космической технике

Опишем существующие промышленные системы мониторинга, основанные на анализе данных, которые использовали или используют различные космические агентства для облегчения эксплуатации космических аппаратов, возможные варианты развития использующихся методов, а также открытые источники данных, которые могут быть использованы для тестирования разрабатываемых открытым сообществом алгоритмов.

Одной из первых систем, основанных на анализе данных, стала Inductive Monitoring System, разработанная Iverson и соавт. в NASA [49]. Ее принцип работы основан на алгоритме k-means, однако существенным отличием является доработка, позволяющая динамически увеличивать количество кластеров. Этот метод требует наличия базы данных номинальных состояний и обеспечивает выделение состояний, которые лежат достаточно далеко от известных номинальных состояний.

O'Meara [41] представил систему, использующуюся в немецком центре управления полетами (GSOC) DLR. Система берет за основу алгоритм IDOS [33], работающий на основе анализа плотности точек, вычисленной на основе оценки локальной естественной размерности данных, и дополняет его алгоритмом для выбора порогового значения для каждого ТМП. Кроме того, в [28] кратко описывается основная инфраструктура системы мониторинга.

Columbus Control Centre DLR внедрил Project Sibyl [94] в качестве системы обнаружения аномалий для контроля пилотируемых космических полетов. В системе реализован алгоритм LoOP на основе фреймворка ELKI [95]. В дальнейших планах стоит использование наработок Sibyl в проекте ATHMoS для создания единой системы мониторинга ТМИ для всех миссий GSOC.

CNES разработал совместно с TESA и внедрил систему NOSTRADAMUS [73] для контроля полета своих КА. В [73] описан основной функционал системы и концепция ее работы, основные промежуточные шаги анализа данных. В заключение [73] приведено описание основных недостатков системы, выяснившихся в процессе эксплуатации, таких как повышенная чувствительность к входным данным (из-за особенностей работы выбранного за основу алгоритма OC-SVM) и сложности интерпретации результата.

Системы мониторинга, основанные на данных, также работают в JAXA [56] и NASA JPL [86], Korea Aerospace Research Institute (KARI) [84]. Однако в [56, 84, 86] приведено описание только математического метода анализа информации и не описана инфраструктура решения.

Видно, что многие космические агентства активно эксплуатируют и занимаются внедрением различных математических методов для анализа ТМИ, организуют необходимую для этого вычислительную инфраструктуру и доступ к многолетней ТМИ для необходимой валидации созданных алгоритмов.

Существует также несколько открытых источников с информацией:

— Nasa Prognostics Center of Excellence³ предоставляет доступ к данным от различных организаций и университетов, которые могут быть использованы для изучения и отладки алгоритмов⁴;

— с 2019 г. открыт доступ к ТМИ космического аппарата GOCE [96], который содержит около 13 000 ТМП, однако он не содержит разметки данных с указанием поломок и аномалий;

— в 2016 г. были проведены открытые соревнования по созданию эффективной предсказательной модели системы терморегуляции для аппарата Mars Express Orbiter [30]. Данные представляют собой архив за три марсианских года, включающих в себя контекст (например углы на Солнце, журналы от-данных команд и т.п.) и данные наблюдений (потребление 33 ТМП СОТР). Задача состояла в предсказании потребления СОТР на четвертый год;

— SpaceTrak⁵ — коммерчески поддерживаемая база данных происшествий с космической техникой. Эта база не содержит ТМИ, но может служить источником данных для валидации или других исследований надежности.

К сожалению, по имеющейся на данный момент информации, не существует корпуса данных спутниковой ТМИ с разметкой аномалий или неисправностей. Ограниченное наличие данных значительно затрудняет разработку и валидацию как специализированных методов, так и методов общего назначения для мониторинга КА.

Несмотря на значительные успехи и широкое применение в промышленности, существует значительный запрос на новые разработки. К ним относятся технологии активного обучения для поиска аномалий. Этот запрос обусловлен большим количеством поступающей информации и принципиальной невозможностью полной ручной разметки.

Кроме того, большая часть алгоритмов машинного обучения предполагает, что тренировочные и тестовые данные принадлежат одному и тому же распределению. Однако на практике данное условие не выполняется ввиду нестабильности производства и различных условий, в которых находятся КА. Поэтому при применении модели, обученной на работе одного из КА группировки, к другому КА будут возникать неточности. Недавно для преодоления этих сложностей начали использоваться техники предметной адаптации [97]. Эта тема требует дополнительных исследований для задач технической диагностики.

Остается открытым вопрос об использовании экспертного знания и физических моделей, их интеграции в процесс автоматизированной технической диагностики. Некоторые исследования показали, что это может улучшить точность и интерпретируемость результата [98]. Tipaldi [3] предложил возможную архитектуру такого решения. Подробный обзор перспектив глубокого обучения для задач управления техническим состоянием был проведен Fink и соавт. [99].

³ <https://ti.arc.nasa.gov/tech/dash/groups/pcoe/>

⁴ <https://ti.arc.nasa.gov/tech/dash/groups/pcoe/prognostic-data-repository/>

⁵ <https://www.seradata.com/products/spacetrak/>

8. Заключение

В статье рассмотрены основные типы методов анализа данных, использующихся для анализа телеметрической информации (ТМИ) и поиска аномалий в ней, и основные публикации о применении этих методов. Были описаны особенности постановки задачи и валидации работающих на этом принципе систем мониторинга состояния КА, а также обсуждались возможные метрики качества работы алгоритмов и вопросы выбора пороговых значений степени аномальности для необходимого баланса между этими метриками. Кратко обозначены возможные перспективы развития в этой области.

Можно видеть [11], что большинство алгоритмов быстро теряет свою эффективность при увеличении количества анализируемых ТМП, поэтому многие работы так или иначе старались выделить признаки, имеющие меньшую размерность, чем исходные данные. Эта проблема широко известна под названием “проклятие размерности”. Для борьбы с ней может быть полезна разумная сегментация задачи мониторинга по параметрам отдельных составных частей КА с последующей агрегацией результатов.

Самыми популярными методами для обнаружения аномалий являются методы, основанные на плотности, которая вычисляется тем или иным способом, а также методы, основанные на реконструкции, а одним из самых эффективных способов улучшить качество моделей является проработка особенностей конкретных составных частей КА и тщательная подготовка признаков. Часто этот фактор является решающим в качестве модели, а не алгоритм, по которому эта модель работает. Несмотря на это можно видеть, что большинство публикаций учитывает только ТМИ, принятую с борта конкретного КА, не принимая во внимание факторы космической погоды и ее прогноза, что является крайне важным в работе КА.

Многие работы (см. приложение) используют искусственно сгенерированные данные для валидации своих алгоритмов. При этом остается открытым вопрос о возможности распространения таких результатов на реальные полетные данные. Многие космические агентства, имеющие доступ к данным для создания и валидации алгоритмов, разрабатывают и внедряют собственные системы для мониторинга технического состояния. Эти системы показывают эффективную работу в промышленном использовании и снижают нагрузку на операторов.

К сожалению, на данный момент не существует достаточного количества различных открытых данных с ТМИ КА и эталонной разметкой. Это делает невозможным повторение и подтверждение публикуемых работ, учет различных особенностей составных частей КА, а также сравнение эффективности работы экспертов и алгоритмов различных типов. Эти факторы значительно затормаживают развитие и внедрение автоматизированных систем контроля технического состояния КА. Для адаптации систем общего назначения под специфику работы КА необходимо создание соответствующего корпуса размеченных данных, а также объективных метрик для оценки и сравнения качества работы различных алгоритмов и операторов.

Кроме того, для улучшения качества прогноза технического состояния КА необходимо учитывать условия космической погоды и интегрировать эту информацию в системы поддержки принятия решений. С другой стороны, необ-

ходимы методы разбиения задачи контроля состояния всего КА на задачи меньшей размерности, например по его составным частям, методы понижения размерности путем более эффективного представления информации для улучшения работы алгоритмов, поскольку их эффективность напрямую связана с плотностью исходных данных.

Несмотря на перечисленные сложности и нерешенные задачи, системы мониторинга технического состояния КА, основанные на данных, уже используются во многих космических агентствах по всему миру и зарекомендовали себя как важный инструмент технической диагностики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица. Перечень работ

Публикация	Данные	Выделение признаков	Метод
1	2	3	4
Iverson, 2004 [49]	Columbia Space Shuttle	нет	Кластеризация
Azevedo, 2012 [54]	СЭП бразильского КА	нет	K-means, Статистические (EM)
Li, 2015 [68]	Данные моделирования СЭП	РСА	Fuzzy C-means, WPSVM
Fuertes, 2016 [73]	КА CNES	статистические параметры сигнала в окне	PCA + OC-SVM
O'Meara, 2016 [41]	Маховики КА ТЕТ-1	Вектор из сводной информации по каждому ТМП за виток	OPVID
Verzola, 2016 [94]	запоминающее устройство (Mass Memory Unit) Columbus Orbital Laboratory	Время дня, координаты, положение солнца, данные космической погоды	Вероятностные параметрические
Nassar, 2017 [72]	16 ТМП СОС	нет	классификация PLS-DA, KSVM
Rahimi, 2017 [55]	Численное моделирование		P-адаптивный фильтр Калмана
Yairi, 2017 [56]	СЭП КА JAXA SDS-4		Байесовская классификация + Stochastic PCA
Chen, 2018 [52]	Лабораторный эксперимент с УДМ СОС	Корреляционная размерность	K-medoids(2 раза)
Pang, 2018 [91]	СЭП с КА FENGYUN	нет	LS-SVM, Gaussian Process Regression, Restricted Vector Machine
Adnane, 2018 [58]	Численное моделирование СОС		Обобщенный фильтр Калмана

Таблица (продолжение)

1	2	3	4
Carlton, 2018 [89]	Intelsat, Inmarsat		Поиск временных явлений, точек перехода статистическими методами, группировка событий
O'Meara, 2018 [28]	Несколько лет исторической информации о работе КА	Выделены как вручную, так и с помощью автокодировщика	Сеть прямого распространения
Martinez, 2018 [79]	991 ТМП КА Mars Express	нет	Определение пороговых значений с помощью нейронной сети прямого распространения
Gowda, 2018 [29]	ТМИ Mars Express Challenge	ручное выделение признаков	XGBoost
Suo, 2019 [22]	СЭП геостационарного КА (искусственные)	Выбраны с помощью предложенной методики	SVM
Galal, 2019 [74]	30 переменных СЭП	РСА (7 компонент)	Байесовский классификатор
Ibrahim, 2019 [81]	EgyptSat-1		ARIMA, MLP, RNN, LSTM, GRU, DLSTM, DGRU
Ahmed, 2019 [59]	Nasa Ames Prognostics		Классификация + метод Каплана–Мейера
Petkovic, 2019 [80]	СЭП Марс-Экспресс	ручное	Случайный лес, градиентный бустинг
Suo, 2019 [53]	СЭП геостационарного КА (искусственные)	нет	NGC Сеточная кластеризация на основе соседства
Omran, 2019 [82]	Численное моделирование высокой точности маховика СОС	Метод Прони	Elman RNN для детектирования по разладке и сеть прямого распространения для классификации аномалий
Murtada, 2019 [83]	Численное моделирование работы солнечных панелей с шумами	Метод Прони	Сеть прямого распространения
Nozari, 2019 [90]	Численное моделирование	Результаты других классификаторов	Мета-классификатор на основе SVM, NB, PLS, RF
Ibrahim, 2020 [75]	СОТР EgyptSat-1		OC-SVM, K-means, LAD
Pilastre, 2020 [87]	18 дней ТМИ: 1000 ТМП (90 затронуто аномалиями)	Дискретные и непрерывные параметры из окна фиксированной ширины	Anomaly Detection using Dictionary (ADDICT)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zolghadri A.* Advanced Model-Based FDIR Techniques for Aerospace Systems: Today Challenges and Opportunities // *Progress in Aerospace Sciences*. 2012. V. 53. P. 18–29. ISSN 0376-0421. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2012.02.004>
2. *Абанин О.И., Соловьёв С.В.* Содержание и структура задач диагностики аномалий в работе бортовых систем космического аппарата // *Инж. ж.: наука и инновации*. 2019. № 6 (90). С. 7. ISSN 2308-6033. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-6-1890>
3. *Tipaldi M., et al.* On Applying AI-Driven Flight Data Analysis for Operational Spacecraft Model-Based Diagnostics // *Annual Reviews in Control*. 2020. V. 49. P. 197–211. ISSN 1367-5788. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.04.012>
4. *Соловьёв С.В., Мишурова Н.В.* Анализ текущего состояния процесса контроля при управлении полетом космических аппаратов // *Инж. ж.: наука и инновации*. 2016. № 3 (51). С. 3. ISSN 2308-6033. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2016-3-1474>
5. *Соловьёв В.А., Любинский В.Е., Жук Е.И.* Текущее состояние и перспективы развития системы управления полетами космических аппаратов // *Пилотируемые полеты в космос*. 2011. № 1 (1). С. 27–37. ISSN 2226-7298.
6. *Балушто А.Н., Романов А.А.* Искусственный интеллект в космической технике: состояние, перспективы развития // *Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы*. 2019. Т. 6. № 1. С. 65–75. ISSN 2409-0239, 2587-9057. <https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.65.75>
7. *Chandola V., Banerjee A., Kumar V.* Anomaly Detection: A Survey // *ACM Comp. Surv.* 2009. V. 41. No. 3. ISSN 0360-0300. <https://doi.org/10.1145/1541880.1541882>
8. *Pimentel M.A.F., et al.* A Review of Novelty Detection // *Signal Processing*. 2014. V. 99. P. 215–249. ISSN 0165-1684. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.12.026>
9. *Wang H., Bah M.J., Hammad M.* Progress in Outlier Detection Techniques: A Survey // *IEEE Access*. 2019. V. 7. P. 107964–108000. ISSN 2169-3536. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2932769>
10. *Chalapathy R., Chawla S.* Deep Learning for Anomaly Detection: A Survey. 2019. arXiv: 1901.03407 [cs, stat]. URL: <http://arxiv.org/abs/1901.03407> (дата обр. 17.04.2020).
11. *Zimek A., Schubert E., Kriegel H.-P.* A Survey on Unsupervised Outlier Detection in High-Dimensional Numerical Data // *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science J.* 2012. V. 5. No. 5. P. 363–387. ISSN 1932-1872. <https://doi.org/10.1002/sam.11161>
12. *Thudumu S., et al.* A Comprehensive Survey of Anomaly Detection Techniques for High Dimensional Big Data // *J. of Big Data*. 2020. V. 7. No. 1. P. 42. ISSN 2196-1115. <https://doi.org/10.1186/s40537-020-00320-x>
13. *Gavrilovski A., et al.* Challenges and Opportunities in Flight Data Mining: A Review of the State of the Art // *AIAA Infotech @ Aerospace*. SanDiego, California, USA: AIAA, 2016. ISBN 978-1-62410-388-9. <https://doi.org/10.2514/6.2016-0923>
14. *Khan S., Yairi T.* A Review on the Application of Deep Learning in System Health Management // *Mech. Systems and Signal Processing*. 2018. V. 107. P. 241–265. ISSN 0888-3270. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.024>
15. *Basora L., Olive X., Dubot T.* Recent Advances in Anomaly Detection Methods Applied to Aviation // *Aerospace*. 2019. V. 6. No. 11. P. 117. <https://doi.org/10.3390/aerospace6110117>
16. *Соловьёв В.А., Лысенко Л.Н., Любинский В.Е.* Управление космическими полетами. Уч. пос. Ч.1. М.: МГТУ им. Баумана, 2009. ISBN 978-5-7038-3351-3.

17. *Gao Z., Cecati C., Ding S.* A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques – Part I: Fault Diagnosis with Model-Based and Signal-Based Approaches // *IEEE Trans. on Industrial Electronics*. 2015. V. 62. No. 6. P. 3757–3767. <https://doi.org/10.1109/TIE.2015.2417501>
18. *Barber D.* Bayesian Reasoning and Machine Learning, 1st edition. Cambridge; N.Y.: Cambridge University Press, 2012. ISBN 978-0-521-51814-7.
19. *Pimentel T., et al.* Deep Active Learning for Anomaly Detection. 2020. arXiv: 1805.09411 [cs, stat]. URL: <http://arxiv.org/abs/1805.09411> (visited on 08/30/2020).
20. *Das S., et al.* Incorporating Expert Feedback into Active Anomaly Discovery // 2016 IEEE 16th Int. Conf. on Data Mining (ICDM). 2016. P. 853–858. <https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0102>
21. *IBM Analytics.* ASUM Analytics Solutions Unified Method. 2015.
22. *Suo M., et al.* Data-Driven Fault Diagnosis of Satellite Power System Using Fuzzy Bayes Risk and SVM // *Aerospace Science and Technology*. 2019. V. 84. P. 1092–1105. ISSN 1270-9638. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.11.049>
23. *Kononenko I.* Estimating Attributes: Analysis and Extensions of RELIEF // *Machine Learning: ECML-94/ Eds. F. Bergadano, L. De Raedt.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1994. P. 171–182. (Lecture Notes in Computer Science.) ISBN 978-3-54048365-6. https://doi.org/10.1007/3-540-57868-4_57
24. *Hanchuan Peng, Fuhui Long, Ding C.* Feature Selection Based on Mutual Information Criteria of Max-Dependency, Max-Relevance, and Min-Redundancy // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2005. V. 27. No. 8. P. 1226–1238. ISSN 1939-3539. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2005.159>
25. *Hu Q., et al.* Neighborhood Rough Set Based Heterogeneous Feature Subset Selection // *Information Sciences*. 2008. V. 178. No. 18. P. 3577–3594. ISSN 0020-0255. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.05.024>
26. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. 3rd edition. Academic Press, 2008. ISBN 978-0-12-374370-1. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12374370-1.X0001-8>
27. *Barreyre C., et al.* Statistical Methods for Outlier Detection in Space Telemetries // *Space Operations: Inspiring Humankind’s Future / Eds. H. Pasquier, et al.* Cham: Springer Int. Publishing, 2019. P. 513–547. ISBN 978-3-030-11536-4. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11536-4_20
28. *O’Meara C., Schlag L., Wickler M.* Applications of Deep Learning Neural Networks to Satellite Telemetry Monitoring // 15th Int. Conf. on Space Operations. Marseille, France: AIAA, 2018. ISBN 978-1-62410-562-3. <https://doi.org/10.2514/6.2018-2558>
29. *Gowda G.M., et al.* The Added Value Of Advanced Feature Engineering And Selection For Machine Learning Models In Spacecraft Behavior Prediction // 2018 SpaceOps Conf. Marseille, France: AIAA, 2018. ISBN 978-1-62410-562-3. <https://doi.org/10.2514/6.2018-2561>
30. *Lucas L., Boumghar R.* Machine Learning for Spacecraft Operations Support — The Mars Express Power Challenge / 2017 6th Int. Conf. on Space Mission Challenges for Inf. Technology (SMC-IT). 2017. P. 82–87. <https://doi.org/10.1109/SMC-IT.2017.21>
31. *Bay S.D., Schwabacher M.* Mining Distance-Based Outliers in near Linear Time with Randomization and a Simple Pruning Rule // *Proc. 9th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining*. Washington, D.C.: ACM, 2003. P. 29–38. (KDD ’03). ISBN 978-1-58113-737-8. <https://doi.org/10.1145/956750.956758>
32. *Breunig M.M., et al.* LOF: Identifying Density-Based Local Outliers // *Proc. 2000 ACM SIGMOD Int. Conf. on Management of Data*. Dallas, Texas, USA: ACM, 2000. P. 93–104. (SIGMOD ’00). ISBN 978-1-58113-217-5. <https://doi.org/10.1145/342009.335388>

33. *Von Brünken J., Houle M.E., Zimek A.* Intrinsic Dimensional Outlier Detection in High-Dimensional Data // NII Technical Reports. 2015. V. 2015. No. 3. P. 1–12.
34. *Houle M.E., Kashima H., Nett M.* Generalized Expansion Dimension // 2012 IEEE 12th Int. Conf. on Data Mining Workshops. 2012. P. 587–594.
<https://doi.org/10.1109/ICDMW.2012.94>
35. *Houle M.E.* Dimensionality, Discriminability, Density and Distance Distributions // 2013 IEEE 13th Int. Conf. on Data Mining Workshops. 2013. P. 468–473.
<https://doi.org/10.1109/ICDMW.2013.139>
36. *Kriegel H.-P., et al.* Outlier Detection in Axis-Parallel Subspaces of High Dimensional Data // Adv. in Knowledge Discovery and Data Mining / Eds. T. Theeramunkong, et al. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. P. 831–838. (Lecture Notes in Computer Science). ISBN 978-3-642-01307-2.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-01307-2_86
37. *Kriegel H.-P., Schubert M., Zimek A.* Angle-Based Outlier Detection in High-Dimensional Data // Proc. 14th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, NY, USA: ACM, 2008. P. 444–452. (KDD '08). ISBN 978-1-60558-193-4. <https://doi.org/10.1145/1401890.1401946>
38. *Rosenblatt M.* Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function // Annals of Mathematical Statistics. 1956. V. 27. No. 3. P. 832–837. ISSN 0003-4851, 2168-8990. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177728190>
39. *Tang B., He H.* A Local Density-Based Approach for Outlier Detection // Neurocomputing. 2017. V. 241. P. 171–180. ISSN 0925-2312.
<https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.02.039>
40. Dynamic Time Warping // Inf. Retrieval for Music and Motion / Eds. M. Muller. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. P. 69–84. ISBN 978-3-540-74048-3.
https://doi.org/10.1007/978-3-540-74048-3_4
41. *O'Meara C., et al.* ATHMoS: Automated Telemetry Health Monitoring System at GSOC Using Outlier Detection and Supervised Machine Learning // SpaceOps 2016 Conf. Daejeon, Korea: AIAA, 2016. ISBN 978-1-62410-426-8.
<https://doi.org/10.2514/6.2016-2347>
42. *Martinez J.* New Telemetry Monitoring Paradigm with Novelty Detection // SpaceOps 2012 Conf. AIAA, 2012. (SpaceOps Conf.s).
<https://doi.org/10.2514/6.2012-1275123>
43. *Schlag L., O'Meara C., Wickler M.* Numerical Analysis of Automated Anomaly Detection Algorithms for Satellite Telemetry // 15th Int. Conf. on Space Operations. Marseille, France: AIAA, 2018. ISBN 978-1-62410-562-3.
<https://doi.org/10.2514/6.2018-2534>
44. *Guha S., Rastogi R., Shim K.* Rock: A Robust Clustering Algorithm for Categorical Attributes // Inf. Systems. 2000. V. 25. No. 5. P. 345–366. ISSN 0306-4379.
[https://doi.org/10.1016/S0306-4379\(00\)00022-3](https://doi.org/10.1016/S0306-4379(00)00022-3)
45. *Ertöz L., Steinbach M., Kumar V.* Finding Clusters of Different Sizes, Shapes, and Densities in Noisy, High Dimensional Data // Proc. 2003 SIAM Int. Conf. on Data Mining. Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003. P. 47–58. (Proceedings). ISBN 978-0-89871-545-3. <https://doi.org/10.1137/1.9781611972733.5>
46. *Kohonen T.* Exploration of Very Large Databases by Self-Organizing Maps // Proc. of Int. Conf. on Neural Networks (ICNN'97). V. 1. IEEE, 1997. PL1-PL6.
<https://doi.org/10.1109/ICNN.1997.611622>
47. *He Z., Xu X., Deng S.* Discovering Cluster-Based Local Outliers // Pattern Recognition Letters. 2003. V. 24. No. 9. P. 1641–1650. ISSN 0167-8655.
[https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(03\)00003-5](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(03)00003-5)

48. *Sun H., et al.* CD-Trees: An Efficient Index Structure for Outlier Detection // Adv. in Web-Age Inf. Management / Eds. Q. Li, G. Wang, L. Feng. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. P. 600–609. (Lecture Notes in Computer Science). ISBN 978-3-540-27772-9. https://doi.org/10.1007/978-3-540-27772-9_60
49. *Iverson D.L., Field M.* Inductive System Health Monitoring. 2004.
50. *Iverson D.L., et al.* General Purpose Data-Driven Monitoring for Space Operations // J. of Aerospace Computing, Inf., and Communication. 2012. V. 9. No. 2. P. 26–44. <https://doi.org/10.2514/1.54964>
51. *Singh S.* A Data-Driven Approach to Cubesat Health Monitoring // Master's Theses and Project Reports. 2017. <https://doi.org/10.15368/theses.2017.100>
52. *Chen C., et al.* A Fault Diagnosis Method for Satellite Flywheel Bearings Based on 3D Correlation Dimension Clustering Technology // IEEE Access. 2018. V. 6. P. 78483–78492. ISSN 2169-3536. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2885046>
53. *Suo M., et al.* Neighborhood Grid Clustering and Its Application in Fault Diagnosis of Satellite Power System // Proc. Inst. of Mech. Engineers, Part G: J. of Aerospace Engineering. 2019. V. 233. No. 4. P. 1270–1283. ISSN 0954-4100. <https://doi.org/10.1177/0954410017751991>
54. *Azevedo D.R., Ambrosio A.M., Vieira M.* Applying Data Mining for Detecting Anomalies in Satellites // 2012 9th European Dependable Computing Conf. 2012. P. 212–217. <https://doi.org/10.1109/EDCC.2012.19>
55. *Rahimi A., Kumar K.D., Alighanbari H.* Fault Estimation of Satellite Reaction Wheels Using Covariance Based Adaptive Unscented Kalman Filter // Acta Astronautica. 2017. V. 134. P. 159–169. ISSN 0094-5765. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.02.003>
56. *Yairi T., et al.* A Data-Driven Health Monitoring Method for Satellite Housekeeping Data Based on Probabilistic Clustering and Dimensionality Reduction // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 2017. V. 53. No. 3. P. 1384–1401. ISSN 1557-9603. <https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2671247>
57. *Tipping M.E., Bishop C.M.* Mixtures of Probabilistic Principal Component Analyzers // Neural Computation. 1999. V. 11. No. 2. P. 443–482. ISSN 0899-7667. <https://doi.org/10.1162/089976699300016728>
58. *Adnane A. et al.* Real-Time Sensor Fault Detection and Isolation for LEO Satellite Attitude Estimation through Magnetometer Data // Adv. Space Res. 2018. V. 61. No. 4. P. 1143–1157. ISSN 0273-1177. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.12.007>
59. *Ahmed A.M., et al.* Prediction of Battery Remaining Useful Life on Board Satellites Using Logical Analysis of Data // 2019 IEEE Aerospace Conf. 2019. P. 1–8. <https://doi.org/10.1109/AERO.2019.8741717>
60. *Kaplan E.L., Meier P.* Nonparametric Estimation from Incomplete Observations // J. of the American Statistical Association. 1958. V. 53. No. 282. P. 457–481. ISSN 0162-1459. <https://doi.org/10.2307/2281868>. JSTOR: 2281868.
61. *Chung J., et al.* Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling. 2014. arXiv: 1412.3555 [cs]. URL: <http://arxiv.org/abs/1412.3555> (visited on 09/01/2020).
62. *Hochreiter S., Schmidhuber J.* Long Short-Term Memory // Neural Computation. 1997. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735>
63. *Agrawal R., Imielinski T., Swami A.* Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases // ACM SIGMOD Record. 1993. V. 22. No. 2. P. 207–216. ISSN 0163-5808. <https://doi.org/10.1145/170036.170072>
64. *Schölkopf B., et al.* Estimating the Support of a High-Dimensional Distribution // Neural Computation. 2001. V. 13. No. 7. P. 1443–1471. ISSN 0899-7667. <https://doi.org/10.1162/089976601750264965>

65. *Das S., et al.* Multiple Kernel Learning for Heterogeneous Anomaly Detection: Algorithm and Aviation Safety Case Study // Proc. 16th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, NY, USA: ACM, 2010. P. 47–56. (KDD '10). ISBN 978-1-4503-0055-1. <https://doi.org/10.1145/1835804.1835813>
66. *Budalakoti S., Srivastava A.N., Otey M.E.* Anomaly Detection and Diagnosis Algorithms for Discrete Symbol Sequences with Applications to Airline Safety // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Part C: Applications and Reviews. 2009. V. 39. No. 1. P. 101–113. ISSN 1094-6977. <https://doi.org/10.1109/TSMCC.2008.2007248>
67. *Patel P., et al.* Mining Motifs in Massive Time Series Databases // Proc. 2002 IEEE Int. Conf. on Data Mining, 2002. 2002. <https://doi.org/10.1109/ICDM.2002.1183925>
68. *Li K., et al.* A Spacecraft Electrical Characteristics Multi-Label Classification Method Based on Off-Line FCM Clustering and On-Line WPSVM // PLOS ONE. 2015. V. 10. No. 11. e0140395. ISSN 1932-6203. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0140395>.
69. *Li K., et al.* Multi-Label Spacecraft Electrical Signal Classification Method Based on DBN and Random Forest // PLoS ONE. 2017. V. 12. No. 5. ISSN 1932-6203. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176614>. pmid: 28486479.
70. *Воронцов В.А., Федоров Е.А.* Разработка прототипа интеллектуальной системы оперативного мониторинга и технического состояния основных бортовых систем космического аппарата // Тр. Маи. 2015. № 82. С. 35. ISSN 1727-6942.
71. *Nassar B., Hussein W.* State-of-Health Analysis Applied to Spacecraft Telemetry Based on a New Projection to Latent Structure Discriminant Analysis Algorithm // 2015 IEEE Aerospace Conf. 2015. P. 1–11. <https://doi.org/10.1109/AERO.2015.7118887>
72. *Nassar B., Hussein W., Medhat M.* Supervised Learning Algorithms for Spacecraft Attitude Determination and Control System Health Monitoring // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 2017. V. 32. No. 4. P. 26–39. ISSN 1557-959X. <https://doi.org/10.1109/MAES.2017.150049>
73. *Fuertes S., et al.* Improving Spacecraft Health Monitoring with Automatic Anomaly Detection Techniques // SpaceOps 2016 Conf. AIAA, 2016. <https://doi.org/10.2514/6.2016-2430>
74. *Galal M.A., et al.* Satellite Battery Fault Detection Using Naive Bayesian Classifier // 2019 IEEE Aerospace Conf. 2019. P. 1–11. <https://doi.org/10.1109/AERO.2019.8741963>
75. *Ibrahim S.K., et al.* Machine Learning Techniques for Satellite Fault Diagnosis // Ain Shams Engineering J. 2020. V. 11. No. 1. P. 45–56. ISSN 2090-4479. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2019.08.006>
76. *Trafalis T.B., Ince H.* Support Vector Machine for Regression and Applications to Financial Forecasting // Proc. IEEE-INNS-ENNS Int. Joint Conf. on Neural Networks. IJCNN 2000. Neural Computing: New Challenges and Perspectives for the New Millennium. V. 6. IEEE, 2000. P. 348–353. <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2000.859420>
77. *Chikalov I., et al.* Logical Analysis of Data: Theory, Methodology and Applications // Three Approaches to Data Analysis: Test Theory, Rough Sets and Logical Analysis of Data / Eds. I. Chikalov, et al. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. P. 147–192. (Intelligent Systems Reference Library). ISBN 978-3-642-28667-4. https://doi.org/10.1007/978-3-642-28667-4_3
78. *Абрамов Н.С. и др.* Высокопроизводительная нейросетевая система мониторинга состояния и поведения подсистем космических аппаратов по телеметрическим данным // Программные системы: теория и приложения. Россия, Вельсково, 2017. № 3 (30).

79. *Martinez J., Donati A.* Novelty Detection with Deep Learning // 2018 SpaceOps Conf. AIAA, 2018. (SpaceOps Conf.s). <https://doi.org/10.2514/6.2018-2560>
80. *Petkovic M., et al.* Machine Learning for Predicting Thermal Power Consumption of the Mars Express Spacecraft // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 2019. V. 34. No. 7. P. 46–60. ISSN 1557-959X. <https://doi.org/10.1109/MAES.2019.2915456>
81. *Ibrahim S.K., et al.* Machine Learning Methods for Spacecraft Telemetry Mining // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 2019. V. 55. No. 4. P. 1816–1827. ISSN 1557-9603. <https://doi.org/10.1109/TAES.2018.2876586>
82. *Omran E.A., Murtada W.A.* Efficient Anomaly Classification for Spacecraft Reaction Wheels // Neural Computing and Applications. 2019. V. 31. No. 7. P. 2741–2747. ISSN 1433-3058. <https://doi.org/10.1007/s00521-017-3226-y>
83. *Murtada W.A., Omran E.A.* Robust Anomaly Identification Algorithm for Noisy Signals: Spacecraft Solar Panels Model // Neural Computing and Applications. 2019. ISSN 0941-0643, 1433-3058. <https://doi.org/10.1007/s00521-019-04407-2>
84. *Shin Y., et al.* ITAD: Integrative Tensor-Based Anomaly Detection System for Reducing False Positives of Satellite Systems // Proc. 29th ACM Int. Conf. on Inf. & Knowledge Management. New York, NY, USA: ACM, 2020. P. 2733–2740. (CIKM '20). ISBN 978-1-4503-6859-9. <https://doi.org/10.1145/3340531.3412716>
85. *Kiers H.A.L.* Towards a Standardized Notation and Terminology in Multiway Analysis // J. of Chemometrics. 2000. V. 14. No. 3. P. 105–122. ISSN 1099-128X. [https://doi.org/10.1002/1099-128X\(200005/06\)14:3<105::AID-CEM582>3.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/1099-128X(200005/06)14:3<105::AID-CEM582>3.0.CO;2-I).
86. *Hundman K., et al.* Detecting Spacecraft Anomalies Using LSTMs and Nonparametric Dynamic Thresholding // Proc. ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining. 2018. P. 387–395. <https://doi.org/10.1145/3219819.3219845>
87. *Pilastre B., et al.* Anomaly Detection in Mixed Telemetry Data Using a Sparse Representation and Dictionary Learning // Signal Processing. 2020. V. 168. P. 107320. ISSN 0165-1684. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107320>
88. *Aggarwal C.C.* Outlier Ensembles: Position Paper // ACM SIGKDD Explorations Newsletter. 2013. V. 14. No. 2. P. 49–58. ISSN 1931-0145. <https://doi.org/10.1145/2481244.2481252>
89. *Carlton A., et al.* Telemetry Fault-Detection Algorithms: Applications for Spacecraft Monitoring and Space Environment Sensing // J. of Aerospace Inf. Systems. 2018. V. 15. No. 5. P. 239–252. <https://doi.org/10.2514/1.1010587>
90. *Nozari H.A., et al.* Novel Non-Model-Based Fault Detection and Isolation of Satellite Reaction Wheels Based on a Mixed-Learning Fusion Framework // IFAC PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 12. P. 194–199. (21st IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace ACA 2019). ISSN 2405-8963. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.222>
91. *Pang J., et al.* Anomaly Detection for Satellite Telemetry Series with Prediction Interval Optimization // 2018 Int. Conf. on Sensing, Diagnostics, Prognostics, and Control (SDPC). 2018. P. 408–414. <https://doi.org/10.1109/SDPC.2018.8664879>
92. *Lavin A., Ahmad S.* Evaluating Real-Time Anomaly Detection Algorithms – The Numenta Anomaly Benchmark // 2015 IEEE 14th Int. Conf. on Machine Learning and Applications (ICMLA). 2015. P. 38–44. <https://doi.org/10.1109/ICMLA.2015.141>
93. *Tatbul N., et al.* Precision and Recall for Time Series // Adv. in Neural Inf. Processing Systems 31 / Eds. S. Bengio, et al. Curran Associates, Inc., 2018. P. 1920–1930.

94. *Verzola I., et al.* Project Sibyl: A Novelty Detection System for Human Spaceflight Operations // SpaceOps 2016 Conf. AIAA, 2016. (SpaceOps Conf.)
<https://doi.org/10.2514/6.2016-2405>
95. ELKI Data Mining Framework. URL: <https://elki-project.github.io/> (дата обр. 02.11.2020).
96. *European Space Agency.* GOCE Telemetry Data Collection. 2019.
<https://doi.org/10.5270/esa-7nc8pjp>
97. *Ganin Y., et al.* Domain-Adversarial Training of Neural Networks // J. of Machine Learning Research. 2016. V. 17. No. 59. P. 1–35.
98. *Von Rueden L., et al.* Informed Machine Learning — A Taxonomy and Survey of Integrating Knowledge into Learning Systems. 2020. arXiv: 1903.12394 [cs, stat]. URL: <http://arxiv.org/abs/1903.12394> (visited on 09/04/2020).
99. *Fink O., et al.* Potential, Challenges and Future Directions for Deep Learning in Prognostics and Health Management Applications // Eng. Appl. Artif. Intell. 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2020.103678>

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 04.12.2020

После доработки 04.01.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com),
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@mngasu.ru)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ: ЛОКАЛИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО И СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ¹

Рассматриваются задачи многокритериальной минимаксной оптимизации с критериями вида максимумов функционалов, к которым относятся индуцированные нормы линейных операторов, отображающих входы системы и/или ее начальное состояние в выходы. Показано, что замена трудновыполнимой минимизации линейной свертки таких критериев на минимизацию максимума линейной свертки соответствующих им функционалов приводит к субоптимальным решениям с оценкой степени субоптимальности по отношению к оптимальным по Парето решениям. Этот подход применяется к синтезу субоптимальных по Парето законов управления линейными нестационарными на конечном горизонте и стационарными на бесконечном горизонте непрерывными и дискретными системами при неопределенных начальных состояниях и/или возмущениях. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: многокритериальное управление, множество Парето, обобщенная H_∞ норма, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S000523102108002X

1. Введение

Реальные задачи управления всегда многокритериальны. Нахождение множества Парето, а следовательно, и оптимальных по Парето решений, т.е. неуплучшаемых одновременно для всех критериев, представляет собой сложную задачу. Известно, что замена многокритериальной задачи на однокритериальную с критерием в виде линейной комбинации исходных критериев обеспечивает в общем случае нахождение некоторого подмножества множества Парето (Парето-оптимального фронта). Но и такая замена в многокритериальных минимаксных задачах, в которых отдельные критерии являются максимумами некоторых функционалов по неопределенным переменным

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00289), Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

или функциям, приводит к трудной задаче оптимизации линейной комбинации максимумов некоторых функционалов. Можно привести лишь несколько многокритериальных задач управления, в которых удалось описать оптимальные по Парето решения: линейно-квадратичные гауссовские управления [1] и H_2 оптимальные управления [2] на основе Q -параметризации стабилизирующих регуляторов линейных стационарных систем на бесконечном интервале времени, а также обобщенные H_2 оптимальные управления [3, 4] для линейных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте.

В [5] для задач многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞ и γ_0 норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1 - \sqrt{N}/N$, где N – число критериев. В многокритериальных задачах управления с критериями, включающими H_∞ норму, удавалось синтезировать субоптимальные управления, как правило, только при дополнительном ограничении типа равенства матриц функций Ляпунова [6–11], которое неявно присутствует и в концепции так называемого смешанного H_2/H_∞ управления, или типа равенства вспомогательных матричных переменных [12, 13], налагаемых на матричные уравнения или линейные матричные неравенства, характеризующие каждый из критериев. В [14] для синтеза двукритериального управления применялся подход, состоящий в получении конечномерных Q -аппроксимаций оптимальных по Парето регуляторов. При этом до сих пор остается без ответа вопрос о том, в какой мере значения отдельных критериев при многокритериальных законах управления, синтезируемых с учетом дополнительных ограничений или на основе аппроксимаций, превышают соответствующие значения критериев при оптимальных по Парето законах управления.

Результаты, полученные в данной статье, в каком-то смысле проливают свет на эту проблему. А именно показано, как в многокритериальных минимаксных задачах, к которым, в частности, относятся и задачи с критериями типа обобщенной H_∞ нормы, можно оценивать границы области критериального пространства, в которой расположены точки, отвечающие минимумам линейной свертки критериев и, следовательно, принадлежащие множеству Парето. При этом определяются субоптимальные по Парето решения многокритериальной задачи, которым соответствует одна из получаемых границ, и оценивается степень их субоптимальности. В двукритериальных задачах эти границы суть верхняя и нижняя кривые, между которыми находится указанное множество. Наличие этих границ позволяет оценить, в какой мере значения отдельных критериев при многокритериальных законах управления, получаемых при дополнительных предположениях и ограничениях, отличаются от значений критериев при оптимальных по Парето управлениях. Далее в статье получены характеристики обобщенной H_∞ нормы в терминах линейных матричных неравенств для линейных непрерывных и дискретных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте и синтезированы субоптимальные по Парето управления в многокритериальных задачах с обобщенными H_∞ нормами в качестве критериев. Приводятся иллюстративные примеры, в которых для различных

двукритериальных задач управления находятся субоптимальные решения и строятся границы области, содержащей точки множества Парето.

2. Двусторонние границы области, содержащей подмножество Парето-фронта

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений в многокритериальной задаче минимизации с критериями $J_i(\Theta)$, $i = 1, \dots, N$, каждый из которых представляет собой максимум некоторой неотрицательной функции $F_i(\Theta, \omega) \geq 0$ по отношению к некоторым переменным ω из множества Ω , т.е.

$$(2.1) \quad J_i(\Theta) = \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Напомним, что решение Θ_P называется оптимальным по Парето, если не существует такого решения Θ , что выполняются неравенства $J_i(\Theta) \leq J_i(\Theta_P)$, $i = 1, \dots, N$, в которых по меньшей мере одно является строгим. Множество точек в N -мерном критериальном пространстве, соответствующее всем таким решениям, называется множеством Парето

$$\mathcal{P} = \{J(\Theta_P) = (J_1(\Theta_P), \dots, J_N(\Theta_P))\}.$$

Оптимальные по Парето решения — это множество неулучшаемых решений в том смысле, что для каждого из них не существует решения, при котором значения всех критериев были бы не больше, чем при данном, а значение хотя бы одного критерия было бы строго меньше.

Самым распространенным методом нахождения оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи является метод скаляризации, т.е. выбора единого критерия в виде, например, линейной свертки этих критериев

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta), \quad \alpha \in \mathcal{S} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) : \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}.$$

Назовем линейную свертку $J_\alpha(\Theta)$ оптимальной целевой функцией. Как известно [15], параметры Θ_α , для которых выполняется

$$\min_{\Theta} J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

являются оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Обозначим соответствующее им множество точек в критериальном пространстве через

$$\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{J(\Theta_\alpha) = (J_1(\Theta_\alpha), \dots, J_N(\Theta_\alpha)) \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}\}.$$

В общем случае ими может не исчерпываться все множество Парето, т.е. $\mathcal{P}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$.

Непосредственное нахождение параметров Θ_α для многокритериальных минимаксных задач представляется затруднительным, так как оптимальная

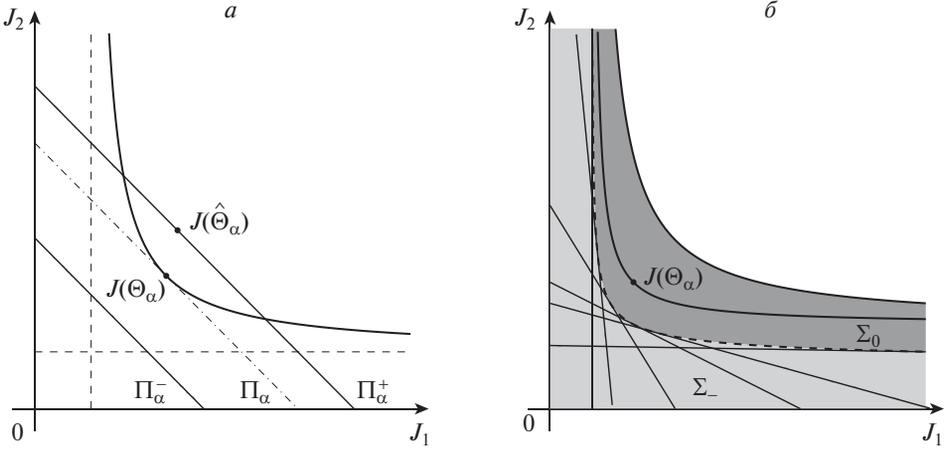


Рис. 1. Построение области Σ_0 , содержащей точки множества Парето.

целевая функция для таких задач оказывается линейной комбинацией максимумов разных функций. В связи с этим оценим ее снизу, заменяя сумму максимумов на максимум суммы

$$(2.2) \quad J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega) \geq \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(\Theta, \omega) = \sup_{\omega \in \Omega} F_\alpha(\Theta, \omega) = \hat{J}_\alpha(\Theta).$$

Назовем $\hat{J}_\alpha(\Theta) = \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(\Theta, \omega)$ субоптимальной целевой функцией, а параметры $\hat{\Theta}_\alpha$, оптимальные по отношению к $\hat{J}_\alpha(\Theta)$, при которых

$$(2.3) \quad \min_{\Theta} \hat{J}_\alpha(\Theta) = \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha),$$

назовем субоптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Покажем, что для рассматриваемых задач можно указать границы области критериального пространства, в которой находится подмножество $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, и тем самым оценить степень субоптимальности решений $\hat{\Theta}_\alpha$.

Равенство

$$J_\alpha(\Theta_\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$$

означает, что в критериальном пространстве точка $J(\Theta_\alpha)$ принадлежит гиперплоскости Π_α с вектором нормали $n_\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, уравнение которой $n_\alpha^T J = \mu(\alpha)$ (см. рис. 1, а). Это плоскость отстоит от начала координат на расстоянии $d_\alpha = |n_\alpha|^{-1} \mu(\alpha)$. Так как

$$(2.4) \quad \mu_+(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\hat{\Theta}_\alpha) \geq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

то субоптимальным по Парето решениям $\widehat{\Theta}_\alpha$ соответствует точка $J(\widehat{\Theta}_\alpha)$, принадлежащая гиперплоскости Π_α^+ , уравнение которой $n_\alpha^T J = \mu_+(\alpha)$. Эта плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha^+ = |n_\alpha|^{-1} \mu_+(\alpha) \geq d_\alpha$.

Из справедливости неравенств

$$(2.5) \quad \mu(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \geq \widehat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \geq \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha)$$

следует, что точка $J(\Theta_\alpha)$ удалена от начала координат не меньше, чем на $d_\alpha^- = |n_\alpha|^{-1} \mu_-(\alpha)$ – расстояние от плоскости Π_α^- с уравнением $n_\alpha^T J = \mu_-(\alpha)$ до начала координат, т.е. $d_\alpha \geq d_\alpha^-$. Таким образом, точка $J(\Theta_\alpha) \in \Pi_\alpha$ находится между двумя параллельными гиперплоскостями Π_α^- и Π_α^+ .

Определим в пространстве критериев для любого набора $\alpha \in \mathcal{S}$ следующие множества:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Sigma_\alpha^- &= \left\{ (J_1, \dots, J_N) : \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i < \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha), \quad J_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}, \\ \Sigma_\alpha^+ &= \left\{ (J_1, \dots, J_N) : \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha), \quad J_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}, \\ \Sigma_- &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \Sigma_\alpha^-, \quad \Sigma_+ = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \Sigma_\alpha^+, \quad \Sigma_0 = \Sigma_+ \setminus \Sigma_- . \end{aligned}$$

Докажем, что точки $J(\Theta_\alpha) \in \mathcal{P}_L \subseteq \mathcal{P}$ принадлежат множеству Σ_0 (см. рис. 1,б).

Действительно, так как

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_+(\alpha),$$

то $J(\Theta_\alpha) \in \Sigma_+$. Покажем, что для произвольного фиксированного набора $\widehat{\alpha} \in \mathcal{S}$ точка $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_-$, т.е. $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_\alpha^-$ для любого $\alpha \in \mathcal{S}$. Из (2.5) следует, что $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_\alpha^-$. Предположим, что для некоторого $\alpha \neq \widehat{\alpha}$ выполнено $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \in \Sigma_\alpha^-$, т.е. $\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < \mu_-(\alpha)$. Так как $\widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) \leq \widehat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \leq J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$, то

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha),$$

т.е. $J_\alpha(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < J_\alpha(\Theta_\alpha)$. Это противоречит тому, что Θ_α обеспечивает минимум линейной свертки $J_\alpha(\Theta)$. Таким образом, $\Theta_\alpha \in \Sigma_0$, и можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.1. Множество точек $\mathcal{P}_L \subseteq \mathcal{P}$ критериального пространства, которые соответствуют оптимальным по Парето параметрам Θ_α , минимизирующим оптимальную целевую функцию $J_\alpha(\Theta) =$

$= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega)$, принадлежит множеству Σ_0 , которое определено в (2.2), (2.3), (2.6).

В двукритериальных задачах нижней и верхней границами области, которой принадлежит множество \mathcal{P}_L в пространстве критериев (J_1, J_2) , являются “огнибающие” семейства прямых

$$\begin{aligned} \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 &= \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha), \\ \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 &= \alpha J_1(\widehat{\Theta}_\alpha) + (1 - \alpha) J_2(\widehat{\Theta}_\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

Заметим, что значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ отвечают прямые $J_1 = \min_{\Theta} J_1(\Theta)$ и $J_2 = \min_{\Theta} J_2(\Theta)$ соответственно.

