СОДЕРЖАНИЕ

Том 85, номер 1, 2021

Волновые явления в неоднородных средах

Contents

Vol. 85, No 1, 2021

Wave Phenomena in Inhomogeneous Media

Волновые явления в неоднородных средах

Редактор тематического выпуска

канд. физ.-мат. наук **А. Н. Калиш**

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 6–13

УДК 537.876.4:538.94:530.182

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОТОКЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ

© 2021 г. И. В. Дзедолик*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского", Симферополь, Россия

**E-mail: igor.dzedolik@cfuv.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрены процессы возбуждения и распространения плазмон-поляритонных мод на границе раздела диэлектрической среды и металла в линейном и нелинейном режимах. Описаны физические механизмы возникновения нелинейного отклика свободных электронов в металле на основе квантовой гидродинамической модели. Показано, что в нелинейном режиме период и профиль огибающей кноидальной волны поверхностных плазмон-поляритонов меняются в зависимости от условий возбуждения и плотности энергии возбуждающей электромагнитной волны.

DOI: 10.31857/S0367676521010105

ВВЕДЕНИЕ

С 80-х годов прошлого столетия особое внимание уделяется распространению электромагнитных волн на границах раздела сред, в частности, металлов и диэлектриков, в связи с широкими перспективами применения композитных материалов в микро- и наноустройствах фотонной и плазмонной техники [1–6]. Высокочастотное электромагнитное поле вызывает осцилляции как свободных, так и связанных зарядов в диэлектрических, полупроводниковых средах и металлах. При этом, в результате осцилляций зарядов излучаются вторичные электромагнитные волны, которые гибридизируются с волнами поляризации связанных и свободных зарядов в среде и распространяются в объеме среды, а также вдоль границы раздела сред в форме плазмон-поляритонных волн.

Спектр плазмонов в объемном образце отличается от спектра плазмонов в тонком или толстом слоях одного и того же металла, в наночастице и в нанопроводе [1–6]. Геометрические размеры и форма объекта влияют на его резонансные свойства, радиационные эффекты и поглощение электромагнитного поля. Помимо этого, свойства поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) зависят от параметров диэлектрической среды, с которой контактирует поверхность металла. Возбуждение ППП может осуществляться с помощью призм [1], микрозондами и микрообъективами с большой апертурой [3], с помощью спазеров [6, 7] или полупроводниковых квантовых точек [8, 9].

Внешнее электромагнитное поле действует на электроны, вызывая линейный отклик диэлектрической проницаемости металла. При увеличении амплитуды внешнего поля появляются ангармонические колебания электронов и ионов, межзонные переходы, которые приводят к проявлению нелинейных поляризационных механизмов [1]. На границе раздела сред металл-диэлектрик происходит скачок диэлектрической проницаемости, т.е. нарушение трансляционной симметрии, что обуславливает возникновение больших поверхностных токов в скин-слое. Это приводит к возникновению нелинейных поверхностных эффектов на границе раздела сред. Линейные и нелинейные эффекты при генерации и распространении объемных и поверхностных плазмон-поляритонов описываются классическими и квантовыми линейными и нелинейными моделями [10–12]. Квантовые модели позволяют выявить физические механизмы, влияющие на динамику плазмон-поляритонов в объеме среды и на границе раздела сред, исследовать нелинейные процессы.

Интенсивная электромагнитная волна или мощный электромагнитный импульс генерируют нелинейные плазмон-поляритонные волны – кноидальные волны, кинки и солитоны в объеме проводящей среды [5, 7, 11–16], и на границе раздела проводящей и диэлектрической сред [1–7,

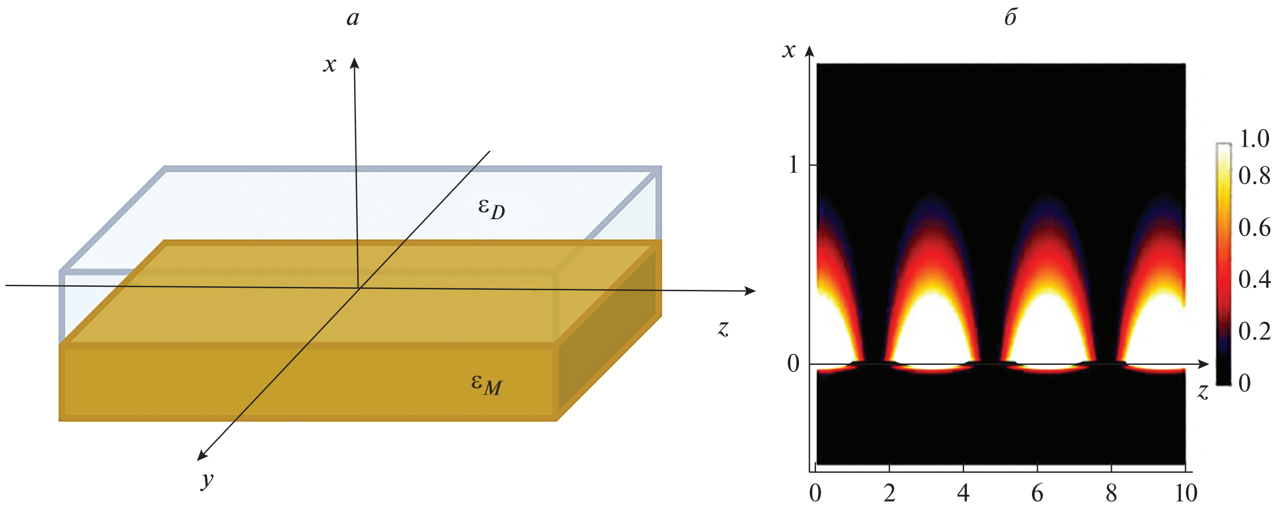

Рис. 1. Граница раздела (*а*) между диэлектрической и проводящей средами с диэлектрическим проницаемостями ε_D и ε_M, соответственно; (*б*) плотность энергии ППП на границе раздела сред. Размеры по осям отложены в микрометрах, плотность энергии представлена в относительных единицах (*б*).

17–22]. Свойства и динамика кноидальных волн и солитонов зависят от параметров возбуждающих электромагнитных волн и импульсов, а также от геометрии системы и свойств среды, в которой возбуждаются плазмон-поляритоны. Основная цель данной работы – исследование линейных и нелинейных процессов при распространении ППП на плоской границе раздела металла и диэлектрической среды в зависимости от граничных условий и плотности энергии электромагнитной волны, возбуждающей ППП.

МОДЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ

ППП генерируются при падении электромагнитной волны на границу раздела диэлектрической и проводящей среды (металла) (рис. 1), и возникают в результате взаимодействия фотонов, фононов и плазмонов.

Амплитуды ППП экспоненциально убывают при удалении от границы раздела сред, т.е. ППП локализованы вблизи границы (рис. 1*б*). Такие волны “привязаны” к границе раздела сред и не излучаются с гладкой границы. Для трансформации поверхностной волны в объемную (излучаемую) волну гладкость границы должна быть нарушена, например, с помощью выступов, бороздок, и т.п. [1–3].

Рассмотрим механизм возникновения ППП на границе раздела однородных сред с различными диэлектрическими ε_D и ε_M, а также магнитными μ_D и μ_M проницаемостями. В линейном режиме диэлектрические и магнитные проницаемости обеих сред не зависят от плотности энергии ППП. Полагаем, что ППП возбуждаются монохроматическим полем $\sim\exp(-i\omega t)$. Поверхностная волна распространяется вдоль границы раздела сред по оси z, а ось x направлена по нормали к границе. Поле ППП экспоненциально спадает при удалении от границы $\sim\exp(-\alpha_D x)$ как в положительном направлении оси $x > 0$, так и $\sim\exp(\alpha_M x)$ в отрицательном направлении оси $x < 0$, причем $Re\alpha_D > 0$, $Re\alpha_M > 0$ [1–5].

Для ППП с плоским волновым фронтом вдоль оси y поле не меняется $\partial/\partial y \to 0$. Из уравнений Максвелла $\nabla\times\vec{H} = -ic^{-1}\omega\varepsilon\vec{E}$, $\nabla\times\vec{E} = ic^{-1}\omega\mu\vec{H}$ получаем две системы уравнений для мод ППП [1]: для поперечной магнитной (ТМ-моды) с компонентами H_y, E_x, E_z магнитного и электрического полей

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_x,\quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_z,\quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\frac{\omega\mu}{c}H_y, \tag{1}$$

и для поперечной электрической (ТЕ-моды) с компонентами E_y, H_x, H_z,

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = -i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_y,\quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\frac{\omega\mu}{c}H_x,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\frac{\omega\mu}{c}H_z. \tag{2}$$

Из систем уравнений (1) и (2) можно получить уравнение второго порядка для поля H_y ТМ-моды и поля E_y ТЕ-моды, соответственно,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2} + \alpha^2\right)\begin{Bmatrix} H_y \\ E_y \end{Bmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Граничные условия при $x = 0$ для ТМ-моды имеют вид $H_{y1} = H_{y2}$, $E_{z1} = E_{z2}$, откуда следует $\frac{1}{\varepsilon_D}\frac{dH_{Dy}}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_M}\frac{dH_{My}}{dx}$, т.е. $-\varepsilon_M\alpha_D = \varepsilon_D\alpha_M$; для ТЕ-моды граничные условия $E_{yD} = E_{yM}$, $H_{zD} = H_{zM}$ дают равенство $\frac{1}{\mu_D}\frac{dE_{Dy}}{dx} = \frac{1}{\mu_M}\frac{dE_{My}}{dx}$, т.е. $-\mu_M\alpha_D = \mu_D\alpha_M$. Из граничных условий следует, что ТМ-мода ППП возбуждается на границе раздела сред с разными по знаку диэлектрическими проницаемостями, а ТЕ-мода ППП возбуждается при разных по знаку магнитных проницаемостях. В общем случае магнитная проницаемость – положительная величина, т.е. поверхностная ТЕ-мода на границе раздела металла и диэлектрика не возбуждается. Однако в средах с отрицательной магнитной проницаемостью ТЕ-мода может быть возбуждена, так как ее магнитная проницаемость может быть отрицательной. Примером таких сред являются фотонные кристаллы и метаматериалы [23].

Решения уравнений (1)–(3) можно представить в форме $E_j = E_{0j}\exp(i\beta z)$, $H_j = H_{0j}\exp(i\beta z)$, где $j = D, M$. Тогда остальные компоненты приобретают вид для ТМ-моды $E_x = \frac{c\beta}{\omega\varepsilon}H_y$, $E_z = i\frac{c\alpha}{\omega\varepsilon}H_y$, и для ТЕ-моды $H_x = -\frac{c\beta}{\omega\mu}E_y$, $H_z = -i\frac{c\alpha}{\omega\mu}E_y$.

Подставляя решения для E_j и H_j в уравнения (3), получаем характеристические уравнения для ТМ-моды и ТЕ-моды ППП $\varepsilon_j\mu_j c^{-2}\omega^2 - \beta^2 + \alpha_j^2 = 0$, из этих уравнений находим коэффициенты α_j мод $\alpha_j = \left(\beta^2 - \varepsilon_j\mu_j c^{-2}\omega^2\right)^{1/2}$. Исключая коэффициенты α_j из граничные условий $-\varepsilon_M\alpha_D = \varepsilon_D\alpha_M$ и $-\mu_M\alpha_D = \mu_D\alpha_M$, получаем дисперсионные уравнения для ТМ-моды $\omega^2 - \frac{\varepsilon_D^2 - \varepsilon_M^2}{\varepsilon_D\varepsilon_M\left(\varepsilon_D\mu_M - \varepsilon_M\mu_D\right)}c^2\beta^2 = 0$, и для ТЕ-моды $\omega^2 - \frac{\mu_D^2 - \mu_M^2}{\mu_D\mu_M\left(\varepsilon_M\mu_D - \varepsilon_D\mu_M\right)}c^2\beta^2 = 0$.

Для ППП, которые распространяются вдоль границы немагнитного диэлектрика $\mu_D = 1$ и немагнитного металла $\mu_M = 1$, возбуждается только ТМ-мода, для нее имеет место дисперсионное уравнение $\omega^2\tilde{\varepsilon} - c^2\beta^2 = 0$, где $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_D\varepsilon_M}{\varepsilon_D + \varepsilon_M}$ – эффективная диэлектрическая проницаемость. В этом случае ТЕ-мода не возбуждается. Эффективная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}$ должна быть положительной для ППП, распространяющихся вдоль границы металла с $\mathrm{Re}\varepsilon_M < 0$ и диэлектрика с $\mathrm{Re}\varepsilon_D > 0$, т.е. должны выполняться неравенства $\mathrm{Re}\varepsilon_D\mathrm{Re}\varepsilon_M < 0$ и $\mathrm{Re}\varepsilon_D + \mathrm{Re}\varepsilon_M < 0$. При этом действительная часть диэлектрической проницаемости металла должна быть по модулю больше, чем диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Тогда постоянная распространения ППП ТМ-моды будет иметь действительное значение $\beta = k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, где $k_0 = \omega/c$. Постоянные распространения ППП больше по величине, чем волновые векторы фотонов на той же частоте $\beta > k_0$. Поэтому электромагнитная волна, падающая на плоскую поверхность металла из воздуха, не возбуждает ППП, и для возбуждения ППП необходимо применять соответствующие методы [1–6] для уравнивая тангенциальной компоненты электромагнитной волны и постоянной распространения ППП.

Решения дисперсионного уравнение для ППП ТМ-моды $\varepsilon_D\varepsilon_M\omega^2 - c^2(\varepsilon_D + \varepsilon_M)\beta^2 = 0$ определяют ветви спектра ТМ-моды ППП. На границе раздела сред собственные коллективные электронные колебания (поверхностные электронные состояния или поверхностные плазмоны (ПП)), возникают при резонансе, когда эффективная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_D\varepsilon_M/(\varepsilon_D + \varepsilon_M) \to \infty$. Спектр ПП дают решения уравнения $\varepsilon_D + \varepsilon_M = 0$. Диэлектрические проницаемости на оптических частотах можно представить для диэлектрика в виде $\varepsilon_D = 1 + \omega_{eD}^2/\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega\right)$, а для металла в виде $\varepsilon_M = \varepsilon_{lat} - \omega_{eM}^2/(\omega^2 + i\gamma\omega)$, где ω_{ej}^2 – плазменные частоты, Γ, γ – частоты релаксаций колебаний, ε_{lat} – диэлектрическая проницаемость ионной решетки металла.

Таким образом, в линейном режиме ППП распространяются в форме эванесцентной волны $\sim\exp\left(-\alpha_D x\right)\exp\left(-i\omega t + i\beta z\right)$ с гармонической зависимостью от времени и от продольной координаты.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Наиболее последовательно динамика электронов в металле при воздействии электромагнитного поля описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\left(|\Psi|^2\right)\Psi. \qquad (4)$$

Из уравнения Шрёдингера (4) с помощью преобразования Маделунга [24] $\Psi = a(t,\vec{r})\exp[ib(t,\vec{r})]$, можно получить гидродинамическую модель, описывающую взаимодействие электронов с электромагнитным полем. Полагая, что $a^2 = |\Psi|^2 = n(t,\vec{r})$ — плотность, а $\nabla\phi = \vec{\upsilon}(t,\vec{r})$ — скорость электронной жидкости, где $\phi = -b\hbar/m$, из уравнения Шрёдингера (4) получаем систему гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{\upsilon}) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{m}\nabla(U + U_q), \quad (6)$$

где $U_q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ — квантовый потенциал, описывающий взаимодействие электронов [1, 13, 25].

Рассмотрим квантовую гидродинамическую модель, в которой градиент потенциала электронной жидкости обусловлен силой Лоренца $-\nabla U = \vec{F}_L$, а квантовый потенциал представляет кинетическая энергия Томаса–Ферми $U_q = C_F n^{5/3}$, где $C_F = \frac{3\hbar^2}{10m}(3\pi^2)^{2/3}$ [25]. Тогда уравнения (5), (6) приобретают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{\upsilon}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon} = -\frac{e}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) - C_F\nabla n^{5/3}. \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (7), (8) можно применить метод последовательных приближений, представляя плотность и скорость электронной жидкости в форме рядов $n(t,\vec{r}) = n_0 + n_1(t,\vec{r}) + n_2(t,\vec{r}) + \ldots$ и $\vec{\upsilon}(t,\vec{r}) = \vec{\upsilon}_1(t,\vec{r}) + \vec{\upsilon}_2(t,\vec{r}) + \ldots$. Пренебрегая квантовым давлением по сравнению с силой Лоренца [1] в уравнении (8), получаем уравнения гидродинамической модели в первом приближении

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0\nabla\vec{\upsilon}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}_1}{\partial t} = -\frac{e}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\upsilon}_1\times\vec{B}\right). \quad (10)$$

Для ТМ-моды ППП с компонентами поля в немагнитном металле $E_x = \frac{c\beta A}{\omega\varepsilon_M}\exp(i\phi)$, $E_z = i\frac{c\alpha_M A}{\omega\varepsilon_M}\exp(i\phi)$, $B_x = A\exp(i\phi)$, где $\phi = -i\omega t + \alpha_M x + i\beta z$, векторное уравнение (10) приобретает вид системы уравнений $\frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial t} = -\frac{e}{m}E_x + \frac{e}{mc}\upsilon_{1z}B_y$, $\frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial t} = -\frac{e}{m}E_z - \frac{e}{mc}\upsilon_{1x}B_y$, а $\upsilon_{1y} = 0$. Учитывая, что компоненты электрического и магнитного полей имеют одинаковый порядок величины, вторыми слагаемыми в правых частях этих уравнений можно пренебречь [1], т.к. их учет является превышением точности первого приближения. Тогда находим компоненты скорости $\upsilon_{1x} = -i\frac{e}{m\omega}E_x$ и $\upsilon_{1z} = -i\frac{e}{m\omega}E_z$, и подставляя в них компоненты ТМ-моды в металле, получаем $\upsilon_{1x} = -i\frac{ec}{m\omega^2}\times\frac{\beta A}{\varepsilon_M}\exp(i\phi)$, $\upsilon_{1z} = \frac{ec}{m\omega^2}\frac{\alpha_M A}{\varepsilon_M}\exp(i\phi)$. Подставляя выражения для компонент скорости в уравнение (9) и учитывая, что $\nabla\vec{\upsilon}_1 = 0$, для ТМ-моды ППП получаем $\partial n_1/\partial t = 0$ в рассматриваемом приближении, т.е. $n_1 = \mathrm{const}$.

Во втором приближении система уравнений (7), (8) имеет вид

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + n_0\nabla\vec{\upsilon}_2 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}_2}{\partial t} = -(\vec{\upsilon}_1\nabla)\vec{\upsilon}_1 - \frac{e}{m}\left(\frac{1}{c}\vec{\upsilon}_1\times\vec{B} + \frac{1}{c}\vec{\upsilon}_2\times\vec{B}\right). \quad (12)$$

Систему уравнений (11), (12) с учетом выражения для скорости $\vec{\upsilon}_1 = -i\frac{e}{m\omega}\vec{E}$ представим в виде

$$\frac{\partial^2 n_2}{\partial t^2} = -\frac{\omega_e^2}{4\pi m\omega^2}\nabla(\vec{E}\nabla)\vec{E} - i\frac{\omega_e^2}{4\pi mc\omega}\nabla(\vec{E}\times\vec{B}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}_2}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2\omega^2}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + i\frac{e^2}{m^2c\omega}\vec{E}\times\vec{B}. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) позволяет найти выражение для возмущения электронной плотности во втором приближении на частоте второй гармоники $\sim\exp(-i2\omega t)$, $n_2 = \frac{\omega_e^2}{4\pi m\omega^4}\nabla(\vec{E}\nabla)\vec{E} + i\frac{\omega_e^2}{4\pi mc\omega^3}\nabla(\vec{E}\times\vec{B})$. Решение уравнения (14) представляет возмущение электронной скорости во втором приближении $\vec{\upsilon}_2 = i\frac{e^2}{2m^2\omega^3}(\vec{E}\nabla)\vec{E} - \frac{e^2}{2m^2c\omega^2}\vec{E}\times\vec{B}$.

Вектор поляризации среды $\vec{P}$ может быть выражен через электронную плотность и вектор плотности тока электронной жидкости, которые связаны уравнением непрерывности $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0$, т.е. $\vec{j} = -\frac{1}{e}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, $n = \frac{1}{e}\nabla\vec{P}$, где $\vec{j} = n_0(\upsilon_1 + \upsilon_2)$, $n = n_0 + n_2$. Вектор поляризации среды можно найти как $\vec{P} = -e\int dt\vec{j}$, т.е.

$$\vec{P}_2 = -\frac{\omega_e^2}{4\pi\omega^2}\vec{E} + \frac{e\omega_e^2}{16\pi m\omega^4}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + i\frac{e\omega_e^2}{16\pi mc\omega^3}\vec{E}\times\vec{B}. \tag{15}$$

Следующее приближение увеличивают степень нелинейности тока $\vec{j} = n_0(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3) + n_2\upsilon_1$, где возмущение скорости третьего порядка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t} = -(\upsilon_1\nabla)\upsilon_2 - (\upsilon_2\nabla)\upsilon_1 - \frac{e}{mc}\upsilon_2\times\vec{B}, \tag{16}$$

решение которого имеет вид $\upsilon_3 = -\frac{i}{3\omega}\times\left[(\upsilon_1\nabla)\upsilon_2 + (\upsilon_2\nabla)\upsilon_1 + \frac{e}{mc}\upsilon_2\times\vec{B}\right]$. Интегрируя по времени вектор плотности тока $\vec{j}$, полученный в третьем приближении, находим вектор поляризации среды

$$\begin{gathered}\vec{P}_3 = -\frac{\omega_e^2}{4\pi\omega^2}\vec{E} + \frac{e\omega_e^2}{16\pi m\omega^4}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + \frac{ie\omega_e^2}{16\pi mc\omega^3}\vec{E}\times \\ \times\vec{B} - \frac{e^2\omega_e^2}{24\pi m^2\omega^5}(\vec{E}\nabla)\left(\frac{1}{\omega}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + \frac{i}{c}\vec{E}\times\vec{B}\right) - \\ - \frac{e^2\omega_e^2}{24\pi m^2\omega^5}\left(\left(\frac{1}{\omega}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + \frac{i}{c}\vec{E}\times\vec{B}\right)\nabla\right)\vec{E} - \\ - \frac{ie^2\omega_e^2}{24\pi m^2c\omega^4}\left(\frac{1}{\omega}(\vec{E}\nabla)\vec{E} + \frac{i}{c}\vec{E}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} - \\ - \frac{e^2\omega_e^2}{12\pi m^2\omega^6}\vec{E}\left(\nabla\left(\vec{E}\nabla\right)\vec{E}\right) - \frac{ie^2\omega_e^2}{12\pi m^2c\omega^5}\vec{E}\left(\nabla\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right).\end{gathered} \tag{17}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ

Нелинейный отклик возникает в металле при воздействии достаточно мощной электромагнитной волны. Для теоретического анализа нелинейных процессов при распространении ППП полагаем, что ТМ-мода ППП возбуждается на оптической частоте на границе металла с воздухом с диэлектрическим проницаемостями ε_M и $\varepsilon_0 = 1$, соответственно. Отклик электронной жидкости на второй гармонике для металла может иметь место на границе раздела сред из-за нарушения трансляционной инвариантности [1], т.е. для компоненты электрического поля E_x. Компоненты поля ППП затухают экспоненциально $\sim\exp(\alpha_M x)$ вглубь металла ($x < 0$), причем глубина проникновения поля в металл на оптических частотах составляет два-три десятка нанометров при длине волны ППП, имеющей порядок нескольких сотен нанометров. Плотность энергии ППП $\sim E^2$ зависит от нормальной к поверхности металла координаты как $\exp(2\alpha_M x)$, поэтому энергия ППП сосредоточена вблизи поверхностного слоя.

Процесс формирования мод ППП на границе раздела диэлектрической среды и металла описывается классическими уравнениями Максвелла для поля с учетом нелинейной поляризации электронной жидкости $\nabla\times\vec{B} = c^{-1}(\dot{\vec{E}} + 4\pi\dot{\vec{P}})$, $\nabla\times\vec{E} = -c^{-1}\dot{\vec{B}}$. Уравнения для нелинейной ТМ-моды ППП имеют вид $\frac{dB_y}{dz} = -c^{-1}(\dot{E}_x + 4\pi\dot{P}_x)$, $\alpha_M B_y = c^{-1}(\dot{E}_z + 4\pi\dot{P}_z)$, $\frac{dE_x}{dz} - \alpha_M E_z = -c^{-1}\dot{B}_y$, где в правых частях стоят компоненты вектора поляризации среды (17). Найти аналитические решения этой системы нелинейных уравнений в частных производных, в правых частях которых имеются члены, зависящие от первой, второй и третьей гармоник частоты возбуждающей ППП электромагнитной волны, весьма проблематично.

Полагаем, что ТМ-мода ППП возбуждается только на первой гармонике, а вторая и третья гармоники в результате дисперсии в металле несинхронны, что возможно при большой величине дисперсии в металле [1], т.е. ППП на них не возбуждаются. Для дальнейшего теоретического анализа нелинейную систему уравнений для компонент ТМ-моды представим с учетом только основных членов [26] вектора поляризации среды (17), дающих наибольший отклик электронной жидкости

$$\begin{gathered}\frac{\partial B_y}{\partial z} = ik_0\varepsilon_{Mx}E_x, \quad B_y = -i\frac{k_0}{\alpha_M}\varepsilon_{Mz}E_z, \\ \frac{dE_x}{dz} - \alpha_M E_z = ik_0 B_y,\end{gathered} \tag{18}$$

где $\varepsilon_{Mx} = \varepsilon_{ML} + 4\pi\chi_2 E_x - 4\pi\chi_3 E^2$, $\varepsilon_{Mz} = \varepsilon_{ML} - 4\pi\chi_3 E^2$, $\varepsilon_{ML} = \varepsilon_{lat} - \omega_{eM}^2/(\omega^2 + i\gamma\omega)$, χ_2 и χ_3 – диэлектрическая восприимчивость металла второго и третьего порядков, $E^2 = E_x^* E_x + E_z^* E_z$, α_M и ε_{ML} являются комплексными величинами. Из системы трех уравнений (18), исключая $B_y = -ik_0\alpha_M^{-1}\varepsilon_{Mz}E_z$,

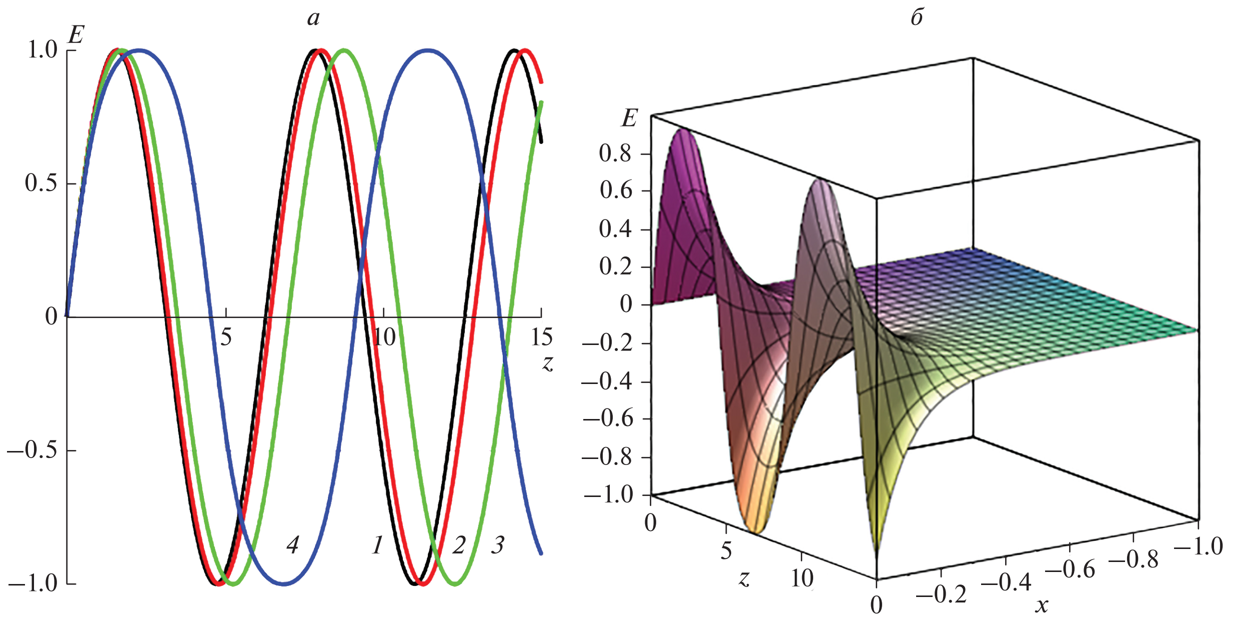

Рис. 2. Электрический вектор нелинейной ТМ-моды ППП при разных значениях модуля $\tilde{k}$ эллиптического интеграла: (*а*) *1* (черный цвет) – $\sin(Z)$, $\tilde{k} = 1$; *2* (красный цвет) – $\mathrm{sn}(Z, 0.3)$; *3* (зеленый цвет) – $\mathrm{sn}(Z, 0.6)$; *4* (синий цвет) – $\mathrm{sn}(Z, 0.9)$; (*б*) $E = \exp(\alpha_M x) a_2 \mathrm{sn}(Z, 0.9)$; на рисунке $\phi_0 = 0$.

получаем два уравнения для компонент электрического поля нелинейной ТМ-моды

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \alpha_M E_z - k_0^2 \frac{\varepsilon_{Mz}}{\alpha_M} E_z = 0,$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} + \alpha_M \frac{\varepsilon_{Mx}}{\varepsilon_{Mz}} E_x + \frac{\partial \ln \varepsilon_{Mz}}{\partial z} E_z = 0. \qquad (19)$$

В рассматриваемом случае для нелинейной ТМ-моды ППП $\varepsilon_{Mx}/\varepsilon_{Mz} = 1$, причем выполняется неравенство $|E_z \partial \ln \varepsilon_M / \partial z| \ll |E_x \alpha_M \varepsilon_{Mx}/\varepsilon_{Mz}|$, т.к. $\alpha_M \sim 1/x_M \gg 1\ \text{см}^{-1}$. В этом приближении, взяв вторые производные по z в уравнениях (19) и комбинируя эти уравнения с уравнения с первыми производными, систему уравнений первого порядка (19) можно представить в виде системы уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \varkappa^2 E_x - \chi\left(E_x^* E_x + E_z^* E_z\right) E_x = 0, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \varkappa^2 E_z - \chi\left(E_x^* E_x + E_z^* E_z\right) E_z = 0, \qquad (21)$$

В общем случае множитель $\kappa^2 = \alpha_M^2 + k_0^2 \varepsilon_{ML}$ является комплексной величиной. В частном случае, на малых длинах распространения ППП, пропорциональных нескольким длинам волн, когда можно пренебречь затуханием ППП, полагая ε_{ML} и α_M действительными величинами, тогда κ^2 и χ – действительные величины. Введем двухкомпонентный комплексный электрический вектор ТМ-моды ППП $E = E_x + iE_z$, полагая, что E_x и E_z являются действительными величинами. Такой двухкомпонентный вектор можно представить в форме $E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \exp\left[i \operatorname{arctg}\left(E_z/E_x\right)\right]$. Вектор E вращается в нормальной к поверхности металла плоскости (x, z) (рис. 1*а*). Систему уравнений (20), (21) представим в виде одного комплексного уравнения для вектора E,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \kappa^2 E - \chi E^3 = 0, \qquad (22)$$

где $(E^* E) E = E^2 E = E^3$. Решение нелинейного уравнения (22) имеет вид

$$E = a_2 \mathrm{sn}\left(Z + \phi_0, \tilde{k}\right), \qquad (23)$$

где $\mathrm{sn}\left(Z + \phi_0, \tilde{k}\right)$ – эллиптический синус Якоби, $Z = \left(\chi a_1^2/2\right)^{1/2} z$, $\phi_0 = \mathrm{sn}\left[E(0), \tilde{k}\right]$, $\tilde{k} = a_2/a_1$ – модуль эллиптического интеграла [27], $a_1^2 = \frac{1}{\chi} \times \left\{\kappa^2 + \left[\kappa^4 - 2\chi E_0^2\right]^{1/2}\right\}$, $a_2^2 = \frac{1}{\chi}\left\{\kappa^2 - \left[\kappa^4 - 2\chi E_0^2\right]^{1/2}\right\}$, $E_0^2 = \left(dE/dz\right)_0^2 + \left(\alpha_M^2 + k_0^2 \varepsilon_{ML}\right) E(0)^2 - \chi E(0)^4/2$. В случае краевых условий $E_0^2 \to 0$ модуль эллиптического интеграла стремится к нулю $\tilde{k} \to 0$, тогда $\mathrm{sn}(Z) \to \sin(Z)$, т.е. поток ППП имеет форму гармонической волны. В случае, когда $E_0^2 \to \kappa^4/2\chi$, модуль стремится к единице $\tilde{k} \to 1$, тогда $\mathrm{sn}(Z,1) \to \mathrm{th}(Z)$ при $Z < 0$, т.е. формируется ударная волна ППП, и $\mathrm{sn}(Z,1) \to \mathrm{cth}(Z)$ при $Z > 0$.

Выражение (23) для двухкомпонентного электрического вектора в форме эллиптического синуса представляет нелинейную ТМ-моду ППП на границе раздела металла и воздуха. В нелинейном режиме ППП распространяются в форме эванесцентной кноидальной волны $\sim\exp(\alpha_M x)\,\mathrm{sn}(Z+\phi_0,\tilde{k})\exp(-i\omega t)$ с гармонической зависимостью от времени. Огибающие нелинейной ТМ-моды ППП в фиксированный момент времени при разных значениях модуля эллиптического интеграла $\tilde{k}$ представлены на рис. 2.

Из анализа вида огибающих нелинейных мод ППП, представленных на рис. 2, следует, что при увеличении значения E_0^2, т.е. модуля $\tilde{k}$ эллиптического интеграла, период ППП волн увеличивается, а форма огибающих меняется. Изменение параметров ТМ-моды ППП возможно с помощью варьирования условий ее возбуждения $(dE/dz)_0^2$ и мощности источника $\sim E(0)^2$, таким образом, можно управлять периодом кноидальной волны, представляющей нелинейную моду ППП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поверхностные плазмон-поляритоны представляют собой гибридные волны, обусловленные взаимодействием фотонов, фононов и свободных электронов (электронной жидкости) на границе раздела диэлектрической и проводящей сред. Квантовая гидродинамическая модель, основанная на преобразовании Маделунга для уравнения Шредингера, позволяет последовательно описать физические механизмы, обуславливающие нелинейный отклик свободных электронов в металле на воздействие внешнего электромагнитного поля.

Динамика ППП зависит от параметров сред и параметров возбуждающей электромагнитной волны. В линейном и в нелинейном режимах на границе раздела немагнитных диэлектрической и проводящей сред формируется ТМ-мода ППП. В линейном режиме формируются гармонические волны, а в нелинейном режиме возникают кноидальные плазмон-поляритонные волны, параметры которых зависят от плотности энергии возбуждающей электромагнитной волны и свойств граничащих сред. Профили огибающих плазмон-поляритонных кноидальных волн и их периоды трансформируются при изменении мощности источника и/или условий возбуждения ППП на границе раздела сред, таким образом периодом нелинейной волны ППП можно управлять.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 19-72-20154).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович В.М., Миллс Д.Л.* Поверхностные поляритоны. М.: Наука, 1985. 525 с.
2. *Zayats A.V., Smolyaninov I.I.* // J. Opt. A. 2003. V. 5. P. S16.
3. *Майер С.А.* Плазмоника: теория и приложения. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 296 с.
4. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2010, 480 с.
5. *Dzedolik I.V.* Solitons and nonlinear waves of phonon-polaritons and plasmon-polaritons. N.Y.: Nova Science Publishers, 2016. 157 p.
6. *Stockman M.I., Kneipp K., Bozhevolnyi S.I. et al.* // J. Opt. 2018. V. 20. Art. No 043001.
7. *Stockman M.I.* // Opt. Expr. 2011. V. 19. No 22. Art. No 22029.
8. *Губин М.Ю., Гладуш М.Г., Прохоров А.В.* // Опт. и спектроск. 2019. Т. 126. № 1. С. 77; *Gubin M.Yu., Gladush M.G., Prokhorov A.V.* // Opt. Spectrosc. 2019. V. 126. No 1. P. 83.
9. *Zhang C., Liang D., Kurczveil G. et al.* // Optica. 2019. V. 6. No 9. P. 1145.
10. *Давыдов А.*С. Теория твердого тела. М.: Наука, Физматлит, 1976. 639 с.
11. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, Физматлит, 1988. 232 с.
12. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука. Физматлит, 2000. 296 с.
13. *Шукла П.К., Элиассон Б.* // УФН. 2010. Т. 180. № 1. С. 55; *Shukla P.K., Eliasson B.* // Phys. Usp. 2010. V. 53. No 1. P. 51.
14. *Маймистов А.И.* // Квант. электрон. 2010. Т. 40. № 9. С. 756; *Maimistov A.I.* // Quant. Electron. 2010. V. 40. No 9. P. 756.
15. *Dzedolik I.V., Pereskokov V.* // J. Phys. Conf. Ser. 2016. V. 737. Art. No 012006.
16. *Sazonov S.V.* // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1068. Art. No 012012.
17. *Dzedolik I.V.* // J. Opt. 2014. V. 16. Art. No 125002.
18. *Prokhorov A.V., Gladush M.G., Gubin M.Yu. et al.* // Eur. Phys. J. D. 2014. Art. No 68:158.
19. *Dzedolik I.V., Lapayeva S., Pereskokov V.* // J. Opt. 2016. V. 18. Art. No 074007.
20. *Dzedolik I.V., Pereskokov V.* // JOSA A. 2016. V. 33. No 5. P. 1004.

21. *Sazonov S.V.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. Art. No 043828.
22. *Маймистов А.И., Ляшко Е.И.* // Опт. и спектроск. 2019. Т. 127. № 11. С. 804; *Maimistov A.I., Lyashko E.I.* // Opt. Spectrosc. 2019. V. 127. No 11. P. 871.
23. *Luo X., Tsai D.-P., Gu M. et al.* // Adv. Opt. Photon. 2018. V. 10. No 4. P. 757.
24. *Madelung E.* // Zeit. Phys. 1927. V. 40. P. 322.
25. *Заболотский А.А.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 141. № 5. С. 803; *Zabolotskii A.A.* // JETP. 2012. V. 114. No 5. P. 699.
26. *Ginzburg P., Hayat A., Berkovitch et al.* // Opt. Lett. 2010. V. 35. No 10. P. 1551.
27. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, Физматлит, 1978. 224 с.

Linear and nonlinear phenomena in a flow of surface plasmon-polaritons

I. V. Dzedolik*

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007 Russia

**E-mail: igor.dzedolik@cfuv.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The processes of excitation and propagation of plasmon-polariton modes at the single interface of dielectric medium and metal in linear and nonlinear regimes are considered. The physical mechanisms of appearance of nonlinear response of free electrons in the metal based on the quantum hydrodynamic model are described. It is shown that in the nonlinear regime, the period and profile of the envelope of cnoidal wave of the surface plasmon polaritons are changed depending on the conditions of excitation and the energy density of the exciting electromagnetic wave.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 14–21

УДК 535.421

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ПРОПУСКАЮЩИМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ НЕОДНОРОДНЫМИ ФОТОПОЛИМЕРНЫМИ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМИ ДИФРАКЦИОННЫМИ СТРУКТУРАМИ

© 2021 г. С. Н. Шарангович[1], *, Д. И. Дудник[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

**E-mail: shr@tusur.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Представлена аналитическая модель дифракции квазимонохроматических световых пучков на пространственно-неоднородных многослойных дифракционных структурах, сформированных в фотополимерном материале голографическим способом которая учитывает неоднородности амплитудного профиля первой гармоники показателя преломления каждого слоя многослойной структуры.

DOI: 10.31857/S0367676521010269

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время голографический метод создания наноразмерных периодических дифракционных структур ДС вызывает особый интерес у исследователей, в связи с возможностью их применения в области оптической связи и обработки информации [1–4]. Свойства объемных пропускающих и отражательных фазовых голографических решеток уже изучены различными коллективами исследователей, и показали, что такие решетки имеют большую дифракционную эффективность, а также высокую угловую и спектральную селективность. В связи с этим поиск новых материалов, перспективных с точки зрения формирования в них подобных структур и управления их оптическими свойствами, представляется весьма актуальным. Все более широкое применение находят фотополимеризующиеся материалы (ФПМ).

Многослойные структуры представляют собой несколько объемных решеток, разделенных оптически однородными промежуточными слоями [5, 6]. Такие структуры характеризуются особыми свойствами, обусловленными интерференцией волн, восстановленных из каждой решетки, и предоставляют возможность управления видом селективного отклика. Многослойные голографические структуры имеют перспективу найти широкое применение в качестве элементов спектральных фильтров, сенсоров, межсоединений, мультиплексоров/демультиплексоров в оптических линиях связи [7, 8].

В работах [5, 8–11] представлены модели дифракции плоских волн на многослойных дифракционных структурах, которые учитывают лишь определенный вид неоднородности профиля показателя преломления или не учитывают его совсем. Однако при решении задачи записи голографических дифракционных структур (ГДС), в том числе и многослойных, в фотополимерных материалах, было установлено, что амплитуда пространственных профилей показателя преломления в процессе записи может быть существенно неоднородной, как показано в [3].

В данной работе исследуется взаимодействие квазимонохроматических световых пучков с многослойной неоднородной голографической фотополимерной дифракционной структурой (МНГДС).

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим процесс считывания МНГДС произвольно поляризованным квазимонохроматическим световым пучком $E^0(\vec{r},t)$ в пренебрежении остаточным поглощением ФПМ.

Для данной модели принято, что дифракция световых пучков происходит на структурах, для которых закончились все процессы записи (весь мономер израсходован), т.е. падающий пучок не может изменить пространственный профиль показателя преломления структуры. Также, что апертура считывающего пучка $w \gg d$, где d – толщина одного слоя МНГДС. Состояние поляриза-

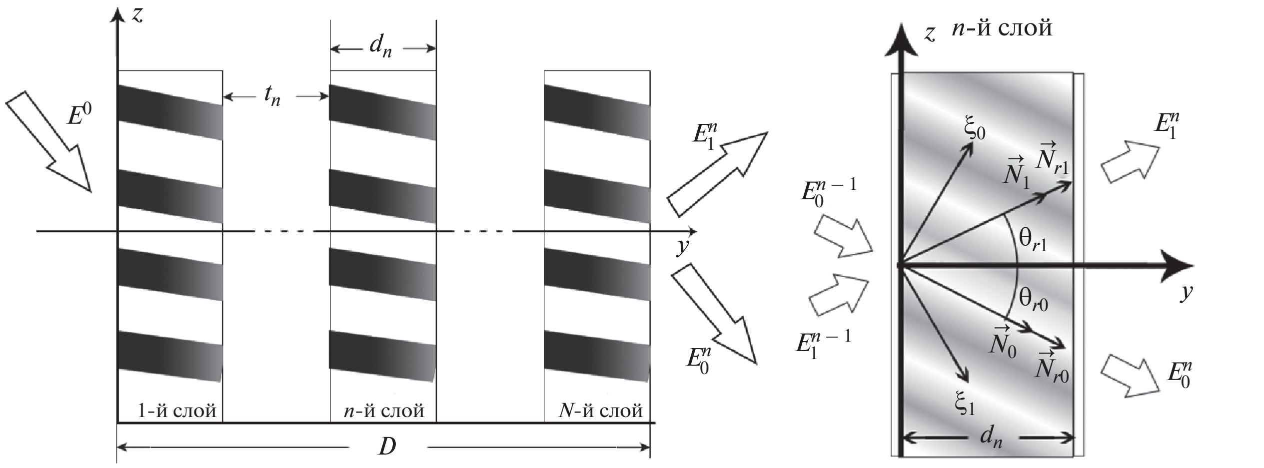

Рис. 1. Схема дифракции: (*а*) на МНГДС; (*б*) на *n*-ом слое МНГДС.

ции считывающего излучения однородно по апертуре.

Таким образом, процессы дифракции будут описываться в геометрооптическом приближении. Эффекты рассеяния оптического излучения в материале также приняты пренебрежимо малыми, для выполнения данного приближения рассматриваются образцы малой толщины (30–100 мкм). Рассмотрена дифракция только на основной пространственной гармонике показателя преломления ГДС, т.к. амплитуды высших гармоник экспоненциально убывают с увеличением их номера. При этом приведенный подход к описанию дифракции аналогичен для высших пространственных гармоник с заменой соответствующих амплитуд и углов дифракции.

Пусть произвольно поляризованный квазимонохроматический световой пучок, с амплитудным профилем $E^0(\omega,\vec{r})$, волновым вектором $\vec{k}^0$ и единичным комплексным вектором поляризации $\vec{e}^{\,0}$, падает на возмущенную наклонную дифракционную структуру в области ФПМ образца под произвольным углом к оси y (рис. 1). Тогда, падающую квазиплоскую световую волну на границе раздела сред ($y = 0$) можно представить в виде суммы линейно-поляризованных пучков с взаимно ортогональными s и p поляризациями:

$$\vec{E}^0(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{m=s,p}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_0^{\,m}\times\right. \\ \left.\times E_0^m(\omega,\vec{r})\exp[i\left[(\omega_0+\omega)t-\vec{k}_0\cdot\vec{r}\right)\right]d\omega + c.c.\Big], \quad (1)$$

где ω_0 – центральная частота; $\vec{e}_0^{\,m}$ – единичный вектор поляризации; ($m = s, p$, индекс s соответствует волне поляризованой перпедикулярно плоскости дифракции YZ, индекс p соответствует волне поляризованой в плоскости плоскости дифракции YZ); $E_0^m(\omega,\vec{r}) = \left(\vec{e}^{\,0}\cdot\vec{e}_0^{\,m}\right)E^0(\omega,\vec{r})$ – пространственное распределение комплексной амплитуды частотной Фурье-компоненты.

Геометрия дифракции на МНГДС представлена на рис. 1. E^0 – падающий (считывающий пучок). E_0^n, E_1^n прошедший и дифрагировавший в первый порядок пучки.

Рассмотрим дифракцию на n-ом слое МНГДС, распределение дифрагирующих пучков на выходе которой, зависит от распределения дифрагирующих пучков на выходе предыдущего слоя.

Световое поле $\vec{E}$ в каждом слое ГДС в силу дифракции считывающего пучка $\vec{E}^0$ (1) на пространственных гармониках решетки можно записать в виде суммы волн нулевого и первого порядков дифракции:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{j=0,1}\vec{E}_j = \frac{1}{2}\left\{\sum_{m=s,p}\sum_{j}^{0,1}\int\vec{e}_j^{\,m}E_j^m(\omega,\vec{r})\times\right. \\ \left.\times\exp[i((\omega_0+\omega)t-\vec{k}_j\cdot\vec{r})]d\omega + c.c.\right\}, \quad (2)$$

каждый из которых представлен двумя составляющими вектора напряженности $\vec{E}_j$ в соответствующем ортогональном поляризационном базисе, заданном двумя ортами $\vec{e}_j^{\,p}$ и $\vec{e}_j^{\,s}$, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси пучка $\vec{E}_j$. Здесь $E_j^m(\omega,\vec{r})$ – медленно меняющиеся функции координат и находятся из уравнений первого приближения медленно меняющихся амплитуд (ММА). $j = 0$ соответствует проходящему пучку, $j = 1$ – дифрагированному пучку на решетке с $\vec{K}_j = j\cdot\vec{K}_1$.

Напряженность электрического поля $E(\vec{r},t)$ в области взаимодействия описывается векторным волновым уравнением, следующим из уравнений Максвелла [12, 13]:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varepsilon(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\right], \quad (3)$$

где возмущение диэлектрической проницаемости ε представляется в виде:

$$\begin{gathered}\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(\vec{r}) = \\ = \varepsilon_0 + 0.5n_{\text{st}}\left[n_0'(\vec{r}) + n_1'(\vec{r})\cdot e^{i\vec{K}_1\cdot\vec{r}} + \kappa.c.\right],\end{gathered} \quad (4)$$

где $\varepsilon_0 = n_{\text{st}}^2\cdot\hat{\mathbf{I}}$ – невозмущенный тензор диэлектрической проницаемости, $n_1'(\vec{r})$ – определяются полученными решениями для процесса записи ГДС [14], $\hat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор, $n_0'(\vec{r})$ – амплитуда нулевой гармоники показателя преломления, $\Delta\varepsilon$ – амплитуда основной гармоники возмущения тензора диэлектрической проницаемости, обусловленного записью. n_{st} – показатель преломления ФПМ до формирования.

Следуя методу ММА, в рассматриваемом случае брэгговской дифракции световых пучков на ГДС в оптически неоднородном слое ФПМ, амплитуды $E_j^m(\vec{r})$ взаимодействующих волн определяются двумя системами уравнений связанных волн (УСВ) в частных производных, аналагично [12, 15]:

$$\begin{cases}\vec{N}_{r0}^m\cdot\nabla E_0^m(\vec{r}) = -iC_1^m E_1^m(\vec{r})n_1(\vec{r})\exp(+i\Delta\vec{K}\cdot\vec{r})\\ \vec{N}_{r1}^m\cdot\nabla E_1^m(\vec{r}) = -iC_0^m E_0^m(\vec{r})n_1(\vec{r})\exp(-i\Delta\vec{K}\cdot\vec{r})\end{cases}, \quad (5)$$

где $E_j^m(\vec{r})$ – амплитудные профили пучков; $\vec{N}_{r0,1}^m$ – групповые нормали; $\vec{E}_j(\vec{r}) = \vec{N}_{r0,1}^m\cdot E_j^m(\vec{r})$; C_j^m – амплитудные коэффициенты связи; $n_1(\vec{r})$ – нормированный амплитудный профиль первой гармоники показателя преломления структуры, $n_1(\vec{r}) = \dfrac{n_1'(\vec{r})}{\max\left[n_1'(\vec{r})\right]}$; $\Delta\vec{K}$ – вектор фазовой расстройки.

Для произвольного времени записи результирующий нормированный пространственный профиль амплитуды первой гармоники $n_1(\vec{r}) = n_1(y)$ может быть неоднородным в силу условий записи [3, 14]. Таким образом, неоднородность должна быть учтена при решении дифракционной задачи. Зависимость профиля показателя преломления вдоль оси y возможно аппроксимировать функцией специального вида, аналогично [16]:

$$n_1(y,c,s,t) = \cos^{-1}\left[c(s\cdot y - t)\right], \quad (6)$$

где параметры c, s, t определяют, соответственно, степень неоднородности, асимметрии, смещения и задаются путем минимизации функционала среднеквадратического отклонения аппроксимирующей функции (6) от сформированного профиля, промоделированного и представленного в [14].

В соответствии с [15, 16] амплитудные профили дифрагирующих пучков на выходе образца в ближней зоне удобно представить в апертурных координатах ξ_0, ξ_1 (рис. 1).

Уравнения преобразования координат имеют вид [13] (индекс m опущен):

$$\xi_0 = -\eta_0 y + \nu_0 z,\ \ \xi_1 = \eta_1 y - \nu_1 z, \quad (7)$$

где $\nu_j = N_{rj}y_0$, $\eta_j = N_{rj}z_0$.

Решения уравнений (5) в каждом слое могут быть найдены в аналитическом виде методом Римана аналогично [17, 18] в апертурных координатах (ξ_0, ξ_1) и представлены в виде рекуррентных соотношений, с помощью которых последовательно можно описать процесс образования пространственных профилей $E_0^{m,n}(\xi)$ и $E_1^{m,n}(\eta)$ на выходе каждого n-го слоя, через распределения $E_0^{m,n-1}(\xi)$ и $E_1^{m,n-1}(\eta)$ на его входе.

$$\begin{gathered}E_0^{m,n}(\xi) = E_0^{m,n-1}\left(-\frac{\xi}{\nu_1}\right) - i\frac{C_1 d_n}{2\nu_0}\int_{-1}^{+1}\exp\left[i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times\\ \times\left[\operatorname{ch}^{-1}\left[c(s(1-q)/2-t)\right]_2\operatorname{F}_1(-\alpha,\alpha;1;w)\times\right.\\ \times E_1^{m,n-1}\left(\frac{\xi-\delta(1-q)}{\nu_0}\right) - i\frac{C_0 d_n}{2\nu_1}A\operatorname{sh}\left[\frac{cs(1+q)}{2}\right]_2\times\\ \left.\times\operatorname{F}_1(1-\alpha,1+\alpha;2;w)\,E_0^{m,n-1}\left(\frac{\xi-\delta(1-q)}{\nu_0}\right)\right]dq,\end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}E_1^{m,n}(\eta) = E_1^{m,n-1}\left(-\frac{\eta}{\nu_1}\right) -\\ - i\frac{C_0 d_n}{2\nu_1}\int_{-1}^{+1}\exp\left[i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times\\ \times\left[\operatorname{ch}^{-1}\left[c(s(1-q)/2-t)\right]_2\operatorname{F}_1(-\alpha,\alpha;1;w)\times\right.\\ \times E_0^{m,n-1}\left(\frac{\delta(1-q)}{\nu_0}-\frac{\eta}{\nu_1}\right) -\\ - i\frac{C_1 d_n}{2\nu_0}A\operatorname{sh}\left[\frac{cs(1+q)}{2}\right]_2\times\\ \left.\times\operatorname{F}_1(1-\alpha,1+\alpha;2;w)\,E_1^{m,n-1}\left(\frac{\delta(1-q)}{\nu_0}-\frac{\eta}{\nu_1}\right)\right]dq,\end{gathered} \quad (9)$$

где ${}_2\operatorname{F}_1(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса; $w = \dfrac{\operatorname{sh}\left[cs(1-q)/2\right]\operatorname{sh}\left[cs(1+q)/2\right]}{\operatorname{ch}\left[ct\right]\operatorname{ch}\left[c(s-t)\right]}$; $A = (cs\operatorname{ch}\left[ct\right]\operatorname{ch}\left[c(s-t)\right])^{-1}$; $\alpha = b_j^m$; $b_j^m = \dfrac{d_n C_j^m}{\sqrt{\nu_0\nu_1}}$; $\delta = d_n(\eta_1\nu_0 - \eta_0\nu_1/2\nu_1)$; d_n – толщина n-го слоя; $\eta_j = \pm\sin\theta_{rj}$; $\nu_j = \cos\theta_{rj}$; θ_{rj} – углы между групповыми нормалями $\vec{N}_{rj}^{m}$ и осью y (рис. 1); $\Delta K = \left|\Delta\vec{K}\right| \cdot d_n$ – обобщенная фазовая расстройка, C_j^m – коэффициенты связи; параметры c, s, t берутся для каждого слоя, согласно аппроксимирующей функции (6).

В итоге, пространственные распределения векторных световых полей в нулевом и первом дифракционных порядках на выходе n-го слоя МНГДС определяются выражениями [15, 16]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0^n(\xi) = \vec{e}_0^{\,s,n} E_0^{s,n}(\xi)\exp\left[-i\vec{k}_0^{\,n}\cdot\vec{r}\right] + \\ + \vec{e}_0^{\,p,n} E_0^{p,n}(\xi)\exp\left[-i\vec{k}_0^{\,n}\cdot\vec{r}\right],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^n(\eta) = \vec{e}_1^{\,s,n} E_1^{s,n}(\eta)\exp\left[-i\vec{k}_1^{\,n}\cdot\vec{r}\right] + \\ + \vec{e}_1^{\,p,n} E_1^{p,n}(\eta)\exp\left[-i\vec{k}_1^{\,n}\cdot\vec{r}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Полученные решения полностью определяю как амплитудные, так и поляризацинные параметры дифракционных полей на выходе n-го слоя МНГДС.