Для количественной оценки близости значений функционалов при найденных субоптимальных решениях $\widehat{\Theta}_\alpha$ и неизвестных оптимальных решениях Θ_α введем показатель субоптимальности

$$\eta = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{d_\alpha^+ - d_\alpha^-}{d_\alpha^+} = \max_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\mu_+(\alpha) - \mu_-(\alpha)}{\mu_+(\alpha)},$$

определяемый по относительной величине максимального “расстояния” между границами множества Σ_0 . Чем ближе η к нулю, тем точнее оценка множества Парето и тем ближе друг к другу значения соответствующих критериев при субоптимальных и оптимальных решениях.

Заметим, что приведенный в данном разделе анализ и полученный результат без всяких изменений переносятся на случай, когда критериями являются функционалы, а “переменными” ω и решениями Θ – функции.

3. Обобщенная H_∞ норма

В этом разделе рассматриваются характеристики системы, которые далее будут выбираться в качестве отдельных критериев при синтезе управления. Пусть линейная нестационарная система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \partial x &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned}$$

в которых ∂ обозначает оператор дифференцирования для системы в непрерывном времени или оператор сдвига, т.е. $\partial x(t) = x(t+1)$, для системы в дискретном времени; $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – возмущение и $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход. Обобщенной H_∞ нормой системы (3.1) на конечном интервале $[t_0, t_f]$ от входа v к выходу z при неопределенном начальном состоянии для заданных весовых матриц начального состояния $R = R^T > 0$ и терминального состояния $S = S^T \geq 0$ называется квадратный корень из максимального значения интегрального показателя выхода с учетом терминального состояния системы, нормированного суммой квадратичной формы начального состояния и квадрата L_2 -нормы возмущения для непрерывной системы или l_2 -нормы возмущения для дискретной системы, т.е.

$$(3.2) \quad \gamma_{\infty, 0} = \sup_{x_0, v} \left(\frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2} \right)^{1/2},$$

где супремум берется по всем начальным состояниям $x(t_0) = x_0$ и всем $v \in L_2$ или $v \in l_2$, одновременно не обращающимся в ноль. Здесь для систем в непрерывном или дискретном времени используются обозначения

$$\|\xi\|_{[t_0, t_f]}^2 = \int_{t_0}^{t_f} |\xi(t)|^2 dt, \quad \|\xi\|_{[t_0, t_f]}^2 = \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |\xi(t)|^2.$$

При $S = 0$ в обобщенной H_∞ норме терминальное состояние не учитывается.

Эта характеристика, которая для систем в непрерывном времени была введена в [16] под названием “ H_∞ norm with transients”, а для систем в дискретном времени – в [17], содержит в себе как частные случаи многие критерии, применяемые при синтезе управления. Так, при отсутствии внешнего возмущения, т.е. при $v(t) \equiv 0$, этот показатель принимает вид так называемой γ_0 нормы

$$\gamma_0 = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}}{(x_0^T R^{-1} x_0)^{1/2}}$$

и характеризует “наихудшее” значение квадратичного функционала на траекториях системы при начальном состоянии, принадлежащем эллипсоиду $x^T R^{-1} x \leq 1$. Когда начальное состояние нулевое, обобщенная H_∞ норма переходит в стандартную H_∞ норму

$$\gamma_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{(\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f))^{1/2}}{\|v\|_{[t_0, t_f]}}.$$

В частном случае при $C(t) \equiv 0$, $D(t) \equiv 0$ в (3.1) обобщенная H_∞ норма характеризует так называемое максимальное уклонение выхода $S^{1/2} x(t)$ в конечный момент времени, определяемое как

$$(3.3) \quad \gamma_{v,0} = \sup_{x_0, v} \frac{|S^{1/2} x(t_f)|}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2)^{1/2}}.$$

Все эти показатели являются индуцированными нормами соответствующих линейных операторов, порождаемых системой и отображающих начальное состояние и/или возмущение в выход и/или терминальное состояние, и с соответствующими скалярными произведениями в линейных пространствах.

В [16] было установлено, что для нахождения обобщенной H_∞ нормы линейной непрерывной нестационарной системы на конечном горизонте требуется найти решение дифференциального матричного уравнения Риккати, удовлетворяющее определенным начальным и конечным условиям. В следующей теореме, доказательство которой приведено в Приложении, показано, что обобщенная H_∞ норма на конечном горизонте в непрерывном и дискретном случаях может быть вычислена как решение задачи оптимизации линейной функции при ограничениях, заданных дифференциальными или разностными линейными матричными неравенствами.

Теорема 3.1. Пусть выполняется неравенство

$$(3.4) \quad \gamma^2 I - D^T(t)D(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Обобщенная H_∞ норма системы (3.1) удовлетворяет неравенству $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ тогда и только тогда, когда дифференциальные линейные матричные неравенства

$$(3.5) \quad \begin{pmatrix} -\dot{Y}(t) + Y(t)A^T(t) + A(t)Y(t) & * & * \\ B^T(t) & -I & * \\ C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f],$$

для непрерывной системы или линейные матричные неравенства

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} -Y(t+1) & * & * & * \\ Y(t)A^T(t) & -Y(t) & * & * \\ B^T(t) & 0 & -I & * \\ 0 & C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1,$$

для дискретной системы, а также равенство

$$(3.7) \quad Y(t_0) = R$$

и линейное матричное неравенство

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ S^{1/2}Y(t_f) & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0$$

имеют решения относительно неизвестных $Y(t) > 0$ и γ^2 .

Для вычисления обобщенной H_∞ нормы предварительно проводится дискретизация соответствующего дифференциального линейного матричного неравенства, а затем решается стандартная задача полуопределенного программирования.

Для устойчивого стационарного объекта вида (3.1), в котором $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$, $D(t) = D$ – заданные постоянные матрицы и все собственные значения матрицы A расположены для системы в непрерывном времени строго слева от мнимой оси, а для системы в дискретном времени – строго внутри единичного круга комплексной плоскости, обобщенная H_∞ норма, стандартная H_∞ норма (т.е. при нулевых начальных условиях) и γ_0 норма на бесконечном интервале определяются как

$$\gamma_{\infty,0}^s = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0,\infty)}^2\right)^{1/2}}, \quad \gamma_\infty^s = \sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\|v\|_{[0,\infty)}},$$

$$\gamma_0^s = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\left(x_0^T R^{-1} x_0\right)^{1/2}},$$

где верхний индекс s указывает на стационарность системы.

Теорема 3.2. *Обобщенная H_∞ норма устойчивой стационарной системы (3.1) на бесконечном интервале времени удовлетворяет неравенству $\gamma_{\infty,0}^s < \gamma$ тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства*

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} YA^T + AY & * & * \\ B^T & -I & * \\ CY & D & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \quad Y > R,$$

для системы в непрерывном времени [18] или

$$(3.10) \quad \begin{pmatrix} -Y & * & * & * \\ YA^T & -Y & * & * \\ B^T & 0 & -I & * \\ 0 & CY & D & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \quad Y > R,$$

для системы в дискретном времени [17] имеют решения относительно неизвестных Y и γ^2 .

В отличие от теоремы 3.1 линейные матричные неравенства в теореме 3.2 являются строгими, так как на бесконечном горизонте дополнительно требуется обеспечить асимптотическую устойчивость системы при наихудшем возмущении. Из теоремы 3.2 следует, что уровень гашения начального возмущения для системы в непрерывном времени удовлетворяет неравенству $\gamma_0^s < \gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства (3.9), в первом из которых следует вычеркнуть вторые блочные строку и столбец, а для системы в дискретном времени, когда разрешимы неравенства (3.10), в первом из которых следует вычеркнуть третьи блочные строку и столбец. В свою очередь H_∞ норма передаточной матрицы от v к z меньше γ тогда и только тогда, когда разрешимо первое неравенство в (3.9) для системы в непрерывном времени или первое неравенство в (3.10) для системы в дискретном времени. Каждый из показателей находится путем минимизации γ^2 на множестве, определяемом соответствующими линейными матричными неравенствами.

4. Синтез субоптимальных по Парето управлений в задачах с обобщенными H_∞ нормами

Рассмотрим многокритериальную задачу управления системой с N целевыми выходами

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + B_u(t)u(t), \\ z_i(t) &= C_i(t)x(t) + D_{v_i}(t)v(t) + D_{u_i}(t)u(t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

с обратной связью $u = \Theta(t)x$, критериями в которой являются квадраты обобщенных H_∞ норм выходов z_i

$$J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_i\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f)S_i x(t_f)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

рассматриваемых как функционалы от матрично-значных функций $\Theta(t)$, $t \in [t_0, t_f]$. Для этой задачи субоптимальный целевой функционал имеет вид

$$\widehat{J}_\alpha[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_\alpha\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f)S_\alpha x(t_f)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2},$$

где

$$z_\alpha(t) = [C_\alpha(t) + D_{u\alpha}(t)\Theta(t)]x(t) + D_{v\alpha}(t)v(t), \quad S_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i,$$

$$(4.2) \quad C_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} C_1(t) \\ \dots \\ \alpha_N^{1/2} C_N(t) \end{pmatrix}, \quad D_{u\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} D_{u1}(t) \\ \dots \\ \alpha_N^{1/2} D_{uN}(t) \end{pmatrix},$$

$$D_{v\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} D_{v1}(t) \\ \dots \\ \alpha_N^{1/2} D_{vN}(t) \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $\widehat{J}_\alpha[\Theta(t)]$ является обобщенной H_∞ нормой комбинированного выхода z_α системы (4.1) с матрицей терминального состояния S_α , а субоптимальными по Парето решениями являются обобщенные H_∞ оптимальные управления по отношению к этой норме для всех $\alpha \in \mathcal{S}$. Матрицы параметров этих законов управления вычисляются как $\widehat{\Theta}_\alpha(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ при решении линейных матричных неравенств, получаемых из (3.5) и (3.8) для системы в непрерывном времени (из (3.6) и (3.8) для системы в дискретном времени) с начальным условием $Y(t_0) = R$ и с матрицей терминального состояния S_α при замене в них соответствующих матриц на матрицы $A(t) + B_u(t)\Theta(t)$, $B_v(t)$, $C_\alpha(t) + D_{u\alpha}(t)\Theta(t)$, $D_{v\alpha}(t)$ и при введении вспомогательных переменных $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$. Заметим, что для приближенного вычисления матриц параметров обратной связи $\Theta(t)$ в системах с непрерывным временем предварительно проводится дискретизация дифференциального линейного матричного неравенства.

В частном случае для системы с нулевыми начальными условиями при критериях вида стандартных H_∞ норм и максимальных отклонений субоптимальные по Парето управления находятся при решении линейных матричных неравенств (3.5) и (3.8) (или (3.6) и (3.8)) с соответствующими системными матрицами и при $Y(t_0) = 0$. В другом частном случае, когда отсутствуют возмущения, т.е. $v(t) \equiv 0$, субоптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче с критериями вида γ_0 норм и максимальных отклонений выходов в конечный момент времени при неопределенных начальных условиях находятся в результате решения линейных матричных неравенств, полученных из (3.5) и (3.8) (или (3.6) и (3.8)) с соответствующими системными матрицами при $B(t) \equiv 0$ и $Y(t_0) = R$.

Когда все критерии являются максимальными отклонениями в конечный момент времени N выходов $z_i(t_f)$ системы (4.1) при $D_{vi}(t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$,

возможен синтез оптимальных по Парето управлений. Действительно, выберем в этом случае в качестве единого критерия свертку Гермейера [15]

$$J_\alpha^G[\Theta(t)] = \max_{j=1, \dots, N} \left\{ \alpha_j^{-1} J_j[\Theta(t)] \right\} \quad \forall \alpha_j > 0.$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned} J_\alpha^G[\Theta(t)] &= \max_{j=1, \dots, N} \alpha_j^{-1} \sup_{x_0, v} \frac{|z_j(t_f)|^2}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2} = \\ &= \sup_{x_0, v} \frac{\max_{j=1, \dots, N} |\alpha_j^{-1/2} z_j(t_f)|^2}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2} = \sup_{x_0, v} \frac{|z_\alpha(t_f)|_{g_\infty}^2}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2}, \end{aligned}$$

где

$$z_\alpha = \text{col}(\alpha_1^{-1/2} z_1, \dots, \alpha_N^{-1/2} z_N), \quad |z_\alpha|_{g_\infty} = \max_{j=1, \dots, N} |\alpha_j^{-1/2} z_j|.$$

Таким образом, свертка Гермейера для этой задачи представляет собой квадрат максимального уклонения в конечный момент времени комбинированного выхода z_α , состоящего из взвешенных выходов системы (4.1), где под максимальным уклонением комбинированного вектора принимается величина, равная максимуму из евклидовых норм составляющих его векторов. Следовательно, оптимальные по отношению к $J_\alpha^G[\Theta(t)]$ матрицы $\Theta_\alpha(t)$, которые являются оптимальными по Парето решениями рассматриваемой многокритериальной задачи, находятся как $\Theta_\alpha(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ в результате решения задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях в форме дифференциальных матричных неравенств

$$(4.3) \quad -\dot{Y}(t) + Y(t)A^T(t) + A(t)Y(t) + Z^T(t)B_u^T(t) + B_u(t)Z(t) + B_v(t)B_v^T(t) \leq 0$$

при $t = [t_0, t_f]$ для системы в непрерывном времени,

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} -Y(t+1) + B_v(t)B_v^T(t) & * \\ Y(t)A^T(t) + Z^T(t)B_u^T(t) & -Y(t) \end{pmatrix} \leq 0$$

при $t = t_0, \dots, t_f - 1$ для системы в дискретном времени, а также

$$(4.5) \quad Y(t_0) = R, \quad \begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ C_i Y(t_f) + D_{ui} Z(t_f) & \alpha_i \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Теперь покажем, как синтезировать субоптимальные по Парето стационарные обратные связи $u = \Theta x$ в задачах многокритериальной оптимизации для стационарных систем вида (4.1), критериями в которых являются обобщенные H_∞ нормы на бесконечном интервале

$$J_i(\Theta) = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_i\|_{[0, \infty)}^2}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, \infty)}^2}, \quad i = 1, \dots, N.$$

В этом случае субоптимальная целевая функция имеет вид

$$\widehat{J}_\alpha(\Theta) = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_\alpha\|_{[0, \infty)}^2}{x_0^\top R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, \infty)}^2},$$

где комбинированный выход $z_\alpha(t)$ определен как в (4.2) при всех стационарных матрицах. Субоптимальными по Парето решениями данной задачи являются оптимальные управления по отношению к обобщенной H_∞ норме выхода z_α стационарной системы (4.1) для всех $\alpha \in \mathcal{S}$. Параметры $\widehat{\Theta}_\alpha$ этих законов управления находятся при решении линейных матричных неравенств (3.9) или (3.10), в которых соответствующие матрицы следует заменить на $A + B_u \Theta$, B_v , $C_\alpha + D_{u\alpha} \Theta$ и $D_{v\alpha}$.

5. Примеры

5.1. Система первого порядка

Начнем с простого примера для системы первого порядка

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x + v + u, & x(0) &= 0, \\ z_1 &= x, & z_2 &= u, \end{aligned}$$

рассматриваемого аналитически. Зададим управление в виде $u = -\theta x$ и выберем два критерия

$$(5.2) \quad J_i(\theta) = \sup_{v \neq 0} \frac{\|z_i\|_{[0, \infty)}^2}{\|v\|_{[0, \infty)}^2}, \quad i = 1, 2.$$

В данном случае субоптимальная целевая функция $\widehat{J}_\alpha(\theta)$ – квадрат H_∞ нормы передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы от v к комбинированному выходу

$$z_\alpha(t) = \left(\alpha^{1/2} \quad - (1 - \alpha)^{1/2} \theta \right)^\top x(t), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Так как

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\alpha + (1 - \alpha)\theta^2}{\omega^2 + (1 + \theta)^2},$$

то

$$\widehat{J}_\alpha(\theta) = \max_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega)|^2 = \frac{\alpha + (1 - \alpha)\theta^2}{(1 + \theta)^2}.$$

Проводя минимизацию $\widehat{J}_\alpha(\theta)$, получаем

$$\widehat{\theta}_\alpha = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad \widehat{J}_\alpha(\widehat{\theta}_\alpha) = \alpha(1 - \alpha).$$

Согласно (2.3) и (2.4) имеем

$$\mu_-(\alpha) = \mu_+(\alpha) = \alpha(1 - \alpha).$$

Таким образом, нижняя и верхняя границы области, в которой находится искомое множество решений двукритериальной задачи, совпадают, а само это множество определяется как огибающая на плоскости (J_1, J_2) семейства прямых

$$\alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 = \alpha(1 - \alpha).$$

Решение этой несложной задачи о нахождении огибающей семейства прямых дает при $J_1 \in [0, 1]$ и $J_2 \in [0, 1]$ кривую в неявной форме

$$2J_1 + 2J_2 - (J_1 - J_2)^2 = 1$$

или в явной форме

$$J_2 = (\sqrt{J_1} - 1)^2, \quad J_1 \in (0, 1).$$

Наконец, заметим, что в данном примере

$$J_1(\theta) = \frac{1}{(1 + \theta)^2}, \quad J_2(\theta) = \frac{\theta^2}{(1 + \theta)^2}$$

и, следовательно, $\hat{J}_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta)$.

5.2. Виброизоляция упругого объекта

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 2 и представляющую собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками 2 и 3, связанными между собой линейными упругим и диссипативным элементами; этот упругий объект связан такими же линейными упругим и диссипативным элементами и управляемым элементом (называемым далее виброизолятором) с другим телом 1, который моделирует подвижное основание. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 + v + u, & x_1(0) &= x_{10}, & \dot{x}_1(0) &= x_{30}, \\ \ddot{x}_2 &= -\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - x_2 + x_1 + v, & x_2(0) &= x_{20}, & \dot{x}_2(0) &= x_{40}, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 – координаты материальных точек 2 и 3 относительно подвижного основания, u – усилие, создаваемое виброизолятором при его деформации (т.е. при смещении точки 2 относительно точки 1), v – с точностью до знака ускорение основания (материальной точки 1), $\beta = 0,1$ – заданный положительный параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске управления $u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 \dot{x}_1 + \theta_4 \dot{x}_2$, обеспечивающего как наименьшую возможную деформацию механической системы, так и минимальную силу,

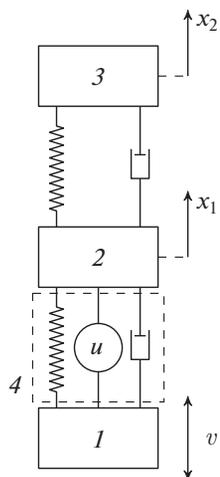


Рис. 2. Схема упругого объекта с виброизолятором.

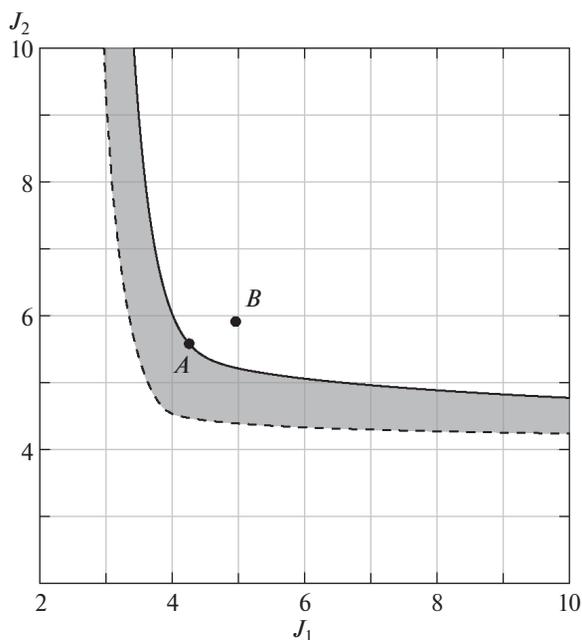


Рис. 3. Оценка множества Парето в задаче виброизоляции.

противодействующую смещению упругого объекта относительно основания. С этой целью рассмотрим целевые выходы

$$z_1 = (x_1, x_2 - x_1)^T, \quad z_2 = -x_1 - \beta \dot{x}_1 + u.$$

Обобщенные H_∞ нормы относительно указанных выходов можно трактовать как искомые характеристики системы. Используя неравенства теоремы 3.2,

найдем множество Σ_0 (см. рис. 3). В этом случае показатель субоптимальности равен $\eta = 0,2768$. На верхней границе множества Σ_0 указана точка $A(4,256; 5,582)$, отвечающая значению $\alpha = 0,64$.

Для сравнения были вычислены регуляторы на основе линейных матричных неравенств, характеризующих каждую из указанных обобщенных H_∞ норм при дополнительном предположении, что функции Ляпунова для каждой из этих норм равны между собой. А именно матрицы обратных связей определялись при решении задачи $\inf J_2(\Theta)$ при условии, что $J_1(\Theta) < \gamma^2$ с параметром γ . Они находились как $\tilde{\Theta}_\gamma = Z_\gamma Y_\gamma^{-1}$, где Y_γ и Z_γ – решения задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях, определяемых парой линейных матричных неравенств вида (3.9), в одном из которых матрицы A, B, C, D заменены матрицами $A + B_u \Theta, B_v, C_1 + D_{u1} \Theta, D_{v1}$ соответственно, а в другом – матрицами $A + B_u \Theta, B_v, C_2 + D_{u2} \Theta, D_{v2}$ и $Z_\gamma = \Theta Y_\gamma$. Точка $B(4,959; 5,913)$ на рис. 3 соответствует одному из найденных регуляторов с параметрами $\Theta = (-0,472; 0,252; -1,745; -1,385)^T$.

5.3. Гашение параметрических колебаний линейного осциллятора

Рассмотрим уравнение Матьё

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\delta^2(1 + \varepsilon \sin t)x_1 + u + v \end{aligned}$$

с параметрами $\delta = 0,5$ и $\varepsilon = 0,3$, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора. Зададим на интервале времени длительностью $T = 10$ равномерную сетку с шагом $h = 0,05$ и дискретизируем систему (5.3), заменяя производные конечно-разностными отношениями. Выберем в качестве первого критерия обобщенную H_∞ норму этой системы с целевым выходом $z = x_1 + u$, т.е. с матрицами $C_1 = (1 \ 0)$, $D_1 = 1$, и весовой матрицей терминального состояния $S_1 = 0$. В качестве второго критерия возьмем максимальное уклонение вектора $(1/2)\text{col}(x_1, x_2)$ в конечный момент времени, т.е. $C_2 = (0 \ 0)$, $D_2 = 0$ и $S_2 = 0,25I$. Таким образом, функционалы имеют вид:

$$(5.4) \quad J_1[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|_{[0, T]}^2}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, T]}^2}, \quad J_2[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{x_f^T S_2 x_f}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, T]}^2}.$$

В дальнейших численных экспериментах $R = 0,5I$. Применим подход, изложенный в разделе 2, для построения границ области Σ_0 , содержащей множество Парето. На рис. 4 серым цветом изображено множество Σ_0 . Видно, что оно получилось достаточно “узким” и значение показателя субоптимальности $\eta = 0,125$ подтверждает этот вывод. Отметим, что точки верхней границы множества Σ_0 соответствуют субоптимальным по Парето решениям $\hat{\Theta}_\alpha$, которые находятся с использованием описанного в разделе 4 подхода. В частности, при $\alpha = 0,18$ были найдены коэффициенты обратной связи $\hat{\Theta}_\alpha$ и для них вычислены значения функционалов. Точка, отвечающая этим значениям, на рис. 4 обозначена через A , ее координаты – $(0,898; 0,249)$. Значения функционалов в случае, когда управление в системе (5.3) отсутствует, равны $J_1 = 185,259$ и $J_2 = 0,966$. Таким образом, использование управления позволяет уменьшить обобщенную H_∞ норму системы практически в 200 раз!

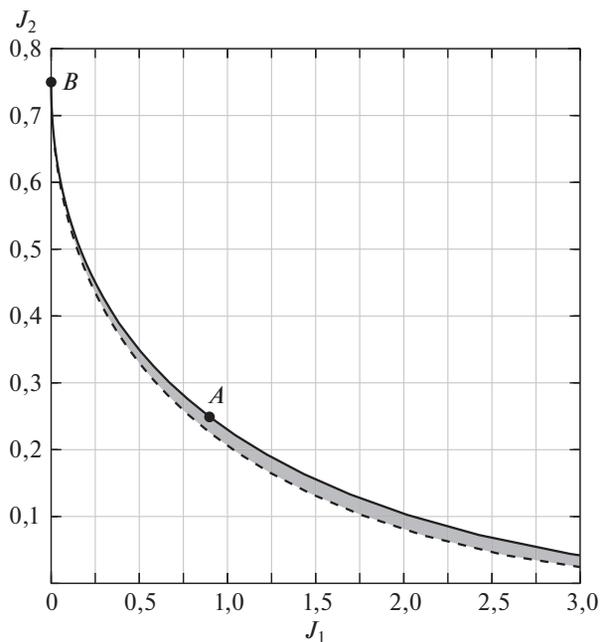


Рис. 4. Оценка множества Парето в задаче гашения параметрических колебаний.

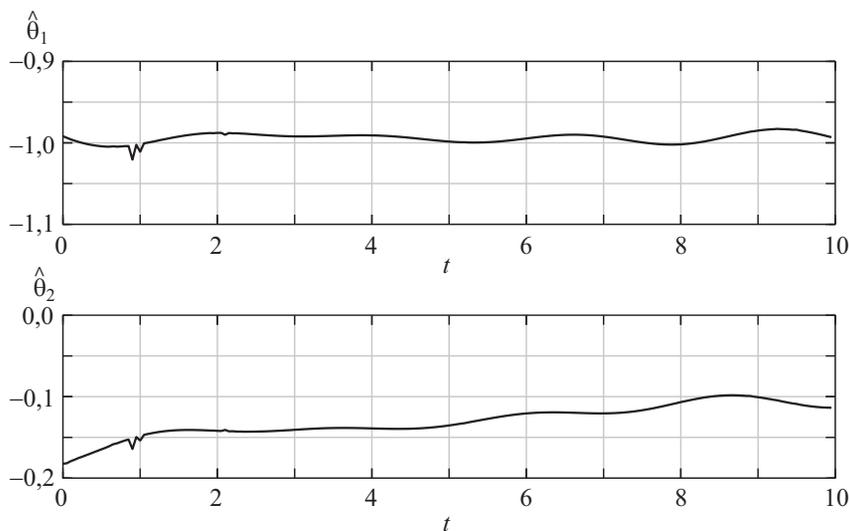


Рис. 5. Графики зависимостей от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

Также представляет интерес сравнить полученные результаты с простейшим регулятором вида $u = -x_1$. Нетрудно видеть, что в этом случае $J_1 = 0$, поскольку $z = x_1 + u = 0$. Значение $J_2 = 0,750$, что примерно в 3 раза больше, чем значение J_2 для точки A . На рис. 4 точка с координатами $(0; 0,750)$ обозначена через B .

На рис. 5 приведены графики зависимости от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи $\widehat{\Theta}_\alpha^T(t) = (\widehat{\theta}_1(t) \widehat{\theta}_2(t))$, отвечающих точке А. Заметим, что практически все время функционирования системы коэффициенты обратной связи сохраняют “постоянные” значения. Значения функционалов при стационарном регуляторе, отвечающим этим “постоянным” значениям $\theta_1(t) \equiv -0,13$ и $\theta_2(t) \equiv -1,0$, равны $J_1 = 0,900$ и $J_2 = 0,249$, т.е. отличия в значениях критериев при использовании такого стационарного регулятора вместо нестационарного субоптимального регулятора $\widehat{\Theta}_\alpha(t)$ незначительны.

6. Заключение

Рассмотрены многокритериальные задачи минимаксной оптимизации, критериями в которых являются максимумы некоторых функционалов. В статье показано, что при минимизации единого критерия в виде максимума линейной свертки функционалов (вместо линейной свертки максимумов) находятся субоптимальные по Парето решения и оцениваются их потери по сравнению с минимальными. В критериальном пространстве строятся границы области, содержащей точки множества Парето, в которых линейная свертка критериев принимает минимальные значения. Тем самым появляется возможность сравнивать значения отдельных критериев при выбираемых тем или иным способом решениях многокритериальных задач и при оптимальных по Парето решениях. Этот подход в сочетании с аппаратом линейных матричных неравенств применяется для решения новых многокритериальных линейно-квадратичных задач управления при неопределенных начальных условиях и возмущениях с критериями вида обобщенной H_∞ нормы или γ_0 нормы для непрерывных и дискретных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте. Приводятся примеры двукритериальных задач управления, в которых находятся субоптимальные по Парето решения и строятся области, содержащие точки множества Парето.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что выполнение неравенства $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ влечет выполнение неравенств (3.5) (или (3.6)), (3.8) и равенства (3.7). На траекториях системы (3.1) определим функционал

$$(П.1) \quad \bar{J}(v) = \gamma^2 \left[\|v\|_{[t_0, t_f]}^2 + x_0^T R^{-1} x_0 \right] - \|z\|_{[t_0, t_f]}^2.$$

Заметим, что неравенство $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ эквивалентно неравенству

$$(П.2) \quad \bar{J}(v) > x^T(t_f) S x(t_f) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \forall v \in L_2 : x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, t_f]}^2 \neq 0.$$

Поставим задачу минимизации этого функционала относительно v , которую будем решать методом динамического программирования.

С этой целью введем вдоль траектории системы функцию Беллмана

$$(П.3) \quad V(t, x) = \min_{v(\tau), \tau \in [t_0, t]} \left\{ \gamma^2 \left[\|v\|_{[t_0, t]}^2 + x_0^T R^{-1} x_0 \right] - \|z\|_{[t_0, t]}^2 \right\},$$

где $x = x(t)$ – состояние системы в момент времени t . Запишем соответствующее уравнение Беллмана

$$(П.4) \quad \min_{v(t)} (-\partial V - |z|^2 + \gamma^2 |v|^2) = 0, \quad V(t_0, x) = \gamma^2 x^T R^{-1} x,$$

которое в непрерывном случае приводит к следующему уравнению в частных производных

$$V_t + V_x [A(t)x + B(t)v_*] + [C(t)x + D(t)v_*]^T [C(t)x + D(t)v_*] - \gamma^2 |v_*|^2 = 0,$$

где

$$v_*(t) = [\gamma^2 I - D^T(t)D(t)]^{-1} [2^{-1} B^T(t)V_x^T + D^T(t)C(t)x]$$

и нижние индексы t и x обозначают частные производные от функции Беллмана по соответствующим переменным. Решением этого уравнения в частных производных является функция в виде квадратичной формы $V(t, x) = x^T Q^{-1}(t)x$, где матрица Q удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$(П.5) \quad \begin{aligned} \dot{Q} &= AQ + QA^T + QC^T CQ + (B^T + D^T CQ)^T (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (B^T + D^T CQ), \\ Q(t_0) &= \gamma^{-2} R, \end{aligned}$$

в котором для сокращения записи у всех матриц опущен аргумент t . Заметим, что из положительной полуопределенности квадратичных слагаемых в правой части дифференциального уравнения (П.5) и положительной определенности матрицы $Q(t_0)$ следует положительная определенность решения, т.е. $Q(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$, и, следовательно, матрица $Q(t)$ обратима на всем рассматриваемом отрезке.

Обратимся опять к уравнению Беллмана (П.4), из которого следует, что вдоль траектории системы (3.1) при любых возмущениях $v(t)$ для найденной функции Беллмана $V(t, x) = x^T Q^{-1}(t)x$ выполняется неравенство

$$(П.6) \quad \dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \leq 0,$$

которое принимает вид квадратичного неравенства $\xi^T M \xi \leq 0$, $\xi^T = (x^T \ v^T)$ с отрицательно полуопределенной матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -Q^{-1} \dot{Q} Q^{-1} + A^T Q^{-1} + Q^{-1} A + C^T C & * \\ B^T Q^{-1} + D^T C & -(\gamma^2 I - D^T D) \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу M слева и справа на положительно определенную матрицу $L = \text{diag}(Q \ I)$, получим

$$LML = \begin{pmatrix} -\dot{Q} + QA^T + AQ + QC^T CQ & * \\ B^T + D^T CQ & -(\gamma^2 I - D^T D) \end{pmatrix} \leq 0.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Шура и делая замену $Q = \gamma^{-2}Y$, получаем матричное неравенство

$$(II.7) \quad \begin{aligned} & -\dot{Y} + AY + YA^T + \gamma^{-2}YC^T CY + \\ & + (B^T + \gamma^{-2}D^T CY)^T (I - \gamma^{-2}D^T D)^{-1} (B^T + \gamma^{-2}D^T CY) \leq 0, \end{aligned}$$

которое повторным применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (3.5). Заметим далее, что согласно (II.5) $Y(t_0) = R$. Наконец, используя неравенство (II.2), получаем квадратичное неравенство

$$\bar{J}(v_*) = \gamma^2 x^T(t_f) Y^{-1}(t_f) x(t_f) > x^T(t_f) S x(t_f)$$

или матричное неравенство

$$(II.8) \quad \gamma^2 Y^{-1}(t_f) > S,$$

которое с применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (3.8). Необходимое условие теоремы 3.1 для системы в непрерывном времени доказано.

Для системы в дискретном времени покажем, что функцией Беллмана является квадратичная форма $V(t, x) = x^T Q^{-1}(t)x$, где матрица $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(II.9) \quad (A^T \ C^T) \left[\begin{pmatrix} Q(t+1) & * \\ 0 & I \end{pmatrix} - \gamma^{-2} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} (B^T \ D^T) \right]^{-1} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - Q^{-1}(t) = 0$$

с начальным условием $Q(t_0) = \gamma^{-2}R$. Действительно, уравнение (II.9) получено из (II.4), где минимум достигается при наихудшем возмущении

$$v_*(t) = \Gamma^{-1}(t+1) (B^T \ D^T) \hat{Q}^{-1}(t+1) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} x(t).$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \gamma^2 I - (B^T \ D^T) \hat{Q}^{-1}(t+1) \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} > 0, \\ \hat{Q}^{-1}(t+1) &= \begin{pmatrix} Q^{-1}(t+1) & * \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как $Q(t_0) > 0$, то матрица, стоящая в квадратных скобках в (II.9) при $t = t_0$, является положительно определенной. Следовательно, в силу условия (3.4) имеем $Q(t_0 + 1) > 0$. Продолжая этот процесс, получим $Q(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$. Далее, поскольку для любого $v(t) \neq v_*(t)$ выполняется неравенство $\Delta V + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \geq 0$, то с учетом известной формулы обращения блочной матрицы приходим к следующему неравенству:

$$(II.10) \quad \begin{aligned} & (A^T \ C^T) \hat{Q}^{-1}(t+1) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - Q^{-1}(t) + \\ & + (A^T \ C^T) \hat{Q}^{-1}(t+1) \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \Gamma^{-1}(t+1) (B^T \ D^T) \hat{Q}^{-1}(t+1) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leq 0. \end{aligned}$$

После введения новых переменных $Y(t) = \gamma^2 Q(t)$, для которых $Y(t_0) = R$, и применения леммы Шура неравенство (П.10) преобразуется в (3.6). Необходимое условие теоремы 3.1 в дискретном случае доказано.

Докажем достаточное условие. Пусть линейные матричные неравенства (3.5) (или (3.6)), (3.8), а также равенство (3.7) разрешимы относительно $Y(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_f]$ и $\gamma^2 > 0$. Тогда непосредственно проверяется, что для квадратичной формы $V = \gamma^2 x^T Y^{-1}(t)x$ на траекториях системы (3.1) выполняется неравенство

$$(П.11) \quad \partial V + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \leq 0.$$

Интегрируя или суммируя неравенства (П.11) на отрезке $[t_0, t_f]$ и учитывая (П.8), получаем, что

$$\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f)Sx(t_f) < \gamma^2 \left[\|v\|_{[t_0, t_f]}^2 + x_0^T R^{-1} x_0 \right]$$

для любых допустимых возмущений v и начальных условий системы x_0 . Отсюда следует $\gamma_{\infty, 0} < \gamma$, и это завершает доказательство теоремы 3.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mäkilä P.M.* On Muptiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 12. P. 1311–1313.
2. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Muptiple Objective Optimal Control of Linear Systems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 14–24.
3. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.
Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
4. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized H_2 Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Субоптимальные по Парето регуляторы против коалиций возмущений // АиТ. 2017. № 2. С. 3–26.
Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto Suboptimal Controllers Versus Coalitions of Disturbances // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 197–216.
6. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an H_∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
7. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–831.
8. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1564–1574.
9. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1575–1587.

10. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.
11. *Chen X., Zhou K.* Multiobjective H_2/H_∞ Control Design // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. No. 2. P. 628–660.
12. *Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-time Robust Stability Condition // System Control Lett. 1999. V. 37. P. 261–265.
13. *Ebihara Y., Hagiwara T.* New Dilated LMI Characterisations for Continuous-time Control Multi-objective Controller Synthesis // Automatica. 2004. V. 40. P. 2003–2009.
14. *Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P.* Multi-objective H_2/H_∞ -Optimal Control via Finite Dimensional Q -Parametrization and Linear Matrix Inequalities // Proc. 1998 Amer. Control Conf., Philadelphia, USA. 1998. P. 3244–3249.
15. *Гермеуер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
16. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.* H_∞ Control with Transients // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29. No. 6. P. 1373–1393.
17. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // АиТ. 2014. № 1. С. 3–22.
Balandin D.V., Kogan M.M., Krivdina L.N., Fedukov A.A. Design of generalized discrete-time H_∞ -optimal control over finite and infinite intervals // Autom. Remote Control. 2019. V. 75. No. 1. P. 1–17.
18. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞ -оптимальное управление как компромисс между H_∞ -оптимальным и γ -оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.
Balandin D.V., Kogan M.M. Generalized H_∞ -optimal Control as a Trade-off between the H_∞ -optimal and γ -optimal Controls // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 993–1010.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 27.08.2020

После доработки 15.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЕЮ

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой механической системы на внешнее тепловое воздействие. Устанавливается, что динамика объекта управления может быть описана схемой, состоящей из двух операторов интегрирования, линейного ограниченного оператора и оператора, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Кроме того, устанавливается класс обратных связей от выхода системы к тепловому воздействию, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, оператор, обратная связь, замкнутая система, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021080031

1. Введение

Термомеханические системы, в которых происходят процессы механических колебаний и процессы теплопередачи, широко используются в современной технике, в связи с чем возникает необходимость математического исследования динамических свойств таких систем и отыскания методов управления ими.

Литература по изучению явления термоупругости достаточно обширна. После ранних работ [1–3] по изучению этого явления появилась работа [4], исследовавшая термоупругость как часть общего явления упругости. В современной литературе появились работы [5–7], посвященные изучению различных свойств термоупругих сред. В [8] развита современная теория термомеханики упругопластического деформирования. В работе [9] изложена постановка задачи о распространении термоупругих волн в одномерной твердотельной среде.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной упругой механической системы, подверженной внешнему тепловому воздействию на одной из границ. В качестве исходной основы для составления математической модели процессов в такой системе была принята классическая работа [4]. В частности, при принятом здесь описании процессов было использовано, согласно [4, гл. 11 и 12], предположение о пренебрежимости влияния механических колебаний упругой среды на процесс теплопередачи.

В работе устанавливается, что свойства реакции механических колебаний объекта на внешнее тепловое воздействие могут быть описаны схемой, состоящей из двух операторов интегрирования, линейного ограниченного оператора и оператора, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Получены оценки нормы каждого из этих операторов. Определяется пространство управляющих воздействий, для которых выходные координаты объекта — перемещения сечений и температура — являются ограниченными функциями времени.

Далее устанавливаются ограничения на свойства внешней обратной связи от выхода объекта к управляющему воздействию, выполнение которых обеспечивает устойчивость замкнутой системы (объект, обратная связь). Эти ограничения получены на основе результатов [10], касающихся методов управления линейным распределенным объектом общего вида.

2. Уравнения динамики термомеханической системы как объекта управления

Система уравнений продольных колебаний одномерного упругого объекта ограниченной длины, подвергающегося тепловому воздействию на одной из границ, принимается в виде

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{cases}$$

где $\varphi(x)(t)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$; a , c , β — положительные константы (см. [4, разделы 11.1 и 12.2]).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от места приложения теплового воздействия, $\theta(x)(t)$ — температура среды в сечении x .

Принимаются нулевые начальные условия по времени и граничные условия вида

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(l) = 0, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \left(-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (0) = u \\ \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (l) = 0, \end{cases}$$

где u — управляющее тепловое воздействие; оно предполагается входящим в пространство \mathbf{Q}_y равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности управляющего воздействия и обладающим всеми свойствами

обобщенных оригиналов [11, п. 83]. Ниже, в разделе 6, вводится дополнительное ограничение на выбор управляющего воздействия из условия, чтобы введенное подпространство \mathbf{U} пространства \mathbf{Q}_y обладало следующим свойством: для любого $u \in \mathbf{U}$ решение краевой задачи ((2.1), (2.2)) с управляющим воздействием u является равномерно (по времени) ограниченной вектор-функцией $\begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \theta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

3. Выражение для передаточной функции оператора $u \rightarrow \theta(x)$

Как видно из уравнений (2.1), второе из них вместе с двумя последними граничными условиями (2.2) может исследоваться отдельно от первого уравнения. В [10, раздел 2] для граничных условий общего вида

$$(3.1) \quad C_0 \begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} (0) + C_l \begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} (l) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

где $q = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$ – тепловой поток; C_0, C_l – 2×2 -матрицы; u_1, u_2 – управляющие воздействия, получено выражение (в изображениях по Лапласу) для зависимости $\theta(x)$ от воздействий u_j . Для принятого здесь вида граничных условий (условия (2.3) настоящей работы) $u_1 = u, u_2 = 0, C_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$C_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому выражение (2.2) из [10] принимает вид

$$(3.2) \quad \bar{\theta}(x) = \left(\cosh \left(\frac{l-x}{x} \zeta \right) + \frac{r}{\zeta} \sinh \left(\frac{l-x}{x} \zeta \right) \right) \frac{1}{D_T(\zeta)} \bar{u},$$

где \bar{z} – изображение по Лапласу от функции времени $z, \zeta(p) = \sqrt{\frac{p}{a} l}, D_T(\zeta) = 2\alpha \cosh \zeta + \alpha \left(\frac{\zeta}{r} + \frac{r}{\zeta} \right) \sinh \zeta, p \in \mathbf{C}, \mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $r = \frac{\alpha}{\lambda} l$. Под \sqrt{p} здесь понимается та ветвь квадратного корня из p , для которой $\text{Re } p \geq 0$.

В [12, раздел 3] получено необходимое и достаточное условие отсутствия у функции D_T нулей в $\mathbf{C}^+ = \{p \in \mathbf{C} : \text{Re } p \geq 0\}$: выполнение неравенств $\left\{ \frac{a_{12}}{a_2} \geq 0, \frac{a_1}{a_2} \leq 0 \right\}$. (Здесь обозначено: $a_j = \det \left((C_0)_{.j} (C_l)_{.j} \right) (j = 1, 2), a_{12} = \det \left((C_0)_{.1} (C_l)_{.2} \right) - \det \left((C_0)_{.2} (C_l)_{.1} \right), (C_i)_{.j}$ – j -й столбец матрицы C_i .) Для системы ((2.1)–(2.3)) имеем: $a_1 = -\alpha^2, a_2 = 1, a_{12} = 2\alpha$, так что это условие выполнено, и нули p_n функции D_T имеют вид

$$(3.3) \quad p_n = -a \left(\frac{\tau_n}{l} \right)^2 \quad (p \in n \geq 0),$$

где τ_n – корни уравнения

$$(3.4) \quad \tau \cot \tau = \frac{\tau^2 - r^2}{2r}.$$

(Достаточно считать, что $\tau > 0$. Число τ_n – n -й корень уравнения (3.4) – заключено в интервале $(n, (n + 1))\pi$.)

Введем в рассмотрение пространство \mathbf{Q}_T равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности θ , обладающих всеми свойствами обобщенных оригиналов [11, п. 83]. Норма в \mathbf{Q}_T : $\|f\|_{\mathbf{Q}_T} = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$.

Из результатов [12] следует, что оператор $V_T(x)$, переводящий воздействие u в температуру $\theta(x)$, входит в пространство \mathbf{B}_T линейных ограниченных операторов, отображающих пространство \mathbf{Q}_Y в \mathbf{Q}_T .

4. Оценка сверху нормы оператора $V_T(x) : u \rightarrow \theta(x)$

Для оценки сверху нормы оператора $V_T(x)$ могут быть использованы результаты [12, раздел 3]. В этом разделе содержатся оценки сверху норм операторов $R_H(\xi)$ и $R_S(\xi)$, имеющих передаточные функции соответственно $\frac{H_\xi(\zeta)}{D_T(\zeta)}$ и $\frac{S_\xi(\zeta)}{D_T(\zeta)}$. (Здесь обозначено: $H_\xi(\zeta) = \cosh\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right)$, $S_\xi(\zeta) = \frac{l}{\zeta\sqrt{a\vartheta}} \sinh\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right)$, $\xi \in [0, l]$, ϑ – фиксированная константа, имеющая размерность времени.)

В выражения для этих оценок входят параметры $\beta_1 = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{a_1}{a_2}$, $\beta_{12} = \left(\frac{l}{\lambda}\right) \frac{a_{12}}{a_2}$ и $C = \beta_{12}^2 - 2|\beta_1|$. Для системы ((2.1)–(2.3)) имеем: $\beta_1 = -r^2$, $\beta_{12}^2 = 2r$, т.е. $C = 2r^2 > 0$. Следовательно, эти оценки согласно [12, раздел 3] могут быть представлены в виде

$$(4.1) \quad \|R_H(\xi)\|_{\mathbf{B}_T} \leq \frac{l}{\lambda} \left(r_T + \frac{1}{3} \right),$$

$$(4.2) \quad \|R_S(\xi)\|_{\mathbf{B}_T} \leq \frac{l^2}{\lambda\sqrt{a\vartheta}} \left(r_T + \min\left(\frac{3}{\pi^3}, \frac{1}{6r} \right) \right),$$

где $r_T = \frac{2}{\tau_0^2 + r^2}$, τ_0 – минимальный из корней уравнения (3.4).

(Число τ_0 заключено в пределах $[r, \frac{\pi}{2}]$ при $r \leq \frac{\pi}{2}$ и в пределах $[\frac{\pi}{2}, \min(r, \pi)]$ при $r \geq \frac{\pi}{2}$.)

Опираясь на оценки (4.1) и (4.2), из (3.2) получаем оценку сверху для нормы оператора $V_T(x)$ в пространстве \mathbf{B}_T :

$$(4.3) \quad \|V_T(x)\|_{\mathbf{B}_T} \leq \|R_H(\xi)\|_{\mathbf{B}_T} + \frac{r}{l} \sqrt{a\vartheta} \|R_S(\xi)\|_{\mathbf{B}_T} \leq \\ \leq \frac{l}{\lambda} \left[r_T (r + 1) + \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3r}{\pi^3} + \frac{1}{3} \right) \right].$$

5. Выражение для передаточной функции оператора $u \rightarrow \varphi(x)$

Выполнив преобразование Лапласа первого из уравнений системы (2.1) по времени при нулевых начальных условиях и первых двух граничных условиях (2.2), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(5.1) \quad c^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}(x)(p) - p^2 \bar{\varphi}(x)(p) - \beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(x)(p) = 0$$

с граничными условиями

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(0) = 0, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(l) = 0. \end{cases}$$

Исследование зависимости решения краевой задачи ((5.1), (5.2)) от u (влияющего на $\varphi(x)$ через $\theta(x)$ согласно (3.2) и (5.1)) приводит к следующему выводу:

Теорема 1. Зависимость $\bar{\varphi}(x)$ от \bar{u} имеет вид

$$(5.3) \quad \bar{\varphi}(x) = \beta \frac{\Phi(x)}{\gamma} \frac{\bar{u}}{D_{\tau} \circ \zeta},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x)(p) &= \frac{c}{p\sigma(p)} \left(\cosh\left(\frac{px}{c}\right) - A_c(\zeta(p)) \cosh\left(\frac{p(l-x)}{c}\right) \right) + \\ &+ \frac{ar}{pl} \cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right) + \sqrt{\frac{a}{p}} \sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right), \\ A_c(\zeta) &= \cosh \zeta + \frac{r}{\zeta} \sinh \zeta, \quad \sigma(p) = \sinh \frac{l}{c} p, \quad \gamma(p) = ap - c^2. \end{aligned}$$

В точке $p_{oc} = \frac{c^2}{a}$ плоскости \mathbf{C} функция $\Phi(x)$, как нетрудно проверить, обращается в нуль, и поэтому точка p_{oc} является устранимой особой точкой [11, п. 22] $\bar{\varphi}(x)$ как функции на \mathbf{C} .

Из (5.3) видно, что канал воздействий от \mathbf{u} к $\varphi(x)$ обладает двойным интегрирующим свойством и что функция

$$(5.4) \quad \Psi(x)(p) = p \frac{\Phi(x)(p)}{\gamma(p) D_{\tau}(\zeta(p))}$$

не имеет полюсов в $\mathbf{C}^+ = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p > 0\}$; она имеет простые полюса в нулях функции $D_{\tau} \circ \zeta$, а также в нулях функции σ , т.е. в точках $\pm i\omega_k$, где $\omega_k = k\pi \frac{c}{l}$ ($k \geq 0$).

Введем в рассмотрение пространство $(\mathbf{QL}_1)_y = \mathbf{Q}_y \cap \mathbf{L}_{1y}$, где \mathbf{L}_{1y} – пространство функций f со значениями размерности u , обладающими всеми свойствами обобщенных оригиналов и конечным значением $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$. Норма в пространстве $(\mathbf{QL}_1)_y$:

$$\|f\|_{(\mathbf{QL}_1)_y} = \max \left(\|f\|_{\mathbf{Q}_y}, \vartheta_1^{-1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt \right),$$

где ϑ_1 – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Простейшим примером функции из $(\mathbf{QL}_1)_y$ может служить импульс размерности u :

$$(5.5) \quad v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \in [0, \delta], \\ 0 & \text{при } t > \delta. \end{cases}$$

Ниже аргумент x при функциях и операторах будем для краткости опускать.

Функцию Ψ будем рассматривать как передаточную функцию оператора V_Ψ , отображающего функцию $u \in (\mathbf{QL}_1)_y$ в пространство \mathbf{Q}_Ψ равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности $\frac{t}{x}\theta$, обладающих свойствами обобщенных оригиналов.

Ниже получается представление оператора V_Ψ в виде суммы оператора d^{-1} интегрирования в пространстве \mathbf{Or} обобщенных оригиналов [11, п. 83], линейного оператора $B_\Psi : \mathbf{Q}_y \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$ и линейного оператора $\Omega_\Psi : \mathbf{L}_{1y} \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Затем получается представление для оператора V_M , отражающего реакцию координаты $\varphi(x)$ выхода объекта на входное воздействие u .

6. Представления для операторов V_Ψ и V_M

Теорема 2. Оригинал Ψ как функции от $p \in \mathbf{C}$, т.е. импульсная переходная функция $w(V_\Psi)$ оператора V_Ψ (реакция его на δ -функцию [11, п. 83]) имеет вид

$$(6.1) \quad w(V_\Psi)(t) = s(t) \left[b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \exp(p_n t) + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos \omega_k t + f_k \sin \omega_k t) \right],$$

где

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad \omega_k = k\pi \frac{c}{l} \quad (k \geq 1),$$

$$b_0 = \frac{r}{\alpha l(r+2)}, \quad \psi_n = \frac{cl^2 g_{1n}(\tau_n) + al g_{2n}(\tau_n)}{\left((a\tau_n)^2 + (cl)^2 \right) (D_T)'(p_n)},$$

$$g_{1n} = \frac{\cosh(a\tau_n^2 x / cl^2) - \cosh(a\tau_n^2(l-x) / cl^2) (\cos \tau_n + (r/\tau_n) \sin \tau_n)}{\sinh(a\tau_n^2 / cl)},$$

$$g_{2n} = \tau_n \sin\left(\frac{l-x}{l} \tau_n\right) - r \cos\left(\frac{l-x}{l} \tau_n\right),$$

$$d_k = 2(-1)^k l \frac{F_{dk} \cos(k\pi(l - \frac{x}{l})) - G_{dk} \cos(\frac{k\pi x}{l})}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2 \right) |D_T(\zeta_k)|^2},$$

$$f_k = 2(-1)^k l \frac{G_{fk} \cos(\frac{k\pi x}{l}) - F_{fk} \cos(k\pi(l - \frac{x}{l}))}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2 \right) |D_T(\zeta_k)|^2},$$

$$F_{dk} = G_{dk} \operatorname{Re} A_c(\zeta_k) - G_{fk} \operatorname{Im} A_c(\zeta_k), \quad F_{fk} = G_{dk} \operatorname{Im} A_c(\zeta_k) + G_{fk} \operatorname{Re} A_c(\zeta_k),$$

$$G_{dk} = c^2 \operatorname{Re} D_T(\zeta_k) + a\omega_k \operatorname{Im} D_T(\zeta_k), \quad G_{fk} = a\omega_k \operatorname{Re} D_T(\zeta_k) - c^2 \operatorname{Im} D_T(\zeta_k).$$

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Оператор V_Ψ представляется в виде суммы операторов

$$(6.2) \quad V_\Psi = b_0 d^{-1} + B_\Psi + \Omega_\Psi.$$

Здесь обозначено: d^{-1} – оператор интегрирования в пространстве \mathbf{Or} обобщенных оригиналов, B_Ψ – линейный оператор $\mathbf{Q}_y \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$, имеющий импульсную переходную функцию $w(B_\Psi)(t) = s(t) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\tau_n) \exp(p_n t)$, Ω_Ψ – линейный оператор $\mathbf{L}_{1y} \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$, имеющий импульсную переходную функцию

$$w(\Omega_\Psi)(t) = s(t) \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos \omega_k t + f_k \sin \omega_k t).$$

Ниже, см. Приложение 4, будут получены оценки сверху норм операторов d^{-1} , B_Ψ и Ω_Ψ , что позволит дать оценку нормы оператора V_Ψ .

Введем теперь в рассмотрение пространство \mathbf{U} , состоящее из функций $f \in (\mathbf{QL}_1)_y$, у которых первообразная (в пространстве обобщенных оригиналов) $d^{-1}f$ также входит в $(\mathbf{QL}_1)_y$. Норма в пространстве \mathbf{U} :

$$\|f\|_{\mathbf{U}} = \max \left(\|f\|_{(\mathbf{QL}_1)_y}, \vartheta_2^{-1} \|d^{-1}f\|_{(\mathbf{QL}_1)_y} \right),$$

где ϑ_2 , аналогично ϑ_1 , – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Простейшим примером функции из \mathbf{U} может служить двусторонний импульс размерности u :

$$(6.3) \quad v_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, \delta), \\ -1 & \text{при } t \in [\delta, 2\delta), \\ 0 & \text{при } t > 2\delta. \end{cases}$$

Введем также в рассмотрение пространство \mathbf{Q}_M , состоящее из равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности φ , обладающих свойствами обобщенных оригиналов. Норма в \mathbf{Q}_M аналогична норме в пространстве \mathbf{Q}_T : $\|f\|_{\mathbf{Q}_M} = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$.

Теорема 4. Оператор V_M , переводящий воздействие $u \in \mathbf{U}$ в $\varphi(x) \in \mathbf{Q}_M$ в силу уравнений (2.1) с граничными условиями ((2.2), (2.3)), представляется в виде

$$(6.4) \quad V_M = \beta d^{-1} V_\Psi.$$

Норма V_M как оператора $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Q}_M$ оценивается сверху следующим образом:

$$(6.5) \quad \|V_M\| \leq \beta \vartheta_2 (M_B + \vartheta_1 (b_0 + M_\Omega)).$$

7. Достаточное условие сохранения причинности и устойчивости объекта при охвате его обратной связью

Добавим к системе, описываемой уравнениями (2.1) с граничными условиями (2.2), *обратную связь*, т.е. систему вида

$$(7.1) \quad u = F(y, f),$$

где $y = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$, f – внешнее воздействие (будем считать его элементом некоторого нормированного пространства \mathbf{F}), F – оператор (вообще говоря, нелинейный), переводящий пару (y, f) в u – управляющее воздействие для системы ((2.1)–(2.3)).

Введем в рассмотрение пространство \mathbf{Q}_2 функций $y = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, где $\psi_1 \in \mathbf{Q}_m$, $\psi_2 \in \mathbf{Q}_t$; норма в \mathbf{Q}_2 : $\|y\|_{\mathbf{Q}_2} = \max(N_m^{-1}\|\psi_1\|_{\mathbf{Q}_m}, N_t^{-1}\|\psi_2\|_{\mathbf{Q}_t})$, где N_m, N_t – нормировочные коэффициенты, имеющие размерности φ и θ соответственно.

Как следует из результатов разделов 4 и 6, для того, чтобы выход y был ограничен, т.е. входил в пространство \mathbf{Q}_2 , достаточно, чтобы u входило в пространство \mathbf{U} . Для обеспечения этого условия оператор F должен отображать пространство $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{F}$ в \mathbf{U} .

Обозначим через F_f отображение $y \rightarrow F(y, f)$ (при фиксированном $f \in \mathbf{F}$) и через V – оператор, переводящий функцию $u \in \mathbf{U}$ в пару функций $\begin{pmatrix} V_m(u) \\ V_t(u) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_2$. За норму оператора V выберем $\sup_{u \in \mathbf{U}} \left(\frac{\|V(u)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|u\|_{\mathbf{U}}} \right)$.

Согласно *принципу сжимающих отображений* (см., напр., [13, гл. II, § 4]) для существования и единственности решения замкнутой системы ((2.1)–(2.3), (7.1)) достаточно, чтобы $X_f = V \circ F_f$ был сжимающим, т.е. удовлетворял неравенству

$$(7.2) \quad \|X_f(y_1) - X_f(y_2)\|_{\mathbf{Q}_2} \leq L_X \|y_1 - y_2\|_{\mathbf{Q}_2}$$

с единой для всех $y \in \mathbf{Q}_2$ и $f \in \mathbf{F}$ константой L_X , строго меньшей 1.

Отсюда следует

Теорема 5. При выполнении условий

$$(7.3) \quad \|F_f(y_1) - F_f(y_2)\|_{\mathbf{U}} \leq L_F \|y_1 - y_2\|_{\mathbf{Q}_2},$$

$$(7.4) \quad \|F_f(0)\|_{\mathbf{U}} \leq K \|f\|_{\mathbf{F}},$$

где L_F – единая для всех $y \in \mathbf{Q}_2$ константа (размерности u), удовлетворяющая условию

$$(7.5) \quad L_F < \frac{1}{\|V\|},$$

и K – единая для всех $f \in \mathbf{F}$ константа, существует оператор $A : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Q}_2$, переводящий внешнее воздействие f в решение системы ((2.1)–(2.3), (7.1)). Оператор A обладает свойствами причинности [14] и ограниченности отношения $\frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}}$, равномерной по всем $f \in \mathbf{F}$.

Доказательство существования оператора A и ограниченности отношения $\frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}}$ см. в Приложении 6; доказательство причинности оператора A приводится в [10, приложение, п. 1].

Примером оператора F , отображающего пространство $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{F}$ в \mathbf{U} , может служить нелинейный оператор, переводящий пару $\left(\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, f \right)$ (где $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_2, f \in \mathbf{F}$) в функцию

$$(7.6) \quad \|f\|_{\mathbf{F}} \left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{Q}_2} v_2,$$

где v_2 – см. (6.5).

8. Заключение

В работе для принятой здесь математической модели линейной распределенной термомеханической системы получены операторные соотношения, описывающие реакции выходных координат системы на управляющее тепловое воздействие. Установлено функциональное пространство управляющих воздействий, для которого эти реакции являются ограниченными функциями времени, и получены оценки сверху для норм операторов, определяющих реакции. На основе принципа сжимающих отображений определен класс *обратных связей* от выходных координат к входному воздействию, для которого обеспечена *устойчивость* замкнутой системы управления (объект, обратная связь), т.е. ограниченность реакций выходных координат системы на внешнее по отношению к ней воздействие. Поскольку полученные оценки норм операторов выражены как функции параметров объекта управления, они могут быть вычислены для любого конкретного объекта, и по результатам вычислений могут быть определены параметры управляющих устройств, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Выполним преобразование Лапласа уравнения (5.1) по пространственной координате $x \in [0, l]$ с учетом первого из граничных условий (5.2) (см. [11, п. 80, формула (7)]:

$$(П.1.1) \quad (c^2 q^2 - p^2) \overline{\overline{\varphi}}(q)(p) - \beta q \overline{\overline{\theta}}(q)(p) = z_0(q)(p),$$

где $\overline{\overline{f}}$ – преобразование Лапласа от функции \overline{f} ($\overline{f}(x)(p) \in \mathbf{C}$) по x ,

$$z_0(q) = c^2 q \overline{\overline{\varphi}}(0) - \beta \overline{\overline{\theta}}(0), \quad q \in \mathbf{C}.$$

Отсюда следует выражение для $\overline{\overline{\varphi}}(q)$:

$$(П.1.2) \quad \overline{\overline{\varphi}}(q)(p) = \frac{bq}{q^2 - (p/c)^2} \overline{\overline{\theta}}(q)(p) + \frac{q \overline{\overline{\varphi}}(0)(p) - b \overline{\overline{\theta}}(0)(p)}{q^2 - (p/c)^2},$$

где $b = \frac{\beta}{c^2}$.

Выражение для $\bar{\bar{\theta}}(q)$ получаем, преобразуя выражение (3.2) для $\bar{\theta}$ по Лапласу по координате x . В силу формул (4) из [11, п. 80] преобразования (по x) функций $\cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta\right)$ и $\sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta\right)$, входящих в (3.2), имеют вид соответственно

$$\frac{q}{q^2 - (\zeta/l)^2} \cosh \zeta - \frac{\zeta/l}{q^2 - (\zeta/l)^2} \sinh \zeta \quad \text{и} \quad \frac{q}{q^2 - (\zeta/l)^2} \sinh \zeta - \frac{\zeta/l}{q^2 - (\zeta/l)^2} \cosh \zeta.$$

Поэтому выражение для $\bar{\bar{\theta}}(q)$ имеет вид

$$(П.1.3) \quad \bar{\bar{\theta}}(q) = \left(A_c(\zeta) \frac{q}{q^2 - (\zeta/l)^2} - A_s(\zeta) \frac{1}{q^2 - (\zeta/l)^2} \right) \frac{\bar{u}}{D_T(\zeta)},$$

где $A_c(\zeta) = \cosh \zeta + \frac{r}{\zeta} \sinh \zeta$, $A_s(\zeta) = \frac{r}{\zeta} \cosh \zeta + \zeta \sinh \zeta$.

При подстановке выражения (П.1.3) для $\bar{\bar{\theta}}(q)$ в (П.1.2) возникает рациональная дробь

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q^2 - (p/c)^2) (q^2 - (\zeta(p)/l)^2)} &= \frac{ac^2}{p\gamma(p)} \left(\frac{1}{q^2 - (p/c)^2} - \frac{1}{q^2 - (\zeta(p)/l)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(p)} \left(\frac{ap}{q^2 - (p/c)^2} - \frac{c^2}{q^2 - (\zeta(p)/l)^2} \right), \end{aligned}$$

где $\gamma(p) = ap - c^2$.

Используя это соотношение и представление для $\bar{\bar{\theta}}(0)$, следующее из (3.2): $\bar{\bar{\theta}}(0) = \frac{A_c(\zeta)}{D_T(\zeta)} \bar{u}$ (см. пояснения к (П.1.3)), получаем окончательное выражение для $\bar{\bar{\varphi}}(q)$:

$$(П.1.4) \quad \begin{aligned} \bar{\bar{\varphi}}(q)(p) &= \frac{\beta}{\gamma(p)} \left[A_c(\zeta(p)) \left(\frac{1}{q^2 - (p/c)^2} - \frac{1}{q^2 - (\zeta(p)/l)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{p} A_s(\zeta(p)) \left(\frac{q}{q^2 - (p/c)^2} - \frac{q}{q^2 - (\zeta(p)/l)^2} \right) \right] \frac{\bar{u}(p)}{D_T(\zeta(p))} + \\ &\quad + \bar{\bar{\varphi}}(0)(p) \frac{q}{q^2 - (p/c)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда переходим к оригиналам по x :

$$(П.1.5) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi}(x)(p) &= \frac{\beta}{\gamma(p)} \left[A_c(\zeta(p)) \left(\frac{c}{p} \sinh\left(\frac{p}{c}x\right) - \sqrt{\frac{a}{p}} \sinh\left(\frac{x}{l}\zeta(p)\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{p} A_s(\zeta(p)) \left(\cosh\left(\frac{p}{c}x\right) - \cosh\left(\frac{x}{l}\zeta(p)\right) \right) \right] \frac{\bar{u}(p)}{D_T(\zeta(p))} + \bar{\varphi}(0)(p) \cosh\left(\frac{p}{c}x\right). \end{aligned}$$

Далее, дифференцируя (П.1.5) по x , получаем, что 2-е из граничных условий (5.2) принимает вид

$$(П.1.6) \quad \frac{\beta}{\gamma(p)} \left[A_c(\zeta(p)) \left(\cosh\left(\frac{p}{c}l\right) - \cosh \zeta(p) \right) - \right. \\ \left. - \frac{a}{p} A_s(\zeta(p)) \left(\frac{p}{c} \sigma(p) - \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \zeta(p) \right) \right] \frac{\bar{u}(p)}{D_T(\zeta(p))} + \\ + \bar{\varphi}(0) (p) \frac{p}{c} \sigma(p) = 0,$$

где $\sigma(p) = \sinh\left(\frac{pl}{c}\right)$.

Исключая $\bar{\varphi}(0)$ из (П.1.5) и (П.1.6) и используя выражения для функций A_c и A_s (см. пояснения к (П.1.3)), получаем окончательное выражение для $\bar{\varphi}(x)$ в виде (5.3).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2.

1. Представим функцию Ψ (см. (5.4)) в виде суммы $\Psi_1 + \Psi_2$, где

$$(П.2.1) \quad \Psi_1(p) = c \frac{\cosh(px/c) - A_c(\zeta(p)) \cosh(p(l-x)/c)}{\gamma(p)\sigma(p)D_T(\zeta(p))},$$

$$(П.2.2) \quad \Psi_2(p) = \frac{1}{\gamma(p)D_T(\zeta(p))} \left(\frac{ar}{l} \cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right) + \sqrt{ap} \sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right) \right).$$

Для исследования динамических свойств операторов V_{Ψ_j} ($j = 1, 2$), имеющих передаточные функции Ψ_j , будем пользоваться теоремой Коши [11, п. 71].

Для применения этой теоремы нужно построить *правильную* систему контуров $\{\mathbf{G}_n, n \geq n_0\}$ и проверить стремление к нулю значений функций Ψ_j ($j = 1, 2$) на этих контурах при $n \rightarrow \infty$.

2. Сначала введем в рассмотрение область $\mathbf{H}_0 = \{p \in \mathbf{C} : |p| > |p_{oc}|\}$ (где p_{oc} – см. раздел 5) и в этой области построим систему контуров в виде прямоугольников со сторонами $\mathbf{G}_{\pm rn} = \{p \in \mathbf{C} : |\text{Re}p| \leq H_n, \text{Im}p = \pm L_n\}$ и $\mathbf{G}_{\pm vn} = \{p \in \mathbf{C} : \text{Re}p = \pm H_n, |\text{Im}p| \leq L_n\}$, где числа H_n и L_n выбираются ниже.

При этом, чтобы система контуров $\{\mathbf{G}_n, n \geq n_0\}$ находилась в области \mathbf{H}_0 , число n_0 должно удовлетворять условию $\min(H_{n_0}, L_{n_0}) > |p_{oc}|$.

3. Величину H_n определяем так, чтобы сторона \mathbf{G}_{-vn} прошла через точку $p_{en} = -a\left(\frac{\tau_{en}}{l}\right)^2$ плоскости \mathbf{C} ; здесь τ_{en} – точка максимума функции $D_T(i\tau) = = \infty \left[2\cos \tau + \left(\frac{r}{\tau} - \frac{\tau}{r}\right) \sin \tau \right]$ (см. пояснения к (3.2)).

Так как $\frac{\partial}{\partial i} (D_T(i\tau)) = \infty \left[\left(\frac{r}{\tau} - \frac{\tau}{r}\right) \cos \tau - \left(2 + \frac{r}{\tau^2} + \frac{1}{r}\right) \sin \tau \right]$, значение τ_{en} определяется как решение уравнения

$$(П.2.3) \quad \tan \tau = \tau f_D(\tau),$$

где $f_D(\tau) = \frac{r^2 - \tau^2}{r^2 + (2r+1)\tau^2}$. На решениях этого уравнения значения $\sin \tau_{en}$ и $\cos \tau_{en}$ имеют разные знаки, чередующиеся с ростом n ; при $n \rightarrow \infty$ имеем: $\sin \tau_{en} \rightarrow 1$ и $\cos \tau_{en} \rightarrow 0$.

Таким образом, величина H_n определяется как $a \left(\frac{\tau_{en}}{l}\right)^2$. Так как число τ_{en} находится в интервале (τ_n, τ_{n+1}) и $\tau_n \in (n, n+1)\pi$, величина H_n возрастает с ростом n и имеет порядок роста n^2 .

4. Величина L_n выбирается так, чтобы сторона $\mathbf{G}_{\pm rn}$ не проходила через нули функции σ (см. пояснения к (5.3)). А именно, L_n определяется как $\frac{c}{l}\pi \left(n^2 + \frac{1}{2}\right)$. (Для того, чтобы система $\{\mathbf{G}_n, n \geq n_0\}$ контуров была правильной, значения L_n должны иметь тот же порядок роста, что и H_n .)

5. Оценим значения функций, входящих в выражения (П.2.1) и (П.2.2) для Ψ_j ($j = 1, 2$), на сторонах контура \mathbf{G}_n , используя свойства гиперболических функций комплексного переменного. При этом в силу комплексной сопряженности чисел на сторонах \mathbf{G}_{+rn} и \mathbf{G}_{-rn} достаточно ограничиться верхней половиной плоскости \mathbf{C} .

а) В силу выбора L_n на стороне \mathbf{G}_{+rn} значение функции σ (см. пояснения к (5.3)) равно $i \cosh\left(\frac{l}{c} \operatorname{Re} p\right)$, а значения функции $\left|\cosh\left(\frac{\xi}{c} p\right)\right|$ (где $\xi \in [0, l]$) не превышают величины $\cosh\left(\frac{l}{c} \operatorname{Re} p\right)$. Поэтому значения отношения $\left|\frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)}\right|$ не превышают 1.

б) Так как модуль комплексного числа $\zeta(p)$ (см. пояснения к (3.2)) равен $\sqrt{\frac{|p|}{a}}l$, а аргумент его равен половине аргумента числа p , на стороне \mathbf{G}_{+rn} имеем: $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta_n, \frac{\pi}{2} + \delta_n\right]$, где $\delta_n = \arctan \frac{H_n}{L_n}$; следовательно, $\arg \zeta(p) \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\delta_n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_n}{2}\right]$ и

$$(П.2.4) \quad \operatorname{Re} \zeta(p) = |\zeta(p)| \cos \arg \zeta(p) \geq \frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta_n}{2} - \sin \frac{\delta_n}{2}\right) =$$

$$= |\zeta(p)| \frac{L_n}{(\sqrt{M_n + L_n} + \sqrt{M_n - L_n}) \sqrt{M_n}} =$$

$$= |\zeta(p)| \frac{L_n}{M_n + L_n + H_n} \sqrt{\frac{M_n + L_n}{M_n}}.$$

(Здесь обозначено: $M_n = \sqrt{H_n^2 + L_n^2}$ и использовано соотношение $\sqrt{M_n - L_n} = \frac{H_n}{\sqrt{M_n + L_n}}$).

Так как на \mathbf{G}_{+rn} имеет место соотношение $|\zeta(p)| \geq \sqrt{\frac{L_n}{a}}l$, значения функции $\operatorname{Re} \zeta(p)$ растут при $n \rightarrow \infty$ с порядком роста, не меньшим, чем n .

в) Введя обозначение $z_1(\zeta) = \frac{\zeta}{r} + \frac{r}{\zeta}$, выпишем развернутое выражение для $D_T(\zeta)$:

$$D_T(\zeta) = \alpha \left\{ (2 \cosh \operatorname{Re} \zeta + \operatorname{Re} z_1(\zeta) \sinh \operatorname{Re} \zeta) \cos \operatorname{Im} \zeta - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Im} z_1(\zeta) \cosh \operatorname{Re} \zeta \sin \operatorname{Im} \zeta + \right.$$

$$\left. + i \left[(2 \sinh \operatorname{Re} \zeta + \operatorname{Re} z_1(\zeta) \cosh \operatorname{Re} \zeta) \sin \operatorname{Im} \zeta + \operatorname{Im} z_1(\zeta) \sinh \operatorname{Re} \zeta \cos \operatorname{Im} \zeta \right] \right\}.$$

Отсюда следует представление функции $|D_T(\zeta)|^2$ в виде суммы $\sum_{j=1}^2 F_{Dj}(\zeta)$, где

$$(П.2.5) \quad F_{D1}(\zeta) = \alpha^2 \left[4 \left(\cosh^2 \operatorname{Re} \zeta \cos^2 \operatorname{Im} \zeta + \sinh^2 \operatorname{Re} \zeta \sin^2 \operatorname{Im} \zeta \right) + |z_1(\zeta)|^2 \left(\sinh^2 \operatorname{Re} \zeta \cos^2 \operatorname{Im} \zeta + \cosh^2 \operatorname{Re} \zeta \sin^2 \operatorname{Im} \zeta \right) \right],$$

$$(П.2.6) \quad F_{D2}(\zeta) = 2\alpha^2 \left(\operatorname{Re} z_1(\zeta) \sinh 2\operatorname{Re} \zeta - \operatorname{Im} z_1(\zeta) \sin 2\operatorname{Im} \zeta \right).$$

Функция $F_{D1}(\zeta)$ оценивается снизу функцией

$$F_D(\zeta) = \alpha^2 \left(4 + |z_1(\zeta)|^2 \right) \sinh^2 \operatorname{Re} \zeta.$$

Для оценки значений функции $F_{D2}(\zeta)$ при больших n заметим, что значения функции $z_1(\zeta)$ при росте n сближаются со значениями функции $\frac{\zeta}{r}$. Оценка снизу роста функции $\operatorname{Re} \zeta$ получена в (П.2.4). Оценка же роста функции $\operatorname{Im} \zeta$ получается аналогично (П.2.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \zeta(p) &= |\zeta(p)| \sin \arg \zeta(p) \leq \frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta_n}{2} + \sin \frac{\delta_n}{2} \right) = \\ &= \frac{|\zeta(p)|}{2} \frac{M_n + L_n + H_n}{\sqrt{M_n(M_n + L_n)}}. \end{aligned}$$

Из этой оценки видно, что при достаточно больших n значения функции $F_{D2}(\zeta)$ становятся положительными и потому функция $F_D(\zeta)$ становится оценкой снизу всей функции $|D_T(\zeta)|^2$.

г) Значения модуля функции $A_c(\zeta)$ (см. пояснения к (5.3)), входящей в выражение (П.2.1) для функции $\Psi_1(\zeta)$, оцениваются сверху следующим образом:

$$(П.2.7) \quad |A_c(\zeta)| \leq \left(1 + \frac{r}{|\zeta|} \right) \cosh \operatorname{Re} \zeta,$$

и потому $\left| \frac{A_c(\zeta)}{D_T(\zeta)} \right| \leq \frac{1}{\alpha |z_1(\zeta)|} \left(1 + \frac{r}{|\zeta|} \right) \coth \operatorname{Re} \zeta$.

Таким образом, отношение $\frac{A_c(\zeta)}{D_T(\zeta)}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из содержания подпунктов а)–г) следует, что значения функции Ψ_1 на стороне \mathbf{G}_{+rn} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

д) Модуль функции $z_2(p) = \frac{ar}{l} \cosh \left(\frac{l-x}{l} \zeta(p) \right) + \sqrt{ap} \sinh \left(\frac{l-x}{l} \zeta(p) \right)$, входящей в выражение (П.2.2) для функции Ψ_2 , оценивается сверху функцией $\left(\frac{ar}{l} + \sqrt{a|p|} \right) \cosh(\operatorname{Re} \zeta(p))$. Отношение функции $|z_2|$ к $F_D(\zeta)$ не превышает

величины $\frac{ar/l + \sqrt{a|p|}}{\alpha |z_1(\zeta(p))|} \coth(\operatorname{Re} \zeta(p))$, т.е. остается ограниченным при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку в выражении (П.2.2) для Ψ_2 стоит функция γ с неограниченно растущим при $n \rightarrow \infty$ модулем (см. пояснения к (5.3)), получаем, что значения функции Ψ_2 на стороне \mathbf{G}_{+rn} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

6. Оценим значения функций, входящих в выражения для Ψ_j ($j = 1, 2$), на стороне \mathbf{G}_{+bn} .

а) Значения на \mathbf{G}_{+bn} функции $|\sigma|$ оцениваются снизу величиной $|\sinh(\frac{l}{c}\text{Re } p)|$, т.е. величиной $\sinh(\frac{l}{c}H_n)$, а значения модуля функции $\cosh(\frac{\xi}{c}p)$ (где $\xi \in [0, l]$) не превышают величины $\cosh(\frac{\xi}{c}\text{Re } p)$, т.е. величины $\cosh(\frac{l}{c}H_n)$. Поэтому значения модуля отношения $\frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)}$ на \mathbf{G}_{+bn} не превышают величины $\coth(\frac{l}{c}H_{n_0})$, где n_0 – см. п. 2.

б)–д). На верхней половине стороны \mathbf{G}_{+bn} имеем: $\arg p \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta_n]$, где δ_n – см. п. 5б); поэтому $\arg \zeta(p) \in [0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta_n}{2}]$, и

$$\text{Re } \zeta(p) \geq \frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta_n}{2} + \sin \frac{\delta_n}{2} \right) \geq \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H_n}{a}} \frac{M_n + L_n + H_n}{\sqrt{M_n(M_n + L_n)}}.$$

Отсюда видно, что $\text{Re } \zeta(p) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ с порядком роста, не меньшим n . Поэтому справедливы те же выводы относительно стремления к нулю при $n \rightarrow \infty$ функций $\left| \frac{A_c}{D_r}(\zeta) \right|$, $\frac{z_2}{\gamma D_r \circ \zeta}$ и Ψ_j ($j = 1, 2$), что в пп. 5б)–д).

7. Теперь оценим значения отношений, содержащихся в выражениях для функций Ψ_j (см. (П.2.1), (П.2.2)) на стороне \mathbf{G}_{-bn} контура \mathbf{G}_n . Достаточно провести эту оценку при $\text{Im } p \geq 0$.

а) Повторяя рассуждения п. 6а), получаем, что отношение $\left| \frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)} \right|$ ($\xi \in [0, l]$) на стороне \mathbf{G}_{-bn} оценивается сверху той же величиной $\coth(\frac{l}{c}H_{n_0})$, что и на стороне \mathbf{G}_{+bn} .

б) На верхней половине стороны \mathbf{G}_{-bn} имеем: $\arg p \in [\frac{\pi}{2} + \delta_n, \pi]$, и потому $\arg \zeta(p) \in [\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_n}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Вводя в рассмотрение угол $\theta_n = \arg \cos \frac{H_n}{|p|}$, имеем:

$$(П.2.8) \quad \text{Re } \zeta(p) = |\zeta(p)| \cos \frac{\arg p}{2} = l \sqrt{\frac{|p|}{2a}} (1 - \cos \theta_n).$$

Величина же $\text{Im } \zeta(p)$ вычисляется следующим образом:

$$\text{Im } \zeta(p) = |\zeta(p)| \sin \frac{\arg p}{2} = l \sqrt{\frac{|p|}{2a}} (1 + \cos \theta_n) = l \sqrt{\frac{H_n + |p|}{2a}}.$$

Но так как $H_n = a \left(\frac{\tau_{en}}{l} \right)^2$ (см. п. 3 настоящего приложения), получаем:

$$(П.2.9) \quad \text{Im } \zeta(p) = \tau_{en} \sqrt{\frac{H_n + |p|}{2H_n}}.$$

в) Для величины $\sin^2 \text{Im } \zeta(p)$ (см. (П.2.5)), можно записать:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.2.10}) \quad & \sin^2 \text{Im } \zeta(p) - \sin^2 \tau_{en} = \\
 & = 2 \int_{\tau_{en}}^{\text{Im } \zeta(p)} \sin \tau \cos \tau \, d\tau \leq \sqrt{2} (\text{Im } \zeta(p) - \tau_{en}) = \\
 & = \sqrt{2} \tau_{en} \left(\sqrt{\frac{H_n + |p|}{2H_n}} - 1 \right) = \tau_{en} \frac{|p| - H_n}{\sqrt{H_n} (\sqrt{|p| + H_n} + \sqrt{2H_n})} = \\
 & = \tau_{en} \frac{\text{Im}^2 p}{\sqrt{H_n} (|p| + H_n) (\sqrt{|p| + H_n} + \sqrt{2H_n})}.
 \end{aligned}$$

Из (П.2.10) видно, что при выполнении условия: $\text{Im } p < \sqrt{\frac{H_n}{\vartheta}}$, где θ – фиксированная константа, имеющая размерность времени, правая часть (П.2.10) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. А так как при этом $|\sin \tau_{en}| \rightarrow 1$ (см. п. 3), это означает, что $\sin^2 \text{Im } \zeta(p)$ также стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая этот факт, разобьем верхнюю половину стороны \mathbf{G}_{-bn} на зоны: Λ_n , где $\text{Im } p \in \left[\sqrt{\frac{H_n}{\theta}}, L_n \right]$, и Λ_{0n} , где $\text{Im } p < \sqrt{\frac{H_n}{\theta}}$.

г) В зоне Λ_n имеем: $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} + \delta_n, \pi - \theta_{0n} \right]$, где $\theta_{0n} = \arctan \sqrt{\frac{1}{\vartheta H_n}}$; следовательно, $\arg \zeta(p) \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_n}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{0n}}{2} \right]$. Поэтому

$$\text{Re } \zeta(p) = |\zeta(p)| \cos \arg \zeta(p) \geq l \sqrt{\frac{|p|}{a}} \sin \frac{\theta_{0n}}{2} = \sqrt{\frac{|p|}{2a} \left(1 - \frac{H_n}{M_{0n}} \right)},$$

где $M_{0n} = \sqrt{H_n^2 + H_n/\vartheta}$. Таким образом, так как $|p| \geq M_{0n}$, имеем:

$$(\text{П.2.11}) \quad \text{Re } \zeta(p) \geq l \sqrt{\frac{M_{0n} - H_n}{2a}} = l \sqrt{\frac{H_n}{2a\vartheta (M_{0n} + H_n)}} = l \sqrt{\frac{1}{2a\vartheta (1 + \sec \theta_{0n})}},$$

что означает ограниченность снизу значений функции $\text{Re } \zeta(p)$ при неограниченном росте n .

Функция же $\text{Im } \zeta(p)$ в зоне Λ_n оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.2.12}) \quad \text{Im } \zeta(p) & = |\zeta(p)| \sin \arg \zeta(p) \leq l \sqrt{\frac{p}{a}} \cos \frac{\theta_{0n}}{2} = l \sqrt{\frac{p}{2a} (1 + \cos \theta_{0n})} \leq \\
 & \leq l \sqrt{\frac{M_n}{2aM_{0n}}} (M_{0n} + H_n).
 \end{aligned}$$

Теперь, оценивая снизу значения функции $|D_{\tau}(\zeta)|^2$ в зоне Λ_n функцией

$$F_D(\zeta) - \text{Im } z_1(\zeta) \sin 2\text{Im } \zeta$$

(см. п. 5в), видим, что при достаточно большом n функция $|D_{\tau}(\zeta)|^2$ оценивается снизу функцией $\frac{F_{D_0}(\zeta)}{2}$.

Поэтому, опираясь на оценку (П.2.7), получаем:

При достаточно большом n имеет место неравенство, аналогичное п. 5г):

$$\left| \frac{A_c(\zeta)}{D_{\tau}(\zeta)} \right| \leq \frac{2}{\alpha |z_1(\zeta)|} \left(1 + \frac{r}{|\zeta|} \right) \coth \operatorname{Re} \zeta.$$

Из этого неравенства в силу ограниченности снизу функции $\operatorname{Re} \zeta$ следует стремление отношения $\left(\frac{A_c}{D_{\tau}} \right) \circ \zeta$ к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Также, аналогично п. 5д) при достаточно большом n модуль отношения $\frac{z_2(p)}{D_{\tau}(\zeta(p))}$ оценивается сверху величиной

$$2 \frac{ar/l + \sqrt{a|p|}}{\alpha |z_1(\zeta(p))|} \coth \operatorname{Re} \zeta(p).$$

В силу ограниченности снизу функции $\operatorname{Re} \zeta(p)$ модуль этого отношения ограничен сверху при неограниченном росте n , и, следовательно, отношение $\frac{z_2}{\gamma D_{\tau} \circ \zeta}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

д) В зоне Λ_{0n} имеем:

$$\arg p \in (\pi - \theta_{0n}, \pi], \quad \arg \zeta(p) \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{0n}}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$\operatorname{Re} \zeta(p) = |\zeta(p)| \cos \frac{\arg p}{2} \leq l \sqrt{\frac{|p|}{a}} \sin \frac{\theta_{0n}}{2};$$

$$\operatorname{Im} \zeta(p) = |\zeta(p)| \sin \frac{\arg p}{2} > l \sqrt{\frac{|p|}{a}} \cos \frac{\theta_{0n}}{2}.$$

Учитывая факт стремления к 1 функции $\sin^2 \operatorname{Im} \zeta$ при $n \rightarrow \infty$, можем оценить снизу функцию $|D_{\tau}(\zeta)|^2$ в этой зоне функцией $F_{D_0}(\zeta) - 2\alpha^2 \operatorname{Im} z_1(\zeta) \sin 2 \operatorname{Im} \zeta$, где $F_{D_0}(\zeta) = \alpha^2 |z_1(\zeta)|^2 \cosh^2 \operatorname{Re} \zeta \sin^2 \operatorname{Im} \zeta$. Из вида последних двух функций следует, что аналогично случаю зоны Λ_n (см. подпункт 7г) при достаточно большом n функция $|D_{\tau}(\zeta)|^2$ оценивается снизу функцией $\frac{F_{D_0}(\zeta)}{2}$. Поэтому аналогично подпункту 7г) модуль отношения $\frac{A_c(\zeta)}{D_{\tau}(\zeta)}$ при достаточно большом n оценивается сверху модулем функции $2 \frac{1+r/\zeta}{\alpha z_1(\zeta)} \cosh \operatorname{Re} \zeta$ и, следовательно, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Модуль же отношения $\frac{z_2}{D_{\tau}(\zeta)}$ оценивается сверху модулем функции

$$2 \frac{\sqrt{ap} + ar/l}{\alpha z_1(\zeta(p))} \cosh \operatorname{Re} \zeta(p)$$

и, следовательно, остается ограниченным при неограниченном росте n . Следовательно, отношение $\frac{z_2}{\gamma D_{\tau} \circ \zeta}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

8. Из изложенного в пп. 2–7 вытекает, что значения функций Ψ_j ($j = 1, 2$) на контурах \mathbf{G}_n ($n \geq n_0$) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, из чего следует возможность применения теоремы Коши [11, п. 71]. В силу этой теоремы функция Ψ_1 представляется суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах p_{oc} и p_n ($n \geq 0$), а также в нулях функции σ (см. раздел 5). Функция же Ψ_2 представляется суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах p_{oc} и p_n . А именно, так как все эти полюса – простые, имеем:

$$(П.2.13) \quad \Psi_1(p) = \frac{b_0}{p} + \frac{b_{1oc}}{p - p_{oc}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{1n}}{p - p_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k p + f_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2},$$

$$(П.2.14) \quad \Psi_2(p) = \frac{b_{2oc}}{p - p_{oc}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{p - p_n},$$

где

$$b_0 = \operatorname{res}_0 \Psi_1, \quad b_{joc} = \operatorname{res}_{p_{oc}} \Psi_j, \quad b_{jn} = \operatorname{res}_{p_n} \Psi_j \quad (n \geq 0, j = 1, 2),$$

$$d_k = 2 \operatorname{res}_{i\omega_k} \Psi_1, \quad f_k = -2 \operatorname{Im} \operatorname{res}_{i\omega_k} \Psi_1.$$

Ниже, в Приложении 3, приводится вычисление значений коэффициентов b_0 , b_{jn} ($n \geq 0, j = 1, 2$), d_k и f_k ($k \geq 1$) согласно [11, п. 23].

Складывая (П.2.13) и (П.2.14), на основе результатов вычислений в Приложении 3, получаем разложение для функции Ψ :

$$(П.2.15) \quad \Psi(p) = \frac{b_0}{p} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{p - p_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k p + f_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2},$$

где

$$b_0 = \frac{r}{\alpha l (r + 2)}, \quad \psi_n = \sum_{j=1}^2 b_{jn} = \frac{cl^2 g_{1n} + al g_{2n}}{\left((a\tau_n)^2 + (cl)^2 \right) (D_T)'(p_n)},$$

$$g_{1n} = \frac{\cosh(a\tau_n^2 x / cl^2) - \cosh(a\tau_n^2 (l - x) / cl^2) (\cos \tau_n + (r/\tau_n) \sin \tau_n)}{\sinh(a\tau_n^2 / cl)},$$

$$g_{2n} = \tau_n \sin\left(\frac{l - x}{l} \tau_n\right) - r \cos\left(\frac{l - x}{l} \tau_n\right).$$

Выражения для коэффициентов b_0 и b_{jn} получены в Приложении 3, пп. 1 и 3 приложения соответственно; выражения для коэффициентов d_k и f_k получены в п. 5 того же Приложения; выражение для $(D_T)'(p_n)$ получено в п. 4 того же Приложения. Поскольку значения $(D_T)'(p_n)$ как функции n ограничены снизу константой $\frac{\alpha l^2}{2ar}$, значения функции ψ_n оцениваются сверху следующим образом:

$$(П.2.16) \quad \psi_n \leq \frac{2r}{\alpha \tau_n^2} \left[\frac{hc}{a} + \left(\frac{hc}{a\tau_n} + \frac{1}{l} \right) \sqrt{\tau_n^2 + r^2} \right],$$

где $h = \coth\left(\frac{a\tau_0^2}{cl}\right)$. Учитывая, что $\tau_n \geq \tau n$ (см. раздел 3), получаем, что ψ_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд $R_\psi(t) = s(t) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \exp(p_n t)$ сходится в пространстве $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^+)$ суммируемых на $\mathbf{R}^+ = \{t \in \text{Re} : t > 0\}$ функций времени. Сумма этого ряда представляет собой импульсную переходную функцию оператора B_ψ , имеющего передаточную функцию $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{p-p_n}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление выражений для $b_0, b_{j\text{oc}}, b_{jn}$ ($j = 1, 2; n \geq 0$), d_k, f_k ($k \geq 1$) и $(D_T)'(p_n)(p_n)$.

1.

$$(П.3.1) \quad b_0 = \text{res}_{p=0} \Psi_1 = -\frac{1 - \lim_{p \rightarrow 0} A_c(p)}{l \lim_{p \rightarrow 0} D_T(p)} = \frac{r}{\alpha l(r+2)}.$$

2. Вследствие того, что p_{oc} – устранимая особая точка функции

$$(П.3.2) \quad b_{2\text{oc}} = \text{res}_{p_{\text{oc}}} \Psi_2 = -\text{res}_{p_{\text{oc}}} \Psi_1 = -b_{1\text{oc}}.$$

3.

$$(П.3.3) \quad b_{1n} = \text{res}_{p_n} \Psi_1 = \frac{cl^2}{(a\tau_n)^2 + (cl)^2} \frac{g_{1n}}{(D_T)'(p_n)},$$

$$\text{где } g_{1n} = \frac{\cosh(a\tau_n^2 x/cl^2) - \cosh(a\tau_n^2(l-x)/cl^2) (\cos \tau_n + (r/\tau_n) \sin \tau_n)}{\sinh(a\tau_n^2/cl)};$$

$$(П.3.4) \quad b_{2n} = \text{res}_{p_n} \Psi_2 = \frac{al}{(a\tau_n)^2 + (cl)^2} \frac{g_{2n}}{(D_T)'(p_n)},$$

$$\text{где } g_{2n} = \tau_n \sin\left(\frac{l-x}{l} \tau_n\right) - r \cos\left(\frac{l-x}{l} \tau_n\right).$$

4. Для вычисления величины $(D_T)'(p_n)$, входящей в выражения для b_{jn} ($j = 1, 2$), запишем (см. пояснения к (3.2)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_T}{\delta \zeta} &= \alpha \left(2 + \frac{1}{r} - \frac{r}{\zeta^2}\right) \sinh \zeta + \alpha \left(\frac{\zeta}{r} + \frac{r}{\zeta}\right) \cosh \zeta, \\ \zeta'(p_n) &= \frac{l}{2\sqrt{ap_n}} = -i \frac{l^2}{2a\tau_n}, \\ (D_T)'(p_n) &= \frac{\partial D_T}{\delta \zeta}(\zeta(p_n)) \zeta'(p_n) = \\ &= \frac{\alpha l^2}{a\tau_n} \left[\left(1 + \frac{1}{2r} + \frac{r}{2\tau_n^2}\right) \sin \tau_n + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_n}{r} - \frac{r}{\tau_n}\right) \cos \tau_n \right]. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (3.4) (см. раздел 3), из которого следует:

$$\sin \tau_n = 2 \frac{r\tau_n}{\tau_n^2 + r^2} \quad \text{и} \quad \cos \tau_n = \frac{\tau_n^2 - r^2}{\tau_n^2 + r^2},$$

получаем окончательно:

$$(П.3.5) \quad (D_T)'(p_n) = \frac{\alpha l^2}{a(\tau_n^2 + r^2)} \left[1 + 2r + \left(\frac{r}{\tau_n} \right)^2 + \frac{(\tau_n^2 - r^2)^2}{2r\tau_n^2} \right].$$

Как нетрудно убедиться, значения функции $(D_T)'(p_n)$ монотонно убывают с ростом n и потому превышают ее значение при $n = \infty$, т.е. величину $\frac{\alpha l^2}{2ar}$.

5. Вычисление выражений для коэффициентов d_k и f_k начинаем с вычисления $\text{res}_{i\omega_k} \Psi_1$.

Поскольку для σ (см. пояснения к (5.3)) имеет место выражение

$$\sigma'(i\omega_k) = \frac{l}{c} \cos\left(\frac{l}{c}\omega_k\right) = \frac{l}{c}(-1)^k,$$

получаем:

$$(П.3.6) \quad \text{res}_{i\omega_k} \Psi_1 = \frac{(-1)^k c^2}{(ia\omega_k - c^2) l D_T(\zeta_k)} \left[\cos\left(\frac{x}{l}k\pi\right) - A_c(\zeta_k) \cos\left(\frac{l-x}{l}k\pi\right) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_k = \zeta(i\omega_k) &= l \sqrt{i \frac{\omega_k}{a}} = y_k (1 + i), \quad y_k = \sqrt{\frac{k\pi cl}{2a}}, \\ A_c(\zeta_k) &= h_{cck} + \frac{r}{2y_k} (h_{csk} + h_{sck}) + i \left[h_{ssk} + \frac{r}{2y_k} (h_{csk} - h_{sck}) \right], \\ D_T(\zeta_k) &= \alpha \left\{ 2h_{cck} + \frac{y_k}{r} (h_{sck} - h_{csk}) + \frac{r}{2y_k} (h_{csk} + h_{sck}) + \right. \\ &\quad \left. + i \left[2h_{ssk} + \frac{y_k}{r} (h_{sck} + h_{csk}) + \frac{r}{2y_k} (h_{csk} - h_{sck}) \right] \right\}, \\ h_{cck} &= \cosh y_k \cos y_k, \quad h_{csk} = \cosh y_k \sin y_k, \\ h_{sck} &= \sinh y_k \cos y_k, \quad h_{ssk} = \sinh y_k \sin y_k. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем выражения для d_k и f_k (см. пояснения к (П.2.12)) в виде

$$(П.3.7) \quad \begin{aligned} d_k &= 2(-1)^k \frac{c^2}{l} \frac{I_k G_{fk} - R_k G_{dk}}{G_{dk}^2 + G_{fk}^2} = \\ &= 2(-1)^k l \frac{F_{dk} \cos\left(k\pi \left(l - \frac{x}{l}\right)\right) - G_{dk} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right) |D_T(\zeta_k)|^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II.3.8) \quad f_k &= 2(-1)^k \frac{c^2 R_k G_{fk} - I_k G_{dk}}{l G_{dk}^2 + G_{fk}^2} = \\
&= 2(-1)^k l \frac{G_{fk} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - F_{fk} \cos\left(k\pi\left(l - \frac{x}{l}\right)\right)^2}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right) |D_T(\zeta_k)|},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_k &= \cos\left(k\pi \frac{x}{l}\right) - \operatorname{Re} A_c(\zeta_k) \cos\left(k\pi \frac{l-x}{l}\right), \quad I_k = \operatorname{Im} A_c(\zeta_k) \cos\left(k\pi \frac{l-x}{l}\right), \\
G_{dk} &= k\pi \frac{ac}{l} \operatorname{Im} D_T(\zeta_k) + c^2 \operatorname{Re} D_T(\zeta_k), \quad G_{fk} = k\pi \frac{ac}{l} \operatorname{Re} D_T(\zeta_k) - c^2 \operatorname{Im} D_T(\zeta_k), \\
F_{dk} &= G_{dk} \operatorname{Re} A_c(\zeta_k) + G_{fk} \operatorname{Im} A_c(\zeta_k), \quad F_{fk} = G_{dk} \operatorname{Im} A_c(\zeta_k) + G_{fk} \operatorname{Re} A_c(\zeta_k).
\end{aligned}$$

(Здесь использовано соотношение

$$G_{dk}^2 + G_{fk}^2 = c^2 \left(\left(\frac{a}{l} k\pi \right)^2 + c^2 \right) |D_T(\zeta_k)|^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

1. Оценка нормы оператора $d^{-1}: (\mathbf{QL}_1)_y \rightarrow \mathbf{Q}_y$.