Для определения дифракционного светового поля на выходе МНГДС, состоящей из N ГДС на основе ФПМ, которые разделены $N-1$ промежуточными слоями, воспользуемся матричным методом описания преобразования плоских световых волн в многослойных средах.

Для этого перейдем от амплитудных распределений частотных Фурье-компонент дифрагирующих пучков (8), (9) к их угловым спектрам:

$$E_j(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E_j(l)\exp\left[ik_j l\theta\right]dl, \tag{12}$$

где $l = \xi_0, \xi_1$, а угол θ характеризует направление плосковолновых компонент $E_j(\theta)$ относительно волновых нормалей.

В результате процесс преобразования частотно-угловых спектров (ЧУС) взаимодействующих световых полей 0-го и 1-го дифракционных порядок в n-м слое МНГДС толщиной d_n представляется в виде:

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{T}^n \times \mathbf{E}'^{\,n-1}, \tag{13}$$

где введены обозначения: $\mathbf{E}^n = \begin{bmatrix} E_0^n(\omega,\theta) \\ E_1^n(\omega,\theta)\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}'^{\,n-1} = \begin{bmatrix} E_0'^{\,n-1}(\omega,\theta) \\ E_1'^{\,n}(\omega,\theta)\end{bmatrix}$, $\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} T_{00}^n(\omega,\theta) & T_{10}^n(\omega,\theta) \\ T_{01}^n(\omega,\theta) & T_{11}^n(\omega,\theta)\end{bmatrix}$.

Здесь $\mathbf{T}^n$ – матричная передаточная функция (матрица перехода) n-го слоя МНГДС; $E_i'^{\,n-1}(\omega,\theta)$, $E_i^n(\omega,\theta)$ – ЧУС на входе и выходе n-го слоя.

Компоненты матрицы перехода $\mathbf{T}^n$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned}T_{00}^n(\omega,\theta) = 1 - \frac{b_0^2}{2}A\int_{-1}^{+1}\exp\left[i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times \\ \times \operatorname{sh}\left[\frac{cs(1+q)}{2}\right]_2 \mathrm{F}_1(1-\alpha, 1+\alpha; 2; w)\,dq,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}T_{01}^n(\omega,\theta) = -i\frac{b_0}{2}\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_0}}\int_{-1}^{+1}\exp\left[-i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times \\ \times \operatorname{ch}^{-1}\left[c(s(1-q)/2 - t)\right]_2 \mathrm{F}_1(-\alpha, \alpha, 1; w)\,dq,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}T_{10}^n(\omega,\theta) = -i\frac{b_1}{2}\sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}}\int_{-1}^{+1}\exp\left[-i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times \\ \times \operatorname{ch}^{-1}\left[c(s(1-q)/2 - t)\right]_2 \mathrm{F}_1(-\alpha, \alpha, 1; w)\,dq,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}T_{11}^n(\omega,\theta) = 1 - \frac{b_1^2}{2}A\int_{-1}^{+1}\exp\left[i\frac{\Delta K}{2}(1-q)\right]\times \\ \times \operatorname{sh}\left[\frac{cs(1+q)}{2}\right]_2 \mathrm{F}_1(1-\alpha, 1+\alpha; 2; w)\,dq.\end{aligned} \tag{17}$$

Следует отметить, что, в частном случае, взаимодействия плоских волн в МНГДС на основе ГДС с однородными профилями $n_1(y)$, компоненты T_{ij} матрицы перехода $\mathbf{T}^n$, определенными выражениями (14)–(17), переходит в известные [7].

В МНГДС промежуточный слой толщиной t_n (рис. 1*а*) дает фазовый набег, и если считать, что показатель преломления промежуточного слоя равен показателю преломления голограммы, то матрица перехода $\mathbf{A}^n$ для такого слоя будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \exp(-i\left(\vec{k}_1^{\,n}\cdot\vec{y}_0\right)t_n & 0 \\ 0 & \exp(-i\left(\vec{k}_0^{\,n}\cdot\vec{y}_0\right)t_n \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Перемножив матрицы перехода всех слоев, можно получить связь между входным полем $\mathbf{E}_0$ и дифракционным полем $\mathbf{E}^N$ на выходе МНГДС толщиной D:

$$\mathbf{E}^N = \mathbf{T} \times \mathbf{E}_0, \tag{19}$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}^N \times \mathbf{A}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \ldots \mathbf{A}^n \times \mathbf{T}^n \times \ldots \times \mathbf{A}^1 \times \mathbf{T}^1$ – матричная передаточная функция (матрица перехода) всей МНГДС; $D = \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{n=1}^{N-1} t_n$, $\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} E_0(\omega,\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_0(\omega,\theta)$ – ЧУС падающего на МНГДС квазиминохроматического светового пучка, определенный выражениями (1) и (12).

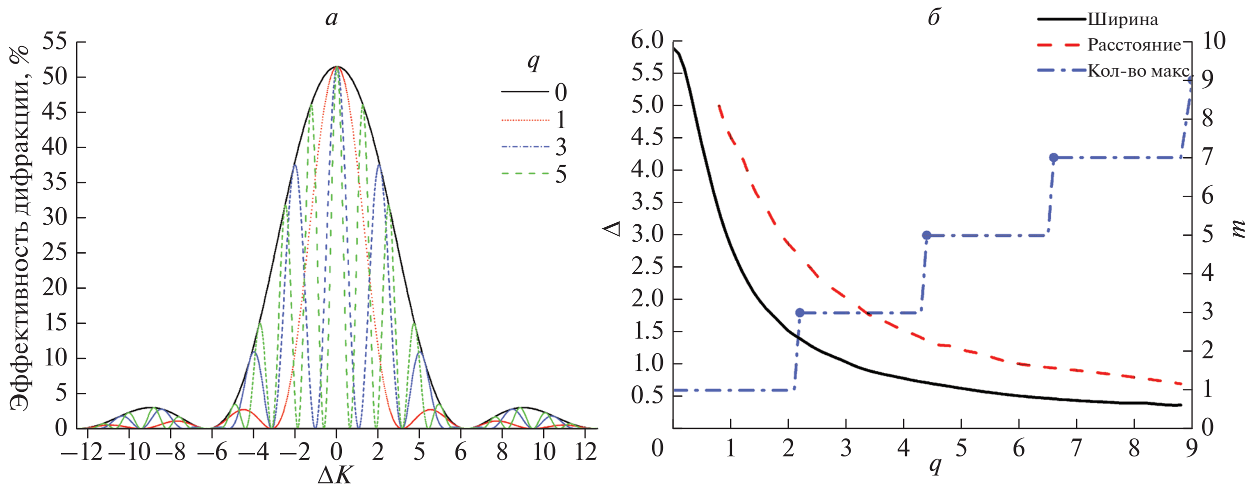

Рис. 2. Селективность однородной двуслойной голографической дифракционной структуры при нескольких различных значениях параметра $q = t_n/d_n$.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Полученные передаточные функции создают математическую основу для расчета селективных свойств МНГДС, а именно: зависимости дифракционной эффективности от угла падения и центральной частоты считывающего пучка. Для этого в выражениях (14)–(17) необходимо воспользоваться зависимостями модуля вектора фазовой расстройки $\Delta K^* = \left|\Delta \vec{K}\right|$ от угла падения и частоты считывающего пучка с учетом дисперсии показателя преломления ФПМ.

$$\Delta K^* = \Delta K^*(\theta) + \Delta K^*(\omega), \tag{20}$$

где $\Delta K^*(\theta) = (D/B)\theta$, $\Delta K^*(\omega) = (C - AD/B)\omega$, а коэффициенты A, B, C, D определены в [17].

Зависимость матрицы перехода промежуточного слоя МНГДС $\mathbf{A}^n$ от обобщенной фазовой расстройки $\Delta K = \Delta K^* d_n$ получим на основании выражения (18) и представим в виде:

$$\mathbf{A}^n = \exp\left[-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{y}_0)t_n\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left[\dfrac{-i\Delta K t_n}{d_n}\right]\end{bmatrix}, \tag{21}$$

На основе представленных аналитических решений исследованы селективные свойства двуслойной структуры с однородным профилем показателя преломления с различными толщинами промежуточного слоя t_n и слоя дифракционной структуры содержащей ФПМ d_n (рис. 2). Для этого в выражении (21) отношение t_n/d_n выразим через параметр $q = t_n/d_n$.

Из рис. 2*а* видно, что при небольшой толщине промежуточного слоя, когда ($q \to 0$) вид контура селективности всей структуры близок к виду характеристики одиночной голографической структуры. А при увеличении этого параметра вследствие интерференционных эффектов образуются дополнительные локальные максимумы и минимумы интенсивности света, при этом общая величина дифракционной эффективности сохраняется, а огибающая совпадает с контуром селективности при $q = 0$. Количество дополнительно возникаемых максимумов, выше уровня 0.5 максимальной дифракционной эффективности, растет линейно с увеличением отношения толщины промежуточного слоя к толщине слоя с дифракционной структурой, а их ширина и расстояние между ними экспоненциально убывают (рис. 2*б*).

На основе численного моделирования, рассчитаны селективные свойства трехслойной МНГДС, пространственные профили показателей преломления которой получены в результате решения задачи формирования [14]. Рассмотрены случаи с сильно (рис. 3*б*) и слабо выраженной степенью неоднородности профиля показателя преломления на каждом слое (рис. 3*г*).

При моделировании, ошибка аппроксимации нормированных пространственных профилей показателей преломления, функцией (6) не превышала 3%. Толщина промежуточного слоя $t_n = 200$ мкм, толщина одного слоя ГДС $d_n = 85$ мкм.

Результаты моделирования, представленные на рис. 3 показали, что огибающая контура селективности всей структуры совпадает с контуром селективности одиночной голографической

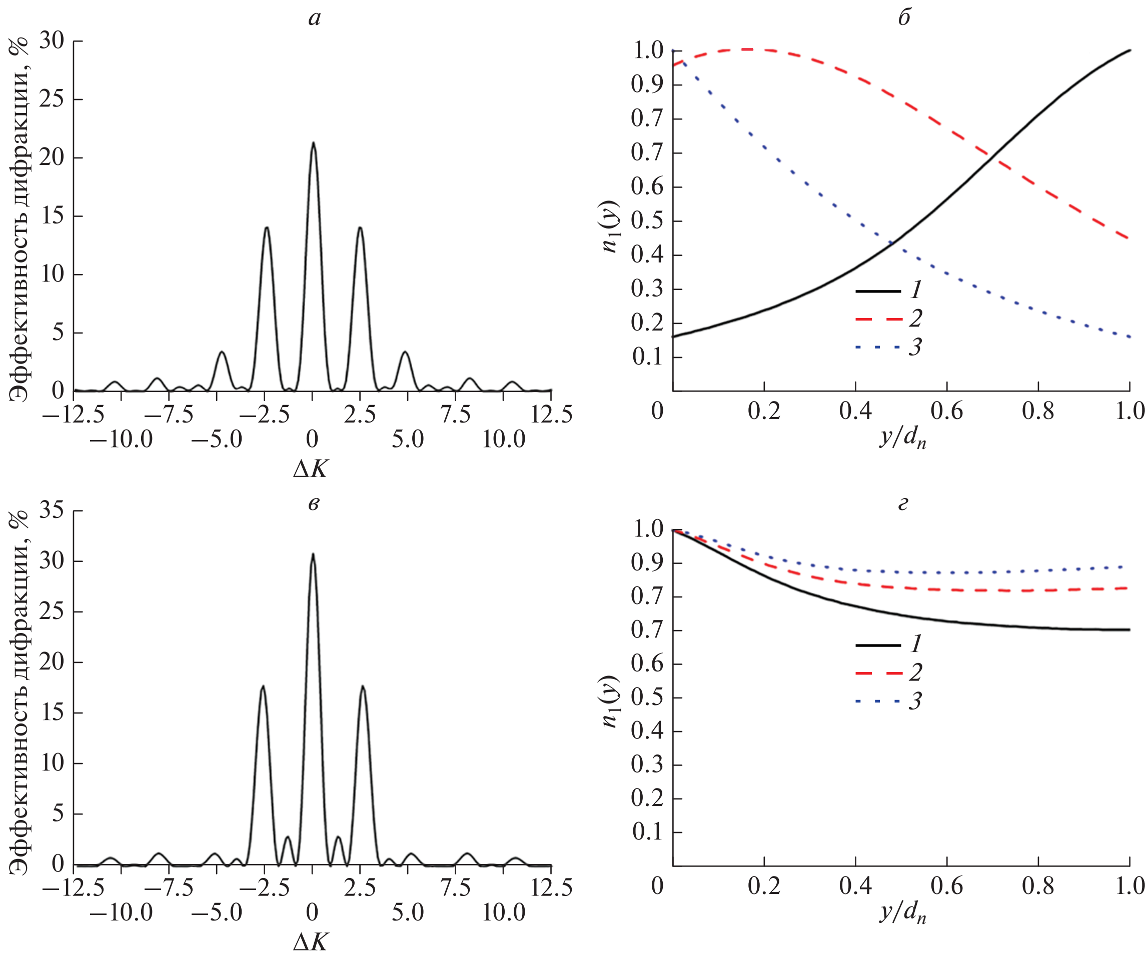

Рис. 3. Рассчитанные селективности неоднородной трехслойной голографической структуры: (*а*) с сильно выраженной степенью неоднородности профилей показателей преломления на каждом слое (*б*); (*в*) слабо выраженной степенью неоднородности профилей показателей преломления на каждом слое (*г*).

структуры, формируемой на первом слое. Количество и ширина локальных максимумов определяются толщиной промежуточных слоев. Амплитуды локальных максимумов изменяются в больших пределах, и зависят от пространственного распределения показателей преломления каждого слоя. Ширина и вид огибающей контура селективности всей многослойной структуры зависит от пространственного распределения показателей преломления на первом слое.

В процессе формирования МНГДС, может происходить искажение пространственной структуры голограмм (изменение периода и углов наклона решеток), вследствие различной усадки материала на каждом слое, связанной с изменением интенсивности (затуханием) формирующих пучков при прохождении от слоя к слою [5, 19, 20].

Для учета усадки материала введем аддитивную добавку $\Delta K^n_{\text{усад}}$, которая является параметром, характеризующим искажение пространственной структуры голографической решетки на каждом слое МНГДС. Тогда зависимость модуля вектора фазовой расстройки ΔK^* от угла падения и частоты считывающего пучка с учетом дисперсии показателя преломления ФПМ и усадки материала запишем в виде:

$$\Delta K = \Delta K^* d_n + \Delta K^n_{\text{усад}}, \qquad (22)$$

При помощи численного моделирования исследованы селективные свойства двуслойной структуры, с однородным и спадающим профилем показателя преломления на каждом слое МНГДС (рис. 4). Толщина промежуточного слоя t_n = 175 мкм, толщина одного слоя ГДС d_n = 55 мкм. При моделировании учтена различная степень усадки материала для каждого слоя, $\Delta K^1_{\text{усад}} = -4$, $\Delta K^2_{\text{усад}} = -2$.

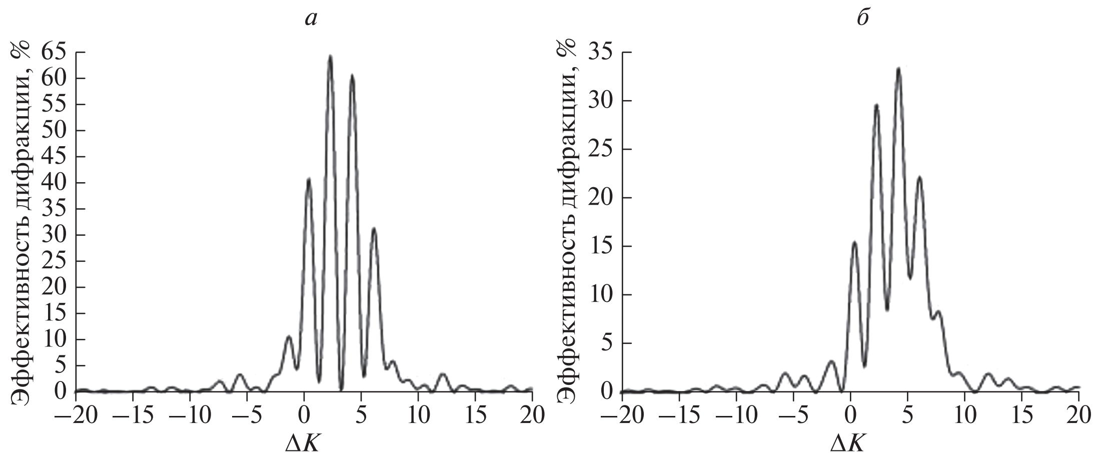

Рис. 4. Селективности МНГДС с однородным (*а*) и спадающим (*б*) профилем показателя преломления на каждом слое, рассчитанная с учетом усадки материала.

Из результатов численного моделирования селективных свойств МНГДС, учитывающего искажение пространственной структуры голографической дифракционной решетки вследствие усадки материала при формировании, можно наблюдать смещение характеристики селективных свойств МНГДС от слоя к слою, а также асимметрию боковых лепестков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе представлена самосогласованная аналитическая модель взаимодействия квазимонохроматических световых пучков с МНГДС которая учитывает пространственные неоднородности амплитудного профиля гармоник показателя преломления, возникающих в процессе голографического формирования решеток в фотополимерном материале. Представленные аналитические решения описывают эволюцию пространственных профилей световых пучков и их частотно-угловых спектров при дифракции на МНГДС. Выражения (14)–(17) создают математическую основу для расчета селективных свойств МНГДС, а также для описания преобразование светового излучения со сложным ЧУС при его взаимодействии с МНГДС на основе ФПМ.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки Российской Федерации в рамках государственного задания (FEWM-2020-0038/30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nordin G.P., Johnson R.V., Tanguay A.R.* // JOSA A. 1992. V. 9. No 4. P. 2206.
2. *Hesselink L.* // JOSA B. 1994. V. 11. No 9. P. 1800.
3. *Устюжанин С.В.* Динамически управляемые дифракционные структуры на основе фотополимерных жидкокристаллических материалов для оптических систем связи. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск: ТУСУР, 2013.
4. *Aabbate G., Marino A., Vita F.* // Acta Phys. Pol. A. 2003. V. 103. P. 177.
5. *Пен Е.Ф., Родионов М.Ю.* // Квант. электрон. 2010. Т. 40. № 10. С. 919; *Pen E.F., Rodionov M.Yu* // Quant. Electron. 2010. V. 40. No 10. P. 919.
6. *Malallah R., Li H., Qi Y. et al.* // JOSA A. 2019. V. 36. No 3. P. 320.
7. *Nordin G.P., Tanguay A.R.* // Opt. Lett. 1992. V. 17. No 23. P. 1709.
8. *Aimin Y., Liren L., Yanan Z., Jianfeng S.* // JOSA A. 2008. V. 26. No 1. P. 135.
9. *Yan X., Wang X., Chen Y. et al.* // Appl. Phys. B. 2019. V. 125. No 5. P. 1.
10. *Wang S.S., Magnusso R.* // Appl. Opt. 1995. V. 34. No 14. P. 2414.
11. *Yan X., Gao L., Yang X. et al.* // Opt. Expr. 2014. V. 22. No 21. Art. No 26128.
12. *Устюжанин С.В., Миргород В.Г., Ноздреватых Б.Ф., Шарангович С.Н.* // Физика наукоемких технологий. Уч. пособ. Иркутск: ИВВАИУ, 2008. С. 240.
13. *Федоров Ф.И.* // Оптика анизотропных сред. М.: URSS, 2004. 384 с.
14. *Дудник Д.И., Шарангович С.Н.* // Кв. электроника: матер. XII Междунар. науч.-техн. конф. Минск: РИВШ, 2019. С. 26.
15. *Устюжанин С.В., Шарангович С.Н.* // Докл. ТУСУР. 2007. Т. 2. № 16. С. 192.
16. *Ноздреватых Б.Ф., Устюжанин С.В., Шарангович С.Н.* // Докл. ТУСУР. 2010. Т. 8. № 11. С. 109.

17. *Шарангович С.Н.* // Радиотехн. и электрон. 1995. Т. 40. № 4. С. 1121.
18. *Шарангович С.Н.* // Радиотехн. и электрон. 1996. Т. 41. № 11. С. 1364.
19. *Пен Е.Ф., Родионов М.Ю.* // Автометрия. 2005. Т. 41. № 2. С. 98.
20. *Родионов М.Ю., Пен Е.Ф., Шелковников В.В.* // Опт. журн. 2006. Т. 73. № 7. С. 60.

Interaction of light with transmission multi-layered heterogeneous photopolymer holographic diffraction structures

S. N. Sharangovich[a, *], D. I. Dudnik[a]
[a] *Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, 643050 Russia*
**E-mail: shr@tusur.ru*
Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

We present an analytical model for the diffraction of quasimonochromatic light beams on spatially inhomogeneous multilayer diffraction structures formed in a photopolymer material by a holographic method that takes into account inhomogeneities in the amplitude profile of the first harmonic of the refractive index of each layer of a multilayer structure.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 22–27

УДК 535.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕНСИВНЫХ ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

© 2021 г. В. А. Халяпин[1, 2, *], А. Н. Бугай[3]

[1]Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта", Калининград, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Калининградский государственный технический университет", Калининград, Россия

[3]Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

*E-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Аналитически исследована устойчивость солитоноподобных импульсов, распространяющихся в волокне в режиме туннельной ионизации и вынужденного комбинационного саморассеяния. Показано, что при определенных условиях на параметры среды и сигнала возможна взаимная компенсация этих эффектов.

DOI: 10.31857/S0367676521010154

ВВЕДЕНИЕ

Полые волноводы, заполненные газом, получили широкое распространения в связи с малыми потерями импульсов при их распространении и тем, что высокий порог оптического пробоя позволяет распространяться мощным сверхкоротким лазерным импульсам [1–3]. По мере распространения мощные импульсы вызывают ионизацию газа, которая приводит к тому, что спектр импульса смещается в сторону высоких частот, а его длительность уменьшается [4]. Это вызвано тем, что возникающие за счет ионизации свободные электроны вносят отрицательный вклад в показатель преломления [4–12]. Этот эффект противоположен вынужденному комбинационному саморассеянию (ВКС), которое вызывает красное смещение спектра сигнала и увеличение его длительности [13–19]. Известно, что компенсировать уширение импульса и красное смещение, обусловленное ВКС можно, изменяя коэффициент групповой дисперсии вдоль волновода [20–24] и за счет градиента давления газа [25–27], который приводит к изменению коэффициента нелинейности. Уравнение, описывающее распространение импульсов с учетом ВКС и туннельной ионизации было получено в работах [8, 9]. С помощью теории возмущений [25–27] авторы показали, что при определенных условиях центральная частота солитона может оставаться такой же, какой была на входе в волокно, а импульс может стабилизироваться [28–33]. Целью настоящей работы является исследование с помощью метода Ляпунова устойчивости стационарного решения системы уравнений на параметры сигнала. Следует отметить, что исследование на устойчивость проводилось для приближенного решения системы уравнений, полученной методом моментов. Поскольку данный метод связан с выбором пробной функции, нами проведен и анализ чувствительности метода к выбору пробной функции.

МЕТОД МОМЕНТОВ И СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Динамика световых импульсов, распространяющихся в ФКВ, описывается уравнением [8, 9]

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}-i\gamma\psi|\psi|^2+$$
$$+\frac{\gamma}{\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi|\psi|^2\right)+i\gamma T_R\psi\frac{\partial|\psi|^2}{\partial\tau}+i\eta\psi\int\limits_{-\infty}^{\tau}\delta\Theta(\delta)\,d\tau=0. \quad (1)$$

Здесь ψ – медленно меняющаяся огибающая, z – ось, вдоль которой распространяется сигнал, $\tau = t - z/\upsilon_g$ – время в сопутствующей системе координат, υ_g – групповая скорость импульса на его центральной частоте ω, η – коэффициент, характеризующий туннельную ионизацию, $\delta = |\psi|^2 - |\psi|_{th}^2$, Θ – функция Хевисайда, $|\psi|_{t\square}^2$ – величина, пропорциональная пороговой интенсивности туннельной ионизации, β_2 – коэффициент дисперсии групповой скорости (ДГС), β_3 – положительный параметр, определяющий дисперсию третьего порядка, γ – коэффициент кубической нелинейности, T_R – характеризует вклад ВКС. Коэффициент β_2 положителен, если центральная частота импульса лежит в области нормальной дисперсии групповой скорости и отрицателен в противоположном случае [34]. В уравнении (1) мы пренебрегли поглощением волновода и потерями, связанными с ионизацией, поскольку вблизи порога туннельной ионизации нелинейное поглощение мало. Авторами работ [8, 9] для таких импульсов было введено название “floating soliton”.

Медленно меняющаяся огибающая связана с электрическим полем импульса E соотношением

$$E(z,\tau) = \frac{1}{2}\psi(z,\tau)\exp\left[-i\left(\omega t - kz\right)\right] + c.c., \qquad (2)$$

где k – волновое число. Анализ динамики параметров импульса проводился на основе метода моментов [17, 35–37]. Здесь важную роль играет выбор пробной функции. В частности, в [17] влияние ВКС на динамику импульсов было исследовано на основе пробного решения в виде гауссова профиля и гиперболического секанса. Было показано, что для обеих функций получаются качественно совпадающие результаты. В работе [31] было проведено исследование динамики импульсов при учете ВКС и ионизации в солитонном и несолитонном режимах. На основе сравнения численного эксперимента и аналитических результатов было показано, что пробное решение в виде гауссовой функции лучше описывает несолитонную динамику сигнала в области нормальной дисперсии групповых скоростей, в то время как солитонный режим лучше описывается гиперболическим секансом. Действительно, если опустить высшую нелинейность и дисперсию, а также члены, описывающие ВКС и ионизацию, то пробная функция должна описывать солитон нелинейного уравнения Шредингера. Вследствие этих соображений выбираем огибающую импульса в виде гиперболического секанса [17]

$$\psi = B\,\mathrm{sech}\left(\frac{\tau - T}{\tau_p}\right)\times$$
$$\times\exp\left[i\left(\phi + \Omega\left(\tau - T\right) - C\frac{\left(\tau - T\right)^2}{2\tau_p^2}\right)\right], \qquad (3)$$

где B – амплитуда сигнала, τ_p – его длительность, C – параметр, определяющий частотную модуляцию, T – временное запаздывание, ϕ – фаза и Ω – смещение центральной частоты сигнала. Все параметры зависят от координаты z. Определим моменты импульса, следуя работе [17] в виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, d\tau, \qquad (4)$$

$$\tilde{C} = \frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tau - T\right)\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right)d\tau, \qquad (5)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tau - T\right)^2|\psi|^2\, d\tau, \qquad (6)$$

$$T = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\tau|\psi|^2\, d\tau, \qquad (7)$$

$$\Omega = -\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right)d\tau, \qquad (8)$$

где E – параметр, пропорциональный числу фотонов, $\tau_p^2 = 12\sigma^2/\pi^2$, $C = 12\tilde{C}/\pi^2$ [17]. Дифференцируя (4)–(8) по координате z и используя (1), получаем систему уравнений, подставляя в которую пробную функцию (3) и интегрируя по τ, получаем систему уравнений на параметры импульса [38]

$$E = 2\tau_p B^2 = \mathrm{const}, \qquad (9)$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{4\gamma E}{15\tau_p^3}\left(T_R - \frac{5C}{4\omega}\right) - \frac{\eta E}{3\tau_p}\left(1 - \frac{\psi_{th}^2}{B^2}\right)^{3/2}, \qquad (10)$$

$$\frac{d\tau_p^2}{dz} = 2C\left(\beta_2 - \beta_3\Omega\right), \qquad (11)$$

$$\frac{dC}{dz} = \left(\beta_2 - \beta_3\Omega\right)\left(\frac{4/\pi^2 + C^2}{\tau_p^2}\right) + \frac{2\gamma E}{\pi^2\tau_p}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right), \qquad (12)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_2\Omega + \frac{\beta_3}{2}\left(\frac{\left(1 + \pi^2C^2/4\right)}{3\tau_p^2} + \Omega^2\right) + \frac{\gamma E}{2\omega\tau_p}. \qquad (13)$$

Уравнение для фазы не приводится, поскольку она не играет роли в дальнейшем анализе. Рассмотрим сначала случай постоянного коэффициента нелинейности, соответствующий постоянному давлению внутри полости. Из (12) следует, что в солитоноподобном режиме должно выполняться соотношение

$$\Omega = \frac{|\beta_2|}{\beta_3}\left(\frac{\gamma\tau_p E}{2|\beta_2|} - 1\right). \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (10), находим уравнение на длительность импульса

$$\frac{d\tau_p}{dz} = \frac{8\beta_3 T_R}{15\tau_p^3} - \frac{2\beta_3\eta}{3\gamma\tau_p}\left(1 - \frac{2\tau_p\psi_{th}^2}{E}\right)^{3/2}. \tag{15}$$

Из (14) следует, что при начальном нулевом сдвиге частоты на входе в среду должно выполняться условие солитоноподобного распространения сигнала

$$E = \frac{2|\beta_2|}{\gamma\tau_0}, \tag{16}$$

где τ_0 – начальная длительность импульса. Введем безразмерную длительность $\upsilon = \tau_p/\tau_s$, $\upsilon_0 = \tau_0/\tau_s$, $b = \tau_s/\tau_t$ и перепишем (15) с учетом (16) в виде

$$\frac{d\nu}{dz} = \frac{2\beta_3\eta}{3\nu^3\gamma}\left(\frac{m}{b^2} - \nu^2\left(1 - \nu\nu_0 b^2\right)^{3/2}\right), \tag{17}$$

где $m = 4\gamma T_R / 5\eta\tau_t^2$, $\tau_t = \sqrt{|\beta_2| / \gamma\psi_t^2}$. В стационарной точке правая часть (17) должна быть равна нулю и $\upsilon = \upsilon_0 = 1$

$$m = b^2\left(1 - b^2\right)^{3/2}. \tag{18}$$

Выражение (18) имеет один корень $b_1 = \sqrt{2/5}$, если $m = m_c = 2\cdot 3^{3/2}/5^{5/2}$. В случае, когда $m < m_c$ мы имеем два корня, для которых можно получить приближенные выражения, воспользовавшись методом последовательных приближений

$$b_2 \approx \frac{\sqrt{m}}{(1-m)^{3/4}}, \tag{19}$$

$$b_3 \approx \sqrt{1 - \left(\frac{m}{1 - m^{2/3}}\right)^{2/3}}. \tag{20}$$

Если $m > m_c$, то (18) не имеет корней. Для того, чтобы проверить полученные стационарные решения на устойчивость обезразмерим систему (10)–(12), перейдя к новым переменным $\Theta = \Omega/\omega$, $l = \beta_3\omega/|\beta_2|$, $L_d = \tau_s^2/|\beta_2|$, $L_N = 2\tau_s/\gamma E$, $L_R = 15\tau_s^2/4\gamma E T_R$, $L_\eta = 3/\eta E$ и переписав (10)–(12) в виде

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{\omega\tau_s}\left(\frac{1}{L_R\upsilon^3}\left(1 - \frac{5C}{4T_R\omega}\right) - \frac{1}{L_\eta\upsilon}\left(1 - \frac{\psi_{th}^2}{B^2}\right)^{3/2}\right), \tag{21}$$

$$\frac{d\nu}{dz} = -\frac{C}{L_d\upsilon}(1 + l\Theta), \tag{22}$$

$$\frac{dC}{dz} = \frac{4}{\pi^2}\left(-\left(1 + \frac{\pi^2 C^2}{4}\right)\frac{(1 + l\Theta)}{L_d\upsilon^2} + \frac{1}{L_N\upsilon}(1 - \Theta)\right), \tag{23}$$

Для проверки системы на устойчивость по отношению к малым отклонениям параметров импульса от стационарной точки (где выполняются условия $d\Theta/dz = 0$, $d\upsilon/dz = 0$, $dC/dz = 0$, $\Theta(0) = 0$, $C(0) = 0$, $\upsilon(0) = 1$) линеаризуем (21)–(23), подставив $\upsilon = \upsilon_s + \tilde{\upsilon}$, $C = C_s + \tilde{C}$, $\Theta = \Theta_s + \Theta$. Тогда из (21)–(23) получим

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{d\xi} = \frac{L_d\sqrt{1-b^2}}{L_\eta\omega\tau_s}\left(\frac{\left(7b^2 - 4\right)}{2}\tilde{\nu} - \frac{5\left(1 - b^2\right)\tilde{C}}{4T_R\omega}\right), \tag{24}$$

$$\frac{d\tilde{\nu}}{d\xi} = -\tilde{C}, \tag{25}$$

$$\frac{d\tilde{C}}{d\xi} = \frac{4}{\pi^2}\left(\tilde{\nu} - (1 + l)\tilde{\Theta}\right), \tag{26}$$

где $\xi = z/L_d$. Полагая в (24)–(26) $\tilde{\Theta}$, $\tilde{C}$, $\tilde{\upsilon} \sim \exp(\lambda\xi)$ и находя приближенные решения характеристического уравнения, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{L_d(1+l)}{2\omega\tau_s L_\eta}\sqrt{1-b^2}(7b^2 - 4), \\ \lambda_\pm &= -\frac{L_d(1+l)}{4\omega\tau_s L_\eta}\sqrt{1-b^2}(7b^2 - 4) \pm \frac{2i}{\pi}. \end{aligned} \tag{27}$$

Из выражений (19), (20) следует, что обе стационарные точки неустойчивы по Ляпунову. При этом, как видно из (27) в случае стационарного решения, определяемого b_2, инкремент нарастания возмущений в два раза меньше, чем для стационарного решения, определяемого b_3. Непосредственное численное решение уравнений для параметров импульса подтверждает данный вывод (рис. 1). При этом использованы следующие безразмерные параметры: $\omega\tau_s = 50$, $L_d/L_\eta = 0.1$, $l = 1$, $m = 0.1$. Для параметров в (19) и (20), получим, $b_2 = 0.35$ и $b_3 = 0.86$, соответственно. В первом случае режим происходит более медленный рост длительности, чирпа и сдвига частоты. Во втором случае более заметный сдвиг частоты сопровождается стабилизацией длительности и чирпа. Поскольку характерная длина нарастания возмущений обратно пропорциональна числу колебаний импульса и на несколько порядков превосходит характерную длину дисперсионного расплывания, то указанные режимы распространения на практике вполне можно считать квазистационарными и доступными для экспериментального наблюдения.

Для контроля чувствительности используемого подхода к виду пробной функции нами было проведено такое же исследование и для пробной

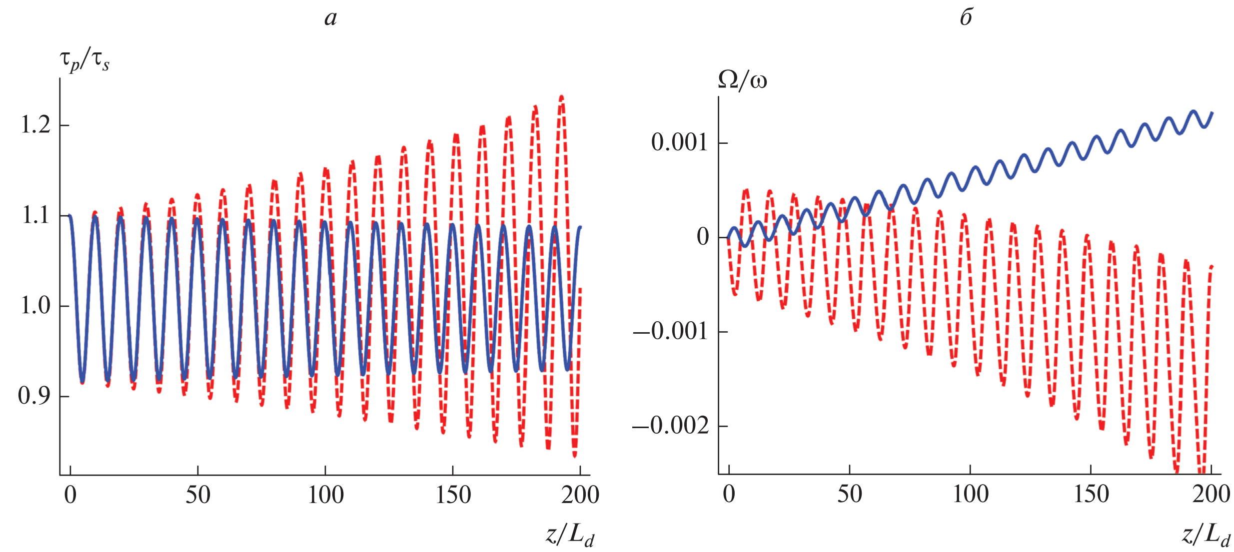

Рис. 1. Динамика длительности (*а*) и сдвига частоты (*б*) импульсов, при отклонении их начальных параметров от стационарных значений, определяемых величинами b_2 (красный пунктир) и b_3 (синий сплошной).

функции гауссова профиля. Здесь получены следующие результаты

$$\lambda_0 = \frac{6L_d(1+l)}{\pi b\omega\tau_s L_\eta}\sqrt{1-b^2}(2b^2-1),$$
$$\lambda_\pm = -\frac{3L_d(1+l)}{\pi b\omega\tau_s L_\eta}\sqrt{1-b^2}(2b^2-1) \pm i. \quad (28)$$

Из (28) мы видим, что скорость нарастания инкремента возмущения для стационарной точки, лежащей левее $\sqrt{1/2}$ (в (27) это значение определяется $\sqrt{4/7}$) также в 2 раза меньше, чем для области лежащей правее этой точки. Отсюда можно сделать вывод, что анализ устойчивости дает качественно те же результаты, что и ранее, а метод хорошо работает и в этом случае.

Рассмотрим теперь случай, когда изменяется один из параметров волновода, например, путем создания градиента давления [27]. Пусть коэффициент, характеризующий нелинейность, меняется по закону

$$\gamma = \gamma_0(1+\alpha\xi), \quad (29)$$

где α – положительный параметр. Исследование влияния неоднородности волновода типа (29) на устойчивость квазистационарных режимов распространения проводилось с помощью численного моделирования (рис. 2). Использовались те же параметры, что и при построении рис. 1, а также принято $\alpha = 0.01$. Как видно из рис. 2, в случае стационарного решения, определяемого b_2, начальная компрессия импульса постепенно сменяется его расплыванием, а для стационарного решения, определяемого b_3, происходит компрессия. Подобный эффект наблюдался в волноводах с градиентом давления [27]. Однако в настоящей задаче оба режима распространения характеризуются большим смещением центральной частоты импульса в красную область спектра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены возможные режимы квазистационарного распространения светового импульса в режиме ВКС и туннельной ионизации, а также проведен анализ влияния градиента коэффициента нелинейности вдоль оси волновода. На основе метода моментов проведено аналитическое исследование динамики интенсивных солитоноподобных импульсов, вызывающих ионизацию. Получены аналитические выражения для длительности исходного сигнала, при которой происходит баланс ВКС и ионизации. С помощью метода Ляпунова показано, что стационарные точки не являются устойчивыми в строгом смысле и система будет медленно выходить из равновесия. В случае изменения коэффициента нелинейности вдоль оси волновода выявлена динамика сигнала, сопровождающаяся компрессией или расплыванием импульса, центральная частота которого непрерывно смещается в красную область спектра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-02-00234а).

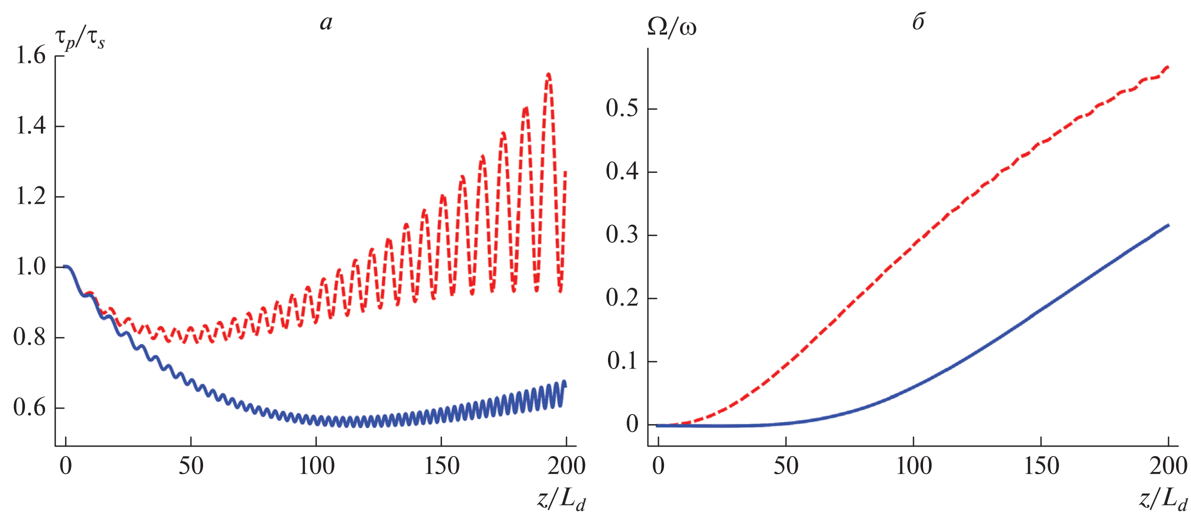

Рис. 2. Динамика длительности (*а*) и сдвига частоты (*б*) импульсов, распространяющихся в режимах, определяемых величинами b_2 (красный пунктир) и b_3 (синий сплошной) при наличии в среде модуляции керровской нелинейности ($\alpha = 0.01$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Couny F., Benabid F., Light P.S.* // Opt. Lett. 2006. V. 31. P. 3574.
2. *Couny F., Roberts P.J., Birks T.A. et al.* // Opt. Expr. 2008. V. 16. Art. No 20626.
3. *Couny F., Benabid F., Roberts P.J. et al.* // Science. 2007. V. 318. P. 1118.
4. *Serebryannikov E.E., Zheltikov A.M.* // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. Art. No 013820.
5. *Wood W.M., Siders C.W., Downer M.C.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3523.
6. *Wilks S.C., Dawson J.M., Mori W.B.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 337.
7. *Yablonovitch E.* // Phys. Rev. A. 1974. V. 10. Art. No 1888.
8. *Hölzer P., Chang W., Travers J.C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No 203902.
9. *Hölzer P., Chang W., Travers J.C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No 203901.
10. *Saleh M.F., Biancalana F.* // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. Art. No 063838.
11. *Facão M., Carvalho M.I., Almeida P.* // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. Art. No 063803.
12. *Facão M., Carvalho M.I.* // Appl. Phys. B. 2014. V. 116. P. 353.
13. *Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. № 6. С. 242; *Dianov E.M., Karasik A.Ya., Mamyshev P.V. et al.* // JETP Lett. 1985. V. 41. No 6. P. 294.
14. *Mitschke F.M., Mollenauer L.F.* // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 659.
15. *Gordon J.P.* // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
16. *Agrawal G.P.* Nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic, 2007.
17. *Santhanam J., Agraval G.* // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
18. *Bugay A.N., Khalyapin V.A.* // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. No 4. P. 399.
19. *Бугай А.Н., Халяпин В.А.* // Опт. и спектроск. 2017. Т. 123. № 2. С. 171; *Bugay A.N., Khalyapin V.A.* // Opt. Spectrosc. 2017. V. 123. No 2. P. 181.
20. *Chernikov S.V., Mamyshev P.V.* // JOSA B. 1991. V. 8. No 8. P. 1633.
21. *Murata H., Inagaki N.* // IEEE J. Quant. Electron. 1981. V. 17. P. 835.
22. *Bogatyrjov V.A., Bubnov M.M., Dianov E.M. et al.* // Pure Appl. Opt. 1995. V. 4. P. 345.
23. *Tajima K.* // Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 54.
24. *Gérôme F., Cook K., George A.K. et al.* // Opt. Expr. 2007. V. 15. No 12. Art. No 7126.
25. *Nurhuda M., Suda A., Midorikawa K. et al.* // JOSA B. 2003. V. 20. No 9. P. 2002.
26. *Suda A., Hatayama M., Nagasaka K. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2005. V. 86. Art. No 111116.
27. *Laegsgaard A., Roberts P.J.* // Opt. Lett. 2009. V. 34. No 23. P. 3710.
28. *Serkin V.N., Vysloukh V.A.* Nonlinear guided wave phenomena. Tech. digest. V. 15. OSA., 1993. P. 236.
29. *Serkin V.N., Vysloukh V.A., Taylor J.R.* // Electron. Lett. 1993. V. 29. P. 12.
30. *Серкин В.Н., Беляева Т.Л., Корро Г.Х. и др.* // Квант. электрон. 2003. Т. 33. С. 325; *Serkin V.N., Belyaeva T.L., Corro G.H. et al.* // Quant. Electron. 2003. V. 33. P. 456.
31. *Bugay A.N., Khalyapin V.A.* // Commun. Nonlin. Sci. 2019. V. 75. P. 270.
32. *Bugay A.N., Khalyapin V.A.* // Laser Phys. 2019. V. 29. Art. No 035402.

33. *Халяпин В.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83. № 1. С. 32; *Khalyapin V.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. No 1. P. 24.
34. *Козлов С.А., Сазонов С.В.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 404; *Kozlov S.A., Sazonov S.V.* // JETP. 1997. V. 84. P. 221.
35. *Tsoy E.N., de Sterke C.M.* // JOSA B. 2006. V. 23. P. 2425.
36. *Tsoy E.N., de Sterke C. M.* // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. Art. No 043804.
37. *Маймистов А.И.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. С. 3620, *Maimistov A.I.* // JETP. 1993. V. 77. P. 727.
38. *Халяпин В.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 16; *Khalyapin V.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 1. P. 10.

Investigation of the dynamics of the intense pulses propagation in photonic-crystal fiber

V. A. Khalyapin[a, b, *], **A. N. Bugay**[c]

[a] *Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236041 Russia*
[b] *Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, 236022 Russia*
[c] *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia*
**E-mail: slavasxi@gmail.com*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The stability of soliton-like pulses propagating in a fiber in the regime of tunneling ionization and stimulated Raman self-scattering has been analytically studied. It is shown that under certain conditions on the parameters of the medium and the signal, mutual compensation of these effects is possible.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 28–33

УДК 535.03:519.06

ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПОГЛОЩЕНИИ

Б. С. Брянцев[1, *], А. А. Калинович[1], И. Г. Захарова[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Москва, Россия*

**E-mail: brisbryantsev@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Исследовано распространение оптических вихрей в квадратично-нелинейных средах при наличии линейного и нелинейного поглощения. Известно, что при распространении таких пучков в средах с квадратичной нелинейностью без поглощения вихревая структура пучка разрушается и пучок распадается на несколько невихревых квази-солитонов. Показано, что нелинейное поглощение позволяет пучку дольше сохранять свою структуру.

DOI: 10.31857/S0367676521010087

ВВЕДЕНИЕ

Световые пучки с фазовыми особенностями много десятилетий изучаются в нелинейной оптике. Однако, наблюдать в эксперименте образование устойчивых многомерных вихревых солитонов очень сложно. Известно, что в консервативных однородных нелинейных средах азимутальная неустойчивость является характерной особенностью вихрей [1, 2]. За последние двадцать лет появилось большое количество работ, исследующих различные механизмы, которые могли бы сохранить вихревую структуру и повысить устойчивость многомерных оптических солитонов с фазовыми сингулярностями. Основное внимание было сосредоточено на вихревых солитонах в средах с кубической нелинейностью. Например, устойчивость вихрей в среде с нелинейностью Керра показана при наличии дополнительного усиления, локализованного в кольцевой структуре [3]. Кроме того, наблюдались устойчивые вихри как для фокусирующей, так и для дефокусирующей нелинейности. Коллапса и азимутальной неустойчивости вихрей в среде с нелинейностью Керра можно избежать за счет нелокальности среды [4, 5]. В качестве примера нелокальной нелинейной среды, в которой экспериментально наблюдались устойчивые вихревые солитоны, следует упомянуть нематические жидкие кристаллы [6]. Неоднородность существенно изменяет характер распространения волны с фазовой сингулярностью. Выявлены устойчивые вихревые структуры в неоднородных средах с дефокусирующей кубической нелинейностью [7]. Стабильные оптические вихри также наблюдаются в фотонных решетках [8] и в структурах с PT-симметрией [9]. Параметрическое взаимодействие волн усложняет рассматриваемые процессы. В [10] рассматривают линейные и нелинейные волноводы, индуцированные парой вихрей с одинаковой частотой, но разной поляризацией.

Обзор современного состояния исследований оптических вихревых структур приведен в статьях [11–13]. В частности, в данных работах обсуждаются многомерные вихревые солитоны в диссипативных средах.

Наше исследование посвящено распространению пространственно-временных импульсных световых пучков при генерации второй гармоники. Такая задача может быть сведена к решению известной системы квазиоптических уравнений параболического типа. Аналогичные задачи решались аналитически путем обобщения известной комбинации метода усредненного Лагранжа и голографического метода [14–16]. В работе [17] рассматривается формирование параметрических солитонов с вихревой структурой при наличии таких физических эффектов, как волноводная структура, линейная и двухфотонная диссипация или усиление, а также дисперсия групповых скоростей. При квадратичной нелинейности вышеуказанные эффекты, как ожидается, будут способ-

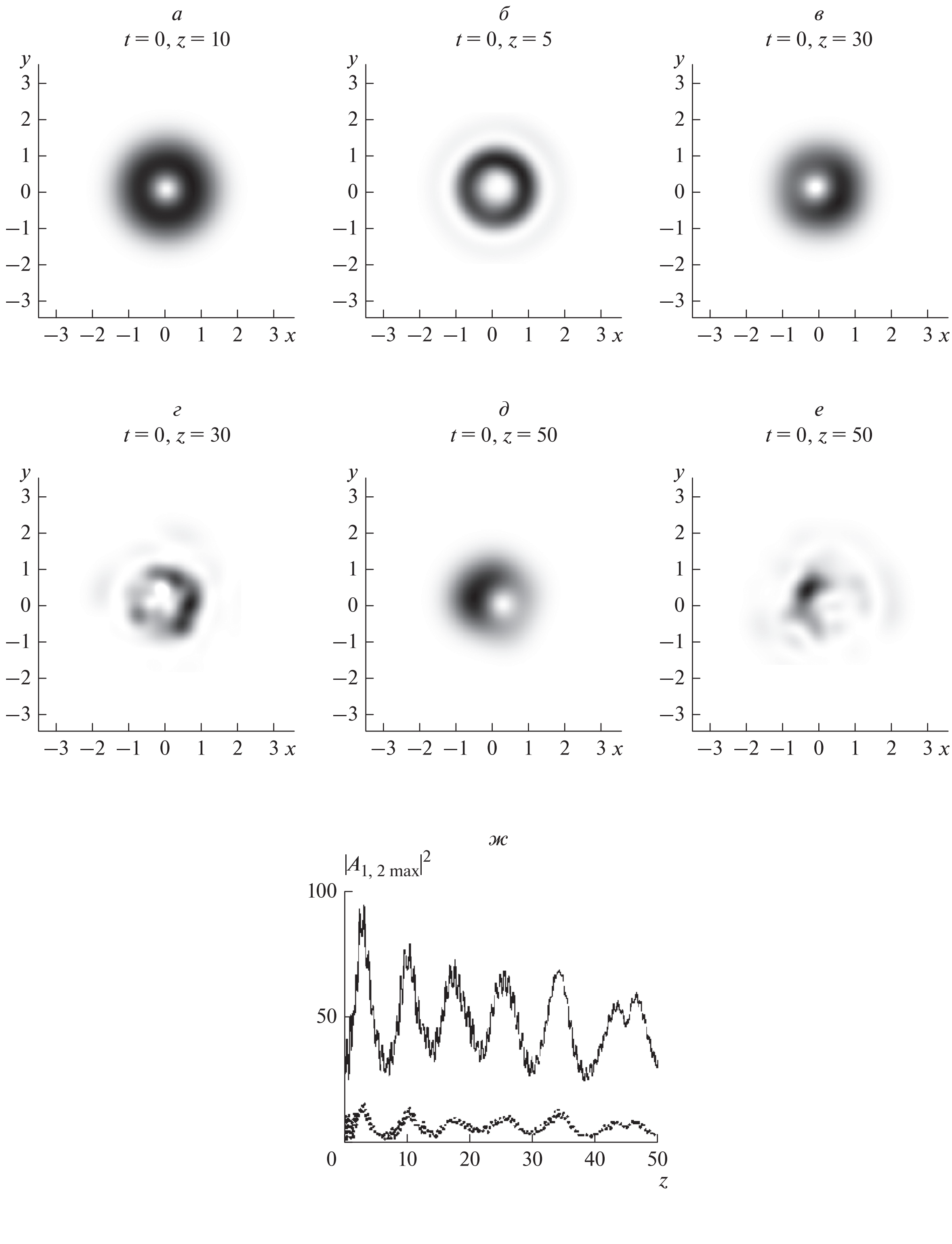

Рис. 1. Распределения амплитуды основной частоты (*а*, *в*, *д*) и второй гармоники (*б*, *г*, *е*) на расстоянии $z = 10$ (*а*, *б*), $z = 30$ (*в*, *г*), $z = 50$ (*д*, *е*) и зависимость пиковых интенсивностей основной (сплошная) и второй (пунктирная) гармоник (*ж*) при отсутствии линейного и нелинейного поглощения. Параметры: $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.0$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.0$. $A_{10} = 15$, $A_{20} = 0$, $D_1 = 1.0$, $D_2 = 0.5$, $D_{\tau 1} = 0.05$, $D_{\tau 1} = 0.1$, $D_{q1} = -10$, $D_{q2} = -10$.