Если $f \in (\mathbf{QL}_1)_y$, то функция $d^{-1}f$ ограничена, т.е. входит в пространство \mathbf{Q}_y , и норма ее в этом пространстве не превышает $\int_0^\infty |f(t)| dt$. Поэтому норма d^{-1} как оператора $(\mathbf{QL}_1)_y \rightarrow \mathbf{Q}_y$ не превышает числа ϑ_1 .

2. Оценка нормы оператора B_ψ .

Мажорируя в (II.2.16) при $\tau_n \geq \tau_0$ функцию $\rho(\tau_n) = \sqrt{\tau_n^2 + r^2}$ линейной функцией от τ_n вида $v(\tau_n) = \tau_n - \tau_0 + \rho(\tau_0) = \tau_n + \frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, можем оценить сверху сумму ряда $R_\psi(t)$ (см. II.2) в пространстве L_{1y} суммой числового ряда

$$\begin{aligned}
(II.4.1) \quad M_\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\psi_n}{p_n} \right| \leq 2 \frac{rl^2}{\propto a^2 \tau_n^4} \left[hc + \left(\frac{a}{l} + \frac{hc}{\tau_n} \right) v(\tau_n) \right] = \\
&= 2 \frac{rl}{\propto a \tau_n^3} \left(1 + \sum_{j=1}^2 \frac{s_j}{\tau_n^j} \right),
\end{aligned}$$

где $s_1 = 2h \frac{cl}{a} + \frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, $s_2 = h \frac{cl}{a} \frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, h – см. пояснения к (II.2.15).

Используя формулу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (см. [15, п. 1.1.3.1, формула (16)]) и неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} \leq 1 + \int_1^j \frac{1}{\xi^j} = \frac{j}{j-1} \quad (j \geq 2),$$

получаем оценку сверху для M_ψ :

$$(П.4.2) \quad M_B = 2 \frac{rl}{\alpha a} \left[\frac{1}{\tau_0^3} + \frac{3}{2\tau^3} + h_1 \left(\frac{1}{\tau_0^4} + \frac{1}{90} \right) + h_2 \left(\frac{1}{\tau_0^5} + \frac{5}{4\tau^5} \right) \right],$$

где $h_1 = 2 \frac{chl}{a} + \frac{r^2}{\tau_0 + \rho}$, $h_2 = \frac{chl}{a} \frac{r^2}{\tau_0 + \rho}$, $h = \coth \left(\frac{a}{cl} \tau_0^2 \right)$, $\rho = \sqrt{r^2 + \tau_0^2}$, τ_0 – см. раздел 4.

Величина M_B служит оценкой сверху для нормы оператора B_Ψ .

3. Оценка нормы оператора $\Omega_\Psi: \mathbf{L}_{1y} \rightarrow \mathbf{Q}_y$.

Выход оператора Ω_Ψ при входном воздействии u определяется сверткой (см. [16, гл. 1, § 4, п. 7]) функций u и w (Ω_Ψ) – импульсной переходной функции оператора Ω_Ψ :

$$(П.4.3) \quad \Omega_\Psi(u)(t) = \int_0^t w(\Omega_\Psi)(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Из (П.4.3) следует: если функция $w(\Omega_\Psi)$ входит в пространство \mathbf{Q}_y , а функция u входит в пространство \mathbf{L}_{1y} , то выход оператора Ω_Ψ входит в пространство \mathbf{Q}_y , и норма его в этом пространстве не превышает величины $\|w(\Omega_\Psi)\|_{\mathbf{Q}_y} \|u\|_{\mathbf{L}_{1y}}$.

Покажем, что функция $w(\Omega_\Psi)$ входит в пространство \mathbf{L}_{1y} , и оценим ее норму в этом пространстве исходя из выражения $w(\Omega_\Psi)(t) = s(t) \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos \omega_k t + f_k \sin \omega_k t)$ (см. формулировку теоремы 3).

Каждое слагаемое правой части этого выражения может быть представлено в виде $M_k \sin(\omega_k t + \chi_k)$, где $M_k = \sqrt{d_k^2 + f_k^2}$, $\sin \chi_k = \frac{d_k}{M_k}$, $\cos \chi_k = \frac{f_k}{M_k}$. Следовательно, это слагаемое входит в пространство \mathbf{Q}_y и имеет в нем норму, равную M_k .

Из представлений (П.3.7) и (П.3.8) для d_k и f_k соответственно следует:

$$(П.4.4) \quad M_k = 2 \frac{c^2}{l (G_{dk}^2 + G_{fk}^2)} \sqrt{(R_k G_{dk} + I_k G_{fk})^2 + (I_k G_{dk} - R_k G_{fk})^2} = \\ = 2 \frac{c^2}{l} \sqrt{\frac{R_k^2 + I_k^2}{G_{dk}^2 + G_{fk}^2}} = 2 \frac{cv_k}{|D_T(\zeta_k)| \sqrt{(ak\pi)^2 + (cl)^2}},$$

где

$$v_k = \sqrt{\cos^2 \left(k\pi \frac{x}{l} \right) + |A_c(\zeta_k)|^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{l-x}{l} \right) - 2 \operatorname{Re} A_c(\zeta_k) \cos \left(k\pi \frac{x}{l} \right) \cos \left(k\pi \frac{l-x}{l} \right)}.$$

Величина v_k оценивается сверху величиной

$$\rho_k = \sqrt{1 + |A_c(\zeta_k)|^2 + 2 |\operatorname{Re} A_c(\zeta_k)|}.$$

Для оценки сверху величины M_k выпишем выражение для $|D_T(\zeta_k)|^2$, используя пояснения к (П.3.6):

$$\begin{aligned}
 (\text{П.4.5}) \quad |D_T(\zeta_k)|^2 &= \alpha^2 \left\{ 4(h_{cck}^2 + h_{ssk}^2) + \left(2\frac{y_k^2}{r^2} + \frac{r^2}{2y_k^2}\right)(h_{csk}^2 + h_{sck}^2) + \right. \\
 &\quad + 4\frac{y_k}{r}[h_{cck}(h_{sck} - h_{csk}) + h_{ssk}(h_{csk} + h_{sck})] + \\
 &\quad \left. + 2\frac{r}{y_k}[h_{cck}(h_{csk} + h_{sck}) + h_{ssk}(h_{csk} - h_{sck})] \right\} = \\
 &= \alpha^2 \left[4(\cosh^2 y_k \cos^2 y_k + \sinh^2 y_k \sin^2 y_k) + \right. \\
 &\quad + \left(2\frac{y_k^2}{r^2} + \frac{r^2}{2y_k^2}\right)(\cosh^2 y_k \sin^2 y_k + \sinh^2 y_k \cos^2 y_k) + \\
 &\quad \left. + 2\frac{y_k}{r}(\sinh 2y_k - \sin 2y_k) + \frac{r}{y_k}(\sinh 2y_k + \sin 2y_k) \right].
 \end{aligned}$$

Так как $\sinh 2y_k > 2y_k > \sin 2y_k$, правая часть (П.4.5) положительна и может быть оценена снизу функцией

$$\begin{aligned}
 (\text{П.4.6}) \quad \alpha^2 \left[\left(4 + 2\left(\frac{y_k}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right) \sinh^2 y_k + \right. \\
 \left. + \left(2\frac{y_k}{r} + \frac{r}{y_k}\right) (\sinh 2y_k - |\sin 2y_k|) \right].
 \end{aligned}$$

Удерживая в (П.4.6) лишь слагаемое с наибольшей скоростью роста по k , получаем оценку снизу для функции $|D_T(\zeta_k)|$:

$$(\text{П.4.7}) \quad |D_T(\zeta_k)| \geq \sqrt{2} \alpha \frac{y_k}{r} \sinh y_k = \frac{\alpha}{r} \sqrt{k\pi \frac{cl}{a}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k\pi cl}{2a}} \right).$$

Функция же $|A_c(\zeta_k)|^2$ представляется в виде

$$\begin{aligned}
 |A_c(\zeta_k)|^2 &= h_{cck}^2 + h_{ssk}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2 (h_{csk}^2 + h_{sck}^2) + \\
 &\quad + \frac{r}{y_k} [h_{cck}(h_{csk} + h_{sck}) + h_{ssk}(h_{csk} - h_{sck})]
 \end{aligned}$$

и оценивается сверху функцией

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right) \cosh^2 y_k + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k} (\sinh 2y_k - \sin 2y_k) &\leq \\
 \leq \left(1 + \frac{r}{y_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right) \cosh^2 y_k + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k},
 \end{aligned}$$

а функция $|\operatorname{Re} A_c(\zeta_k)| = \left| h_{cck} + \frac{1}{2} \frac{r}{y_k} (h_{cck} + h_{sck}) \right|$ оценивается сверху функцией $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{y_k}\right) \cosh y_k$.

Таким образом, величина M_k оценивается сверху следующим образом:

$$(П.4.8) \quad M_k \leq 2 \frac{c\rho_k}{k\pi a |D_T(\zeta_k)|} \leq 2 \frac{r\mu_k}{\infty (k\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{c}{al}},$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{\rho_k}{\sinh y_k} = \\ &= \coth y_k \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{y_k}\right)^2 + \frac{r}{y_k} + \left(2 + \sqrt{2} \frac{r}{y_k}\right) \frac{1}{\cosh y_k} + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{y_k}\right) \frac{1}{\cosh^2 y_k}} \end{aligned}$$

(μ_k – убывающая функция k , стремящаяся к 1 при $k \rightarrow \infty$).

Норма функции $w(\Omega_\Psi)$ в пространстве \mathbf{Q}_Ψ оценивается суммой числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$.

С учетом оценки сверху суммы числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ величиной $1 + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$, равной 3, из (П.4.8) получаем: $\|w(\Omega_\Psi)\|_{\mathbf{Q}_\Psi}$ оценивается сверху величиной $M_\Omega = 6 \frac{r\mu_1}{\alpha\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{c}{al}}$. Если функция u входит в пространство \mathbf{L}_{1y} , то в силу (П.4.3)

$$(П.4.9) \quad \|\Omega_\Psi(u)\|_{\mathbf{Q}_\Psi} \leq M_\Omega \|u\|_{\mathbf{L}_{1y}}.$$

Следовательно, норма оператора $\Omega_\Psi: (\mathbf{QL}_1)_y \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$ не превышает отношения $M_\Omega \frac{\|u\|_{\mathbf{L}_{1y}}}{\|u\|_{(\mathbf{QL}_1)_y}}$, т.е. величины $\vartheta_1 M_\Omega$ (см. раздел 5).

Таким образом, норма V_Ψ как оператора $(\mathbf{QL}_1)_y \rightarrow \mathbf{Q}_\Psi$ может быть оценена сверху величиной $M_B + \vartheta_1 (b_0 + M_\Omega)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Доказательство теоремы 4.

Представление (6.4) для оператора V_M следует из (5.3) и (5.4). В силу коммутирования сверточных операторов [16, гл. 1, § 4, п. 7] d^{-1} и V_Ψ имеем:

$$(П.5.1) \quad d^{-1}(V_\Psi(u)) = V_\Psi(d^{-1}(u)).$$

Поэтому, если $u \in \mathbf{U}$ (см. раздел 6), то его первообразная $d^{-1}u$ входит в $(\mathbf{QL}_1)_y$, и функция $d^{-1}(V_\Psi(u))$ входит в пространство \mathbf{Q}_Ψ (см. конец раздела 5).

Таким образом, в силу (6.4) оператор V_M отображает пространство \mathbf{U} в \mathbf{Q}_M (см. раздел 6), и норма его, вычисляемая как

$$\sup_{u \in \mathbf{U}} \left(\beta \frac{\|d^{-1}(V_\Psi(u))\|_{\mathbf{Q}_\Psi}}{\|u\|_{\mathbf{U}}} \right) = \beta \sup_{u \in \mathbf{U}} \left(\frac{\|V_\Psi(d^{-1}(u))\|_{\mathbf{Q}_\Psi}}{\max \left(\|u\|_{(\mathbf{QL}_1)_y}, \vartheta_2^{-1} \|d^{-1}(u)\|_{(\mathbf{QL}_1)_y} \right)} \right),$$

оценивается сверху величиной $\beta \vartheta_2 [M_B + \vartheta_1 (b_0 + M_\Omega)]$.

Доказательство теоремы 5.

При выполнении условий (7.3) и (7.5) в силу линейности оператора V получаем выполнение неравенства (7.2) с единой для всех $y \in \mathbf{Q}$ и $f \in F$ константой $L_X = L_F \|V\|$, строго меньшей 1. Поэтому отображение $X_f = V \circ F$ является сжимающим и потому имеет неподвижную точку; это и означает существование и единственность решения системы ((2.1)–(2.3), (7.1)) при каждом $f \in F$, т.е. существование оператора $A : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Q}_2$, переводящего внешнее воздействие f в решение этой системы относительно y . Оценку сверху нормы этого оператора можно получить из (7.3) и (7.4): при $y = A(f)$ имеют место соотношения

$$(П.6.1) \quad \|y\|_{\mathbf{Q}_2} = \|X_f(y)\|_{\mathbf{Q}_2} \leq \|X_f(y) - X_f(0)\|_{\mathbf{Q}_2} + \|X_f(0)\|_{\mathbf{Q}_2} \leq L_X \|y\|_{\mathbf{Q}_2} + K \|V\| \cdot \|f\|_{\mathbf{F}},$$

а так как $L_X < 1$, получаем:

$$(П.6.2) \quad \frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}} \leq \frac{K}{1 - L_X}.$$

Автор благодарен Л.А. Черемушкиной за творческую помощь в выполнении работы, в частности, за подбор литературы по явлению термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1964.
2. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. Nayfeh A.H., Nemat-Nasser S. Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation // Acta Mechanica. 1971. V. 12. P. 53–69.
4. Новацкий В. Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
Novacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
5. Jordan P.M., Puri P. On the propagation of plane waves in type – P11 thermoelastic media // Proc. Royal Soc. Lond. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
6. Роговой А.А., Столбова О.С. Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
7. Бабенков М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
8. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Наука, 2013.
9. Торсукова Е.Б., Христинич Д.В. Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вестник Тулгу. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016. Вып. 1. С. 88–92.
10. Солнечный Э.М. Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределенным объектом // АиТ. 2006. № 4. С. 53–85.

11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002.
12. *Солнечный Э.М.* О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям // *АиТ.* 2002. № 9. С. 15–26.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
14. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Перевод с немецкого. М.: Наука, 1978.
Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differenzialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
15. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Совм. изд. Лейпциг: Тойбнер; М.: Наука, 1981.
16. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 04.11.2018

После доработки 22.08.2020

Принята к публикации 15.01.2021

© 2021 г. М. ВАЙЧЮЛИС, канд. физ.-мат наук (marijus.vaiculis@mif.vu.lt)
(Институт науки данных и цифровых технологий Вильнюсского университета,
Вильнюс, Литва),

Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ В СУЖЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПАРЕТО¹

Статья посвящена задаче оценивания параметров суженного распределения Парето. Методом моментов получены новые оценки, зависящие от дополнительного параметра. Доказано, что совместное асимптотическое распределение полученных оценок является гауссовским. Предложена процедура, позволяющая выбрать дополнительный параметр оптимально. Проводится сравнение новых оценок с соответствующими оценками максимального правдоподобия. В качестве примера приведено применение новых оценок к данным заболеваемости КОВИД-19. Предлагается новый алгоритм генератора случайных величин с суженным распределением Парето.

Ключевые слова: суженное распределение Парето, оценивание параметров, оценки методом моментов, оценки максимального правдоподобия, заболеваемость Ковид-19.

DOI: 10.31857/S0005231021080043

1. Введение

Случайная величина (сл.в.) X называется распределенной по (экспоненциально) суженному распределению Парето, если она имеет кумулятивную функцию распределения (ф.р.)

$$(1) \quad F_{a,\beta,\theta}(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\beta \exp\left\{\frac{a-x}{\theta}\right\}, \quad x \geq a,$$

где $a > 0$ – минимальное значение сл.в. X , $\beta > 0$ – параметр формы и $\theta \geq a$ – параметр верхнего среза. Плотность распределения вероятностей этого распределения имеет вид

$$f_{a,\beta,\theta}(x) = \left(\frac{\beta}{x} + \frac{1}{\theta}\right) \left(\frac{a}{x}\right)^\beta \exp\left\{\frac{a-x}{\theta}\right\}, \quad x \geq a.$$

Суженное распределение Парето, также известное как модифицированное распределение Гутенберга–Рихера, было впервые предложено В. Парето в [1]. В [2] было отмечено следующее свойство суженного распределения Парето. Пусть сл.в. χ_1 имеет распределение Парето с ф.р. $F_{a,\beta}(x) = 1 - (a/x)^\beta$,

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке второго автора грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00090.

$x \geq a$, а χ_2 – сл.в., имеющая экспоненциальное распределение с ф.р. $F_\theta(x) = 1 - \exp\{-x/\theta\}$, $x \geq 0$, причем χ_1 и χ_2 – независимые сл.в. Тогда сл.в.

$$(2) \quad X = \min\{\chi_1, \chi_2 + a\}$$

имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$. Этот факт используется при моделировании суженного распределения Парето, см. [2–4].

Следующее определение основано на нарушении условия Крамера для распределений с тяжелыми хвостами.

Определение 1 [5]. Ф.р. F называется имеющей тяжелый хвост (справа), если

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} F(dx) = \infty$$

для всех $t > 0$. Если F не удовлетворяет условию (3), то называется имеющей легкий хвост.

Например, ф.р. Парето $F_{a,\beta}(x)$, $x \geq a$ имеет тяжелый хвост, а ф.р. экспоненциального закона – легкий хвост. Ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$ имеет легкий хвост. Действительно, в этом случае для $0 < t < 1/\theta$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{tX} &= \frac{e^{at}}{a(1-t\theta)} + \beta \left(1 - \frac{1}{a(1-t\theta)}\right) \left(\frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right)^\beta \times \\ &\times \exp\left\{at + \frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right\} \Gamma\left(-\beta, \frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(-\beta, x) = \int_x^\infty t^{-\beta-1} e^{-t} dt$ – неполная гамма-функция. Здесь и далее \mathbb{E} обозначает математическое ожидание. Напомним, что при $x > 0$ последний интеграл сходится для всех вещественных β .

Суженное распределение Парето используется для моделирования магнитуды землетрясений в сейсмологии [3, 4], а также размеров лесных пожаров [6, 7]. В [8] было найдено, что суженное распределение Парето хорошо описывает размеры деревьев. В [9] поддерживается идея, что финансовые данные следуют этому распределению, см. [9]. В настоящей работе, по видимому впервые, суженное распределение Парето применяется к данным КОВИД-19, относящимся к разным странам.

Обозначим через (X_1, \dots, X_n) случайную выборку, где X_1, \dots, X_n – независимые копии сл.в. X с ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$.

Оценки максимального правдоподобия (МП) $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ параметров β и $\lambda = a/\theta$ являются решением следующих уравнений:

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \hat{\lambda}_n^{(1)} \left((\bar{X}_n / \hat{a}_n) - 1 - \hat{b}_n(X_i / \hat{a}_n) \right)} = 1,$$

$$\hat{b}_n \hat{\beta}_n^{(1)} + \left(\frac{\bar{X}_n}{\hat{a}_n} - 1 \right) \hat{\lambda}_n^{(1)} = 1,$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{a}_n &= \min\{X_1, \dots, X_n\}, \\ \hat{b}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right), \\ \bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \end{aligned}$$

Нелинейное уравнение (4) может быть решено только численно. Это можно сделать, например, методом Ньютона-Рафсона с начальной точкой $\bar{X}_n - \hat{a}_n$, см. [2, 4].

Обозначим

$$\begin{aligned} s_{11}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{\chi^2}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \\ s_{22}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \\ s_{12}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{\chi}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \end{aligned}$$

где сл.в. χ имеет ф.р. $F_{1,\beta,1/\lambda}$. В следующей теореме собраны известные результаты о совместной асимптотической нормальности $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$. В частности, случай, когда a известно, обсуждался в [3]. В случае неизвестного a приведенный далее результат является прямым следствием теоремы 2.4.(б) и леммы 2.6.(а) в [9].

Теорема 1. Предположим, что (X_1, \dots, X_n) – выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$. Предположим, что параметр a известен или оценивается по формуле (5). Тогда

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_n^{(1)} - \beta, \hat{\lambda}_n^{(1)} - \lambda \right) \xrightarrow{d} (\xi_1, \xi_2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где \xrightarrow{d} обозначает сходимость по распределению. Здесь (ξ_1, ξ_2) – гауссовский вектор с $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = 0$, $\mathbb{E}(\xi_1^2) = S_1^2(\beta, \lambda)$, $\mathbb{E}(\xi_2^2) = S_2^2(\beta, \lambda)$ и $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = S_{12}(\beta, \lambda)$, где

$$\begin{aligned} S_1^2(\beta, \lambda) &= \frac{s_{11}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}, \\ S_2^2(\beta, \lambda) &= \frac{s_{22}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}, \\ S_{12}(\beta, \lambda) &= -\frac{s_{12}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}. \end{aligned}$$

Оценки МП $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ имеют несколько недостатков. Во-первых, как отмечено выше, решение уравнения (4) может быть получено лишь численно.

Более того, оно в основном зависит лишь от нескольких самых больших наблюдений выборки, см. [4]. Во-вторых, в статистической практике часто используются усеченные слева выборки, а для таких выборок оценка МП для параметра $\theta = a/\lambda$ является существенно смещенной, см. подробнее [4]. Поэтому нужны оценки параметров β и λ , построенные другими методами.

Целью работы являются предложение новых оценок параметров суженного распределения Парето, их теоретическое исследование и применение этого распределения для моделирования данных заболеваемости КОВИД-19.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 вводятся оценки параметров β и λ суженного распределения Парето с помощью метода моментов. Приводится главный результат, в котором утверждается, что предлагаемые оценки для β и λ имеют совместное асимптотически нормальное распределение. В разделе 3 обсуждается моделирование сл.в. с суженным распределением Парето. В разделе 4 нововведенные оценки сравниваются с оценками, полученными методом МП. Раздел 5 содержит приложение к данным заболеваемости КОВИД-19. В разделе 6 сформулированы выводы. Доказательства содержатся в Приложении.

2. Оценивание параметров суженного распределения Парето методом моментов

Напомним, что однопараметрическое преобразование Бокса-Кокса с параметром $r \in \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$h_r(x) = \begin{cases} \ln(x), & r = 0, \\ (x^r - 1)/r, & r \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$(6) \quad \nu_r = \mathbb{E}(h_r(X/a)),$$

где X – сл.в. с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$. Нетрудно убедиться, что

$$(7) \quad \nu_r = \lambda^{\beta-r} e^\lambda \Gamma(r - \beta, \lambda), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Неполная гамма-функция удовлетворяет свойству

$$(8) \quad \Gamma(r - \beta + 1, \lambda) = \lambda^{r-\beta} e^{-\lambda} + (r - \beta) \Gamma(r - \beta, \lambda),$$

см., например, [10]. Комбинируя (7) и (8), получим

$$(9) \quad \Lambda_r(\beta, \lambda) = 0,$$

где $\Lambda_r(\beta, \lambda) = \lambda \nu_{r+1} - (r - \beta) \nu_r - 1$. Система уравнений $\Lambda_r(\beta, \lambda) = 0$, $\Lambda_{r+1}(\beta, \lambda) = 0$ может быть представлена как

$$\begin{cases} \lambda \nu_{r+1} + \beta \nu_r = 1 + r \nu_r, \\ \lambda \nu_{r+2} + \beta \nu_{r+1} = 1 + (1 + r) \nu_{r+1}. \end{cases}$$

По теореме 4 из [11] неравенство $\nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} < 0$ выполнено для всех $r \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ и $\lambda > 0$. Поэтому последняя система уравнений относительно β и λ имеет единственное решение

$$(10) \quad \beta = r - \frac{g^{(1)}(\nu_{r+1}, \nu_{r+2})}{g^{(3)}(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})}, \quad \lambda = \frac{g^{(2)}(\nu_r, \nu_{r+1})}{g^{(3)}(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})},$$

где

$$(11) \quad g^{(1)}(x_2, x_3) = x_2 - x_3 + x_2^2,$$

$$(12) \quad g^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + x_1 x_2,$$

$$(13) \quad g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_2^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Заменив ν_r , ν_{r+1} , ν_{r+2} в (10) их выборочными аналогами $\hat{\nu}_{n,r}$, $\hat{\nu}_{n,r+1}$, $\hat{\nu}_{n,r+2}$, где

$$\hat{\nu}_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_r \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right),$$

а (X_1, \dots, X_n) – случайная выборка с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$, введем новое семейство оценок для пары параметров (β, λ) :

$$(14) \quad \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} = r - \frac{g^{(1)}(\hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})}{g^{(3)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})},$$

$$(15) \quad \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} = \frac{g^{(2)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1})}{g^{(3)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})}.$$

Предложенные оценки $\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}$ зависят от параметра Бокса–Кокса r . Оптимальный выбор этого параметра получен в разделе 4.

Перед формулировкой главного результата введем обозначения:

$$c_{0,r} = \lambda \nu_{r+3} - 2\nu_{r+2} - 1, \quad c_{1,r} = 1 - 2\lambda \nu_{r+2}, \quad c_{2,r} := \lambda \nu_{r+1}, \\ c_{3,r} = -\lambda \nu_{r+2} + \nu_{r+1} + 1, \quad c_{4,r} = 2\lambda \nu_{r+1} + \nu_r - 1, \quad c_{5,r} = -\lambda \nu_r.$$

Пусть Y_t , $t \in \mathbb{R}$ – гауссовский процесс со средним 0 и ковариационной функцией

$$(16) \quad \rho_{s,t} = \mathbb{E}(Y_s Y_t) = \text{Cov}(h_s(\chi), h_t(\chi)),$$

где сл.в. χ та же, что и в теореме 1. В случае $st \neq 0$ ковариации $\rho_{s,t}$ могут быть представлены следующим образом:

$$(17) \quad \rho_{s,t} = \frac{\nu_{s+t} - \nu_t}{s} + \frac{\nu_{s+t} - \nu_s}{t} - \nu_s \nu_t.$$

Ковариации $\rho_{0,t}$, $t \in \mathbb{R}$ могут быть выражены в терминах G -функции Мейера (см. определение в [12]).

Теорема 2. Предположим, что X_1, \dots, X_n – случайная выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(18) \quad \sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)} - \beta, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} - \lambda \right) \xrightarrow{d} (\eta_{1,r}, \eta_{2,r}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$ – гауссовский вектор со средними ноль, дисперсиями $\mathbb{E}(\eta_{1,r}^2) = \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda)$, $\mathbb{E}(\eta_{2,r}^2) = \sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda)$ и ковариацией $\mathbb{E}(\eta_{1,r}\eta_{2,r}) = \sigma_{12,r}(\beta, \lambda)$, где

$$(19) \quad \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda) = \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i,r} c_{j,r} \rho_{r+i,r+j},$$

$$(20) \quad \sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda) = \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i+3,r} c_{j+3,r} \rho_{r+i,r+j},$$

$$(21) \quad \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) := \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i,r} c_{j+3,r} \rho_{r+i,r+j}.$$

Если параметр a известен, то может быть применена очевидная модификация оценок $\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}$, для которых соотношение (18) остается верным.

Рассмотрим оценивание параметра срезки θ , когда другие параметры a и β известны. Комбинируя $\theta = a/\lambda$ и (9), получим

$$\theta = \frac{a\nu_{r+1}}{1 + (r - \beta)\nu_r}.$$

Заменяя ν_r и ν_{r+1} на $\hat{\nu}_{n,r}$ и $\hat{\nu}_{n,r+1}$ соответственно, получаем оценку

$$\hat{\theta}_{n,r} = \frac{a\hat{\nu}_{n,r+1}}{1 + (r - \beta)\hat{\nu}_{n,r}}.$$

Заметим, что оценка $\hat{\theta}_{n,r}$ совпадает с оценкой параметра θ , введенной в [4]. Обобщим теорему 1 из [4].

Теорема 3. Предположим, что X_1, \dots, X_n – случайная выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,\theta}$, где a и β – известные параметры. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(22) \quad \sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{n,r} - \theta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_r^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$(23) \quad \sigma_r^2 = \frac{\theta^2}{\nu_{r+1}^2} \left(\left(\frac{\theta(r - \beta)}{a} \right)^2 \rho_{r,r} + \frac{2\theta(r - \beta)}{a} \rho_{r,r+1} + \rho_{r+1,r+1} \right),$$

а $\rho_{s,r}$ определено по (16).

3. Моделирование случайных величин с суженным распределением Парето

Для моделирования сл.в. с непрерывной ф.р. в ряде случаев можно использовать метод обратной функции: если F непрерывная и строго монотонно возрастающая ф.р., а F^{\leftarrow} – обратная к ней функция, то сл.в. $F^{\leftarrow}(U)$, где U равномерно распределенная на $(0, 1)$ сл.в., имеет ф.р. F , см. теорему 2.1 в [13]. Например, сл.в. $F_{a,\beta}^{\leftarrow}(U)$, где $F_{a,\beta}^{\leftarrow}(y) = a(1-y)^{-1/\beta}$, $0 < y < 1$, распределена по закону Парето $F_{a,\beta}(x)$, $x \geq a$, а сл.в. $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(U)$, где $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(y) = a - \theta \ln(1-y)$, $0 < y < 1$, имеет ф.р. $\tilde{F}_{a,\theta}(x) = F_{\theta}(x-a)$, $x \geq a$.

В [2] отмечено, что сл.в. с суженным распределением Парето и заданными параметрами a, β, θ можно смоделировать, взяв за основу (2). А именно, сл.в.

$$\min \left\{ F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U_1), \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U_2) \right\}$$

имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, где U_1 и U_2 – независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ сл.в. Неверное применение этого метода содержится в [14], где утверждается, что сл.в.

$$V = \min \left\{ F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U), \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U) \right\},$$

где U – равномерно распределенная на $(0, 1)$ сл.в., имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$. Перед получением распределения сл.в. V напомним, что для $x \geq -1/e$ функция Ламберта $W(x)$ определена как решение уравнения

$$W(x) \exp\{W(x)\} = x.$$

Для $x - 1/e \leq x < 0$ существует два возможных вещественных значения функции $W(x)$ (см. рис. 1 в [15]). Обычно ветвь, удовлетворяющая $W(x) \geq -1$, обозначается как $W_0(x)$, а ветвь, удовлетворяющая $W(x) \leq -1$, – как $W_{-1}(x)$.

Предложение 1. Пусть $c = a/(\beta\theta)$. Если $c \geq 1$, то сл.в. V имеет ф.р. $\tilde{F}_{a,\theta}(x)$, $x \geq a$. Если $0 < c < 1$, то для $x \geq a$

$$(24) \quad P(V \leq x) = \begin{cases} F_{a,\beta}(x), & x < -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}), \\ \tilde{F}_{a,\theta}(x), & x \geq -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}). \end{cases}$$

Заметим, что ф.р. $P(V \leq x)$, $x \geq a$ может быть переписана следующим образом. Для любого $c > 0$

$$P(V \leq x) = \max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}, \quad x \geq a.$$

Очевидно, что $P(V > x) / (1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x)) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}$, $x \geq a$ можно рассматривать как еще один способ сужения распределения Парето экспоненциальным законом. В этой статье оценивание параметров ф.р. $\max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}$, $x \geq a$ рассматриваться не будет.

В [9] моделирование сл.в. с распределением суженное Парето осуществляется с помощью метода исключения. Подробно этот метод изложен в [13]. Заметим, что функция, обратная к ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$, выражается как

$$(25) \quad F_{a,\beta,\theta}^{\leftarrow}(y) = \frac{a}{c} W_0 \left(ce^c(1-y)^{-1/\beta} \right), \quad 0 < y < 1,$$

где c та же, что и в Предложении 1. Поэтому применение теоремы 2.1 из [13] позволяет моделировать сл.в. с распределением суженного Парето с помощью метода обратной функции.

Предложение 2. Если U – равномерно распределенная сл.в. на интервале $(0, 1)$, то $F_{a,\beta,\theta}^{\leftarrow}(1-U)$ имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}$.

4. Сравнение пар оценок параметров методом максимума правдоподобия

$$\left(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)} \right) \text{ и методом моментов } \left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right)$$

Напомним, что обобщенная дисперсия гауссовского вектора $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$, определенного в теореме 3, – это определитель его ковариационной матрицы:

$$(26) \quad \text{GV}_r(\beta, \lambda) = \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda)\sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda) - \sigma_{12,r}^2(\beta, \lambda).$$

Обобщенная дисперсия $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ характеризует степень случайного разброса. Выберем $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ в качестве асимптотической меры эффективности оценок $\left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right)$. $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ зависит от параметра Бокса–Кокса r . Естественно выбрать такое r , которое бы минимизировало $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$. Однако $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ имеет сложную форму, а именно, при $r + i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, 4$, имеем

$$(27) \quad \text{GV}_r(\beta, \lambda) = \frac{\lambda^2(d_{1,r}(\beta, \lambda) + d_{2,r}(\beta, \lambda)\Gamma(2r - \beta, \lambda) + d_{3,r}(\beta, \lambda)\Gamma^2(2r - \beta, \lambda))}{(\lambda^{2r} + d_{4,r}(\beta, \lambda)\Gamma(r - \beta, \lambda) + d_{5,r}(\beta, \lambda)\Gamma^2(r - \beta, \lambda))^2},$$

где

$$\begin{aligned} d_{1,r}(\beta, \lambda) &= -\lambda^{4r}(2\beta + 2\beta r + 2\lambda r - 2r - 1), \\ d_{2,r}(\beta, \lambda) &= -2e^\lambda \lambda^{\beta+2r}(-\beta^2 - \beta\lambda + 2\beta r^2 + 2\lambda r^2 \\ &\quad - 4r^2 - \beta^2 r - 2\beta\lambda r + 3\beta r - \lambda^2 r - 2r), \\ d_{3,r}(\beta, \lambda) &= e^{2\lambda} \lambda^{2\beta}(2r - \beta)(\beta + 4r^2 + 2r), \\ d_{4,r}(\beta, \lambda) &= -e^\lambda \lambda^{\beta+r}(\beta + \lambda - r + 1), \\ d_{5,r}(\beta, \lambda) &= -e^{2\lambda} \lambda^{2\beta}(r - \beta). \end{aligned}$$

Поэтому в статье ее минимизация по r произведена численно, с использованием метода главных осей. Точку глобального минимума r^* на \mathbb{R} будем называть оптимальным выбором параметра r . Контурный график (со значениями изолиний) r^* как функции от β и λ представлен на рис. 1.

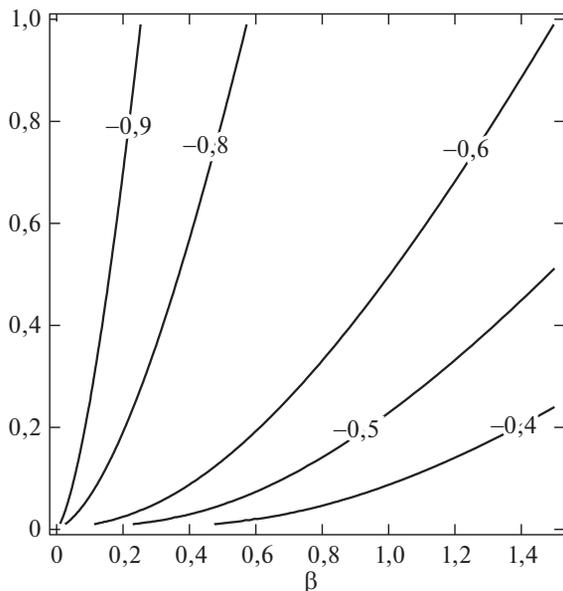


Рис. 1. Контурный график функции $r^*(\beta, \lambda)$.

Асимптотическую относительную эффективность (АОЭ) для $(\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)})$ в отношении $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ определим как отношение обобщенных дисперсий для гауссовских векторов $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$ и (ξ_1, ξ_2) , определенных в теоремах 2 и 1 соответственно:

$$\text{ARE}(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{1,r^*}^2(\beta, \lambda)\sigma_{2,r^*}^2(\beta, \lambda) - \sigma_{12,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_1^2(\beta, \lambda)S_2^2(\beta, \lambda) - S_{12}^2(\beta, \lambda)}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Аналогично определим АОЭ для $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}$ в отношении $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ в отношении $\hat{\lambda}_n^{(1)}$:

$$\text{ARE}_1(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{1,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_1^2(\beta, \lambda)}, \quad \text{ARE}_2(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{2,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_2^2(\beta, \lambda)}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Контурный график на рис. 2 (слева) показывает, что $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ близка к 1 почти во всем прямоугольнике $(\beta, \lambda) \in (0, 1, 5] \times (0, 1)$. Теоретическое доминирование оценок $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ более значимо в области, где величины λ малы. Это замечание справедливо для $\text{ARE}_i(\beta, \lambda)$, $i \in \{1, 2\}$, см. рис. 3 (слева) и рис. 4 (слева) соответственно.

Далее с помощью численного моделирования продемонстрируем качество работы предложенных оценок. Во время моделирования делается сравнение между оценками $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ и $(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)})$, используя выборки среднего и малого объема n из распределения (1). Во всем моделировании предполагается, что параметр $a = 1$ неизвестен и оценивается, используя \hat{a}_n .

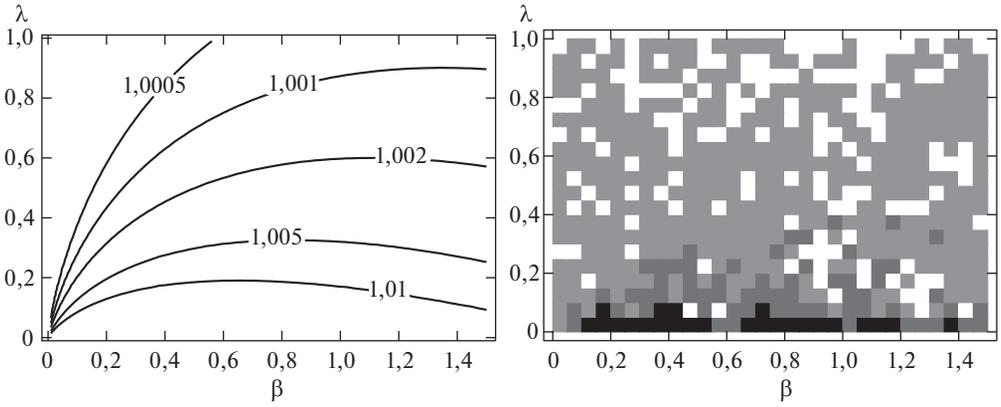


Рис. 2. Контурный график $ARE(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

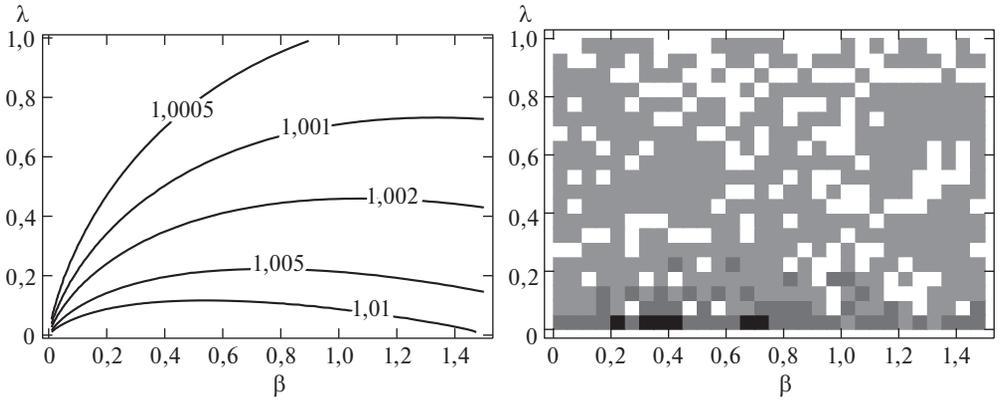


Рис. 3. Контурный график $ARE_1(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

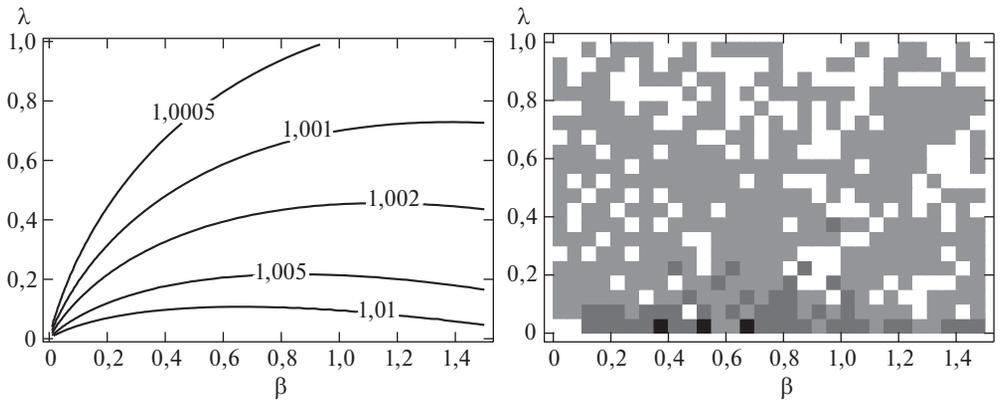


Рис. 4. Контурный график $ARE_2(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

Для практических целей, чтобы выбрать параметр r оптимально, достаточно минимизировать $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ (см. (27)) по параметру $r \in (-1, 0)$. Так как оптимальный выбор r^* зависит от неизвестных параметров β и λ , предлагается следующая итерационная процедура. Если выполнена k -я итерация оценивания оптимального выбора r^* , во время которой вычислено его приближение r_k^* , то $(k+1)$ -ю итерацию выполняем следующим образом:

- 1) вычислить оценки $\hat{\beta}_{n,r_k^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r_k^*}^{(2)}$ по формулам (14) и (15) соответственно;
- 2) вычислить $r_{k+1}^* = \text{argmin} \left\{ r \in (-1, 0) : \text{GV}_r \left(\hat{\beta}_{n,r_k^*}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r_k^*}^{(2)} \right) \right\}$ по формуле (27);
- 3) проверить критерий останова $|r_{k+1}^* - r_k^*| \leq \epsilon$, и если он не выполнен, то увеличить k на единицу и перейти к шагу 1.

После выполнения критерия останова, значение r_{k+1}^* принимается за r^* и соответственно принимается $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\beta}_{n,r_{k+1}^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\lambda}_{n,r_{k+1}^*}^{(2)}$. Чтобы избежать большого числа итераций, используется еще одно ограничение. А именно, если $|r_{k+1}^* - r_k^*| > \epsilon$ для всех $0 \leq k \leq 9$, то $r^* = r_{10}^*$, $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\beta}_{n,r_{10}^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\lambda}_{n,r_{10}^*}^{(2)}$. В моделировании использовалось начальное приближение $r_0^* = -1/2$ и точность $\epsilon = 0,001$. Заметим, что шаг 2 предлагаемой процедуры может быть выполнен комбинированием функций “Last” и “FindMinimum” в “Wolfram Mathematica 10”.

В первой части моделирования прямоугольник $(0, 3/2] \times (0, 1)$ разделяется на квадраты

$$s_{i,j} = \{(i/20, (i+1)/20] \times (j/20, (j+1)/20], 0 \leq i \leq 29, 0 \leq j \leq 19\}.$$

В качестве истинных значений параметров β и λ взяты координаты

$$\beta_{i,j} = \frac{2i+1}{40}, \quad \lambda_{i,j} = \frac{2j+1}{40}$$

центра квадрата $s_{i,j}$ и сгенерированы $N = 750$ реализаций случайной выборки из распределения (1) размером $n = 2500$ наблюдений.

Пусть $(\hat{\beta}_n^{(1,k)}, \hat{\lambda}_n^{(1,k)})$ и $(\hat{\beta}_n^{(2,k)}, \hat{\lambda}_n^{(2,k)}) = (\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2,k)}, \hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2,k)})$ обозначают оценки параметров (β, λ) , вычисленные по k -й реализации. Рассмотрим следующие эмпирические моменты:

$$m_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{\beta}_n^{(i,k)} \right)^j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

$$M_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{\lambda}_n^{(i,k)} \right)^j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\beta}_n^{(i,k)} \hat{\lambda}_n^{(i,k)}, \quad i = 1, 2.$$

Выборочные аналоги характеристик $\text{ARE}(\beta, \lambda)$, $\text{ARE}_1(\beta, \lambda)$ и $\text{ARE}_2(\beta, \lambda)$ имеют вид

$$\widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{(m_{2,2} - (m_{2,1})^2) (M_{2,2} - (M_{2,1})^2) - (\mu_2 - m_{2,1}M_{2,1})^2}{(m_{1,2} - (m_{1,1})^2) (M_{1,2} - (M_{1,1})^2) - (\mu_1 - m_{1,1}M_{1,1})^2},$$

$$\widehat{\text{ARE}}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{m_{2,2} - (m_{2,1})^2}{m_{1,2} - (m_{1,1})^2}, \quad \widehat{\text{ARE}}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{M_{2,2} - (M_{2,1})^2}{M_{1,2} - (M_{1,1})^2}.$$

График $\widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ представлен на рис. 2 (справа), где квадрат $s_{i,j}$ окрашен следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{черный,} & \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) \geq 1,03, \\ \text{темно-серый,} & 1,01 \leq \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1,03, \\ \text{серый,} & 1 \leq \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1,01, \\ \text{белый,} & \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1. \end{array} \right.$$

Та же цветовая схема используется для получения графиков $\widehat{\text{ARE}}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$ и $\widehat{\text{ARE}}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, см. рис. 3 (справа) и рис. 4 (справа) соответственно.

Вторая часть моделирования посвящена выборкам малого объема. Истинные значения (β, λ) выбраны следующими: $\beta_i = i/20$, $\lambda_i = c\beta_i$, $1 \leq i \leq 29$, где $c = 1/96, 1/24, 1/6$. Выборки из распределения $F_{1, \beta_i, 1/\lambda_i}$ объемом $n = 110$ смоделированы $N = 1500$ раз. Из каждой выборки $(X_1^{(k)}, \dots, X_{110}^{(k)})$, $1 \leq k \leq N$ сформированы три выборки объемом $n = 100$:

- а) неусеченная выборка $(X_1^{(k)}, \dots, X_{100}^{(k)})$;
- б) выборка с усеченными пятью наименьшими наблюдениями $(X_{6,105}^{(k)}, \dots, X_{105,105}^{(k)})$, где $X_{1,n}^{(k)} \leq \dots \leq X_{n,n}^{(k)}$ – вариационный ряд выборки $(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$;
- в) выборка с усеченными десятью наименьшими наблюдениями $(X_{11,110}^{(k)}, \dots, X_{110,110}^{(k)})$.

В качестве эффективности оценивания параметров для неусеченных выборок рассмотрены отношения средних квадратов отклонения от истинных значений параметров:

$$\psi_1(c, \beta_i) = \frac{m_{2,2} - 2\beta_i m_{2,1} + \beta_i^2}{m_{1,2} - 2\beta_i m_{1,1} + \beta_i^2},$$

$$\Psi_1(c, \beta_i) = \frac{M_{2,2} - 2c\beta_i M_{2,1} + c^2 \beta_i^2}{M_{1,2} - 2c\beta_i M_{1,1} + c^2 \beta_i^2}.$$

Пусть $\psi_2(c, \beta_i)$, $\psi_3(c, \beta_i)$ и $\Psi_2(c, \beta_i)$, $\Psi_3(c, \beta_i)$ обозначают аналоги эмпирических характеристик $\psi_1(c, \beta_i)$ и $\Psi_1(c, \beta_i)$, вычисленные по усеченным слева выборкам. Численные результаты представлены на рис. 5–7.

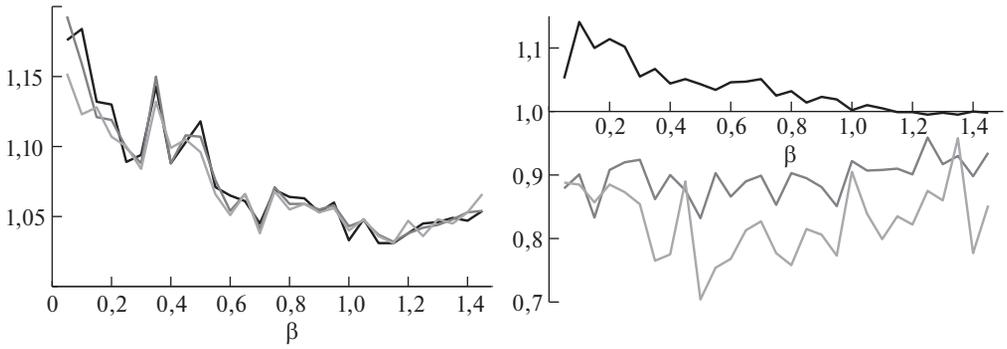


Рис. 5. Графики $\psi_j(1/96, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/96, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

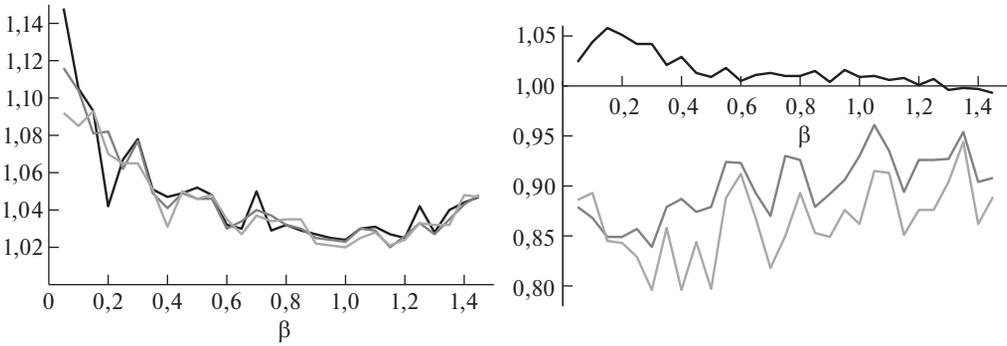


Рис. 6. Графики $\psi_j(1/24, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/24, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

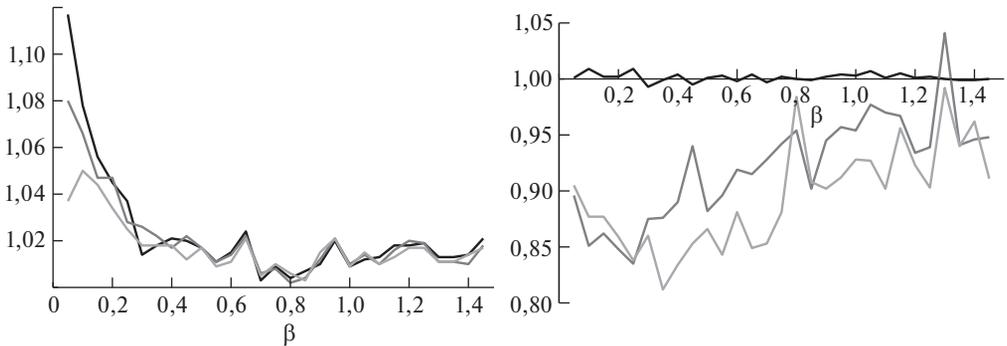


Рис. 7. Графики $\psi_j(1/6, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/6, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

На основе полученных результатов моделирования можно сделать следующие выводы.

- 1) Из сравнения контурного графика $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ и графика $\widehat{\text{ARE}}(s_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ на рис. 2 следует, что результаты моделирования на рис. 2 (справа) в целом соответствуют теоретическим результатам на рис. 2 (слева). Во-первых, значения $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ не превышают 1,01 в прямоугольнике $(\beta, \lambda) \in (0, 1,5] \times (0, 2, 1)$, и это отражено на графике $\widehat{\text{ARE}}(s_{i,j}, \lambda_{i,j})$. Более того, достаточное количество белых квадратов в прямоугольнике на рис. 2 (справа) $(\beta, \lambda) \in (0, 1,5] \times (0, 2, 1)$ указывает, что предложенные оценки $(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\theta}_{n,r}^{(2)})$ могут быть полезны для практических приложений. Во-вторых, результаты моделирования на рис. 2 (справа) достаточно хорошо отражают доминирование оценок МП при малых значениях λ . По существу, графики на рис. 3, 4 ничем не отличаются от графиков на рис. 2.
- 2) Поскольку $\psi_1(c, \beta_i) > 1$ для всех β_i , $1 \leq i \leq 29$ и $c = 1/96, 1/24, 1/6$, то оценка $\hat{\beta}_n^{(1)}$ доминирует над оценкой $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}$ во всех исследованных точках (β_i, λ_i) , $1 \leq i \leq 29$. Нужно отметить, что доминирование оценки $\hat{\beta}_n^{(1)}$ сохраняется при оценивании параметра β по усеченным слева выборкам, см. графики ломаных $\psi_j(c, \beta_i)$, $j = 2, 3$ на рис. 5–7 (слева). Усечение выборок не отражается на относительных статистиках $\psi_j(c, \beta_i)$, $j = 2, 3$, т.е. значения ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 при фиксированных c и β_i практически не различаются.
- 3) Сравнение оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при неусеченных выборках зависит от значения параметра c . При $c = 1/6$ ни одна из оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ не превосходит другой, см. график ломаной $\Psi_1(1/6, \beta_i)$, $1 \leq i \leq 29$ на рис. 7 (справа). При $\beta_i \in [1, 3/2)$ значения ломаной $\Psi_1(1/96, \beta_i)$ осциллируют вокруг единицы, но при $\beta_i \in (0, 1)$ оценка $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ имеет преимущество, см. рис. 5 (справа). Аналогичный вывод может быть сделан и в отношении оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при $c = 1/24$. При усечении наблюдении слева оценка $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ превосходит оценку $\hat{\lambda}_n^{(1)}$, см. графики ломаных Ψ_2 и Ψ_3 на рис. 5–7 (справа). Исходя из результатов моделирования, представленных в табл. 1, можно заключить, что в основном превосходство оценки $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ создается за счет лучшего эмпирического среднеквадратического отклонения. В этой таблице через

$$\begin{aligned} \text{BI}_1 &= M_{1,1} - \lambda, & \text{bi}_1 &= M_{2,1} - \lambda, \\ \text{RD}_1 &= M_{1,2} - (M_{1,1})^2, & \text{rd}_1 &= M_{2,2} - (M_{2,1})^2 \end{aligned}$$

обозначены эмпирические смещения и среднеквадратические отклонения оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при неусеченных выборках. При усеченных выборках используются те же обозначения, но с нижними индексами 2 и 3 соответственно.

- 4) Приводимые в табл. 1 значения BI_1 позволяют судить о смещении оценки $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ при неусеченных выборках. Результаты моделирования не противоречат полученному в [4] выводу, что оценка МП (как и оценка $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$)

Таблица 1. Эмпирические характеристики

β	0,05	0,75	1,45	0,05	0,75	1,45	0,05	0,75	1,45
$100 \cdot \lambda$	5/6	75/6	145/6	5/24	75/24	145/24	5/96	75/96	145/96
$100 \cdot BI_1$	0,01	0,55	5,25	0,04	0,70	5,12	0,18	1,50	7,79
$100 \cdot bi_1$	0,01	0,57	5,34	0,04	0,73	5,13	0,18	1,51	7,72
$100 \cdot BI_2$	0,13	0,63	5,32	0,04	0,91	5,26	1,40	2,40	8,58
$100 \cdot bi_2$	0,13	0,63	5,35	0,03	0,94	5,27	1,36	2,28	8,46
$100 \cdot BI_3$	0,42	0,70	5,30	1,32	1,17	5,44	3,21	3,26	8,41
$100 \cdot bi_3$	0,41	0,68	5,30	1,27	1,16	0,56	3,11	2,98	9,04
$100 \cdot RD_1$	0,01	1,16	8,87	0,06	2,23	11,45	0,24	6,15	23,23
$100 \cdot rd_1$	0,01	1,17	8,81	0,06	2,24	11,40	0,24	6,15	23,73
$100 \cdot RD_2$	0,11	1,32	9,30	0,39	2,45	11,98	0,97	6,76	24,30
$100 \cdot rd_2$	0,10	1,19	8,88	0,35	2,34	11,30	0,87	6,58	23,62
$100 \cdot RD_3$	0,34	1,43	9,31	0,94	2,71	12,50	1,73	7,28	25,04
$100 \cdot rd_3$	0,30	1,23	8,35	0,85	2,46	11,60	1,54	6,88	23,87

оказывается существенно смещенной вправо. Усечение слева приводит к смещению обеих оценок параметра λ вправо, а увеличение среднеквадратических отклонений зависит от параметра c .

5. Применение к данным КОВИД-19

В статье исследовались данные, связанные с заболеванием коронавирусной инфекцией КОВИД-19 по дням (см. <https://www.kaggle.com/allen-institute-for-ai/CORD-19-research-challenge>). Анализируется число выздоровевших индивидуумов по дням путем предварительного усечения слева с разным уровнем. Анализ основан на данных, собранных до 22 июня 2020 г., т.е. на первой волне пандемии. Применим суженное распределение Парето как модель распределения числа выздоровевших индивидуумов для двух соседних стран восточной Азии: Японии и Южной Кореи. Средняя плотность населения в Японии 338 человек, а в Южной Корее 496 человек на 1 кв. км. Эти страны сопоставимы по индексу развития и занимают 19 и 22 места в мировом списке стран соответственно.

Оценки параметров (по методам МП и моментов) суженного распределения Парето представлены в табл. 2 и 3, где для полноты анализа приведены и оценки параметра верхнего усечения θ . Параметр a считается известным и равным выбранному уровню усечения слева. В табл. 2 и 3 $n(a)$ обозначает объем усеченной слева выборки.

Получив различающиеся оценки максимального правдоподобия и по методу моментов для β , λ (или θ) для одной какой-то страны, трудно решить, является ли эта разница статистически значимой. Поэтому применим несколько тестов согласия. Пусть F_n – эмпирическая ф.р. выборки X_1, \dots, X_n , а $X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{m,n}$ – ее порядковые статистики. Пусть $\hat{\beta}$ и $\hat{\lambda}$ обозначают оценки параметров β и λ .

Тест Колмогорова–Смирнова (KS) определяет наибольшее расстояние между F_n и ф.р. суженного распределения Парето $F_{a, \hat{\beta}, a/\hat{\lambda}}$:

$$K_n = \sqrt{n} \sup_{x \geq a} \left| F_n(x) - F_{a, \hat{\beta}, a/\hat{\lambda}}(x) \right|.$$

Таблица 2. Оценка параметров суженного распределения Парето на японских данных

a	$n(a)$	$\hat{\beta}_n^{(1)}$	$\hat{\lambda}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\theta}_{n,r*}^{(2)}$
5	87	0,108	0,01952	256,02	0,108	0,01743	286,83
10	83	0,177	0,03324	300,82	0,171	0,03092	323,38
15	79	0,234	0,04417	339,56	0,220	0,04253	352,62
20	75	0,279	0,05367	372,63	0,256	0,05333	375,00

Таблица 3. Оценка параметров суженного распределения Парето на южнокорейских данных

a	$n(a)$	$\hat{\beta}_n^{(1)}$	$\hat{\lambda}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\theta}_{n,r*}^{(2)}$
5	102	0,077	0,03978	125,66	0,074	0,03778	132,49
10	99	0,220	0,06000	166,65	0,218	0,05674	176,22
15	91	0,292	0,07913	189,55	0,291	0,07522	199,39
20	87	0,428	0,08430	237,24	0,437	0,07842	255,01

Статистика теста KS имеет вид $K_n = \sqrt{m} \max\{K_m^-, K_m^+\}$, где

$$K_m^+ = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ F_n(X_{i,n}) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) \right\},$$

$$K_m^- = \max_{2 \leq i \leq m} \left\{ F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) - F_n(X_{i-1,n}) \right\}.$$

Статистика \tilde{K}_n для теста Койпера (К) имеет представление в виде $\tilde{K}_n = \sqrt{m}(K_m^- + K_m^+)$. Статистика для теста Крамера-фон Мизеса–Смирнова (CvMS) использует квадратичную меру близости между $F_n(x)$ и $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$:

$$\omega_n^2 = n \int_a^\infty \left(F_n(x) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right)^2 dF_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x).$$

Практическое вычисление статистики теста CvMS удобно производить по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12m} + \sum_{i=1}^m \left(F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) - \frac{2i-1}{2m} \right)^2.$$

Статистика для теста Андерсона–Дарлинга (AD) использует взвешенную квадратичную меру близости между $F_n(x)$ и $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$:

$$A_n^2 = n \int_a^\infty \frac{\left(F_n(x) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right)^2}{\left(1 - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right) F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x)} dF_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x).$$

Практическое вычисление статистики теста AD производится по формуле

$$A_n^2 = -m - \sum_{i=1}^m \frac{2i-1}{m} \left(\ln \left(F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) \right) + \ln \left(1 - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{m+1-i,n}) \right) \right).$$

Таблица 4. p -значения для тестов KS, K, CvMS и AD

Япония								
a	KS		K		CvMS		AD	
	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
5	0,040	0,129	0,015	0,042	0,070	0,161	0,001	0,002
10	0,130	0,281	0,030	0,049	0,152	0,235	0,002	0,003
15	0,220	0,406	0,039	0,051	0,214	0,278	0,080	0,094
20	0,294	0,408	0,048	0,059	0,254	0,305	0,090	0,098
Южная Корея								
a	KS		K		CvMS		AD	
	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
5	0,284	0,531	0,062	0,128	0,136	0,278	0,042	0,072
10	0,533	0,625	0,165	0,239	0,577	0,701	0,512	0,631
15	0,690	0,782	0,324	0,422	0,726	0,802	0,170	0,187
20	0,728	0,792	0,585	0,634	0,829	0,860	0,232	0,242

При нулевой гипотезе, что выборка соответствует распределению $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$, статистики K_n , \tilde{K}_n , ω_n^2 и A_n^2 убывают с увеличением числа наблюдений до бесконечности. С помощью процедур, входящих в “Wolfram Mathematica 10”, нетрудно посчитать p -значения для приведенных выше статистических тестов. Таблица 4 содержит p -значения для тестов KS, K, CvMS и AD, где p -значения выше уровня значимости $\alpha = 0,05$ показаны жирным шрифтом. При этом нулевая гипотеза не отвергается. В табл. 4 F_1 и F_2 обозначают ф.р. $F_{a,\hat{\beta}_n^{(1)},a/\hat{\lambda}_n^{(1)}}$ и $F_{a,\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)},a/\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}}$ соответственно. Напомним, что $F_{a,\hat{\beta}_n^{(1)},a/\hat{\lambda}_n^{(1)}}$ обозначает модель с параметрами, оцененными методом максимума правдоподобия, а $F_{a,\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)},a/\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}}$ – предложенным в статье методом моментов.

По результатам анализа можно сделать следующие выводы.

- 1) Идентифицировать параметрическую модель по малой выборке объемом около 100 наблюдений (см. $n(a)$ в табл. 2, 3) чрезвычайно сложно, так как можно подобрать множество моделей, одинаково хорошо описывающих выборочные данные с позиций нескольких критериев согласия.
- 2) Сравнивая соответствующие p -значения для моделей F_1 и F_2 в табл. 4, заметим, что для всех примененных тестов p -значения для модели F_2 выше, чем для модели F_1 . Это указывает на то, что модель с новыми оценками параметров (β, λ) лучше описывает анализируемые данные, чем модель F_1 .
- 3) Приведенные в табл. 4 p -значения растут вместе с уровнем усечения a . Отсюда следует вывод, что наблюдения (как для Японии, так и для Южной Кореи) из нижней части вариационного ряда хуже описываются суженным распределением Парето.
- 4) Из табл. 4 следует, что суженное распределение Парето лучше описывает число выздоровевших от COVID-19 индивидуумов в Южной Корее, чем в Японии. Это отражается в оценках параметров β и λ (при соответствующем уровне усечения), которые различаются 1,5–2 раза, см. табл. 2 и 3.

6. Заключение

В статье применяется метод моментов для получения семейства новых оценок для параметров суженного распределения Парето. Доказано, что совместное асимптотическое распределение новых оценок является гауссовским. Предложена процедура оптимального выбора дополнительного параметра. Теоретическое сравнение показало, что при неусеченных выборках пара нововведенных оценок незначительно уступает в качестве соответствующей паре оценок максимального правдоподобия. Как показало компьютерное моделирование, оценки максимума правдоподобия теряют превосходство при некоторых истинных значениях параметров β и λ , см. рис. 2–4.

Новым в работе является также предложение генератора случайных чисел, распределенных по суженному распределению Парето.

Часто в задачах статистического анализа данных используется усечение наблюдений слева. Эмпирические исследования статистических свойств оценок по выборкам, содержащим усеченные слева наблюдения, показали, что из оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$ более предпочтительным является использование нововведенной оценки $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$. Что касается оценок $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$, то усечение данных воздействует на их эффективность примерно одинаково.

Компьютерное моделирование выявило, что как при усеченных слева, так и при неусеченных данных смещение оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$ вносит значительный вклад в их отклонения средних квадратов. Устранение (или сокращение) смещения обсуждаемых оценок тесно связано с исследованием асимптотики матожиданий $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n^{(1)} - \lambda)$ и $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)} - \lambda)$ при $n \rightarrow \infty$. Эту проблему авторы статьи намерены решить в дальнейшем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Лемма 1. Пусть (X_1, \dots, X_n) – выборка сл.в. из распределения $F_{\alpha, \beta, \alpha/\lambda}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(II.1) \quad \sqrt{nh_r}(a/\hat{a}_n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$(II.2) \quad nh_r(a/\hat{a}_n) \xrightarrow{d} -\frac{Z}{\lambda + \beta}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где Z – экспоненциально распределенная сл.в. с ф.р. $P(Z \leq x) = 1 - \exp\{-x\}$, $x \geq 0$.

Для любого $r \in \mathbb{R}$ функция $h_r(x)$ строго возрастает на $[1, \infty)$. Используя это свойство, можно проверить тождество

$$h_r(a/\hat{a}_n) = -\min \left\{ h_{-r} \left(\frac{X_1}{a} \right), \dots, h_{-r} \left(\frac{X_n}{a} \right) \right\}.$$

Положим

$$L_r = \begin{cases} +\infty, & r \leq 0, \\ 1/r, & r > 0. \end{cases}$$

Имеем $P(h_{-r}(X_1/a) \leq x) = F_{1,\beta,1/\lambda}(h_{-r}^{\leftarrow}(x))$, $x \in [1, L_r]$. Используя (25), нетрудно убедиться, что функция $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(y) \right)$, $0 \leq y \leq 1$ является обобщенной обратной к ф.р. $F_{1,\beta,1/\lambda}(h_{-r}^{\leftarrow}(x))$, $x \in [1, L_r]$. Согласно теореме 8.3.6(ii) в [16] соотношение

$$\frac{\min \left\{ h_{-r} \left(\frac{X_1}{a} \right), \dots, h_{-r} \left(\frac{X_n}{a} \right) \right\} - h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)}{h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(1/n) \right) - h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)} \xrightarrow{d} Z, \quad n \rightarrow \infty$$

будет доказано, если показать, что $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)$ конечно, и верно

$$(П.3) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{F_{1,\beta,1/\lambda} \left(h_{-r}^{\leftarrow} \left(h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) + \epsilon x \right) \right)}{F_{1,\beta,1/\lambda} \left(h_{-r}^{\leftarrow} \left(h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) + \epsilon \right) \right)} = x$$

для всех $x > 0$.

Сочетая (25) и тождество $W_0(xe^x) = x$, которое выполнено для $x \geq -1$, выводим $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) = h_{-r}(1) = 0$. Применяя правило Лопиталья, получаем, что левая часть (П.3) равна

$$x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_{1,\beta,1/\lambda}(\exp\{\epsilon x\})}{f_{1,\beta,1/\lambda}(\exp\{\epsilon\})} \exp\{\epsilon(x-1)\} = x$$

при $r = 0$, и

$$x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_{1,\beta,1/\lambda} \left((1 - r\epsilon x)^{-1/r} \right)}{f_{1,\beta,1/\lambda} \left((1 - r\epsilon)^{-1/r} \right)} \left(1 + \frac{r\epsilon(1-x)}{1-r\epsilon} \right)^{-1-1/r} = x$$

при $r \neq 0$.

Чтобы завершить доказательство соотношения (П.2), остается доказать, что $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(n^{-1}) \right) \sim (\lambda + \beta)^{-1} n^{-1}$, $n \rightarrow \infty$. Напомним, что

$$\frac{dW_0(t)}{dt} = \frac{W_0(t)}{t(1+W_0(t))}, \quad t \neq 0,$$

см., например, (3.2) в [15]. Применив правило Лопиталья еще раз, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(n^{-1}) \right)}{n^{-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(t) \right)^r}{\beta(1-t) \left(1 + (\lambda/\beta) F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(t) \right)} = \frac{1}{\lambda + \beta}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

$$(П.4) \quad \sqrt{n}((\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - (\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})) \xrightarrow{d} (Y_r, Y_{r+1}, Y_{r+2})$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По теореме Крамера–Вольда (см. теорему 29.4 в [17]), достаточно показать, что для любого вектора констант $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\sqrt{n} \sum_{k=0}^2 c_k (\hat{\nu}_{n,r+k} - \nu_{r+k}) \xrightarrow{d} \sum_{k=0}^2 c_k Y_{r+k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что

$$\zeta_i = \sum_{k=0}^2 c_k \left(h_{r+k} \left(\frac{X_i}{a} \right) - \nu_{r+k} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с $\mathbb{E}(\zeta_i) = 0$ и $\text{Var}(\zeta_i) = \sum_{i,j=0}^2 c_i c_j \rho_{r+i,r+j}$. Используя центральную предельную теорему Линдберга–Леви (см., например, теорему 27.1 в [17]), заключаем, что

$$(П.5) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_i \xrightarrow{d} \sum_{k=0}^2 c_k Y_{r+k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ввиду декомпозиции

$$\sum_{k=0}^2 c_k (\hat{\nu}_{n,r+k} - \nu_{r+k}) = T_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_i,$$

где

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^2 c_k \left(h_{r+k} \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right) - h_{r+k} \left(\frac{X_i}{a} \right) \right),$$

остается доказать, что

$$\sqrt{n} T_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

заметив, что соотношение

$$\begin{aligned} & h_r \left(\frac{X_1}{\hat{a}_n} \right) - h_r \left(\frac{X_1}{a} \right) = \\ & = \begin{cases} h_0(a/\hat{a}_n), & r = 0, \\ r h_r(a/\hat{a}_n) \{h_r(X_1/a) - \nu_r\} + (r\nu_r + 1) h_r(a/\hat{a}_n), & r \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

вытекает из (П.1) и (П.5).

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему Крамера–Вольда еще раз, достаточно доказать, что для любого вектора констант $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$

$$(П.6) \quad \sqrt{n} \left(\left(c_0 \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} + c_1 \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right) - (c_0 \beta + c_1 \lambda) \right) \xrightarrow{d} c_0 \eta_{1,r} + c_1 \eta_{2,r}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим

$$g(x_1, x_2, x_3) = c_0 r + \frac{c_1 g^{(2)}(x_1, x_2) - c_0 g^{(1)}(x_2, x_3)}{g^{(3)}(x_1, x_2, x_3)},$$

где функции $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ те же, что и в (11)–(13). Используя (10) и (14)–(15), получаем, что

$$\left(c_0 \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} + c_1 \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right) - (c_0 \beta + c_1 \lambda) = g(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - g(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}).$$

Пусть $g'_\ell(x_1, x_2, x_3)$ обозначает частную производную g относительно x_ℓ . Можно проверить, что

$$g'_1(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{\nu_{r+2}(\nu_{r+1} + \nu_{r+1}^2 - \nu_{r+2})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_{r+1}(\nu_{r+2} - \nu_{r+1} - \nu_{r+1}^2)}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2},$$

$$g'_2(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{2\nu_{r+1}\nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} - 2\nu_r \nu_{r+1} \nu_{r+2}}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_r \nu_{r+1} - \nu_{r+1}^2 + \nu_r \nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} + \nu_r^2 \nu_{r+2}}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2},$$

$$g'_3(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{\nu_{r+1}(\nu_r - \nu_{r+1} + \nu_r \nu_{r+1})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_r(\nu_{r+1} - \nu_r - \nu_r \nu_{r+1})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2}.$$

Используя дельта-метод (см., например, теорему 3.1 в [18]), находим, что $\sqrt{n}(g(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - g(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}))$ сходится по распределению к сл.в., имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией

$$G \begin{pmatrix} \rho_{r,r} & \rho_{r,r+1} & \rho_{r,r+2} \\ \rho_{r,r+1} & \rho_{r+1,r+1} & \rho_{r+1,r+2} \\ \rho_{r,r+2} & \rho_{r+1,r+2} & \rho_{r+2,r+2} \end{pmatrix} G^T = \\ = c_0^2 \sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda) + 2c_0 c_1 \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) + c_1^2 \sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda),$$

где $\sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda)$, $\sigma_{12,r}(\beta, \lambda)$, $\sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda)$ даны в (19)–(21), а

$$G = (g'_1(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) \quad g'_2(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) \quad g'_3(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})).$$

Остается заметить, что сл.в. $c_0 \eta_{1,r} + c_1 \eta_{2,r}$ распределена по нормальному закону со средним 0 и дисперсией $c_0^2 \sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda) + 2c_0 c_1 \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) + c_1^2 \sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda)$.

Доказательство теоремы 3 опущено, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Доказательство предложения 1. Положим $J(y) = F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y) - \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y)$, $0 < y \leq 1$. Имеем

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \frac{\theta}{y} \left(1 - \frac{c}{y^{1/\beta}} \right).$$

Отсюда немедленно следует, что для $c \geq 1$ функция $J(y)$ строго возрастает на $(0, 1)$. Это вместе с $J(1) = 0$ дает $J(y) > 0$ для $0 < y < 1$. Таким образом, в случае $c \geq 1$ имеем $V \stackrel{d}{=} \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U)$ или, что эквивалентно, сл.в. V имеет смещенную экспоненциальную ф.р. $F_{\theta}(x-a)$, $x \geq a$.

Пусть $0 < c < 1$. Уравнение $J(y) = 0$ может быть переписано как

$$(П.7) \quad -cy^{-1/\beta} \exp\{-cy^{-1/\beta}\} = -c \exp\{-c\}.$$

Поскольку $-1/e < -c \exp\{-c\} < 0$ для любого $0 < c < 1$, уравнение (П.7) имеет два корня:

$$y_0 = \left(- (1/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}) \right)^{-\beta} \quad \text{и} \quad y_1 = \left(- (1/c)W_0(-c \exp\{-c\}) \right)^{-\beta}.$$

Применяя тождество $W_0(-c \exp\{-c\}) = -c$, получим $y_1 = 1$. Используя строгое неубывание $W_{-1}(x)$, $-1/e < x < 0$, можно проверить, что $J(y) > 0$ выполнено для $0 < y < y_0$ и $J(y) < 0$ для $y_0 < y < 1$. Тогда для $x \geq a$ имеем

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= \\ &= P\left(\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U) \leq x, 0 < U < y_0\right) + P\left(F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U) \leq x, y_0 \leq U < 1\right) = \\ &= P\left(0 < U < y_0, 1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x) \leq U < 1\right) + P\left(\max\{y_0, 1 - F_{a,\beta}(x)\} \leq U < 1\right). \end{aligned}$$

Доказательство предложения 1 можно завершить, заметив, что $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0) = F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0) = -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\})$ и используя

$$P\left(0 < U < y_0, 1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x) \leq U < 1\right) = \begin{cases} 0, & x < \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0), \\ y_0 - 1 + \tilde{F}_{a,\theta}(x), & x \geq \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0), \end{cases}$$

$$P\left(\max\{y_0, 1 - F_{a,\beta}(x)\} \leq U < 1\right) = \begin{cases} F_{a,\beta}(x), & x < F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0), \\ 1 - y_0, & x \geq F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0). \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pareto V.* The New Theories of Economics // J. of Political Economy. 1897. V. 5. No. 4. P. 485–502.
2. *Vere-Jones D., Robinson R., Yang W.Z.* Remarks on the accelerated moment release model: problems of model formulation, simulation and estimation // Geophys. J. Int. 2001. V. 144. P. 517–531.

3. *Kagan Y.Y.* Seismic moment distribution revisited: I. Statistical results // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 148. P. 520–541.
4. *Kagan Y.Y., Schoenberg F.* Estimation of the upper cutoff parameter for the tapered Pareto distribution // *J. Appl. Probab.* 2001. V. 38A. P. 158–175.
5. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. New York: Springer, 2011.
6. *Cumming S.G.* A parametric model of the fire-size distribution // *Canad. J. Forest Res.* 2001. V. 31. No. 8. P. 1297–1303.
7. *Schoenberg F.P., Peng R., Woods J.* On the distribution of wildfire sizes // *Environmetrics.* 2003. V. 14. P. 583–592.
8. *Swetnam T.L., Falk D.A., Lynch A.M., Yool S.R.* Estimating individual tree mid- and understory rank-size distributions from airborne laser scanning in semi-arid forests // *Forest Ecology and Management.* 2014. V. 330. P. 271–282.
9. *Meerschaert M.M., Roy P., Shao Q.* Parameter estimation for tempered power law distributions // *Communications in Statistics — Theory and Methods.* 2012. V. 41. P. 1839–1856.
10. *Jameson G.J.O.* The incomplete gamma functions // *Math. Gazette.* 2016. V. 100. P. 298–306.
11. *Baricz Á., Ismail M.E.H.* Turán Type Inequalities for Tricomi Confluent Hypergeometric Functions // *Constructive Approximation.* 2013. V. 37. P. 195–221.
12. *Beads R., Szmiagielski J.* Meijer G-Functions: A Gentle Introduction // *Notices of the American Mathematical Society.* 2013. V. 60. P. 866–872.
13. *Devroye L.* Non-Uniform Random Variate Generation. New York: Springer-Verlag, 1986.
14. *Geist E.L., Parsons T.* Undersampling power-law size distributions: effect on the assessment of extreme natural hazards // *Nat. Hazards.* 2014. V. 72. P. 565–595.
15. *Cortless R.M., Gonner G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W Function // *Advances in Computational Mathematics.* 1996. V. 5. P. 329–359.
16. *Arnold B.C., Balakrishnan N., Nagaraja H.N.* A first course in order statistics. New York: Wiley, 1992.
17. *Bilingsley P.* Probability and Measure. New York: Wiley, 1995.
18. *Van der Vaart A.W.* Asymptotic Statistics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 19.11.2020

После доработки 26.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. В.Ф. СОКОЛОВ, д-р физ.-мат. наук (sokolov@ipm.komisc.ru)
(Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар)

АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В КАНАЛЕ ВЫХОДА

Рассматриваются задачи адаптивного оптимального слежения для минимально-фазового объекта с дискретным временем, неопределенностью в канале выхода и ограниченным внешним возмущением. Коэффициенты уравнения линейной стационарной номинальной модели, коэффициент усиления неопределенности и верхняя граница внешнего возмущения предполагаются неизвестными, а показателем качества служит наихудшая асимптотическая ошибка слежения. Показано, что постановка оптимальной задачи зависит от априорной информации об ограниченном задающем сигнале. Решение задач базируется на полиэдральном оценивании всех неизвестных параметров и использовании показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия для вычисления текущих оптимальных оценок. Работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов управления иллюстрируются результатами численного моделирования.

Ключевые слова: адаптивное робастное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, верификация модели.

DOI: 10.31857/S0005231021080055

1. Введение

Первоначальный период бурного развития теории робастного управления пришелся на 1980–90-е годы. При этом основной поток публикаций относился к H_∞ -постановке задачи, имеющей классические частотные и статистические интерпретации [1, 2]. Предметом теории робастного управления являются системы с неопределенностью, под которой понимается не внешнее возмущение или помеха измерений, а неточность самой модели (немоделируемая динамика, малые нелинейности или нестационарность). В начале 1992 г. вышел первый спецвыпуск одного из ведущих журналов по теории автоматического управления IEEE TAC [3], посвященный ставшей сверхактуальной проблеме идентификации для робастного управления. Три основные проблемы были таковы: 1) теория робастного управления была детерминированной, а теория идентификации — в основном стохастической; 2) как вычислять номинальную модель по данным измерений; 3) как определить доли неопределенности

и внешнего возмущения в суммарном возмущении. Эти важнейшие проблемы обсуждались ведущими мировыми экспертами на семинаре по идентификации систем и робастному управлению [4], на котором специалисты по идентификации призывали к разработке стохастической теории робастного управления, а специалисты по робастному управлению — к разработке теории идентификации без привлечения априорных статистических гипотез. Проблемы идентификации для робастного управления остаются актуальными до настоящего времени, о чем свидетельствуют, в частности, последующие регулярные спецвыпуски ведущих мировых журналов [5–7]. Однако до настоящего времени в публикациях по этому направлению задачи оценивания номинальной модели и квантификации неопределенности и внешнего возмущения рассматриваются в стохастической офлайн постановке и вне контекста задач управления и поэтому не могут быть применены в задачах адаптивного управления, где указанные оценивание и квантификация должны осуществляться в онлайн режиме (ограничимся ссылками [8, 9] на публикации двух ведущих мировых экспертов Л. Льюнга и Г. Гудвина и соавт.).

Многие практические задачи управления формулируются в терминах допусков на отклонения выхода системы управления от задающего сигнала. Таким задачам соответствует ℓ_1 -теория робастного управления, основы которой были заложены в [10, 11]. Сигнальным пространством в ℓ_1 -теории в случае дискретного времени является пространство ограниченных вещественных последовательностей ℓ_∞ , внешнее возмущение предполагается ограниченным и качество управления оценивается в терминах супремум нормы этого пространства. Оказалось, что в этой теории можно получить более продвинутые по сравнению с H_∞ -теорией результаты по анализу робастной устойчивости, оценке качества и синтезу оптимального управления [11–14], что открывает возможности ставить и решать задачи адаптивного робастного управления в оптимальной постановке. Решению одной из таких задач в рамках ℓ_1 -теории робастного управления посвящена настоящая работа.

Системы с ограниченным внешним возмущением породили множественное оценивание неизвестных параметров, характеризующих номинальную модель управляемого объекта. Для моделей, аффинных относительно оцениваемых параметров, из предположения об ограниченности внешнего возмущения известной константой следует, что множество параметров, согласованных с данными измерений на некотором промежутке времени, является ограниченным многоугольником в пространстве параметров. Сложность описания этих многоугольников растет с ростом объема данных измерений, и сотни статей по идентификации таких моделей начиная с 1970-х и до настоящего времени, в том числе некоторые статьи в недавнем спецвыпуске [7], посвящены построению более простых для вычислений верхних или нижних аппроксимаций этих многоугольников. В зарубежной литературе это направление в идентификации систем получило названия *set-membership approach* и *unknown but bounded disturbance*. Как и в случае H_∞ -теории, при наличии неопределенности задачи квантификации неопределенности и внешнего возмущения в рамках этого подхода, как правило, рассматриваются при фиксированной номинальной модели, в офлайн постановке и вне контекста задачи управления. А под оптимальной идентификацией может подразумеваться, например, офлайн вычисление модели с минимальной верхней границей неопределенности при фикси-

рованной априорной верхней границе внешнего возмущения (или наоборот), как, например, в [15] для систем с ограниченным внешним возмущением или в [16] — в H_∞ -постановке.

Настоящая работа посвящена решению задачи синтеза адаптивного оптимального слежения для минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода и с ограниченным внешним возмущением. Показателем качества служит наихудшая по возмущениям асимптотическая ошибка слежения. Коэффициенты уравнения линейной стационарной минимально-фазовой номинальной модели, коэффициент усиления неопределенности и верхняя граница внешнего возмущения предполагаются неизвестными и оцениваются в режиме онлайн. Для построения адаптивного оптимального управления используется метод рекуррентных целевых неравенств [17], дополненный двумя ключевыми идеями: 1) выбора показателя качества задачи управления как идентификационного критерия и 2) использования множественных оценок неизвестных параметров. Этот подход был первоначально предложен для задачи адаптивной оптимальной стабилизации в [18, 19] для систем только с ограниченным возмущением и был обобщен на робастные системы в [20, 21]. Для рассматриваемой системы с неопределенностью только в канале выхода показатель качества задачи слежения является дробно-рациональной функцией нормы внешнего возмущения и коэффициента усиления неопределенности, благодаря чему вычисление текущих оптимальных оценок сводится к задаче линейного программирования, для которой имеется современное эффективное программное обеспечение. Это позволяет довести общий метод синтеза адаптивного оптимального робастного управления [20, 21] до численной реализации в более общей и существенно более сложной задаче слежения и помимо алгоритма полиэдрального оценивания, сохраняющего почти полную информацию о всех оцениваемых параметрах, предложить новый, менее затратный для вычислений, алгоритм с заранее выбираемым числом сохраняемых в памяти регулятора информационных неравенств. Приведенные в статье результаты моделирования на примере модели с девятью оцениваемыми параметрами иллюстрируют эффективность обоих алгоритмов.

Подчеркнем важные особенности рассматриваемой задачи.

1) Все неизвестные параметры в рассматриваемой задаче неидентифицируемы и решение рассматриваемой оптимальной задачи на базе других идентификационных критериев недостижимо (см. раздел 3.1).

2) Показатель качества в виде наихудшей асимптотической ошибки слежения зависит от верхнего предела модуля задающего сигнала. Поэтому в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров постановка оптимальной задачи зависит от априорной информации о задающем сигнале. Эта зависимость ранее не обсуждалась в работах по идентификации для робастного управления даже в офлайн постановке.

Обозначения:

$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\dim \varphi := n$ — размерность φ ;

ℓ_∞ — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_t |x_t|$;

$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$;

$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$ – индуцированная норма линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ с устойчивой передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается моделью с дискретным временем

$$(2.1) \quad a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ – соответственно измеряемый выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t , q^{-1} – оператор сдвига назад ($q^{-1}x_t := x_{t-1}$) и

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n, \quad b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}.$$

Априорная информация об объекте состоит из предположений:

П.1. Неизвестный вектор-столбец коэффициентов модели принадлежит известному ограниченному многограннику Ξ ,

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^\top \in \Xi = \left\{ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p \right\} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

$$P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}, \quad p \in \mathbb{R}^l,$$

и для любого $\xi \in \Xi$ $b_1 \neq 0$, корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне замкнутого единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (такие полиномы называются устойчивыми, а соответствующие им модели – *минимально-фазовыми*) и $\sup_{\xi \in \Xi} \|(a(\lambda)| |1/b(\lambda)|\| \leq$

$\leq C_u < +\infty$ с известной верхней границей C_u .

П.2. Неизвестное суммарное возмущение v удовлетворяет ограничению

$$(2.2) \quad |v_t| \leq \delta_w + \delta_y p_t, \quad p_t = \max_{t-\mu \leq s < t} |y_s| \quad \forall t,$$

где $\delta_w \geq 0$ и $\delta_y \geq 0$ неизвестны и $\delta_y \leq \bar{\delta}_y < 1$ с известной верхней границей $\bar{\delta}_y$.

В терминах ℓ_1 -теории робастного управления число δ_w характеризует ℓ_∞ -норму *неизвестного ограниченного внешнего возмущения* в объекте управления, а число δ_y – коэффициент усиления неизвестной *неопределенности в канале выхода*, описываемой в виде линейного нестационарного или нелинейного строго причинного оператора на пространстве выходов y . Память μ в ограничении на неопределенность выбирается конструктором исходя из априорной информации об объекте управления и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления. Ограниченность памяти неопределенности по выходу обеспечивает независимость асимптотического качества замкнутой системы управления от начальных данных [13], что необходимо для синтеза адаптивного управления.

Введем обозначение

$$\theta := (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$$

для вектора всех неизвестных конструктору параметров модели (2.1).

Пусть $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots)$ – ограниченный задающий сигнал задачи слежения и в момент времени t известно значение y_{t+1}^* . Показателем качества управления будет служить наихудшая по всем допустимым предположением **П.2** возмущениям v асимптотическая ошибка слежения

$$J^\mu(\theta, y^*) := \sup_v \|y - y^*\|_{ss} = \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*|.$$

Из уравнения (2.1) следует, что для модели с известным вектором коэффициентов ξ и любыми начальными значениями $y_{-n+1}, \dots, y_0, u_{-m+1}, \dots, u_0$ регулятор

$$(2.3) \quad b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^*$$

обеспечивает равенство

$$y_{t+1} - y_{t+1}^* = v_{t+1}$$

и, следовательно, является *оптимальным* для показателя качества $J^\mu(\theta, y^*)$ в силу непредсказуемости возмущения v_{t+1} .

Для формулировки теоремы об оценке показателя качества $J^\mu(\theta, y^*)$ при использовании оптимального регулятора (2.3) понадобится следующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $|y_t^*|$ равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число N и подпоследовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ последовательности натуральных чисел такие, что

$$\forall j \quad (t_{j+1} - t_j \leq N \wedge |y_{t_j}^*| \geq \|y^*\|_{ss} - \varepsilon).$$

Теорема 1. Для модели (2.1) с известным вектором коэффициентов ξ , удовлетворяющей предположениям **П.1**, **П.2** и замкнутой регулятором (2.3),

$$J^\mu(\theta, y^*) \leq J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y},$$

и

$$J^\mu(\theta, y^*) \nearrow J(\theta, y^*) \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

если последовательность $|y^*|$ равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела (знак \nearrow обозначает монотонную сходимость снизу).

Теорема 1 следует из теорем 3 и 8 [13], примененных к замкнутой системе (2.1), (2.3). Отметим, что условие $0 \leq \delta_y < 1$ является необходимым и достаточным условием робастной стабилизируемости модели (2.1) в классе линейных стационарных регуляторов при $\mu \rightarrow +\infty$ (см. детали в [11]).

Формула для показателя качества $J(\theta, y^*)$ в теореме 1 позволяет сформулировать следующую задачу адаптивного субоптимального робастного слежения.

Задача 1. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров θ и известно значение $\|y^\|_{ss}$. Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J(\theta, y^*).$$

Значение $\|y^*\|_{ss}$ доступно, например, в случае постоянного или периодического задающего сигнала y^* , но в общем случае может быть неизвестным. Если известна некоторая верхняя оценка Y^* неизвестного (и заведомо не идентифицируемого) значения $\|y^*\|_{ss}$, то задача синтеза адаптивного оптимального робастного слежения формулируется в виде

Задача 2. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров θ и известна верхняя граница Y^ неизвестного значения $\|y^*\|_{ss}$. Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J_2(\theta, Y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y Y^*}{1 - \delta_y}.$$

Если неизвестна и верхняя граница Y^* , то задача синтеза адаптивного оптимального робастного слежения формулируется в виде

Задача 3. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров θ и информация о задающем сигнале y^ заключается в его ограниченности. Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J_3(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|}{1 - \delta_y}.$$

Далее будет описано решение задачи 1. Решение задач 2 и 3 аналогично (см. замечание 3 в разделе 3.2).

Специфика, нетрадиционность и сложность сформулированных задач заключаются в их оптимальной постановке в условиях неидентифицируемости не только вектора коэффициентов ξ , но и коэффициента усиления неопределенности δ_y и нормы внешнего возмущения δ_w . Необходимость оценивания параметров δ_y и δ_w для решения сформулированных задач становится понятной из следующего вопроса. Предположим, что неизвестный объект управляется оптимальным регулятором, но конструктору это не известно. Как при априорных предположениях **П.1**, **П.2** конструктор, измеряя выход объекта, может судить об оптимальности регулятора, если параметры δ_y и δ_w не известны?

Ответ на этот частный вопрос кроется в понимании используемого подхода к синтезу адаптивного оптимального управления (см. раздел 3.1), вытекающего из того, что при априорных предположениях **П.1**, **П.2** исчезает понятие “истинного” вектора коэффициентов ξ номинальной модели. Эти предположения соответствуют *принципу неопределенности*, сформулированному Р.Е. Калманом в [22, с. 30]:

“(2.1) Принцип неопределенности. Неточные (недо-
стоверные) данные \rightarrow неединственная (недо-
стоверная) система.”

Этот принцип выдвинут как альтернатива стандартной статистической априорной гипотезе [22, с. 31]:

“(i) Вся неопределенность порождается жестко фиксированным абстрактным вероятностным механизмом (зачастую очень простого вида).

(ii) Все данные получены путем независимого выбора из фиксированной стационарной генеральной совокупности, управляемой абстрактным вероятностным механизмом.”

3. Синтез адаптивного управления

В этом разделе описано решение всех поставленных задач. Для их решения используется идентификационный подход, согласно которому по данным измерений вычисляются оценки неизвестного вектора коэффициентов ξ и в каждый момент времени применяется оптимальный регулятор (2.3), соответствующий текущей оценке.

3.1. Выбор идентификационного критерия в оптимальной задаче в условиях неидентифицируемости объекта

Вся новая информация о векторе ξ , получаемая в момент времени $t + 1$ после измерения выхода y_{t+1} , заключается в неравенстве

$$(3.1) \quad |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t| \leq \delta_w + \delta_y p_{t+1},$$

вытекающем из уравнения модели (2.1) и ограничения на суммарное возмущение (2.2). Каждое неравенство (3.1) состоит из пары линейных неравенств относительно вектора параметров θ . Для каждого конкретного вектора θ только одно из этих двух линейных неравенств может нарушаться, и для краткости будем называть его *неравенством* (3.1), *соответствующим вектору* θ . Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления базируется на следующем простом утверждении.

Утверждение 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^\top, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^\top, \quad \hat{\xi} \in \Xi, \quad 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \quad 0 \leq \hat{\delta}_w,$$

неравенства (3.1), соответствующие этому вектору, выполняются при всех достаточно больших t , то модель (2.1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет априорным предположениям П.1, П.2 при всех достаточно больших t .

Полная информация о неизвестном векторе θ к моменту времени t имеет вид

$$(3.2) \quad \theta \in \Theta_t^{\max} := \left\{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1} \quad \forall k < t \right\},$$

где

$$\Theta_0 := \left\{ \hat{\theta} \mid \hat{\xi} \in \Xi, 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \hat{\delta}_w \geq 0 \right\}$$

— априорное множество допустимых неизвестных параметров. Множество Θ_t^{\max} в любой момент времени t включает те и только те оценки $\hat{\theta}$ из априорного множества Θ_0 , которые согласованы с уравнением модели (2.1), априорными предположениями **П.1**, **П.2** и с измерениями на промежутке $[0, t]$, и является полиэдром (многогранником) в пространстве оценок $\hat{\theta}$. С ростом времени полиэдры Θ_t^{\max} убывают по включению ввиду добавления новых неравенств.

Утверждение 2. При любом управлении объектом (2.1) на любом промежутке $[0, t]$, для любого $\hat{\xi} \in \Xi$ и любого $\hat{\delta}_y \geq 0$

$$(3.3) \quad \hat{\theta} = (\hat{\xi}^\top, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^\top \in \Theta_t^{\max}$$

при всех достаточно больших $\hat{\delta}_w$.

Утверждение 2 очевидно следует из неограниченного роста правой части неравенств (3.1) при неограниченном возрастании δ_w и представляет собой строгое математическое утверждение о *неидентифицируемости неизвестного вектора параметров θ* при априорных предположениях **П.1**, **П.2**. Если пытаться решать задачу 1 с помощью какого-либо алгоритма оценивания, обеспечивающего сходимость оценок к некоторому предельному значению θ_∞ , и использования оптимального регулятора для вычисляемых оценок, то задача 1 будет решена, если вектор θ_∞ будет удовлетворять неравенствам (3.1) при всех достаточно больших t и

$$(3.4) \quad J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*).$$

Поскольку вектор параметров θ управляемой модели неизвестен и никакой вектор коэффициентов (от которого и зависит выбор регулятора) $\hat{\xi} \in \Xi$ не может быть сфальсифицирован данными измерений в силу включения (3.3), т.е. может оказаться вектором коэффициентов ξ управляемой модели, ключевое неравенство (3.4) диктует выбор текущих оптимальных оценок в виде

$$(3.5) \quad \theta_t^{opt} = \underset{\hat{\theta} \in \Theta_t^{\max}}{\operatorname{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Таким образом, использование показателя качества J задачи управления как идентификационного критерия диктуется постановкой задачи адаптивного оптимального управления, если решение ищется с помощью сходящихся оценок.

3.2. Синтез на основе полиэдрального оценивания

Прямое применение *оптимального оценивания* (3.5) невозможно ввиду потенциально неограниченного роста числа неравенств в описании множественных оценок Θ_t^{\max} и сложности оценки качества нелинейной замкнутой

системы с оценками (3.5). Ограниченность числа изменений множественных оценок и сходимость векторных оценок θ_t за конечное время можно обеспечить за счет введения мертвой зоны при обновлении множественных оценок. Платой за введение мертвой зоны будет решение только субоптимальной задачи, т.е. решение оптимальной задачи с заданной точностью.