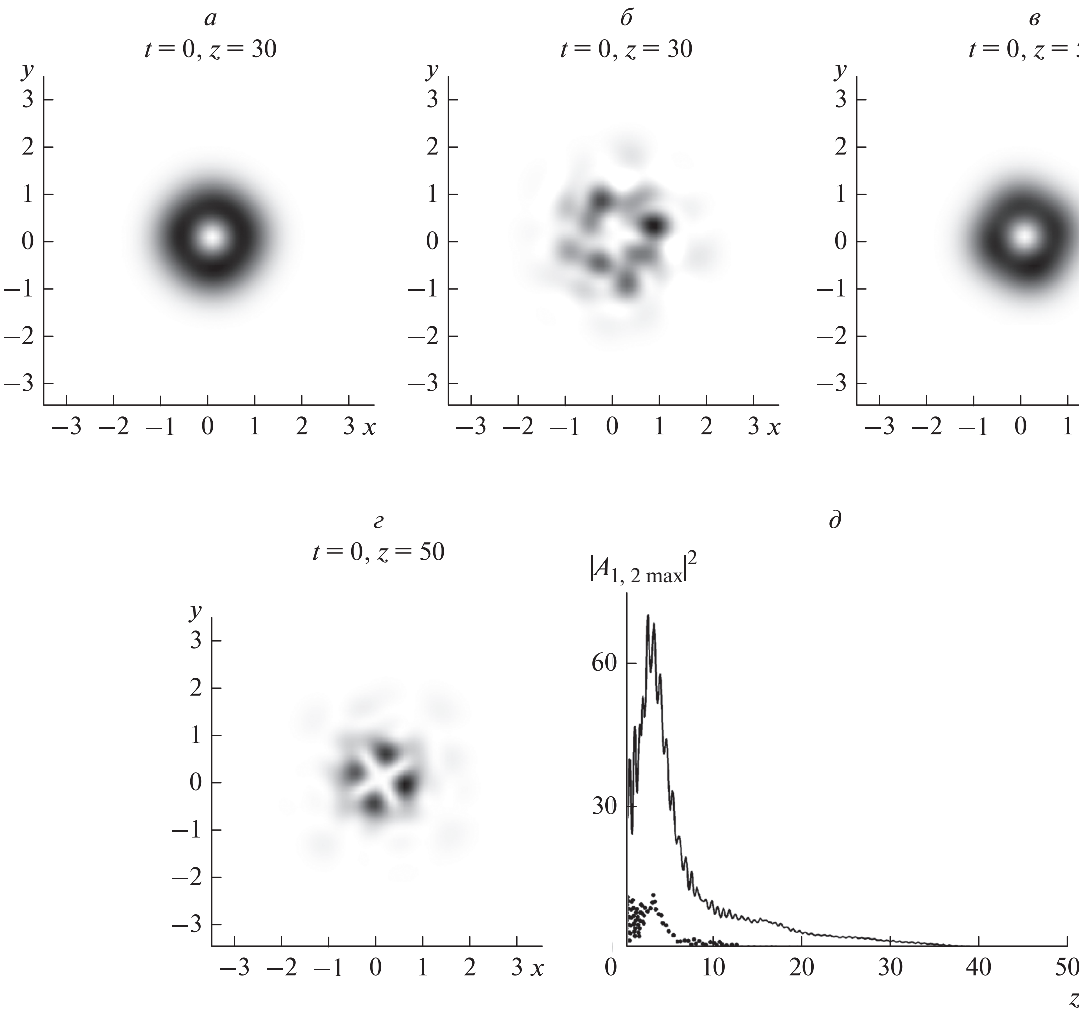

Рис. 2. Распределения амплитуды основной частоты (*а*, *в*) и второй гармоники (*б*, *г*) на расстоянии $z = 30$ (*а*, *б*), $z = 50$ (*в*, *г*) и зависимость пиковых интенсивностей основной (сплошная) и второй (пунктирная) гармоник (*д*) при линейном поглощении. Параметры: $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.1$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.0$. $A_{10} = 15$, $A_{20} = 0$, $D_1 = 1.0$, $D_2 = 0.5$, $D_{\tau 1} = 0.05$, $D_{\tau 1} = 0.1$, $D_{q1} = -10$, $D_{q2} = -10$.

ствовать образованию вихревых пространственно-временных солитонов – оптических пуль.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы описываем распространение электромагнитного импульса с использованием квазиоптического приближения в случае фазового синхронизма [15]. Безразмерные уравнения выглядят следующим образом:

$$i\frac{\partial A_1}{\partial z} + D_{\tau 1}\frac{\partial A_1}{\partial \tau^2} = A_1^* A_2 - i\alpha_{01}A_1 - i\alpha_{11}|A_1|^2 A_1 + D_{q1}h(x,y) + D_1\Delta_\perp A_1, \quad (1)$$

$$i\frac{\partial A_2}{\partial z} + D_{\tau 2}\frac{\partial A_2}{\partial \tau^2} = \gamma A_1^2 - i\alpha_{02}A_2 - i\alpha_{12}|A_2|^2 A_2 + D_{q2}h(x,y) + D_2\Delta_\perp A_2, \quad (2)$$

где $A_{1,2}$ – безразмерные комплексные амплитуды огибающей импульса первой и t второй гармоник, x, y, z-безразмерные координаты, $\tau = t - z/c$ – безразмерное локальное время, $D_{1,2}$, $D_{\tau 1,2}$, $D_{q1,2}$ – безразмерные коэффициенты дифракции, дисперсии и волновода соответственно, γ описывает нелинейность, α_{01}, α_{02}, α_{11}, α_{12} соответствуют линейному и нелинейному поглощению $h(x,y)$ – безразмерная функция, описывающая поперечный профиль волновода. В настоящей работе в ка-

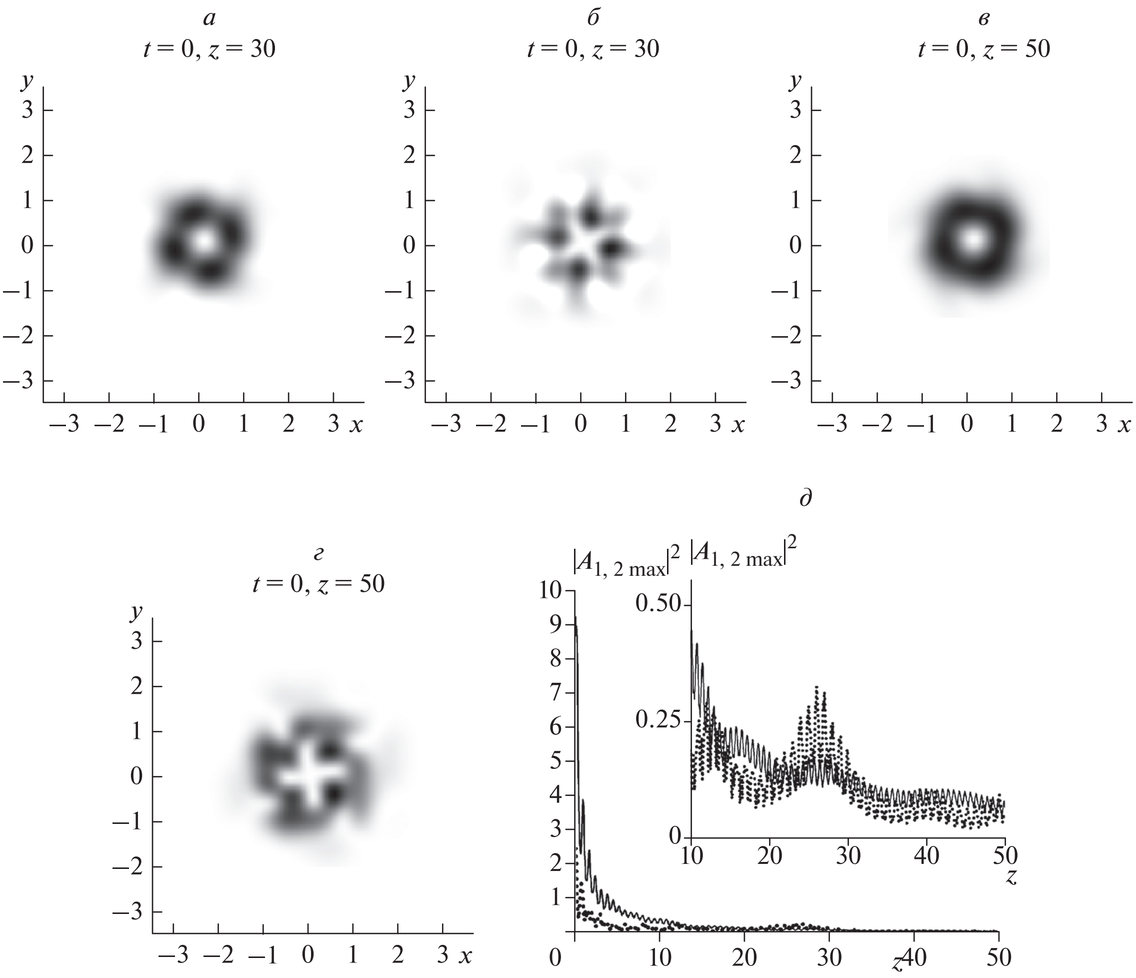

Рис. 3. Рисунок построен аналогично рис. 2. Случай линейного и нелинейного поглощения при $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.01$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.5$. На зависимости пиковых интенсивностей (*д*) сделана врезка области $z > 10$ в увеличенном масштабе.

честве потенциала гармонического осциллятора выбран профиль волновода $h(x,y) = (x^2 + y^2)$. Уравнения (1), (2) решаются численно с использованием консервативной нелинейной разностной схемы, реализуемой с помощью эффективного многоэтапного итерационного алгоритма [14].

На вход среды падает двухкомпонентный вихревой пучок-импульс:

$$A_{1,2}(x,y,\tau)\big|_{z=0} = A_{10,20}\exp\left(\rho^2 + \tau^2 + i\varphi_{1,2}\right)\rho, \qquad (3)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\varphi_1 = \arg(x + iy)$, $\varphi_2 = 2\varphi_1$ и $A_{10,20}$ – константы, определяющие начальные амплитуды компонент.

Мы предполагаем, что, в частности, нелинейное поглощение может быть использовано для стабилизации вихревого солитона. В этом случае возникающие возмущения вихревой структуры, имеющие большую амплитуду, сильно затухают. В результате разрушение вихревого солитона должно происходить на большем расстоянии вдоль продольной координаты z.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Была проведена серия численных расчетов для проверки наших предположений. На рис. 1 показано распределение амплитуды и фазы на разных расстояниях при отсутствии линейного и нелинейного поглощения $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0$. Были использованы следующие параметры: $A_{10} = 15$, $A_{20} = 0$, $D_1 = 1.0$, $D_2 = 0.5$, $D_{\tau 1} = 0.05$, $D_{\tau 1} = 0.1$, $D_{q1} = -10$, $D_{q2} = -10$. На входе подается пучок основной частоты, который генерирует вторую гармонику и образуется двухцветный вихревой солитон. Как известно, такие солитоны нестабильны и при распространении распадаются на несколько невихревых квази-солитонов. Пучок начинает терять вихревую структуру и превращаться в невихревой солитон уже при $z = 30$. При $z = 50$ вихревая структура у него практически отсутствует.

На рис. 2 показано распространение такого пучка при наличии линейного поглощения, $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.1$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0$, остальные параметры совпадают с величинами, указанными в предыдущем случае. При этом на основной частоте вихревая структура сохраняется на всей трассе, на второй гармонике структура искажена, но в целом имеет вихревой вид. На графике пиковой интенсивности (рис. 2*д*) видно, что интенсивность пучка резко падает уже к $z = 10$, т.е. распространяется уже не солитонный пучок, а два практически не связанных между собой пучка на основной частоте и второй гармонике. Из этого можно сделать вывод, что линейное поглощение мало подходит для стабилизации вихревых солитонов, а способствует только сохранению вихревой структуры пучка.

Нелинейное поглощение более выражено в областях с максимальной интенсивностью. В связи с этим мы ожидаем, что с его помощью можно предотвратить распад на отдельные солитоны, поскольку формирующиеся участки с максимальной интенсивностью будут поглощаться сильнее. В реальных средах нелинейное поглощение обычно связано с линейным, поэтому учтем оба фактора. На рис. 3 показано распределение амплитуды и фазы при $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.01$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.5$. В этом случае можно сказать, что вихревая структура пучка все еще сохраняется на трассе $z = 30$. Даже при $z = 50$ вихревая структура частично наблюдается. Пиковая интенсивность пучка приведена на рис. 3*д*. В начале пучок за счет нелинейного поглощения резко теряет интенсивность, но начиная с $z = 10$, можно говорить о стабилизации пучка, распространяющегося как связанное состояние. Таким образом, можно сделать вывод, что нелинейное поглощение способствует устойчивости вихревых пучков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено распространение оптического вихря в квадратично-нелинейном волноводе при наличии линейного и нелинейного поглощения. С помощью численного моделирования показано, что поглощение позволяет пучку дольше сохранять вихревую структуру, предотвращая распад пучка на несколько невихревых квази-солитонов. Нелинейное поглощение более эффективно, чем линейное удерживает пучок от распада за счет того, что наиболее интенсивно поглощаются области с максимальной интенсивностью.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Amsterdam: Academic Press, 2003. 540 p.
2. *Desyatnikov A.S., Torner L., Kivshar Yu.* // Progr. Opt. 2005. V. 47. P. 291.
3. *Huang C., Ye F., Malomed B.A. et al.* // Opt. Lett. 2013. V. 38. No 13. P. 2177.
4. *Kartashov Y.V., Vysloukh V.A., Torner L.* // Opt. Expr. 2007. V. 15. No 15. P. 9378.
5. *Ye F., Kartashov Y.V., Hu B. et al.* // Opt. Lett. 2010. V. 35. No 5. P. 628.
6. *Izdebskaya Y., Assanto G., Krolikowski W.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. No 17. P. 4182.
7. *Kartashov Y.V., Malomed B.A., Vysloukh V.A. et al.* // Opt. Lett. 2017. V. 42. No 3. P. 446.
8. *Yao X., Liu X.* // Opt. Lett. 2018. V. 43. No 23. P. 5749.
9. *Huang C., Dong L.* // Opt. Lett. 2016. V. 41. No 22. P. 5194.
10. *Carlsson A.H., Malmberg J.N., Anderson D. et al.* // Opt. Lett. 2000. V. 25. No 9. P. 660.
11. *Malomed B.A.* // Phys. D. 2019. V. 399. P. 108.
12. *Fedorov S.V., Veretenov N.A., Rosanov N.N.* // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 122. Art. No 023903.
13. *Mayteevarunyoo T., Malomed B.A., Skryabin D.V.* // New J. Phys. 2018. V. 20. Art. No 113019.
14. *Sazonov S.V., Mamaikin M.S., Komissarova M.V. et al.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. Art. No 022208.
15. *Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Sazonov S.V. et al.* // PLoS ONE. 2019. V. 14. No 8. Art. No e0220840.
16. *Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V. et al.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. No 3. Art. No 033835.
17. *Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Zakharova I.G. et al.* // Proc. SPIE. 2019. V. 11026. Art. No 110260M.

Optical vortices in quadratic-nonlinear media with nonlinear absorption

B. S. Bryantsev[a,*], A. A. Kalinovich[a], I. G. Zakharova[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

* *E-mail: brisbryantsev@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

We study the propagation of optical vortices in quadratic-nonlinear media in the presence of linear and nonlinear absorption. It is known that when such beams propagate in quadratically nonlinear media without absorption, the vortex structure of the beam is destroyed and the beam splits into several non-vortex quasi-solitons. In this paper, it is shown that nonlinear absorption allows the beam to maintain its structure longer.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 34–38

УДК 535-92

МАГНИТООПТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ В ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ МОД

© 2021 г. П. В. Головко[1], Д. О. Игнатьева[1, 2, *], А. Н. Калиш[1, 2], В. И. Белотелов[1, 2]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия*

[2]*Общество с ограниченной ответственностью Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий, Москва, Россия*

**E-mail: ignatyeva@physics.msu.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Продемонстрировано усиление интенсивностных магнитооптических эффектов в структурах, содержащих фотонно-кристаллические слои и ферромагнитный диэлектрик – феррит-гранат, и поддерживающих возбуждение квазиповерхностных Таммовских мод на границе фотонного кристалла и граната. Показано, что такие структуры обладают высокодобротными резонансами, а благодаря приповерхностной локализации электромагнитного поля позволяют усиливать магнитооптический экваториальный эффект Керра и достигать значений магнитооптической модуляции вплоть до 100%.

DOI: 10.31857/S0367676521010129

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой создания новых функциональных материалов является повышение эффективности взаимодействия света и вещества. Магнитные материалы позволяют достигать скоростей переключения до десятков ГГц за счет перемагничивания материала, что используется в магнитооптических модуляторах объемного излучения, например, на основе эффекта Фарадея [1–3]. Эффект Фарадея представляет собой вращение плоскости поляризации линейно поляризованного света при прохождении через намагниченную среду, пропорциональное длине магнитного кристалла. Модуляция интенсивности при этом осуществляется за счет добавления дополнительных поляризаторов. Однако недостатком модуляторов на основе эффекта Фарадея является то, что для достижения существенной глубины модуляции (вплоть до 100%) в ячейке Фарадея требуется структура достаточно большого, макроскопического размера. В то же время другие магнитооптические эффекты, например, интенсивностный магнитооптический экваториальный эффект Керра, имеют поверхностный характер и сравнительно малую величину, и поэтому их применение в модуляторах неэффективно.

В связи с этим большую важность имеет создание различных наноструктур, в которых бы за счет возбуждения оптических резонансов происходило усиление магнитооптических эффектов. Одним из перспективных направлений современной оптики функциональных материалов является применение поверхностных электромагнитных, в том числе поверхностных плазмон-поляритонных волн [4–6], для увеличения эффективности взаимодействия с веществом, а также сверхбыстрого управления оптическими импульсами на наномасштабах.

Преимущества такого подхода были продемонстрированы ранее в магнитоплазмонных кристаллах [7], триметаллических пленках [8], структурах типа металл–диэлектрик–металл [9–11]. Невзаимность распространения плазмонов в магнитоплазмонных структурах и усиление магнитооптических эффектов [12] также предложено использовать в циркуляторах [13]. Однако значительное поглощение, усиливаемое при добавлении в структуру металлов, необходимых для возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов, не позволяет реализовать устройства интегральной оптики на базе магнитоплазмонных структур с реальными, а не модельными, параметрами поглощения и гирации ферромагнетика.

Поэтому существенным преимуществом другого типа структур – полностью диэлектрической структуры с фотонным кристаллом и магнитными слоями – является увеличение добротности и связанное с ним увеличение чувствительности и магнитооптического отклика. Недавно было теоретически предсказано усиление эффекта Фарадея [14], а также экваториального эффекта Керра

[15–17] в магнитофотонном кристалле при возбуждении поверхностных (Таммовских) волн [18].

В данной работе представлены результаты исследования фотонно-кристаллической структуры с ферритом-гранатом, обеспечивающей усиление экваториального эффекта Керра (ЭЭК) за счет возбуждения высокодобротной поверхностной моды на границе на границе фотонный кристалл/феррит-гранат.

ОСОБЕННОСТИ ЭЭК ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ТАММОВСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В работе рассматривается структура: фотонный кристалл, на поверхность которого нанесен толстый слой феррита-граната, в которой возбуждаются поверхностные электромагнитные волны призменным методом. При этом на длинах волн порядка 700–800 нм, в качестве призмы возможно использование прозрачных полупроводниковых материалов с большим показателем преломления, таких как GaP ($n_{\text{GaP}} = 3.1$), для повышения эффективности ввода излучения в структуру. Выбор рабочей длины волны для возбуждения Таммовской поверхностной волны $\lambda_{TSW} = 0.78$ мкм обусловлен тем, что с ростом длины волны в феррите-гранате уменьшается как поглощение, так и магнитооптическая активность, в связи с чем выбранная длина волны обеспечивает баланс между прозрачностью и магнитооптическим откликом.

Существование поверхностных электромагнитных волн в фотонно-кристаллической структуре обусловлено, с одной стороны, полным внутренним отражением от внешней границы (с гранатом) при углах, больших чем $\theta_{TIR} = \arcsin(n_{\text{BIG}}/n_{prism})$, где n_{prism} – показатель преломления призмы, $n_{\text{BIG}} = 2.35$ – показатель преломления граната, $\theta_{TIR}\,(\text{GaP}|\text{BIG}) = 49.29°$. С другой стороны поверхностная электромагнитная волна удерживается за счет наличия запрещенной зоны фотонного кристалла, препятствующей вытеканию излучения обратно в призму. Такие волны также называются Таммовскими, так как по своим свойствам они аналогичны Таммовским состояниям электронов в кристалле. Для обеспечения большой глубины проникновения излучения в феррит-гранат, и, соответственно, достижения большой чувствительности к его намагниченности, мода должна возбуждаться вблизи угла полного внутреннего отражения: $\theta_{TSW} \approx \theta_{TIR}$, где θ_{TSW} – угол падения, при котором возбуждается Таммовская мода.

Параметры фотонного кристалла при этом оптимизируются так, чтобы обеспечить наибольшую эффективность при волновых векторах, соответствующих распространяющейся поверхностной волне. Наибольший контраст показателей преломления обеспечивается, например, в фотонном кристалле из чередующихся слоев GaP/TiO_2 с показателями преломления $n_{\text{GaP}} = 3.1$, $n_{\text{TiO}_2} = 2.5$, соответственно. Толщины слоев фотонного кристалла d_j для возбуждения поверхностных Таммовских волн подбираются четвертьволновыми на соответствующей длине волны и угле распространения внутри слоев:

$$d_j = \frac{\lambda_{TSW}}{4n_j}\frac{1}{\cos\left[\arcsin\left(\left(\frac{n_{\text{GaP}}}{n_j}\right)\sin\theta_{TSW}\right)\right]}, \qquad (1)$$

где n_j – показатель преломления слоя фотонного кристалла, соответственно. Для выбранного фотонного кристалла $d_{\text{TiO}_2} = 228.5$ нм, $d_{\text{GaP}} = 96.4$ нм. Было подобрано оптимальное число пар слоев $N = 4$, последний слой является дефектным и имеет толщину $d_{\text{GaP}\,4} = 206.3$ нм. Структура схематически изображена на рис. 1.

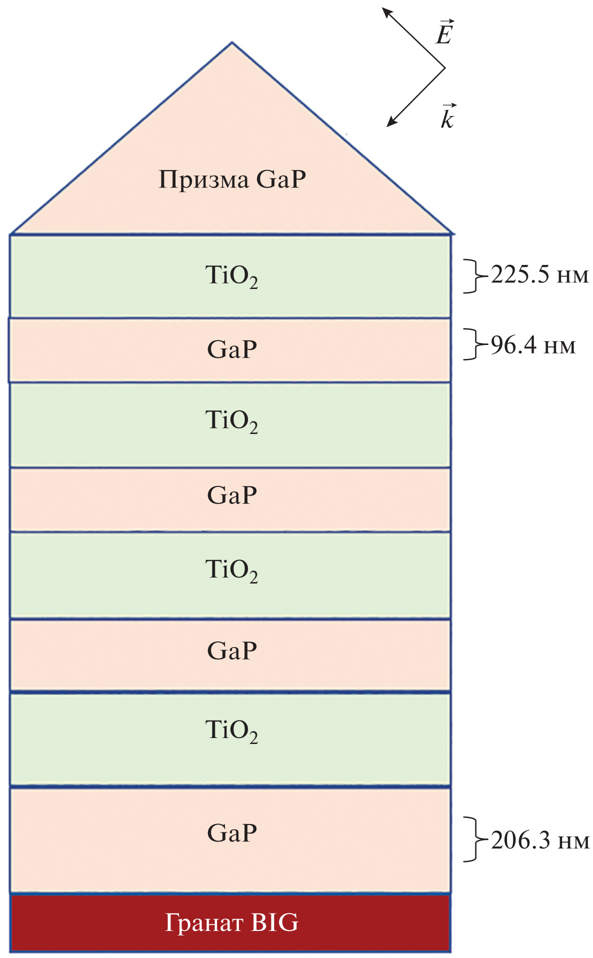

Рис. 1. Схема фотонно-кристаллической структуры с ферритом-гранатом для возбуждения поверхностных Таммовских мод на границе с гранатом.

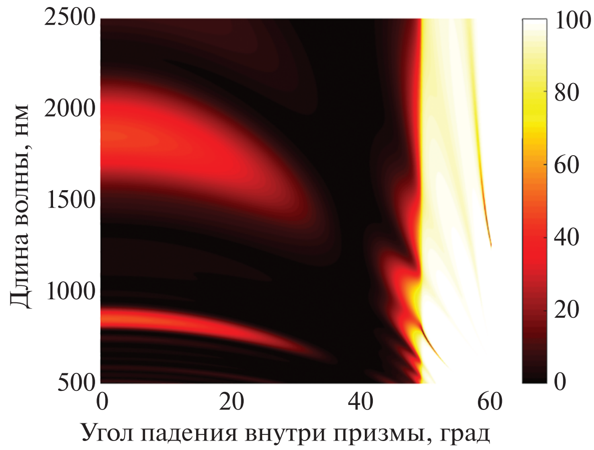

Рис. 2. Угловой и частотный спектр коэффициента отражения от рассматриваемой структуры с фотонным кристаллом и ферритом-гранатом.

Угловой и частотный спектр коэффициента отражения структуры при падении оптического излучения p-поляризации, рассчитанный методом матриц перехода, показан на рис. 2. В спектре видно возбуждение поверхностной Таммовской моды в виде узкого и глубокого (R_{min} = 0.96%) резонанса в области полного внутреннего отражения в диапазоне 700–800 нм. Добротность резонанса составляет Q = 77, длина пробега моды вдоль границы магнитного материала и фотонного кристалла L_{prop} = 35 мкм, глубина проникновения в феррит-гранат L_0 = 1.3 мкм.

Поверхностные Таммовские волны чувствительны к намагниченности материалов, нанесенных на поверхность фотонного кристалла [15–17]. При этом, за счет возбуждения эванесцентных внутри магнитного материала мод, локализованных на его границе, возможно значительное усиление магнитооптических эффектов, связанных с поверхностными свойствами магнитного вещества, в частности, магнитооптического экваториального эффекта Керра.

Магнитооптический экваториальный эффект Керра состоит в модуляции интенсивности отраженного от магнитной структуры излучения R при приложении противоположно направленного внешнего магнитного поля и противоположном намагничивании структуры $\pm\vec{\mathrm{M}}$ в экваториальной конфигурации и определяется величиной δ:

$$\delta = 2\frac{R\left(+\vec{\mathrm{M}}\right) - R\left(-\vec{\mathrm{M}}\right)}{R\left(+\vec{\mathrm{M}}\right) + R\left(-\vec{\mathrm{M}}\right)}. \quad (2)$$

При этом угловой спектр коэффициента отражения вблизи резонанса имеет Лоренцевскую форму:

$$R(\theta) = 1 - \frac{4\beta''_{loss}\beta''_{leak}}{\left(k_0 n_{\mathrm{GaP}}\sin\theta - \left(\beta'_0 + \Delta\beta'_M\right)\right)^2 + \left(\beta''_{loss} + \beta''_{leak} + \Delta\beta''_M\right)^2}, \quad (3)$$

где θ – угол падения излучения из воздуха, $\beta_{surf} = \left(\beta'_0 + \Delta\beta'_M\right) + i\left(\beta''_{loss} + \beta''_{leak} + \Delta\beta''_M\right)$ – волновое число поверхностной Таммовской моды, учитывающее магнитооптическую добавку $\Delta\beta'_M + i\Delta\beta''_M$ к волновому числу в немагнитном случае $\beta'_0 + i\left(\beta''_{loss} + \beta''_{leak}\right)$. Мнимая часть волнового числа соответствует потерям на поглощение β''_{loss} и радиационным потерям на вытекание излучения в призму β''_{leak}, соответственно.

Для аналитического описания экваториального эффекта Керра в структурах с Таммовскими модами может быть применено приближение: $|\Delta\beta_M| \ll \beta'_0$, ввиду малости вносимой намагниченностью среды поправки к волновому числу. Таким образом, магнитооптическая модуляция коэффициента отражения в геометрии Керра будет иметь вид:

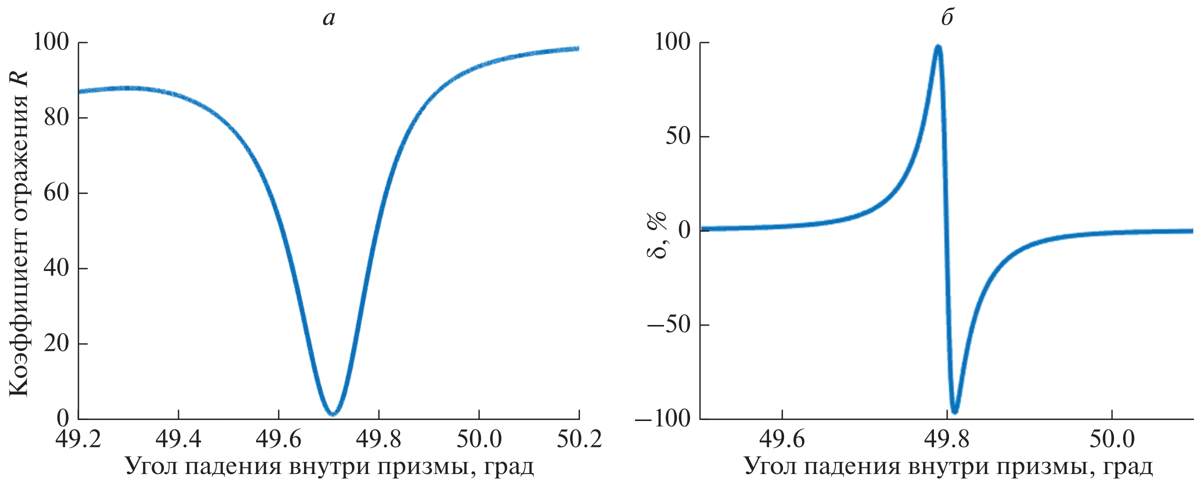

Рис. 3. Угловой спектр коэффициента отражения (*а*) и экваториального эффекта Керра при возбуждении Таммовской моды (*б*).

$$\delta = -\frac{8\Delta\beta'_M\beta''_{loss}\beta''_{leak}\left(k_0 n_{prism}\sin\theta - \beta'_0\right)}{\left(\left(k_0 n_{prism}\sin\theta - \beta'_0\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\beta''_{loss} + \beta''_{leak}\right)^2 - 4\beta''_{loss}\beta''_{leak}\right)\left(\left(k_0 n_{prism}\sin\theta - \beta'_0\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\beta''_{loss} + \beta''_{leak}\right)^2\right)} \quad (4)$$

причем при $\beta''_{loss} = \beta''_{leak}$ величина экваториального эффекта Керра максимальна. Согласно формуле (4) резонанс имеет симметричный S-образный профиль с двумя максимумами разных знаков, а в центре резонанса $\delta = 0$.

За счет высокой добротности резонанса и эванесцентного характера Таммовской моды амплитуда экваториального эффекта Керра может достигать значений $\delta = 98\%$ (при характерном для феррита-граната значении коэффициента гирации $g = 0.02$). Угловой спектр экваториального эффекта Керра, показанный на рис. 3, демонстрирует качественное соответствие с аналитической формулой (4): резонанс имеет S-форму, симметричную относительно $\theta = \theta_{TSW}$, с максимальной амплитудой эффекта $\delta_{max} = |\delta_{min}| = 98\%$.

Высокая добротность Таммовской моды и одновременно чувствительность ее постоянной распространения к намагниченности внешнего материала, нанесенного на фотонный кристалл, приводит к тому, что магнитооптическое смещение резонанса по длине волны оказывается сопоставимым с шириной резонанса. В результате величина коэффициента δ достигает практически 100%, что свидетельствует о высокой эффективности модуляции электромагнитного излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрировано усиление магнитооптического экваториального эффекта Керра при возбуждении поверхностных Таммовских волн в структурах с фотонным кристаллом и ферритом-гранатом на поверхности магнетика. Такие структуры имеют большое прикладное значение и могут быть использованы для повышения эффективности магнитооптических модуляторов света.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-72-10139).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zvezdin A.K., Kotov V.A.* Modern magnetooptics and magnetooptical materials. CRC Press, 1997.
2. *Gaugitsch M., Hauser H.* // J. Lightwave Technol. 1999. V. 17. P. 2633.
3. *Irvine S.E., Elezzabi A.Y.* // J. Phys. D. 2003. V. 36. P. 18.
4. *Ignatyeva D.O., Sukhorukov A.P.* // Appl. Phys. A. 2012. V. 109. P. 813.
5. *Khokhlov N.E., Ignatyeva D.O., Belotelov V.I.* // Opt. Expr. 2014. V. 22. Art. No 28019.
6. *Ignatyeva D.O., Sukhorukov A.P.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. Art. No 013850.
7. *Wurtz G.A., Hen dren W., Pollard R. et al.* // New J. Phys. 2008. V. 10. Art. No 105012.
8. *D.M. Becera*. Active plasmonic devices based on magnetoplasmonic nanostructures. Springer, 2017.

9. *Ferreiro-Vila E., García-Martín J.M., Cebollada A. et al.* // Opt. Expr. 2013. V. 21. Art. No 4917.

10. *Armelles G., Cebollada A., García-Martín J.M. et al.* // J. Opt. A. 2009. V. 11. Art. No 114023.

11. *Ignatyeva D.O., Davies C.S., Sylgacheva D.A. et al.* // Nat. Commun. 2019. V. 10. No 1. P. 1.

12. *Chin J.Y., Steinle T., Wehlus T. et al.* // Nat. Commun. 2013. V. 4. P. 1599.

13. *Davoyan A.R., Engheta N.* // New J. Phys. 2013. V. 15. Art. No 083054.

14. *Romonina M.N., Soboleva I.V., Fedyanin A.A.* // J. Magn. Magn. Mater. 2016. V. 415. P. 82.

15. *Игнатьева Д.О., Капралов П.О., Князев Г.А. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 104. С. 689; *Ignatyeva D.O., Kapralov P.O., Knyazev G.A. et al.* // JETP Lett. 2016. V. 104. P. 679.

16. *Ignatyeva D.O., Knyazev G.A., Kapralov P.O. et al.* // Sci. Rep. 2016. V. 6. Art. No 28077.

17. *Borovkova O.V., Ignatyeva D.O., Sekatskii S.K.* // Photon. Res. 2020. V. 8. No 1. P. 57.

18. *Konopsky V.N.* // New J. Phys. 2010. V. 12. Art. No 093006.

Magneto-optical control of radiation in photonic-crystal structures at excitation of surface modes

P. V. Golovko[a], D. O. Ignatyeva[a, b, *], A. N. Kalish[a, b], V. I. Belotelov[a, b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

[b] *International Center for Quantum Optics & Quantum Technologies Limited Liability Company, Moscow, 121205 Russia*

**E-mail: ignatyeva@physics.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The enhancement of intensity magneto-optical effects in structures containing photonic-crystal layers and a ferromagnetic dielectric—iron garnet, and supporting the excitation of quasi-surface Tamm modes at the boundary of the photonic crystal and garnet, has been demonstrated. It was shown that such structures possess high-Q resonances, and due to the near-surface localization of the electromagnetic field, they allow enhancement of the transverse magneto-optical Kerr effect and achievement of magneto-optical modulation values up to 100%.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 39–46

УДК 538.935

МЕЖЗОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА В СВЕРХРЕШЕТКЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ПОЛОСОК ОДНОСЛОЙНОГО И ДВУХСЛОЙНОГО ГРАФЕНА

© 2021 г. П. В. Бадикова[1], *, Д. В. Завьялов[1], В. И. Конченков[1], С. В. Крючков[1, 2]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Волгоградский государственный технический университет”, Волгоград, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Волгоградский государственный социально-педагогический университет”, Волгоград, Россия*

**E-mail: polin.badicova@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Исследована модель сверхрешетки, состоящей из чередующихся областей однослойного и двухслойного графена, энергетическим спектром которой можно управлять при помощи внешнего электрического поля, перпендикулярного поверхности образца. Показано, что энергетический спектр такой структуры может быть аппроксимирован моделью Кейна. Вычислен коэффициент межзонного поглощения для такой сверхрешетки.

DOI: 10.31857/S036767652101004X

ВВЕДЕНИЕ

Появление эффективных источников терагерцевого излучения в последние годы (см., например, [1]) и широкие перспективы использования волн этого диапазона в медицинской диагностике стимулируют исследования твердотельных структур, подходящих для создания детекторов терагерцевого излучения. Среди таких структур – полупроводниковые и графеновые сверхрешетки (СР), параметры которых можно регулировать на этапе изготовления. В настоящей работе вычислен коэффициент межзонного поглощения света в сверхрешетке, состоящей из чередующихся полосок однослойного и двухслойного графена, энергетическим спектром которой можно управлять, прикладывая постоянное электрическое поле, перпендикулярное поверхности образца (рис. 1). Красным цветом показаны атомы второго слоя графена. Относительное расположение слоев в областях двухслойного графена соответствует типу AB, графен такого типа иначе называется Bernal stacking graphene [2, 3]. Такая СР рассмотрена в [4], где с использованием модели Кронига–Пенни и метода Т-матрицы выведено дисперсионное уравнение, результаты аналитического рассмотрения сравниваются с результатами моделирования методами теории функционала плотности. При квантовохимическом моделировании период СР полагался равным 10.9 нм, что соответствует 51 периоду основной решетки графена. Поперечное электрическое поле позволяет управлять шириной запрещенной зоны в спектре СР за счет нарушения эквивалентности между состояниями в различных слоях двухслойного графена. Таким образом, при помощи электрического поля можно смещать край межзонного поглощения света рассматриваемой структурой и использовать рассматриваемую СР для измерения частоты падающего на образец излучения. Возможность управления спектром различных типов графеновых сверхрешеток (ГСР) при помощи электрического поля исследовалось также в [5–8], в [9] рассмотрено влияние электрического поля на спектр СР на основе монослоя нитрида бора. В [10] исследуется эффект увлечения в гетероструктуре, состоящей из фрагментов однослойного и двухслойного графена. В [11, 12] исследуются электронные состояния в гетеропереходе однослойный – двухслойный графен.

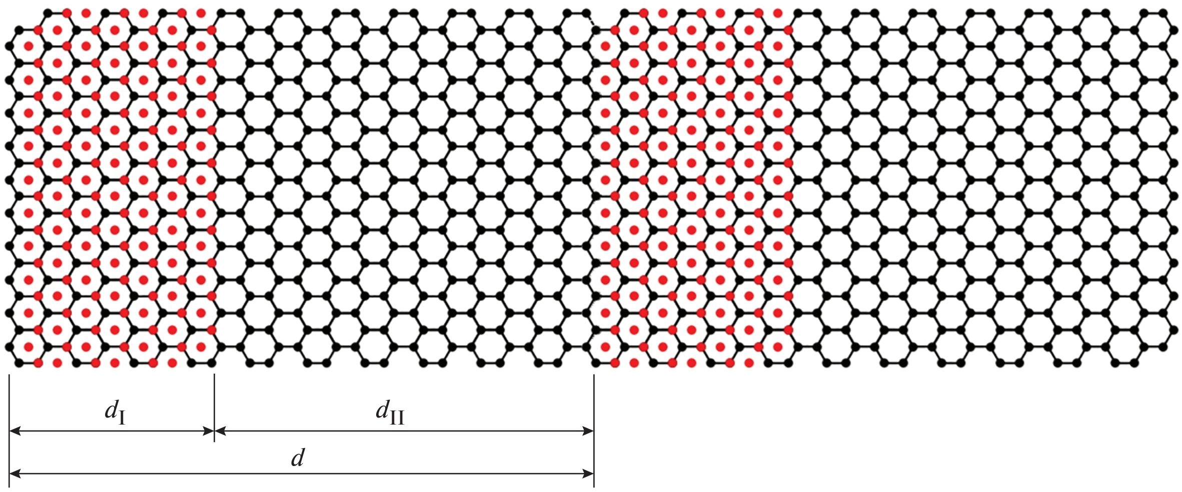

Рис. 1. Схема размещения полосок графена, формирующих двухслойные области, на основном графеновом листе.

ОСОБЕННОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА СВЕРХРЕШЕТКИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ПОЛОСОК ОДНОСЛОЙНОГО И ДВУХСЛОЙНОГО ГРАФЕНА

Энергетический спектр двухслойного графена, помещенного в постоянное электрическое поле, перпендикулярное поверхности образца, имеет вид [2, 3]:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta^2 + \upsilon_F^2 p^2 + \frac{t_\perp^2}{2} \pm \sqrt{\upsilon_F^2 p^2\left(4\Delta^2 + t_\perp^2\right) + \frac{t_\perp^4}{4}}}. \quad (1)$$

Здесь υ_F – скорость на поверхности Ферми в графене, $t_\perp \approx 0.4$ эВ – интеграл перекрытия между слоями двухслойного графена, Δ – полуширина запрещенной зоны в энергетическом спектре этого материала, которая непосредственно зависит от постоянного электрического поля, приложенного перпендикулярно поверхности образца, p – модуль квазиимпульса электрона в двухслойном графене.

Рассмотрим особенности спектра графеновой сверхрешетки, состоящей из чередующихся полосок однослойного и двухслойного графена. Период сверхрешетки обозначим d, ширина полоски однослойного графена d_{I}, ширина полоски двухслойного графена d_{II}. Подобная ГСР исследовалась ранее в [13], где, однако, влияние поперечного поля не учитывалось.

В [4] с использованием метода трансляционной матрицы и модели Кронига–Пенни выведено дисперсионное соотношение для рассматриваемой СР, в общем случае имеющее вид

$$F\left(\varepsilon, q_x, q_y\right) = 0, \quad (2)$$

где ε – энергия электрона, $q_{x,y} = p_{x,y}d/\hbar$. Перейдем к безразмерным переменным: $a_{\mathrm{I}} = d_{\mathrm{I}}/d$, $a_{\mathrm{II}} = d_{\mathrm{II}}/d$, $B = \hbar\upsilon_F/(t_\perp d)$, величины ε и Δ будем измерять в единицах $t_\perp$. Введем обозначения

$$Q_2^+ = q_y^2 - \frac{\Delta^2 + \varepsilon^2}{B^2} + \frac{\sqrt{\left(4\Delta^2 + 1\right)\varepsilon^2 - \Delta^2}}{B^2}, \quad (3)$$

$$Q_2^- = q_y^2 - \frac{\Delta^2 + \varepsilon^2}{B^2} - \frac{\sqrt{\left(4\Delta^2 + 1\right)\varepsilon^2 - \Delta^2}}{B^2}, \quad (4)$$

$$Q_1 = \frac{\varepsilon^2}{B^2} q_y^2. \quad (5)$$

$$F_1 = 2\cos q_1 a_{\mathrm{I}} \operatorname{ch} q_2 a_{\mathrm{II}} + \frac{\varepsilon^2\left(q_1^2 - q_2^2\right) + \Delta^2\left(q_y^2 - q_1^2\right)}{\left(\Delta^2 - \varepsilon^2\right) q_1 q_2} \sin q_1 a_{\mathrm{I}} \operatorname{sh} q_2 a_{\mathrm{II}} - 2\cos q_x, \quad (6)$$

$$F_2 = 2\cos q_1 a_{\mathrm{I}} \cos q_2 a_{\mathrm{II}} + \frac{\varepsilon^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \Delta^2\left(q_y^2 - q_1^2\right)}{\left(\Delta^2 - \varepsilon^2\right) q_1 q_2} \sin q_1 a_{\mathrm{I}} \sin q_2 a_{\mathrm{II}} - 2\cos q_x, \quad (7)$$

$$F_3 = 2\operatorname{ch} q_1 a_{\mathrm{I}} \operatorname{ch} q_2 a_{\mathrm{II}} + \frac{-\varepsilon^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \Delta^2\left(q_y^2 + q_1^2\right)}{\left(\Delta^2 - \varepsilon^2\right) q_1 q_2} \operatorname{sh} q_1 a_{\mathrm{I}} \operatorname{sh} q_2 a_{\mathrm{II}} - 2\cos q_x, \quad (8)$$

$$F_4 = 2\operatorname{ch} q_1 a_{\mathrm{I}} \cos q_2 a_{\mathrm{II}} + \frac{-\varepsilon^2\left(q_1^2 - q_2^2\right) + \Delta^2\left(q_y^2 + q_1^2\right)}{\left(\Delta^2 - \varepsilon^2\right) q_1 q_2} \operatorname{sh} q_1 a_{\mathrm{I}} \sin q_2 a_{\mathrm{II}} - 2\cos q_x. \quad (9)$$

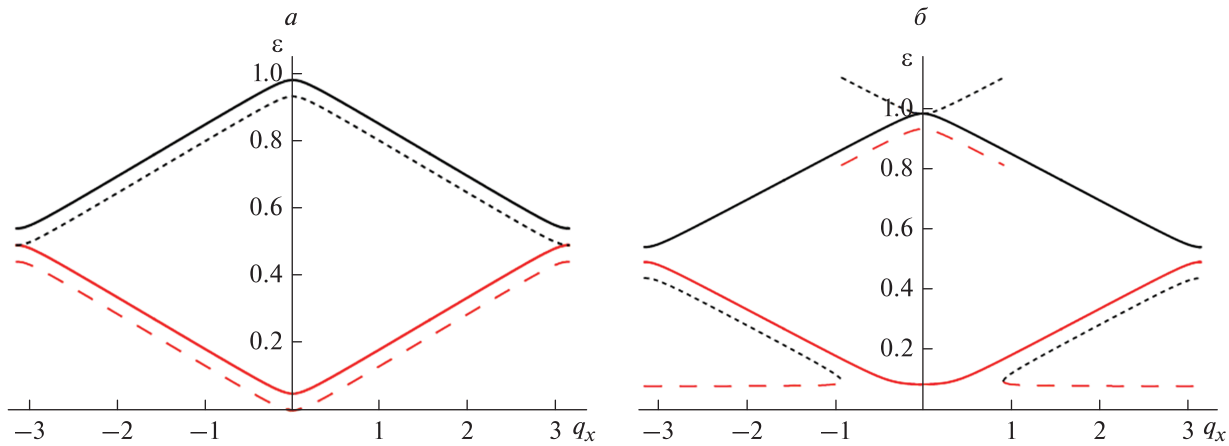

Рис. 2. Зависимость энергии $\varepsilon(q_x)$, $q_y = 0$ для двух нижних минизон, соответствующих зоне проводимости: $\Delta = 0$ (*а*); $\Delta = 0.08t_\perp$ (*б*). Сплошные линии соответствуют решению дисперсионного уравнения (10), пунктирные линии – решению уравнения (11). Энергия измеряется в единицах $t_\perp$.

Первое семейство дисперсионных поверхностей $\varepsilon_i\ (q_x, q_y)$ получается из решения (2) при учете следующих соотношений:

$$\begin{cases} Q_1 \ge 0,\ Q_2^+ \ge 0: q_1 = \sqrt{Q_1},\ q_2 = \sqrt{Q_2^+},\ F = F_1; \\ Q_1 \ge 0,\ Q_2^+ < 0: q_1 = \sqrt{Q_1},\ q_2 = \sqrt{-Q_2^+},\ F = F_2; \\ Q_1 < 0,\ Q_2^+ \ge 0: q_1 = \sqrt{-Q_1},\ q_2 = \sqrt{Q_2^+},\ F = F_3; \\ Q_1 < 0,\ Q_2^+ < 0: q_1 = \sqrt{-Q_1},\ q_2 = \sqrt{-Q_2^+},\ F = F_4. \end{cases} \tag{10}$$

Второе семейство – при учете соотношений:

$$\begin{cases} Q_1 \ge 0,\ Q_2^- \ge 0: q_1 = \sqrt{Q_1},\ q_2 = \sqrt{Q_2^-},\ F = F_1; \\ Q_1 \ge 0,\ Q_2^- < 0: q_1 = \sqrt{Q_1},\ q_2 = \sqrt{-Q_2^-},\ F = F_2; \\ Q_1 < 0,\ Q_2^- \ge 0: q_1 = \sqrt{-Q_1},\ q_2 = \sqrt{Q_2^-},\ F = F_3; \\ Q_1 < 0,\ Q_2^- < 0: q_1 = \sqrt{-Q_1},\ q_2 = \sqrt{-Q_2^-},\ F = F_4. \end{cases} \tag{11}$$

Два семейства дисперсионных поверхностей соответствуют двум ветвям в спектре двухслойного графена (1). Первая и вторая строки в выражениях (10), (11) соответствуют состояниям, формируемым основным периодическим потенциалом, третья и четвертая строки – состояниям, возникающим за счет периодического расположения поверхностных (таммовских) состояний, формируемых на границе однослойного и двухслойного графена. С использованием квантовохимического моделирования методами теории функционала плотности показано, что в случае относительно узких полосок двухслойного графена по сравнению с периодом сверхрешетки ($d_{II} \ll d$) энергетический спектр рассматриваемой структуры можно считать симметричным относительно K-точки исходного материала (однослойного графена), и в этом случае низкоэнергетическое приближение, использованное для вывода дисперсионного уравнения, может считаться правомерным. Далее рассматривается именно такой случай: сверхрешетка состоит из широких полосок однослойного графена и узких полосок двухслойного.

Рассмотрим влияние параметра Δ на зонную структуру ГСР. На рис. 2 показаны графики решения дисперсионного уравнения при $k_y = 0$. Видно, что в случае $\Delta = 0$ (рис. 2*а*) формируются две минизоны, каждая из которых дополнительно расщепляются на две подзоны, соответствующие решению уравнения (10) и (11). В случае, когда Δ отлично от нуля, первый положительный корень уравнения (11) при малых значениях k_x перено-

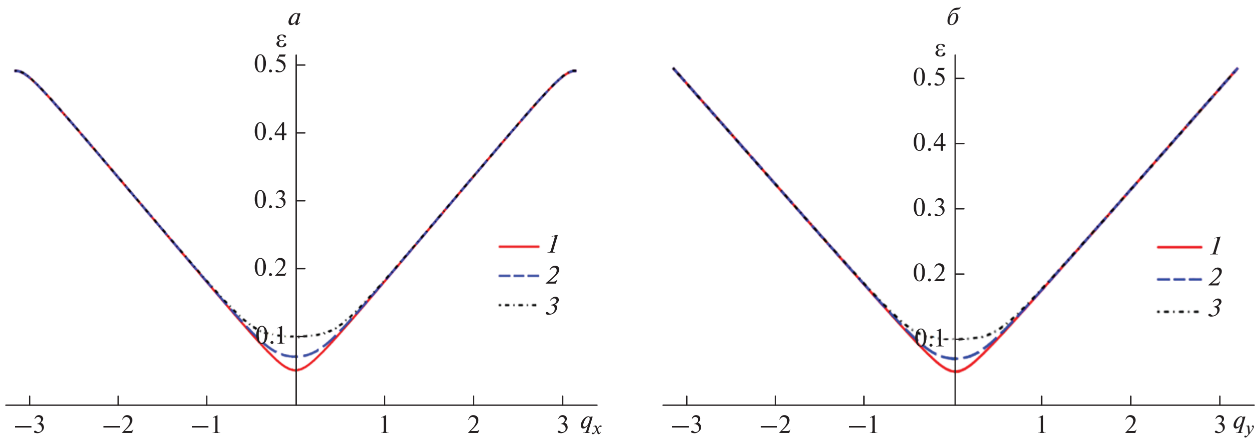

Рис. 3. Зависимость энергии электрона ε от компонент квазиимпульса q_x, q_y в нижней минизоне, описываемой дисперсионным уравнением (10); (*а*) $\varepsilon(q_x)$ при $q_y = 0$; (*б*) $\varepsilon(q_y)$ при $q_x = 0$; *1* – $\Delta = 0.02t_\perp$, *2* – $\Delta = 0.06t_\perp$, *3* – $\Delta = 0.08t_\perp$. Энергия измеряется в единицах $t_\perp$.

сится в область значений энергии, соответствующих второй минизоне, а первая минизона не формируется, энергетическая поверхность терпит разрыв первого рода.

Следует отметить, что квантовохимическое моделирование, проведенное в [4], не показало существование расщепления минизон. Более того, при моделировании установлено, что энергетическая щель в спектре сверхрешетки возникает и в отсутствие постоянного электрического поля. Наличие дополнительных полосок графена, расположенных над поверхностью основного графенового листа, приводит к нарушению симметрии в спектре этого материала и к открытию энергетической щели. При этом из двух состояний, предсказываемых моделью Кронига–Пенни, реализуется одно – описываемое решением дисперсионного уравнения (10).

Параметр Δ – полуширина запрещенной зоны, формируемой в двухслойном графене при воздействии постоянного электрического поля, перпендикулярного поверхности образца. Меняя этот параметр, мы меняем и ширину запрещенной зоны, исследуемой СР, т.е. появляется возможность строить на основе такого материала измеритель частоты, работающий в терагерцевом диапазоне, основанный на эффекте межзонного поглощения. На рис. 3 приведены графики $\varepsilon(q_x)$ при $q_y = 0$ и $\varepsilon(q_y)$ при $q_x = 0$ в самой нижней минизоне, описываемой дисперсионным уравнением (10) при разных значениях Δ. Из графиков видно, что изменение параметра Δ влияет на форму дисперсионных поверхностей вблизи дна минизоны проводимости, с ростом $|\bar{q}|$ зависимость $\varepsilon(q_x)$, $\varepsilon(q_y)$ близка к линейной. Значение Δ является оценкой снизу для полуширины запрещенной зоны в энергетическом спектре рассматриваемой структуры. По q_x минизона, как и должно быть, конечна, но, как видно из графиков, ширина минизоны оказывается почти на порядок больше ширины запрещенной зоны. Полагая $\Delta = 0.1$, $t_\perp = 0.04$ эВ и приравнивая $2\Delta = kT$, получаем $T \approx 90$ K – характерная температура, при которой в минизоне проводимости начнут появляться носители заряда вследствие теплового движения. Следовательно, при температурах порядка нескольких десятков кельвинов можно ожидать проявления эффекта межзонного поглощения света, носящего пороговый характер.

Поскольку ширина минизоны проводимости оказывается значительно больше ширины запрещенной зоны, и учет состояний вблизи потолка минизоны проводимости не столь важен при исследовании эффекта межзонного поглощения, энергетический спектр рассматриваемой структуры будем аппроксимировать моделью Кейна [14, 15]:

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta_0^2 + \upsilon_0^2\left(p_x^2 + p_y^2\right)}. \tag{12}$$

Это выражение приближенно описывает спектр графена на подложке из карбида кремния [16, 17] или нитрида бора [18], в спектре которого присутствует энергетическая щель. Параметр υ_0 в случае графена на подложке, благодаря взаимодействию с которой в его спектре формируется энергетическая щель, отождествляется со скоростью на поверхности Ферми υ_F. Воспользуемся

Таблица 1. Значения подгоночных параметров в модели кейновского спектра (13)

	ε_0, мэВ	Δ'	γ
$\Delta = 0.04t_\perp$	62.3674	0.22072	0.149129
$\Delta = 0.08t_\perp$	67.2993	0.518656	−0.0386933

несколько видоизмененным выражением для подбора параметров кейновского спектра:

$$\varepsilon\left(q_x, q_y\right) = \varepsilon_0\left(\gamma + \sqrt{\Delta'^2 + \left(q_x^2 + q_y^2\right)}\right). \quad (13)$$

Подбор коэффициентов будем вести таким образом, чтобы значения исходной и приближенной функции были максимально близки вблизи дна минизоны. В табл. 1 приведены значения параметров модели (13), вычисленные для случаев $\Delta = 0.04t_\perp$ и $\Delta = 0.08t_\perp$.

Из табл. 1 видно, что можно подобрать коэффициенты таким образом, чтобы параметр γ был пренебрежимо мал по сравнению с параметром Δ'. Таким образом, гамильтониан, описывающий состояния электрона в рассматриваемой графеновой сверхрешетке, может быть представлен в следующем виде:

$$H(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \Delta_0 & \upsilon_0\left(p_x - ip_y\right) \\ \upsilon_0\left(p_x + ip_y\right) & -\Delta_0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Используя модель (12) для описания состояния электрона, мы фактически полагаем валентную зону и зону проводимости симметричными относительно значения энергии $\varepsilon = 0$. Гамильтониан (14) описывает две зоны, волновая функция электрона имеет вид:

$$\psi_0 = \frac{1}{L}\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \upsilon_0^2 p^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{\Delta_0^2 + \upsilon_0^2 p^2} \pm \Delta_0\right)^2 + \upsilon_0^2 p^2}} \times$$
$$\times\left(1; \frac{\upsilon_0\left(p_x + ip_y\right)}{\Delta_0 \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \upsilon_0^2 p^2}}\right)^T \exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{ip_y y}{\hbar}\right) \quad (15)$$

энергия электрона в зоне проводимости

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta_0^2 + \upsilon_0^2 p^2}. \quad (16)$$

В выражениях (15), (16) знак “плюс” соответствует зоне проводимости, знак “минус” — валентной зоне, L^2 - нормировочная площадь.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ, ПОЛУЧАЕМОЙ ОБРАЗЦОМ, ЗА СЧЕТ МЕЖЗОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим эффект межзонного поглощения электромагнитной волны. Пусть на поверхность образца падает электромагнитная волна, плоскость поляризации которой направлена вдоль оси X. Векторный потенциал высокочастотного поля положим равным

$$\vec{A} = \left\{A_x, A_y\right\} = \left\{-\frac{ic}{\omega}E_m \exp\left(-i\omega t\right), 0\right\}. \quad (17)$$

Выпишем уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\Psi = \left(H\left(\vec{p}\right) + H'\left(\vec{A}\right)\right)\Psi, \quad (18)$$

где оператор взаимодействия электрона с электромагнитным полем имеет вид

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & \upsilon_0\frac{e}{c}A_x(t) \\ \upsilon_0\frac{e}{c}A_x(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Средняя энергия, получаемая материалом в единицу времени с единицы площади

$$Q_{abs} = \frac{1}{L^2}\sum_{l,\vec{p},l',\vec{p}'} W\left(l,\vec{p},l',\vec{p}'\right) f\left(l,\vec{p}\right) \times$$
$$\times\left(1 - f\left(l',\vec{p}'\right)\right)\hbar\omega, \quad (20)$$

где l, l' — номера зон, $\vec{p}, \vec{p}'$ — квазиимпульсы электрона в начальном и конечном состояниях, $W\left(l,\vec{p},l',\vec{p}'\right)$ — вероятность перехода, $f\left(l,\vec{p}\right)$ — функция распределения электронов. Поскольку влияние электромагнитной волны рассматривается как возмущение, в качестве функций $f\left(l,\vec{p}\right)$, $f\left(l',\vec{p}'\right)$ возьмем равновесные функции Ферми–Дирака, полагая значение химического потенциала равным нулю. Вероятность перехода имеет вид:

$$W\left(l,\vec{p},l',\vec{p}'\right) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \Psi^*\left(l',\vec{p}'\right)H'\Psi\left(l,\vec{p}\right)d\vec{r}\right|^2 \times$$
$$\times\,\delta\left(\varepsilon\left(l',\vec{p}'\right) - \varepsilon\left(l,\vec{p}\right) - \hbar\omega\right), \quad (21)$$

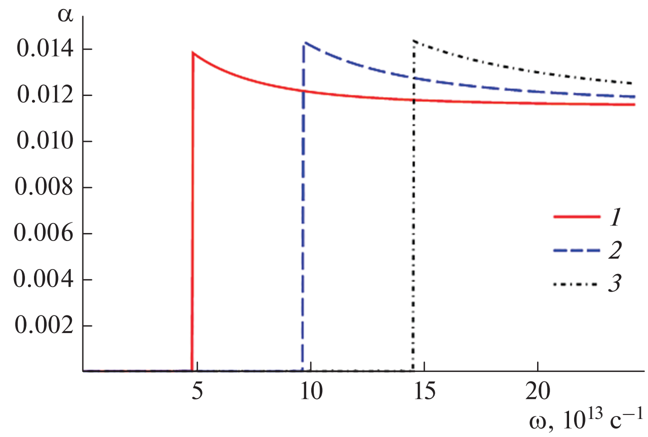

Рис. 4. Зависимость коэффициента поглощения α от частоты падающей волны ω при разных значениях полуширины запрещенной зоны Δ_0: *1* – $\Delta_0 = 0.04t_\perp$; *2* – $\Delta_0 = 0.08t_\perp$; *3* – $\Delta_0 = 0.12t_\perp$. Температура $T = 90$ K.

где в качестве волновых функций возьмем собственные функции (15) невозмущенного гамильтониана кейновского спектра. Вычисляем матричный элемент перехода.

$$\int \Psi_c^*(\vec{p}')H'\Psi_\upsilon(\vec{p})d\vec{r} = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}\upsilon_0\frac{e}{c}A_x(t)\times\frac{\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}+\Delta_0}{\sqrt{\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}+\Delta_0\right)^2+\upsilon_0^2p'^2}}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}-\Delta_0}{\sqrt{\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}-\Delta_0\right)^2+\upsilon_0^2p^2}}\times\left(\frac{\upsilon_0(p_x+ip_y)}{\Delta_0-\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}}+\frac{\upsilon_0\left(p_x'-ip_y'\right)}{\Delta_0+\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}}\right). \quad (22)$$

Как и должно быть, возникает правило отбора, требующее равенства начального и конечного значения квазиимпульса электрона, характерное для процессов, обусловленных прямыми переходами. Таким образом, вероятность перехода имеет вид:

$$W(l,\vec{p},l',\vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{e^2E_m^2}{\omega^2}\upsilon_0^2\delta\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}-\left(-\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}\right)-\hbar\omega\right)\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}+\Delta_0}{\sqrt{\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p'^2}+\Delta_0\right)^2+\upsilon_0^2p'^2}}\frac{\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}-\Delta_0}{\sqrt{\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}-\Delta_0\right)^2+\upsilon_0^2p^2}}\times\right. \quad (23)$$
$$\left.\times\left(\frac{\upsilon_0(p_x+ip_y)}{\Delta_0-\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}}+\frac{\upsilon_0\left(p_x'-ip_y'\right)}{\Delta_0+\sqrt{\Delta_0^2+\nu_0^2p'^2}}\right)\right)^2.$$

Приведем выражение для средней энергии, получаемой материалом в единицу времени с единицы площади за счет межзонных переходов. Суммирование по $\vec{p}'$ в (20) снимается, сумма по l, l' – сводится к одному слагаемому, соответствующему переходу электрона из валентной зоны в зону проводимости. После перехода от суммирования к интегрированию по $\vec{p}$ и записи интеграла по пространству квазиимпульсов в полярной системе координат получаем:

$$Q_{abs} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{e^2E_m^2}{\omega^2}\frac{\upsilon_0^2}{2}\frac{\hbar\omega}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^{\infty}pdp\delta\times$$
$$\times\left(2\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}-\hbar\omega\right)\frac{\exp\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}/T}{\left(1+\mathrm{ch}\left(\sqrt{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}/T\right)\right)}\frac{\Delta_0^2+(\upsilon_0p\sin\varphi)^2}{\Delta_0^2+\upsilon_0^2p^2}. \quad (24)$$

После вычисления интегралов получаем окончательно

$$Q_{abs} = \frac{1}{8\hbar}\frac{e^2E_m^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)}{1+\mathrm{ch}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)}\left(\Delta_0^2+\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)^2\right)\theta(\hbar\omega-2\Delta_0), \quad (25)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

На единицу площади поверхности в единицу времени падает энергия

$$Q_0 = \frac{E_m^2}{2\pi}c. \quad (26)$$

Коэффициент поглощения $\alpha = Q_{abs}/Q_0$,

$$\alpha = \frac{\pi e^2}{16\hbar c}\frac{\exp(\hbar\omega/(2T))}{1+\mathrm{ch}(\hbar\omega/(2T))}\times$$
$$\times\left(1+\left(\frac{2\Delta_0}{\hbar\omega}\right)\right)\theta(\hbar\omega-2\Delta_0). \quad (27)$$

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента поглощения от частоты падающей волны при различных значениях полуширины запрещенной зоны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована модель сверхрешетки, состоящей из чередующихся полосок однослойного и двухслойного графена, параметры энергетического спектра которой можно регулировать, меняя внешнее электрическое поле, перпендикулярное поверхности образца. На основе анализа дисперсионных уравнений, полученных в [4] при помощи модели Кронига–Пенни, показано, что энергетический спектр сверхрешетки, состоящей из чередующихся широких полосок однослойного и узких полосок двухслойного графена, может быть аппоксимирован кейновской моделью. Вычислен коэффициент поглощения света при межзонных переходах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-42-343006-р_мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perenzoni M., Douglas J.P.* Physics and applications of terahertz radiation. Springer, 2014. 255 p.
2. *Nilsson J., Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R.* // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. Art. No 045405.
3. *Rozhkov A.V., Sboychakov A.O., Rakhmanov A.L., Nori F.* // Phys. Rep. 2016. V. 648. P. 1.
4. *Abdrakhmanov V.L., Badikova P.V., Zav'yalov D.V. et al.* // arXiv: 2003.05696. 2020.
5. *Dragoman D., Dragoman M., Plana R.* // J. Appl. Phys. 2010. V. 107. Art. No 044312.
6. *Dubey S., Singh V., Bhat A.K. et al.* // Nano Lett. 2013. V. 13. Art. No 3990.
7. *Forsythe C., Zhou X., Watanabe K. et al.* // Nat. Nanotechnol. 2018. V. 13. P. 566.
8. *Abdullah H.M., Zarenia M., Bahlouli H. et al.* // EPL. 2016. V. 113. Art. No 17006.
9. *Hoat D.M., Naseri M., Ponce-Perez R. et al* // Superlatt. Microstruct. 2020. V. 137. Art No 106357.
10. *Zhu L., Li L., Tao R. et al.* // Nano Lett. 2020. V 20. V. 20. No 2. Art. No 1396.
11. *Nakanishi T., Koshino M., Ando T.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. Art. No 125428.
12. *Mirzakhani M., Zarenia M., Peeters F.M.* // J. Appl. Phys. 2018. V. 123. Art. No 204301.
13. *Fan X., Huang W., Ma T. et al.* // EPL. 2015. V. 112. Art. No 58003.
14. *Kane E.O.* // J. Phys. Chem. Sol. 1957. V. 1. No 4. P. 249.
15. *Chakraborty P.K., Choudhury S., Ghatak K.P.* // Phys. B. 2007. V. 387. P. 333.
16. *Bostwick A., Ohta T., McChesney J.L. et al.* // New J. Phys. 2007. V. 9. P. 385.
17. *Zhou S.Y., Gweon G.-H., Fedorov A.V. et al.* // Nat. Mater. 2007. V. 6. P. 770.
18. *Giovannetti G., Khomyakov P.A., Brocks G. et al.* // Phys. Rev. B. 2007. V. 76. Art. No 073103.

Interband absorption of light in a superlattice consisting of alternating strips of single-layer and bilayer graphene

P. V. Badikova[a,*], D. V. Zav'yalov[a], V. I. Konchenkov[a], S. V. Kryuchkov[a, b]

[a] *Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia*

[b] *Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400066 Russia*

**E-mail: polin.badicova@gmail.com*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

A model of a superlattice consisting of alternating strips of single-layer and bilayer graphene is studied, the energy spectrum of which can be controlled by using an external electric field perpendicular to the surface of the sample. The interband absorption coefficient for such a superlattice is calculated.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 47–51

УДК 535.14

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКА ФОРМИРОВАНИЯ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ РДС-КРИСТАЛЛА: КВАНТОВЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С УЧЕТОМ ДИФРАКЦИИ

А. В. Белинский[1], Р. Сингх[1, *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия*

**E-mail: ranjit.singh@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрен процесс приготовления коррелированных многофотонных квантовых состояний с помощью кристаллов с регулярной доменной структурой и квадратичной нелинейностью. Получены пространственные и поляризационные характеристики формируемых коррелированных пучков. Рассчитаны статистические квантовые поляризационные операторы Стокса и межмодовые корреляционные коэффициенты.

DOI: 10.31857/S0367676521010051

ВВЕДЕНИЕ

Фантомные изображения [1] – один из вариантов решения проблемы изучения чувствительных к свету объектов, прямое оптическое наблюдение которых затруднено. Для формирования фантомных изображений необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другие – нет (см. рис. 1). При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Сопряженные пучки не взаимодействует с объектом, но регистрируются ПЗС-матрицами, допуская измерение пространственной корреляционной функции интенсивности между каналами.

Одним из важных доводов в пользу использования квантовых фантомных изображений является создание максимально щадящих условий освещения исследуемого объекта, когда воздействие излучения на объект (иногда необратимое) минимально [2]. Особенно это важно при облучении живых существ, например, рентгеновским излучением.

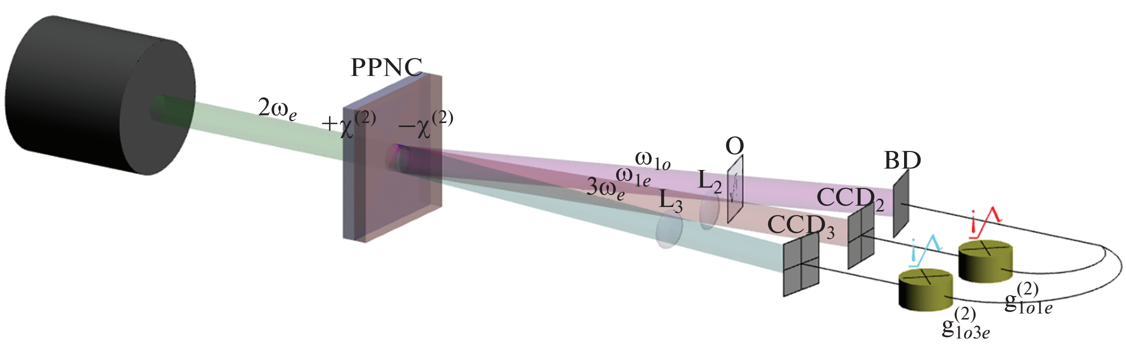

Рис. 1. Схема формирования фантомных изображений: PPNC – нелинейный кристалл с регулярно-доменной структурой (РДС); $2\omega_e$ – накачка; ω_{1o}, ω_{1e} и $3\omega_e$ – пучки коррелированных фотонов; O – объект; BD – интегрирующий детектор в объектном канале; L – оптические объективы; CCD – ПЗС матрица фотодетекторов в восстанавливающем канале; *g* – коррелятор интенсивностей (схема совпадений).

Дополнительным источником информации при изучении исследуемых объектов может быть состояние поляризации отраженного или рассеянного ими излучения. В этом случае можно говорить о поляризационно-ориентированных фантомных изображениях. Определенные успехи в этом направлении уже имеются [3]. Однако оценить качество формируемых изображений можно лишь с учетом дифракции.

Кроме того, важно знать пространственное распределение формируемых источником коррелированных пучков, поскольку неравномерное освещение объекта приведет к систематическим ошибкам его измерения, которые необходимо должны быть учтены при последующей компьютерной обработке.

Все эти причины послужили поводом к проведению исследований, приведших к написанию этой статьи. При этом мы рассмотрели весьма перспективный в отношении формирования фантомных изображений источник виде РДС кристалла [4–9].

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПУЧКОВ

Рассмотрим 4 монохроматические моды с кратными частотами, характеризуемые операторами уничтожения фотона, которые коллинеарно распространяются внутри регулярно-доменного кристалла с квадратичной нелинейностью. Операторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям [5–7]: $\left[\hat{A}_{jp}(\vec{r},z),\hat{A}^{+}_{j'p'}(\vec{r}\,',z')\right] = \delta_{jp,j'p'}(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta_{jp,j'p'}(z-z')$, $j=1,2,3$; $p,p'=o$ – обыкновенная волна; $p,p'=e$ – необыкновенная волна; $\vec{r}=(x,y)$ – поперечные координаты и z – продольное направление распространения пучков.

Одновременно происходят два процесса: параметрическая генерация субгармоник (тип II) и преобразование частоты вверх за счет суммирования частот субгармоник с частотой накачки:

$$2\omega_e=\omega_o+\omega_e,\quad \delta k_1=k_{2e}-k_{1o}-k_{1e}+m_1G_1=\Delta k_1+m_1G_1, \tag{1}$$

$$\omega_o+2\omega_e=3\omega_e,\quad \delta k_2=k_{3e}-k_{1o}-k_{2e}+m_2G_2=\Delta k_2+m_2G_2, \tag{2}$$

где k_{jp} – абсолютные значения волновых векторов соответствующих мод с частотами ω_{jp}; $j=1,2,3$; Δk_q – волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла; $q=1,2$; $m_q=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots$ – порядки квазисинхронизма; $G_q=\dfrac{2\pi}{\Lambda_q}$ – волновое число – модуль "псевдовектора" решетки доменной структуры с периодом Λ_q [5, 6, 10–13].

Система операторных уравнений этих процессов имеет следующий вид [5–7, 10, 12, 13]:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{i}{2k_{1oz}}\Delta_\perp\right)\hat{A}^{+}_{1o}(\vec{r},z)=\\ =i\gamma_1\hat{A}_{1e}(\vec{r},z)+i\gamma_2\hat{A}^{+}_{3e}(\vec{r},z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{i}{2k_{1ez}}\Delta_\perp\right)\hat{A}_{1e}(\vec{r},z)=-i\gamma_1\hat{A}^{+}_{1o}(\vec{r},z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{i}{2k_{3ez}}\Delta_\perp\right)\hat{A}^{+}_{3e}(\vec{r},z)=i\gamma_2\hat{A}^{+}_{1o}(\vec{r},z),\end{cases} \tag{3}$$

где $\Delta_\perp=\Delta_\perp(x,y)$ – поперечный лапласиан; нелинейные коэффициенты связи: γ_1, γ_2 отвечают за параметрический процесс (1) и преобразование частоты вверх (2), соответственно; Амплитуда моды накачки $2e$ является плоской неистощимой. При этом мы выбрали приближение заданной накачки, чтобы получить и проанализировать аналитическое решение.

Линейную систему операторных уравнений (3) подвергнем преобразованию Фурье по переменным x, y:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}+iq_{1o}\right)\hat{a}^{+}_{1o}(\vec{k}_{1o},z)=\\ =i\gamma_1\hat{a}_{1e}(\vec{k}_{1e},z)+i\gamma_2\hat{a}^{+}_{3e}(\vec{k}_{3e},z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z}-iq_{1e}\right)\hat{a}_{1e}(\vec{k}_{1e},z)=-i\gamma_1\hat{a}^{+}_{1o}(\vec{k}_{1o},z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z}+iq_{3e}\right)\hat{a}^{+}_{3e}(\vec{k}_{3e},z)=i\gamma_2\hat{a}^{+}_{1o}(\vec{k}_{1o},z),\end{cases} \tag{4}$$

где $q_{jp}=\dfrac{k^2_{jpx}+k^2_{jpy}}{2k_{jpz}}$, $\vec{k}_{jp}=(k_{jpx},k_{jpy})$ и $\hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp},z)=$
$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{A}_{jp}(x,y,z)\times e^{-i(k_{jpx}x+k_{jpy}y)}dxdy,$$

$$\hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp},z)=Q(\vec{k}_{jp},z)\hat{a}_{jp}(0). \tag{5}$$

Здесь $\hat{a}_{jp}=\left(\hat{a}^{+}_{1o},\hat{a}_{1e},\hat{a}^{+}_{3e}\right)^T$; T – знак транспонирования; $Q(\vec{k}_{jp},z)$ – передаточная функция в виде матрицы коэффициентов размера 3 × 3, которые рассчитаны численно.

Правильность выкладок проверяется контролем коммутационных соотношений, которые сводятся к виду:

$$Q_{11}Q^*_{11}-Q_{12}Q^*_{12}+Q_{13}Q^*_{13}=1,$$
$$-Q_{21}Q^*_{21}+Q_{22}Q^*_{22}-Q_{23}Q^*_{23}=1,$$
$$Q_{31}Q^*_{31}-Q_{32}Q^*_{32}+Q_{33}Q^*_{33}=1,$$

которые, разумеется, выполняются.

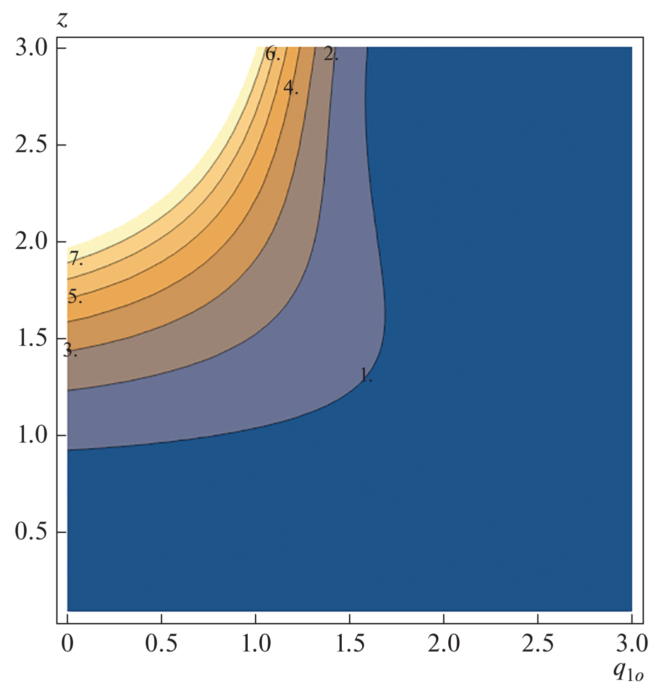

Рис. 2. Динамика значений среднего числа фотонов в моде $1o$ в случае, когда накачка моды $2e$ неистощимая, а остальные моды находятся в начальном вакуумном состоянии. Цифры над контурными линиями показывают значения N_{1o}. При этом остальные коэффициенты имеют следующие значения: $q_{1e} = 1$, $q_{3e} = 1$, $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0.5$. Поведение остальных мод $1e$ и $3e$ аналогично.

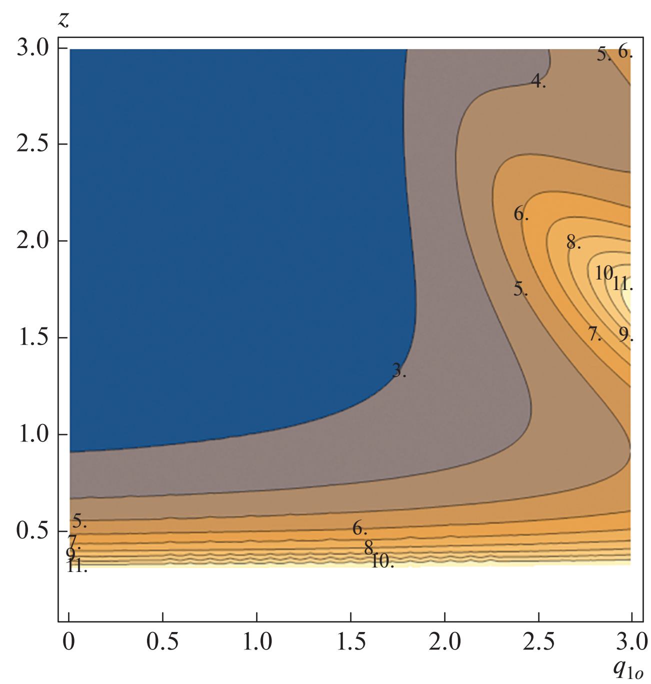

Рис. 3. Динамика значений коэффициента корреляции мод $1o$ и $1e$ для тех же параметров, что и на рис. 2. Цифры над контурными линиями показывают значения g_{1o1e}. Поведение коэффициента корреляции g_{1e3e} мод $1e$ и $3e$ аналогично, а $g_{1o3e} = 2$.

КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ МОД

Для изучения динамики среднего числа фотонов, в том числе поляризационных характеристик ортогональных мод $1o$ и $1e$, вычислим, как это принято, следующие величины:

средние числа фотонов

$$\hat{N}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = \hat{a}^{+}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \tag{6}$$

коэффициенты корреляции фотонов между модами

$$\hat{g}^{(2)}_{jp,j'p'}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = \\ = \frac{\hat{a}^{+}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}^{+}_{j'p'}\left(\vec{k}_{j'p'}, z\right)\hat{a}_{j'p'}\left(\vec{k}_{j'p'}, z\right)}{\hat{N}_{jp}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{N}_{j'p'}\left(\vec{k}_{j'p'}, z\right)}, \tag{7}$$

средние значения операторов Стокса

$$\hat{S}_{0,1}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = \hat{a}^{+}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) \pm \\ \pm \hat{a}^{+}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \tag{8}$$

$$\hat{S}_{2}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = \hat{a}^{+}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) + \\ + \hat{a}^{+}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \tag{9}$$

$$\hat{S}_{3}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = i\hat{a}^{+}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right) - \\ - i\hat{a}^{+}_{1o}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\hat{a}_{1e}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \tag{10}$$

степени поляризации взаимодействующих ортогональных мод

$$d\left(\vec{k}_{jp}, z\right) = \frac{\sqrt{\hat{S}_{1}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)^{2} + \hat{S}_{2}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)^{2} + \hat{S}_{3}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)^{2}}}{\hat{S}_{0}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)}. \tag{11}$$

Усреднение операторов (6)–(11) будем производить для вакуумного начального состояния мод $1o$, $1e$ и $3e$. Результаты представлены на рис. 2–4.

Операторы (8)–(10) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[\hat{S}_{0}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \hat{S}_{1,2,3}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\right] = 0,$$
$$\left[\hat{S}_{1,2,3}\left(\vec{k}_{jp}, z\right), \hat{S}_{2,3,1}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\right] = 2i\hat{S}_{3,1,2}\left(\vec{k}_{jp}, z\right).$$

Соотношение неопределенности для операторов Стокса имеет вид:

$$\left\langle \Delta S^{2}_{j}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\right\rangle\left\langle \Delta S^{2}_{k}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\right\rangle \geq \left|S_{l}\left(\vec{k}_{jp}, z\right)\right|^{2}, \\ (j \neq k \neq l).$$

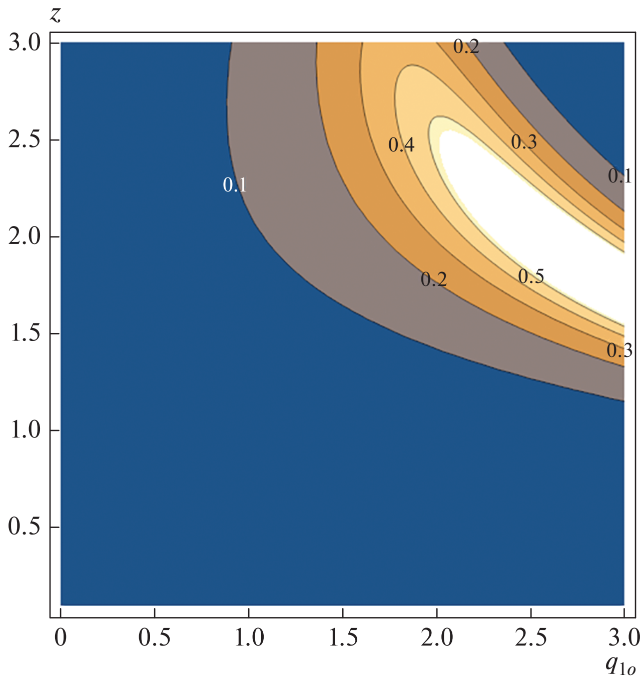

Рис. 4. Динамика значений степени поляризации между модами $1o$ и $1e$ для тех же исходных параметров, что и на рис. 2, 3. Цифры над контурными линиями показывают значения d.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Результаты расчетов приведены на рис. 2–4. Они необходимы для оценки пригодности и перспектив использования РДС-кристаллов в качестве источников коррелированного оптического излучения при формировании фантомных изображений. Полученные значения корреляционных коэффициентов 2-го порядка между фотонами ортогональных поляризационных мод $1o$ и $1e$ не только дают потенциальную возможность успешно сформировать изображение, но также позволяют изучить и восстановить степень поляризации $d\left(\vec{k}_{jp}, z\right)$ поступающего от объекта света (см. рис. 4). Это несомненно открывает новые перспективы построения и оптимизации схем формирования фантомных изображений.

Кроме того, моделирование пространственной конфигурации коррелированных световых пучков дает аргументированные оценки качества формируемых изображений, их пространственного разрешения и неоднородности освещения, что также важно с точки зрения точности измерений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00598а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колобов М.И., Чиркин А.С.* Квантовое изображение М.: Физматлит, 2009.
2. *Basset M.G., Setzpfandt F., Steinlechner F. et al.* // Laser Photon. Rev. 2019. V. 13. No 10. Art. No 1900097.
3. *Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S.* // Quant. Inf. Proc. 2019. V. 18. Art. No 80.
4. *Chirkin A.S., Gostev P.P., Agapov D.P. et al.* // Laser Phys. Lett. 2018. V. 15. No 11. Art. No 115404.
5. *Chirkin A.S., Makeev E.V.* // J. Mod. Opt. 2006. V. 53. No 5–6. P. 821.
6. *Chirkin A.S., Makeev E.V.* // J. Opt. B. 2005. V. 7. S500.
7. *Morozov E.Yu., Chirkin A.S.* // J. Opt. A. 2003. V. 5. P. 233.
8. *Родионов А.В., Чиркин А.С.* // Опт. и спектроск. 2004. Т. 96. № 5. С. 790; *Rodionov A.V., Chirkin A.S.* // Opt. Spectrosc. 2004. V. 96. No 5. P. 721.
9. *Чиркин А.С.* // Квант. электрон. 2000. Т. 30. № 10. С. 847; *Chirkin A.S.* // Quant. Electron. 2000. V. 30. No 10. P. 847.
10. *Dmitriev V.G., Singh R.* // Int. J. Quant. Inform. 2003. V. 1. No 3. P. 403.
11. *Белинский А.В., Сингх Р.* // Квант. электрон. 2018. Т. 48. № 7. С. 611; *Belinsky A.V., Singh R.* // Quant. Electron. 2018. V. 48. No 7. P. 611.
12. *Белинский А.В., Сингх Р.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 3. С. 382.
13. *Белинский А.В., Сингх Р.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 137; *Belinsky A.V., Singh R.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 1. P. 107.

Mathematical modeling of the source of formation of ghost images in the form of a PPNC crystal: quantum polarization characteristics considering diffraction

A. V. Belinksy[a], R. Singh[a,] *

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: ranjit.singh@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The process of generation of correlated multiphoton quantum states using periodically poled nonlinear crystals having quadratic nonlinearity is considered. The spatial and polarization characteristics of the generated correlated beams are studied. Statistical polarization Stokes operators and intermode correlation coefficients are calculated.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 52–58

УДК 533.9

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ МИКРОПОЛЯ ПО СПЕКТРАМ ПЛОТНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2021 г. А. А. Белов[1, 2, *], Н. Н. Калиткин[3]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

[2]Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет дружбы народов", Москва, Россия

[3]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: aa.belov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Оптические свойства плотной плазмы сильно зависят от внутриплазменных электрических полей (так называемое микрополе). Дан критический обзор существующих теоретических моделей плазменного микрополя. Проведена верификация важнейших моделей по экспериментам, в которых плотная плазма создавалась мощным лазерным излучением. Показано, что наилучшее теоретическое обоснование и наилучшее согласие с экспериментами имеет модель квазинезависимых частиц QUIP.

DOI: 10.31857/S0367676521010063

ВВЕДЕНИЕ

Плотная плазма используется в очень многих технических и экспериментальных конструкциях: сильноточные электрические разряды, мощные газоразрядные лазеры, магнитокумулятивные генераторы, термоядерные мишени и т.д. Расчет таких конструкций требует знания оптических свойств плазмы. На эти свойства сильно влияет так называемое микрополе – это электрическое поле внутри плазмы, порожденное хаотическим тепловым движением ионов и свободных электронов. Это поле флуктуирует во времени и пространстве.

До сих пор для кулоновских систем не найдено математически строгих методов исследования. Существуют лишь более или менее удачные модели. Уже 100 лет предпринимаются попытки построить такие модели для количественного описания свойств микрополя.

В данной работе приведен критический анализ существующих моделей микрополя и показано, что почти все они неправильно описывают "хвосты" функции распределения и не могут предсказать количество экспериментально наблюдаемых спектральных линий.

Ранее авторами была предложена модель QUIP (QUasi-Independent Particles), полученная из первых принципов. Эта модель правильно описывает "хвосты" функции распределения и даже пространственную неоднородность микрополя. Проведена апробация модели путем сравнения с экспериментами по спектрам излучения сверхплотной лазерной плазмы.

Отмечено, что сравнение следует проводить по числу наблюдаемых линий в спектральных сериях, поскольку именно это число сильно зависит от принятой модели. Выбраны эксперименты, наиболее подходящие для такой проверки. Это эксперименты по свечению плазмы Al или Ar, в которых видны лаймановские серии водородо- и гелиеподобных ионов. Показано, что модель QUIP описывает эти эксперименты лучше, чем другие известные модели.

МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯ

Подробный обзор существующих моделей микрополя представлен в работе [1]. Поэтому мы не будем подробно описывать сами известные модели и ограничимся только их критическим разбором.

Метод Фурье-образа

Изучение микрополя начал Хольцмарк [2]. Он использовал интегральное преобразование Фурье. Поскольку для кулоновских систем точных методов не разработано, Хольцмарк строил Фурье-образ на основе модельных соображений, и по этому приближенному Фурье-образу обратным интегральным преобразованием Фурье восстанавливал функцию распределения. Она получалась в виде интеграла, не берущегося в элементарных функциях. Распределение Хольцмарка приведено на рис. 1, где для напряженности E выбран характерный масштаб $\langle Z\rangle / R^2$; здесь $\langle Z\rangle$ – усредненный заряд всех сортов частиц, R – радиус сферизованной атомной ячейки. Напомним, что распределение Хольцмарка соответствует пространственно однородному микрополю.

В последующие годы было опубликовано много работ по усовершенствованию модели Хольцмарка. В подавляющем большинстве из них также использовался интеграл Фурье, но с другими приближениями при построении Фурье-образа. Перечислим эти модели, отсылая за подробностями к оригинальным работам или обзору [2].

В модели Эккера и Мюллера [3, 4] вместо кулоновского потенциала использовался дебаевский. Беренгер и Мозер [5, 6] использовали цепочку уравнений Боголюбова, дебаевский потенциал и метод кластерного разложения. Хупер [7–9] развивал сходные подходы, но радиус дебаевской экранировки использовал как подгоночный параметр. Иглесиас усложнил модель Хупера, вводя факторы с дополнительными свободными параметрами, подгоняемыми под экспериментальные данные [10–13]. Модели такого же типа развивал Голосной [14, 15]. Неоднородность микрополя в рамках того же круга идей учитывалась в работах Чандрасекара и фон Ноймана [16–18], Кудрина [19], Шолина [20], Демуры [21–28].

Напомним, что перечисленные выше работы основаны на интегральном преобразовании Фурье. Однако в 1960-е годы Тихонов и его ученики показали [29], что интегральное преобразование Фурье является некорректной математической операцией. Это проявляется в том, что незначительное искажение Фурье-образа может привести к большим искажениям распределения, восстановленного обратным преобразованием Фурье. Поэтому результат оказывается сильно чувствительным к модельным предположениям, использованным при построении Фурье-образа. Покажем, что все описанные модели действительно приводят к серьезному физическому дефекту.

В самом деле, у всех этих моделей распределение $p(E)$ при $E \to \infty$ имеет медленно убывающую

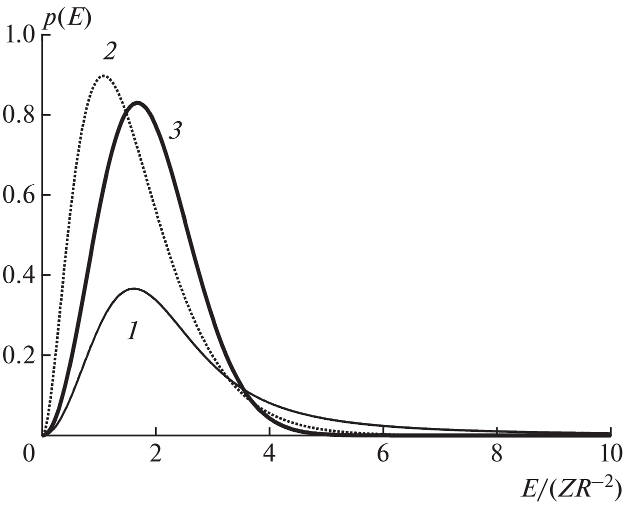

Рис. 1. Функции распределения однородного микрополя; *1* – модель Хольцмарка, *2* – модель SHO, *3* – модель QUIP.

асимптотику $p(E) \sim E^{-5/2}$ [1]. Но электрическое поле напряженности E имеет плотность энергии $E^2/(8\pi)$.

Поэтому усредненная по распределению плотность энергии

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty E^2 p(E)dE \tag{1}$$

оказывается бесконечной: интеграл расходится на верхнем пределе! Поскольку физически энергия поля и вообще любые моменты от функции распределения не могут быть бесконечными, это указывает на неадекватность степенного хвоста функции распределения. Данное противоречие не отмечено в мировой литературе. Поэтому указанными распределениями можно пользоваться лишь в районе максимума $p(E)$ и для тех задач, в которых "хвосты" распределения несущественны.

В лазерной плазме типичные условия таковы, что основной вклад в ширину линии дает именно микрополе. Оценки показывают, что в экспериментах (см., например, [30–32]) доплеровское уширение составляет ~1 эВ. В то же время грубая оценка микрополевого уширения дает 15–20 эВ, что по порядку величины согласуется с экспериментом.

Отсюда следует, что асимптотика распределения $p(E)$ важна еще по одной причине: она отвечает за крылья спектральных линий. Ширина крыльев линии играет важную роль при вычислении росселандова среднего от пробега фотонов. А эта средняя величина является характеристикой прозрачности плазмы для излучения. Именно росселандово среднее отвечает, например, за характерное время транспортировки энергии от ядра звезды к поверхности.

Если “хвост” распределения затухает медленно, то крылья линий должны быть широкими. Однако в эксперименте этого не наблюдается: крылья затухают очень быстро. На это же указывает сравнение [33] экспериментов с теориями в работах [34–37]. В них, в частности, отмечено, что расчет прозрачности плазмы не согласуется с экспериментальным данными.

Несколько особняком стоят другие методы, упомянутые в обзоре [1]. Рассмотрим их.

Метод коллективных координат

На основе метода коллективных координат [38, 39] была построена модель простых гармонических осцилляторов (SHO) [40, 41]. Эта модель выводилась для плотной горячей плазмы (например, внутри звезд). В ней функция распределения гауссова, так что плотность энергии является конечной. Это распределение приведено на рис. 1.

При применении этой модели возникают следующие трудности. Во-первых, положение максимума распределения сильно зависит от T и быстро сдвигается в сторону больших полей при уменьшении T. В то же время в большинстве других моделей положение максимума зависит от T слабо или не зависит вовсе. Аналогично, при T модель SHO также расходится с экспериментом и не согласуется с другими моделями.

По-видимому, для модели SHO должна существовать какая-то граница применимости по температуре и плотности. Однако в публикациях мы не нашли такого ограничения.

Во-вторых, при описании различных свойств плазмы важно обеспечить самосогласованность и непротиворечивость. Иначе в расчетах возможно появление нефизичных артефактов. В частности, чтобы обеспечить непротиворечивость термодинамики и оптики, нужно учитывать энергию микрополя в термодинамическом потенциале свободной энергии. Это слагаемое можно рассматривать как поправку на неидеальность для модели Саха. Однако такая поправка на основе модели SHO быстро убывает при уменьшении температуры (то есть увеличении неидеальности плазмы) [42]. Это также не согласуется с другими моделями.

Кроме того, модель SHO основана на использовании пробного заряда. Положить его равным нулю нельзя, иначе масштаб микрополя оказывается бесконечным. Поэтому модель SHO не может описать микрополе в нейтральной точке. Это также является недостатком модели SHO.

Метод функционала плотности

Делались попытки применять к проблеме микрополя метод функционала плотности [43–52]. Этот метод считают построенным из первых принципов. Его основой является теорема Кона и Хёнберга о том, что существует некоторый функционал от электронной плотности, который достигает своего минимального значения, если в него подставить точную электронную плотность основного состояния. Однако неизвестно, как найти данный функционал. Поэтому на практике вместо функционала от электронной плотности используют функционал от комбинации одноэлектронных волновых функций. Для такого функционала указанная теорема не имеет силы. Вдобавок, в модель обычно вводят подгоночные параметры. Поэтому метод фактически перестает быть первопринципным. В результате распределения микрополя, построенные в работах [43, 44], имеют степенные асимптотики [1], т.е. также приводят к бесконечной плотности энергии поля. Поэтому к методу функционала плотности следует относиться с осторожностью.

Метод Монте-Карло

Первопринципными являются методы Монте-Карло, в том числе, методы молекулярной динамики [53–61]. По ним выполняют расчеты, которые используют для апробации описанных выше моделей. Однако практическая реализация этих методов имеет ряд слабых мест.

Во-первых, используется число частиц ~1000. Они занимают объем ~10 межатомных расстояний. Влияние частиц за пределами указанного объема учитывают с помощью некоторых граничных условий (чаще всего периодических). Для незаряженных частиц с быстро убывающим потенциалом взаимодействия это может быть удовлетворительным. Но для дальнодействующего кулоновского взаимодействия чувствительность результатов к выбору граничных условий оказывается большой.

Во-вторых, электроны имеют гораздо меньшую массу и гораздо большие скорости, чем ионы. Поэтому для расчета их динамики приходится выбирать очень малый шаг интегрирования по времени. Сама система дифференциальных уравнений динамики является плохо обусловленной, то есть фактически некорректной [29]. Результат вычислений сильно зависит от начальных положений и скоростей частиц. При этом, чем дольше ведется расчет, тем сильнее сказывается этот эффект.

Поэтому функция распределения вычисляется с невысокой точностью. Ее можно удовлетворительно определить в районе максимума, но практически невозможно найти асимптотики, на которые следует обращать особое внимание.

Пробный заряд

Во многих моделях (например, модели SHO, APEX и ряд других) вводится в рассмотрение пробный заряд Z_0, расположенный в точке наблюдения. В этом случае другие заряды уже не могут быть распределены равномерно в пространстве и должны удовлетворять распределению Больцмана. Это исключает сколь угодно сильные сближения ионов. Вклад ионов в микрополе в Z раз больше, чем вклад электронов. Поэтому учет больцмановской статистики для ионов уменьшает вероятность больших микрополей. Например, введение пробного заряда в модели SHO делает функцию распределения микрополя гауссовой и обеспечивает конечность всех моментов распределения. Этот вывод подтверждается расчетами методом Монте-Карло [62]. Поэтому представляется трудно объяснимым, что в моделях типа APEX, использующих пробный заряд, асимптотика функции распределения все равно убывает только по степенному закону.

Для электронов нужно учитывать квантовый эффект – дебройлевскую длину волны электрона. Поэтому электроны могут сближаться с ионами лишь на расстояния порядка дебройлевской длины волны. Это также уменьшает вероятность больших микрополей.

Таким образом, учет неоднородности распределения зарядов по пространству является физически адекватным. Введение пробного заряда – это простейший способ учесть такую неоднородность.

Однако этот способ имеет недостаток. Для оптических приложений нужно знать микрополе в окрестности именно иона, то есть тяжелой частицы. Этот заряд находится в хаотическом тепловом движении, причем его скорость примерно такова же, как у других тяжелых частиц. Поэтому пренебрегать его движением нельзя. Соответственно, система отсчета, связанная с таким зарядом, является неинерциальной. Введение неинерциальной системы координат крайне усложнило бы модель и затруднило получение простой реализации. В существующих моделях подобные системы координат не вводятся.

Кроме того, положение границ атомной ячейки определяется мгновенным положением зарядов. Поэтому при движении пробного заряда постоянно менялись бы границы его атомной ячейки. Это также сильно усложнило бы модель.

Таким образом, неясно, как можно корректно сформулировать модель пробного заряда.

Критика известных моделей

Подводя итог анализу известных моделей, сформулируем их основные недостатки.

Во-первых, самый важный недостаток большинства известных моделей – бесконечный второй момент функции распределения (то есть объемная плотность энергии микрополя). Это столь же нефизично, как нарушение закона сохранения энергии.

Во-вторых, медленное затухание “хвоста” функции распределения приводит к появлению широких крыльев у спектральных линий, от которых сильно зависит оптическая прозрачность плазмы. В эксперименте, напротив, крылья линий настолько быстро затухают, что практически незаметны. В ряде работ модели микрополя верифицируются с помощью описания контуров линии. Однако при этом описывается не весь контур, а только центральная часть линии. Кроме того, такая интерпретация крайне сложна, так как она зависит от температуры и плотности мишеней, которые экспериментально не измеряются. Более подробный разбор этого будет сделан в разделе, посвященном описанию экспериментов.

Точность определения температуры и плотности плазмы по ее спектру сильно зависит от принятой модели микрополя. В существующих методах анализа спектров проводят индивидуальную подгонку каждой линии в спектральной серии. При этом описание каждой линии производится с помощью своей температуры и плотности, и эти температуры и плотности для разных линий между собой не согласуются. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в разделе, посвященном описанию экспериментов.

В-третьих, далее показано, что существующие методы диагностики не согласуются с расчетами ионного состава и, следовательно, с термодинамикой плазмы. Это еще один принципиальный дефект существующих моделей.

Модель QUIP

Перечисленные недостатки удается преодолеть в модели QUIP – Quasi-Independent Particles. Для однородного микрополя этот подход был предложен Калиткиным и Козлитиным [63–65] (эти работы не рассматривались в обзоре [1]). В этом подходе использовался первый принцип – закон больших чисел. Из него следует, что компоненты напряженности микрополя имеют гауссово распределение, а длина вектора напряженности микрополя – максвелловское распределение.

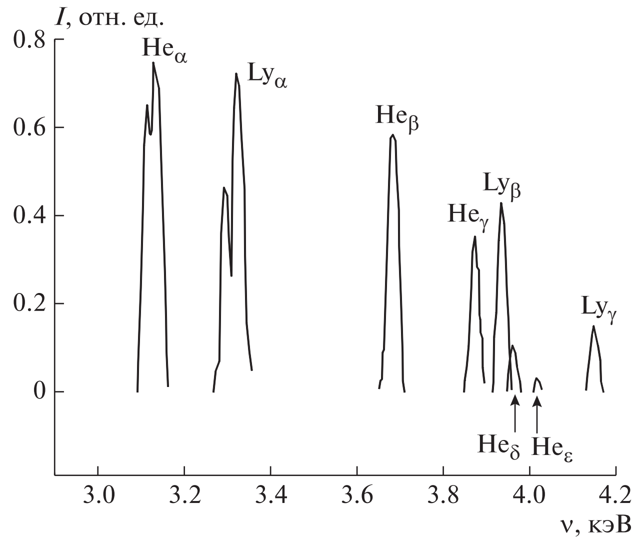

Рис. 2. Спектр Ar^{+16} в эксперименте [31].

Распределение модуля вектора напряженности однородного микрополя приведено на рис. 1. Положение максимума близко к таковому у распределения Хольцмарка. Однако функция распределения при $E \to \infty$ убывает не по степенному закону, а по экспоненциальному, то есть несоизмеримо быстрее. Поэтому все моменты указанных распределений, включая плотность энергии поля, становятся конечными.

Отметим, что в модели QUIP все формулы расчета распределений очень просты, так что она удобна для использования. Все остальные современные модели требуют громоздких численных расчетов, и только авторы этих моделей фактически могут ими пользоваться. Последнее отмечалось в обзоре [1].

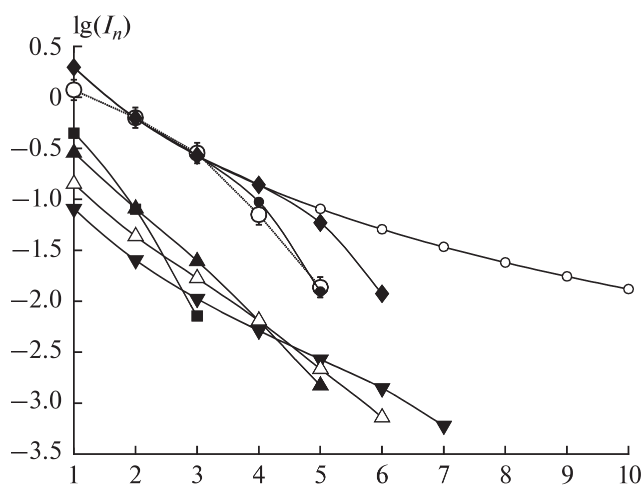

Рис. 3. Относительные интенсивности линий спектра Ar^{+16}; пунктир – эксперимент [31]; сплошные линии – модели: ● – QUIP, ◆ – SHO, ■ – Хольцмарк, ▼ – модель [68], ▲ – модель [11], △ – модели [12, 67], ○ – расчет без учета микрополя.

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Спектры излучения сверхплотной лазерной плазмы получены в уникальных экспериментах [30–32] и ряде других. Они позволяют провести верификацию моделей микрополя. Наиболее представителен эксперимент [31] с плазмой Ar + + Kr 50/50. Полученный спектр приведен на рис. 2. На нем видны 3 линии лаймановской серии водородоподобного иона Ar^{+17} и вся лаймановская серия гелиеподобного иона Ar^{+16}. В последней серии интенсивность пятой линии мала, а последующие линии незаметны. Расчет показал, что серия Ar^{+16} светит при температуре $T \sim 400$ эВ, $\rho \sim 0.2$ г/см^3.

На рис. 3 показаны относительные интенсивности различных линий этой серии как экспериментальные (площади контуров линий на рис. 2), так и рассчитанные по разным моделям в водородоподобном приближении.

Ни одна модель не может описать интенсивность α-линии гелиеподобного иона Ar^{+16}, поскольку к ней не применимо водородоподобное приближение. Для остальных линий серии оно применимо достаточно хорошо. Но эта причина не имеет отношения к моделям микрополя.

В эксперименте наблюдается 5 линий. Модель QUIP правильно описывает наблюдаемое число линий и интенсивности линий β–ε. По модели

SHO должны наблюдаться 6 линий. В модели Хольцмарка видны только 3 линии.

Разные варианты модели APEX не согласуются между собой. Расчет по модели Хупера [67] практически совпадает с вариантом модели APEX [12], поэтому обе модели показаны одной кривой. Эти модели предсказывают на одну линию больше, чем в эксперименте. Модель [68] предсказывает значительно большее число линий, чем наблюдается в эксперименте. Модель [11] предсказывает правильное число наблюдаемых линий, однако интенсивность линий γ и δ несколько слабее по сравнению с интенсивностью β-линии, чем в эксперименте. Таким образом, наилучшее согласие с экспериментом обеспечивает модель QUIP.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Demura A.V.* // Int. J. Spectrosc. 2010. V. 2010. Art. ID 671073.
2. *Holtsmark J.* // Ann. Phys. 1919. V. 58. P. 577.
3. *Ecker G.* // Z. Phys. 1957. V. 148. No 5. P. 593.
4. *Ecker G., Muller K.G.* // Z. Phys. 1958. V. 153. No 3. P. 317.
5. *Baranger M., Mozer B.* // Phys. Rev. 1959. V. 115. No 3. P. 521.
6. *Mozer B., Baranger M.* // Phys. Rev. 1960. V. 118. No 3. P. 626.
7. *Hooper C.F., Lineberger W.C., Bacon F.M.* // Phys. Rev. 1966. V. 141. No 1. P. 165.
8. *Hooper C.F. Jr.* // Phys. Rev. 1968. V. 165. No 1. P. 215.
9. *Hooper C.F. Jr.* // Phys. Rev. 1968. V. 169. No 1. P. 193.
10. *Iglesias C.A., Lebowitz J.L., MacGowan D.* // Phys. Rev. A. 1983. V. 28. No 3. P. 1667.
11. *Iglesias C.A., DeWitt H.E., Lebowitz J.T. et al.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 1698.
12. *Dufty J.W., Boercker D.B., Iglesias C.A.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. No 3. P. 1681.
13. *Iglesias C.A., Rogers F.J., Shepherd R. et al.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2000. V. 65. No 1–3. P. 303.
14. *Голосной И.О.* // Мат. моделир. 1991. Т. 3. № 9. С. 49.
15. *Голосной И.О.* // Мат. моделир. 1992. Т. 4. № 6. С. 3.
16. *Chandrasekhar S., von Neuman J.* // Astrophys. J. 1942. V. 95. P. 489.
17. *Chandrasekhar S., von Neuman J.* // Astrophys. J. 1943. V. 97. P. 1.
18. *Chandrasekhar S.* // Rev. Mod. Phys. 1943. V. 15. No 1. P. 1.
19. *Кудрин Л.П., Шолин Г.В.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 342.
20. *Шолин Г.В.* // Опт. и спектроск. 1969. Т. 26. № 4. P. 489; *Sholin G.V.* // Opt. Spectrosc. USSR. 1969. V. 26. P. 275.
21. *Demura A.V., Sholin G.V.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1975. V. 15. P. 881.
22. *Демура А.В.* Некоторые вопросы теории уширения спектральных линий водорода в плазме. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва: Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова, 1976. 176 с.
23. *Демура А.В., Плешаков В.В., Шолин Г.В.* Атлас детальных штарковских профилей спектральных линий водорода в плотной плазме. Препринт IAE-5349/6. М.: НИЦ “Курчатовский институт”, 1991. 97 с.
24. *Demura A.V., Stehle C.* // AIP Conf. Proc. 1995. V. 328. P. 177.
25. *Demura A.V., Gilles D., Stehle C.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1995. V. 54. P. 123.
26. *Demura A.V., Helbig V., Nikolic D.* // AIP Conf. Proc. 2002. V. 645. P. 318.
27. *Djurovic S., Nikolic D., Savic I. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. Art. No 036407.
28. *Demura A.V., Demchenko G.V., Nikolic D.* // Eur. Phys. J. D. 2008. V. 46. P. 111.
29. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
30. *Kilkenny J.D., Lee R.W., Key M.H. et al.* // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. No 6. Art. No 2746.
31. *Hooper C.F., Jr., Mancini R.C., Kilcrease D.P. et al.* // SPIE. High Inten. Laser-Matter Interact. 1988. V. 913. P. 129.
32. *Burris-Mog T.J., Mancini R.C., Bailey J.E. et al.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2006. V. 99. P. 120.
33. *Perry T.S., Heeter R.F., Opachich Y.P. et al.* // HEDP. 2020. V. 35. Art. No 100728.
34. *Bailey J.E., Rochau G.A., Iglesias C.A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. Art. No 265002.
35. *Bailey J.E., Nagayama T., Loisel G.P. et al.* // Nature. 2015. V. 517. P. 56.
36. *Heeter R.F., Bailey J.E., Craxton R.S. et al.* // J. Plasma Phys. 2017. V. 83. Art. No 595830103.
37. *Perry T.S., Heeter R.F., Opachich Y.P. et al.* // High Energ. Dens. Phys. 2017. V. 23. P. 223.
38. *Bohm D., Pines D.* // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 338.
39. *Bohm D., Pines D.* // Phys. Rev. 1953. V. 92. No 3. P. 609.
40. *Broyles A.A.* // Phys. Rev. 1955. V. 100. No 4. P. 1181.
41. *Broyles A.A.* // Z. Phys. 1958. V. 151. P. 187.
42. *Kalitkin N.N., Lutskiy K.I.* // Math. Models Comput. Simul. 2015. V. 7. P. 518.
43. *Dharma-Wardana M.W.C., Perrot F.* // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. No 5. P. 3303.
44. *Perrot F., Dharma-Wardana M.W.C.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 41. No 6. P. 3281.
45. *Hohenberg P., Kohn W.* // Phys. Rev. B. 1964. V. 136. No 3. Art. No B864.
46. *Kohn W., Sham L.J.* // Phys. Rev. A. 1965. V. 140. No 4. Art. No A1133.
47. *Perrot F., Dharma-Wardana M.W.C.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. No 5. P. 2619.
48. *Perrot F., Dharma-Wardana M.W.C.* // Phys. Rev. A. 1085. V. 31. No 2. P. 970.
49. *Chihara J.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. No 2. Art. No 1247.
50. *Massacrier G.* // J. Quant. Spectros. Radiat. Transf. 1994. V. 51. No 1–2. P. 221.
51. *Singh R., Deb B.M.* // Phys. Rep. 1999. V. 311. No 2. P. 47.
52. *Kohn W.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. No 5. P. 1253.