Перейдем к описанию рекуррентного алгоритма оценивания и основанного на нем адаптивного субоптимального управления. Выберем параметр мертвой зоны $\varepsilon > 0$. В каждый момент времени t вычисляются полиэдральная оценка Θ_t и векторная оценка

$$\theta_t = (\xi_t^\top, \delta_{y,t}, \delta_{w,t})^\top$$

неизвестного вектора θ . Начальной полиэдральной оценкой служит априорное множество Θ_0 , а начальной векторной оценкой – вектор $\theta_0 = (\xi_0^\top, 0, 0)^\top$ с любым $\xi_0 \in \Xi$. После измерения выхода y_{t+1} в момент $t + 1$ положим

$$\begin{aligned} \varphi_t &:= (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t, \dots, u_{t-m+1})^\top, \quad \eta_{t+1} := \text{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^\top \xi_t), \\ p_{t+1} &= \max_{t-\mu \leq s < t+1} |y_s|, \quad \psi_{t+1} := (\eta_{t+1} \varphi_t^\top, p_{t+1}, 1)^\top, \quad \zeta_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях неравенство (3.1), соответствующее вектору θ_t , эквивалентно неравенству

$$(3.6) \quad \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1}.$$

Положим

$$(3.7) \quad \theta_{t+1} := \theta_t, \quad \Theta_{t+1} := \Theta_t, \quad \text{если } \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(3.8) \quad \Theta_{t+1} := \Theta_t \cap \Omega_{t+1}, \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} \right\},$$

$$(3.9) \quad \theta_{t+1} := \underset{\hat{\theta} \in \Theta_{t+1}}{\text{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Формулы (3.7) и (3.8) имеют простую геометрическую интерпретацию. Каждое множество Θ_t описывается системой линейных неравенств, состоящей из нескольких неравенств из описания априорного множества Θ_0 и из нескольких неравенств $\psi_{s+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{s+1}$, т.е. неравенств (3.1), соответствующих некоторым предыдущим оценкам θ_s , $s < t$. Неравенство в определении полупространства Ω_{t+1} является линейным неравенством (3.1), соответствующим текущей оценке θ_t . Благодаря введению мертвой зоны обновление Θ_t согласно (3.8) производится только в том случае, когда расстояние от вектора θ_t до полупространства Ω_{t+1} больше параметра мертвой зоны ε . Обновленная оценка θ_{t+1} согласно (3.9) является оптимальной относительно идентификационного критерия $J(\hat{\theta}, y^*)$ на полиэдре Θ_{t+1} .

Перед формулировкой теоремы о качестве адаптивного управления на основе описанного алгоритма оценивания заметим, что уравнение оптимального регулятора (2.3), соответствующего вектору ξ_t оценок неизвестных коэффициентов ξ , благодаря введению обозначения φ_t можно кратко записать в виде уравнения

$$(3.10) \quad \varphi_t^\top \xi_t = y_{t+1}^*$$

относительно компоненты u_t фазового вектора φ_t . Таким образом, управление u_t будет вычисляться из уравнения (3.10), которое будем называть *адаптивным регулятором*.

Теорема 2. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям **П.1**, **П.2** с неизвестным вектором параметров $\theta = (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$. Пусть объект управляется адаптивным регулятором (3.10) и используется алгоритм оценивания (3.7)–(3.9) с параметром мертвой зоны $\varepsilon \leq (1 - \bar{\delta}_y)/(2(2 + C_u))$. Тогда при любых начальных данных в замкнутой системе управления (2.1), (3.10) полиэдральные оценки Θ_t и векторные оценки θ_t не изменяются при всех достаточно больших t и

$$(3.11) \quad \|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J(\theta_\infty, y^*) + K_{\theta_\infty} \varepsilon \leq J(\theta, y^*) + K\varepsilon,$$

где $\theta_\infty = (\xi_\infty^\top, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty})$ – финальное значение оценок θ_t и

$$(3.12) \quad K_{\theta_\infty} = \frac{1 + (2 + \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss} + (\delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} \|y^*\|_{ss})(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|)}{(1 - \delta_{y,\infty} - \varepsilon(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|))^2},$$

$$K = \frac{4(1 + 2\|y^*\|_{ss} + C_u + (\delta_{w,\infty} + \bar{\delta}_y \|y^*\|_{ss})(2 + C_u))}{(1 - \bar{\delta}_y)^2}.$$

Доказательство теоремы 2. Докажем, что при каждом изменении оценки θ_t расстояние от θ_t до полупространства Ω_{t+1} больше ε . Действительно, θ_t изменяется только если

$$\psi_{t+1}^\top \theta_t < \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

Поскольку $\psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1}$ для любого $\hat{\theta} \in \Omega_{t+1}$, то

$$|\psi_{t+1}| |\hat{\theta} - \theta_t| \geq |\psi_{t+1}^\top (\hat{\theta} - \theta_t)| > \varepsilon |\psi_{t+1}|$$

и, следовательно, $|\hat{\theta} - \theta_t| > \varepsilon$ для любого $\hat{\theta} \in \Omega_{t+1}$. Из этого следует, что после изменения оценки Θ_t на оценку $\Theta_{t+1} \subset \Omega_{t+1}$ монотонно убывающая по включению последовательность оценок Θ_t не будет в дальнейшем пересекаться с ε -окрестностью точки $\theta_t \in \Theta_t$, при этом не попадающие в будущие оценки Θ_s , $s > t$, $\varepsilon/2$ -окрестности оценок θ_t не пересекаются. Тогда число возможных изменений оценок Θ_t и θ_t будет заведомо конечным, если оценки θ_t принимают значения только в ограниченном множестве. Для доказательства ограниченности оценок θ_t заметим, что $\theta \in \Omega_t$ при всех t и поэтому $\theta \in \Theta_t$ при всех t . Тогда из (3.9) следует $J(\theta_t, y^*) \leq J(\theta, y^*)$ при всех t , и все оценки θ_t лежат

в ограниченном множестве $\{\hat{\theta} \mid J(\hat{\theta}, y^*) \leq J(\theta, y^*)\}$. Ввиду конечного числа изменений оценок θ_t

$$(3.13) \quad \exists t_* \forall t \geq t_* \quad \theta_t = \theta_\infty = (\xi_\infty^\top, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty}) \wedge \psi_{t+1}^\top \theta_\infty \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

Неравенства (3.13) гарантируют, что при всех $t \geq t^*$ и $\mu \geq \max(n, m)$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t| \leq \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} p_{t+1} + \varepsilon (|y_{t-n+1}^t| + |u_{t-m+1}^t| + p_{t+1} + 1) \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) p_{t+1} + \varepsilon |u_{t-m+1}^t|. \end{aligned}$$

Неравенства (3.14) позволяет рассматривать выход y для всех $t \geq t^*$ как выход модели (2.1) с параметрами ξ_∞ , $\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon$, $\delta_{w,\infty} + \varepsilon$ вместо ξ , δ_y , δ_w соответственно и с дополнительной неопределенностью в канале управления, соответствующей слагаемому $\varepsilon |u_{t-m+1}^t|$ с коэффициентом усиления ε . Тогда по теореме 8 [13]

$$(3.15) \quad \|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq \frac{\delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon + \varepsilon \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss}}{1 - (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) - \varepsilon \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|}.$$

Из определения (3.9) оптимальных оценок θ_t и включений $\theta \in \Theta_t$ при всех t следует ключевое неравенство

$$(3.16) \quad J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*).$$

Для сравнения верхней оценки (3.15) и $J(\theta_\infty, y^*)$ и вычисления постоянной K_{θ_∞} в (3.11) достаточно воспользоваться неравенством

$$\frac{C_1 + \varepsilon_1}{C_2 - \varepsilon_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{C_2(C_2 - \varepsilon_2)} \leq \frac{\varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{(C_2 - \varepsilon_2)^2}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} C_1 &= \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} \|y^*\|_{ss}, & \varepsilon_1 &= \varepsilon(1 + (2 + \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss}), \\ C_2 &= 1 - \delta_{y,\infty} \leq 1, & \varepsilon_2 &= \varepsilon(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|). \end{aligned}$$

Формула для постоянной K из неравенства (3.11) следует из формулы для K_{θ_∞} после применения неравенств

$$\begin{aligned} & \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\| \leq C_u, \\ & \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\| \leq C_u, \\ & \varepsilon(2 + C_u) \leq (1 - \bar{\delta}_y)/2. \end{aligned}$$

Наконец, из неравенств $K_{\theta_\infty} \leq K$ и (3.16) следует справедливость правого неравенства в (3.11). Теорема доказана.

Замечание 1. Последнее неравенство в (3.11) гарантирует решение задачи 1 с неизвестной верхней оценкой $J(\theta, y^*) + K\varepsilon$. Оно же позволяет оценивать эту неизвестную верхнюю оценку снизу. Действительно, вычисляемые в каждый момент времени текущие оптимальные значения показателя качества $J(\theta_t, y^*)$, не сфальсифицированные данными измерений на промежутке $[0, t]$, сходятся снизу за конечное, но неизвестное, время к предельному значению $J(\theta_\infty, y^*)$. Более того, если на некотором достаточно длинном интервале времени оценка θ_t не изменяется, то оценка $J(\theta_t, y^*) + K\theta_t\varepsilon$ становится *верной верхней оценкой* ошибки слежения, поскольку для оценки θ_t выполнено уравнение модели, при этом вычисление постоянной $K\theta_t$ — относительно простая задача. Если при этом вычисленное значение $K\theta_t\varepsilon$ хуже желаемой точности, значение параметра мертвой зоны ε можно уменьшить.

Замечание 2. Из способа доказательства конечности числа возможных изменений оценок Θ_t и θ_t за счет исключения шаров радиуса $\varepsilon/2$ следует грубая оценка числа возможных коррекций оценок порядка $(1/\varepsilon)^{n+m}$, соответствующая методу перебора по сетке размером порядка ε . Эта оценка представляется излишне грубой по двум причинам. Во-первых, алгоритм оценивания (3.7)–(3.9) осуществляет целенаправленный перебор оценок θ_t в порядке возрастания согласованного с измерениями показателя качества $J(\theta_t, y^*)$ и, во-вторых, накопление информации о неизвестных параметрах идет наиболее эффективно, при этом из полиэдральных оценок исключаются не просто шары, а “максимальные” не согласованные с измерениями области в пространстве оценок $\hat{\theta}$. Результаты моделирования подтверждают излишнюю грубость указанной выше экспоненциальной по размерности $\dim \xi$ оценки, однако получение более адекватной алгоритму (3.7)–(3.9) верхней оценки числа возможных коррекций Θ_t и θ_t является открытой математической задачей.

Замечание 3. Решение задачи 2 обеспечивается тем же алгоритмом оценивания, что и решение задачи 1, после замены показателя качества $J(\theta, y^*)$ в (3.9) показателем качества $J_2(\theta, Y^*)$. Для решения задачи 3 показатель качества $J(\hat{\theta}, y^*)$ в (3.9) следует заменить показателем качества

$$\tilde{J}_3(\hat{\theta}, y^*) = \frac{\hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y S_{t+1}}{1 - \hat{\delta}_y}, \quad S_{t+1} := \sup_{k \leq t+1} |y_k^*|,$$

где S_{t+1} вычисляется рекуррентно: $S_{t+1} = \max(S_t, |y_{t+1}^*|)$. Последовательность S_t монотонно снизу сходится к $\|y^*\|$, что гарантирует справедливость аналогичного (3.16) ключевого неравенства для показателя качества $J_3(\theta, y^*)$.

3.3. Синтез на основе полиэдрального оценивания фиксированной сложности

Показатели качества во всех сформулированных в разделе 2 задачах являются дробно-линейными функциями вектора θ и, следовательно, их поверхности уровня — гиперплоскости в пространстве оцениваемых параметров. Это обстоятельство открывает возможность использования полиэдральных оценок с фиксированным числом линейных неравенств.

Алгоритм полиэдрального оценивания с N неравенствами. Выберем число $N \geq n + m + 2 = \dim \theta$ линейных неравенств (3.6), используемых для описа-

ния полиэдральных оценок Θ_t^N , и параметр мертвой зоны $\varepsilon > 0$. В качестве начальной оценки θ_0 выберем любую из вершин априорного полиэдра Θ_0 вида $\theta_0 = (\xi_0^\top, 0, 0)^\top$. При этом ξ_0 будет одной из вершин априорного множества коэффициентов Ξ и

$$J(\theta_0, y^*) = 0 = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0} J(\hat{\theta}, y^*).$$

В качестве начальной полиэдральной оценки Θ_0^N возьмем \mathbb{R}^{n+m+2} , т.е. описание Θ_0^N не содержит ни одного неравенства (3.6). Пусть θ_t – векторная оценка и Θ_t^N – полиэдральная оценка неизвестного вектора θ в момент t . После измерения выхода y_{t+1} в момент $t + 1$ положим

$$(3.17) \quad \theta_{t+1} := \theta_t, \quad \Theta_{t+1}^N := \Theta_t^N, \quad \text{если } \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(3.18) \quad \theta_{t+1} := \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*), \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} \right\},$$

где θ_{t+1} – вершина полиэдра $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$, являющаяся решением задачи дробно-линейного программирования (3.18). Множественная оценка Θ_t обновляется по правилу

$$(3.19) \quad \Theta_{t+1}^N = \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1},$$

если число неравенств в описании Θ_t^N строго меньше N . Если же число неравенств достигло значения N , то новое неравенство (3.6) включается в описание Θ_{t+1}^N вместо любого из неравенств в описании Θ_t^N , на границе которого не лежит θ_{t+1} . В вырожденном случае, когда вершина θ_{t+1} оказалась на границе более $n + m + 2$ неравенств из описания $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$, оценка θ_{t+1} пересчитывается по формуле (3.18) с заменой неравенства, задающего полупространство Ω_{t+1} , на ослабленное неравенство $\psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon_1 |\psi_{t+1}|$ со сколь угодно малым $\varepsilon_1 > 0$ для устранения вырожденного случая.

Таким образом, число неравенств в описании Θ_t^N увеличивается на единицу в некоторые начальные моменты времени и не изменяется, достигнув значения N . Отметим, что вычисление оценок θ_{t+1} согласно (3.18) – задача дробно-линейного программирования в \mathbb{R}^{n+m+2} с не более $l + 3 + N + 1$ линейных ограничений ($l + 3$ – число неравенств в описании априорного множества Θ_0). Известно (см., например, [23]), что любая задача дробно-линейного программирования стандартным образом сводится к задаче линейного программирования посредством добавления одной вещественной переменной, одного линейного неравенства и одного линейного равенства.

Теорема 3. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям П.1, П.2 с неизвестным вектором параметров $\theta = (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$. Пусть объект управляется адаптивным регулятором (3.10) с использованием алгоритма полиэдрального оценивания с N неравенствами и $\varepsilon \leq (1 - \delta_y)/(2(2 + C_u))$. Тогда при любых начальных данных в замкнутой системе:

1) последовательность $J(\theta_t, y^*)$ возрастающая и

$$(3.20) \quad J(\theta_t, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N} J(\hat{\theta}, y^*) \leq J(\theta, y^*) \quad \forall t;$$

2) если оценки Θ_t^N и θ_t не изменяются при всех достаточно больших t , то справедливы неравенства (3.11).

Доказательство теоремы 3. Доказательство монотонности последовательности $J(\theta_t, y^*)$ проведем индукцией по времени t . На начальном промежутке времени, пока количество неравенств в оценках Θ_t^N не достигло N , полиэдральные оценки Θ_t^N убывают по включению, и возрастание последовательности $J(\theta_t, y^*)$ и равенство в (3.20) прямо следуют из (3.18) и равенств $\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{s+1}$. Докажем индукционный переход. Пусть возрастание $J(\theta_t, y^*)$ имеет место до момента t включительно, справедливо равенство в (3.20) и количество линейных неравенств в описании Θ_t^N равно N . В момент времени $t + 1$ после вычисления оценки θ_{t+1} согласно формуле (3.18) неравенство

$$J(\theta_{t+1}, y^*) \geq J(\theta_t, y^*)$$

следует из включения $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_t^N$ и равенства (3.20), справедливого в силу индукционного предположения. Покажем, что после изменения Θ_t^N на Θ_{t+1}^N

$$(3.21) \quad \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N} J(\hat{\theta}, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) = J(\theta_{t+1}, y^*)$$

несмотря на замену одного из неравенств полиэдра Θ_t^N на неравенство, описывающее Ω_{t+1} . Правое равенство в (3.21) является определением θ_{t+1} в (3.18). Пусть C_{t+1} – конус с вершиной θ_{t+1} , определенный системой $n + m + 2$ неравенств из описания $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$, на границе которых лежит θ_{t+1} . Тогда $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N \subset C_{t+1}$, так как в описании $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N$ заведомо входят неравенства, задающие конус C_{t+1} . Из включений $\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N \subset C_{t+1}$ следует

$$J(\theta_{t+1}, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) \geq \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N} J(\hat{\theta}, y^*) \geq \min_{\hat{\theta} \in C_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Теперь для доказательства (3.21) достаточно показать, что

$$(3.22) \quad \min_{\hat{\theta} \in C_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) = J(\theta_{t+1}, y^*).$$

Это равенство следует из того, что линии уровня дробно-линейного показателя качества $J(\hat{\theta}, y^*)$ – гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+m+2} :

$$J(\hat{\theta}, y^*) = C \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y(\|y^*\|_{ss} + C) = C.$$

В малой окрестности θ_{t+1} векторы из полиэдра $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$ описываются только неравенствами из описания конуса C_{t+1} и лежат в полупространстве

$$\left\{ \hat{\theta} \mid J(\hat{\theta}, y^*) \geq J(\theta_{t+1}, y^*) \right\}.$$

Из этого следует, что конус C_t с вершиной θ_{t+1} весь лежит в этом полупространстве и, следовательно, справедливо равенство (3.22).

Доказательство второго утверждения теоремы аналогично доказательству неравенств (3.11) в теореме 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Формально множественными оценками неизвестного вектора параметров θ следовало бы называть полиэдры $\Theta_0 \cap \Theta_t^N$, поскольку $\operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t^N} J(\hat{\theta}, y^*)$ может оказаться вне априорного полиэдра Θ_0 . Однако при достаточно разнообразных возмущениях такое случается на относительно коротком начальном этапе настройки оценок θ_t , когда $\delta_{yt} = 0$ или $\delta_{wt} = 0$, и с некоторого момента полиэдры Θ_t^N фактически оказываются множественными оценками θ . Алгоритм полиэдрального оценивания с N неравенствами приведен выше в той форме, в какой он применялся при численном моделировании, описанном в разделе 4, при этом при добавлении нового неравенства (3.6) в оценку Θ_{t+1}^N из описания Θ_t^N удалялось неравенство, граница которого наиболее удалена от новой оценки θ_{t+1} .

Замечание 5. Второе утверждение теоремы 3 базируется на предположении о сходимости оценок за конечное время. В [24] была доказана конечная сходимость конусного алгоритма оценивания (соответствующего случаю $N = \dim \theta$) для размерностей 2 и 3. Этот результат остается справедливым при любом числе запоминаемых неравенств. Доказательство конечной сходимости для размерностей выше трех остается открытой проблемой.

4. Моделирование

Для численного моделирования выбрана неустойчивая и минимально-фазовая модель (2.1) с полюсами, т.е. корнями $a(\lambda)$, равными 0,8, 0,9 и $0,8 \pm \pm 0,4i$, с нулями, т.е. корнями $b(\lambda)$, равными 1,1 и 1,2 и с коэффициентом $b_1 = 2$. Этим параметрам соответствует (с точностью 10^{-4}) вектор коэффициентов

$$\xi = (-4,3611, 7,3611, -5,7292, 1,7361, 2, -3,4848, 1,5152)^\top.$$

Таким образом, размерность вектора оцениваемых параметров θ равна 9. Суммарное возмущение v моделируется в виде

$$(4.1) \quad v_t = w_t + 0,5 \kappa_t p_t,$$

где w_t, κ_t – последовательности независимых равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$ случайных величин, так что $\delta_y = 0,5, \delta_w = 1$. Память неопределенности $\mu = 10$, параметр мертвой зоны $\varepsilon = 0,001$. Априорные ограничения на вектор θ имеют вид

$$(-9, 3, -10, -3, 0,1, -8, -3) \leq \xi^\top \leq (3, 15, 2, 9, 10, 4, 9),$$

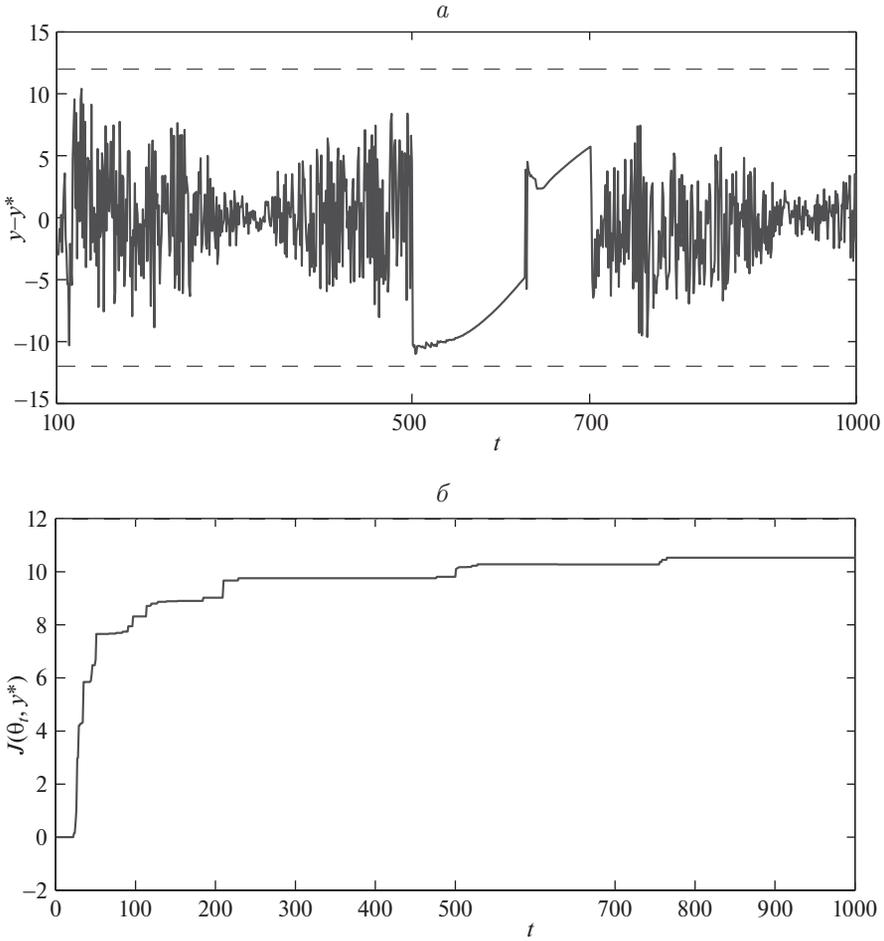


Рис. 1. Алгоритм (3.9): графики ошибки слежения (а) и $J(\theta_t, y^*)$ (б).

где неравенство понимается покомпонентно, т.е. вектор ξ лежит в кубе в \mathbf{R}^{n+m} со стороной 12 и

$$\begin{aligned}
 & b_1 \geq 0,1, \quad 0,8 \geq \delta_y \geq 0, \quad \delta_w \geq 0, \\
 & b_1 - b_3 \geq 0,01, \quad b_1 - b_2 + b_3 \geq 0,01, \quad b_1 + b_2 + b_3 \geq 0,01.
 \end{aligned}$$

Неравенства в нижней строке эквивалентны условию минимально-фазовости модели, если в правых частях этих неравенств вместо 0,01 поставить нули. Замена нуля числом 0,01 в правых частях неравенств нижней строки дает необходимый отступ от границы множества минимально-фазовых моделей. Начальные значения y_1, y_2, y_3, y_4 – случайные из отрезка $[-1, 1]$, u_1, u_2, u_3, u_4 – нули.

Для иллюстрации поведения адаптивной системы при наихудших возмущениях внешнее возмущение и неопределенность на промежутке $[500, 700]$ имеют максимальную амплитуду,

$$v_{t+1} = (\delta_w + \delta_y p_{t+1}) \text{sign}(\xi_t^\top \varphi_t),$$

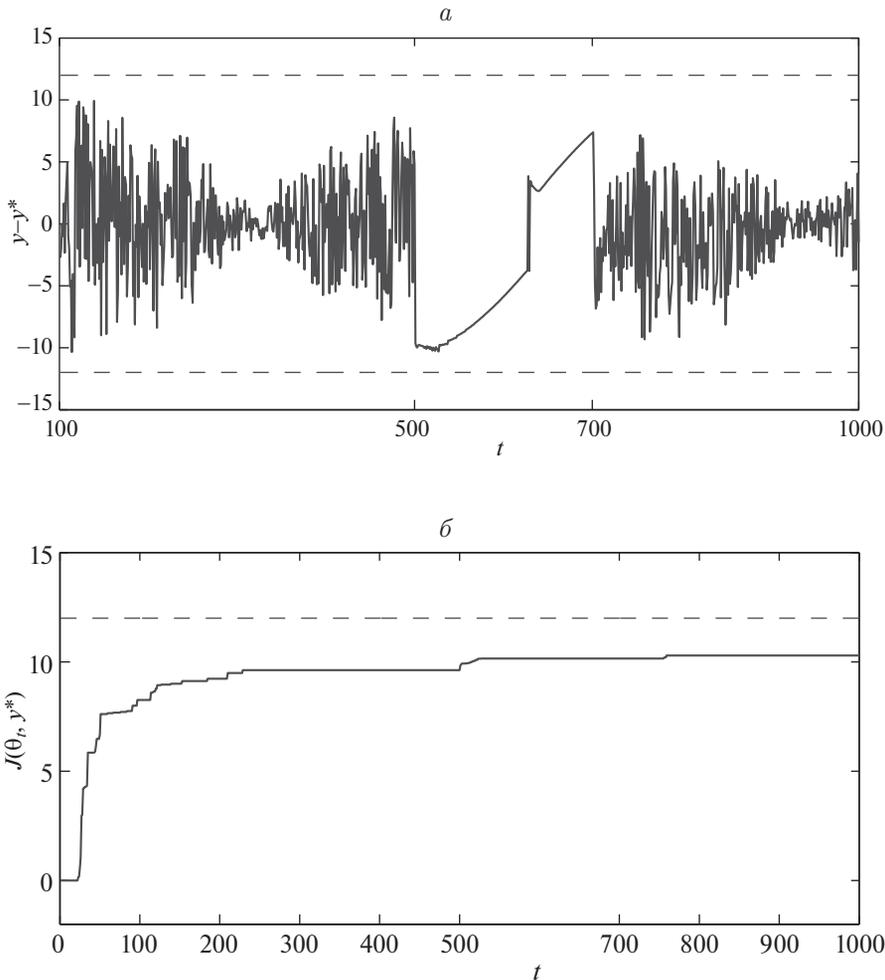


Рис. 2. Алгоритм (3.18): графики ошибки слежения (а) и $J(\theta_t, y^*)$ (б).

максимизируя абсолютную величину выхода. Задающий сигнал $y_t^* = 10 \sin(0,001 t)$ – периодический и $\|y_t^*\|_{ss} = 10$. Пунктирные линии на графиках ошибки слежения соответствуют неизвестным конструктору адаптивной системы оптимальным асимптотическим границам для ошибки слежения $\pm J(\theta, y^*) = \pm 12$.

Графики ошибки слежения и значений $J(\theta_t, y^*)$ для алгоритмов оценивания (3.9) и (3.18) приводятся соответственно на рис. 1 и 2 для одинаковых реализаций случайных начальных данных и w_t и κ_t из (4.1). Использованное при моделировании число запоминаемых неравенств $N = 2 \dim \theta = 18$ в алгоритме оценивания (3.18) соответствует полиэдру Θ_t^N , в каждом из которых вершинами являются текущая оценка θ_t и ее девять смежных вершин. Число коррекций оценок для алгоритмов (3.9) и (3.18) в многочисленных экспериментах находилось в основном в промежутках 50–70 и 60–80 коррекций соответственно. Время счета в экспериментах на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2,50GHz варьировалось от 1,5 до 3 сек.

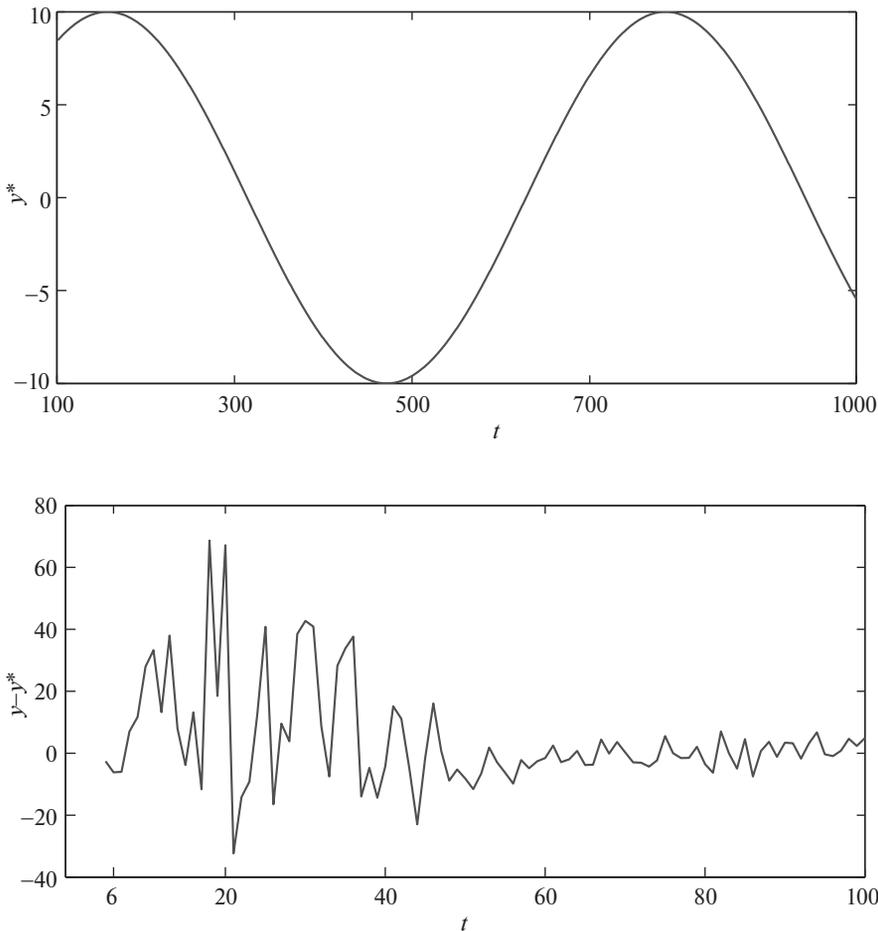


Рис. 3. График задающего сигнала y^* и график ошибки слежения на начальном промежутке $[0, 100]$ для алгоритм (3.18).

На графиках рис. 1,б и 2,б иллюстрируется *онлайн верификация* текущих оценок. В каждый момент времени t вычисляемое значение $J(\theta_t, y^*)$ является, с точностью $K_{\theta_t}\varepsilon$, верхней оценкой ошибки слежения, согласованной с данными измерений. При этом гарантируется справедливость этой верхней оценки, если текущая оценка θ_t не изменяется. Например, последней обновленной оценке алгоритма (3.9)

$$\theta_{765} = \left(-4,5459, 7,6979, -6,0380, 1,8589, 2,0574, \right. \\ \left. -3,6490, 1,6233, 0,3448, 3,4526 \right)^\top$$

неизвестного вектора

$$\theta = \left(-4,3611, 7,3611, -5,7292, 1,7361, 2,0000, \right. \\ \left. -3,4848, 1,5152, 0,5000, 1,0000 \right)^\top$$

соответствует $J(\theta_{765}, y^*) = 10.5314 < 12 = J(\theta, y^*)$, а последней оценке алгоритма (3.18)

$$\theta_{798} \left(-6,1669, 11,3053, -9,1758, 3,0296, 2,7700, \right. \\ \left. -5,3721, 2,6408, 0,3120, 3,9614 \right)^T$$

соответствует меньшее значение $J(\theta_{798}, y^*) = 10,2939$, поскольку в алгоритме (3.18) задействовано меньшее число целевых неравенств. Заметим, что, несмотря на заметное различие последних оценок алгоритмов (3.9) и (3.18), эти оценки согласованы с измерениями на финальных промежутках длиной более 200 тактов и иллюстрируют принцип неопределенности Р.Е. Калмана.

На рис. 3 представлены графики задающего сигнала y^* и переходного процесса для алгоритма (3.18). График задающего сигнала позволяет наглядно увидеть, как в приведенных численных экспериментах значения периодического сигнала y^* проявляются в виде “пульсации” ошибки слежения в установившемся режиме.

В целом результаты моделирования показали высокую эффективность обоих алгоритмов оценивания в задаче адаптивного оптимального слежения с 9 оцениваемыми параметрами. Алгоритм оценивания (3.18) с фиксированным числом неравенств представляется перспективным и для задач с большим числом оцениваемых параметров.

5. Заключение

Р.Е. Калман завершил свою работу [22] словами:

“Проблема шума, безусловно, является центральной проблемой всей прикладной математики. Она должна быть разрешена при помощи математики, а не априорной гипотезы”.

Настоящая работа посвящена проблеме оптимального управления в условиях шума и соответствует процитированному в разделе 2 принципу неопределенности. Для минимально-фазового объекта с неизвестным вектором коэффициентов, неопределенностью в канале выхода с неизвестным коэффициентом усиления и ограниченным внешним возмущением с неизвестной верхней границей впервые решена задача адаптивного оптимального робастного слежения. Показана зависимость постановки оптимальной задачи от априорной информации о задающем сигнале. Решение задачи получено при минимальных априорных предположениях в рамках детерминированной теории робастного управления в ℓ_1 -постановке, не требует использования тестовых или пробных сигналов и реализует максимальные возможности обратной связи. Главное достоинство предложенных алгоритмов оценивания заключается в обеспечении асимптотической *субоптимальности адаптивного управления*. Важнейшим, помимо оптимальности, достоинством используемого подхода является *онлайн верификация* не только текущей оценки модели, но и априорных предположений об управляемом объекте, неопределенности и внешнем возмущении. Такая верификация не доступна другим методам синтеза адаптивного управления, в том числе в стохастических постановках. Результаты численного моделирования показали эффективность предложенных

алгоритмов, и эти алгоритмы представляются перспективными для практических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall, 1996.
2. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. Kosut R., Goodwin G., Polis M. (Eds.) Special issue on system identification for robust control design // IEEE Transactions Automatic Control. 1992. V. 37. No. 7.
4. Smith R.S., Dahleh M. (Eds.) The Modeling of Uncertainty in Control Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences). V. 192. London, U.K.: Springer-Verlag, 1994.
5. Ljung L., Vicino A. (Eds.) Special Issue on System Identification // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. V. 50. No. 10.
6. Soderstrom T., Van Den Hof P., Wahlberg B., Weiland S. (Eds.) Special Issue on Data-Based Modelling and System Identification // Automatica. 2005. V. 41. No. 3.
7. Regruto D., Dabbene F. (Eds.) Special Issue on Relaxation Methods in Identification and Estimation Problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59. No. 11.
8. Ljung L., Goodwin G., Agüero J.C., Chen T. Model Error Modeling and Stochastic Embedding // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 28. P. 75–79.
9. Delgado R.A., Goodwin G.C., Carvajal R., Agüero J.C. A novel approach to model error modelling using the expectation-maximization algorithm // In IEEE 51st Conference on Decision and Control (CDC). 2012. P. 7327–7332.
10. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. AC-36. No. 4. P. 398–412.
11. Khammash M.H. Robust steady-state tracking // IEEE Trans. Automat. Control. 1995 V. 40. No. 11. P. 1872–1880.
12. Khammash M.H. Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42. P. 1730–1P734.
13. Соколов В.Ф. Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в ℓ_1 -метрике // АиТ. 1999. № 1. С. 101–112.
Sokolov V.F. Asymptotic Robust Performance of the Discrete Tracking System in the ℓ_1 -metric // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 1. Part 2. P. 82–91.
14. Sokolov V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. V. 42(5). P. 363–377.
15. Smith R. Model Validation and Parameter Identification for Systems in H_∞ and ℓ_1 // Proc. American Control Conf. 1992. P. 2852–2856.
16. Bianchi F., Sánchez-Peña R. Robust identification/invalidation in an LPV framework // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2010. V. 20. P. 301–312.
17. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981.
18. Sokolov V.F. Adaptive suboptimal control of a linear system with bounded disturbances // Syst. Control Lett. 1985. V. 6. P. 93–98.

19. *Соколов В.Ф.* Адаптивное субоптимальное управление в случае ограниченной помехи // *АиТ.* 1985. № 9. С. 78–86.
Sokolov V.F. Adaptive Suboptimal Control in the Case of Constrained Noise // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. P. 1. P. 1131–1139.
20. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1 -постановке // *АиТ.* 1998. № 3. С. 107–131.
Sokolov V.F. Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the ℓ_1 -statement // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 3. P. 2. P. 392–411.
21. *Sokolov V.F.* Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system // *Systems Control Lett.* 2001. V. 42. P. 379–393.
22. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // *Успехи математических наук.* 1985. Т. 40. Вып. 4(244). С. 27–41.
23. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. N.Y. Cambridge University Press. 2004.
24. *Соколов В.Ф.* Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // *АиТ.* 1993. № 12. С. 127–139.
Sokolov V.F. Adaptive Minimax Control Based on Recursive Linear Programming // *Autom. Remote Control.* 1993. V. 54. No. 12. P. 1835–1845.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 25.11.2019

После доработки 24.09.2020

Принята к публикации 15.01.2021

Управление в технических системах

© 2021 г. В.В. ВОРОБЬЕВ, д-р техн. наук (v.vorobjev@mstuca.aero),
В.Л. КУЗНЕЦОВ, д-р техн. наук (v.kuznetsov@mstuca.aero),
В.Д. ШАРОВ, д-р техн. наук (v.sharov@mstuca.aero)
(Московский государственный технический университет гражданской авиации)

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ УРОВНЯ БЕЗОПАСНОСТИ ПОЛЕТОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ АЗН-В

В документе Радиотехнической комиссии по аэронавтике (RTCA) [1] разработана методика оценки уровня безопасности полетов при использовании перспективной системы автоматического зависимого наблюдения в вещательном режиме (АЗН-В), предназначенная для сертификации системы управления воздушным движением. Как показал приведенный в статье анализ, в основе этой методики лежит ошибочная гипотеза, использование которой приводит к заниженным требованиям к сертифицируемой системе АЗН-В. В рассмотренном в статье примере показано, что отказ от этой ошибочной гипотезы может приводить к ужесточению требований на порядок. Для получения корректных результатов в статье предложена простая для расчетов модификация методики, лишенная этого, вообще говоря, серьезного недостатка. Использование предложенной методики проиллюстрировано на примере.

Ключевые слова: АЗН-В, оценка уровня безопасности полетов, фактор опасности, целевой уровень безопасности, вероятность авиационного происшествия.

DOI: 10.31857/S0005231021080067

1. Введение

Разрабатываемый Международной организацией гражданской авиации (ИКАО) переход на принципиально новую систему обслуживания воздушного движения (ОВД), связанную с использованием спутниковых систем, новых самолетных ответчиков и радиолокационной информации, должен начаться в США и в Европе уже в этом году [2, 3]. В его основе лежит принцип совместной ситуационной осведомленности, когда информация о координатах и скоростях воздушных судов (ВС) доступна не только наземным службам, но и каждому участнику воздушного движения (ВД). Общие положения, определяющие требования к этой новой системе ОВД, сформулированы в циркуляре ИКАО [4]. Появлению этого документа предшествовала большая работа, связанная с подготовкой и разработкой моделей, позволяющих оценить надежность, эффективность и безопасность вводимых новых технологий.

Так, например, оперативной группой, созданной при сотрудничестве Евроконтроля и Радиотехнической комиссии по аэронавтике (*Radio Technical*

Commission for Aeronautics — RTCA), был опубликован объемный документ, определяющий требования к системе АЗН-В в зоне радарного покрытия [1]. Во всех сценариях, рассмотренных в этом документе, АЗН-В используется как основной источник информации при наблюдении за воздушной обстановкой, а радар выступает как резервный источник, используемый лишь во время потери или ухудшения данных, поступающих от АЗН-В. Кроме того, результаты радиолокационных измерений используются с целью проверки согласованности данных двух систем наблюдения.

Аналогичная работа проводится и в Российской Федерации. Реализуются пилотные проекты в укрупненных центрах Единой системы организации воздушного движения (ЕС ОрВД) [5–7], а в апреле 2018 г. была утверждена Концепция внедрения автоматического зависимого наблюдения на основе единого стандарта с развитием до функционала многопозиционных систем наблюдения [8], начали реализовываться пилотные проекты в укрупненных центрах ЕС ОрВД.

Требования, предъявляемые к оценке состояния безопасности системы наблюдения ОВД при использовании системы АЗН-В, изложены в [4]. Однако в этом документе концепция оценки представлена только в общих чертах. Поэтому за основу, как правило, берется методика, разработанная и опубликованная в [1]. Она была апробирована авиационными агентствами Австралии и США, и включает в себя оценки эксплуатационных рисков и разработку, и реализацию мер по их снижению до приемлемого уровня.

В большинстве последующих работ [9–12], посвященных этой тематике, рассматривались вопросы, связанные в основном с построением и анализом дерева отказов.

Так, в [9] дается обзор существующих методов оценки безопасности полетов с использованием АЗН-В, отмечаются их слабые стороны и предлагается свой метод, основанный на анализе дерева отказов. В [10] представлен обстоятельный обзор подходов к задаче построения дерева отказов. Работы [11–13] также посвящены этой теме. Тот факт, что анализ дерева событий ускользает от внимания исследователей, объясняется его относительной простотой в сравнении с существенно более сложной задачей построения дерева отказов. Видимо, этим обстоятельством объясняется отсутствие работ, посвященных анализу дерева событий и вскрывающих гипотезу, лежащую «на поверхности» и заложенную неявно в алгоритм RTCA.

Подчеркнем здесь еще раз, что принятие этой, вообще говоря, ошибочной гипотезы приводит к неоправданно заниженным требованиям методики RTCA к уровню безопасности полетов ВС. В этой статье анализируется общая методика, представленная в [1], выделяется отмеченная латентная гипотеза и предлагается относительно несложно реализуемая модернизация, лишенная отмеченного серьезного недостатка.

2. Латентная гипотеза в методике RTCA

Система АЗН-В представляет достаточно сложную структуру, для построения математической модели, которой в [1] выдвинуто большое количество технических гипотез, перечисление и обсуждение которых занимает зна-

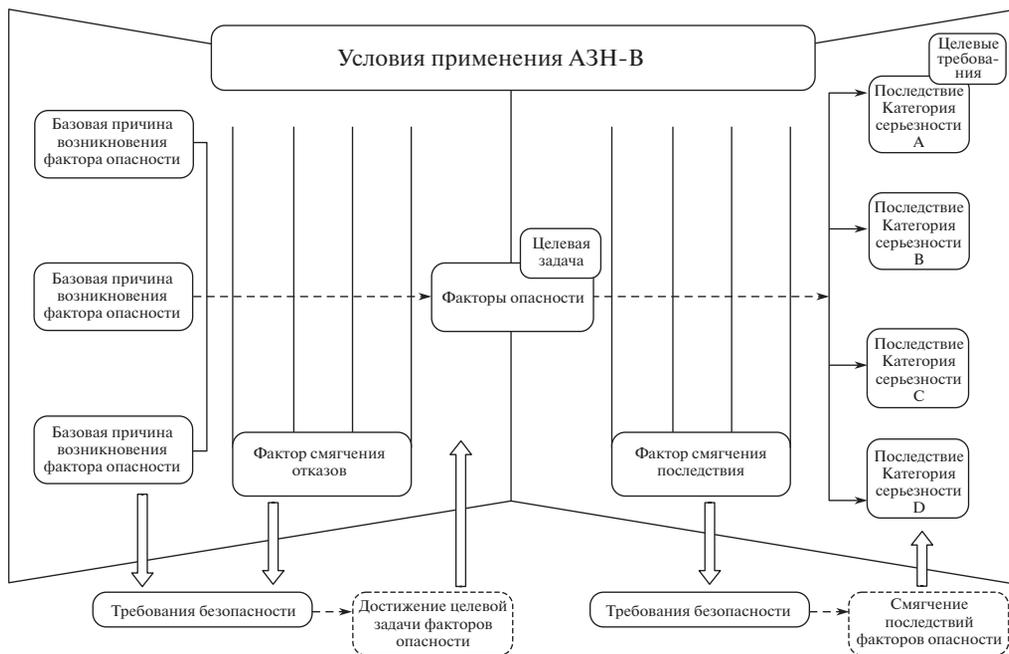


Иллюстрация к методике оценки состояния безопасности.

чительную долю объема разработанного документа. Принимая их, отметим здесь еще некоторые моменты, которые ускользнули от внимания разработчиков этого фундаментального документа. Принимаемые в методике гипотезы важны, поскольку сделанные допущения являются ключевым вкладом в работу по определению требований к системе АЗН-В. Они обеспечивают основу адекватности рассматриваемой модели, и должны быть тщательно проанализированы. Отметим, что все требования к системе наблюдения, полученные в результате проводимого анализа, адекватны лишь тогда, когда вся совокупность принятых допущений выполняется. Поэтому любая ситуация, которая не вписывается в систему принятых гипотез, может быть охарактеризована иной совокупностью требований. Такие отклонения должны учитываться при проведении анализа конкретных систем.

Рассмотрим подробнее общую схему используемой методики, базирующейся на подходе вероятностной оценки безопасности. В основе методики лежит выделение некоторых совокупностей состояний системы, именуемых в соответствии со сложившейся практикой факторами опасности (ΦO), с которыми могут столкнуться экипаж ВС и наземные службы. В [1] выделено 21 такое состояние. Далее, для каждого ΦO строится дерево событий, описывающее все возможные последствия с указанием вероятностей реализации соответствующих ветвей и тяжести последствий, а также дерево отказов, приводящих к этому ΦO . Таким образом, проводится декомпозиция исходной задачи. Она распадается на 21 идейно близкую задачу существенно меньшей сложности. На рисунке представлен один из компонентов такой декомпозиции.

Математическая модель оценки риска негативных последствий отказов оборудования является дискретной стохастической моделью системы наблюдения ОВД, включающей два сегмента (наземный и бортовой), в которой

может реализовываться множество различных цепочек событий (реализаций случайного процесса).

Создание такой модели означает формирование всего множества возможных цепочек событий, начинающихся с возникновения отказа и заканчивающихся конкретным негативным исходом, с указанием вероятности реализации каждой такой цепочки.

Очевидно, что мощность такого множества (число различных цепочек) слишком велика для того, чтобы указанный выше подход к числовому описанию риска негативных последствий отказов мог быть реализован при внедрении АЗН-В в регионах. Поэтому в [1] был реализован упрощенный подход, базирующийся на утверждении о существовании состояний системы наблюдения ОВД, обладающих марковским свойством.

Гипотеза о марковости выглядит в приложении к рассматриваемой задаче следующим образом: если наступление ΦO зафиксировано, то вероятности сценариев развития дальнейших событий не зависят от того, в результате какого конкретно отказа возник этот ΦO .

Таким образом, все цепочки событий оказываются разбитыми на отдельные группы, объединяемые одним признаком — наличием события, именуемого ΦO . Очевидно, что число таких групп будет равно числу выделенных экспертами различных факторов опасности. Это, с одной стороны, позволяет существенно уменьшить множество различных сценариев развития событий (поскольку каждый раз рассматривается лишь один ΦO), а с другой стороны, упрощает расчет вероятности реализации того или иного сценария.

Последнее становится понятным из следующего представления модели. Пусть $\{a_i\} = A$ — множество различных так называемых базовых причин (отказов техники) возникновения негативных для ОВД последствий, $\{\Phi O_j\}$ — множество различных факторов опасности, а $\{b_k\} = B$ — множество негативных исходов, порожденных различными сценариями развития событий. Тогда вероятность появления какого-либо конечного негативного события $b_k \in B$ может быть оценена следующим образом:

$$(1) \quad P(b_k) = \sum_j \sum_i P(a_i, \Phi O_j, b_k) = \sum_j \sum_i P(b_k | \Phi O_j, a_i) \cdot P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i).$$

Здесь $P(a_i, \Phi O_j, b_k)$ — вероятность реализации одной из возможных цепочек развития событий.

В случае справедливости марковской гипотезы для ΦO_j получаем

$$P(b_k | \Phi O_j, a_i) = P(b_k | \Phi O_j).$$

Здесь учтено, что события a_i (отказы) порождают ΦO_j , т.е. предшествуют во времени его наступлению. Тогда выражение для вероятности появления конечного негативного исхода b_k (соотношение (1)) может быть записано в виде

$$(2) \quad P(b_k) = \sum_j P(b_k | \Phi O_j) \sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i) = \sum_j P(b_k | \Phi O_j) P(\Phi O_j).$$

Далее следует сформулировать гипотезу методики [1], которая в руководстве явно не выписана, но с необходимостью следует из алгоритма дальнейших предлагаемых расчетов.

Гипотеза. Будем полагать, что множество $\{\Phi O_j\}$ выбрано так, что сценарий, завершающийся событием b_k , может быть порожден при реализации лишь одного ΦO , например ΦO_j .

При выполнении этой гипотезы первое суммирование в (3) можно опустить.

Возвращаясь к основным положениям методики [1] получаем, что вероятность $P(b_k)$ может быть рассчитана как произведение вероятностей

$$(3) \quad P(b_k) = P(b_k | \Phi O_j) \cdot \left(\sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i) \right).$$

Второй множитель в (3) описывает вероятность появления конкретного ΦO , получаемого из анализа дерева отказов, а первый – вероятность наступления события b_k при условии, что ΦO_j зафиксирован – из дерева событий.