53. *Gilles D., Angelie A.* // Ann. Phys. Paris. 1986. V. 11. No 3. P. 157.
54. *Caillol J.M., Gilles D.* // J. Stat. Phys. 2000. V. 100. No 5–6. P. 933.
55. *Gilles D.* Calcul de la repartition statistique du microchamp electrique dans les plasmas. Internal CEA-Report, 1997.
56. *Gilles D.* Methode de Monte-Carlo en mecanique statistique appliquee a la physique des plasmas. Lecture Notes. Orsay: Universite Paris XI, 1997.
57. *Potekhin A.Y., Chabrier G., Gilles D.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. No 3. Art. No 036412.
58. *Brush S.G., Sahlin H.L., Teller E.* // J. Chem. Phys. 1966. V. 45. No 6. P. 2102.
59. *Замалин В.М., Норман Г.Э., Филинов В.С.* Метод Монте-Карло в статистической термодинамике. М.: Наука, 1977.
60. *Acioli P.H.* // J. Mol. Struct. 1997. V. 394. No 2–3. P. 75.
61. *Камилов И.К., Муртазаев А.К., Алиев Х.К.* // УФН. 1999. Т. 169. № 7. С. 795.
62. *Kozlitin I.A.* // Math. Mod Comput. Simul. 2011. V. 3. P. 58.
63. *Калиткин Н.Н., Козлитин И.А.* // ДАН. 2006. Т. 411. № 1. С. 36, *Kalitkin N.N., Kozlitin I.A.* // Dokl. Phys. 2006. V. 51. No 11. P. 579.
64. *Калиткин Н.Н., Козлитин И.А.* // ДАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 614, *Kalitkin N.N., Kozlitin I.A.* // Dokl. Phys. 2008. V. 53. No 2. P. 61.
65. *Kalitkin N.N. Kozlitin I.A.* // Plasma Phys. Rep. 2011. V. 37. P. 191.
66. *Kalitkin N.N., Kozlitin I.A.* // Ann. Phys. 2018. V. 396. P. 468.
67. *Tighe R., Hooper C.J.* // J. Phys. Rev. A. 1977. V. 15. P. 1773.
68. *Iglesias C.A., Lebowitz J.* // J. Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 2001.

Verification of microfield models on spectra of dense laser plasma

A. A. Belov[a, b, *], **N. N. Kalitkin**[c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*
[b] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 117198 Russia*
[c] *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 125047 Russia*
**E-mail: aa.belov@physics.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

Optical properties of dense plasma depend on electric fields inside the plasma (the so-called microfield). We present a critical survey on existing theoretical models of plasma microfield. We perform verification of the most significant models on experiments in which dense plasma was created by powerful laser radiation. We show that the quasi-independent particle model (QUIP) has the best theoretical justification and agreement with experiment.

УДК 537.6.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА ОБЪЕКТАХ С КОНИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

© 2021 г. А. Н. Боголюбов[1], И. Е. Могилевский[1, *], В. В. Ровенко[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: imogilevsky@mail.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрена трехмерная задача электромагнитной дифракции на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку. Построено асимптотическое представление электромагнитного поля в окрестности конической точки, в котором решение представлено в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

DOI: 10.31857/S0367676521010075

В настоящее время весьма актуальными являются задачи скалярной и электромагнитной дифракции на сложных структурах при наличии ребер и конических точек на их границах. В частности, результат их решения может быть использован при решении различных задач аэродинамики и теории дифракции, например, задач о прохождении луча в маскирующей оболочке [1–5]. Известно, что наличие ребер, кромок и конических точек приводит к появлениям сингулярностей у поля в их окрестностях [6, 7], что существенно усложняет применение численных методов для исследования подобных задач. Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [8], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [7].

Рассмотрим трехмерную задачу дифракции электромагнитной волны на ограниченной области Ω, имеющей коническую точку (рис. 1):

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\bar{H} = -ik\bar{E} + \frac{4\pi}{c}\bar{j}, \quad \operatorname{supp} j \subset D_0 \subset \mathbb{R}^3/\Omega, \\ \operatorname{rot}\bar{E} = ik\bar{H}, \quad \operatorname{div}\bar{H} = 0, \quad \operatorname{div}\bar{E} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left.(\bar{H},\bar{n})\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.[\bar{E},\bar{n}]\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\bar{n}$ — вектор нормали к конической поверхности.

Условие Мейкснера на вершине конуса запишем в виде: $\bar{E}, \bar{H} \in \left(L_2^{loc}\right)^3$. Для детального исследования поля в окрестности конической точки данная задача сначала рассматривается в бесконечном конусе. В дальнейшем использование срезающей функции позволит исходную задачу дифракции свести к рассматриваемой задаче. Вводится сферическая система координат с центром в конической точке. Данный подход позволяет существенно упростить граничные условия, что дает возможность более детально исследовать свойства искомого решения. Основное уравнение задачи (1) преобразуется с использованием представления:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\bar{e}_r U_r) + ik\operatorname{rot}(\bar{e}_r V_r), \\ \bar{H} &= -ik\operatorname{rot}(\bar{e}_r U_r) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\bar{e}_r V_r),\end{aligned}$$

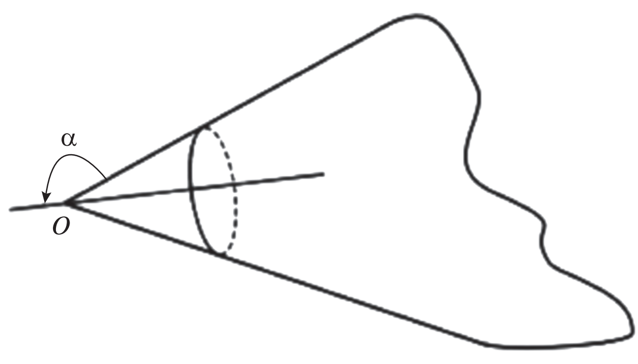

Рис. 1. Коническая поверхность.

где U и V – электрический и магнитный потенциалы Дебая, для которых получаем следующие задачи [9], оставив в левой части оператор Лапласа, а правую часть обозначив как функции $f_{1,2}(M)$:

$$\Delta U = f_1(M),\ \ U\big|_{\theta=\alpha} = 0, \tag{3}$$

$$\Delta V = f_2(M),\ \ \frac{\partial V}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\alpha} = 0. \tag{4}$$

Сначала найдем асимптотику для задачи (3) с условиями Дирихле. Следуя результатам В.А. Кондратьева [8], введем пространство функций V_γ^l с нормой:

$$\|u\|^2_{V_\gamma^l} = \sum_{s=0}^{l} \int_K r^{2\gamma-2(l-s)} \left|\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|^2 d\breve{V},$$

где K – внешняя часть бесконечного конуса, $l \geq 0$ – целое, γ – вещественное число.

Далее предполагается, что правая часть $f(M) \in V_\gamma^l(K)$. Проведем замену переменной $\tau = \ln\frac{1}{r} \Rightarrow \tau \in (-\infty;+\infty)$. После умножения на $e^{-2\tau}$ уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial U}{\partial \tau} + \Delta_{\theta,\varphi} U = f_1(\tau,\theta,\varphi)\, e^{-2\tau},$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ – угловая часть оператора Лапласа. Сделаем преобразование Фурье по τ:

$$\hat{F}(\lambda,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau,\theta,\varphi)\, e^{-i\lambda\tau} d\tau,$$

$$F(\tau,\theta,\varphi) = f_1(\tau,\theta,\varphi)\, e^{-2\tau},$$

$$\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau,\theta,\varphi)\, e^{-i\lambda\tau} d\tau.$$

Здесь $\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)$ и $\hat{F}(\lambda,\theta,\varphi)$ – образы функции U и правой части уравнения соответственно. Следовательно, задача (3) примет вид:

$$\begin{gathered} -\lambda^2 \hat{U} + i\lambda \hat{U} + \Delta_{\theta,\varphi}\hat{U} = \hat{F}(\lambda,\theta,\varphi),\ \ \hat{U}\big|_{\theta=\alpha} = 0, \\ \Delta_{\theta,\varphi}\hat{U} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \varphi^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Из свойств преобразования Фурье для функций $\hat{F}(\lambda,\theta,\varphi)$ следует оценка:

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{l} \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |\lambda|^{2k}\ \hat{F}(\lambda,\theta,\varphi)^2_{H^{l-k}(0,\alpha)\times(0,2\pi)}\, d\lambda \leq C f^2_{1_{V_\gamma^l(K)}}, \\ h = l + \frac{1}{2} - \gamma. \end{gathered} \tag{6}$$

Решение задачи (5) ищется в виде ряда по сферическим функциям $P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$:

$$\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) = \sum_{n,m} \hat{U}_{nm}(\lambda)\, P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \tag{7}$$

$$\hat{F}(\lambda,\theta,\varphi) = \sum_{n,m} \hat{F}_{nm}(\lambda)\, P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \tag{8}$$

Здесь $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, $n = n_m$, а n_m определяется из соотношений $P_{n_m}^{(m)}(\cos\alpha) = 0$ [10]. Более подробно рассмотрим вопрос существования решения этого уравнения после нахождения асимптотики.

Подставляя (7) и (8) в (5) получим:

$$\left(-\lambda^2 + i\lambda\right)\hat{U}_{nm}(\lambda) + n_m(n_m+1)\hat{U}_{nm}(\lambda) = \hat{F}_{nm}(\lambda),$$

$$\hat{U}_{nm}(\lambda) = \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i-\lambda)\lambda + n_m(n_m+1)}.$$

Тогда решение задачи (5):

$$\begin{gathered} \hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) = \sum_{n,m} \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i-\lambda)\lambda + n_m(n_m+1)} \times \\ \times P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \end{gathered} \tag{9}$$

Если функция $\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)$ не имеет полюсов на прямой $Im\lambda = h\ =\ l + \frac{1}{2} - \gamma$, получаем следующую оценку:

$$\|U(r,\theta,\varphi)\|_{V_\gamma^{l+2}(K)} \leq C\, \|f(r,\theta,\varphi)\|_{V_\gamma^l(K)}.$$

Пока построенное в пространстве Фурье-образов решение (9) определено лишь на прямой $h = -\gamma + l + \frac{1}{2}$. Для построения его асимптотики необходимо, чтобы функция (9) была определена в некоторой полосе $h_1 < h < h_2$ (рис. 2).

Пусть $f(r,\theta,\varphi) \in V_{\gamma_1}^{l_1}(K) \cap V_{\gamma_2}^{l_2}(K)$, $\gamma_1 > \gamma_2$, l_1 и l_2 такие, что $h_1 = l_1 + \frac{1}{2} - \gamma_1$ и $h_2 = l_2 + \frac{1}{2} - \gamma_2$ удовлетворяют условию $h_2 > h_1$, функция $\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)$ не имеет полюсов на прямых $\mathrm{Im}\lambda = h_1$ и $\mathrm{Im}\lambda = h_2$. С помощью теоремы о вычетах переходим от интегрирования по прямой $\mathrm{Im}\lambda = h_1$ к интегрированию по прямой $\mathrm{Im}\lambda = h_2$, а находящиеся между ними полюсы решения (9) позволяют получить асимптотическое представление решения:

$$\begin{gathered} U(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} \hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)\, e^{i\lambda\tau} d\lambda\Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}} + \\ + \sqrt{2\pi} i \sum_{h_1 < Im\lambda_k < h_2} \mathrm{Res}\,\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)\, e^{i\lambda_n\tau}\Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}}, \\ U(r,\theta,\varphi) = \Re(r,\theta,\varphi) + \sqrt{2\pi} i \times \\ \times \sum_{h_1 < Im\lambda_k < h_2} \mathrm{Res}\,\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)\, e^{i\lambda_n\tau}\Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}}. \end{gathered} \tag{10}$$

Для гладкой части $\Re(r,\theta,\varphi)$ функции $U(r,\theta,\varphi)$ имеем следующую оценку:

$$\Re(r,\theta,\varphi)_{V^{l_2+2}_{\gamma2}(K)} \le Cf(r,\theta,\varphi)_{V^{l_2}_{\gamma2}(K)}. \quad (11)$$

Особые точки функции $\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)$ – полюсы первого порядка (из (9)):

$$(i-\lambda)\lambda - n_m(n_m+1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \\ = \frac{i}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1+4n_m^2+4n_m}\right\},\ \ \lambda_{1,2} = \frac{i}{2}\left[1 \pm (2n_m+1)\right].$$

Асимптотическое представление решения имеет вид:

$$U(r,\theta,\varphi) = \Re + \sum_{h_1<n_m<h_2} C_{n,m} r^{n_m} P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta) e^{im\varphi} + \\ + \sum_{h_1<n_m+1<h_2} D_{n,m} r^{n_m+1} P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ – постоянные.

Теперь проведем оценку h_1 и h_2, исходя из параметров нашей исходной задачи и свойств функций. В силу условия Мейкснера и оценки числа $l = 1$, поскольку оно связано с половиной порядка оператора. Значит, из условия интегрируемости решения в окрестности D_ε конической точки (поведение представленного ниже подынтегрального выражения должно быть не хуже чем r^{-1}):

$$\int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma-2} u^2 dD_\varepsilon = \int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma-2} r^2 r^2 \sin\theta dr = \\ = \int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma+2} \sin\theta dr \Rightarrow 2\gamma+2 > -1 \Rightarrow \gamma > -3/2.$$

Из формулы для определения прямой $h = -\gamma + \frac{3}{2}$. Следовательно, функция (9) будет определена в полосе $h_1 = -\frac{1}{2} < h < h_2 = \frac{3}{2}$.

Вернемся к системе (3). Следуя В.А. Кондратьеву [8], введем срезающую функцию:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, r \le d/2 \\ 0, r > d \end{cases},\ \ \chi(r) \in C^\infty.$$

Отметим, что на полуинтервале $\left(\frac{d}{2}; d\right]$ функция $\chi(r)$ меняется с бесконечной гладкостью от $(1;0]$. Для функции $\chi(r)U(r,\theta,\varphi)$ имеем следующую задачу:

$$\Delta(\chi U) = f^\chi(M),\ \ \chi U|_{\theta=\alpha} = 0, \quad (12)$$

где $f^\chi(M) = \chi f(M) + [\Delta,\chi]U$, $[\Delta,\chi]U = \Delta(\chi U) - \chi\Delta U$.

Поскольку $f^\chi(r,\theta,\varphi) \in V^{l+1}_{l-1/2}$ и функция $\widehat{\chi U}$ не имеет полюсов на прямой $Im\lambda = -1/2$, тогда существует единственное решение $Q = \chi U$ такое, что $\chi U \in V^{l+1}_{l-1/2} \subset V^1_{-1/2}$, поэтому:

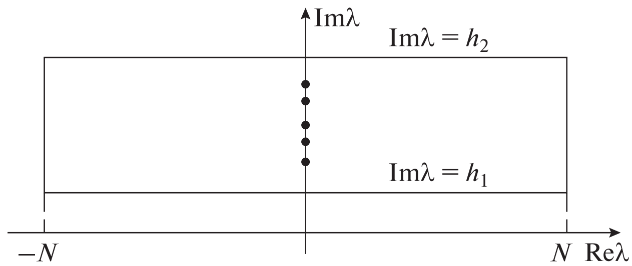

Рис. 2. Прямые $\mathrm{Im}\,\lambda = h_1$ и $\mathrm{Im}\,\lambda = h_2$ и особые точки функции $\hat{U}(\lambda,\theta,\varphi)$.

$$U(r,\theta,\varphi) = \chi\left\{\sum_{-\frac{1}{2}<n_m<\frac{3}{2}} C_{n,m} r^{n_m} P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta) e^{im\varphi} + \right. \\ \left. + \sum_{-\frac{1}{2}<n_m+1<\frac{3}{2}} D_{n,m} r^{n_m+1} P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta) e^{im\varphi}\right\} + \Re(r,\theta,\varphi), \quad (13)$$

где n_m – решения уравнений $P^{(m)}_{n_m}(\cos\alpha) = 0$, $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ – постоянные.

Отметим, что построение асимптотики для задачи (4) с условиями Неймана будет происходить аналогично. Только n_m будут решениями уравнений $\left.\frac{\partial P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0$.

Существование решения уравнения $P^{(m)}_{n_m}(\cos\alpha) = 0$ подробно рассмотрено в статье [10]. Используя аналогичный подход, покажем существование решения $\left.\frac{\partial P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0$. Представим $P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta)$ в виде [10]:

$$P^{(m)}_{n_m}(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \\ \times \left[\frac{\cos(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1-4m^2}{4n+3} \times \right. \\ \times \frac{\cos(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-40m^2}{22n+5} \times \\ \left. \times \frac{\cos(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \ldots\right].$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Сократим запись, переобозначив коэффициенты при степенях $2\sin\theta$:

$$P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \left[\frac{\cos(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \alpha\frac{\cos(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \beta\frac{\cos(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}\ldots\right].$$

Тогда для производной:

$$\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{-2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \left[\frac{n\cdot\sin(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(\{n-0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \alpha\frac{n\cdot\sin(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \alpha\frac{3\cos(\{n+0.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \beta\frac{n\cdot\sin(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \beta\frac{5\cos(\{n+1.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \ldots\right].$$

Приводя к общему знаменателю относительно $(2\sin\theta)^{\frac{k+2}{2}}$, где $k = 1, 3, 5, \ldots$, а также учитывая различный порядок малости этих степеней получим, что условие Неймана будет выполняться, если для каждого k выполнены уравнения:

$$2n\cdot\sin\theta\cdot\sin(\{n+0.5k\}\theta - 0.25k\pi + 0.5\pi m) + k\cos(\{n+0.5k\}\theta - 0.25k\pi + 0.5\pi m - \theta) = 0. \quad (14)$$

Покажем теперь, что если уравнение (14) выполнено для $k = 1$, то оно выполнено и для $k = 3$. Пусть $\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m = \varphi$, тогда:

$$k = 1\colon \cos(\varphi - \theta) = -2n\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \text{ — выполнено}, \quad (15)$$

$$k = 3\colon 3\cos(\varphi - \theta + \theta - 0.5\pi) = -2n\cdot\sin\theta\cdot\sin(\varphi + \theta - 0.5\pi). \quad (16)$$

Используя формулы косинуса разности и суммы, а также формулы приведения, перепишем (15) и (16):

$$k = 1\colon \cos\varphi\cos\theta = -(2n+1)\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \quad (17)$$
$$k = 3\colon 3\sin\varphi = 2n\cdot\sin\theta\{\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin\varphi\}.$$

Подставляя (16) в (17), находим $3\sin\varphi = -4n(n+1)\cdot\sin^2\theta\sin\varphi$.

Значит, уравнения для $k = 1$ и $k = 3$ выполнены одновременно, если $\sin\varphi = 0$ или $\sin^2\theta = -\frac{3}{4n(n+1)} < 0$.

Совершенно аналогично можно доказать утверждение, что если уравнение верно при каком-то $k = K$, то оно верно и для $k = K + 2$. Тогда по методу математической индукции можно считать доказанным, что решения n_m уравнения $\left.\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0$ можно найти как $\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m = \pi s$, $s = 0, 1, 2\ldots$

Таким образом, построено асимптотическое разложение решения трехмерной задачи дифракции электромагнитной волны на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку, а также показана возможность такого разложения для условий первого и второго рода. Данный подход может быть применен для решения задач электромагнитной теории дифракции путем асимптотического представления решения в окрестности особых точек границы, а также совмещен с численными методами для уточнения решения задачи [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Могилевский И.Е., Ровенко В.В.* // Физ. осн. приборостр. 2014. Т. 3. № 4. С. 28.
2. *Дубинов А.Е., Мытарева Л.А.* // УФН. 2010. Т. 180. № 5. С. 475; *Dubinov A.E., Mytareva L.A.* // Phys. Usp. 2010. V. 53. P. 455.
3. *Дубинов А.Е., Мытарева Л.А.* // УФН 2012. Т. 182. № 3. С. 337; *Dubinov A.E., Mytareva L.A.* // Phys. Usp. 2012. V. 55. P. 315.
4. *Pendry J.B., Schurig D., Smith D.R.* // Science. 2006. V. 312. P. 1780.
5. *Долин Л.С.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1961. Т. 4. С. 964.
6. *Свешников А.Г., Могилевский И.Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. М.: МГУ, 2012. 239 с.
7. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М: Наука, 1991. 334 с.

8. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. М.: МГУ, 1967. С. 209.
9. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. С. 688.
10. *Macdonald H.M.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1899. P. 264.
11. *Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Ровенко В.В. и др.* // В кн.: 12-я Междунар. конф. “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP-2019).

Asymptotic expansion of the solution of the electromagnetic theory problems of diffraction on objects with conical points

A. N. Bogolyubov[a], I. E. Mogilevsky[a, *], V. V. Rovenko[a]
[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*
**E-mail: imogilevsky@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

We consider the three-dimensional problem of electromagnetic diffraction by a bounded ideally conducting body containing a conical point. An asymptotic representation of the electromagnetic field is constructed in the vicinity of the conical point, in which the solution is represented as the sum of the singular and smooth parts.

УДК 537.86

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ ТМ-ПОЛЯРИЗОВАННОГО МОНОПОЛЯРНОГО ИМПУЛЬСА НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

© 2021 г. В. Н. Корниенко[1, *], В. В. Кулагин[2]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук, Москва, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга, Москва, Россия*

**E-mail: korn@cplire.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Методами вычислительного эксперимента рассмотрена задача дифракции монополярного электромагнитного импульса на идеально проводящем цилиндре. Показано, что при выбранной поляризации, для которой магнитная компонента поля параллельна оси цилиндра, рассеянное поле является биполярным. Вид его временного профиля зависит от соотношения радиуса цилиндра и характерной пространственной длины падающего импульса.

DOI: 10.31857/S0367676521010178

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о возможности излучения в свободное пространство монополярного электромагнитного импульса (МЭМИ) рассматривается уже достаточно давно. Несмотря на вполне обоснованное (например, в [1]) утверждение о невозможности такого процесса при использовании источников электромагнитного излучения конечных размеров, в целом ряде научных публикаций последних лет были предложены различные механизмы реализации МЭМИ. Так, в [2], экспериментально показана возможность генерации МЭМИ инфракрасного диапазона за счет возбуждения фотоиндуцированных носителей заряда лазерным излучением длительностью 120 фс в тонкой пластинке GaAs при наличии на ней электрического смещения от 4 до 11 кВ/см. Один из способов получения пары монополярных импульсов предложен и теоретически обоснован в [3]. В качестве источника излучения рассмотрен локализованный в пространстве ток, временная зависимость которого имеет форму трапеции. Показано, что временной промежуток, разделяющий два монополярных импульса, определяется интервалом, на котором значение тока постоянно.

Возможность генерации МЭМИ была продемонстрирована также в ряде вычислительных экспериментов [4, 5]. Здесь источником монополярных импульсов выступало плоское короткое зеркало релятивистских электронов, которое падало наклонно на тонкую металлическую фольгу. Электроны, обладающие значительной кинетической энергией, преодолевали данное препятствие, в то время как для электромагнитного поля фольга была непрозрачной. В результате на поверхности металла образовывался локализованный в пространстве и перемещающийся с течением времени вдоль фольги ток, который и был источником МЭМИ.

Отметим, что МЭМИ, распространяющиеся в свободном пространстве, могут найти свое практическое применение в различных областях науки [6], техники [7], медицины [8] и т.д. В связи с этим актуальной представляется задача об управлении характеристиками МЭМИ: возможностью изменения направления распространения, фокусировки и пр. с сохранением его основного качества – монополярности. Этой проблеме посвящено достаточно большое количество публикаций. Например, в [9] проведено теоретическое исследование прохождения МЭМИ через диэлектрическую линзу, в [10] представлены результаты численного моделирования дифракции МЭМИ на диэлектрическом цилиндре. Отражение МЭМИ от идеально проводящей поверхности рассмотрено в [11].

Целью данной работы является исследование пространственно-временной структуры поля рассеяния монополярного импульса на идеально проводящем цилиндре. Вектор магнитного поля МЭМИ направлен параллельно оси этого цилиндра, что соответствует ТМ-поляризации импульса.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную прямоугольную область G свободного пространства (рис. 1), в которой задана декартова система координат xyz. Ось z перпендикулярна плоскости рисунка, ось x соответствует продольному направлению. Пусть вдоль оси x распространяется МЭМИ с плоским фронтом, E_y и H_z компоненты которого отличны от нуля. Такой набор компонент соответствует линейной ТМ-поляризации. Пространственный профиль импульса в начальный момент времени, как и в [10], соответствует следующему выражению:

$$E_y(x,y,t=0)=\begin{cases}0, & t-(x-x_0)/c<0\\ -\alpha_0\left(t-(x-x_0)/c\right)^2\exp\left(-\beta(t-(x-x_0)/c)\right), & t-(x-x_0)/c\geq 0\end{cases},$$
$$H_z=-E_y,$$

где α_0 — амплитуда МЭМИ, x_0 — положение фронта импульса при $t = 0$, β — коэффициент, определяющий длительность импульса.

Область G содержит неоднородность: идеально проводящий цилиндр, ось которого параллельна оси z.

Найдем временную зависимость рассеянного на цилиндре поля в зависимости от его радиуса при фиксированных амплитуде и длительности МЭМИ. Заметим, что при изменении радиуса неоднородности расстояние от центра неоднородности до точки наблюдения (L, рис. 1) остается постоянным.

Для вычисления поля воспользуемся системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме в пространственно-временном представлении, задав для компонент поля E_x, E_y и H_z соответствующие поставленной задаче граничные и начальные условия. Нормируем время на длительность падающего импульса τ, определяемую по уровню 0.5 амплитуды E_y. Пространственные координаты нормируем на величину $c\tau$, где c — скорость света в вакууме.

Решение уравнений Максвелла будем проводить численным методом конечно-разностной аппроксимации непрерывных частных производных. Выполнение условий излучения поля на границах области обеспечим, используя метод идеально согласованного слоя [12]. Для выделения рассеянного поля из общего используем алгоритм, основанный на принципе суперпозиции электромагнитного поля, который описан в [10].

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В проведенных вычислительных экспериментах высота области G была выбрана равной 30, а длина — 100 (в относительных единицах). Начало декартовой системы координат совпадало с левым нижним углом области моделирования. Центр круга, соответствующего поперечному сечению идеально проводящего цилиндра, вне зависимости от его радиуса совпадал с центром G и имел координаты $\{x = 15, z = 50\}$. Были выбраны две точки наблюдения P_1 и P_2 с координатами $\{x = 15, z = 46.25\}$ и $\{x = 15, z = 53.75\}$ соответственно, временные зависимости значений компонент поля в которых использовались для нахождения поля рассеяния. Монополярный импульс распространялся от левой границы области G к правой. Таким образом, по отношению к МЭМИ точка P_1 находилась перед препятствием, а P_2 — за ним.

На рис. 2. показаны зависимости магнитной компоненты рассеянного поля, нормированной на амплитуду падающего МЭМИ, в точке наблюдения P_1 от времени для трех значений радиуса цилиндра: 2.5, 1.5 и 0.75. Каждую из этих зависимостей можно условно разделить на три участка, что сделано на примере кривой *1*.

Внутри первого временного диапазона (A) форма отраженного сигнала практически повторяет форму падающего. На втором отрезке (B) поле имеет знак, противоположный знаку возбуж-

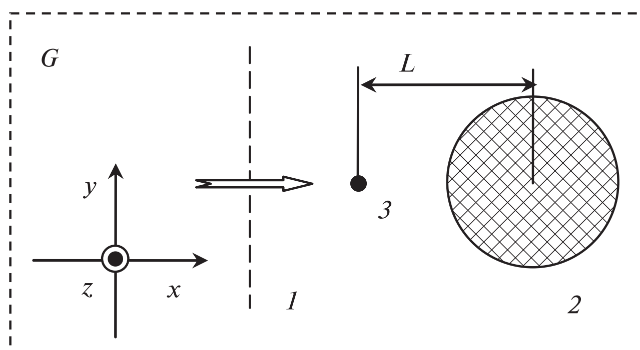

Рис. 1. Конфигурация рассматриваемой области: *1* — положение фронта импульса и направление его распространения, *2* — идеально проводящий цилиндр, *3* — точка наблюдения P_1.

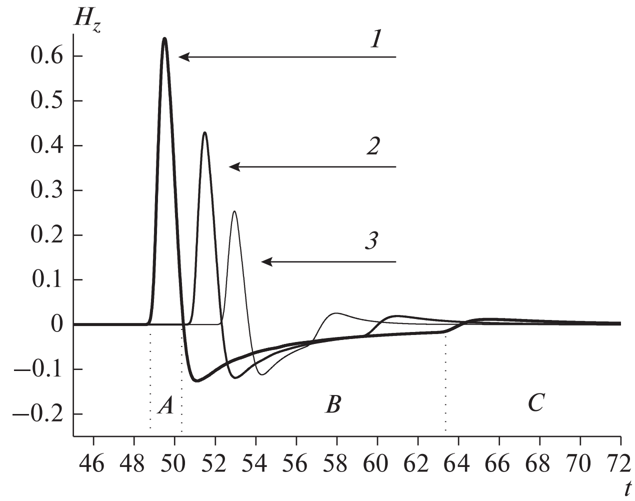

Рис. 2. Зависимость магнитной компоненты рассеянного поля от времени для цилиндра, радиус которого равен 2.5, 1.5 и 0.75 (кривые *1*, *2* и *3* соответственно).

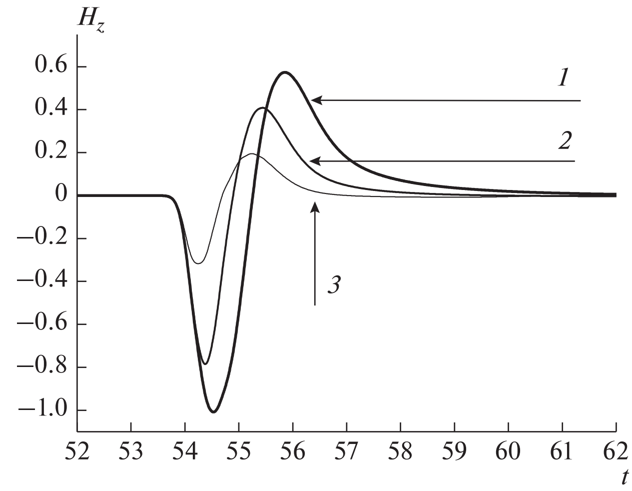

Рис. 3. Магнитная компонента рассеянного поля в точке наблюдения, находящейся за цилиндром, радиус которого равен 2.5, 1.5 и 0.75 (кривые *1*, *2* и *3* соответственно).

дающего МЭМИ, и, после достижения минимума, монотонно стремится к нулю. Временная длина этого участка зависит от радиуса цилиндра: чем больше радиус, тем длиннее участок. То есть, временной профиль отраженного импульса на отрезке *B* формируется в процессе распространения падающего импульса вдоль поверхности цилиндра. Если диаметр неоднородности меньше единицы, то область *B* практически исчезает и отраженное поле приобретает вид биполярного импульса.

На третьем отрезке времени *C* рассеянное поле по своей форме приближается к форме исходного МЭМИ и, в итоге, значения поля могут стать снова положительными.

Проведенные вычисления показали, что при радиусе цилиндра >10 область *B* продолжает увеличиваться, однако величина модуля отрицательных значений в минимуме поля снижается. В итоге при асимптотическом переходе боковой поверхности цилиндра в плоскость отраженное поле приобретает вид моноимпульса, как было показано в [10].

На рис. 3. приведены временные зависимости рассеянного поля в точке P_2. Из кривых *1*–*3* следует, что для цилиндров с радиусами как больше единицы (2.5, кривая *1*), так и меньше (0.75, кривая *3*), это поле имеет биполярный вид. Первый полупериод рассеянного поля имеет знак, противоположный знаку подающего МЭМИ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные результаты дают основание утверждать, что при дифракции монополярного импульса с ТМ-поляризацией на идеально проводящем цилиндре рассеянное поле всегда оказывается биполярным.

Работа является частью государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-52-45035-ИНД_а). Моделирование было проведено на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kwang-Je Kim, McDonald K.T., Stupakov G.V., Zolotorev M.S.* // arXiv: physics/0003064. 2000.
2. *You D., Jones R.R., Bucksbaum P.H.* // Opt. Lett. 1993. V. 18. No 4. P. 290.
3. *Корниенко В.Н., Румянцев Д.Р., Черепенин В.А.* // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 3.
4. *Wu H.-C., Meyer-ter-Vehn J.* // Nat. Photonics. 2012. V. 6. P. 304.
5. *Xu J., Shen B., Zhang X. et al.* // Sci. Rep. 2018. V. 8. No 1. P. 2669.
6. *Popolitova D.V., Klenov N.V., Soloviev I.I. et al.* // Beilstein J. Nanotechnol. 2019. V. 10. P. 1548.
7. *Nenovski P.* // Acta Geod. Geophys. 2018. V. 53. No 4. P. 555.
8. *Jiang Y., Dong H., Almansour H. et al.* // IEEE Instr. Meas. Mag. 2018. V. 21. No 5. P. 41.

9. *You D., Bucksbaum P.H.* // JOSA B. 1997. V. 14. No 7. P. 1651.
10. *Корниенко В.Н., Кулагин В.В., Олейников А.Я.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 258; *Kornienko V.N., Kulagin V.V., Oleynikov A.Ya.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 2. P. 203.
11. *Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А. и др.* // Квант. электрон. 2019. Т. 49. № 8. С. 788; *Kulagin V.V., Kornienko V.N., Cherepenin V.A. et al.* // Quant. Electron. 2019. V. 49. No 8. P. 788.
12. *Taflove A.* Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. London: Artech House, 1995.

Non-stationary diffraction of TM-polarized unipolar pulse on perfectly conducting cylinder

V. N. Kornienko[a], *, V. V. Kulagin[b]

[a] *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, 119234 Russia*

**E-mail: korn@cplire.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

Using the methods of a computational experiment, the problem of diffraction of a unipolar electromagnetic pulse by an ideally conducting cylinder is considered. It is shown that for the chosen polarization, for which the magnetic component of the field is parallel to the axis of the cylinder, the scattered field is bipolar. The shape of its temporal profile depends on the ratio of the radius of the cylinder and the spatial length of the incident pulse.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 68–73

УДК 535.8

ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИФФРАКТАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР

© 2021 г. П. В. Короленко[1, 2, *], Р. Т. Кубанов[1], А. Ю. Мишин[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: pvkorolenko@rambler.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Определены амплитудные и фазовые характеристики пространственных спектров волновых пучков, изначальное поле которых описывается комплексными фрактальными функциями. Показано, что наблюдаемая асимметрия спектров и их устойчивость к влиянию шумов могут быть использованы для совершенствования методов оптической диагностики фрактальных образований.

DOI: 10.31857/S036767652101018X

ВВЕДЕНИЕ

С момента выхода в свет работы известного физика-теоретика М. Берри [1] в оптике и физике лазеров сформировалось интенсивно развивающееся научное направление, связанное с исследованием диффракталов – волновых пучков с фрактальной структурой. Подавляющее большинство работ, выполненных по этой теме, посвящено описанию волн, которые приобретают самоподобные свойства после похождения масок и экранов с фрактальной геометрией. Наиболее часто рассматриваются маски, смоделированные по принципу построения функции Вейерштрасса [2, 3], канторовского множества [4], числовой последовательности Фибоначчи [5], кривых Коха [6] и, а также некоторых других известных фрактальных структур [3]. Они вызывают амплитудную модуляцию поперечной структуры падающей на них плоской волны. Фрактальное возмущение плоского волнового фронта может наблюдаться при отражении излучения от шероховатой поверхности [7]. Результаты этих работ помимо общенаучного имеют и практическое значение. Так, например, кольцевая канторовская пластина позволяет осуществлять многократную фокусировку излучения вдоль оси, а также строить оптические изображения [4]; путем определения фрактальной размерности излучения, диффузно отраженного от поверхности, можно определять степень ее шероховатости [7]; волны, отраженные от фрактальных объектов, повышают эффективность обработки оптической информации в коре головного мозга [8, 9]. Передача информации с помощью диффракталов позволит улучшить помехозащищенность канала связи, поскольку произвольные части диффрактала содержат почти такую же информацию, как и вся распространяющаяся волна. Данные о процессах формирования и распространения амплитудных диффракталов существенно дополнили работы по их генерации непосредственно в лазерных системах [10].

Значительно меньше сведений содержится в литературе о трансформации структуры световых пучков при их прохождении через фрактальные объекты, которые одновременно вызывают модуляцию амплитуды и фазы волны. В роли таких объектов могут выступать тонкие срезы биотканей [11]. Фрактальный анализ спекл-полей прошедшего их лазерного излучения позволяет выявлять ткани со злокачественными образованиями. Для аналитического описания структуры такого рода объектов следует использовать комплексные функции. Это отличает их от фрактальных элементов, вызывающих лишь амплитудную модуляцию и описываемых действительными функциями.

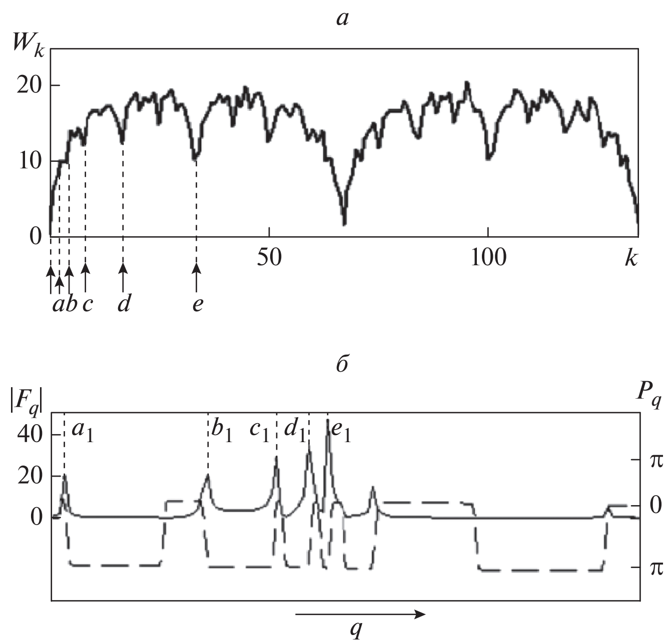

Рис. 1. Графики функции W_k (*а*) и коэффициентов Фурье F_q (*б*). Непрерывная кривая на рис. 1*б* – модуль $|F_q|$, пунктир – фаза $P_q = \arg(F_q)$. Величины W_k и $|F_q|$ представлены в относительных единицах, q – пространственная частота.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Цель данной работы состоит в определении основных закономерностей, определяющих формирование диффракталов структурами, вызывающими изменение распределений амплитуды и фазы зондирующих пучков.

Рассматриваемые процессы анализируются в контексте важнейшей для фрактальной оптики проблемы о взаимной связи структуры объекта и его фурье-образа [2]. Особое внимание уделено оценке скейлинговых характеристик фрактальных и фракталоподобных объектов и их пространственных спектров. От решения данной группы вопросов во многом зависит совершенствование способов оптической диагностики структуры фрактальных образований [7] и улучшение методов контроля качества и функциональных возможностей оптических элементов [12].

Основная часть расчетов по оценке взаимосвязи фрактальных признаков структур, описываемых комплексными функциями, со спектральными характеристиками выполнялась с использованием функции Мандельброта–Вейерштрасса (М–В). В литературе получили освещение как ее математические характеристики (см, например, [13, 14]), так и многочисленные практические приложения. К последним следует отнести описание турбулентных течений [15], создание модели термического контакта шероховатых поверхностей [16], оценку микроускорений [17].

ОДНОМЕРНАЯ СТРУКТУРА

Используя в качестве образующей функции функцию М–В [13], можно построить одномерную диффрактальную структуру. Ее поперечное поле будет иметь вид

$$w_k = \sigma \sum_{n=-N}^{N} \frac{(1 - e^{ib^n sk})e^{i\psi(n)}}{b^{(2-D)n}}, \tag{1}$$

где D характеризует фрактальную размерность; b, s – масштабирующие параметры; σ – нормировочный множитель; $2N + 1$ – количество слагаемых в формуле (1); $\psi(n)$ – фазы (в общем случае случайные) входящих в выражение (1) гармоник; k – номер значащей точки при цифровом представлении функции, $i = \sqrt{-1}$. Зависимость $W_k = |w_k|$ и фурье спектр функции w_k графически представлены на рис. 1*а*, 1*б*. Использовались следующие значения параметров: $D = 1.65$, $b = 2$, $s = 4$, $\sigma = 1$,

$N = 5$; $\psi(n)$ случайным образом меняется в пределах от 0 до $\pi/8$.

При используемом целочисленном значении параметра $b = 2$ зависимость W_k носит периодический характер (рис. 1*а*). Величина параметра b определяет также коэффициент скейлинга ζ анализируемых зависимостей. Об этом свидетельствует отношение длин показанных на рисунках отрезков, ограничивающих размеры подобных фрагментов на графиках. Это отношение (0b/0a, 0c/0b, 0d/0c, 0e/0d), равное коэффициенту скейлинга ζ, с хорошей точностью совпадает со значением параметра b ($\zeta = b = 2$). Примечательно, что спектр функции w_k имеет несимметричный спектр. Это объясняется соотношением ее действительной и мнимой частей, которые имеют различную четность. Отметим, что действительные функции таким свойством не обладают – их спектры симметричны относительно нуля.

Рисунок 1*б* указывает на соответствие амплитудной и фазовой частей фурье-спектра функции М–В. Из представленных графиков видно, что амплитудные максимумы соответствуют краевым фазовым дислокациям с резкими перепадами значений фазы на величину π. Тем самым скейлинг находит непосредственное проявление в амплитудной и фазовой компонентах спектра. Указанное свойство скейлинга, как показывают расчеты, наблюдается и при детерминированном и при случайном задании фаз $\psi(n)$.

Также было проанализировано влияние мнимой части функции М–В на структуру амплитудного фурье-спектра. Варьирование мнимой части функции производилось путем ее умножения на коэффициент K, который изменялся в диапазоне от 0 до 1. Далее рассчитывался коэффициент асимметрии A, представляющий отношение площадей части фурье-образа функции М–В, располагающейся в отрицательной области, к части фурье-образа в области положительных частот. Исследование показало, что мнимая часть вносит существенную асимметрию в фурье-образ, а именно: чем значительнее относительная величина мнимой части, тем выше асимметрия фурье-спектра. Так, изменение коэффициента K в пределах от 0 до 1 приводит к примерно линейному увеличению коэффициенту асимметрии A от 0 до 1.8. Поскольку отношение мнимой и действительной частей образующей функции определяет уровень изначальных фазовых возмущений, выполненный расчет позволяет связать с ним легко регистрируемую в эксперименте величину A.

Была исследована устойчивость пространственных спектров к влиянию оптических шумов, возникающих в процессе фурье-преобразования изначальной структуры. Уровень шумов зависел от диапазона изменения случайной фазы $\psi(n)$. Когда $\psi(n)$ меняется в интервале от 0 до $\pi/50$ шумовые всплески являются пренебрежимо малыми по сравнению с пиками спектральных линий, если же значения фазы варьируются в интервале от 0 до π, то уровень шумов оказывается сопоставимым с уровнем сигнала. Но даже в последнем случае коэффициент корреляции Cr формы фурье-спектра с той, которая соответствует малым шумам имеет величину $Cr = 0.92$. Столь значимая величина коэффициента корреляции доказывает высокую степень стабильности спектральных характеристик рассматриваемых фрактальных объектов.

СТРУКТУРА НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Двумерное поперечное поле диффрактала задавалось с помощью модернизированной функции М–В, имеющей вид

$$w_{k,m} = \sigma \sum_{\upsilon=0}^{V} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\left[1 - e^{ib^n s(k\cos(\alpha\upsilon) + m(\sin(\alpha\upsilon))}\right] e^{i\psi(n)}}{b^{(2-D)n}}, \quad (2)$$

где k, m – номера значащих точек по поперечным координатам; D характеризует фрактальную размерность; V – полное число азимутальных поворотов системы координат, υ – номер отдельного поворота, α – его величина.

На рис. 2*а*, 2*б* показаны амплитуда $W_{k,m} = |w_{k,m}|$ и фаза $\Phi_{k,m} = \arg(w_{k,m})$ распределения (1). Расчет проводился для следующих значений параметров: $N = 5$; $s = 3$; $\upsilon = 8$; $K = 127$; $b = 2$; $n = -N, -N + 1...N$; $\alpha = \pi/8$; $k = -K...K$; $D = 1.65$; $m = -K...K$. Из рисунка видно, что наиболее значительные максимумы представленных распределений располагаются по окружностям. Отношение радиусов этих окружностей, определяющее величину коэффициента скейлинга, равно коэффициенту $b = 2$.

Пространственные спектры функции $w_{k,m}$, характеризующие распределение поля в дальней зоне, графически представлены на рис. 2*в*, 2*г*. Для их расчета использовалась процедура БПФ. На рис. 2*в* показана амплитуда коэффициентов Фурье ($|F_{p,q}|$), а на рис. 2*г* – их фаза ($P_{p,q} = \arg(|F_{p,q}|)$). Видно, что спектры в отличие от изображений не обладают центральной сим-

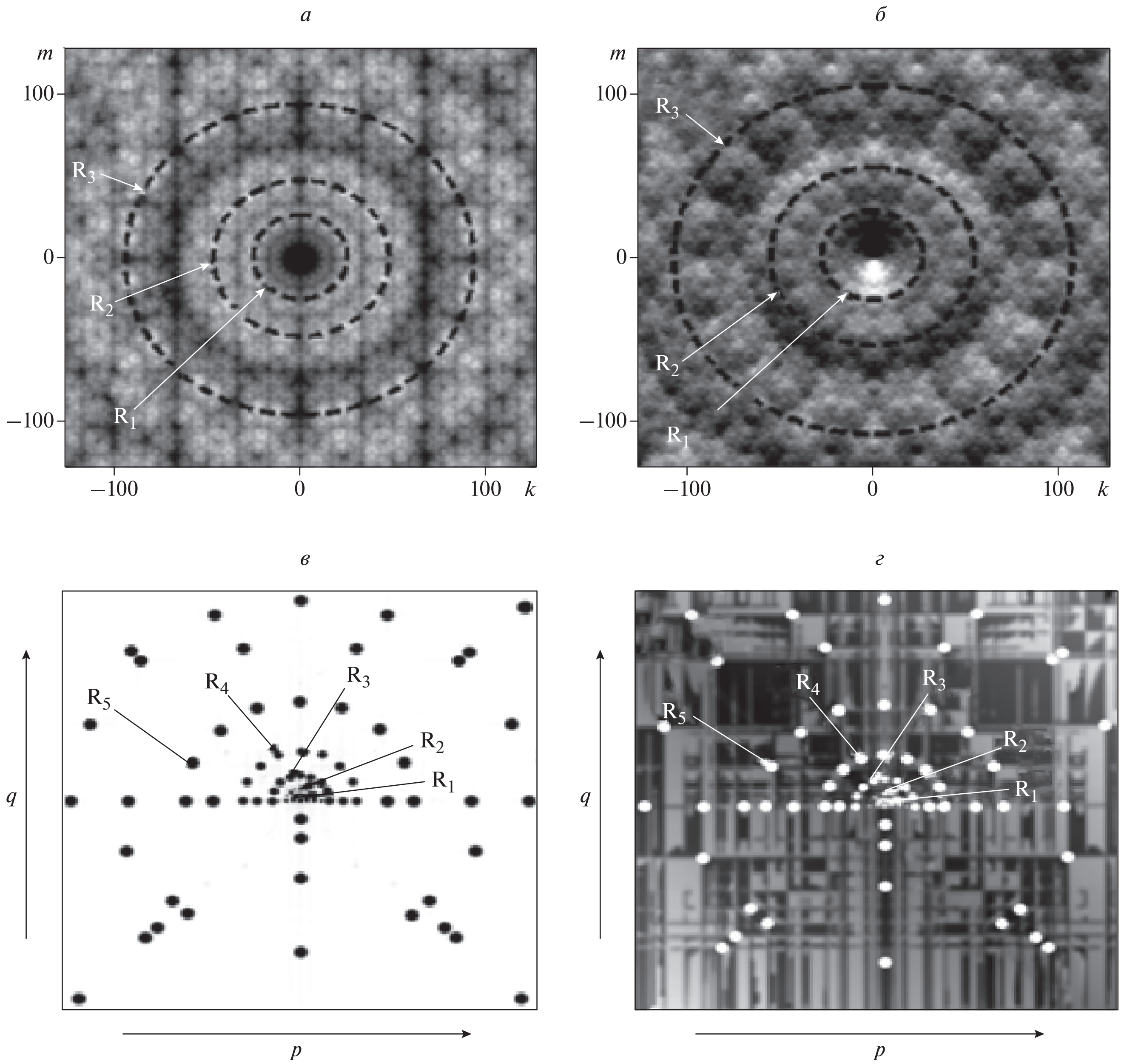

Рис. 2. Распределение амплитуды $W_{k,\,m}$ (*а*) и фазы $\Phi_{k,\,m}$ (*б*) световых колебаний в изначальной структуре и ее коэффициенты Фурье, представленные по амплитуде $|F_{p,\,q}|$ (*в*) и фазе $P_{p,\,q}$ (*г*).

метрией. Амплитудным спектрам присуща асимметрия с точки зрения расположения спектральных максимумов. В той части спектра, где максимумы проявляются наиболее четко, они располагаются по окружностям, размеры которых соотносятся как радиусы расположения максимумов на изначальном распределении амплитуды и фазы (рис. 2*а*, 2*б*). Структура спектра по фазе не характеризуется дискретными максимумами. Она включает систему фрагментов прямоугольной формы, на границах которых фаза испытывает резкие изменения на величину π. Примечательно, что пространственные частоты, определяющие положение амплитудных максимумов, соответствуют положению углов прямоугольных сегментов. Это означает, что амплитудные максимумы располагаются в точках винтовых фазовых дислокаций, где фаза в двух взаимно перпендикулярных направлениях меняется на π. Для иллюстрации указанного факта на рис. 2*г* осуществлено наложение амплитудной и фазовой частей фурье-образа.

Не всегда скейлиновые характеристики распределения амплитуды в поле диффрактала и в его спектре соответствуют друг другу. Нарушить это соответствие можно, усложнив изначальную структуру, путем изменения фазовых соотношений между парциальными волнами. Например, заменить в выражении (2) случайную фазу $\psi(n)$, зависящую только от параметра n, на случайную фазу $\psi(n, \upsilon)$, зависящую от параметров n и υ. Модифицированное таким образом распределение $W_{k,m}$ приобретает спеклоподобный вид. Однако, несмотря на его неупорядоченный характер поля, его пространственный спектр не претерпевает сколь-нибудь существенных изменений по сравнению со спектром, показанном на рис. 2*в*. Это указывает на то, что фрактальными спектрами с определенным значением коэффициента скейлинга могут обладать изображения, не обладающие в явном виде самоподобными фрагментами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Свойства диффракталов, задаваемых множеством комплексных чисел, заметным образом углубляют и расширяют представления о взаимной связи амплитудно-фазовых характеристик и пространственных спектров излучения. Как показало проведенное рассмотрение, отличительная черта спектрального анализа таких волновых структур состоит в возможности увеличить диапазон получаемой информации за счет параллельной обработки данных о распределении амплитуды и фазы. При получении и обработке этой информации следует считаться с тем, что в отдельных случаях будет нарушаться прямая связь между пространственными и спектральными характеристиками излучения. Положительный момент с точки зрения практических приложений состоит в высокой устойчивости фурье-спектров диффракталов к влиянию различного рода оптических шумов. К важным особенностям структуры фурье-спектров следует отнести обнаруженный факт совпадения амплитудных максимумов с точками фазовых сингулярностей. Регистрируемая степень асимметрии структуры фурье-образа из-за присутствия мнимой составляющей в распределении изначального светового поля может быть использована при оценке уровня фазовых возмущений в плоскости объекта.

Работа поддержана РФФИ (проект № 19-02-00540).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berry M.V.* // J Phys A. 1979. V. 12. No 6. P. 781.
2. *Короленко П.В., Аверченко А.В., Конопальцева Н.Ю., Мишин А.Ю.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 11. С. 1520; *Averchenko A.V., Konopaltseva N.Yu., Korolenko P.V., Mishin A.Yu.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 11. P. 1383.
3. *Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В.* // Вест. МГУ. Физ. астр. 2019. № 6. С. 51; *Zotov A.M., Korolenko P.V., Mishin A.Y., Ryzhikova Y.V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2019. V. 74. No 6. P. 625.
4. *Gimenez F., Monsoriu J.A., Furlan W.D., Pons A.* // Opt. Expr. 2006. V. 14. No 25. Art. No 11958.
5. *Грушина Н.В., Короленко П.В., Маркова С.Н.* // Вест. МГУ. Физ. астр. 2008. № 2. С. 40; *Grushina N.V., Korolenko P.V., Markova S.N.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2008. V. 63. No 2. P. 123.
6. *Horvath P., Smıdt P., Vaskova I., Hrabovsky M.* // Optik. 2010. V. 121. No 2. P. 206.
7. *Moocarme M., Vuong L.T.* // Opt. Expr. 2015. V. 23. No 22. Art. No 28471.
8. *Musel B., Bordier C., Dojat M. et al.* // J. Cogn. Neurosci. 2013. No 8. P. 1315.
9. *Korolenko P.V.* // Proc. of the Scientific research of the SCO countries: synergy and integration. Part 2. Beijing: Infinity, 2020. P. 160.
10. *Sroor H., Naidoo D., Miller S.W. et al.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 99. Art. No 013848.
11. *Ульянов А.С.* // Квант. электрон. 2008. Т. 38. № 6. С. 557; *Ulyanov A.S.* // Quant. Electron. 2008. V. 38. No 6. P. 557.
12. *Liu Y.J., Dai H.T., Sun X.W., Huang T.J.* // Opt. Expr. 2009. V. 17. No 15. Art. No 12418.
13. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. N.Y.: W.H. Freeman and Company, 1977. 480 p.
14. *Zaleski A.* // Rose-Hulman Undergrad. Math. J. 2012. V. 13. No 2. P. 80.
15. *Ausloos M., Berman D.H.* // Proc. R. Soc. Lond. 1985. P. 331.
16. *Humphrey A.C., Schuler C.A., Rubinsky B.* // Fluid Dyn. Res. 1992. V. 9. No 1–3. P. 81.
17. *Jiang S., Zheng Y.* // J. Mech. Engin. Sci. 2010. V. 224. No 4. P. 757.

Features of the complex representation of diffractal wave structures

P. V. Korolenko[a, b, *], R. T. Kubanov[a], A. Yu. Mishin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

[b] *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: pvkorolenko@rambler.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The amplitude and spectral characteristics of wave beams are determined, the initial field of which is described by complex fractal functions. It is shown that the observed asymmetry of the spectra and their resistance to the influence of noise can be used to improve the methods of optical diagnostics of fractal formations.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 74–77

УДК 535.015

МЕТАМОРФОЗЫ СТРУКТУРЫ ДЕНДРИТНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ

© 2021 г. А. В. Косырев[1], П. В. Короленко[1, 2], Ю. В. Рыжикова[1, *]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Предложен новый метод моделирования самоорганизации двумерных дендритов со стохастически образующимися центрами роста. Получены дендритные образования разной симметрии. Разработанный комплекс новых оригинальных алгоритмов и программ позволяет проводить обобщенный анализ структуры дендритов и их фрактальных особенностей.

DOI: 10.31857/S036767652101021X

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальным является синергетическое моделирование различных биофизических процессов, в том числе включающих этапы формирования природоподобных наноструктур дендритной геометрии [1, 2]. Такие дендритные структуры нашли применение в биомедицине для лечения и диагностики различных заболеваний. Их свойства могут быть использованы при изучении проблемы возникновения жизни на Земле, при создании новых фрактальных антенн, сенсорных датчиков, природоподобных систем и устройств, а также в других приложениях науки и техники [3–6].

Несмотря на большое количество работ [2–7], выполненных в указанном направлении, недостаточно изученными оказались динамические особенности формирования дендритных структур со стохастически образующимися центрами роста, в том числе их предельные фрактальные характеристики.

Существует необходимость разработки нового комплекса алгоритмов и программ построения дендритов со спонтанно образующимися центрами роста в процессе их самоорганизации, позволяющего проводить расширенный анализ фрактальных особенностей.

Цель данной работы состоит в анализе возможностей разработанных моделей для описания качественных изменений в распределении частиц, образующих дендритные кластеры на первых этапах их формирования.

ДИНАМИКА ОБРАЗОВАНИЯ ДЕНДРИТНЫХ СТРУКТУР

Удобным инструментом моделирования роста дендритов могут служить программы определения пространственных распределений частиц с использованием свойств агрегационных моделей частица-кластер. Недостатком, ограничивающим возможные применения известных алгоритмов "ограниченная диффузией агрегация (ДОА)", "баллистическая агрегация (БА)" и их различных модификаций [1, 2, 5, 7–10], являются трудности описания стохастического автономного образования центров роста фракталов. Предлагаемый нами новый метод построения дендритных кластеров произвольной симметрии со спонтанно образующимися центрами роста основан на комплексном использовании свойств классических агрегационных моделей ДОА и БА с учетом взаимодействия между составляющими дендрит частицами и одновременного движения нескольких частиц. Схема расчета включает также задание количественного критерия образования центров роста кластера. В программной реализации, в частности, предусмотрена возможность перехода к классическим моделям ДОА и БА с заданным центром роста [5, 9].

На первом этапе нового алгоритма задается случайное движение частиц в рабочем поле. Задание траекторий их движения осуществлялось аналогично моделям ДОА и БА [9, 10]. На рис. 1*а* показаны участки траектории движущейся частицы до присоединения к формируемому дендриту. Движущиеся по случайным траекториям частицы

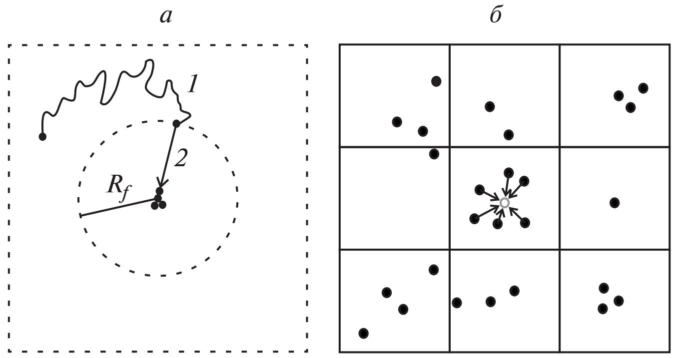

Рис. 1. Ключевые фрагменты схемы алгоритма роста дендритных систем: *а* – участки возможной траектории движения частицы: *1* – модель “ограниченная диффузией агрегация”, *2* – модель “баллистическая агрегация”. Пунктир – граница рабочего поля; *б* – расчетная сетка с частицами. Стрелками показано рождение нового центра.

(модель ДОА) на расстоянии R_f от новообразованного дендрита, начинают прямолинейное движение (модель БА) в его сторону и, соприкасаясь с ним, становятся неподвижными.

На втором этапе для оптимизации скорости роста дендритных образований осуществляется сеточное представление данных с разбиением рабочей области на сектора, в которых хранится информация о присутствующих в них частицах (рис. 1*б*). Для увеличения быстродействия алгоритма вводится эффективный радиус взаимодействия частиц R_{int}, при превышении которого этим взаимодействием можно пренебречь: $R_{int} < L$. Здесь L – размер сетки, который задается таким образом, что каждая частица будет взаимодействовать только с частицами из своей же клетки и восьми соседними. Взаимодействие частиц считается обратно пропорциональным квадрату расстояния между ними.

На рис. 1*б* стрелками показан возможный вариант образования нового центра роста дендрита. В качестве количественного параметра вводится число частиц в одной ячейки сетки N_{cr}, при достижении, которого частицы внутри данной ячейки заменяются новым центром роста дендрита. Так, на рис. 1*б* в центральной ячейке $N_{cr} = 6$. Отметим, что погрешность расчетного метода, обусловленная исчезновением из рассмотрения части частиц пренебрежимо мала для фрактальных дендритов с числом частиц $N > 1000$.

При движении частицы, взаимодействуя друг с другом, скапливаются случайным образом в определенном объеме пространства и образуют новый фрактальный кластер. На рис. 2 приведены результаты использования разработанной модели для получения различных 2D дендритных образований со стохастическим образованием их центров роста. На рис. 2*а* показан вариант модели, близкой к классическим вариантам центрально-симметричных дендритных образований [2, 5, 7–10]. Число частиц, составляющих дендритное образование $N = 12\,000$. Разработанная программа позволяла отказаться от задания фиксированного центра роста и от расчета случайного угла, характеризующего направление движения частицы [10, 11]. В ходе расчета при каждой итерации в каждой периферийной клетке, если в ней нет неподвижных частиц, с заданной вероятностью рождается новая частица. Если частица выходит за границы рабочего поля, она исключается из рассмотрения. Для быстроты работы алгоритма моделирование начинается с сетки небольшого размера. Это приводило к образованию первого фрактального кластера примерно в центре моделируемой области. В момент, когда все периферийные клетки содержат хотя бы одну неподвижную частицу, размер сетки увеличивается и происходит перерасчет по отношению к множеству периферийных клеток.

В начальный момент времени в каждой клетке сетки с некоторой вероятностью P_b рождаются N_b частиц. В дальнейшем при взаимодействии они могут образовать дендритоподобные кластеры, которые растут, используя только первоначальный материал. На рис. 2*б* показана сформированная дендритная структура в рамках реализованной модели “первичного бульона”, предложенной в свое время академиком А.И. Опариным для описания возникновения жизни на Земле. В процессе образования кластеров формируются разветвленная и расходящиеся по всей расчетной области дендритная система полимерного типа. Такая структура может использоваться в материаловедении для синтеза и анализа новых свойств полимерных дендритов [12].

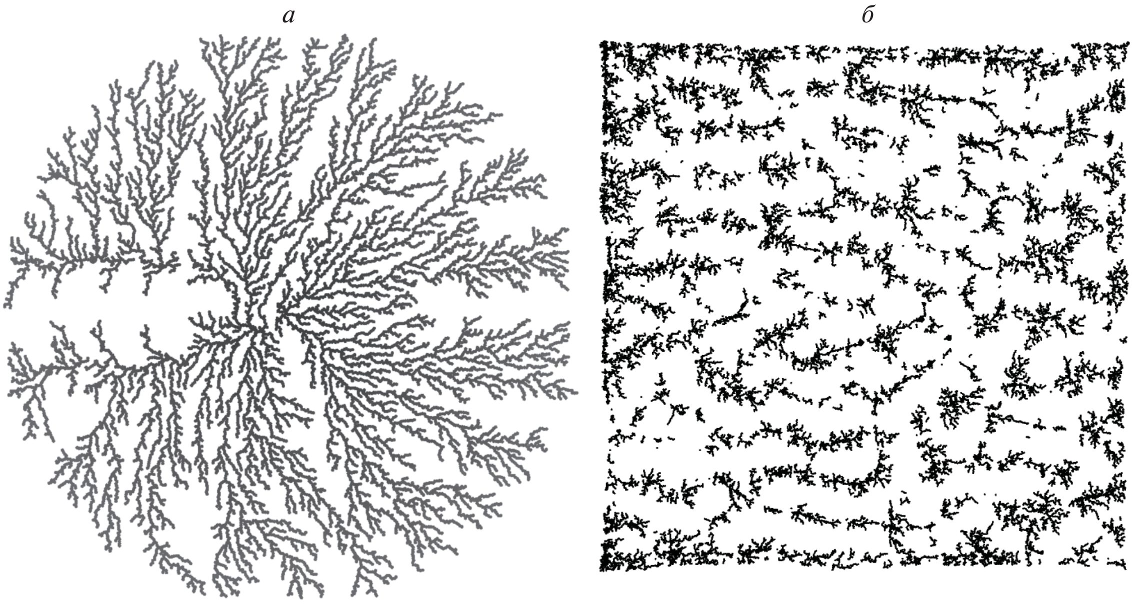

Рис. 2. Примеры моделирования дендритных структур: *а* – модификация модели “ограниченная диффузией агрегация”, *б* – модель “первичного бульона”.

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕНДРИТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Фрактальные свойства дендритных образований принято оценивать с помощью применения аппарата фрактальной параметризации [8, 13]. Его ключевым параметром является фрактальная размерность. В литературе часто используются разные варианты расчета фрактальной размерности (размерность подобия, клеточная размерность (размерность Минковского), корреляционная размерность, кластерная (массовая) размерность и др.) [8, 14], как правило, это связано с особенностями исследуемых объектов.

Разработанный комплекс новых оригинальных программ позволяет проводить обобщенный анализ геометрии дендритов и их фрактальных особенностей. Преимущественно он опирается на использование массового и клеточного способов определения фрактальной размерности [8, 11].

Достоверность определения фрактальных размерностей такими способами проверялась на простых тестовых объектах. Тестовые объекты представляли собой круги с равномерным и с неравномерным распределением частиц. В случае равномерного пространственного распределения частиц по кругу, клеточная D_b и массовая D фрактальная размерность структурных образований $D_b \approx D \to 2$ при числе частиц $N \to 10^6$. Эти оценки фрактальных размерностей служат ориентиром в случае использования модели ассоциации частиц БА [1]. Неравномерное распределение частиц допускает получение различных вариантов значений фрактальных размерностей при изменении “рыхлости” сформированного круга: $D_b, D < 2$. Такие тестовые оценки фрактальных размерностей соответствуют двумерной модели ДОА.

Результаты моделирования формирования двумерных фрактальных дендритных структур (рис. 2) разными способами показали, что предельное значение средних фрактальных размерностей дендритных кластеров с центральной симметрией принимает значение близкое к $D \approx D_b = 1.71$ (число частиц $N \to 10^6$).

Таким образом, выполненная работа позволила вскрыть особенности динамики изменения фрактальной размерности отдельных кластеров с разной симметрией в зависимости от числа составляющих их частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная расчетная схема формирования дендритных образований со спонтанно образующимися центрами роста является ценной альтернативой ранее использованным агрегационным моделям частица-кластер. Она позволяет создавать простым заданием входных параметров фрактальные дендритные кластеры с разной геометрией, разной степенью разреженности и разным расположением. Разработанная модель дает новые возможности целенаправленного влияния на рост дендритов со стохастическими центрами роста, что может использоваться в качестве имитации морфогенеза различных биологических объектов.

Данная работа поддержана РФФИ (проект № 19-02-00540).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каретин Ю.А.* Самоорганизация живых систем. Краткий курс синергетики для биологов. Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2017. 530 с.
2. *Ружицкая Д.Д., Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 11. С. 1512; *Ruzhitskaya D.D., Ryzhikova Yu.V., Ryzhikov S.B.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 11. P. 1375.
3. *Canabal J.A., Otaduy M.A., Kim B., Echevarria J.* // Eurographics. 2020. V. 39. No 2. P. 1.
4. *Ryzhikova Yu., Mukhartova Iu., Ryzhikov S.* // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Art. No 012059.
5. *Nicolás-Carlock J.R., Carrillo-Estrada J.L., Dossetti V.* // Sci. Rep. 2016. V. 6. Art. No 19505.
6. *Самсонов В.М., Кузнецова Ю.В., Дьякова Е.В.* // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 2. С. 71; *Samsonov V.M., Kuznetsova Y.V., D'yakova E.V.* // Tech. Phys. Russ. J. Appl. Phys. 2016. V. 61. No 2. P. 227.
7. *Menshutin A.Yu., Shchur L.N.* // Comp. Phys. Commun. 2011. V. 182. P. 1819.
8. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
9. *Witten T.A., Sander L.M.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1400.
10. *Ружицкая Д.Д., Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В.* // Вестн. МГУ. Физ. астрон. 2018. № 3. С. 69; *Ruzhitskaya D.D., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. V. 73. No 3. P. 306.
11. *Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* // Уч. зап. физ. фак-та. МГУ. 2018. № 5. Ст. № 1850401.
12. *Adeli M., Soleyman R.* // Polym. Chem. 2015. V. 6. P. 10.
13. *Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V.* // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. No 4. P. 256.
14. *Jungblut S., Joswig J-O., Eychmuller A.* // Phys. Chem. Chem. Phys. 2019. V. 21. P. 5723.

Metamorphoses of dendritic structures

A. V. Kosyrev[a], P. V. Korolenko[a, b], Yu. V. Ryzhikova[a, *]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

[b] *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

New method for modeling the self-organization of two-dimensional dendrites with randomly formed growth centers is proposed. Dendritic formations of different symmetries are obtained. The developed complex of new original programs allows a generalized analysis of the structure of dendrites and their fractal features.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 78–84

УДК 53.087.51:53.043:53.087.35

СНИЖЕНИЕ КОНТРАСТА ФОТОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ n^+–$p(n)$–p^+ СТРУКТУР КРЕМНИЯ, ИЗМЕРЯЕМОГО ПРИ ОСВЕЩЕНИИ ВСЕЙ ПОВЕРХНОСТИ p–n ПЕРЕХОДА

© 2021 г. О. Г. Кошелев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

**E-mail: scon282@phys.msu.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Проведены исследования снижения контраста фоточувствительности равномерно освещаемой n^+–$p(n)$–p^+ структуры кремния из-за фототоков между ее неоднородностями вдоль n^+ и p^+ слоев. Измерения и расчеты проводились на модели, состоящей из двух кремниевых солнечных элементов различной фоточувствительности, соединенных резистором. Получено согласие результатов измерений и вычислений.

DOI: 10.31857/S0367676521010208

ВВЕДЕНИЕ

Кремниевые солнечные элементы (СЭ) широко используются для преобразования солнечной энергии в электрическую. Такой СЭ представляет собой пластину кремния (база) p или n типа, на поверхностях которой создаются тонкие сильно легированные слои кремния (p^+ на одной стороне и n^+ на другой). Качество этих СЭ и их заготовок зависит от их фото-чувствительности. Ее обычно характеризуют параметром, называемым эффективным временем жизни (τ_{eff}) неравновесных носителей заряда (ННЗ). В ряде работ для этого используют также параметр эффективная диффузионная длина (L_{eff}) ННЗ, связанная с τ_{eff} соотношением $L_{eff} = (D\tau_{eff})^{0.5}$, где D – коэффициент диффузии ННЗ. Значения τ_{eff} и L_{eff} зависят прежде всего от времени жизни (τ) ННЗ в базе СЭ, скорости их рекомбинации на тыльной стороне базы, а при измерениях по поглощению света и коэффициента его поглощения в кремнии (α). Для пластин толщиной d без n^+ и p^+ слоев при поперечных размерах много больше L_{eff} и $\alpha d \ll 1$ $\tau_{eff}^{-1} = \tau^{-1} + (S_f + S_r)/d$, где S_f и S_r – скорости рекомбинации ННЗ на освещаемой (лицевой) и тыльной поверхностях пластин [1]. Если же эти скорости бесконечно велики, то для пластин $\tau_{eff} = d^2/(12D)$, а для слитков, размеры которых много больше L_{eff}, $\tau_{eff} = \tau/(\alpha L + 1)$, где $L = (D\tau)^{0.5}$ – диффузионная длина ННЗ [2]. На значения τ_{eff} влияет также характер изменений интенсивности освещения в течение измерений. При стационарных условиях $\tau_{eff} = \Delta n/G$, где Δn и G – усредненные по толщине пластины значения концентрации ННЗ и скорости их генерации. При квазистационарных условиях, когда изменения освещенности за время $t = \tau$ приводят к пренебрежимо малому изменению Δn, то [3, 4]

$$\tau_{eff} = \frac{\Delta n}{G - \dfrac{d\Delta n}{dt}}. \tag{1}$$

Значения τ_{eff} для ряда других частных случаев приведены в [5]. При импульсном освещении значения τ_{eff} обычно определяют по времени спада фотопроводимости после выключения света. Выражения для τ_{eff} дополнительно усложняются при наличии ловушек [6], при этом значения τ_{eff} могут изменяться в несколько раз [7].

Для получения максимального КПД фоточувствительность и соответственно значения τ_{eff} должны быть максимальными и практически одинаковыми по всей площади СЭ [8], т.е. контраст фоточувствительности должен быть минимальным. Таким же условиям должны удовлетворять исходные слитки и пластины кремния [9], поэтому фоточувствительность контролируют как у исходного кремния, так и у готовых СЭ.

Для определения значений τ_{eff} и их разброса по площади исходных слитков и пластин кремния чаще всего используют СВЧ методы измерений фотопроводимости. Эти методы основаны на сканировании поверхности кремния лучом модулированного по интенсивности света с энергией квантов ($h\nu$) более ширины запрещенной зоны (E_g) [10–12]. В этом случае измеряют изменения интенсивности СВЧ волны, отражающейся от исследуемой структуры, или проходящей через нее (в случае пластин). Часто измеряют также времена спада СВЧ фотопроводимости после окончания импульсов света. Разрешающая способность определяется диаметром освещаемой области. Например, в [11] она была около 1 мм. Для снижения стоимости СЭ в последнее время были начаты работы по замене кристаллического кремния (*c*-Si) микрокристаллическим (*mc*-Si), в котором значения τ_{eff} существенно ниже. Ввиду этого появилась необходимость существенно повысить разрешающую способность методов измерения контраста τ_{eff} заготовок СЭ. Для этого в [12] был разработан СВЧ метод, в котором диаметр светового пятна был уменьшен до 50–100 мкм. Освещение производилось лазером при $h\nu > E_g$ через световод с лицевой стороны пластины. СВЧ зондирование на частоте 9.4 ГГц осуществлялось с тыльной стороны через коаксиальный кабель диаметром 1 мм. Значения τ_{eff} определялось по сдвигу фазы модуляции СВЧ волны относительно фазы модуляции света.

Для измерения фотоэлектрических параметров заготовок СЭ в работе [13] был предложен метод, названный QSSPC (quasi-steady-state photoconductance) методом. Генерация ННЗ в этом случае производится импульсом белого или инфракрасного света, интенсивность которого медленно меняется по сравнению с τ_{eff}. Величина фотопроводимости измеряется на частоте 10 МГц с помощью катушки, индуктивно связанной с исследуемой структурой. На основе этого метода была разработана широко используемая установка WCT-120 [14]. Однако ее разрешающая способность, определяемая размером светового пятна и диаметром катушки, была невысокой (4 см).

Возможности контроля неоднородностей в кремнии существенно возросли с развитием новых методов, основанных на измерениях электролюминесцентных (*EL*, electroluminescence) и фотолюминесцентных (*PL*, photoluminescence) изображений поверхностей исследуемых структур [9, 15]. Эти методы основаны на том, что в кремнии незначительная часть рекомбинации неравновесных электронов с дырками происходит путем спонтанной межзонной излучательной рекомбинации. В случае *EL* метода_инжекция ННЗ производится электрическим током через *p*–*n* переход, а в случае *PL* метода – светом при $h\nu > E_g$. *EL* метод применим лишь для готовых СЭ, тогда как *PL* метод применим на всех этапах изготовления СЭ. Регистрация таких изображений производится фотокамерой на основе матриц фотоприемников (главным образом кремниевых), подключаемых к матрицам приборов с зарядовой связью. В настоящее время используются методы, основанные на обработке отношений двух изображений фотокамеры, соответствующих различным профилям люминесцентных центров по толщине СЭ. В случае *EL* метода для этого используются различные оптические фильтры перед фотокамерой. Например, в [15] для этого использовались фильтры, не пропускающие волны длиннее 900 и 1000 нм. В первом случае время регистрации одного изображения из 1024×1024 пикселя составляло 100 с, а во втором – 1 с. В случае *PL* метода изменения таких профилей достигается сменой либо фильтра, либо длины волны источника света. Например, в работе [9] для генерации ННЗ применялись лазеры с длинами волн $\lambda = 915$ и 1030 нм, а перед фотокамерой в обоих случаях помещали фильтр, не пропускающий излучения этих лазеров. Такой метод сокращенно называют *PLIR* (photo luminescence intensity ratio) методом.

Последующий контроль после измерений на пластинах обычно проводят на готовых СЭ [16]. Этот контроль проводят по току короткого замыкания (J_{sc}), возникающего при сканировании поверхности *p*–*n* перехода лучом ИК лазера (*LBIC* – light beam induced current) при $h\nu > E_g$ [17]. Измеряют значения коэффициента собирания (Q), определяемого как отношение количества электронов, проходящих через *p*-*n* переход, к количеству поглощаемых квантов света за единицу времени. На основании таких измерений производят картирование L_{eff} или τ_{eff}, т.е. определяют распределение значений этих параметров по площади СЭ. Недостатком этого метода, как и других методов, основанных на сканировании поверхности исследуемой структуры, является большая длительность таких измерений. Например, для получения изображения L_{eff} размером 200×200 пикселей методом *LBIC*, согласно [15], требуется около нескольких часов.

Для оптимизации процессов изготовления СЭ представляет интерес проведение контроля и на промежуточных этапах. В частности, появление участков с низкими значениями τ возможно в процессе нанесения сильно легированных слоев n^+ и p^+ типа. В этом случае снижение τ можно обнаружить по уменьшению фото-ЭДС. По расчетам, снижение фото-ЭДС всего на 10% участка с большим значением τ (порядка 1000 мкс) может привести к снижению измеряемого времени релаксации ННЗ такого участка в несколько раз [18]. Попытка обнаружить контраст фотопроводимости СЭ из кремния была предпринята в [19]. Зондирование производилось с помощью СВЧ микроскопа ближнего поля на частоте 4.1 ГГц с разрешающей способностью около 10 мкм. Хотя контраст СВЧ проводимости в отсутствие света четко регистрировался, контраст СВЧ фотопроводимости практически не наблюдался. Это можно объяснить тем, что ННЗ экстрагируются из участков с высокими значениями τ и благодаря токам по n^+ и p^+ слоям инжектируются в окружающие участки с низкими значениями τ. Некоторое снижение контраста в неоднородных структурах возможно и благодаря диффузии ННЗ между участками с различными значениями τ. Но этот механизм не может быть главным, т.к. в исходных пластинах без n^+ и p^+ слоев контраст наблюдается четко. Контроль заготовок, поврежденных при нанесении n^+ и p^+ слоев, и своевременная их отбраковка позволяет избежать ненужных затрат на последующие операции по изготовлению из них СЭ и, тем самым, снизить стоимость производства.

Для подавления рассматриваемого шунтирующего действия n^+ и p^+ слоев было разработано устройство, описание и блок-схема которого приведены в [20]. Оно основано на компенсационном методе, разработанном ранее для определения усредненных по площади значений τ_{eff} в пластинах кремния с $n^+{-}p$ или $p^+{-}n$ переходом [21, 22]. Сущность метода состоит в том, что исследуемая пластина кремния, помещаемая между обкладками конденсатора, освещается со стороны $p{-}n$ перехода одновременно двумя потоками света с различными длинами волн λ_1 и λ_2. Их интенсивности модулированы синусоидально с частотой f. Один из потоков ($\lambda = \lambda_1$) создает ННЗ в объеме базовой области, а другой ($\lambda = \lambda_2$) – в ее тонком слое вблизи освещаемой поверхности. При этом чувствительность метода максимальна, когда коэффициенты поглощения ($\alpha_{1,2}$) этих потоков света удовлетворяют соотношениям $\alpha_1 d \le 1$, $\alpha_2 d \gg 1$, где d – толщина пластины. Амплитуды их модуляций ($\Delta P_{1,2}$) и сдвиг фаз между ними подбираются так, чтобы индуцированная на конденсаторе суммарная переменная фото-ЭДС обращалась в 0. В результате обращаются в 0 переменный ток в зазорах между этой пластиной и обкладками конденсатора, а также переменное напряжение на самой пластине. При этом переменный ток вдоль n^+ и p^+ слоев также обращается в 0. При низких частотах ($2\pi f \tau_{eff} \ll 1$) модуляция производится в противофазе. В этом случае коэффициенты собирания $Q_{1,2}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\lambda_2 \Delta P_2}{\lambda_1 \Delta P_1}. \tag{2}$$

Если при измерениях тока короткого замыкания значения τ_{eff} определяют по значениям Q с помощью формул, приведенных в [23, 24], то в данном случае они определяются по измеренным таким образом отношениям Q_1/Q_2 и тем же формулам этих работ. В разработанном устройстве использовались лазеры с $\lambda_1 = 1064$ нм и $\lambda_2 = 808$ нм ($\alpha_1^{-1} \approx 1$ мм и $\alpha_2^{-1} \approx 13$ мкм). Освещение производилось по световодам сквозь щель в одной из пластин конденсатора площадью 10×2 мм^2. При этом значения Q_2 были близки к 1, так что различия между значениями Q_1 и Q_1/Q_2 составляли около 6%. Контрольные измерения контраста фоточувствительности на этом устройстве проводились при локальном освещении на одном из промышленных СЭ этим методом и стандартным, по току короткого замыкания. В последнем случае для областей максимально отличавшихся по фоточувствительности различие в значениях Q_1 было равно 1.7, тогда как в случае компенсационного метода для этих областей различие в значениях Q_1/Q_2 было примерно на 5% меньше, что согласуется с расчетами. Ошибки в измерениях составляли около 4%.

Для сравнения этого компенсационного метода со стандартными, применяемыми для определения контраста фоточувствительности, представляет интерес оценка величины его сглаживания этими методами из-за токов по n^+ и p^+ слоям. В [25] показано, что при локальном освещении снижение контраста может быть в несколько раз.

Цель настоящей работы – экспериментально и путем численных расчетов рассмотреть другой случай – влияние токов по n^+ и p^+ слоям неоднородной кремниевой $n^+{-}p(n){-}p^+$ структуры на распределение фотоэдс по площади при равномерном освещении $p{-}n$ перехода.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Измерения проводились на модели неоднородной $n^+{-}p{-}p^+$ структуры, состоящей из двух СЭ (1 и 2), соединенных резистором R. Предварительно измеренные по спектрам токов короткого замыкания значения τ_{eff} были равны 26 мкс у СЭ1

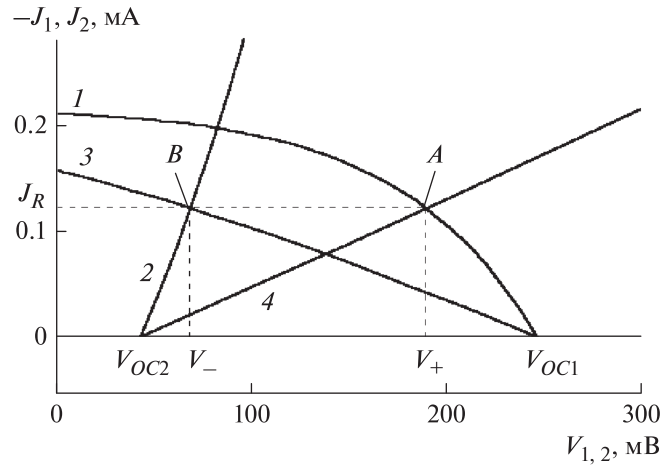

Рис. 1. Пояснение метода определения напряжений V_+ и V_- на освещаемых СЭ1 и СЭ2 с различной фоточувствительностью, соединенных резистором $R = = 1$ кОм.

и 1 мкс у СЭ2 (облученного быстрыми электронами). Оба СЭ освещались одновременно с одинаковой интенсивностью от лампы накаливания мощностью 60 Вт с расстояний (H) от 0.25 до 1 м. Анализ изменений контраста фоточувствительности проводился по изменениям напряжений на обоих СЭ. При этом напряжения холостого хода ($V_{oc1,\,2}$) менялись в пределах 450–247 мВ для СЭ1 и 260–43 мВ для СЭ2. Под действием тока через резистор, моделирующего сопротивление n^+ и p^+ слоев, разница напряжений между этими СЭ снижалась.

Расчеты проводились для определения напряжений V_+ на СЭ1 и V_- на СЭ2, соединенных резистором R и освещаемых одновременно. Эти расчеты проводились на основании формулы вольт-амперной характеристики освещаемого СЭ [23, 24]

$$J_{1,2} = S_{1,2} j_{s1,2}\left(\exp\frac{qV_{1,2}}{A_{1,2}kT} - 1\right) - J_{sc1,2}. \tag{3}$$

Здесь $J_{1,\,2}$ – токи во внешних цепях СЭ1 и СЭ2, $V_{1,\,2}$ и $J_{sc1,\,2}$ – напряжения и токи короткого замыкания этих СЭ, $S_{1,\,2}$ и $j_{s1,\,2}$ – их площади и плотности токов насыщения, $A_{1,\,2}$ – численные коэффициенты, q – заряд электрона, k и T – постоянная Больцмана и температура. Значения $j_{s1,\,2}$ и $A_{1,\,2}$ определялись предварительно по вольт-амперным зависимостям этих СЭ (не соединенных резистором) при таких же условиях освещения. Расчеты проводились графическим методом, который поясняется на рис. 1 в случае $R = 1000$ Ом, $H = 1$ м. Кривая *1* соответствует зависимости $-J_1(V_1)$, а кривая *2* – зависимости $J_2(V_2)$. Кривая *3* соответствует зависимости $-J_1(V_1 + J_1^{\bullet}R)$, а кривая *4* – зависимости $J_2(V_2 + J_2^{\bullet}R)$. Значение напряжения V_+ на СЭ1 определялось по точке пересечения кривых *1* и *4* (точка A), а напряжения V_- на СЭ2 – по точке пересечения кривых *2* и *3* (точка B). Ординаты точек A и B одинаковы и равны значению тока J_R через резистор R, т.е. $|J_1| = |J_2| = J_R = (V_+ - V_-)/R$.

На рис. 2 приведены измеренные (точки 1т–4т) и расчетные (кривые 1к–4к) зависимости напряжений V_+ на СЭ1 и V_- на СЭ2 от величины соединяющего их резистора R. Сплошные кривые (1к, 3к) и зачерненные точки (1т, 3т) относятся к СЭ1, а штриховые кривые (2к, 4к) и светлые точки (2т, 4т) – к СЭ2. Семейство верхних кривых (с индексами 1, 2) соответствует максимальной интенсивности освещения ($H = 0.25$ м), а семейство нижних кривых (с индексами 3, 4) – минимальной ($H = 1$ м), в 16 раз меньшей. Как видно, расчетные данные согласуются с экспериментальными результатами в пределах ошибок измерений (менее 4%). Напряжения на обоих СЭ практически постоянны при изменении величины R от 100 до 10 кОм. С повышением освещенности от минимальной до максимальной отношение напряжений СЭ1 к СЭ2 снижается почти в 4 раза (от 5.7 до 1.5). При дальнейшем уменьшении R до 10 Ом напряжения на СЭ1 и СЭ2 практически сравниваются. Максимальное уменьшение напряжения (в 3 раза) происходит на СЭ1 при минимальной освещенности. (В этом случае значение V_+ снижается от 247 мВ при $R \to \infty$, до 84 мВ при $R = 10$ Ом). Тогда как на СЭ2 напряжение, наоборот, возрастает

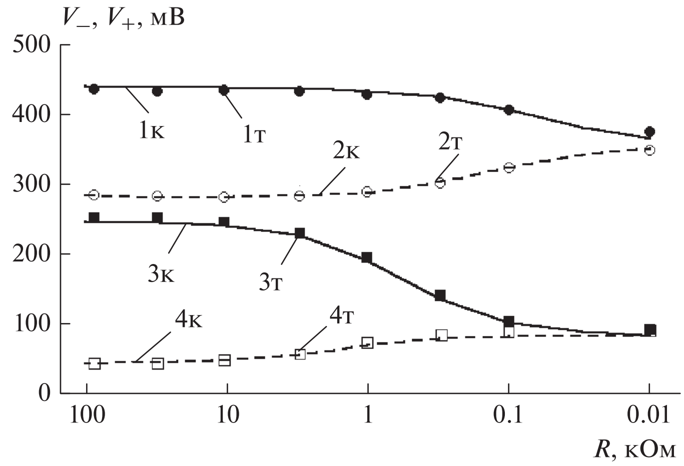

Рис. 2. Данные измерений (точки) и расчетные (кривые) зависимости напряжений V_+ на СЭ1 (1к, 1т, 3к, 3т) и V_- на СЭ2 (2к, 2т, 4к, 4т) от величины сопротивления, соединяющего их резистора R при максимальной (1к, 1т, 2к, 2т) и минимальной (3к, 3т, 4к, 4т) интенсивностях освещения. Пояснения в тексте.

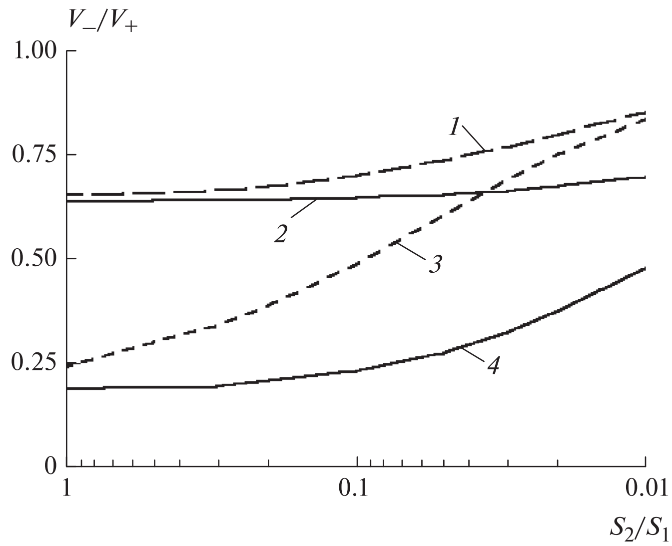

Рис. 3. Рассчитанные зависимости отношений напряжений (V_-/V_+) на СЭ2 и СЭ1 от соотношения их площадей ($S2/S1$) при $R = 3$ кОм (штриховые кривые *1*, *3*) и 30 кОм (сплошные кривые *2*, *4*). Кривые вычислены при таких же фотоэлектрических параметрах СЭ, как для рис. 2.

почти в 2 раза. Наблюдаемые зависимости от интенсивности освещения можно объяснить нелинейностью вольт-амперных характеристик СЭ. На рис. 3 приведены вычисленные зависимости отношений напряжений (V_-/V_+) тех же СЭ2 и СЭ1 от соотношения их площадей (S_2/S_1). Кривые *1* и *2* соответствуют максимальной интенсивности освещения, а кривые *3*, *4* – минимальной. Штриховые кривые (*1* и *3*) вычислены при $R = 3$ кОм, а сплошные (*2*, *4*) – при $R = 30$ кОм. Как видно, снижение контраста фото чувствительности происходит не только с увеличением шунтирования и ростом интенсивности освещения, но и с уменьшением отношения S_2/S_1. Среди кривых, приведенных на рис. 3 сильнее всего влияние снижения отношения S_2/S_1 выражено для кривой *3*. В этом случае снижение отношения S_2/S_1 в 100 раз приводит к уменьшению контраста фото чувствительности в 3.4 раза. С ростом интенсивности освещения влияние соотношения площадей СЭ1 и СЭ2 заметно снижается.

Таким образом, если напряжения холостого хода неодинаковы у различных участков базовой области $n^+–p(n)–p^+$ структуры кремния, то при одновременном освещении всей поверхности $p–n$ перехода измеряемый контраст фоточувствительности может быть существенно меньше истинного. Это сглаживание контраста связанно с шунтированием базовой области n^+ и p^+ слоями. На величину этого снижения влияют интенсивность освещения, сопротивления n^+ и p^+ слоев и соотношения площадей этих участков структуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены оценки искажений контраста фоточувствительности неоднородных $n^+–p(n)–p^+$ структур кремния возможных при контроле их качества методами, основанными на освещении всей поверхности $p–n$ перехода. Измерения проводились на модели, состоящей из двух соединенных резистором кремниевых СЭ, которые одинаково освещались со стороны $p–n$ перехода. Эти СЭ обладали различной фоточувствительностью благодаря предварительному облучению одного из них быстрыми электронами. Путем расчетов показано, что токи по n^+ и p^+ слоям между участками структуры с различными значениями фотоэдс могут привести к снижению измеряемого контраста фоточувствительности. Величина этого эффекта зависит от освещенности структуры, величины шунтирующего сопротивления и соотношения площадей участков с различными значениями фотоэдс. Результаты измерений и вычислений согласуются между собой.

Автор признателен Генеральному директору ООО ИТР М.А. Региневичу, по совету которого была проведена эта работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеегер К.* Физика полупроводников. М.: Мир, 1977. 615 с.
2. *Bowden S., Sinton R.A.* // J. Appl. Phys. 2007. V. 102. Art. No 124501.
3. *Roller J.F., Li Y.-T., Dagenais M., Hamadani B.H.* // J. Appl. Phys. 2016. V. 120. Art No 233108.
4. *Kerr M.J., Cuevas A., Sinton R.A.* // J. Appl. Phys. 2002. V. 91. No 1. P. 399.
5. *Cuevas A., Sinton R.* // Prog. Photovolt. 1997. V. 5. P. 79.
6. *Mackdonald D., Sinton R., Cuevas A.* // J. Appl. Phys. 2001. V. 89. No 5. P. 2722.
7. *Schuler N., Hahn T., Schmerler S. et al.* // J. Appl. Phys. 2010. V. 107. Art. No 064901.
8. *van Wezep D.A., van der Velden M.H.L., Bosra D.M., Bosh R.C.M.* // Proc. 26th EU PVSEC (Hamburg, 2011). P. 1423.
9. *Chung D., Mitchell B., Juhl M.K. et al.* // IEEE J. Photovolt. 2018. V. 8. No 4. P. 943.
10. *Schmidt J., Aberle A.G.* // J. Appl. Phys. 1997. V. 81. No 9. P. 6186.
11. *Gaubas E., Kaniava A.* // Rev. Sci. Instrum. 1996. V. 67. No 6. P. 2339.
12. *Palais O., Gervais J., Clere L., Martinuzzi S.* // Mater. Sci. Engin. 2000. V. 71. P. 47.
13. *Sinton R.A.* // Proc. 25th Photovolt. Spec. Conf. (Washington, 1996). P. 457.
14. http://www.sintoninstruments.com/Sinton-instruments-WCT-120.html.
15. *Wurfel P., Trupke T., Puzzel T. et al.* // J. Appl. Phys. 2007. V. 101. No 12. Art. No 123110.
16. http://solar-front.livejournal.com/11644.html.
17. https://www.czl.ru/applications/light-beam-induced-current-lbic/.
18. *Koshelev O.G. Untila G.G.* // Phys. Wave Phenom. 2016. V. 24. No 3. P. 214.
19. *Hovsepyan A., Babajanyan A., Sargsyan T. et al.* // J. Appl. Phys. 2009. V. 106. Art. No 114901.
20. *Кошелев О.Г.* // ПТЭ. 2020. № 4. С. 149; *Koshelev O.G.* // Instrum. Exp. Tech. 2020. V. 63. No 4. P. 604.
21. *Кошелев О.Г., Морозова В.А.* Способ определения электрофизических параметров неравновесных носителей заряда в подложках диодных структур. Патент РФ № 2019890. 1994.
22. *Koshelev O.G., Morozova V.A.* // Sol. St. Electron. 1996. V. 39. No 9. P. 1379.
23. *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов. Москва: Мир, 1984. 455 с.
24. *Васильев А.М., Ландсман А.П.* Полупроводниковые фотопреобразователи. М.: Сов. радио, 1971.
25. *Кошелев О.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 52; *Koshelev O.G.* // Bull. Rus. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 1. P. 44.

Decrease in the photosensitivity contrast of inhomogeneous n^+–$p(n)$–p^+ silicon structures, measured by lighting the entire surface p–n junction

O. G. Koshelev*
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia
**E-mail: scon282@phys.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

Investigations have been made of reducing the contrast of photosensitivity of a uniformly illuminated n^+–$p(n)$–p^+ silicon structure due to photocurrents between its inhomogeneities along the n^+ and p^+ layers. Measurements and calculations were carried out on a model consisting of two silicon solar cells of different photosensitivity, connected by a resistor. The consent of the measurement and calculation results is obtained.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 85–90

УДК 535.215

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР ТИПА МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ ДЛЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2021 г. К. Т. Ч. Ву[1, *], Г. М. Казарян[1], В. Л. Саввин[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: kt.vu@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Структуры типа металл–диэлектрик–металл являются перспективным кандидатом на роль эффективного выпрямляющего элемента в терагерцовом диапазоне. Рассматривается численная модель подобной структуры, использующая метод конечных элементов в формализме неравновесной функции Грина.

DOI: 10.31857/S0367676521010300

ВВЕДЕНИЕ

Терагерцевый диапазон является важным объектом исследования в наше время в силу его многочисленных потенциальных применений в медицине, материаловедении, энергетике и других областях. Детектирование излучения в этом диапазоне – сложная задача. Он расположен между микроволновым и инфракрасным диапазоном, методы которых плохо работают для терагерцевых частот. Например, энергия квантов электромагнитного поля, соответствующая этому диапазону, меньше энергии теплового шума при комнатной температуре, что делает применение фотоэлементов неэффективным [1, 2].

В качестве альтернативы были предложения использовать так называемые ректенны [3, 4], т.е. выпрямляющие антенны. Эти устройства представляют собой антенну, соединенную с выпрямляющим элементом. При преобразовании энергии электромагнитной волны в электрический ток эффективность ректенн в микроволновом диапазоне может достигать 70–90% [4, 5]. Их эффективность для более высоких частот является предметом споров. Пессимистичная оценка, полагающая справедливость применения предела Шокли–Квайссера, составляет примерно 30% [6]. Экспериментальные же работы демонстрируют эффективность порядка единиц процентов в лучшем случае. Улучшение этого показателя во многом зависит от нахождения эффективного выпрямляющего элемента.

Большое количество современных исследований предлагают в качестве этого элемента использовать структуры типа металл–диэлектрик–металл. Они, по существу, представляют собой диоды, механизмом переноса заряда в которых является квантовое туннелирование. Теоретически, это позволяет им работать на частотах, достигающих среднего инфракрасного диапазона и, согласно некоторым работам, даже оптического [7–9].

Для структур типа металл–диэлектрик–металл, использующих один слой диэлектрика, было показана невозможность одновременного достижения низкого сопротивления и высокой чувствительности [10]. Предполагается, что применение нескольких диэлектрических слоев или использование асимметричной геометрии их расположения может помочь улучшить эти показатели [10–12]. Эти предложения приводят к существенному усложнению структур, делая их аналитическое рассмотрение очень сложным.

Эта работа посвящена построению численной модели структуры типа металл–диэлектрик–металл с использованием метода конечных элементов в формализме неравновесной функции Грина [13–15]. Метод конечных элементов позволяет строить сетки произвольных форм, что может в перспективе облегчить рассмотрение многомерных структур. Формализм неравновесной функции Грина позволяет получить наиболее детальные сведения о характеристиках структур, что может оказаться чрезвычайно полезным при их анализе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДОЛОГИЯ

Постановка задачи начинается с определения области Ω, которая состоит из конечной подобласти Ω_D и бесконечных подобластей Ω_α. Область Ω_D соответствует пространству, заполненному диэлектриками, т.е. расчетной области. Области Ω_α соответствуют металлическим проводникам. Для данной энергии E функция Грина $G(\vec{r},\vec{r}';E)$ определяется как

$$(E-H)G(\vec{r},\vec{r};E)=\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\quad \vec{r},\vec{r}'\in\Omega, \tag{1}$$

$$H=-\frac{\hbar^2}{2}\nabla\left(\frac{1}{m(\vec{r})}\nabla\right)+V(\vec{r}). \tag{2}$$

Здесь H – гамильтониан всей системы, $m(\vec{r})$ – эффективная масса частицы (электрона в этой задаче), $V(\vec{r})$ – профиль потенциальной энергии внутри системы, $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака. Функция Грина полагается равной нулю всюду на границе $\partial\Omega$ области Ω и удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности. Задача (1) может быть переписана в виде

$$\left(E-H^0-\Sigma\right)G(\vec{r},\vec{r};E)=\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\quad \vec{r},\vec{r}'\in\Omega_D, \tag{3}$$

где H^0 – гамильтониан расчетной области, а Σ описывает взаимодействие проводников и диэлектрической подобласти. Величина Σ называется собственной энергией [13]. Собственная энергия может также учитывать различные взаимодействия частиц внутри расчетной области, но в баллистическом приближении ими можно пренебречь. В этом случае собственную энергию можно представить как сумму собственных энергий Σ^α, соответствующих проводникам.

Для решения этой задачи методом конечных элементов ее удобно представить в матричном виде:

$$G(E)=\left(EI-H^0(E)-\sum_\alpha\Sigma^\alpha(E)\right)^{-1}, \tag{4}$$

где I – единичная матрица. Явный вид матриц H^0 и Σ^α можно получить обычным способом, использующимся в методе конечных элементов, то есть применяя формулу Грина к слабой форме задачи (4):

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_D}(E-V(\vec{r}))G(\vec{r},\vec{r};E)\phi(\vec{r})\,dr-\\-\int\limits_{\Omega_D}\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla G(\vec{r},\vec{r};E),\nabla\phi(\vec{r}))\,dr-\\-\int\limits_{\partial\Omega_D}\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla G(\vec{r},\vec{r};E),\vec{n})\,\phi(\vec{r})\,ds=\phi(\vec{r}'),\\ \vec{r},\vec{r}'\in\Omega_D,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\phi(\vec{r})$ – пробная функция, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_D$. На этом этапе следует выбрать базисные функции и разложить по нему все неизвестные величины.

$$\begin{gathered}\phi(\vec{r})=\sum_p\phi_p(\vec{r});\quad G(\vec{r},\vec{r}';E)=\\=\sum_k G_k(\vec{r}';E)\phi_k(\vec{r})=\sum_{k,l}G_{k,l}(E)\phi_l(\vec{r}')\phi_k(\vec{r}),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\phi_p(\vec{r})$ – базисные функции, которые в простейшем случае выбираются кусочно-линейными, а $G_{k,l}(E)$ – коэффициенты разложения функции Грина по этому базису.

Подставляя эти выражения в (5) можно получить явные выражения для матриц, используемых в (4):

$$\begin{gathered}H^0_{k,l}=\int\limits_{\Omega_D}V(\vec{r})\phi_k\phi_l\,dr+\int\limits_{\Omega_D}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\phi_k\nabla\phi_l\,dr;\\ ES_{k,l}=\int\limits_{\Omega_D}E\phi_k\phi_l\,dr;\quad \Sigma_{k,l}=\int\limits_{\partial\Omega_D}\Sigma(\vec{r})\phi_k\phi_l\,ds;\end{gathered} \tag{7}$$

Матрица $S_{k,l}$ является своеобразным аналогом единичной матрицы в выбранном базисе.

Собственные энергии соответствуют интегралу по границе в выражении (5), но в то же время требуют знания производной по нормали функции Грина. Для ее нахождения в общем случае требуется решить задачу для вспомогательной функции Грина внутри полубесконечных областей, соответствующих проводникам. В одномерном же случае влияние собственных энергий в контексте метода конечных элементов проявляется в виде граничных условий Робена [13]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\partial\Omega_D}\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla G(\vec{r},\vec{r};E),\vec{n})\,\phi(\vec{r})\,ds=\\=\sum_\alpha\int\limits_{\Omega_D}-\frac{i\hbar^2}{2m_\alpha}\sqrt{\frac{2m_\alpha(E-V_\alpha)}{\hbar^2}}G(\vec{r},\vec{r};E)\,\phi(\vec{r})\,ds;\\ \Sigma^\alpha_{k,l}=\int\limits_{\partial\Omega^\alpha}-\frac{i\hbar^2}{2m_\alpha}\sqrt{\frac{2m_\alpha(E-V_\alpha)}{\hbar^2}}\phi_k\phi_l\,ds,\end{gathered} \tag{8}$$

где $\partial\Omega^\alpha$ – граница раздела между расчетной областью и проводником, m_α – эффективная масса электрона в проводнике α, V_α – значение потенциала в соответствующем проводнике.

Коэффициент прохождения $T(E)$ и электрический ток J через структуру могут быть найдены из выражений

$$T(E) = \mathrm{tr}\left(\Gamma^1 G \Gamma^2 G^+\right); \quad \Gamma^\alpha = -i\left(\Sigma^\alpha - \Sigma^{\alpha+}\right);$$
$$\alpha = 1,2, \quad J = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} T(E)\left(f_{FD}(E-\mu_1) - f_{FD}(E-\mu_2)\right)dE, \tag{9}$$

где e – заряд электрона, Γ^α – диссипативная функция уширения, μ_α – химический потенциал соответствующего проводника, $f_{FD}(E)$ – функция распределения Ферми–Дирака. Верхний индекс + обозначает эрмитово сопряжение. Для удобства можно принять уровень энергии Ферми одного из проводников равным нулю и отсчитывать все энергии от него. Таким образом, выражение для плотности тока можно переписать в виде

$$J = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} T(E)\left(f_{FD}(E) - f_{FD}(E - eV_b)\right)dE, \tag{10}$$

где V_b – напряжение смещения между проводниками.

Следует отметить, что в силу характера распределения Ферми–Дирака лишь конечный диапазон энергий вносит существенный вклад в выражение (10). Особое внимание следует также уделить пикам коэффициента пропускания $T(E)$, приходящимся на упомянутый диапазон. Эти пики могут быть учтены путем применения адаптивного шага дискретизации по энергии, как в работе [10], или через следующую задачу на собственные значения

$$\begin{gathered} H^0\psi(\vec r) = E\psi(\vec r), \quad \vec r \in \Omega_D, \\ \psi(\vec r) = 0, \quad \vec r \in \partial\Omega_D . \end{gathered} \tag{11}$$

Эта задача также может быть решена численно. Профиль потенциального барьера может быть представлен как

$$V(\vec r) = V_0(\vec r) + U_0(\vec r), \quad \vec r \in \Omega_D, \tag{12}$$

где U_0 – внешний приложенный потенциал, а V_0 – профиль потенциала в структуре в отсутствие смещения. Потенциал V_0 может быть получен из характеристик материалов, если допустить, что все электроны перемещаются по зонам проводимости (рис. 1).

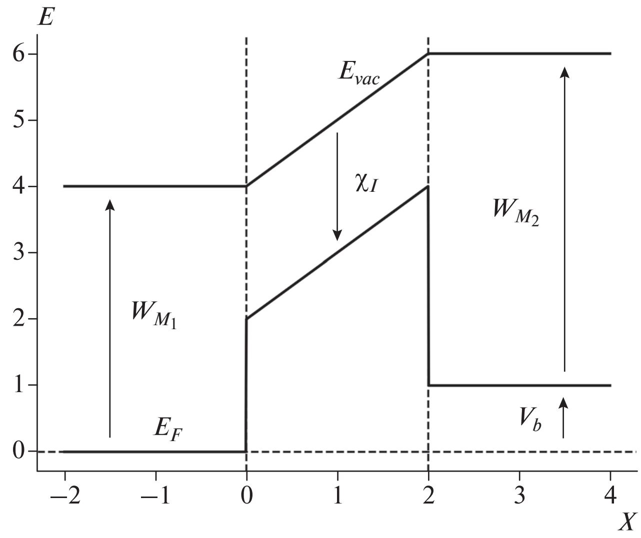

Рис. 1. Профиль потенциального барьера в структуре типа металл–диэлектрик–металл. Область внутри пунктирных вертикальных линий соответствует диэлектрическому слою. E_F – уровень энергии Ферми металлов, E_{vac} – уровень энергии вакуума, $W_{M_{1,2}}$ – работы выхода соответствующих металлов, χ_I – сродство к электрону для данного диэлектрика, V_b – приложенное напряжение, x – условная координата.

Приложенный потенциал U_0 удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla\left(\varepsilon_0\varepsilon(\vec r)\nabla\left(U_0(\vec r)\right)\right) = en(\vec r), \quad \vec r \in \Omega_D, \tag{13}$$

где $n(\vec r)$ – плотность заряда в структуре, ε_0 – диэлектрическая постоянная, а ε – относительная диэлектрическая проницаемость. В одномерном случае при учете потенциала зарядов-изображений выражение для потенциала приобретает вид [13]:

$$V(x) = V_0(x) + U_0(x) - \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{1}{\int_0^x \varepsilon(x')dx'} + \frac{1}{\int_x^L \varepsilon(x')dx'}\right), \tag{14}$$

где x – координата внутри области расчета, L – длина структуры.

Если зарядов внутри структуры нет, задача – одномерна, а диэлектрическая проницаемость имеет кусочно-постоянный характер, то выражение для потенциала можно получить аналитически. В этой работе для сохранения общности подхода задача для потенциала решалась численно, методом конечных элементов.

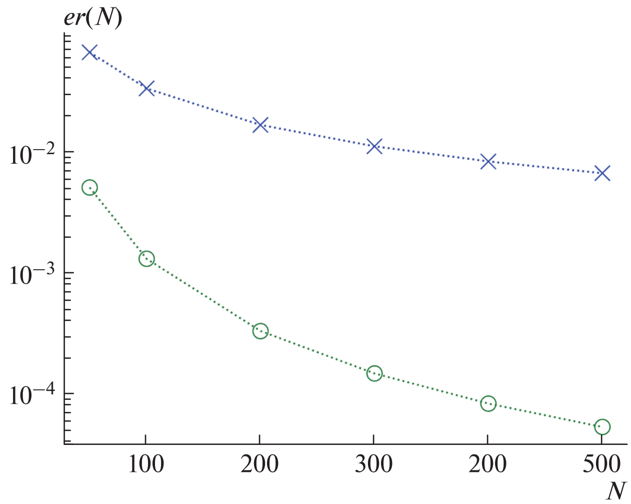

Рис. 2. Зависимость метрики ошибки $er(N)$ от числа узлов в сетке пространственного разбиения N для тестовых задач: прямоугольный потенциальный барьер (крестики), барьер-ступенька (кружки).

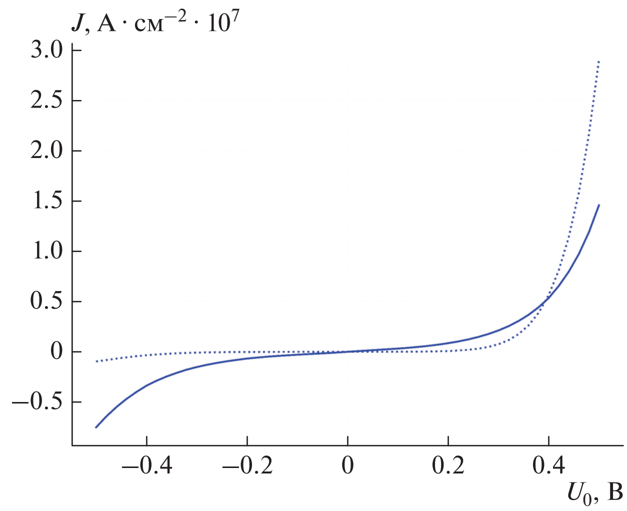

Рис. 3. Полученные зависимости плотности тока J от приложенного напряжения U_0 для структур металл–диэлектрик–металл с учетом потенциала зарядов изображений. Сплошная линия – структура W–Nb_2O_5 (1 нм)–Ta_2O_5–(1 нм)–W, пунктирная – W–Nb_2O_5 (3 нм)–Ta_2O_5–(1 нм)–W.