Под риском неблагоприятного исхода b_k понимают упорядоченную пару $\{P(b_k), C(b_k)\}$, объединяющую как вероятность исхода $P(b_k)$, так и функцию штрафа или оценку тяжести последствий этого исхода – $C(b_k)$.

Экспертами для каждого b_k выставляется функция штрафа $C(b_k)$, которую принято называть категорией серьезности последствия. Каждой категории серьезности поставлена в соответствии допустимая (приемлемая) частота ее (категории) появления или, что то же самое, максимально допустимая вероятность события – $P_{\max}(b_k)$ [14].

Для того чтобы риск был признан приемлемым, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(4) \quad P_{\max}(b_k) \geq P(b_k),$$

где $P(b_k)$ определено в (3). Поэтому $P_{\max}(b_k)$ обозначают в [1] как «целевое требование».

В случае, если неравенство (4) не выполняется, необходимо принимать дополнительные меры, направленные, например, на повышение надежности аппаратуры бортового или наземного сегментов АЗН-В.

Поскольку одному ΦO , как правило, соответствует несколько различных сценариев развития событий, то необходимо выбрать «худший» и убедиться в том, что для него тем не менее неравенство (4) выполняется.

В предложенной в [1] методике этот вопрос решается следующим образом. Вводится понятие «целевая задача», которая определяется как величина максимально допустимого значения вероятности появления j -го фактора опасности $P_{\text{целевая}}^j$. Поскольку, однако, требования ИКАО накладывают ограничения на вероятности появления опасных событий b_k , а не ΦO , возникает необходимость выразить $P_{\text{целевая}}^j$ через определенные ИКАО ограничения –
задача

величины $P_{\max}(b_k)$:

$$P_{\text{целевая}}^j = \min_k \left[\frac{P_{\max}(b_k)}{P(b_k | \Phi O_j)} \right],$$

рассматривая при этом «наихудший» вариант, соответствующий наименьшей вероятности. Вероятность реального появления ΦO_j , полученная на основании данных дерева отказов, $P(\Phi O_j) = (\sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i))$ не должна превышать $P_{\text{целевая}}^j$, т.е. должно выполняться условие:

$$(5) \quad \min_k \left[\frac{P_{\max}(b_k)}{P(b_k | \Phi O_j)} \right] \geq \left(\sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i) \right).$$

Если неравенство (5) не выполняется, то необходимо вводить новые демпфирующие барьеры.

Далее покажем, что в случае невыполнения отмеченной выше гипотезы проверка условия (5), да и просто введение целевой задачи указанным способом, приведет к заниженным требованиям к уровню безопасности.

3. Коррекция алгоритма RTCA

В случае отказа от гипотезы реализации единственного ΦO суммирование по j в (3) не может быть отброшено, и соотношение (3), а также следующие за ним уравнения становятся несправедливыми. Ошибочным становится также и приведенное в [1] выражение (5) для определения целевой задачи.

Проиллюстрируем ограниченность обсуждаемой гипотезы на примере события b_k – нарушению норм эшелонирования в контролируемом воздушном пространстве, относящегося к первой группе событий, характеризующей наибольшей тяжестью последствий. Рассмотрим ΦO_1 (в [1] обозначено как ОН01) – «Внезапное пропадание информации АЗН-В о местоположении одного ВС», и ΦO_2 (ОН02) – «Внезапное пропадание информации АЗН-В о местоположении нескольких ВС». И тот, и другой ΦO ведут к невозможности обеспечить соблюдение установленных норм эшелонирования в целом – к одному событию b_k . Отметим, что в соответствии с таблицей C-19a Summary of Safety Objectives per Hazard, приведенной в [1], к столкновению могут привести и проявления девяти других ΦO , а именно: ОН03, 04, 05 case2, 07, 08, 11, 12, 15, 16 case2.

Таким образом, в сумме по j в исходном соотношении (3) может стоять 11 слагаемых, каждое из которых заведомо больше нуля, и переход к соотношению (3) оказывается некорректен.

Система АЗН-В удовлетворяет требованиям безопасности полетов, если вероятность любого события b_k будет меньше величины приемлемого риска – $P_{\max}(b_k)$, определенного в [14]. Но тогда, в соответствии с (3), можно записать

$$(6) \quad P_{\max}(b_k) = \sum_{j=1}^m P_{\max}^j(b_k),$$

где $P_{\max}^j(b_k)$ – парциальный приемлемый риск наступления события b_k , вызванного j -м фактором опасности, m – количество соответствующих факторов. В рассмотренном примере $m = 11$. Отсюда нетрудно видеть, что из перечисленного множества ΦO найдется, по крайней мере, один фактор, при появлении которого приемлемый риск должен быть на порядок меньше, чем $P_{\max}(b_k)$.

Таким образом, если стремиться сохранить методикау RTCA, то в условии (5) величину $P_{\max}(b_k)$ необходимо заменить вероятностью $P_{\max}^j(b_k)$, которая для некоторых ΦO в рассмотренном в статье примере может быть на порядок меньше, чем приемлемый уровень:

$$(7) \quad \min_k \left[\frac{P_{\max}^j(b_k)}{P(b_k | \Phi O_j)} \right] = P_{\text{целевая}}^j \geq \left(\sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i) \right).$$

Из (7) следует, что найдутся такие ΦO , целевая задача для которых будет на порядок «жестче», чем рассчитанная по методике RTCA [1].

Приведенный анализ показывает, что рассматриваемая методика дает некорректные оценки уровня безопасности системы АЗН-В. Получить адекватные результаты возможно лишь при заданном множестве приемлемых вероятностей $\left\{ P_{\max}^j(b_k) \right\} j = 1, \dots, m$ появления события b_k как следствия наступления j -го ΦO .

К сожалению, такой простой способ модификации алгоритма не может быть реализован, поскольку ограничения накладываются на всю сумму (6), а не на ее отдельные члены. Поэтому предлагается следящая модификация методики оценки уровня безопасности АЗН-В.

В соотношении (7) для каждого j и выбранного для оценки b_k заменяем знак неравенства на знак равенства:

$$(8) \quad \left[\frac{P_{\max}^j(b_k)}{P(b_k | \Phi O_j)} \right] = \left(\sum_i P(\Phi O_j | a_i) \cdot P(a_i) \right) = P(\Phi O_j)$$

и рассматриваем его как уравнение для неизвестной величины $P_{\max}^j(b_k)$. Если бы числовое значение $P_{\max}^j(b_k)$ было известно, то соотношение (8) можно было бы рассматривать как предельное условие выполнимости (7).

Полученные из (8) значения парциальных приемлемых рисков $P_{\max}^j(b_k)$ суммируем (в соответствии с соотношением (6)) по всем j , для которых за наступлением ΦO_j следует событие b_k . Далее, если полученная сумма не превысит установленный в [14] приемлемый риск $P_{\max}(b_k)$, то сертифицируемая система АЗН-В соответствует предъявляемым требованиям безопасности, в противном случае необходимо установление дополнительных демпфирующих барьеров.

Проиллюстрируем результаты на рассмотренном ранее примере.

В таблице приведены результаты расчетов по модифицированной методике для события первой группы по классу серьезности последствия (потеря эшелонирования), полученные на основании данных [1].

Таблица

Фактор опасности	$P(\Phi O_j)$	Дерево событий	Сценарий уровня 1 (Cat.1), описание события	Вероятность	Сумма	$P_{\max}^j(b_k)E + 9$
1	2	3	4	5	6	7
ОН01	2.43 E-04	Figure C-9: ОН01	15 – Полная потеря эшелонирования	3.00E-09	3.1 E-9	7.5 E-4
			17 – Аналогично сцен. 15	1.00E-10		
ОН02	5.854 E-05	Figure C-11: ОН02	14 – Полная потеря эшелонирования	3.00E-05	3.1 E-5	1,8
			16 – Полная потеря эшелонирования	1.00E-06		
ОН03	2.030 E-04	Figure C-13: ОН03	10 – Полная потеря эшелонирования	1.00E-06	2.0 E-6	0,4
			12 – Аналогично сцен. 10	1.00E-06		
			16 – Полная потеря эшелонирования	3.00E-09		
ОН04	6.024 E-05	Figure C-15: ОН04	14 – Полная потеря эшелонирования	3.00E-05	3.1 E-5	1,9
			1 – Полная потеря эшелонирования	1.00E-06		
ОН05 case 2	2.34 E-08	Figure C-18: ОН05 Case 2 <i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	11 – Потенциальное столкновение	9.17E-05	2.1 E-4	4.9 E-3
			14 – Аналогично сцен. 11	9.20E-05		
			11a – Аналогично сцен. 11	2.76E-05		
			14a – Аналогично сцен. 14	9.20E-07		
ОН07	1.34 E-08	Figure C-29: ОН07 <i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	3 – Возможное столкновение с ВС или с землей	9.87E-03	3.0 E-2	0,4
			7 – Аналогично сцен. 3	9.90E-03		
			9 – Аналогично сцен. 3	1.00E-02		
			11 – Аналогично сцен. 3	1E-06		

Таблица (окончание)

1	2	3	4	5	6	7
ОН08	1.34 E-08	Figure C-31: ОН08 <i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	12 – Аналогично сцен. 3 Сцен. 3: Значительное снижение запаса безопасности и возможностей системы УВД	1.00E-06	1.0 E-6	1.3 E-5
ОН11	1.34 E-08	Figure C-35: ОН11	6 – Потенциально полная потеря эшелонирования	9.51E-06	1.3 E-5	1.7 E-4
		<i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	13 – Потенциально полная потеря эшелонирования 17 – Потенциально полная потеря эшелонирования	9.51E-08 2.94E-06		
ОН12	3.40 E-06	Figure C-37: ОН12	20 – Потенциально полная потеря эшелонирования	9.51E-10	1.3 E-5	0.04
		<i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	6 – Потенциально полная потеря эшелонирования 13 – Потенциально полная потеря эшелонирования 17 – Потенциально полная потеря эшелонирования	9.51E-06 9.51E-08 2.94E-06		
ОН15	1.34 E-05	Figure C-43: ОН15	20 – Потенциально полная потеря эшелонирования	9.51E-10	5.1 E-7	6.8 E-3
		<i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	4 – Потенциально полная потеря эшелонирования 10 – Потенциально полная потеря эшелонирования 12 – Потенциально полная потеря эшелонирования	5.00E-07 5.00E-09 5.00E-11		
ОН16 case 2	3.40 E-06	Figure C-46: ОН16 case 2	1 – Полная потеря эшелонирования	1.00E-03	1.0 E-3	3,4
		<i>Если наземный радиолокатор не работает</i>	4 – Полная потеря эшелонирования 6 – Полная потеря эшелонирования	1.00E-05 1.00E-07		

В таблице рассмотрены ветви деревьев, приводящие к потере эшелонирования, относящейся к первой группе событий, характеризуемой наибольшей тяжестью последствий. Значения, стоящие в столбцах $P(\Phi O_j)$, $P(b_k | \Phi O_j)$, взяты из [1]. Для получения значений столбца $P_{\max}^J(b_k)$ использовались уравнение (8) и свойство несовместности ветвей дерева событий, приводящих к анализируемому исходу. В результате суммирования значений последнего столбца (в соответствии с (6)) получили вероятность $P(b_k) = 7,9 \cdot 10^{-9}$ потери эшелонирования.

4. Заключение

В представленной работе обращено внимание на не вполне корректную гипотезу, использованную, но не проанализированную, в методике [1]. Ее суть заключается в том, что каждое конечное событие может порождаться только одним фактором опасности. Именно благодаря предположению о справедливости этой гипотезы в методике RTCA удается преобразовать (3), положив в последней сумме все члены, кроме одного, равными нулю. В работе показано, что в общем случае гипотеза не верна, и результаты, полученные при ее использовании, приводят к ослаблению требований безопасности полетов, предъявляемых к сертифицируемой системе.

Скорректировать методику можно было бы, используя соотношение (7), однако парциальная приемлемая вероятность $P_{\max}^J(b_k)$ — максимально допустимая вероятность появления исследуемого конечного события в результате наступления одного конкретного фактора опасности, не определена. Задаются лишь ограничения на суммарную вероятность, которая определяется допустимым риском.

В предлагаемой модификации метода расчета безопасности полетов с использованием системы АЗН-В этот сложный момент обходится следующим образом.

Из соотношения (8) для каждого ΦO находятся значения, претендующие на парциальные приемлемые риски. Если их сумма будет меньше или равна установленному приемлемому риску, то эти претензии обоснованы, и сама сертифицируемая система АЗН-В удовлетворяет предъявляемым требованиям. В случае отрицательного результата необходима доработка системы, направленная на повышение надежности аппаратуры, или пересмотр барьеров безопасности. После этой работы с барьерами указанный алгоритм должен быть продолжен до тех пор, пока положительный результат не будет достигнут. Разработка и внедрение барьеров безопасности для снижения риска авиационных происшествий при ОВД соответствует требованиям Стандартов ИКАО к системам управления безопасностью полетов на государственном и корпоративном уровнях [15, 16].

В иллюстративном примере, рассмотренном в работе, в качестве конечного события b_k было проанализировано состояние первой группы по классу серьезности последствий, соответствующее потере эшелонирования в системе. Для приведенных в [1] данных значение вероятности такого события, согласно модифицированной методике, составляет $P(b_k) = 7.9 \cdot 10^{-9}$ на час полета одного ВС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Safety, Performance and Interoperability Requirements Document for Enhanced Air Traffic Services in Radar-Controlled Areas Using ADS-B Surveillance (ADS-B-RAD). – RTCA DO-318, 2009.
2. Electronic Code of Federal Regulations e-CFR data is current as of April 10, 2020. [Эл. ресурс. Режим доступа: <https://www.faa.gov/TV/?mediaId=1793> Дата обращения 10.04.2020].
3. *Law J.* European ADS-B Regulation, ADS-B Workshop – SP/22. [Эл. ресурс. Режим доступа: <https://www.icao.int/APAC/Meetings/2010/adsb/sp22.pdf> Дата обращения 18.04.2020].
4. Оценка наблюдения с использованием систем АЗН-В и мультилатерации в целях обеспечения обслуживания воздушного движения и рекомендации по их внедрению. – Циркуляр ИКАО 326-AN/188, 2013.
5. *Алипов И.В.* Проблемы внедрения вещательного автоматического зависимого наблюдения (АЗН-В) в Российской Федерации // Научный вестник ГосНИИ ГА. № 7. 2015. С. 86–92.
6. *Дупиков В.В., Тараканов А.А.* Анализ оснащённости воздушных судов оборудованием АЗН-В в Московской зоне ЕС ОрВД // Научный вестник ГосНИИ ГА. № 7. 2015. С. 93–99.
7. *Кузнецов В.Л., Дупиков В.В.* Аналитическая модель радарного мониторинга целостности информации АЗН-В // Научный Вестник МГТУ ГА. № 220. 2015. С. 64–72.
8. «Концепции внедрения автоматического зависимого наблюдения на основе единого стандарта с развитием до функционала многопозиционных систем наблюдения», утверждена Минтрансом РФ в 2018 г. М., 2018.
9. *Ali B.S., Ochieng W., Majumdar A., Schuster W., Chiew T.K.* Safety assessment framework for the Automatic Dependent Surveillance Broadcast (ADS-B) system // Elsevier Safety Sci. 2015. No. 78. P. 91–100.
10. *Kabir S.* An overview of fault tree analysis and its application in model based dependability analysis // Elsevier, Expert Syst. Appl. 2017. No. 77. P. 114–135.
11. *Olaganathan Rajeev* Safety Analysis of Automatic Dependent Surveillance – Broadcast (ADS-B) System // Int. Y. Aerospace Mechanical Engineering. 2018. V. 5. No. 2. P. 9–18.
12. *Ali B.S., Ochieng W.Y., Majumdar A.* ADS-B: Probabilistic safety assessment // J. Navig. 2017. No. 70. P. 887–906.
13. *Tabassum A., Sabatini R., Gardi A.* Probabilistic Safety Assessment for UAS Separation Assurance and Collision Avoidance Systems // Aerospace. 2019. No. 6. P. 19–39.
14. Руководство по системе управления безопасностью полетов при АНО. ФГУП «Госкорпорация по ОрВД», 2014.
15. Приложение 19 к Конвенции о международной гражданской авиации. Управление безопасностью полетов. ИКАО, 2-е изд., 2016.
16. Руководство по управлению безопасностью полетов (РУБП). Дос.9859. ИКАО, 4-е изд., 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 14.05.2020

После доработки 03.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. Д.В. ЕФАНОВ, д-р техн. наук (TrES-4b@yandex.ru)
(Российский университет транспорта, Москва),
В.В. САПОЖНИКОВ, д-р техн. наук (port.at.pgups@gmail.com),
Вл.В. САПОЖНИКОВ, д-р техн. наук (at.pgups@gmail.com)
(Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I, Санкт-Петербург)

ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ ЛОГИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ

Предложены новые отказоустойчивые структуры, имеющие в своем составе только один комплект исходного устройства, в отличие от известных структур с двойной и тройной модульной избыточностью. Для выбора корректируемых функций в новых структурах используется блок фиксации искаженных сигналов, строящийся на основе метода логического дополнения с контролем вычислений по паритету. Приведена обобщенная структура с коррекцией сигналов на основе логического дополнения, позволяющая получать наиболее простые отказоустойчивые цифровые устройства. Даны алгоритмы синтеза блоков фиксации искаженных сигналов, а также примеры их применения.

Ключевые слова: комбинационное устройство автоматики, отказоустойчивая структура, структура с тройной модульной избыточностью, структура с двойной модульной избыточностью с контролем вычислений, коррекция ошибок с контролем по коду паритета, метод логического дополнения.

DOI: 10.31857/S0005231021080079

1. Введение

При построении систем автоматики широко применяются методы обнаружения и коррекции ошибок в вычисленных значениях рабочих функций блоков и компонентов [1–4]. Использование схем коррекции требует внесения значительной избыточности, что определяется необходимостью сравнения результатов вычислений сразу от нескольких устройств. Например, широко известна мажоритарная схема коррекции, имеющая три идентичных вычислительных блока [5–11], а также ее модификации [12–14]. Коррекция сигналов может проводиться на различных уровнях архитектуры управляющей системы, в том числе на уровне памяти, арифметико-логических составляющих и т.д.

В [15, 16] рассмотрены отказоустойчивые структуры для устройств комбинационной логики, основанные на использовании известного метода логического дополнения [17–19]. Данный метод подразумевает преобразование значений рабочих функций в значения специальных контролепригодных функций с использованием каскада сумматоров по модулю два (элементов XOR) по правилу:

$$(1) \quad h_i = f_i \oplus g_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где f_i — i -я рабочая функция, g_i — функция дополнения, h_i — контролепригодная функция.

Метод логического дополнения эффективно применяется при организации самопроверяемых схем встроенного контроля комбинационных устройств автоматики по признакам принадлежности формируемых функций к функциям специального вида (например, принадлежности формируемых кодовых слов на выходах каскада преобразующих сумматоров избыточному равномерному коду [20–22], принадлежности функций h_i классу самодвойственных функций [23, 24] или же и тому и другому свойству [25, 26]).

Исследования показывают, что эффективным является использование метода логического дополнения при организации отказоустойчивых структур цифровых устройств. Таким образом, цель статьи – показать принципиальную возможность синтеза отказоустойчивых устройств с меньшей структурной избыточностью, чем при использовании традиционной структуры с тройной модульной избыточностью, на основе использования схем встроенного контроля и логического дополнения для фиксации искажаемых сигналов на выходах объекта диагностирования, а также привести отказоустойчивые структуры для синтеза таких устройств. Рассмотрим их подробнее.

2. Отказоустойчивые структуры на основе двойной модульной избыточности

Наиболее распространенной отказоустойчивой структурой является структура, основанная на принципе тройной модульной избыточности (*TMR*-структура) с мажоритарной коррекцией сигналов [27]. Тройная избыточность структуры необходима для наделения ее свойством нечувствительности к проявлениям неисправностей в исходном устройстве в виде искажений сигналов на его выходах. Использование ее на практике приводит к существенному увеличению сложности технической реализации конечного устройства. Кроме того, приведенная структура имеет недостаток, связанный с невозможностью идентификации неверно функционирующего устройства без введения дополнительных устройств контроля.

При разработке структуры с мажоритарным принципом коррекции может возникнуть несколько случаев. Первый случай — когда исходное устройство $F(x)$ дается разработчику в неизменяемом виде, а его задача состоит в разработке отказоустойчивой системы, при этом разработчик может пользоваться точными копиями данного устройства. Второй случай — когда имеется возможность оптимизации двух дополнительных копий устройства $F(x)$ в процессе разработки отказоустойчивой системы. Третий случай — когда возможна оптимизация самого устройства $F(x)$ и его копий. Очевидно, что из трех вариантов наименьшую структурную избыточность будет давать последний. Для типовых отказоустойчивых структур, таким образом, имеет смысл введение понятия *структуры с минимальной избыточностью* — такой структуры, которая будет для выбранного варианта внесения избыточности давать наименьшую сложность технической реализации.

Для создания отказоустойчивой структуры может быть применена структурная схема, включающая в себя вместо трех копий исходного объекта только две. При этом один из комплектов (или даже оба) снабжается схемой контроля по какому-либо диагностическому признаку. Известны варианты реализации подобных схем при нахождении обоих комплектов под нагрузкой и

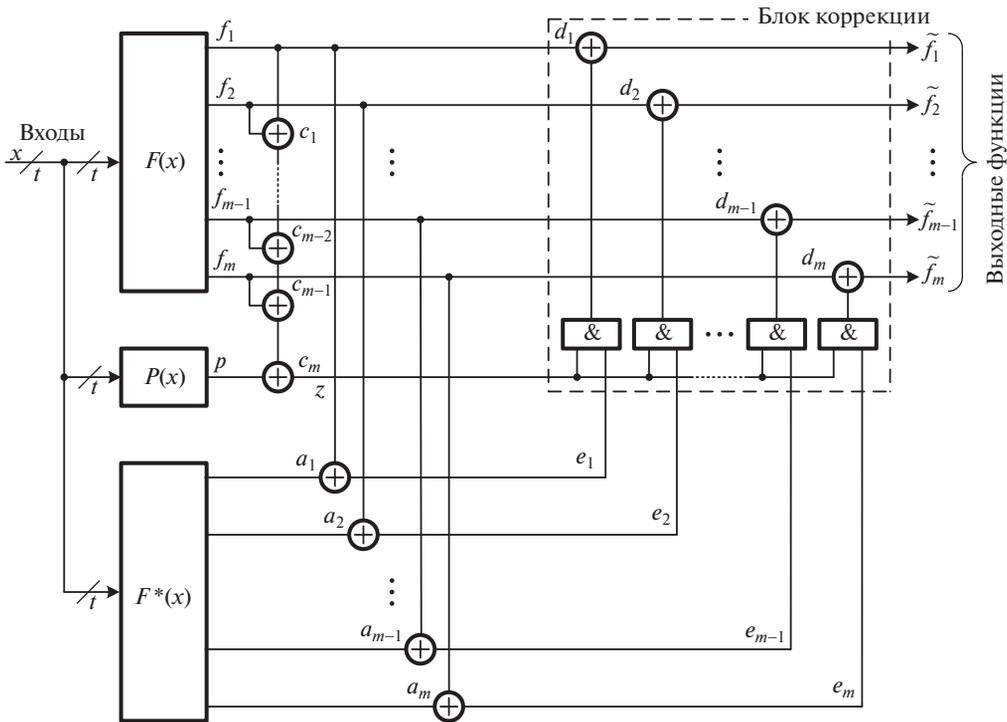


Рис. 1. Структура на основе дублирования с контролем основного комплекта.

нахождении одного комплекта под нагрузкой, а второго — в горячем резерве [27]. Для случая отказоустойчивых комбинационных схем целесообразно использовать вариант с постоянно нагруженными комплектами $F(x)$ и $F^*(x)$ с контролем вычислений одного из них. На рис. 1 и 2 приведены такие структуры. В первом случае контролируются вычисления основным комплектом, а во втором — дополнительным.

Если отходить от известного принципа тройной модульной избыточности при реализации отказоустойчивого устройства, то необходимо решать следующие задачи.

Первая и основная задача состоит в необходимости восстановления правильных значений искаженных выходных функций основного устройства $F(x)$. В структуре с двойной модульной избыточностью для решения этой задачи используется блок коррекции сигналов, включающий в себя m элементов сложения по модулю два (XOR) $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, d_m$, выходы которых фактически являются и выходами всего устройства, а входы — с выходами основного блока $F(x)$ и с выходами элементов логического умножения (AND). Последние непосредственно формируют логические сигналы, восстанавливающие правильные значения искаженных значений сигналов на выходах основного блока. Ошибки в вычислениях, возникающие в результате неисправностей элементов блока коррекции сигналов, не исправляются, также как и выходов мажоритарных элементов, используемых в структурах с тройной модульной избыточностью [27].

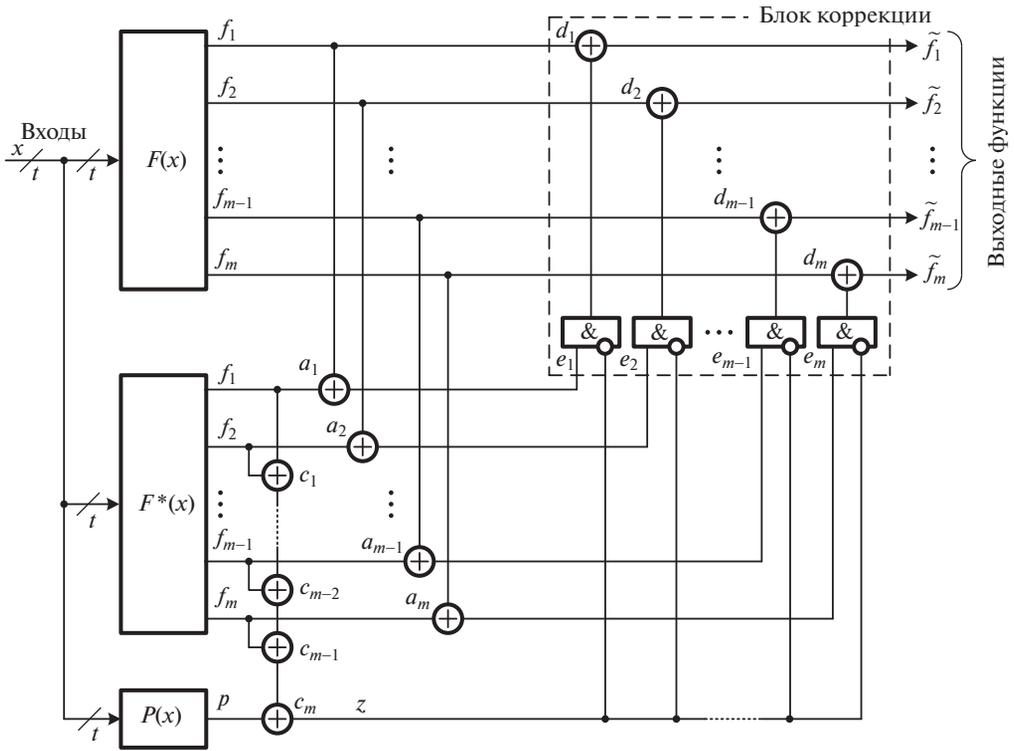


Рис. 2. Структура на основе дублирования с контролем дополнительного комплекта.

Вторая задача заключается в необходимости определения тех выходов основного блока $F(x)$, на которых в результате неисправностей элементов в его структуре реализуются ошибочные функции. С этой целью в структуры рис. 1 и 2 вводится второй блок $F^*(x)$ как копия основного блока $F(x)$ и элементы сложения по модулю два $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$, на которых сравниваются сигналы с одноименных выходов блоков $F(x)$ и $F^*(x)$. Активные сигналы, возникающие на выходах этих элементов, свидетельствуют о наличии неисправностей в одном из блоков.

Коррекция логических сигналов в блоке коррекции должна осуществляться только в том случае, если неисправным является основной блок $F(x)$. Фиксация факта отказа этого блока является третьей задачей. В структуре рис. 1 она решается путем контроля исправности основного блока $F(x)$ при помощи схемы паритета (блок $P(x)$ и элементы сложения по модулю два $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m$) [28], а в структуре рис. 2 – путем контроля исправности дополнительного блока $F^*(x)$ по тому же принципу. Выходная функция f_i в схеме рис. 1 корректируется только в том случае, когда $z = 1$ (блок $F(x)$ неисправен). В схеме рис. 2 выходная функция f_i корректируется только в том случае, когда функция $z = 0$ (блок $F^*(x)$ исправен) и на выходе элемента сложения по модулю два a_i присутствует сигнал 1.

Представленные на рис. 1 и 2 структуры во многих случаях позволяют синтезировать более простые отказоустойчивые дискретные устройства, чем

по структурной схеме с тройной модульной избыточностью. Следует отметить, что при построении структур, приведенных на рис. 1 и 2, также как и в схеме с тройной избыточностью, возможны варианты с оптимизацией второго устройства $F(x)$, а также обоих устройств, что еще больше уменьшит сложность технической реализации системы «дублирование с коррекцией». В последнем случае будет получена *структура дублирования с минимальной избыточностью*.

Покажем, что принципиально возможно построение таких отказоустойчивых структур, которые в своем составе содержат только одно исходное устройство $F(x)$, что позволяет для определенных схем уменьшить сложность технической реализации по сравнению со структурами с тройной и двойной модульной избыточностью, имеющими минимальную избыточность.

3. Отказоустойчивые структуры на основе логического дополнения

Известные способы реализации отказоустойчивых структур на основе двойной и тройной модульной избыточности обладают двумя существенными недостатками. Во-первых, при их построении для конкретного устройства $F(x)$ возможна только единственная реализация (если не учитывать все варианты с оптимизацией структур копий исходного объекта и дополнительных блоков и элементов). А во-вторых, не учитываются особенности самого блока $F(x)$, состав его функциональных элементов и конфигурации связей, в конечном итоге влияющих на характеристики булевых функций $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$. Учесть указанные недостатки можно путем использования принципа логического дополнения в процессе синтеза отказоустойчивого цифрового устройства [18], являющегося развитием описанного в [28] метода контроля функционирования устройств по паритету. Как показано в [19–22] на примере синтеза схем встроенного контроля возможна реализация нескольких вариантов структур с различной сложностью, среди которых может быть выбран наилучший по заданному критерию (например, по критерию минимальных показателей сложности технической реализации).

На рис. 3 и 4 приведены две новые отказоустойчивые структуры, при построении которых используется принцип логического дополнения. В данных структурах используются блок фиксации искаженных сигналов (ФИС), схема контроля по паритету и аналогичный блок коррекции сигналов (КС), использующийся и в представленных на рис. 1 и 2 структурах с двойной модульной избыточностью.

Принципиально по-новому в представленных структурах решается задача выявления тех выходов блока $F(x)$, на которых имеет место искажение правильного сигнала. Для этого в обеих структурах используется блок ФИС.

В структуру блока ФИС для схемы, приведенной на рис. 3, входит блок логического дополнения $G(x)$, на выходах которого вычисляются специальные функции дополнения $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$. Последние сравниваются с одноименными функциями выходов блока $F(x)$ при помощи элементов сложения по модулю два $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$, на выходах которых вычисляются функции сравнения $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$. Блок ФИС включает в себя также блок коррекции функций сравнения $R(x)$, вычисляющий функции $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$, которые выбираются с таким расчетом, чтобы на выхо-

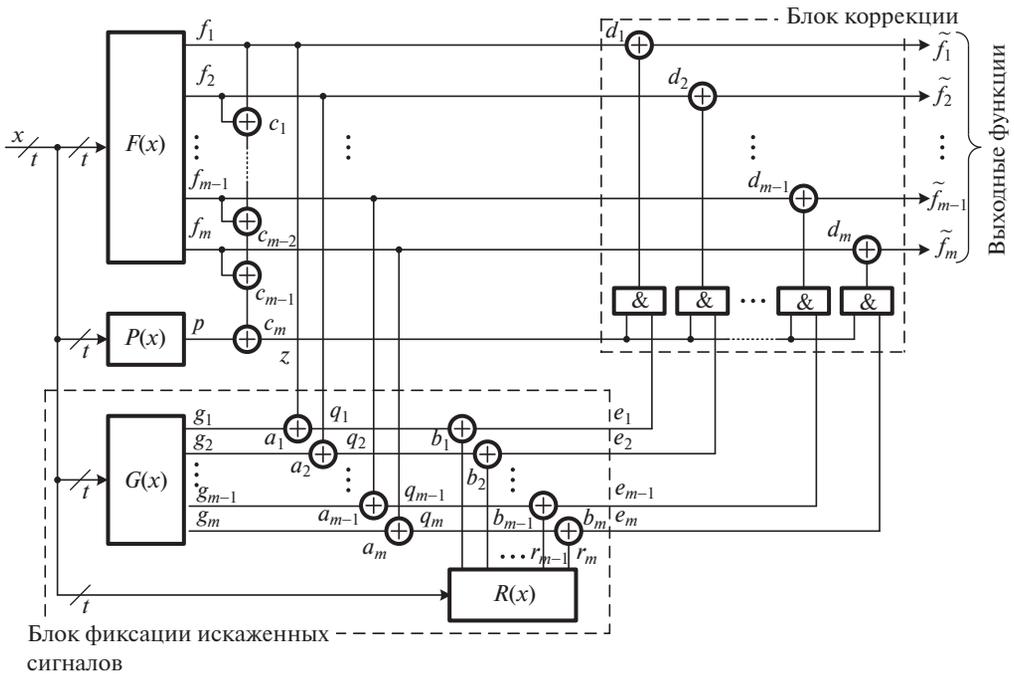


Рис. 3. Структура на основе логического дополнения с контролем основного комплекта.

де блока ФИС в исправной структуре были реализованы функции

$$\begin{aligned}
 e_1 &= f_1 \oplus g_1 \oplus r_1 = 0; \\
 e_2 &= f_2 \oplus g_2 \oplus r_2 = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 e_m &= f_m \oplus g_m \oplus r_m = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Если в результате неисправности в блоке $F(x)$ искажается значение функции f_i , то, как следует из (2), $e_i = 1$, и активизируются вход и выход соответствующего элемента логического умножения (при этом на выходе схемы паритета сигнал $z = 1$). Осуществляется исправление неверного значения функции f_i .

Задача установления факта возникновения неисправности в основном блоке $F(x)$ решается в структуре, приведенной на рис. 1, при помощи схемы паритета (блок $P(x)$ и элементы сложения по модулю два $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m$), которая контролирует значения сигналов непосредственно на выходах основного блока (аналогично представленной на рис. 1 схеме с двойной модульной избыточностью). Неисправности элементов схемы паритета, при которых устанавливается значение функции $z = 1$ в структуре рис. 3, не приводят к искажению правильных значений функций $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$, так как в это время блок ФИС исправен и все функции $e_i = 0$. И, наоборот, неисправности элементов блока ФИС, которые вызывают появление значений функций $e_i = 1$, также не приводят к изменению указанных функций, так как в этом случае сигнал $z = 0$.

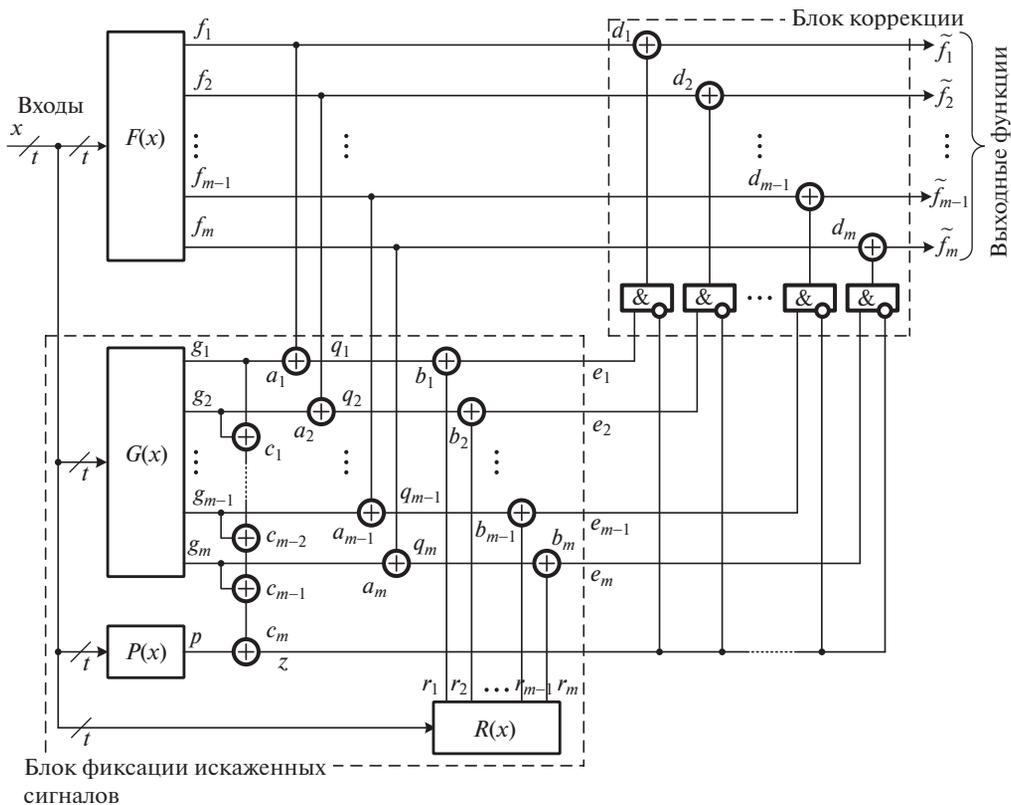


Рис. 4. Структура на основе логического дополнения с контролем блока дополнения.

В отличие от структуры, приведенной на рис. 3, в структуре, изображенной на рис. 4, не контролируются вычисления в блоке основной логики $F(x)$. В ней контролируются вычисления в самом блоке ФИС. С этой целью блок логического дополнения $G(x)$ дополняется схемой контроля по паритету (аналогично схеме контроля вычислений в блоке основной логики). При возникновении неисправности в блоке $G(x)$ или в каком-либо из элементов сложения по модулю два и блока $P(x)$ фиксируется значение сигнала $z = 1$. Этот сигнал поступает на входы элементов AND блока коррекции сигналов и инвертируется, что исключает ложную коррекцию сигналов. Это справедливо при условии, что одновременно возможно возникновение неисправности только в одном из блоков структуры.

Так как блок логического дополнения $G(x)$ может быть реализован большим числом способов, в структуре, приведенной на рис. 4, возможно уменьшение сложности блока паритета $P(x)$ по сравнению с аналогичным блоком в схеме, изображенной на рис. 3.

При синтезе блока ФИС необходимо определить функции $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$ и $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$. Из (2) следует, что $g_i = f_i \oplus r_i$. Каждая функция r_i может быть выбрана произвольным образом независимо от того, какими являются функции f_i и g_i . От выбранного варианта функции r_i зависит сложность реализации функции g_i . При этом никакой зависимости

между функциями g_i и r_i с различными индексами i не существует. По этой причине задача получения структуры блока ФИС с наименьшей сложностью может быть решена следующим образом. Для каждой пары функций (g_i, r_i) путем подбора функции r_i находится вариант с наименьшей сложностью обеих функций. Затем блоки $G(x)$ и $R(x)$ описываются наборами соответствующих функций и осуществляется оптимизация структуры каждого блока в отдельности (возможна и совместная оптимизация обоих блоков).

При реализации структур рис. 3 и 4 для любого блока $F(x)$ существует большое число вариантов выбора набора функций $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$, при которых достигается свойство отказоустойчивости. Поэтому возможен выбор варианта, при котором обеспечивается минимальная сложность блока ФИС.

Особым вариантом набора функций $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$ является вариант, в котором каждая функция приравнивается к какой-либо (любой) входной переменной $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t$. В этом случае реализация блока $R(x)$ не требует аппаратных затрат (он фактически является коммутатором входных сигналов).

Элементы блока коррекции сигналов следует реализовать в виде высоконадежных устройств с резервированием внутренних компонентов [27]. Отметим также, что обе структуры могут быть дополнены элементом, на выходе которого реализуется функция $v = z \vee e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_m$ и формируется сигнал о наличии неисправности в схеме контроля и/или блока ФИС при исправном основном блоке $F(x)$.

Корректирующая способность всех рассмотренных выше структур (рис. 1–4) ограничивается тем, что при помощи паритета обнаруживаются только те неисправности в блоке $F(x)$, которые искажают значения сигналов на нечетном числе выходов блока, что следует из свойств функции паритета [29]. Для улучшения корректирующей способности могут быть использованы различные подходы. Например, может быть выбран способ контроля вычислений, при котором возможна идентификация большего числа ошибок, чем в схеме контроля по паритету. Такой эффект достигается при использовании равномерных блочных кодов, например классических кодов с суммированием (кодов Бергера) и их модификаций [30, 31]. Другим способом является модификация внутренней структуры блока $F(x)$, если это допустимо, либо же контроль отдельных групп независимых выходов на основе отдельных подсхем паритета [32–35].

Рассмотрим пример синтеза блока ФИС для структуры рис. 3 (для структуры рис. 4 задача решается аналогично) для комбинационного устройства автоматики, заданного следующими функциями:

$$(3) \quad \begin{cases} f_1 = x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4; \\ f_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4; \\ f_3 = \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4; \\ f_4 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4; \\ f_5 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4. \end{cases}$$

Рассмотрим решение поставленной задачи пошагово, приведя один из возможных алгоритмов [15, 16].

Таблица 1. Описание отказоустойчивой структуры с контролем основного комплекта для рассматриваемого примера

$x_1x_2x_3x_4$	$f_1f_2f_3f_4f_5$	p	$g_1^j = f_1 \oplus x_j$	$g_2^j = f_2 \oplus x_j$	$g_3^j = f_3 \oplus x_j$	$g_4^j = f_4 \oplus x_j$	$g_5^j = f_5 \oplus x_j$
			$g_1^1g_1^2g_1^3g_1^4$	$g_2^1g_2^2g_2^3g_2^4$	$g_3^1g_3^2g_3^3g_3^4$	$g_4^1g_4^2g_4^3g_4^4$	$g_5^1g_5^2g_5^3g_5^4$
0000	01101	1	0000	1111	1111	0000	1111
0001	01110	1	0001	1110	1110	1110	0001
0010	10111	0	1101	0010	1101	1101	1101
0011	00010	1	0011	0011	0011	1100	0011
0100	10110	1	1011	0100	1011	1011	0100
0101	00100	1	0101	0101	1010	0101	0101
0110	11001	1	1001	1001	0110	0110	1001
0111	11001	1	1000	1000	0111	0111	1000
1000	11000	0	0111	0111	1000	1000	1000
1001	10100	0	0110	1001	0110	1001	1001
1010	11010	1	0101	0101	1010	0101	1010
1011	01011	1	1011	0100	1011	0100	0100
1100	00111	1	1100	1100	0011	0011	0011
1101	11111	1	0010	0010	0010	0010	0010
1110	01000	1	1110	0001	1110	1110	1110
1111	00110	0	1111	1111	0000	0000	1111

Шаг 1. Для каждой из функций f_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) определим функции коррекции $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$. Будем для этого использовать наиболее простой вариант — осуществим поиск переменной x_j , которая позволяет получить наиболее простое с точки зрения технической реализации выражение для функции $g_i^j = f_i \oplus x_j$. Еще раз подчеркнем, что в качестве функций $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$ могут использоваться произвольные функции, что также может дать эффект в уменьшении сложности реализации блока ФИС. Для каждого выхода f_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) существует по четыре варианта формирования функций коррекции сигналов (см. табл. 1). Минимизируя функции (в данном случае использована двухуровневая оптимизация по методу Карно [27]) и выбирая наиболее простые из них, получаем систему функций алгебры логики, описывающую блок $G(x)$:

$$\begin{aligned} g_1^1 &= \overline{x_1}x_3\overline{x_4} \vee x_1x_3x_4 \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3; \\ g_2^3 &= \overline{x_1}\overline{x_2} \vee x_1x_2x_4 \vee \overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4}; \\ g_3^1 &= \overline{x_1}\overline{x_3} \vee \overline{x_2}\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_3\overline{x_4}; \\ g_4^2 &= \overline{x_1}x_4 \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_3\overline{x_4}; \\ g_5^1 &= \overline{x_2}\overline{x_4} \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}. \end{aligned}$$

Сложность реализации каждой функции блока $G(x)$ можно оценить по числу входов логических элементов без учета внутренних инверсий: $L(g_1^1) = 14$, $L(g_2^3) = 11$, $L(g_3^1) = 14$, $L(g_4^2) = 12$, $L(g_5^1) = 10$.

Шаг 2. Блок $G(x)$ реализуется путем оптимизации полученных подсхем для реализации каждой из функций g_i .

Шаг 3. Определяется функция паритета p . Минимизация данной функции дает возможность синтеза блока $P(x)$:

$$p = \overline{x_1}\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_4 \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3.$$

Сложность блока $P(x)$ определяется величиной $L(p) = 16$.

Полученное устройство изображено на рис. 5.

Учитывая сложности реализации элементов сложения по модулю два и логического умножения, входящих в схему паритета и блока ФИС ($L_{XOR} = 6$ и $L_{AND} = 2$), получим значение сложности технической реализации отказоустойчивой структуры на основе логического дополнения с контролем основного комплекта:

$$\begin{aligned} L_{BC} &= L_{F(x)} + L_{G(x)} + L_{P(x)} + 4 \cdot 5L_{XOR} + 5L_{AND} = \\ &= 97 + (14 + 11 + 14 + 12 + 10) + 16 + 20 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 97 + 61 + 16 + 120 + 10 = 304. \end{aligned}$$

Для сравнения, сложность системы дублирования с контролем основного комплекта определяется величиной:

$$L_D = 2L_{F(x)} + L_{P(x)} + 3 \cdot 5 \cdot L_{XOR} + 5L_{AND} = 2 \cdot 97 + 16 + 15 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 310.$$

Сложность структуры с тройной модульной избыточностью (с учетом того, что сложность мажоритарных элементов коррекции оценивается величиной $L_{\geq 2} = 9$) равна:

$$L_{TMR} = 3L_{F(x)} + 5L_{\geq 2} = 3 \cdot 97 + 5 \cdot 9 = 336.$$

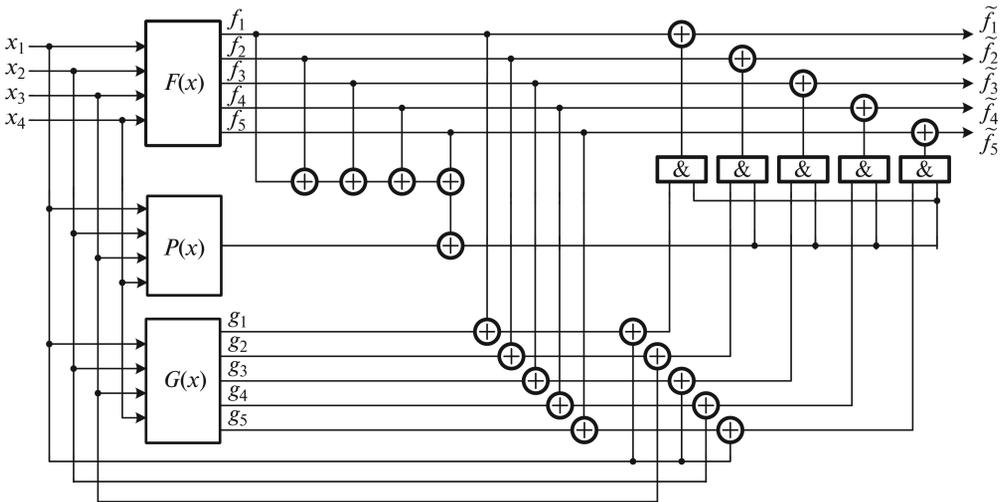


Рис. 5. Отказоустойчивое устройство для рассматриваемого примера, реализованное по структуре логического дополнения с контролем основного комплекта.

Данный пример показывает возможности построения более простых отказоустойчивых цифровых устройств по сравнению с известными методами с двойной и тройной модульной избыточностью.

4. Обобщенная отказоустойчивая структура на основе логического дополнения

На рис. 6 приведена обобщенная отказоустойчивая структура, в которой контролируется не только работа блока дополнения, но и блока вычисления функций коррекции сигналов. Данная структура реализует более общую модель, чем рассмотренные ранее структуры на основе логического дополнения.