Расчеты производились с использованием вычислительной платформы FEniCS. С ее помощью решалась задача для потенциала и получались матричные выражения для нахождения функции Грина. Описание компонентов платформы можно найти в [16–21].

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель была протестирована на двух задачах, имеющих хорошо известное решение: задача о туннелировании через прямоугольный потенциальный барьер и задача о туннелировании через барьер-ступеньку. Полученный при моделировании коэффициент прохождения сравнивался с точными выражениями при одних и тех же значениях энергии. Для оценки ошибки вычислений используется следующая формула [22]:

$$er(N) = \max_E |T(E) - T_0(E)|, \tag{15}$$

где N – число узлов в сетке, $T(E)$ – полученный при моделировании коэффициент прохождения, $T_0(E)$ – точное выражение для коэффициента прохождения для данного барьера, а значение энергии E ограничено величинами, использован-

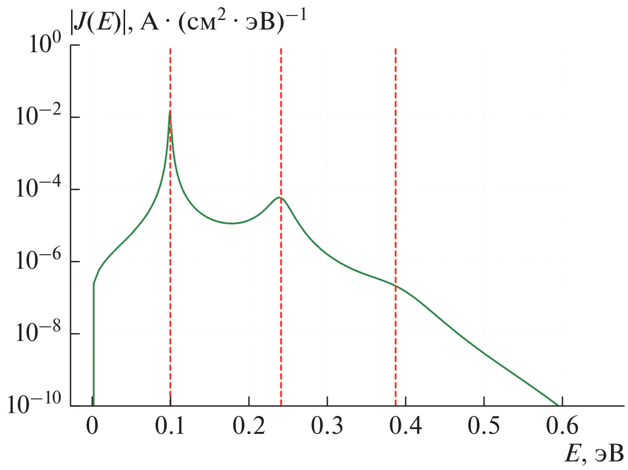

Рис. 4. Абсолютная величина распределения электрического тока $|J(E)|$ по энергии E для резонансной структуры при фиксированном напряжении смещения 0.5 В. Вертикальные пунктирные линии отмечают собственные значения гамильтониана расчетной области H^0.

ными при моделировании. Результаты представлены на рис. 2.

Также было проведено сравнение между результатами, полученными от данной модели, и данными работы [12] для структур W–Nb_2O_5 (1 нм)–Ta_2O_5–(1 нм)–W и W–Nb_2O_5 (3 нм)–Ta_2O_5 (1 нм)–W. Последняя структура характеризуется как резонансная. Полученные для этих структур вольт-амперные характеристики представлены на рис. 3. Они хорошо согласуются с известными данными.

Можно также показать, что пики зависимости коэффициента пропускания и плотности тока от энергии для резонансной структуры соответствует собственным значениям задачи (11), как видно на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была представлена одномерная модель переноса заряда посредством квантового туннелирования в структурах типа металл–диэлектрик–металл, использующая метод конечных элементов и формализм неравновесной функции Грина. Модель была проверена на тестовых задачах. Полученные при моделировании результаты хорошо соответствуют известным для этих задач решениям.

Замечено, что задача на собственные значения, связанная с профилем потенциального барьера, может дать приблизительные энергии пиков зависимости коэффициента пропускания от энергии электронов. Эта информация может помочь сделать расчеты более точными и производительными, например, путем сокращения количества разбиений диапазона энергий, для которого производятся вычисления.

Модель также может быть расширена на большее число пространственных измерений без существенных изменений в постановке задачи. Как показано в работе [13], собственные энергии металлических контактов могут быть выражены через собственные функции подводящих проводов, например, представляя их в виде полубесконечных полос. При этом вычислительная сложность должна резко вырасти, поскольку такой характер имеют часто используемые в данной модели матричные операции. Правильная дискретизация диапазона энергии, используемого в расчете, может помочь сохранить точность и замедлить рост требуемых вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shank J., Kadlec E.A., Jarecki R.L. et al.* // Phys. Rev. Appl. 2018. V. 9. Art. No 054040.
2. *Zhu Z., Joshi S., Moddel G.* // IEEE J. Sel. Top. Quant. 2014. V. 20. Art. No 3801409.
3. *Bailey R.* // J. Eng. Power. 1972. V. 94. P. 73.
4. *Shinohara N.* // IEICE Electron. Expr. 2013. V. 10. Art. No 20132009.
5. *Douyère A., Lan Sun Luk J.D., Alicalapa F.* // Electron. Lett. 2008. V. 44. P. 1409.
6. *Joshi S., Moddel G.* // J. Phys. D. 2016. V. 49. Art. No 265602.
7. *Mitrovic I.Z., Weerakkody A.D., Sedghi N. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2018. V. 112. Art. No 012902.
8. *Hartman T.E.* // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. Art. No 3427.
9. *Moddel G., Grover S.* Rectenna solar cells. N.Y.: Springer, 2013.
10. *Shin J.H., Yang J.H., Heo S.J., Jang J.E.* // AIP Adv. 2017. V. 7. Art. No 105307.
11. *Grover S., Moddel G.* // Sol. St. Electron. 2012. V. 67. P. 94.

12. *Jiang H., Shao S., Cai W., Zhang P.* // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 6553.
13. *Havu P., Havu V., Puska M.J., Nieminen R.M.* // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. Art. No 115325.
14. *Polizzi E., Datta S.* // Proc. Third IEEE Conf. Nanotechnol (San Francisco, 2003). V. 2. P. 40.
15. *Alnaes M.S., Blechta J., Hake J. et al.* // Arch. Numer. Software. 2015. V. 3. Art. No 20553.
16. *Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N. et al.* Automated solution of differential equations by the finite element method. Springer, 2012.
17. *Kirby R.C., Logg A.* // ACM Transact. Math. Software. 2011. V. 32. No 3. P. 417.
18. *Alnaes M.S., Logg A., Olgaard K. et al.* // ACM Transact. Math. Software. 2014. V. 40. P. 1.
19. *Kirby R.C.* // ACM Transact. Math. Software. 2004. V. 30. P. 502.
20. *Alnaes M.S., Logg A., Mardal K.-A. et al.* // Inter. J. Comp. Sci. Engin. 2009. V. 4. No 4. P. 231.
21. *Abdolkader T.M., Shaker A., Alahmadi A.N.M.* // Eur. J. Phys. 2018. V. 39. No 4. Art. No 045402.

Metal-insulator-metal structures modelling for terahertz radiation detection

K. T. C. Vu[a], *, G. M. Kazaryan[a], V. L. Savvin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physic, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: kt.vu@physics.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

Metal–insulator–metal structures are considered to be a promising candidate for rectifying elements in terahertz rectennas. This study considers a numerical model of such a structure that implements finite-element method in non-equilibrium Green's function formalism.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 91–97

УДК 537.86:535.016

ФОРМИРОВАНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СВЧ СИГНАЛОВ И МНОГОКАНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ С ПОМОЩЬЮ РАДИОФОТОННОГО ГЕНЕРАТОРА СЕТКИ ОПОРНЫХ ЧАСТОТ

© 2021 г. В. В. Кулагин[1, 2, 3, *], В. В. Валуев[3, 4], С. М. Конторов[5], Д. А. Прохоров[3], В. А. Черепенин[2]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга, Москва, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук, Москва, Россия*

[3]*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия*

[4]*Закрытое акционерное общество “Научно-технический центр “Модуль”, Москва, Россия*

[5]*Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования “Сколковский институт науки и технологий”, Москва, Россия*

**E-mail: victorvkulagin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

С помощью численного моделирования исследованы характеристики сетки опорных оптических частот, формируемой в схеме с непрерывным лазером и амплитудным модулятором с большим индексом модуляции. Продемонстрирована возможность формирования СВЧ колебаний требуемой частоты и исследована генерация широкополосного СВЧ колебания при модуляции двух и более линий, выделяемых из сетки оптических частот.

DOI: 10.31857/S0367676521010221

ВВЕДЕНИЕ

Современной тенденцией развития радиолокационных систем с возможностью радиовидения является обеспечение сверхвысокого разрешения по дальности за счет расширения полосы зондирующего сигнала. Формирование и обработка широкополосного СВЧ сигнала, построенные на базе традиционных электронных технологий, встречают в этом случае большие затруднения. Требуемые характеристики могут быть обеспечены в радиолокационных установках, разработанных на основе радиофотонных технологий. В настоящее время радиофотоника интенсивно развивается в России и за рубежом, позволяя в широкой полосе частот обеспечить быстродействие радиофотонных устройств, стабильность параметров, защищенность от внешних помех, возможность интегрально-оптической реализации и др. В радиофотонных приемных системах может использоваться многоканальное оптическое гетеродинирование [1]. В этом случае весь спектр входного СВЧ сигнала разбивается с помощью радиофотонных элементов на отдельные участки (каналы), содержащие полезную информацию [2, 3]. Далее в каждом канале применяется радиофотонный преобразователь для предварительной обработки сигнала и его трансформации на промежуточную частоту (для каждой части спектра входного сигнала СВЧ используется своя опорная частота для гетеродинирования, а промежуточная частота для всех каналов одинаковая), а затем сигнал оцифровывается коммерческими электронными АЦП. Таким образом, вся система состоит из набора идентичных по строению приемных каналов, каждый из них работает в своем частотном интервале, на которые разбит весь спектр входного сигнала. В некоторых случаях выходные сигналы этих каналов уже достаточны для получения необходимой информации, т.е. совместной обработки всех выходных сигналов может не потребоваться вовсе. Если требуется восстановление полного широкополосного входного сигнала в цифровом виде, то это может быть осуществлено с помощью обработки и объединения спектров сигналов из различных каналов [4, 5].

Формирование широкополосных СВЧ сигналов также может быть реализовано с помощью радиофотонных технологий. Здесь возможно как формирование ряда несущих частот, переключение между которыми может осуществляться программно в рабочем режиме, так и OFDM сигналов [6] (orthogonal frequency-division multiplexing – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов), которые все чаще начинают использоваться для целей зондирования [7].

Важным элементом радиофотонной приемной системы на базе многоканального оптического гетеродинирования и радиофотонной системы формирования широкополосных СВЧ сигналов является генератор сетки опорных частот. От стабильности частот этого генератора зависят характеристики приемной и передающей систем. Обычно в радиофотонике основой таких генераторов служат стабильные импульсные лазеры с синхронизацией мод. В частотной области спектр колебаний этих лазеров представляет собой набор равноотстоящих мод с разными частотами, которые могут быть выделены с помощью гребенки оптических фильтров. В то же время многомодовые оптические лазеры с синхронизированными модами недостаточно стабильны в работе, дороги, и имеют длительное время выхода на рабочий режим, кроме того, возможность их интегральной оптической реализации существенно осложнена. Дополнительным недостатком их применения в зондирующих системах является слишком большое количество мод (несколько тысяч и даже десятков тысяч) и существенная неравномерность их амплитуд.

В работе исследуется альтернативный вариант источника сетки оптических частот, построенного по радиофотонным технологиям. С помощью численного моделирования определены характеристики сетки частот, продемонстрирована возможность формирования СВЧ колебания требуемой частоты при выделении оптическими фильтрами соответствующих мод из сетки частот и фотодетектировании суммарного сигнала, а также исследована возможность генерации широкополосного СВЧ колебания при наложении модуляции на две и более линии, выделяемые из сетки оптических частот.

РАДИОФОТОННЫЙ ИСТОЧНИК СЕТКИ ОПТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ

Оптический источник многомодовой накачки с требуемыми характеристиками может быть реализован с помощью схемы, включающей высокостабильный непрерывный лазер и несколько амплитудных и фазовых модуляторов с большим индексом модуляции для генерации достаточного количества боковых линий. Модулирующий сигнал поступает в этой схеме от источника СВЧ колебаний, частота которого определяет расстояние между оптическими линиями в сетке частот. В простейшем случае может быть использован только один амплитудный модулятор с двумя независимыми СВЧ входами [8]. В этой схеме на СВЧ входы модулятора подаются сигналы одной частоты, но разные по амплитуде. На выходе модулятора оптические поля из двух плеч суммируются. При подборе определенного соотношения разности амплитуд СВЧ сигналов и сдвига оптических фаз в плечах модулятора, что определяет положение рабочей точки, неравномерность амплитуды гребенки, формируемой в одном плече, частично компенсируется противоположной неравномерностью в другом плече, что позволяет получить большое количество оптических линий в спектре с малой неравномерностью амплитуд [8]. Выделение нужных линий из оптической сетки частот осуществляется узкополосными оптическими фильтрами. С помощью фотодетектирования этих линий формируется выходной СВЧ сигнал, частота которого кратна частоте модулирующего СВЧ колебания. Преимуществом таких систем является возможность независимо задавать среднюю частоту сетки, определяемую частотой лазера, и расстояние между линиями в ней, которое определяется частотой модуляции. При этом шумовые характеристики сетки частот зависят в основном от шумов модулирующего радиочастотного сигнала и характеристик непрерывного лазера. Использование опто-электронного генератора [9] для формирования модулирующего радиочастотного сигнала позволит существенно снизить фазовые шумы всей системы. Достоинством такого подхода является также возможность генерации оптических сеток частот с заданным количеством частотных линий, что существенно увеличивает энергоэффективность генератора [10].

В работе проведено численное исследование характеристик сетки оптических частот, формируемой в амплитудном модуляторе с двумя независимыми входами СВЧ [8]. Созданная математическая модель базируется на динамических уравнениях для элементов, используемых в схеме (модулятор, фотодетектор, фильтры и т.д.), кото-

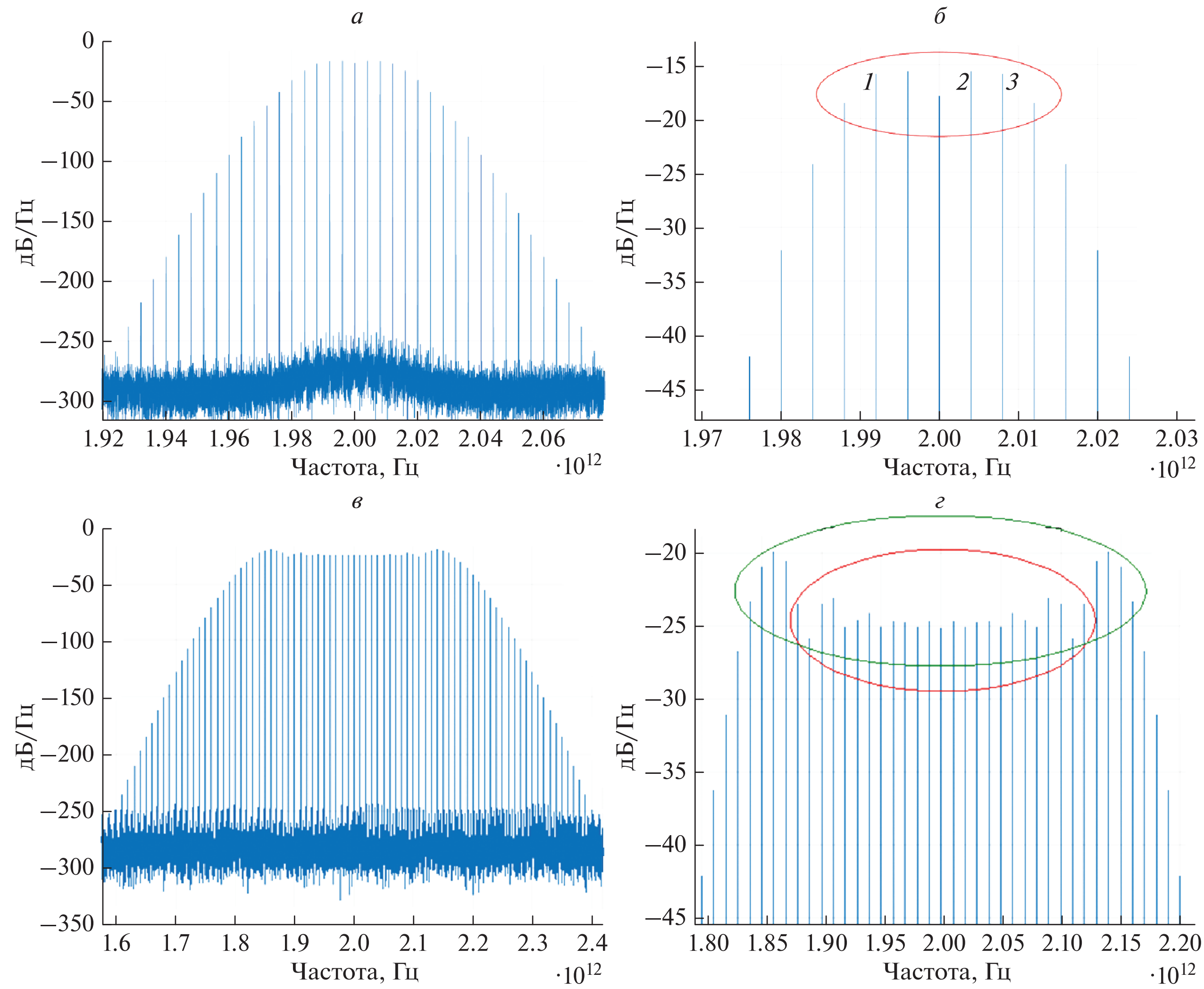

Рис. 1. Спектральная плотность (СП) выходного поля модулятора для модулирующей частоты 4 (*а* и *б*) и 10 ГГц (*в* и *г*). Общий вид спектра (*а* и *в*); увеличенная центральная часть спектра (*б* и *г*). Красным эллипсом выделены центральные линии, неравномерность спектральной плотности которых менее 3 дБ (7 мод на панели *б* и 25 мод на панели *г*), а зеленым эллипсом – мод с неравномерностью менее 6 дБ (33 моды на панели *г*).

рые приведены и детально обсуждаются в [1]. Возможные источники шумов, которые включают частотный и амплитудный шумы лазера, дробовой шум фотодетектирования, тепловые и другие шумы, также подробно описаны в [1], где определены и их статистические характеристики, зависящие от параметров элементов схемы (мощность лазера, полуволновое напряжение модулятора, потери в системе, эффективность фотодетектора и др.). Численный код разработан с использованием пакета программ MathLab и позволяет анализировать основные характеристики генератора сетки оптических частот.

В работе были определены требуемые индексы модуляции в зависимости от необходимого количества формируемых линий, а также достижимая при этом неравномерность их амплитуд. Спектральная плотность выходного поля модулятора показана на рис. 1. Модулирующая частота составляет 4 ГГц на рис. 1*а*, 1*б*, индексы модуляции в плечах равны 2 и 3.6. Красный эллипс выделяет 7 центральных линий с неравенством мощности менее 3 дБ. Оптическая частота выбрана равной 10^{12} Гц из-за ограниченной вычислительной мощности серверов. Для больших индексов модуляции на рис. 1*в*, 1*г* представлена спектральная плотность выходного поля модулятора для модулирующей частоты 10 ГГц. Индексы модуляции в плечах равны 15 и 16.6. Красным эллипсом выделены центральные линии, неравномерность амплитуд которых менее 3 дБ (25 мод), а зеленым эллипсом – мод с неравномерностью менее 6 дБ (33 моды).

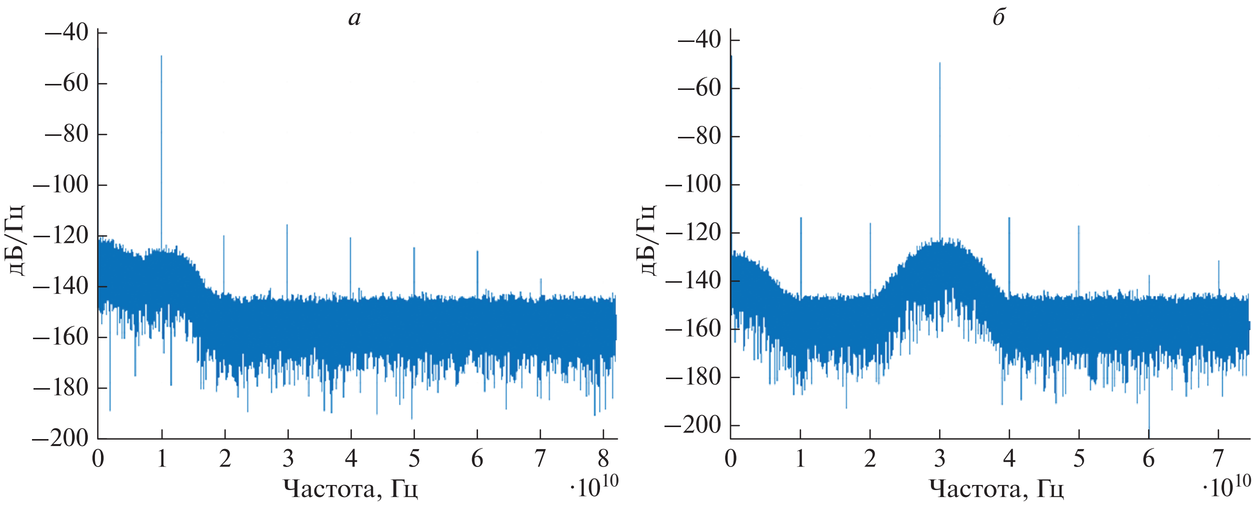

Рис. 2. Спектральная плотность сигнала на выходе фотодетектора: частотой 10 ГГц при выделении двух соседних мод из сетки частот, представленной на рис. 1*в* (*а*); частотой 30 ГГц при выделении двух мод с разностью частот 30 ГГц из этой сетки частот (*б*).

ФОРМИРОВАНИЕ СВЧ КОЛЕБАНИЯ ЗАДАННОЙ ЧАСТОТЫ

В работе также определены возможности формирования СВЧ колебаний заданной частоты с помощью выделения узкополосными оптическими фильтрами нужных частотных компонент и исследованы их характеристики. После выделения из сетки оптических частот нужных линий производится сложение их полей и затем фотодетектирование. Фотодетектор является квадратичным элементом, поэтому в результате такой операции возникает разностная частота, которая может принадлежать к СВЧ диапазону частот. Выбирая нужные линии, можно получать частоты колебаний от частоты первичной модуляции до максимальной частоты, равной полной ширине спектра сетки частот. На рис. 2 представлены спектральные плотности сигналов на выходе фотодетектора с частотами 10 ГГц (рис. 2*а*) и 30 ГГц (рис. 2*б*). Первый из них получен при выделении двух соседних мод из сетки частот, показанной на рис. 1*в*, а второй – при выделении двух мод с разностью частот 30 ГГц. Высота линии над уровнем шума составляет порядка 75 дБ, а ближайшие боковые линии меньше основной линии почти на 70 дБ. Ширина линии лазера в моделированиях составляла 500 кГц, мощность лазера – 40 мВт. Рис. 2 демонстрирует, что при хороших параметрах лазера шумы на выходе фотоприемника могут быть малыми.

Численные моделирования показывают, что ширину линии формируемых колебаний СВЧ определяют шумы лазера и шумы источника первичной модуляции, причем роль последних шумов растет с увеличением разности частот линий, используемых для фотодетектирования. В то же время частотные шумы лазера могут быть частично подавлены за счет их компенсации при преобразовании на фотодетекторе и переходе к частоте СВЧ сигнала. Таким образом, роль частотных шумов источника первичной модуляции является определяющей в получении СВЧ сигналов с высокой спектральной чистотой.

Для проверки модуляционного метода формирования сетки опорных оптических частот и генерации СВЧ колебаний с ее помощью проводилось также экспериментальное исследование макета генератора, основанного на двойном параллельном модуляторе [11]. Измерения показали возможность формирования оптической сетки частот с заданным расстоянием между линиями и с определенным количеством линий, а также СВЧ колебаний с частотой, кратной частоте модулирующего СВЧ колебания. Следует отметить, что при относительной простоте такой схемы (вместо модулятора с двумя входами СВЧ используется двойной параллельный модулятор, в котором два модулятора Маха–Цандера включены параллельно) с ее помощью можно сформировать всего пять или семь оптических линий в зависимости от выбора положений рабочих точек и амплитуд модулирующих СВЧ сигналов (частоты этих сигналов должны быть одинаковыми аналогично схеме с модулятором с двумя входами СВЧ), что в общем случае является недостаточным.

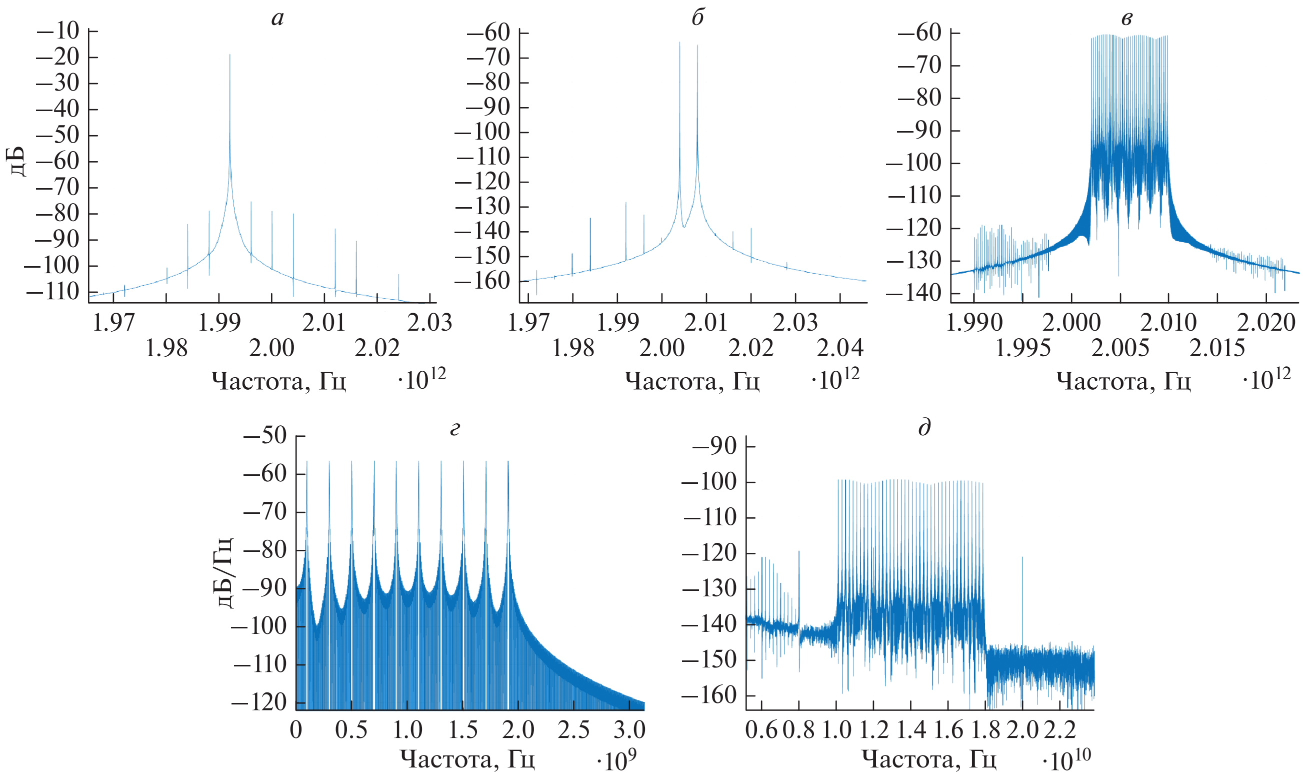

Рис. 3. Спектральные плотности сигналов в схеме формирования широкополосного СВЧ сигнала на выходе фотодетектора: опорная линия, выделенная из сетки частот, представленной на рис. 1*в* (*а*); две линии для модуляции, также выделенные из сетки частот на рис. 1*в* (*б*); две линии, промодулированные полезным сигналом (*в*); полезный сигнал для модуляции двух линий (десять линий с расстоянием между ними 200 МГц и общей шириной спектра 2 ГГц) (*г*); СВЧ сигнал на выходе фотодетектора (40 линий с расстоянием между ними 200 МГц и общей шириной спектра 8 ГГц, средняя частота равна 14 ГГц) (*д*).

ФОРМИРОВАНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СВЧ КОЛЕБАНИЙ

С помощью численного моделирования продемонстрирована и возможность генерации радиофотонными методами модулированного СВЧ колебания. Такое формирование также требует выделения нужных линий из сетки оптических частот, потом одна из линий модулируется полезным сигналом, а после фотодетектирования модуляция переносится на формируемый СВЧ сигнал. Для создания широкополосного СВЧ сигнала может использоваться не одна линия, а несколько соседних линий. В этом случае каждая из них оказывается промодулирована полезным сигналом, и при выборе ширины спектра полезного сигнала, равной половине расстояния между линиями в оптической сетке частот, получается непрерывный спектр. Такой метод формирования широкополосного СВЧ сигнала наиболее эффективен, когда требуется относительно простая форма спектра, например, при формировании OFDM сигналов [6]. В этом случае все линии, выделенные из сетки оптических частот для модуляции, имеют одинаковый спектр, частота которого сдвинута в соответствии с частотой линии.

На рис. 3 представлены спектральные плотности сигналов в схеме формирования широкополосного СВЧ сигнала на выходе фотодетектора. Из сетки оптических частот, показанной на рис. 1*а*, узкополосным оптическим фильтром выделяется линия *1* (рис. 1*б*) для использования в качестве локального оптического гетеродина. Спектральная плотность этой линии после выделения фильтром представлена на рис. 3*а*. Линии *2* и *3* (рис. 1*б*) выделяются другим фильтром из той же сетки оптических частот для последующего модулирования, спектральная плотность этих линий показана на рис. 3*б*. После модуляции полезным сигналом (рис. 3*г*) от внешнего источника спектральная плотность линий *2* и *3* приобретает вид, указанный на рис. 3*в*. Полезный сигнал для модуляции двух оптических линий содержит десять мод с расстоянием между соседними модами 200 МГц. После модуляции обе линии приобретают левую и правую боковые полосы, каждая из которых содержит модулирующий сигнал. Расстояние между оптическими линиями сетки частот (4 ГГц) подобрано так, что модулирующие линии заполняют его равномерно. В результате СВЧ сигнал на выходе фотодетектора имеет спектр с общей шириной 8 ГГц и средней частотой 14 ГГц и содержит 40 линий с расстоянием между ними 200 МГц. Количество линий в модулирующем сигнале может быть увеличено при необходимости с помощью внешнего источника. Также шум слева от спектра сигнала на выходе фотодетектора, который связан с модуляцией полезным сигналом неполностью подавленных линий сетки частот, а затем их преобразования на фотодетекторе, и дискретные линии могут быть подавлены до фотодетектирования при фильтрации линий на рис. 3*а*, 3*б* за счет увеличения коэффициента подавления фильтров. В этом случае сигнал будет превышать шумовую линию на 40 дб. Увеличение мощности лазера приведет к уменьшению дробового шума и позволит сделать это превышение еще больше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для применения генератора сетки оптических частот в качестве источника опорных колебаний в многоканальном широкополосном приемном устройстве расстояние между линиями сетки должно соответствовать полосе пропускания электронных АЦП [2–5], а общее количество формируемых линий приблизительно равняться требуемому числу каналов. В этом случае достигается наиболее эффективный режим генерации. Полоса современных коммерческих электронных АЦП может доходить до 4 ГГц, в этом случае для обработки сигнала на рис. 3*д* потребуется сформировать не менее 6 линий (см. рис. 1*б*). Мощность задающего СВЧ сигнала, подаваемая на модулятор, формирующий сетку оптических частот, будет при этом составлять 0.5–1 Вт в зависимости от полуволнового напряжения модулятора. Формирование модулированных сигналов определяется требованиями к широкополосному СВЧ сигналу и может варьироваться в зависимости от задач.

В работе проведено численное исследование характеристик сетки оптических частот, формируемой в амплитудном модуляторе с двумя независимыми входами СВЧ. Определены возможные источники шумов и помех в системе и их характеристики, создана математическая модель и разработан численный код с использованием пакета программ МАТЛАБ, позволяющий анализировать основные характеристики генератора сетки оптических частот. Были определены требуемые индексы модуляции в зависимости от необходимого количества формируемых линий, а также достижимая неравномерность их амплитуд. Также определены возможности выделения узкополосными оптическими фильтрами нужных частотных компонент и исследованы их характеристики. Кроме того, численно продемонстрирована возможность формирования широкополосного СВЧ колебания при наложении модуляции на две и более линии из сетки опорных частот. Проводилось также экспериментальное исследование макета генератора сетки опорных оптических частот на базе двойного параллельного модулятора, которое подтвердило возможность формирования оптической сетки частот с заданным расстоянием между линиями и с определенным количеством линий, а также генерации СВЧ колебаний с частотой, кратной частоте модулирующего СВЧ колебания.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 19-29-06108 и № 20-07-00768).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валуев В.В., Гуляев Ю.В., Конторов С.М. и др.* // Радиотех. электр. 2018. Т. 63. № 9. С. 1020; *Valuev V.V., Gulyaev Yu.V., Kontorov S.M. et al.* // J. Commun. Tech. Electr. 2018. V. 63. No 9. P. 1080.
2. *Kontorov S.M., Cherepenin V.A., Kulagin V.V. et al.* // Proc. PIERS-Toyama (Toyama, 2018). P. 967.
3. *Cherepenin V.A., Kontorov S.M., Kulagin V.V. et al.* // Proc. 48th EuMC. (Madrid, 2018). P. 796.
4. *Кулагин В.В., Валуев В.В., Конторов С.М. и др.* // Труды КрыМиКо’2018. (Севастополь, 2018). Т. 6. С. 1515.
5. *Кулагин В.В., Валуев В.В., Конторов С.М. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 67.
6. *Rohling H.* OFDM concepts for future communication systems. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
7. *Ellinger J. Zhang Z., Wicks M. et al.* // IET Radar. Sonar. Nav. 2017. V. 11. No 3. P. 444.
8. *Sakamoto T., Kawanishi T., Izutsu M.* // Opt. Lett. 2007. V. 32. No 11. P. 1515.
9. *Yao X.S., Maleki L.* // Electr. Lett. 1994. V. 30. P. 1525.
10. *Zhou X., Zheng X., Wen H. et al.* // Opt. Commun. 2014. V. 313. P. 356.
11. *Shang L., Li Y., Ma L. et al.* // Opt. Commun. 2015. V. 356. P. 70.

Formation of broadband microwave signals and multichannel frequency conversion using a microwave photonics generator of a reference frequency net

V. V. Kulagin[a, b, c, *], **V. V. Valuev**[c, d], **S. M. Kontorov**[e], **D. A. Prokhorov**[c], **V. A. Cherepenin**[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, Moscow, 119991 Russia*

[b] *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia*

[c] *National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia*

[d] *Research Centre "Module", Moscow, 125190 Russia*

[e] *Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, 121205 Russia*

**E-mail: victorvkulagin@yandex.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

Characteristics of a net of reference optical frequencies formed in a scheme with a continuous laser and an amplitude modulator with a large modulation index are studied using numerical simulation. The possibility of forming microwave oscillations of the required frequency is demonstrated, and the generation of a broadband microwave oscillation is studied when two or more lines are modulated that are selected from the optical frequency net.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 98–105

УДК 621.385.6

О ТЕОРИИ ГИБРИДА ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ФОТОКАТОДОМ И УСИЛИТЕЛЯ С КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

© 2021 г. А. А. Фунтов*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского", Саратов, Россия

**E-mail: aafuntov@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Изложена теория гибрида лампы бегущей волны (ЛБВ) с фотокатодом и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью. В секции с комплексной диэлектрической проницаемостью в первом случае используется линейная теория усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью, а в ЛБВ-секции – линейная теория ЛБВ. Для построения нелинейной теории используется метод заданного движения и метод заданного тока.

DOI: 10.31857/S0367676521010117

ВВЕДЕНИЕ

В связи с активным развитием радиофотоники, одним из направлений которой является работа с СВЧ-сигналами с помощью оптических методов, представляется важным вновь вернуться к лампе бегущей волны (ЛБВ) с фотокатодом (фото-ЛБВ) в видоизмененном варианте, рассмотрев гибрид фото-ЛБВ с усилителем с комплексной диэлектрической проницаемостью (в дальнейшем КДП).

Следует отметить, что случай отрицательной действительной компоненты КДП фактически один из видов СВЧ-метаматериалов. Вакуумные электронные приборы с такими метаматериалами могут иметь малые размеры, высокую мощность, высокий КПД и большой коэффициент усиления [1]. Такие приборы имеют многообещающие приложения в радиолокации, системах связи, ускорителях и многих других областях. Также следует отметить высокий интерес исследователей к метаматериалам, выраженный статьях и докладах на соответствующих конференциях (см., например, [1–4]). Отдельно упомянем работу [6], посвященную метаматериалам в ТГц-диапазоне.

Предлагаемая гибридизация должна позволить сохранить все присущие фото-ЛБВ особенности с возможным улучшением характеристик за счет вставки между фотокатодом и отрезком спирали секции с КДП (см. рис. 1). За счет использования КДП-усиления это позволит сократить длину прибора. При этом гибрид остается широкополосным.

Далее используем нелинейные уравнения для волн пространственного заряда в среде с комплексной проводимостью [7]. При прохождении бесконечно широкого (по осям y и z) потока через такую среду плотность тока можно представить в виде

$$i = -\sigma E - \frac{e\rho_0}{m\omega_p^2}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{B_L}\int E\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

где σ – активная компонента проводимости, B_L – коэффициент индуктивности, e/m – удельный заряд электрона, ρ_0 – средняя плотность заряда в потоке, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\omega_p = \sqrt{\frac{e\rho_0}{m\varepsilon_0}}$ – плазменная частота, E – продольная компонента напряженности электрического поля. Уравнение движения в этом случае примет вид

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{e}{m}E. \qquad (2)$$

Продифференцировав (2) по t и использовав (1) получим

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 B_L}\int\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = -\omega_p^2\upsilon_0\frac{I}{I_0}, \qquad (3)$$

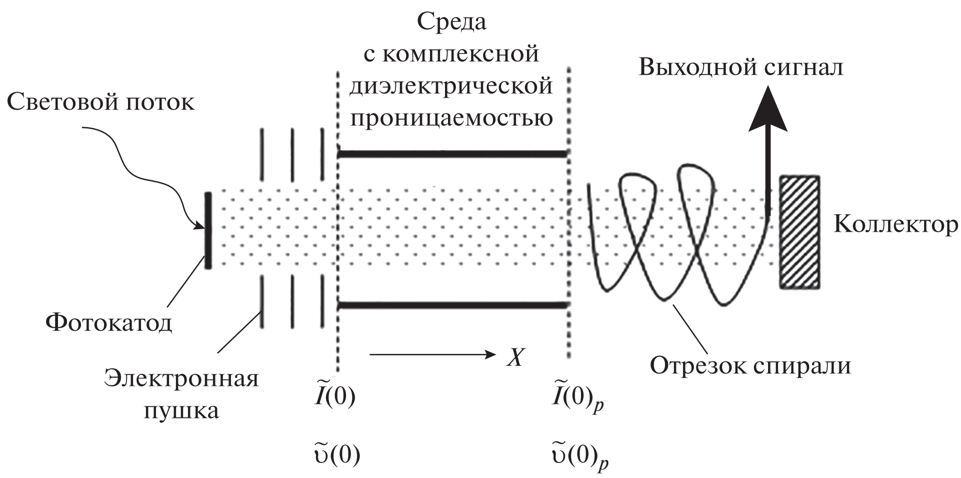

Рис. 1. Рассматриваемая модель. $\tilde{I}(0)$, $\tilde{\upsilon}(0)$ – начальные возмущения тока и скорости на входе в секцию с комплексной диэлектрической проницаемостью, $\tilde{I}(0)_p$, $\tilde{\upsilon}(0)_p$ – начальные возмущения тока и скорости на входе в ЛБВ-секцию.

где υ_0 – средняя скорость пучка, υ – скорость пучка, I – ток пучка, I_0 – средний ток пучка. Из уравнения непрерывности нетрудно получить

$$\upsilon^2\frac{\partial I}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial I}{\partial t}-I\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Линеаризуем уравнения (3) и (4). Предположим, что $I=I_0+\tilde{I}$ и $\upsilon=\upsilon_0+\tilde{\upsilon}$, причем $\tilde{I}\ll I_0$, $\tilde{\upsilon}\ll\upsilon_0$. Тогда уравнения (3) и (4) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2}+\upsilon_0\frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t\partial x}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial t}+\upsilon_0\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial x}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0 B_L}\times \\ \times\int\left(\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial t}+\upsilon_0\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial x}\right)\mathrm{d}t=-\omega_p^2\upsilon_0\frac{\tilde{I}}{I_0}, \tag{5}$$

$$\upsilon_0^2\frac{\partial\tilde{I}}{\partial x}+\upsilon_0\frac{\partial\tilde{I}}{\partial t}-I_0\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial t}=0. \tag{6}$$

Предполагая, что все переменные величины $\sim e^{j\omega t}$ (где $j=\sqrt{-1}$, ω – рабочая частота), получим

$$\left(j\omega\upsilon_0\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-\omega^2\tilde{\upsilon}\right)\left(1-j\frac{\sigma+jL}{\omega\varepsilon_0}\right)=-\omega_p^2\upsilon_0\frac{\tilde{I}}{I_0}, \tag{7}$$

$$\upsilon_0^2\frac{\partial\tilde{I}}{\partial x}+j\omega\left(\upsilon_0\tilde{I}-I_0\tilde{\upsilon}\right)=0, \tag{8}$$

где $L=-1/(\omega B_L)$. Из (7) и (8) нетрудно получить (опуская в дальнейшем тильды)

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+2j\beta_e\frac{\partial I}{\partial x}-\left(\beta_e^2-\frac{\beta_p^2}{1+\dfrac{L-j\sigma}{\omega\varepsilon_0}}\right)I=0, \tag{9}$$

где $\beta_p=\omega_p/\upsilon_0$, $\beta_e=\omega/\upsilon_0$.

Рассмотрим следующую модель: на катод падает амплитудно-модулированный световой сигнал и поэтому можно считать, что максимальная величина переменной составляющей фототока $I=mI_0$, где m – параметр, характеризующий глубину модуляции, I_0 – средний фототок. Ограничимся в дальнейшем линейной теорией, предполагая, что $m\ll 1$. Считаем, что на входе в секцию с комплексной диэлектрической проницаемостью пучок имеет модуляцию по скорости и току.

Отметим, что среда с КДП – фактически один из вариантов резистивного усилителя. В дальнейшем будем называть ее первой секцией. В линейной теории КДП-усилителя, а значит и в первой секции исследуемого гибрида, выражения для переменной скорости и тока, как следует из (7)–(9), примут вид

$$\frac{I}{I_0}=e^{-j\beta_e x_1}\left[\frac{I(0)}{I_0}\cos\frac{\beta_p x_1}{\sqrt{\varepsilon}}+j\frac{\upsilon(0)}{\upsilon_0}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{\omega_p}\sin\frac{\beta_p x_1}{\sqrt{\varepsilon}}\right], \tag{10}$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_0}=e^{-j\beta_e x_1}\left[\frac{\upsilon(0)}{\upsilon_0}\cos\frac{\beta_p x_1}{\sqrt{\varepsilon}}+j\frac{I(0)}{I_0}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{\omega_p}\sin\frac{\beta_p x_1}{\sqrt{\varepsilon}}\right], \tag{11}$$

где x_1 – длина первой (КДП) секции, ε – относительная комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Средний заряд электронов скомпенсирован ионным фоном.

Считаем далее $\varepsilon=1+\dfrac{L-j\sigma}{\omega\varepsilon_0}$. Введем для удобства, $L'=\dfrac{L}{\omega\varepsilon_0}$ и $\sigma'=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$, тогда $\varepsilon=1+L'-j\sigma'$ (штрихи в дальнейшем опустим).

Во второй секции, служащей для усиления и вывода сигнала, воспользуемся известной теорией фото-ЛБВ [8]. Будем использовать следующее уравнение возбуждения линии передачи

$$E(x) = -\frac{\beta_0^2 K}{2}\int_0^x I(\zeta)\, e^{-j(\beta_0 - j\gamma_0)(x-\zeta)} d\zeta, \qquad (12)$$

где x – координата во второй секции, β_0 – постоянная распространения в линии без пучка, γ_0 – затухание в линии передачи на единицу длины, K – сопротивление связи. В качестве начальных условий для второй секции $I(0)_p$, $\upsilon(0)_p$ будем использовать значения из уравнений (10) и (11) на выходе первой секции.

Как известно (см., например, [8]), основная характеристика фотоприборов – эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{экв}} = \frac{|E|^2}{\beta_0^2 K |I(0)|^2}. \qquad (13)$$

Для удобства введем $C^3 = \frac{I_0 K}{4V_0}$, $q = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$, $E' = \frac{E}{V_0 \beta_e}$, $I'(0) = \frac{I(0)}{I_0}$, $\upsilon'(0) = \frac{\upsilon(0)}{v_0}$, $\xi = \beta_e x$, $\beta_0' - j\gamma_0' = \frac{\beta_0 - j\gamma_0}{\beta_e}$ (штрихи в дальнейшем опустим). При малом параметре усиления $C \ll 1$ во второй секции (в нормировке настоящей работы) [9]

$$E = -2jC^2 I(0)_p \left[\frac{\left(\delta_2\delta_3 - \frac{q}{C^2}\right)\left(\delta_1^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)} e^{\delta_1\xi} + \frac{\left(\delta_1\delta_3 - \frac{q}{C^2}\right)\left(\delta_2^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)} e^{\delta_2\xi} + \frac{\left(\delta_1\delta_2 - \frac{q}{C^2}\right)\left(\delta_3^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)} e^{\delta_3\xi}\right] - 2C\upsilon(0)_p \times$$
$$\times \left[\frac{(\delta_2+\delta_3)\left(\delta_1^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)} e^{\delta_1\xi} + \frac{(\delta_1+\delta_3)\left(\delta_2^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)} e^{\delta_2\xi} + \frac{(\delta_1+\delta_2)\left(\delta_3^2 + \frac{q}{C^2}\right)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)} e^{\delta_3\xi}\right], \qquad (14)$$

где δ_i – нормированные корни дисперсионного уравнения

$$\delta^3 + a_1\delta^2 + a_2\delta + a_3 = 0, \qquad (15)$$

где при $C \ll 1$, $a_1 = jb + d$, $a_2 = \frac{q}{C^2}$, $a_3 = j + \frac{q}{C^2}(jb + d)$, $b = \frac{\beta_0 - 1}{C} = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_\text{ф}}{C\upsilon_\text{ф}}$, $\upsilon_\text{ф}$ – фазовая скорость волны во второй секции без пучка, d – параметр распределенных потерь. Будем теперь полагать $\beta_0 = 1 + Cb$. Тогда с учетом введенных величин (13) примет вид

$$\frac{R_{\text{экв}}}{K} = \frac{|E|^2}{16(1+Cb)^2 |I(0)|^2 C^6}. \qquad (16)$$

Рассмотрим влияние параметров на $R_{\text{экв}}$. Из рис. 2*а* видно, что $R_{\text{экв}}$ периодично по длине 2-й секции (ЛБВ), это объясняется явлением *QC*-спада[1], а представленные на рис. 2*а* зависимости аналогичны функции, полученной в первом приближении в [8], которая также периодична. Из рис. 2*б* видно, что при $L < -1$ и при $\sigma \to \infty$ $R_{\text{экв}}$ возрастает с увеличением длины 2-й секции, что объясняется наличием КДП-неустойчивости, а в случае когда неустойчивости нет (приведенном для сравнения) $R_{\text{экв}}$ периодично.

Из рис. 2*в* видно, что $R_{\text{экв}}$ осциллирует с изменением параметра b при фиксированной длине прибора, причем при выбранных параметрах оптимальное значение $R_{\text{экв}}$ достигается при $|b| = 10$, что объясняется эффектами пространственного заряда. Кроме того, при одинаковой полной длине эквивалентное сопротивление исследуемого гибрида (при подборе параметров) больше, чем у классической фото-ЛБВ на несколько порядков. "Колебания" $R_{\text{экв}}$ объясняется периодичной зависимостью $R_{\text{экв}}$ от ξ.

Из рис. 2*г*, 2*д* видно, что $R_{\text{экв}}$ периодично от C из-за периодичности *QC*-спада: при фиксированной длине *QC*-спад может наблюдаться при различных значениях q и C.

Из рис. 3*а* видно, что $R_{\text{экв}}$ сначала увеличивается с ростом σ, а затем выходит на насыщение. В теории КДП-усилителя мнимые корни дисперсионного уравнения имеют экстремум в зависимости от σ, по существу являющегося парамет-

[1] Напомним, что *QC*-спад – явление в фото-ЛБВ, состоящее в том, что на определенной длине лампы наблюдается спад высокочастотной составляющей тока (а, следовательно, и $R_{\text{экв}}$) из-за эффектов пространственного заряда. В отличие от классической ЛБВ, разность фаз между током и полем из-за эффектов пространственного заряда непостоянна и меняется от длины лампы (носит пульсирующий характер). Кроме того, при малой длине ток и поле находятся в противофазе. Подобный эффект может также возникнуть при ненулевой разности фаз высокочастотных составляющих скорости и тока пучка.

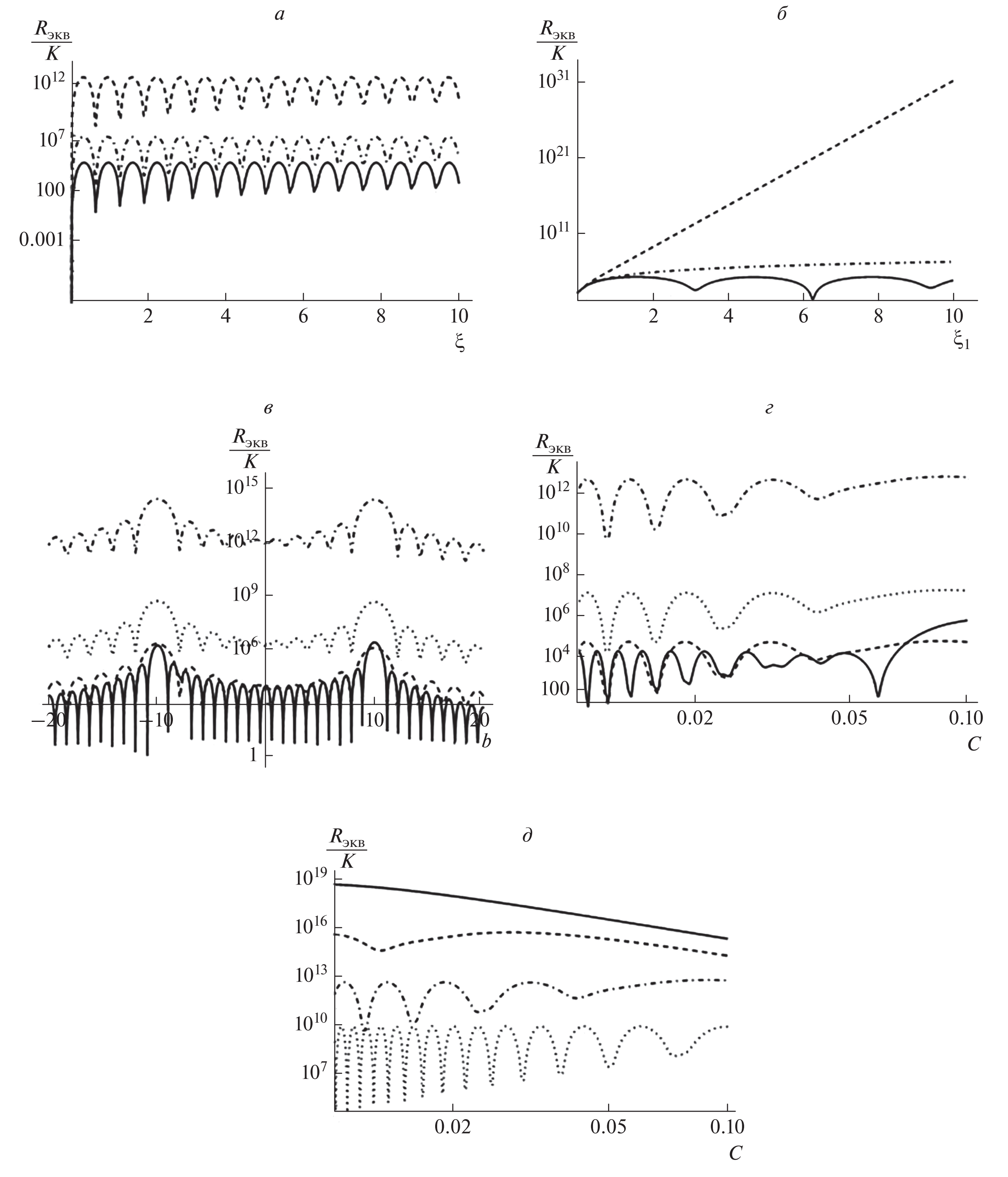

Рис. 2. $\frac{R_{экв}}{K}$ (*а*) от ξ (длины ЛБВ-секции) при $\xi_1 = 3$, $b = 0$, $q = 0.01$, $C = 0.01$. (*б*) от ξ_1 (длины КДП-секции) при $\xi = 3$, $b = 0$, $q = 0.01$, $C = 0.01$. Кривые на рис. (*а*) и (*б*): сплошная – $L = \sigma = 0$, пунктир $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрих-пунктир $\sigma = 10^6$, $L = 0$. (*в*) от b при $q = 0.01$, $C = 0.01$. (*г*) от C при $b = 0$, $q = 0.01$. Кривые на рис. (*в*) и (*г*): сплошная – классическая фото-ЛБВ $L = \sigma = 0$, $\xi_1 = 0$, $\xi = 6$; пунктир $L = \sigma = 0$, $\xi_1 = \xi = 3$; штрих-пунктир $\sigma = 0$, $L = -1.1$, $\xi_1 = \xi = 3$; точки $\sigma = 10^6$, $L = 0$, $\xi_1 = \xi = 3$; (*д*) от C при $b = 0$, $\sigma = 0$, $L = -1.1$ и различных q: сплошная – $q = 10^{-4}$, пунктир 10^{-3}, штрих-пунктир 10^{-2}, точки 10^{-1}. Все графики построены при $I(0) = \upsilon(0) = 10^{-3}$, $d = 0$.