В ней устройство $F(x)$ является исходным объектом, вычисляющим систему рабочих функций $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ от t входных переменных. Для контроля правильности вычислений функций $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ использован блок ФИС, в котором выделены блоки $G(x)$, $R(x)$ и $P(x)$, а также каскады сумматоров по модулю два (элементов XOR). Блоки $G(x)$ и $R(x)$ представляют собой блоки логического дополнения и коррекции сигналов. Блок $P(x)$ предназначен для формирования значения решающей функции ошибки и в данном случае формирует значение функции контроля по паритету кодового вектора, образованного на выходах $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$ и $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$ обоих блоков $G(x)$ и $R(x)$:

$$(4) \quad p = g_1 \oplus g_2 \oplus \dots \oplus g_{m-1} \oplus g_m \oplus r_1 \oplus r_2 \oplus \dots \oplus r_{m-1} \oplus r_m.$$

Значения функций $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$, вычисляемых блоком $G(x)$, и функций $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$, вычисляемых блоком $R(x)$, подбираются на этапе проектирования структуры таким образом, чтобы при штатной работе (в отсутствие неисправностей) значения функции активации коррекции (функции z) были равными 0. Неисправности в блоке $F(x)$ искажают значения функций на выходах элементов $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ в блоке ФИС. Поскольку речь идет

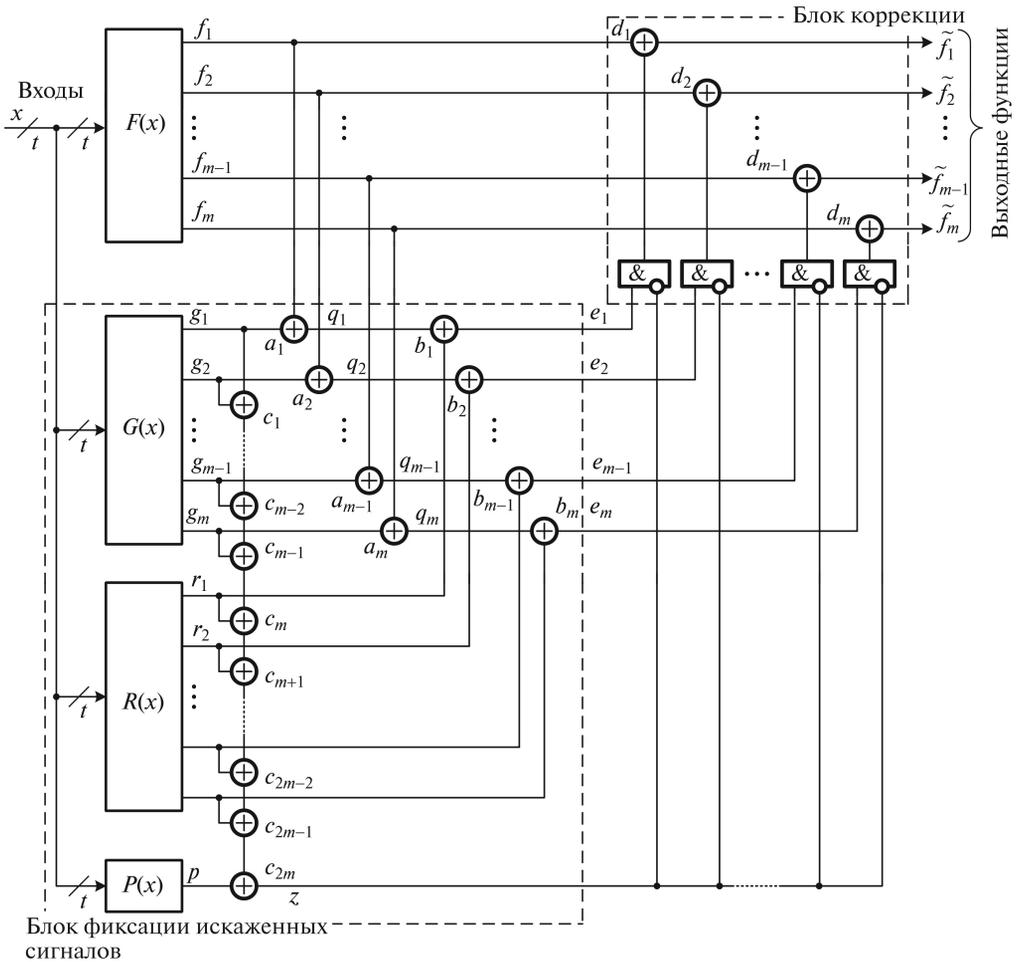


Рис. 6. Обобщенная отказоустойчивая структура.

о случае, когда одновременно возможно возникновение неисправности только в одном из блоков, функция $z = 0$, происходит коррекция сигналов. Коррекции не произойдет в том случае, если функция $z = 1$ – в этом случае будет зафиксирована неисправность в одном из блоков $G(x)$ или $R(x)$ или в одном из элементов сложения по модулю два. Коррекция сигналов производится только при наличии неисправностей в исходном устройстве $F(x)$.

Элементы блоков ФИС и коррекции сигналов являются стандартными, за исключением блоков $G(x)$ и $R(x)$. Задача построения отказоустойчивой структуры состоит как раз в синтезе этих блоков. Рассмотрим ее решение на примере реализации отказоустойчивого устройства для блока $F(x)$, заданного функциями (3).

Шаг 1. Для каждой из функций f_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) определяется сложность ее реализации (будем также использовать в качестве показателя сложности реализации число входов внутренних логических элементов при реализации по дизъюнктивной форме без учета инверсий [27]): $L(f_1) = 20$, $L(f_2) = 25$, $L(f_3) = 15$, $L(f_4) = 20$, $L(f_5) = 17$.

Шаг 2. Устанавливается равенство $r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$. А переменной r последовательно придаются значения отдельных переменных и рассчитываются функции g_i : $g_i = f_i \oplus x_j$. После этого определяется сложность реализации каждой функции g_i . В рассматриваемом примере для каждой функции g_i получаем 4 реализации соответственно четырем входным переменным (см. табл. 2).

Шаг 3. Для каждой функции g_i выбирается реализация с наименьшей сложностью и соответствующая ей функция r_i :

$$\begin{aligned} g_1^1 &= f_1 \oplus x_1 = x_2 \overline{x_4} \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4}, \\ L(g_1^1) &= 14, \\ g_2^3 &= f_2 \oplus x_3 = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}, \\ L(g_2^3) &= 11, \\ g_3^2 &= f_3 \oplus x_2 = x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_4, \\ L(g_3^2) &= 15, \\ g_4^2 &= f_4 \oplus x_2 = \overline{x_1} x_4 \vee x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3, \\ L(g_4^2) &= 10, \\ g_5^1 &= f_5 \oplus x_1 = x_2 x_3 \vee x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4}, \\ L(g_5^1) &= 14. \end{aligned}$$

Шаг 4. Для каждого выхода определяется значение разности $C_i = L(f_i) - L(g_i) - L(XOR)$, характеризующей эффект от применения дополнения по данному выходу:

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 10, \quad C_3 = -4, \quad C_4 = 6, \quad C_5 = -1.$$

Шаг 5. Выходы ранжируются в порядке уменьшения эффекта: f_2, f_4, f_1, f_5, f_3 .

Шаг 6. Рассматривается возможность улучшения эффекта для «плохих» выходов.

В приведенном примере рассмотрим выход f_3 . Выход f_3 рассматриваем в сочетании с «хорошими» выходами, например в сочетании $f_3 - f_2$.

Установим равенство $f_3 = f_2$. Тогда в блоке $G(x)$ не требуется подсхема для реализации функции g_3 , но в блоке $R(x)$ появляется подсхема для реализации функции r_2 .

Если $g_3 = g_2$, то $f_3 \oplus r_3 = f_2 \oplus r_2$. Так как в данном случае $r_2 = x_3$, то получим $f_3 \oplus r_3 = f_2 \oplus x_3$, тогда $r_3 = f_3 \oplus f_2 \oplus x_3$.

В данном случае получаем, что $r_3 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$.

Так как $L(r_3) = 17 > L(g_3) = 15$, то рассмотренное преобразование нецелесообразно.

Улучшение дает рассмотрение пары $f_3 - f_5$:

$$\begin{aligned} r_3 &= f_3 \oplus f_5 \oplus x_1, \\ r_3 &= x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \vee x_2 \overline{x_3} x_4, \\ L(r_3) &= 14 < L(g_3) = 15. \end{aligned}$$

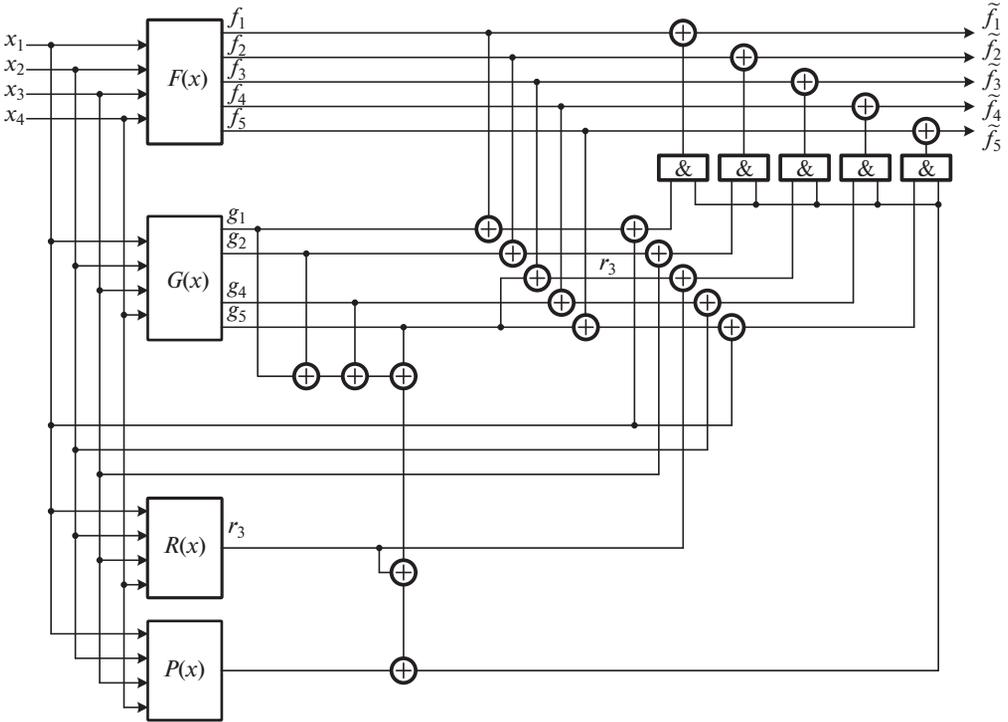


Рис. 7. Отказоустойчивое устройство для рассматриваемого примера, реализованное по обобщенной структуре на основе логического дополнения.

Шаг 7. Получаем выражение для функции паритета, реализуемой блоком $P(x)$:

$$p = x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$L_{P(x)} = 13.$$

На рис. 7 приведена отказоустойчивая структура для рассматриваемого примера. Сложность ее реализации вычисляется из значений сложности компонентов:

$$L_{GeneralBC} = L_{F(x)} + L_{G(x)} + L_{P(x)} + L_{R(x)} + 4 \cdot 5L_{XOR} + 5L_{AND} =$$

$$= 97 + (14 + 11 + 10 + 14) + 13 + 14 + 20 \cdot 6 + 5 \cdot 2 =$$

$$= 97 + 49 + 13 + 14 + 120 + 10 = 303.$$

Полученная величина сложности улучшена по сравнению с рассмотренным ранее примером на одну условную единицу. Для других примеров возможно получение еще более простых структур по обобщенной структуре на основе логического дополнения.

В отличие от способа синтеза блока ФИС, описанного в предыдущем разделе, представленный способ позволяет увеличить число вариантов с дополнительными функциями, равными переменной. За счет максимального упрощения блока $R(x)$ и возможностей выбора функций логического дополнения, вычисляемых блоком $G(x)$, может быть достигнуто существенное уменьше-

ние сложности технической реализации схемы коррекции по сравнению с традиционными методами.

5. Заключение

Предложенные в работе отказоустойчивые структуры на основе принципа логического дополнения позволяют на практике получать более простые отказоустойчивые цифровые устройства. Эксперименты с контрольными комбинационными схемами показывают, что на практике можно добиться существенного уменьшения сложности технической реализации отказоустойчивого устройства путем применения новых структур в сравнении с известными структурами с двойной и тройной модульной избыточностью. Например, в [15, 16] показано, что возможно упрощение структур до 25–30% по сравнению со структурами с двойной модульной избыточностью и до 40–45% по сравнению со структурой на основе тройной модульной избыточности. При этом возможно достижение высоких показателей коррекции сигналов без изменения структур исходных объектов. К примеру, для комбинационных устройств применение структуры на основе логического дополнения с контролем вычислений исходного объекта по паритету в эксперименте для двадцати двух комбинационных устройств получено среднее значение вероятности коррекции $p_c = 0,95421$. Повышение обнаруживающей способности метода возможно за счет использования схем контроля по другим принципам, например по модифицированным кодам с суммированием [36, 37], либо же путем применения специальных схемотехнических способов обнаружения ошибок на выходах объектов диагностирования [32–35].

Следует отметить две особенности предложенных структур. Первая заключается в том, что по сравнению со структурами с двойной модульной избыточностью в новых структурах за счет использования двух каскадов сумматоров по модулю два $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ и $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m$ увеличено время прохождения сигналов и таким образом снижено быстродействие структуры. Тем не менее задержка незначительна, и путь прохождения сигнала увеличивается незначительно. Увеличение времени срабатывания можно считать некоторой ценой за снижение аппаратных затрат на реализацию предложенной структуры. Вторая особенность связана с процедурами поиска значений функций логического дополнения $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$ и выбора функций коррекции $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$. Требуется анализ $Q = tm$ (t и m – число входов и число выходов блока $F(x)$ соответственно) различных способов вычисления функций логического дополнения на 2^t входных комбинациях. Число Q существенно зависит от числа входов и выходов устройства $F(x)$, что определяет ограничения на применение предложенных алгоритмов получения функций дополнения и выбора функций коррекции. Для современной вычислительной техники полный алгоритм вычисления реализуется за разумное время при числе входных переменных, не превышающих значений 30÷35 (это связано и с возможностями автоматической минимизации функций алгебры логики). При большем числе входов можно использовать упрощенный алгоритм вычисления функций дополнения, рассмотренный в статье.

Использование логического дополнения – перспективный подход к реализации отказоустойчивых цифровых устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Согомонян Е.С., Слабаков Е.В.* Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989.
2. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006.
3. *Gavrilov S.V., Gurov S.I., Zhukova T.D., et. al.* Methods to Increase Fault Tolerance of Combinational Integrated Microcircuits by Redundancy Coding // Computational Mathematics and Modeling. 2017. Vol. 28. No. 3. P. 400–406.
<https://doi.org/10.1007/s10598-017-9372-3>
4. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Коды Хэмминга в системах функционального контроля логических устройств. СПб.: Наука, 2018.
5. *Гаврилов М.А., Остиану В.М., Потехин А.И.* Надежность дискретных систем // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». 1969, 1970. С. 7–104.
6. *Каравай М.Ф., Согомонян Е.С.* Анализ надежностных характеристик самопроверяемых избыточных структур // АиТ. 1979. № 8. С. 105–119.
Karavai M.F., Sogomonyan E.S. Analysis of Reliability Characteristics of Self-Checkable Redundant Structures // Autom. Remote Control. 1980. V. 40. No. 8. P. 1186–1197.
7. *Matsumoto K., Uehara M., Mori H.* Evaluating the Fault Tolerance of Stateful TMR // 13th International Conference on Network-Based Information Systems, 14–16 September 2010, Takayama, Japan. P. 332–336.
<https://doi.org/10.1109/NBiS.2010.86>
8. *Borecký J., Kohlík M., Vit P., Kubátová H.* Enhanced Duplication Method with TMR-Like Masking Abilities // Euromicro Conference on Digital System Design (DSD), 31 August – 2 September 2016, Limassol, Cyprus. P. 690–693.
<https://doi.org/10.1109/DSD.2016.91>
9. *Krcma M., Kotasek Z., Lojda J.* Triple Modular Redundancy Used in Field Programmable Neural Networks // Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017), Novi Sad, Serbia, September 29–October 2, 2017. P. 372–377. <https://doi.org/10.1109/EWDTS.2017.8110128>
10. *Sogomonyan E.S.* Self-Correction Fault-Tolerant Systems. – Preprint, October 2018.
11. *Dug M., Krstic M., Jokic D.* Implementation and Analysis of Methods for Error Detection and Correction on FPGA // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. I. 6. P. 348–353.
12. *Харченко В.С.* Модели и свойства многоальтернативных отказоустойчивых систем // АиТ. 1992. № 12. С. 140–147.
Kharchenko V.S. Models and Properties of Multialternative Fault-Tolerant Systems // Autom. Remote Control. 1993. V. 53. No. 12. P. 1944–1950.
13. *Лысенко И.В., Харченко В.С.* Оценка живучести многоярусных мажоритарно-резервированных систем, функционирующих в условиях неблагоприятных воздействий импульсной природы // АиТ. 1997. № 2. С. 209–218.
Lysenko I.V. Kharchenko V.S. Potential Vitality of Multi-Layered Majorant-Reserved Systems Subject to Adverse Impulse Effects // Autom. Remote Control. 1997. V. 58. No. 2. P. 320–327.
14. *Скляр В.В., Харченко В.С.* Отказоустойчивые компьютерные системы управления с версионно-пороговой адаптацией: способы адаптации, оценка надежности, выбор архитектур // АиТ. 2002. № 6. С. 131–145.

- Sklyar V. V., Kharchenko V. S.* Fault-Tolerant Computer-Aided Control Systems with Multiversion-Threshold Adaptation: Adaptation Methods, Reliability Estimation, and Choice of an Architecture // *Autom. Remote Control*. 2002. V. 63. No. 6. P. 991–1003. <https://doi.org/10.1023/A:1016130108770>
15. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Схема коррекции сигналов для комбинационных устройств автоматики на основе логического дополнения с контролем вычислений по паритету // *Информатика*. 2020. Том 17. № 2. С. 71–85. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-71-85>
 16. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Отказоустойчивая структура на основе логического дополнения с контролем вычислений по паритету // *Автоматика на транспорте*. 2020. Т. 6. № 3. С. 377–403. <https://doi.org/10.20295/2412-9186-2020-6-3-377-403>
 17. *Lala P. K.* Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. – San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
 18. *Гессель М., Морозов А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Контроль комбинационных схем методом логического дополнения // *АиТ*. 2005. № 8. С. 161–172.
Goessel M., Morozov A. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov Vl. V. Checking Combinational Circuits by the Method of Logic Complement // *Autom. Remote Control*. 2005. V. 66. No. 8. P. 1336–1346. <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0174-2>
 19. *Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D.* New Methods of Concurrent Checking: Edition 1. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., 2008.
 20. *Das D. K., Roy S. S., Dmitiriev A., Morozov A., Gössel M.* Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes // *Proceedings of the 10th International Workshops on Boolean Problems, Freiberg, Germany, September, 2012*. P. 33–40.
 21. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Построение самопроверяемых структур систем функционального контроля на основе равновесного кода «2 из 4» // *Проблемы управления*. 2017. № 1. С. 57–64.
 22. *Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Пивоваров Д.В.* Синтез самопроверяемых схем встроенного контроля на основе метода логического дополнения до равновесного кода «2 из 4» // *Информатика*. 2018. Том 15. № 4. С. 71–85.
 23. *Sapozhnikov Vl. V., Dmitiriev A., Goessel M., Sapozhnikov V. V.* Self-Dual Parity Checking – a New Method for on Line Testing // *Proceedings of 14th IEEE VLSI Test Symposium, USA, Princeton, 1996*. P. 162–168.
 24. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Гёссель М.* Самодвойственные дискретные устройства. СПб: Энергоатомиздат (Санкт-Петербургское отделение), 2001.
 25. *Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Osadchy G., Pivovarov D.* Self-Dual Complement Method up to Constant-Weight Codes for Arrangement of Combinational Logical Circuits Concurrent Error-Detection Systems // *Proceedings of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019), Batumi, Georgia, September 13–16, 2019*. P. 136–143. <https://doi.org/10.1109/EWDTS.2019.8884398>
 26. *Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Пивоваров Д.В.* Метод функционального контроля комбинационных логических устройств на основе самодвойственного дополнения до равновесных кодов // *Электронное моделирование*. 2020. Т. 42. № 3. С. 27–52. <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.027>
 27. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Основы теории надежности и технической диагностики. СПб.: Изд-во «Лань», 2019.

28. Аксёнова Г.П. Метод синтеза схем встроенного контроля для автоматов с памятью // *АиТ*. 1973. № 2. С. 109–116.
Aksjonova G.P. Method of Synthesizing Built-In Monitoring Arrangements for Automata with Memory // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 2. P. 267–273.
29. Аксёнова Г.П. Необходимые и достаточные условия построения полностью проверяемых схем свертки по модулю 2 // *АиТ*. 1979. № 9. С. 126–135.
Aksjonova G.P. Necessary and Sufficient Conditions for Design of Completely Checkable Modulo 2 Convolution Circuits // Autom. Remote Control. 1980. V. 40. No. 9. P. 1362–1369.
30. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 1: Классические коды Бергера и их модификации. М.: Наука, 2020.
31. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 2: Взвешенные коды с суммированием. М.: Наука, 2021.
32. Sogomonyan E.S., Gössel M. Design of Self-Testing and On-Line Fault Detection Combinational Circuits with Weakly Independent Outputs // *J. Electron. Testing: Theory Appl.* 1993. V. 4. No. 4. P. 267–281. <https://doi.org/10.1007/BF00971975>
33. Busaba F.Y., Lala P.K. Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // *J. Electron. Testing: Theory Appl.* 1994. V. 5. No. 5. P. 19–28. <https://doi.org/10.1007/BF00971960>
34. Morosow A, Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov Vl.V., Goessel M. Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // *VLSI Design.* 1998. V. 5. No. 4. P. 333–345. <https://doi.org/10.1155/1998/20389>
35. Matrosova A., Levin I., Ostanin S. Survivable Self-Checking Sequential Circuits // *Proceedings of 2001 IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems (DFT'2001), USA, CA, San Francisco, October 24–26, 2001.* P. 395–402.
36. Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Efanov D. Typical Signal Correction Structures Based on Duplication with the Integrated Control Circuit // *Proceedings of 18th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2020), Varna, Bulgaria, September 4–7, 2020.* P. 78–87. <https://doi.org/10.1109/EWDTS50664.2020.9224649>
37. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov Vl.V. Typical Structure of a Duplicate Error Correction Scheme with Code Control with Summation of Weighted Transitions // *Electronic Modeling.* 2020. V. 42. No. 5. P. 38–50. <https://doi.org/10.15407/emodel.42.05.038>

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 19.12.2020

После доработки 09.04.2021

Принята к публикации 29.04.2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2021 г. Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafrainovich@gmail.com),
М.Д. ЕМЕЛИН (maksum888e@mail.ru)
(Нижегородский государственный университет)

КОМБИНИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматриваются вопросы решения NP-трудной целочисленной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Ставится задача оптимального комбинирования пар допустимых решений задачи и строится линейный по трудоемкости алгоритм ее решения. Данный подход может быть применен в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения трехиндексной задачи о назначениях для постобработки полученных приближенных решений задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие перспективность предложенного подхода.

Ключевые слова: аксиальная задача о назначениях, многоиндексные задачи, приближенные алгоритмы.

DOI: 10.31857/S0005231021080080

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач, формализуемых в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях [1–3]. Обзор результатов, связанных с анализом вычислительной сложности и построением приближенных алгоритмов решения специальных подклассов многоиндексных аксиальных задач о назначениях, приведен в [1]. В общей постановке класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным уже в трехиндексном случае [4]. Более того, для задач данного класса не существует полиномиальных ε -приближенных алгоритмов (здесь ε — произвольная константа), иначе $P = NP$, данный результат также справедлив уже в трехиндексном случае [5]. В [5] также показано, что данный результат справедлив в случае, когда матрица стоимостей задачи о назначениях имеет декомпозиционную структуру (т.е. матрица стоимостей представима в виде суммы трех двухиндексных матриц). При этом задача о назначениях в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника, остается NP-трудной [5]. В [5–8] исследуются аксиальные задачи о назначениях со специальной структурой многоиндексной матрицы стоимостей, в [9–11] обсуждаются вопросы построения потоковых алгоритмов решения многоиндексных задач, в [12] описывается метод ветвей и границ решения аксиальной задачи о назначениях, в [13] строится генетический алгоритм,

в [14] обсуждается нижняя оценка задачи, в [15] исследуются асимптотически оптимальные решения. В планарной постановке задача о назначениях исследуется в [16–18]. Стохастические постановки многоиндексных задач исследуются в [19–21].

В данной работе ставится задача оптимального комбинирования пар допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Содержательно задача заключается в поиске оптимального решения, которое может быть построено с использованием лишь назначения выбранных допустимых решений. Строится полиномиальный алгоритм решения данной задачи комбинирования. Данный алгоритм может быть применен в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения трехиндексной задачи о назначениях для постобработки полученных допустимых решений задачи. Начальные допустимые решения могут быть получены при помощи эвристик, описанных, например, в [2, 5, 13, 22–24 и др.].

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, в разделе 3 ставится задача оптимального комбинирования допустимых решений задачи о назначениях, строится алгоритм оптимального комбинирования и доказывается его корректность, в разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Трехиндексная аксиальная задача о назначениях

Пусть I, J, K – непересекающиеся множества индексов, $I \cap J = \emptyset$, $I \cap K = \emptyset$, $J \cap K = \emptyset$ и $|I| = |J| = |K| = n$; c_{ijk} , $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица стоимостей; x_{ijk} , $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$(1) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K,$$

$$(2) \quad \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J,$$

$$(3) \quad \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I,$$

$$(4) \quad x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K,$$

$$(5) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min.$$

Задача о назначениях (1)–(5) является NP-трудной [4]. При этом существует ряд эффективных алгоритмов (эвристических или ε -приближенных), показывающих хорошие практические результаты при решении численных задач, выделим некоторые из них.

В [5] предложен алгоритм, применимый при решении задач с декомпозиционной матрицей системы ограничений, т.е. с матрицей стоимостей, представимой в виде суммы трех двухиндексных матриц: $c_{ijk} = u_{ij}^1 + u_{ik}^2 + u_{jk}^3$,

$i \in I, j \in J, k \in K$. Данный алгоритм основан на решении пары зависимых двухиндексных задач. Всего существует три таких пары, таким образом, предложенный в [5] алгоритм позволяет построить три различных допустимых решения. В [5] показано, что рекорд из данных трех решений является ε -приближенным решением задачи в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника: $u_{ij}^1 \leq u_{ik}^2 + u_{jk}^3$, $u_{ik}^2 \leq u_{ij}^1 + u_{jk}^3$, $u_{jk}^3 \leq u_{ij}^1 + u_{ik}^2$, $i \in I, j \in J, k \in K$. В [2] предложен эвристический подход, основанный на аппроксимации матрицы стоимостей исходной задачи матрицей стоимостей заданной структуры и решении задачи с аппроксимационной матрицей стоимостей. Для ряда аппроксимаций в [2] строятся оценки отклонения от оптимума. В [13] построен гибридный генетический алгоритм решения задачи о назначениях, интерес представляет предложенная стратегия локальной оптимизации, которая может быть применена к любым допустимым решениям (в том числе полученным случайной генерацией).

Таким образом, начальные допустимые решения задачи (1)–(5) могут быть получены при помощи эвристик, описанных, например, в [2, 5, 13] и др. Далее описывается алгоритм, позволяющий оптимально комбинировать назначения выбранных допустимых решений.

3. Задача комбинирования решений

Пусть задано множество $W \subseteq I \times J \times K$, которое определяет подмножество разрешенных назначений. Тогда рассмотрим задачу (1)–(4), (6), (5).

$$(6) \quad x_{ijk} = 0, \quad (i, j, k) \notin W.$$

Для удобства изложения задачу (1)–(4), (6), (5) для заданного множества W будем обозначать через $Z(W)$. Очевидно, задача (1)–(5) соответствует задаче $Z(I \times J \times K)$.

В общем случае задача $Z(W)$ является NP-трудной. Более того, проблема проверки совместности системы (1)–(4), (6) для произвольного множества W является NP-полной [1]. Будем рассматривать такие множества W , которые соответствуют набору назначений некоторых допустимых решений задачи (1)–(5).

Пусть x_{ijk} , $i \in I, j \in J, k \in K$ — допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через $W(x)$ обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W(x) = \{(i, j, k) \mid x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

Далее пусть x_{ijk}^1 , $i \in I, j \in J, k \in K$ и x_{ijk}^2 , $i \in I, j \in J, k \in K$ — произвольные допустимые решения системы ограничений (1)–(4). Тогда

$$W(x^1, x^2) = W(x^1) \cup W(x^2).$$

Данный раздел посвящен алгоритму решения задачи $Z(W(x^1, x^2))$.

Алгоритм 1. Решение задачи $Z(W(x^1, x^2))$.

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где

$$V = \{I \cup J \cup K\}, \quad A = \{(i, j), (i, k), (j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1, x^2)\}.$$

Шаг 2. Найти компоненты связности V_l , $l = \overline{1, q}$ графа G и построить подграфы $G_l = (V_l, A_l)$, $l = \overline{1, q}$, порожденные соответствующими компонентами связности.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D_l^1 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\},$$

$$D_l^2 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^2), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}.$$

Шаг 4. Оптимальное значение критерия задачи $Z(W(x^1, x^2))$ определяется как

$$c^* = \sum_{l=1}^q \min \left(\sum_{(i,j,k) \in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k) \in D_l^2} c_{ijk} \right).$$

Шаг 5. Оптимальное решение задачи определяется по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk} := 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1, q}$ выполнить

$$x_{ijk} := 1, (i, j, k) \in D_l^{p^*}, \quad \text{где } p^* = \operatorname{argmin}_{p \in \{1, 2\}} \sum_{(i,j,k) \in D_l^p} c_{ijk}.$$

Далее рассмотрим доказательство корректности алгоритма 1. При доказательстве будем использовать следующие обозначения:

$$V_l^1 = \bigcup_{(i,j,k) \in D_l^1} \{i, j, k\}, \quad V_l^2 = \bigcup_{(i,j,k) \in D_l^2} \{i, j, k\}, \quad l = \overline{1, q}.$$

Лемма 1. $V_l^1 = V_l^2 = V_l$, $l = \overline{1, q}$.

Доказательство. Покажем, что $V_l^1 = V_l$, $l = \overline{1, q}$. Докажем методом от противного. Предположим, что найдется $l \in \{1, \dots, q\}$, что выполняется условие $V_l^1 \neq V_l$. По построению $V_l^1 \subseteq V_l$, тогда существует v , что $v \in V_l$ и $v \notin V_l^1$.

Тогда согласно условию (1)–(4) существует тройка (i, j, k) , что $x_{ijk}^1 = 1$ и $v \in \{i, j, k\}$. Отсюда $(i, j, k) \in W(x^1)$ и, следовательно, $(i, j), (i, k), (j, k) \in A_l$. Тогда так как $v \in V_l$ и $v \in \{i, j, k\}$, то $(i, j), (i, k), (j, k) \in A_l$ и $(i, j, k) \in D_l^1$. Отсюда $i, j, k \in V_l^1$ и, следовательно, $v \in V_l^1$. Получаем противоречие.

Соотношение $V_l^2 = V_l$, $l = \overline{1, q}$, доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $|V_l \cap I| = |V_l \cap J| = |V_l \cap K|$, $l = \overline{1, q}$.

Доказательство. Согласно условию (1)–(4) выполняется $|V_l^1 \cap I| = |V_l^1 \cap J| = |V_l^1 \cap K|$. По лемме 1 $V_l^1 = V_l$, отсюда $|V_l \cap I| = |V_l \cap J| = |V_l \cap K|$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Оптимальное значение критерия задачи $Z(W(x^1, x^2))$ определяется как*

$$\sum_{l=1}^q \min \left(\sum_{(i,j,k) \in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k) \in D_l^2} c_{ijk} \right).$$

Доказательство. Рассмотрим компоненту связности V_l , $l \in \{1, \dots, q\}$. Согласно лемме 2 выполняется $|V_l \cap I| = |V_l \cap J| = |V_l \cap K|$. Тогда упорядочим множества $I \cap V_l$, $J \cap V_l$, $K \cap V_l$ следующим образом.

В качестве i_1, j_1, k_1 выберем произвольную тройку $(i_1, j_1, k_1) \in D_l^1$. Пусть были упорядочены первые m элементов множеств:

$$\begin{aligned} i_1, \dots, i_m, \\ j_1, \dots, j_m, \\ k_1, \dots, k_m. \end{aligned}$$

Тогда выберем тройку $i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}$, удовлетворяющую следующим правилам:

- $i_{m+1} \in (I \cap V_l) \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$, $j_{m+1} \in (J \cap V_l) \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$,
 $k_{m+1} \in (K \cap V_l) \setminus \{k_1, \dots, k_m\}$,
- $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}) \in D_l^1$,
- существует тройка $(i_{m+1}, j, k) \in D_l^2$, что $j \in \{j_1, \dots, j_m\}$ или $k \in \{k_1, \dots, k_m\}$.

Далее покажем, что такая тройка $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1})$ всегда существует, в противном случае множества упорядочены.

Построим множества

$$V_m^1 = \bigcup_{q=1}^m \{i_q, j_q, k_q\}, \quad V_m^2 = \bigcup_{q=\overline{1, m}, (i_q, j, k) \in D_l^2} \{i_q, j, k\}.$$

Возможны следующие два случая.

1) $V_m^1 \neq V_m^2$, тогда существует вершина $j_q \notin V_m^2$ или $k_q \notin V_m^2$, $q = \overline{1, m}$, следовательно, существует тройка $(i, j, k) \in D_l^2$, такая что $j_q = j$ или $k_q = k$, данную вершину i выберем в качестве i_{m+1} . В качестве j_{m+1}, k_{m+1} выберем такие индексы, что $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}) \in D_l^1$.

2) $V_m^1 = V_m^2$. По построению для каждой вершины $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ существует тройка $(i, j, k) \in D_l^2$, причем $j \in \{j_1, \dots, j_m\}$ и $k \in \{k_1, \dots, k_m\}$. Согласно (1)–(4) не существует тройки $(i, j, k) \in D_l^2$, что $\{i, j, k\} \cap V_m^1 \neq \emptyset$ и $\{i, j, k\} \setminus V_m^1 \neq \emptyset$. Тогда V_m^1 образует компоненту связности графа G и, следовательно, $V_m^1 = V_l$. Таким образом множества упорядочены.

Далее рассмотрим произвольное допустимое решение x_{ijk} , $i \in I, j \in J, k \in K$, задачи $W(x^1, x^2)$. Пусть $R_l = \{(i, j, k) | x_{ijk} = 1, \{i, j, k\} \in V_l\}$, $l = \overline{1, q}$. Предположим, что для некоторого $l \in \{1, \dots, q\}$ найдутся $(i', j', k'), (i'', j'', k'') \in R_l$, что $(i', j', k') \neq (i'', j'', k'')$, $(i', j', k') \in D_l^1$, $(i'', j'', k'') \in D_l^2$. Пусть множества $I \cap V_l, J \cap V_l, K \cap V_l$ упорядочены согласно процедуре, описанной выше:

$$\begin{aligned} i_1, \dots, i_m, \\ j_1, \dots, j_m, \\ k_1, \dots, k_m. \end{aligned}$$

Здесь $I \cap V_l = \{i_1, \dots, i_m\}$, $J \cap V_l = \{j_1, \dots, j_m\}$, $K \cap V_l = \{k_1, \dots, k_m\}$. Не уменьшая общности, будем считать, что $(i_1, j_1, k_1) = (i', j', k')$.

Как показано выше, $(i_1, j_1, k_1) \in R_l$. Пусть для некоторого $t < m$ выполняется $(i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2), \dots, (i_t, j_t, k_t) \in R_l$. Согласно описанному выше правилу упорядочивания множеств существует тройка $(i_{t+1}, j, k) \in D_l^2$,

что $j \in \{j_1, \dots, j_t\}$ или $k \in \{k_1, \dots, k_t\}$. Тогда с учетом условия (1)–(4) выполняется $(i_{t+1}, j_{t+1}, k_{t+1}) \in R_l$. Следовательно, $(i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2), \dots, (i_m, j_m, k_m) \in R_l$. Получаем противоречие.

Таким образом, для каждого $l \in \{1, \dots, q\}$ выполняется $R_l = D_l^1$ или $R_l = D_l^2$. Отсюда оптимальное значение критерия задачи $Z(W(x^1, x^2))$ определяется как $\sum_{l=1}^q \min \left(\sum_{(i,j,k) \in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k) \in D_l^2} c_{ijk} \right)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Алгоритм 1 требует $O(n)$ вычислительных операций.

Доказательство. Пусть входными данными алгоритма 1 являются допустимые решения x^1, x^2 , представленные в виде коллекции троек (i, j, k) и стоимостей c_{ijk} , для которых соответствующие переменные принимают значение 1. Согласно (1)–(4) для каждого из допустимых решений количество таких троек составляет n . Тогда на шаге 1 алгоритма строится граф $G = (V, A)$, что $|V| = O(n)$, $|A| = O(n)$.

На шаге 2 граф G разбивается на компоненты связности. Это осуществляется при помощи обхода графа в ширину, который требует $O(|V| + |A|) = O(n)$ вычислительных операций.

На шаге 3 для входных троек алгоритма определяются соответствующие компоненты связности, этот шаг требует $O(n)$ вычислительных операций.

И, наконец, на шаге 4 необходимо определить оптимальное значение критерия. Согласно шагу 4 по каждой из компонент связности выбирается минимум среди подмножества троек, соответствующих входным допустимым решениям. Данный шаг требует $O(n)$ вычислительных операций.

Таким образом, алгоритм 1 требует $O(n)$ вычислительных операций. Теорема доказана.

4. Вычислительный эксперимент

В [5] предложен набор тестовых задач, состоящий из 18 задач, параметр n принимает значения 33 и 66. Предложенный в [5] подход основан на решении трех пар зависимых двухиндексных задач, в результате решения каждой из пары задач строится допустимое решение задачи (1)–(5). По аналогии с [5] значение критерия (5), полученное на данных трех допустимых решениях, будем обозначать через c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK} соответственно. Сами допустимые решения обозначим через x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} соответственно. Далее последовательно применим алгоритм 1 оптимального комбинирования решений следующим образом. Пусть x_{IJ-JK} является решением задачи $Z(W(x_{IJ}, x_{JK}))$, $x_{IJ-JK-IK}$ является решением задачи $Z(W(x_{IJ-JK}, x_{IK}))$. Значение критерия (5) на решении $x_{IJ-JK-IK}$ обозначим через $c_{IJ-JK-IK}$. Оптимальное значение критерия задачи (1)–(5) обозначим через c^* . Будем сравнивать рекорд среди решений x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} (соответствует $\min\{c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK}\}$) с их оптимальной комбинацией $x_{IJ-JK-IK}$ (соответствует $c_{IJ-JK-IK}$). Полученные результаты приведены в табл. 1. Среднее отклонение от оптимума для рекорда среди решений x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} составляет 1,675%, среднее отклонение от оптимума для оптимальной комбинации данных решений $x_{IJ-JK-IK}$ составляет 1,527%. Фактическое снижение отклонения от оптимума за счет комбинирования решений произошло на семи из 18 тестовых задач.

Таблица 1

	n	c^*	c_{IJ}	c_{IK}	c_{JK}	$\min\{c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK}\}$	$c_{IJ-JK-IK}$
1	33	1608	1620	1637	1655	1620	1615
2	33	1401	1420	1416	1411	1411	1406
3	33	1604	1613	1635	1632	1613	1604
4	66	2662	2678	2684	2666	2666	2663
5	66	2449	2503	2486	2470	2470	2466
6	66	2758	2811	2788	2792	2788	2777
7	33	4797	4855	4851	4885	4851	4851
8	33	5067	5165	5150	5181	5150	5150
9	33	4287	4341	4364	4371	4341	4341
10	66	9684	9817	9761	9891	9761	9761
11	66	8944	9138	9177	9129	9129	9129
12	66	9745	9921	9869	9975	9869	9869
13	33	133	139	135	136	135	135
14	33	131	137	138	137	137	136
15	33	131	134	136	136	134	134
16	66	286	296	296	295	295	295
17	66	286	295	295	292	292	292
18	66	282	294	297	294	294	294

Таблица 2

n	M	$100\% \frac{C' - C^*}{C^*}$	$100\% \frac{C'' - C^*}{C^*}$
10	10	5,366%	5,366%
11	10	8,435%	6,021%
12	10	13,913%	12,704%
13	10	20,686%	15,913%
14	10	33,339%	29,448%
15	10	55,093%	50,347%
16	10	73,054%	69,869%
17	10	83,103%	75,433%
18	10	75,947%	67,858%
19	10	97,771%	88,445%

По аналогии с [12] построим тестовый набор с матрицами стоимостей, элементы которых сгенерированы с целочисленными значениями, равномерно распределенными в интервале $[0, 300]$. Будем строить серии экспериментов с задачами размерности $n \in \{10, 11, \dots, 19\}$, в каждой серии построим $M = 10$ задач. Для каждой из тестовых задач случайным образом сгенерируем $N = n^3$ допустимых решений, к каждому из которых итеративно применим алгоритм локальной оптимизации, предложенный в [13], до тех пор, пока решение не перестанет меняться. Полученные допустимые решения задачи (1)–(5) и соответствующие значения критерия (5) обозначим через x'_t и c'_t , $t = \overline{1, N}$. Тогда рекорд среди полученных решений обозна-

чим как $C' = \min_{t=1, N} c'_t$. Далее применим алгоритм 1 оптимального комбинирования решений следующим образом. Пусть x''_1 является решением задачи $Z(W(x'_1, x'_2))$, x''_t является решением задачи $Z(W(x''_{t-1}, x'_{t+1}))$, $t = \overline{2, N-1}$. Соответствующие значения критерия обозначим через c''_t , $t = \overline{1, N-1}$, и выберем рекорд, достигнутый комбинированием всей последовательности N решений $C'' = c''_{N-1}$. Наконец, через C^* обозначим оптимальное значение критерия исходной задачи. Будем сравнивать отклонение от оптимума рекорда среди локально оптимизированных случайных решений и отклонение от оптимума рекорда среди локально оптимальных случайных решений, последовательно комбинированных алгоритмом 1. Для серии экспериментов будем оценивать среднее отклонение в серии. Полученные результаты приведены в табл. 2. Таким образом, среднее отклонение для C' по всем сериям составляет 46,671%, для C'' по всем сериям составляет 42,141%.

5. Заключение

При исследовании алгоритмов решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях в работе построен алгоритм, позволяющий эффективно комбинировать пары допустимых решений задачи. Данный алгоритм может быть применен в качестве дополнения к известным эвристическим или приближенным алгоритмам для постобработки полученных приближенных решений задачи о назначениях. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие повышения качества приближенных решений, полученных в результате постобработки предложенным алгоритмом оптимального комбинирования. Полученные результаты естественным образом обобщаются при исследовании многоиндексных задач о назначениях. Дальнейшим направлением исследования является построение алгоритма комбинирования произвольного числа допустимых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications. / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Афраймович Л.Г.* Эвристический метод решения целочисленных декомпозиционных многоиндексных задач // *АиТ.* 2014. № 8. С. 3–18.
Afraimovich L.G. A Heuristic Method for Solving Integer-Valued Decompositional Multiindex Problems // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. P. 1357–1368.
3. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // *АиТ.* 2010. № 10. С. 148–155.
Afraimovich L.G., Prilutskii M.Kh. Multiindex Optimal Production Planning Problems // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. P. 2145–2151.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // *Eur. J. Oper. Res.* 1992. V. 60. P. 273–279.

6. *Bandelt H.J., Crama Y., Spiessma F.C.R.* Approximation Algorithms for Multidimensional Assignment Problems with Decomposable Costs // *Discret. Appl. Math.* 1994. V. 49. P. 25–50.
7. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-Dimensional Axial Assignment Problems with Decomposable Cost Coefficients // *Discret. Appl. Math.* 1996. V. 65. P. 123–139.
8. *Spiessma F., Woeginger G.* Geometric three-dimensional assignment problems // *Eur. J. Oper. Res.* 1996. V. 91. P. 611–618.
9. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой // *АиТ.* 2012. № 1. С. 130–147.
Afraimovich L.G. A Multi-index Transport Problems with Decomposition Structure // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 1. P. 118–133.
10. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // *АиТ.* 2013. № 1. С. 116–134.
Afraimovich L.G. A Multiindex Transportation Problems with 2-embedded Structure // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 1. P. 90–104.
11. *Афраймович Л.Г.* Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // *АиТ.* 2011. № 8. С. 109–120.
Afraimovich L.G. Three-Index Linear Programs with Nested Structure // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 8. P. 1679–1689.
12. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // *Oper. Res.* 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.
13. *Huang G., Lim A.* A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assignment Problem // *Eur. J. Oper. Res.* 2006. V. 172. P. 249–257.
14. *Kim B.J., Hightower W.L., Hahn P.M., Zhu Y.R., Sun L.* Lower bounds for the axial three-index assignment problem // *Eur. J. Oper. Res.* 2010. V. 202. P. 654–668.
15. *Дичковская С.А., Кравцов М.К.* Исследование полиномиальных алгоритмов решения трехиндексной планарной проблемы выбора // *Журн. вычисл. мат., мат. физики.* 2006. Т. 46. 2. С. 222–228.
16. *Думбадзе Л.Г., Леонов В.Ю., Тизик А.П., Цурков В.И.* Декомпозиционный метод решения трехиндексной задачи о назначениях // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2020. № 5. С. 56–59.
17. *Глмади Э.Х., Глазков Ю.В.* Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // *Дискрет. анализ и исследование операций.* Сер. 2. 2006. Т. 13. 1. С. 10–26.
18. *Magos D.* Tabu search for the planar three-index assignment problem // *J. Global Optim.* 1996. V. 8. P. 35–48.
19. *Прилуцкий М.Х.* Программные управления двухстадийными стохастическими производственными системами // *АиТ.* 2020. № 1. С. 81–92.
Prilutskii M.Kh. Programmed Control of Two-Stage Stochastic Production Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. P. 64–73.
20. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное управление двухстадийными стохастическими производственными системами // *АиТ.* 2018. № 5. С. 69–82.
Prilutskii M.Kh. Optimal Control for Two-Stage Stochastic Production Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. P. 830–840.
21. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное планирование двухстадийных стохастических производственных систем // *АиТ.* 2014. № 8. С. 37–47.
Prilutskii M.Kh. Optimal Planning for Two-Stage Stochastic Industrial Systems // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. P. 1384–1392.

22. *Karapetyan D., Gutin D.* A New Approach to Population Sizing for Memetic Algorithms: A Case Study for the Multidimensional Assignment Problem // Evolutionary Computation. 2011. V. 19. No. 3. P. 345–371.
23. *Медведев С.Н., Медведева О.А.* Адаптивный алгоритм решения аксиальной трехиндексной задачи о назначениях // *АиТ.* 2019. № 4. С. 156–172.
Medvedev S.N., Medvedeva O.A. An Adaptive Algorithm for Solving the Axial Three-Index Assignment Problem // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. P. 718–732.
24. *Gabrovšek B., Novak T., Povh J., Rupnik Poklukar D., Žerovnik J.* Multiple Hungarian Method for k-Assignment Problem // *Mathematics.* 2020. V. 8. 2050.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 05.11.2020

После доработки 11.01.2021

Принята к публикации 16.03.2021

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

- Мухачёв П.А., Садретдинов Т.Р., Притыкин Д.А., Иванов А.Б., Соловьев С.В.** Современные методы машинного обучения для анализа технического состояния космических аппаратов по данным телеметрической информации 3

Линейные системы

- Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.** Многокритериальные минимаксные задачи: локализация множества Парето и синтез субоптимальных управлений 39

Нелинейные системы

- Солнечный Э.М.** Исследование динамических свойств распределенной термомеханической системы и условия устойчивости системы управления ею 60

Стохастические системы

- Вайчюлис М., Маркович Н.М.** Оценка параметров в суженном распределении Парето 85

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Соколов В.Ф.** Адаптивное оптимальное слежение для дискретного минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода 108

Управление в технических системах

- Воробьев В.В., Кузнецов В.Л., Шаров В.Д.** Модификация методики оценки уровня безопасности полетов при управлении воздушным движением с использованием системы АЗН-В 129
- Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.** Отказоустойчивые структуры цифровых устройств на основе логического дополнения 140

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.** Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях 159

C O N T E N T S

Surveys

- Mukhachev P.A., Sadretdinov T.P., Pritykin D.A., Ivanov A.B., Soloviev S.V.** Modern Machine Learning Methods for Analyzing the Technical Condition of Space Vehicles Based on Telemetry Data 3

Linear Systems

- Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.** Multi-Objective Minimax Problems: Localization of the Pareto Set and Synthesis of Suboptimal Controls 39

Nonlinear Systems

- Solnechnyi E.M.** Dynamic Features Investigation of a Distributed Thermomechanical System and Stability Conditions of its System Control 60

Stochastic Systems

- Vaičiulis M., Markovich N.** Title of the Manuscript Parameter Estimation for the Ta-Pered Pareto Law 85

Robust, Adaptive and Network Control

- Sokolov V.F.** Adaptive Optimal Tracking of Discrete-Time Minimum Phase Plant under Output Uncertainty 108

Control in Technical Systems

- Vorobyev V.V., Kuznetsov V.L., Sharov V.D.** Modification of the Methods for Assessing the Level of Safety in Air Traffic Services Using ADS-B 129
- Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.** Fault-Tolerant Structures of Digital Devices Based on Boolean Complement 140

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Afraimovich L.G., Emelin M.D.** Solutions Combination of Axial Assignment Problem 159