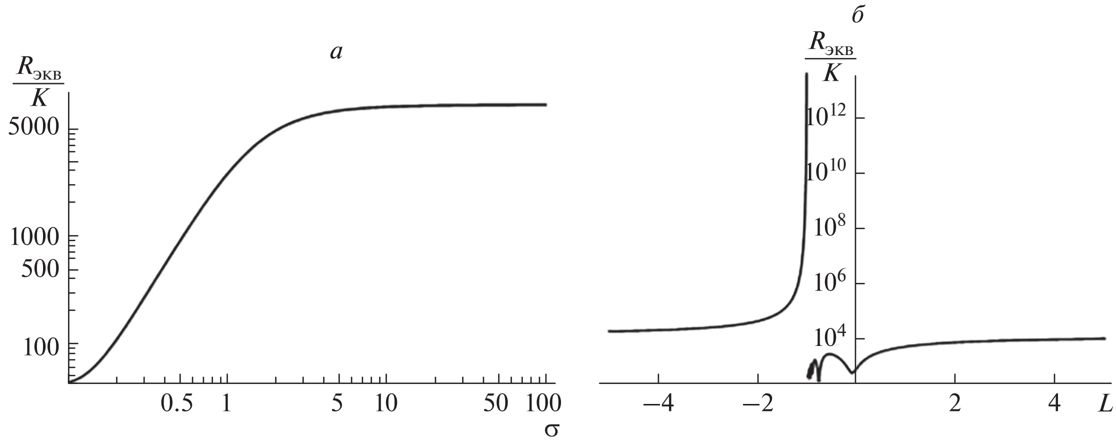

Рис. 3. $\frac{R_{экв}}{K}$(*а*) от σ при $L = 0$, (*б*) от L при $\sigma = 0$. Все графики построены при $\xi_1 = \xi = 3$, $I(0) = \upsilon(0) = 10^{-3}$, $b = 0$, $q = 0.01$, $C = 0.01$, $d = 0$.

ром потерь. Однако увеличение потерь приводит к расширению частотной области, в которой возможна КДП-неустойчивость [7]. Таким образом одновременное увеличение потерь и расширение частотной области приводят к виду полученной на рис. 3*а* зависимости. Из рис. 3*б* видно, что при прочих равных наибольшее значение $R_{экв}$ достигается при индуктивной проводимости, т.к. при чисто индуктивной проводимости ($\sigma = 0$, $L < 0$) при выполнении условия $L = -1$ токи смещения и индуктивные токи в среде (в первой секции) становятся равными друг другу по величине, а наведенный заряд стремится к ∞ [7]. "Колебания" $R_{экв}$ правее $L = -1$ объясняются численными артефактами.

ПРИБЛИЖЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГИБРИДА ФОТО-ЛБВ И КДП-УСИЛИТЕЛЯ

Поскольку решение строгих нелинейных уравнений вызывает известные трудности, воспользуемся в первой секции описываемого гибрида методом заданного движения, развитым в работе [7], в которой проводился приближенный учет нелинейности процессов группирования в случае распространения бесконечно широкого электронного пучка в среде с индуктивной проводимостью. В настоящей работе проведено обобщение развитой в [7] теории на случай произвольной комплексной проводимости.

Вернемся к размерным величинам и возьмем следующие начальные условия: на входе в первую секцию $x = 0$ $i(0) = i_{10}$, $\upsilon(0) = \upsilon_{10}$. Для удобства сравнения с [7] перепишем уравнений (10) и (11) в виде

$$i = e^{-j\beta_e x}\left[i_{10}\mathrm{ch}\beta_p gx + j\upsilon_{10}\frac{\beta_e\rho_0}{\beta_p g}\mathrm{sh}\beta_p gx\right], \qquad (17)$$

$$\upsilon = e^{-j\beta_e x}\left[\upsilon_{10}\mathrm{ch}\beta_p gx - j\frac{\omega_p}{\omega}g\upsilon_0\frac{i_{10}}{i_0}\mathrm{sh}\beta_p gx\right], \qquad (18)$$

где $jg = \frac{1}{\sqrt{1 - j\sigma + L}}$, i_0 – средняя плотность тока.

Выделим действительную и мнимую часть g. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1 - j\sigma + L}} = \frac{\exp\left[\frac{j}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sigma}{1+L}\right]}{\sqrt[4]{(1+L)^2 + \sigma^2}}, \qquad (19)$$

следовательно

$$g\sqrt{q} = sq - jcq, \qquad (20)$$

где $cq = \sqrt{q}\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sigma}{1+L}\right]}{\sqrt[4]{(1+L)^2 + \sigma^2}}$, $sq = \sqrt{q}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sigma}{1+L}\right]}{\sqrt[4]{(1+L)^2 + \sigma^2}}$.

Перейдем теперь к нелинейной теории группирования в области дрейфа с произвольной проводимостью следуя [7], но руководствуясь [8]. Полная скорость электронов на входе в дрейф находится из выражения (в нормированном виде)

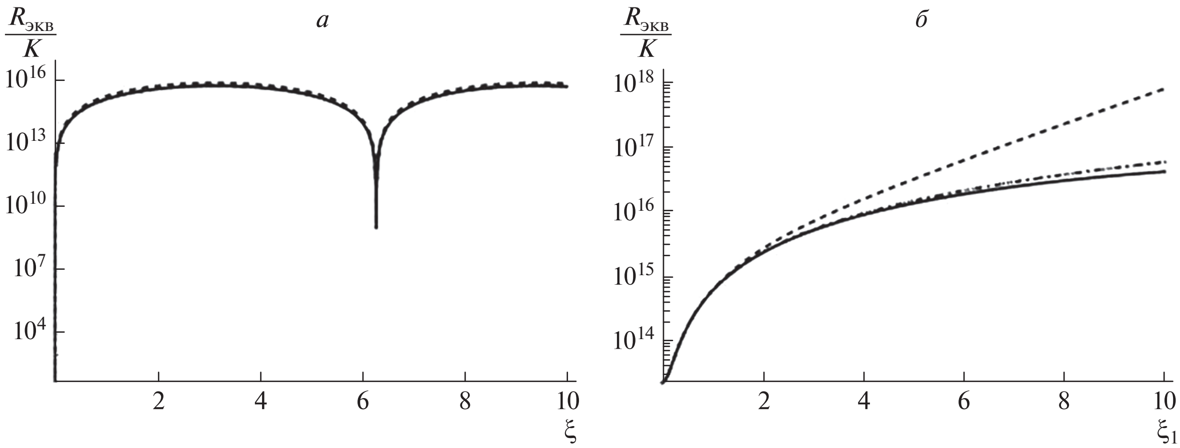

Рис. 4. $\frac{R_{экв}}{K}$(*а*) от ξ (длины ЛБВ-секции) при $\xi_1 = 3$, (*б*) от ξ_1 (длины КДП-секции) при $\xi = 3$. Все графики построены при $i_{10} = \upsilon_{10} = 10^{-3}$, $b = 0$, $q = 0.01$, $C = 0.01$, $d = 0$. Кривые на графиках: сплошная – $L = \sigma = 0$, пунктир $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрих-пунктир $\sigma = 10^6$, $L = 0$, точки $\sigma = 10$, $L = 0$.

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \mathrm{Re}\left[\left(\upsilon_{10}\mathrm{ch}\beta_p gx - j\frac{\omega_p}{\omega}g\upsilon_0\frac{i_{10}}{i_0}\mathrm{sh}\beta_p gx\right)e^{j\omega t_0}\right]. \tag{21}$$

Перейдем к переменным Лагранжа: $t_1(x,t_0)$ – это момент времени, в который электроны потока, влетевшие в пространство взаимодействии в момент t_0, окажутся в точке с координатой x

$$\omega t_1(x,t_0) = \omega t_0 + \beta_e x + \theta(x,t_0). \tag{22}$$

Тогда полная скорость электронов определяется выражением

$$\upsilon_1(x,t_1) = \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{\upsilon_0}{1+\beta_e^{-1}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \beta_e\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}-1\right). \tag{23}$$

Считая, что второе и третье слагаемые в (21) малы, проинтегрируем (23) по координате от 0 до x, считая, что воздействие на пучок имеет периодический характер. Поэтому возмущение угла пролета электронов может быть представлено в виде

$$\theta(x,t_0) = \theta_0 + \mathrm{Re}\left[\theta_1 e^{j\omega t_0}\right] = \theta_0 + B\cos(\omega t_0 + \varphi), \tag{24}$$

где $\theta_0 = \theta(x=0)$, $\theta_1 = Be^{j\varphi}$ (для простоты рассмотрен случай одной гармоники). Тогда в общем случае

$$B = \sqrt{Ca^2 + Sa^2}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{-Sa}{Ca}, \tag{25}$$

где

$$Ca = \frac{-1}{cq^2+sq^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\upsilon_{10}}{\upsilon_0}\left[cq\,\mathrm{ch}(sq\xi)\sin(cq\xi) + sq\cos(cq\xi)\,\mathrm{sh}(sq\xi)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{i_{10}}{i_0}\left[2cqsq\left(\cos(cq\xi)\,\mathrm{ch}(sq\xi)-1\right) + \left(cq^2-sq^2\right)\sin(cq\xi)\,\mathrm{sh}(sq\xi)\right]\right\},$$

$$Sa=\frac{-1}{cq^2+sq^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\upsilon_{10}}{\upsilon_0}\left[sq\,\mathrm{ch}\left(sq\xi\right)\sin\left(cq\xi\right)-cq\cos\left(cq\xi\right)\mathrm{sh}\left(sq\xi\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{i_{10}}{i_0}\left[-2cqsq\sin\left(cq\xi\right)\mathrm{sh}\left(sq\xi\right)+\left(cq^2-sq^2\right)\left(\cos\left(cq\xi\right)\mathrm{ch}\left(sq\xi\right)-1\right)\right]\right\}.$$

Если проводимость реактивная (т.е. $\sigma=0$) и $L<-1$, то $sq=0$ и $cq=\sqrt{\frac{q}{1+L}}=jg_1$, где g_1 – действительное число, то

$$B=\sqrt{\left[\frac{\upsilon_{10}}{g_1\upsilon_0}\mathrm{sh}\left(g_1\xi\right)\right]^2+\left[\frac{i_{10}}{i_0}\left(\mathrm{ch}\left(g_1\xi\right)-1\right)\right]^2},$$
$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\frac{i_{10}}{i_0}\left(\mathrm{ch}\left(g_1\xi\right)-1\right)}{\frac{\upsilon_{10}}{g_1\upsilon_0}\mathrm{sh}\left(g_1\xi\right)}. \quad (26)$$

С учетом начальной модуляции по току закон сохранения заряда для пучка примет вид:

$$\left(I_0+I_{10}e^{j\omega t_0}\right)\mathrm{d}\left(\omega t_0\right)=I\left(x,t_1\right)\mathrm{d}\left(\omega t_1\right). \quad (27)$$

Тогда формула тока первой гармоники, примет вид

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(I_0+I_{10}e^{j\omega t_0}\right)e^{-jn\left(\omega t_0+B\cos\left(\omega t_0+\varphi\right)\right)}\mathrm{d}\left(\omega t_0\right). \quad (28)$$

Так как рассматриваем одномерный случай справедливо $\frac{I_{10}}{I_0}=\frac{i_{10}}{i_0}$, тогда окончательно получим

$$\frac{i_1}{i_0}=2\left(\frac{i_{10}}{i_0}J_0\left(B\right)+J_1\left(B\right)e^{j\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right), \quad (29)$$

где $J_i\left(B\right)$ – функция Бесселя первого рода i-го порядка. Таким образом, уравнение (29) отличается от аналогичного уравнения в [7] удвоенным первым слагаемым, что, по-видимому, является следствием опечатки в [7].

Во второй секции воспользуемся методом заданного тока (в размерном виде):

$$E=-\frac{K\beta_e^2}{2}\int\limits_x^{x+l}I\left(x\right)e^{-j\beta_e\left(x+l-\zeta\right)}\mathrm{d}\zeta=$$
$$=\frac{jK\beta_e}{2\sqrt{q}}I_0\frac{i_1}{i_0}\left(1-e^{-j\xi}\right). \quad (30)$$

где l – длина второй секции. Тогда подставляя (29) и (30) в (13) получим искомое сопротивление.

Рисунки 4 построены при тех же параметрах, что и рис. 2. Из рис. 4*а* видно, что $R_{\text{экв}}$ также периодично по длине второй секции, но с большим периодом и что $R_{\text{экв}}$ больше чем в линейной теории. Из рис. 4*б* видно, что периодичность в случае $L=\sigma=0$ при выбранных параметрах отсутствует и что в других случаях $R_{\text{экв}}$ медленнее растет с длиной первой секции. Зависимости $R_{\text{экв}}$ от b, σ и L качественно не изменились, а $R_{\text{экв}}$ больше на несколько порядков, поэтому соответствующие рисунки не приводятся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из результатов, полученных в рамках линейной теории, добавление в фото-ЛБВ секции с комплексной проводимостью между катодом и замедляющей системой позволяет на несколько порядков увеличить эквивалентное сопротивление при той же полной длине лампы. По результатам нелинейной теории подбором проводимости можно не только увеличить эквивалентное сопротивление, но сократить полную длину лампы, т.к. при тех же параметрах во многих случаях эквивалентное сопротивление больше чем в линейной теории.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-02-00666).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duan Z., Shapiro M.A., Gong Y. et al.* // Proc. IVEC-2018. (Monterey, 2018).
2. *Lu X., Hummelt J.S., Shapiro M.A. et al.* // Proc. IVEC-2017. (London, 2017).
3. *Rowe T., Behdad N., Booske J.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2015. V. 43. No 7. P. 2123.
4. *Rowe T., Behdad N., Booske J.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2016. V. 44. No 10. P. 2476.
5. *Lu X., Stephens J.C., Mastovsky I. et al.* // Phys. Plasmas 2018. V. 25. Art. No 023102.
6. *Jeannin M. et al.* // Proc. IVEC-2019. (Busan, 2019).
7. *Касаткин Л.В.* // Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. № 2. С. 267.
8. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
9. *Цейтлин М.Б., Кац А.М.* Лампа с бегущей волной. М.: Сов. радио, 1964. 308 с.

About the theory of a hybrid of the photocatode traveling wave tube with an amplifier with complex permittivity

A. A. Funtov*

National Research Saratov State University, Saratov, 410012 Russia

**E-mail: aafuntov@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The theory of a hybrid photocathode traveling wave tube (TWT) with an amplifier with complex permittivity is presented. In the section with complex permittivity, in the first case, the linear theory of the amplifier with complex permittivity is used, and in the TWT section, the linear theory of TWT is used. To construct a nonlinear theory, the method of a given motion and the method of a given current are used.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 106–111

УДК 621.385.624

ЭЛЕКТРОННАЯ ПУШКА ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА МОЩНОГО КЛИСТРОНА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

В. Е. Родякин[1, *], В. М. Пикунов[1], В. Н. Аксенов[2, 3]

[1]*Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН – филиал Федерального государственного учреждения "Федеральный научно-исследовательский центр "Кристаллография и фотоника" Российской академии наук", Москва, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия*

[3]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Международный лазерный центр, Москва, Россия*

**E-mail: vrodyakin@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Представлены результаты теоретического исследования и оптимизации параметров электронной пушки мощного многорезонаторного клистрона с распределенным взаимодействием на частоту 95 ГГц, обеспечивающей формирование плотного кольцевого электронного пучка и его дальнейшую транспортировку через систему взаимодействия прибора с коэффициентом токопрохождения 99% с учетом теплового разброса скоростей электронов на катоде.

DOI: 10.31857/S0367676521010245

ВВЕДЕНИЕ

Бурно растущие потребности в компактных мощных источниках СВЧ излучения вызвали в последние годы активное продвижение в терагерцовый диапазон традиционной техники электровакуумных приборов, среди которых наиболее перспективными являются лампы бегущей волны (ЛБВ) и клистроны с распределенным взаимодействием (КРВ).

Неизбежное уменьшение размеров замедляющих структур ЛБВ и резонаторов КРВ миллиметрового диапазона приводит к уменьшению эффективности взаимодействия электронного потока с электромагнитными полями электродинамических систем этих СВЧ приборов. Требование компактности приборов также ограничивает величину используемого ускоряющего напряжения V_0 (обычно менее 20 кВ [1]). Поэтому разработчикам приходится повышать мощность электронных потоков в основном за счет увеличения их силы тока. При этом из-за малых размеров сечения пролетного канала в миллиметровом диапазоне для увеличения силы тока приходится переходить к использованию электронных потоков с высокими значениями плотности тока в пучке (более 1 кА $\cdot$ см$^{-2}$) [2], а также распределенных потоков (многолучевых, кольцевых и ленточных электронных пучков). Разработка электронно-оптических систем для формирования и транспортировки распределенных интенсивных электронных потоков является отдельной и весьма сложной задачей, которую необходимо решать при конструировании приборов вакуумной микроэлектроники, поскольку мощность и качество сформированного электронной пушкой электронного потока во многом определяют выходные характеристики КРВ в миллиметровом диапазоне.

Традиционным лидером в области разработки мощных КРВ миллиметрового диапазона является канадская компания CPI. Разработчикам этой компании удалось достигнуть выходной импульсной мощности КРВ W-диапазона $P_{вых} = 2$ кВт при электронном КПД 20% [3]. В приборе использовался аксиально-симметричный цилиндрический электронный пучок силой тока $I_0 = 0.574$ А, ускоряющим напряжением $V_0 = 16.3$ кВ и общей мощностью $P_0 = 9.3$ кВт. Рекордной для данного диапазона выходной мощности $P_{вых} = 7.3$ кВт сре-

Таблица 1. Исходные параметры КРВ

Параметр		Значение	Ед. измерения
Рабочая частота	F_0	95	ГГц
Ускоряющее напряжение	V_0	15	кВ
Сила тока	I_0	2.2	А
Мощность немодулированного пучка	P_0	33	кВт
Радиус трубы	R_T	0.28	мм
Радиус пучка	R_n	0.22	мм
Фокусирующее магнитное поле	$B_ф$	1.0	Тл

ди компактных КРВ удалось специалистам Исследовательской лаборатории ВМС США (Naval Research Laboratory, NRL) [4]. Электронный КПД разработанного ими КРВ с ленточным электронным пучком общей мощностью $P_0 = 70$ кВт КРВ составил 8.6%.

В данной работе проведены теоретические исследования возможности разработки электронной пушки с кольцевым электронным пучком для мощного КРВ на частоту 95 ГГц, который бы смог по совокупности параметров превзойти существующие КРВ на цилиндрических и ленточных электронных пучках в данном диапазоне.

При анализе и оптимизации всех узлов прибора использовался программный комплекс PARS, разработанный авторами [5] на основе модернизации программы “Арсенал-МГУ”, зарекомендовавшей себя в нашей стране и за рубежом как надежный инструмент для разработки и исследований многочисленных клистронных усилителей [6–9].

В качестве ускоряющего было выбрано напряжение 15 кВ для предотвращения вакуумных пробоев в резонаторах и элементах электронно-оптической системы прибора. Радиус пролетного канала был выбран равным 0.28 мм. Это значение соответствует условиям компромисса между величиной силы тока и эффективностью КРВ. Для фокусировки было выбрано магнитное поле с максимальной индукцией 1.0 Тл. Исходя из этих условий, была определена величина силы тока электронного пучка, которая составила 2.2 А. Выбранные в результате проведенного рассмотрения параметры электронного пучка и магнитного поля (табл. 1) послужили в качестве исходных при расчете и оптимизации конструкции узлов КРВ.

КОНСТРУКЦИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПУШКИ

Для выбранных параметров электронного пучка плотность тока в нем при транспортировке в трубе дрейфа должна составлять около 2000 $А \cdot см^{-2}$. Поскольку в настоящее время термоэмиссионные катоды с приемлемым сроком службы позволяют получать ток с плотностью 10–20 $А \cdot см^{-2}$, то для разрабатываемого прибора требовалось разработать электронную пушку со сходящимся пучком, имеющую микропервианс 1.2 $мкА \cdot кВ^{-3/2}$ и коэффициент компрессии 125. Форма электродов и осевое распределение магнитного поля были оптимизированы в результате численных расчетов с помощью комплекса программ PARS.

На основе указанных исходных данных была разработана конструкция электронной пушки типа пушки Пирса со сферическим катодом, позволяющая получить электронный пучок с заданными параметрами. Для подавления теплового расширения потока и обеспечения дальнейшей устойчивости электронного пучка в трубе дрейфа была выбрана схема с магнитно-экранированным катодом. На рис. 1 показаны форма электродов разработанной электронной пушки, силовые линии фокусирующего магнитного поля и распределение напряженности электрического поля, рассчитанное с учетом влияния пространственного заряда электронного потока.

В данной конструкции электронной пушки создаваемая на внешней кромке фокусирующего электрода максимальная напряженность электрического поля 223 $кВ \cdot см^{-1}$ является приемлемой с точки зрения опасности вакуумного пробоя. Численный анализ проводился методом последовательных приближений по пространственному заряду с использованием 80 трубок тока для дискре-

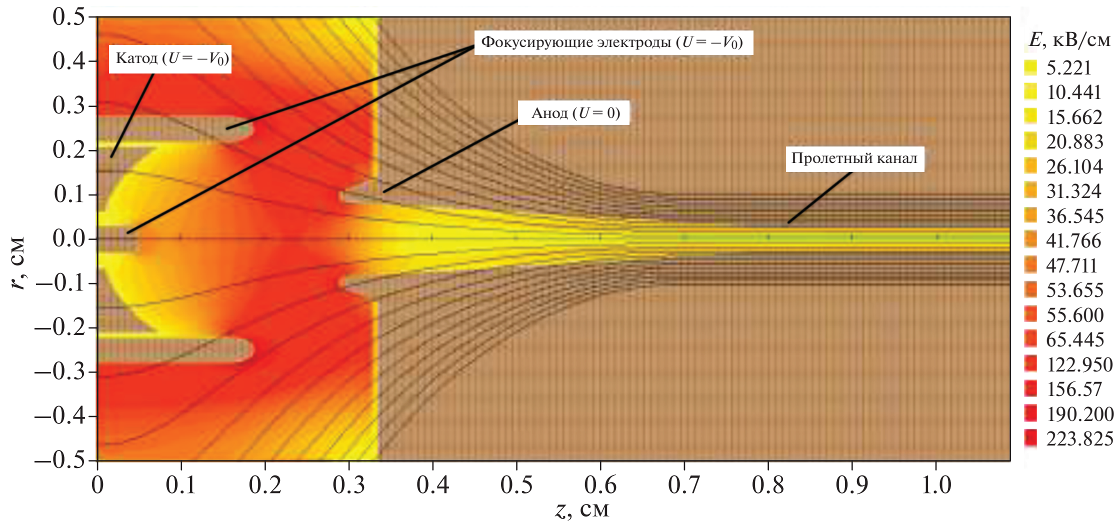

Рис. 1. Конструкция разработанной электронной пушки, силовые линии фокусирующего магнитного поля и рассчитанное распределение напряженности электрического поля с учетом пространственного заряда электронного пучка.

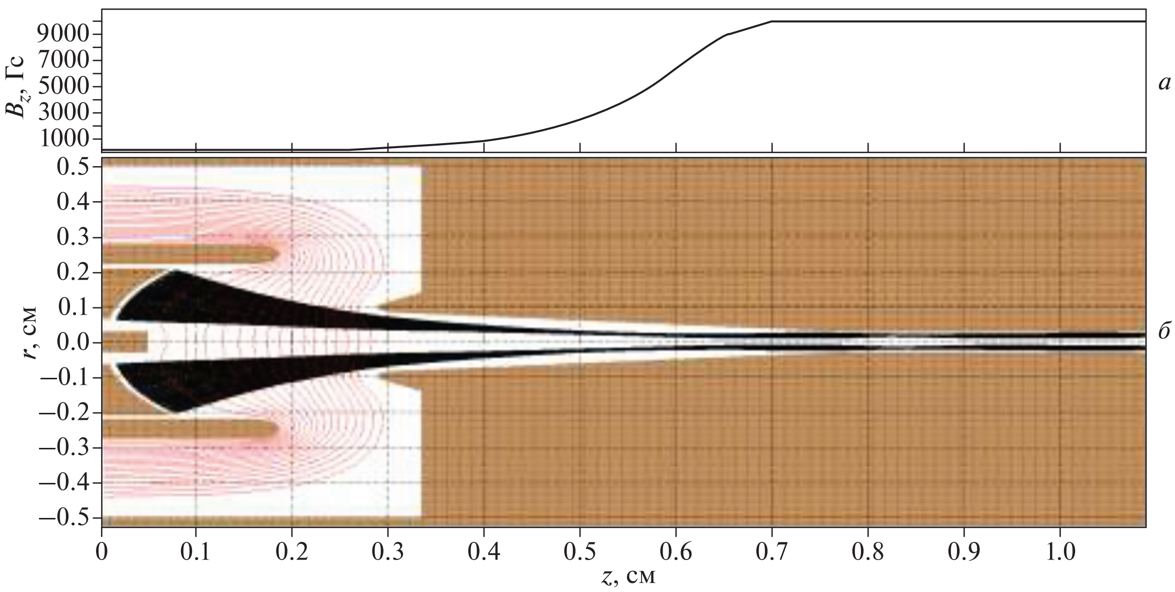

Рис. 2. Осевое распределение фокусирующего магнитного поля (*а*), эквипотенциали электростатического поля (красные кривые) и траектории тепловых электронов (черные кривые) в разработанной электронной пушке (*б*).

тизации электронного потока с катода. Значение силы тока эмиссии с катода, полученное в результате сходимости итераций, составило 2.2 А. За счет подобранной формы электродов удалось обеспечить работу катода в режиме ограничения плотности пространственным зарядом со средней плотностью тока эмиссии на катоде 16 А $\cdot$ см$^{-2}$ с отклонением от среднего значения на краях катода 10%. Для обеспечения плавного ввода электронного пучка в пролетный канал прибора и сопряжения фокусирующего магнитного поля с электронным пучком была проведена оптимизация формы фокусирующего магнитного поля. На рис. 2*а* приведено осевое распределение индукции магнитного поля на оси электронной пушки, полученное в результате расчетов. Траектории электронов и эквипотенциали электрического поля, установившиеся в результате итераций по пространственному заряду, показаны на рис. 2*б*.

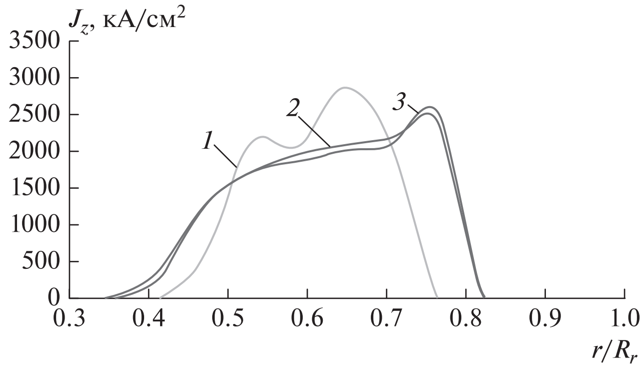

Рис. 3. Зависимости плотности тока от радиуса, нормированного на радиус трубы дрейфа, в выходном сечении электронной пушки для холодного пучка (кривая *1*), теплового с $T_к = 1100$ K (кривая *2*) и $T_к = 1500$ K (кривая *3*).

Как видно из рисунка, разработанная электронно-оптическая система электронной пушки обеспечивает плавное сжатие эмитированного катодом электронного пучка с минимальными пульсациями. Коэффициент компрессии разработанной электронной пушки достигает 125, что является весьма хорошим результатом для высокопервиансных термоэмиссионных электронных пушек со сходящимся электронным потоком.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОГО РАЗБРОСА ПОПЕРЕЧНЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ НА КАТОДЕ И УСТОЙЧИВОСТИ СФОРМИРОВАННОГО КОЛЬЦЕВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

При конструировании электронных пушек миллиметрового диапазона из-за малого размера поперечных размеров электронных потоков обязательно необходимо учитывать влияние начального разброса поперечных скоростей электронов, эмитированных с катода на их дальнейшую транспортировку в приборе [10]. Для исследования этого влияния на динамику электронного пучка в разработанной электронной пушке был использован алгоритм, учитывающий влияние разброса поперечных составляющих тепловых скоростей электронов на катоде, работающем в режиме ограничения плотности тока пространственным зарядом, описанный в работе [11] и включенный в комплекс программ PARS. При этом разброс касательных к поверхности составляющих скоростей электронов описывался распределением Максвелла для двух степеней свободы:

$$f(\upsilon_\perp) = 2\frac{m\upsilon_\perp^2}{kT_к}\exp\left(-\frac{m\upsilon_\perp^2}{kT_к}\right). \quad (1)$$

В соответствии с этим распределением с каждого элементарного отрезка эквипотенциальной стартовой поверхности эмитировалось несколько угловых групп электронов, имеющих равный ток, с различными значениями угла влета, соответствующими разбиению плотности вероятности (1) на отрезки равной вероятности. Интервал изменения поперечной составляющей скорости ограничивался конечным значением, соответствующим 99% вероятности. Таким образом, при численном анализе не учитывалась лишь незначительная часть тепловых электронов, имеющих экстремальные поперечные компоненты скоростей на катоде. Такой подход позволил корректно учесть вклад испускаемых с катода электронов и проанализировать динамику подавляющего большинства тепловых электронов для различных значений температуры катода $T_к$. С помощью данного алгоритма разработанная конструкция электронной пушки была исследована на влияние теплового разброса поперечных скоростей. На рис. 3 приведены распределения плотности тока в выходном сечении электронной пушки для случая “холодного” электронного пучка (без учета тепловых скоростей) и для случаев температуры катода $T_к = 1100$ и 1500 K.

Из анализа распределений следует, что в электронном пучке происходит незначительное перераспределение плотности тока с небольшим расплыванием внутренней и внешней границ пучка (около 10%). Об этом же свидетельствует приведенное на рис. 4 сравнение фазовых объемов “холодного” (рис. 4*а*) и “горячего” с $T_к = 1300$ K (рис. 4*б*) электронных потоков в выходном сечении электронной пушки.

При численном моделировании динамики тепловых электронов использовалось 11 угловых групп, а общее число трубок тока при расчетах составляло 880. В целом выбранная конструкция электронной пушки с магнитно-экранированным катодом позволяет избежать сильного рас-

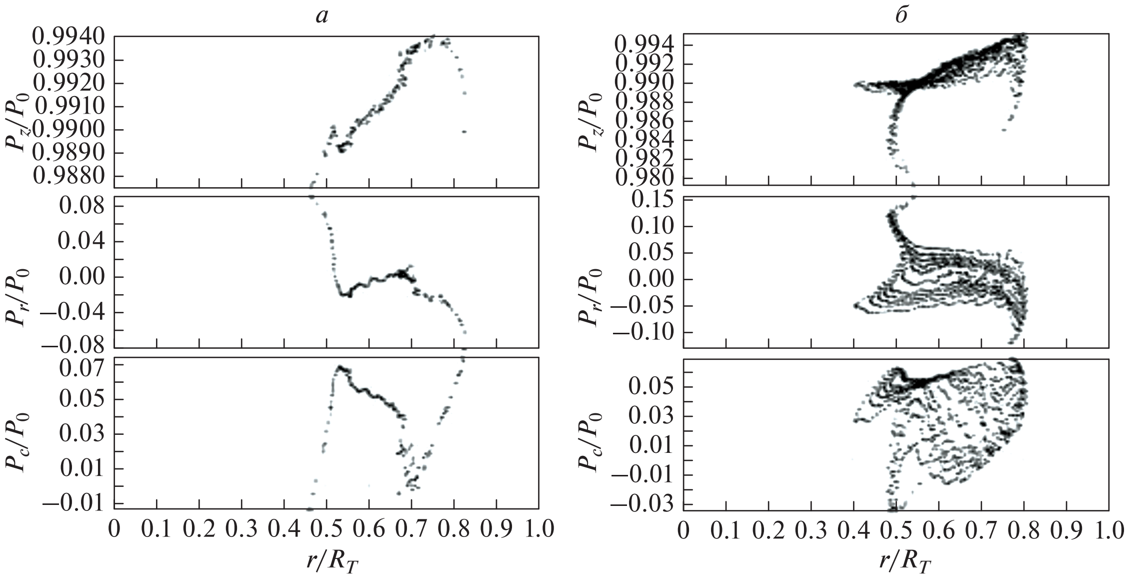

Рис. 4. Зависимости продольной, радиальной и азимутальной компонент импульса электронов в выходном сечении электронной пушки для "холодного" (*а*) и "горячего" с $T_к$ = 1300 K (*б*) электронных потоков.

плывания пучка за счет теплового разброса скоростей на катоде.

Для исследования устойчивости сформированного электронной пушкой электронного потока во всем приборе был проведен численный анализ транспортировки пучка через систему взаимодействия в статическом режиме (без входного СВЧ сигнала). При этом моделирование проводилось для теплового электронного пучка с $T_к$ = 1300 K. Анализ показал, что в статическом режиме в системе взаимодействия клистрона не происходит оседания электронов на стенки трубы дрейфа, а все электроны достигают коллектора. Таким образом, принимая во внимание особенности вышеизложенного алгоритма учета теплового разброса поперечных скоростей электронов на катоде, в разработанной конструкции обеспечивается как минимум 99% токопрохождение сформированного электронного потока.

При транспортировке плотных кольцевых электронных потоков в пролетных каналах из-за наличия шира азимутальных скоростей существует также опасность возникновения диокотронной неустойчивости [12], которая может ограничивать длину транспортировки пучка. Для оценки линейных инкрементов мод диокотронной неустойчивости использовались формулы работы [13]. Расчеты показали, что при заданных параметрах кольцевой пучок является устойчивым и может быть использован в системе взаимодействия КРВ без риска возникновения диокотронной неустойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численных исследований разработана конструкция магнитно-экранированной высокопервиансной электронной пушки с коэффициентом компрессии, равным 125, а также конструкция электронно-оптической системы прибора, обеспечивающая формирование и 99% токопрохождение плотного электронного потока (2 кА/см^2) с силой тока 2.2 А и ускоряющим напряжением 15 кВ через систему взаимодействия мощного КРВ миллиметрового диапазона в статическом режиме. Проведенные исследования показали, что электронно-оптическая система клистрона является устойчивой к возмущениям электронного потока, вызванных тепловым разбросом поперечных скоростей электронов на катоде. Разработанные электронная пушка и система фокусировки обеспечивают формирование и транспортировку плотного электронного потока, с общей мощностью 33 кВт, что позволяет при использовании эффективной конструкции системы взаимодействия получить выходную мощность клистрона от 7 до 10 кВт.

Проведенные оценки линейных инкрементов мод диокотронной неустойчивости полученного кольцевого электронного пучка показали, что кольцевой пучок является устойчивым и может быть использован в системе взаимодействия КРВ без риска возникновения диокотронной неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по государственному заданию ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Srivastava A.* // EJAET 2015. V. 2. No 8. P. 54.
2. *Booske J.H.* // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. No 5. Art. No 055502.
3. *Steer B., Roitman A., Horoyski P. et al.* // IEEE Nat. Radar Conf. Proc. (Pasadena, 2009).
4. *Pasour J., Wright E., Nguyen K.T. et al.* // IEEE Trans. Electron Devices. 2014. V. 61. No 6. P. 1630.
5. *Родякин В.Е., Пикунов В.М., Аксенов В.Н.* // Журн. радиоэлектрон. 2019. № 6. С. 1.
6. *Sandalov A.N., Pikunov V.M., Rodyakin V.E. et al.* In: KEK report 1/1997, 1997. P. 185.
7. *Ding Y., Xiao X., Rodyakin V.E., Sandalov A.N.* // Proc. 2nd ICMMWT (Beijing, 2000). P. 299.
8. *Shen B., Ding Y., Sandalov A.N. et al.* // Proc. IVESC2004. (China, 2004). P. 312.
9. *Shen B., Ding Y., Zhang Z. et al.* // IEEE Trans. Electron. Devices. 2014. V. 61. No 6. P. 1848.
10. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966. 454 с.
11. *Родякин В.Е., Пикунов В.М., Аксенов В.Н.* // Журн. радиоэлектр. 2020. № 6. С. 1.
12. *Родякин В.Е., Пикунов В.М., Аксенов В.Н.* // Вестн. МГУ. Физ. астрон. 2019. № 6. С. 614.
13. *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.

Electron gun for hollow beam of W-band high power extended interaction klystron

V. E. Rodyakin[a, *], V. M. Pikunov[a], V. N. Aksenov[b, c]

[a]*Institute on Laser and Information Technologies — Branch of the Federal Scientific Research Center “Crystallography and Photonics” RAS, Shatura, 140700 Russia*

[b]*Lomonosov Moscow State University, Physics Department, Moscow, 119991 Russia*

[c]*Lomonosov Moscow State University, International Laser Center, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: vrodyakin@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

As a result of optimization using computer code PARS, the design of electron gun for hollow electron beam of high power W-band extended interaction klystron have been developed. Electron gun has high beam current density convergence factor 90 and gives electron beam current 2.2 A. Magnetic focusing system provides 99% beam current transmission throw klystron interaction region with taking into account of thermal distributions of transverse energy of emitted electrons.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 112–115

УДК 537.622.6:537.874.76

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА СИНТЕЗА И ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА МИКРОСТРУКТУРНЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НИКЕЛЬ-ЦИНКОВЫХ ФЕРРИТОВ

Д. А. Каликинцева[1, *], В. Ю. Бузько[2], С. А. Вызулин[1], А. И. Горячко[2], Е. Л. Мирошниченко[1]

[1]Федеральное государственное казенное военное образовательное учреждение высшего образования “Краснодарское высшее военное училище имени генерала армии С.М. Штеменко” Министерства обороны Российской Федерации, Краснодар, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Кубанский государственный университет”, Краснодар, Россия

**E-mail: delson17@ymail.com*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Образцы наноразмерного никель-цинкового феррита состава $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ (где $x = 0.25$ и 0.5) синтезированы низкотемпературными золь-гель нитрат-цитратным и пирохимическим нитрат-мочевинным способами и отожжены при температурах 500 и 900°C. Синтезированные образцы исследованы методом сканирующей электронной микроскопии и с использованием векторного анализатора цепей.

DOI: 10.31857/S0367676521010142

ВВЕДЕНИЕ

Исследования электромагнитных свойств представителей семейства никель-цинковых ферритов обусловлены перспективностью использования таких магнитных материалов в качестве магнитных компонентов радиопоглощающих покрытий. Никель-цинковые ферриты состава $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ с высокой магнитной и диэлектрической проницаемостями могут быть использованы как в виде спеченной керамики, так и в составе композитов на основе полимерных матриц. Такие композиты, в зависимости от типа используемого полимера и магнитного радиопоглощающего ферритового наполнителя, отличаются высокой структурной прочностью, а также хорошей температурной и химической стойкостью, и значительными радиопоглощающими свойствами в различных частотных диапазонах.

Способ синтеза и последующая термическая обработка влияют не только на микроструктуру ферритов, но и на их радиопоглощающие характеристики [1]. Значения магнитных и диэлектрических проницаемостей [2, 3] ферритов, а также их ФМР-характеристик [4–6], зависят от способа синтеза и температуры последующего отжига материалов. Преимущество низкотемпературных способов синтеза в том, что в результате этих синтезов образуются порошки ферритов, состоящие из наноразмерных частиц. Микроструктурные и магнитные свойства наноразмерных ферритов могут варьироваться в широких пределах, в зависимости от условий последующей термической обработки [7–9]. Целью настоящей работы является исследование радиопоглощающих свойств представителей семейства никель-цинковых ферритов и их зависимости от способа синтеза и термической обработки.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Образцы порошков феррита с формулой $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ (где $x = 0.25$ и 0.5) синтезированы золь-гель нитрат-цитратным и пирохимическим нитрат-мочевинным способами. Нитраты металлов $Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ (ч. д. а.), $Ni(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ (ч. д. а.) и $Fe(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$ (ч. д. а.) являлись исходными материалами. Лимонная кислота (ч. д. а.) для нитрат-цитратного синтеза и мочевина (х. ч.) для нитрат-мочевинного синтеза использовались в качестве органических топливных комплексообразователей.

Таблица 1. Средний размер частиц порошков ферритов состава $Ni_{0.25}Zn_{0.75}Fe_2O_4$, синтезированных нитрат-цитратным и нитрат-мочевинным способами

Образец	350ц	500ц	900ц	350м	500м	900м
d, нм	12 ± 2	13 ± 3	100 ± 30	30 ± 7	32 ± 8	83 ± 15

В процессе нитрат-цитратного синтеза исходные материалы при смешении растворялись в бидистиллированной воде и постепенно подогревались до выпаривания воды и образования металлокомплексного геля при температуре около 120°C. При дальнейшем нагревании при температуре около 350°C гель постепенно выгорал с образованием порошка с наноразмерными гранулами феррита. При нитрат-мочевинном синтезе исходные материалы перемешивались в ступке без добавления воды до образования вязкой смеси, переносились в керамический тигель и постепенно нагревались со скоростью около 10°C · мин$^{-1}$. Самовозгорание реакционной смеси и образование порошка с наноразмерными гранулами феррита происходило при достижении температуры 300–350°C.

Образцы синтезированных ферритов отжигались при температурах 500 и 900°C. Процесс отжига происходил в трубчатой печи с электронным контролем температуры. Нагрев образца до температуры отжига происходил в течение 30 мин, а сам отжиг – в течение одного часа.

Исследования микроструктуры образцов $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ (где x = 0.25), полученных двумя способами синтеза без отжига и с отжигом при температурах 500 и 900°C, проведены методом сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) на микроскопе “JEOL JSM 7500F”. Средний диаметр наночастиц определяли на основании анализа нескольких микрофотографий для 350–550 измеренных наночастиц.

Изготовлены образцы композитов на основе ферритов и парафиновой матрицы. Содержание ферритового наполнителя 60% при толщине композитов – 9 мм. Коэффициенты отражения ($K_{отр}$) для композитов феррит/парафин измерены с использованием векторного анализатора цепей “Deepace KC901V” коаксиальным методом в короткозамкнутой линии в частотном диапазоне 0.015–7 ГГц. Величина параметра $K_{отр}$ характеризует радиопоглощающие свойства вставки в коаксиальный тракт. Для использованной схемы эксперимента $K_{отр}$ определяется в основном энергией отраженных волн (энергия падающей волны поддерживалась постоянной). Затухание электромагнитной волны в образце приводит к уменьшению энергии волны, отраженной от границы вставка – металл короткозамыкателя.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Средний диаметр наночастиц феррита, синтезированного нитрат-цитратным способом, без отжига составляет 12 ± 2 нм, для нитрат-мочевинного синтеза – 30 ± 7 нм.

Наблюдаемые различия в размере наночастиц можно объяснить тем, что при нитрат-мочевинном способе синтеза феррит образуется в результате возгорания реакционной смеси со значительным тепловыделением [10, 11]. Нитрат-цитратный синтез ферритов, в отличие от нитрат-мочевинного, происходит при более низкой температуре реакционной смеси без значительного тепловыделения [12].

Одночасовой отжиг при T = 500°C, приводит к небольшому увеличению среднего размера наночастиц феррита, синтезированного обоими методами синтеза (см. табл. 1). Последующий одночасовой отжиг при T = 900°C, приводит к увеличению среднего размера наночастиц феррита, синтезированного нитрат-цитратным способом, в большей степени, чем в случае нитрат-мочевинного синтеза (см. табл. 1).

Увеличение температуры отжига до 900°C приводит к увеличению радиопоглощающих свойств у образцов ферритов при x = 0.25 и 0.5 при нитрат-цитратном синтезе (рис. 1). При нитрат-мочевинном синтезе отжиг приводит либо к ухудшению радиопоглощающих свойств никель-цинкового феррита (x = 0.25), либо не оказывает существенного влияния на указанные свойства (x = 0.5). Указанные различия влияния отжига на радиопоглощающие свойства при различных способах синтеза объясняются различиями влияния отжига на увеличение размера частиц феррита, синтезированного различными способами.

Сравнение частотных зависимостей $K_{отр}$ для образцов различного состава показало, что при x = 0.5 радиопоглощающие свойства образцов ферритов выше по сравнению с ферритом при x = 0.25.

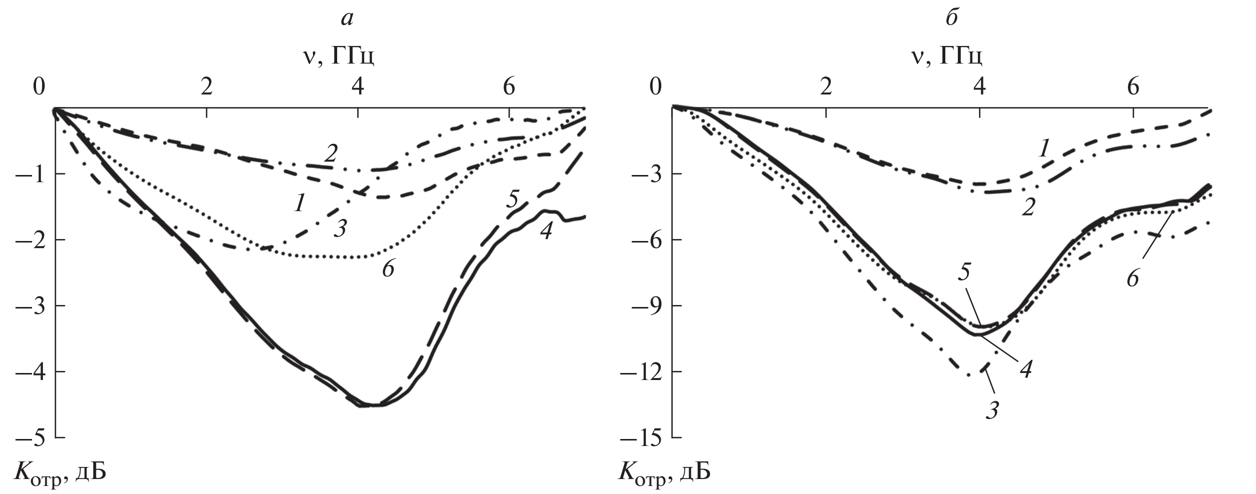

Рис. 1. Спектры отражения композитов на основе ферритов составов (*а*) $Ni_{0.25}Zn_{0.75}Fe_2O_4$ и (*б*) $Ni_{0.5}Zn_{0.5}Fe_2O_4$ синтезированных нитрат-цитратным способом без отжига (*1*) и отожженных при температурах 500 (*2*) и 900°С (*3*) и нитрат-мочевинным способом без отжига (*4*) и отожженных при температурах 500 (*5*) и 900°С (*6*).

При аналогичных способах синтеза и температурах отжига $K_{отр}$ в точке минимума для образца при $x = 0.5$ достигает значений на 2–10 дБ меньше по сравнению с составом при $x = 0.25$.

Максимальные радиопоглощающие свойства наблюдаются у образца при $x = 0.5$, синтезированного нитрат-цитратным способом и отожженного при $T = 900$°С ($K_{отр} \approx -12$ дБ). Образец при $x = 0.5$, синтезированный нитрат-мочевинным способом, является перспективным в качестве РПМ так как проявляет достаточно высокие радиопоглощающие свойства без отжига ($K_{отр} \approx -10$ дБ).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для образцов никель-цинковых ферритов установлено, что состав, способ синтеза и условия термообработки существенно влияют на их радиопоглощающие свойства, а именно:

1) образцы, синтезированные нитрат-цитратным способом отличаются меньшим размером частиц, по сравнению с образцами, синтезированными нитрат-мочевинным способом. Отжиг способствует увеличению размера частиц образцов, синтезированных нитрат-цитратным способом, в большей степени по сравнению с образцами, синтезированными нитрат-мочевинным способом;

2) увеличение температуры отжига порошка наноразмерного феррита приводит к увеличению радиопоглощающих свойств при нитрат-цитратном синтезе, и ухудшению либо отсутствию изменений – при нитрат-мочевинном синтезе;

3) образцы состава $Ni_{0.5}Zn_{0.5}Fe_2O_4$ отличаются более высокими радиопоглощающими свойствами, по сравнению с ферритом состава $Ni_{0.25}Zn_{0.75}Fe_2O_4$.

Таким образом, наноразмерный феррит состава $Ni_{0.5}Zn_{0.5}Fe_2O_4$, синтезированный нитрат-мочевинным способом без отжига является перспективным радиопоглощающим материалом как в области низких, так и в области высоких частот ближнего СВЧ диапазона, что ранее было обнаружено авторами в работе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Phadatare M.R., Salunkhe A.B., Khot V.M. et al.* // J. Alloys. Compounds. 2013. V. 546. P. 314.
2. *Peng C.-H., Hwang C.-C., Wan J. et al.* // Mat. Sci. Engin. B. 2005. V. 117. P. 27.
3. *Gao P., Rebrov E.V., Verhoeven T.M.W.G.M. et al.* // J. Appl. Phys. 2010. No 107. Art. No 044317.
4. *Valenzuela R., Beji Z., Herbst F. et al.* // J. Appl. Phys. 2011. V. 109. Art. No 07A329.
5. *Bhattacharjee K., Pati S.P., Das G.C.* // J. Appl. Phys. 2014. V. 116. Art. No 233907.
6. *Rao B.P., Kim C.-O., Kim C. et al.* // IEEE Trans. Magnet. 2006. V. 42. No 10. P. 2858.
7. *Costa A.C.F.M., Diniz A. P., Silva V. J. et al.* // J. Alloys. Compounds. 2009. No 483. P. 563.
8. *Amiri Gh. R., Yousefi M.H., Aboulhassani M.R. et al.* // Dig. J. Nanomat. Biostruct. 2010. V. 5. No 3. P. 719.
9. *Reddy M.P., Madhuri W., Reddy N.R. et al.* // J. Electroceram. 2012. No 28. P. 1.
10. *Вызулин С.А., Бузько В.Ю., Каликинцева Д.А. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 11. С. 1590; *Vyzu-*

lin S.A., Buz'ko V.Y., Kalikintseva D.A. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 11. P. 1451.

11. *Вызулин С.А., Бузько В.Ю., Скуднев В.Ю. и др.* // Сб. тр. конф. "Электромагнитное поле и материалы". (Москва, 2017). С. 337.

12. *Вызулин С.А., Каликинцева Д.А., Мирошниченко Е.Л. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 8. С. 1045; *Vyzulin S.A., Kalikintseva D.A., Miroshnichenko E.L. et al.*// Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 8. P. 943.

The influence of synthetic methods and heat treatment to nickel-zinc ferrite's microstructural and electromagnetic properties

D. A. Kalikintseva[a,] *, V. Y. Buz'ko[b], S. A. Vyzulin[a], A. I. Goryachko[b], E. L. Miroshnichenko[a]

[a]*Krasnodar Higher Military School named after General of the Army S.M. Shtemenko, Krasnodar, 350035 Russia*

[b]*Kuban State University, Krasnodar, 350040 Russia*

**E-mail: delson17@ymail.com*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The samples of nanosized nickel-zinc ferrite with the composition $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ (where $x = 0.25$ and 0.5) were synthesized by low-temperature sol-gel nitrate-citrate and pyrochemical nitrate-urea methods and annealed at temperatures of 500 and 900°C. The synthesized samples were studied by scanning electron microscopy and using a vector network analyzer.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 116–120

УДК 534.2

АКУСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ВИНТОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2021 г. А. И. Корольков[1, *], Е. В. Медведева[1, 2], А. С. Шуруп[1, 2, 3]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт океанологии имени П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия

[3]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: korolkov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Обсуждается метод активной акустической локации летательных аппаратов с винтом. Метод основан на анализе дополнительных максимумов функции взаимной корреляции линейно частотно модулированного сигнала, отраженного от вращающегося винта. Эти максимумы возникают в широком диапазоне временных задержек, что позволяет их использовать в качестве дополнительного информативного параметра при идентификации винтовых летательных средств.

DOI: 10.31857/S0367676521010191

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) находит все большее применение в различных сферах деятельности человека. Появление сравнительно дешевых моделей БПЛА привело к взрывному росту их использования для решения различных задач. Например, реализация планов создания "умных городов", как одного из важнейших направлений современного развития социотических систем, требует решения целого комплекса задач, связанных с повсеместным внедрением беспилотных транспортных средств, обеспечивающих перемещение людей и грузов в пределах города и прилегающих к нему территорий и акваторий. Следует отметить и вопросы безопасности, возникающие при несанкционированном использовании БПЛА. Среди методов обнаружения БПЛА можно выделить радиолокационные, оптические, инфразвуковые и акустические [1]. В свою очередь, среди акустических методов выделяются активные системы, использующие источники, и пассивные, которые основаны на регистрации собственных шумов летательных аппаратов с последующей их локализаций и идентификацией. При этом для распознавания объектов могу привлекаться методы, основанные на сопоставлении записанных сигналов с библиотекой характерных сигнатур (образцов сигналов), которые ранее были измерены или численно рассчитаны. Для подобного рода подходов требуется расчет шумов летательных аппаратов, что в случае винтовых средств может быть сделано известными способами [2, 3]. Основным преимуществом акустических методов является сравнительно низкая стоимость их реализации [4] и при этом достаточно высокая точность обнаружения и идентификации целей. К основным недостаткам акустических методов можно отнести небольшую дальность обнаружения (как правило, до 300 метров), которая определяется высокими уровнями шумов в исходных данных и чувствительностью результатов локации к вариациям характеристик среды распространения. Развитие новых акустических методов локации БПЛА является перспективным направлением исследований [5, 6].

В настоящей работе предлагается новый метод активной акустической локации летательных аппаратов с несущим винтом или тянущим/толкающим пропеллером. Метод заключается в облучении БПЛА линейно частотно модулированным акустическим сигналом (ЛЧМ-сигналом) в слышимом диапазоне, приеме отраженного сигнала, вычислении взаимной корреляционной функции

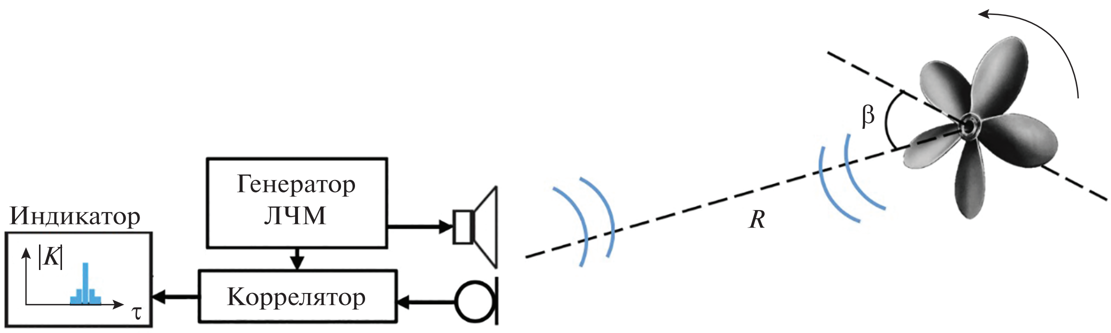

Рис. 1. Схема эксперимента по измерению взаимной корреляционной функции ЛЧМ-сигнала, отраженного от вращающего винта, с излученным сигналом.

принятого сигнала с посылкой и анализе полученной корреляционной структуры (рис. 1). В случае, когда облучение происходит с направления, отличного от оси вращения винта, получаемая локационная отметка будет иметь специфическую структуру (мультиплет), которая будет указывать на наличие винта. В этом случае удается предложить новый метод идентификации, что важно в случаях, когда из-за небольших размеров БПЛА традиционные методы сталкиваются с трудностями. Например, в активном режиме обнаружения малогабаритные БПЛА оказывается сложно отличить от птиц [7]. Отличительной особенностью настоящей работы является использование согласованной обработки регистрируемых сигналов, что позволяет повысить выходное отношение сигнал/помеха. Это является принципиально важным в акустических задачах, когда в исходных данных зачастую преобладают шумы. В большинстве известных работ [4—7], при обнаружении и идентификации винтовых летательных аппаратов анализируются сами рассеянные сигналы, при этом их корреляционная обработка не используется.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЛЧМ-СИГНАЛА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВИНТА

Основные эффекты, определяющие структуру сигналов, отраженных от вращающегося винта, связаны с доплеровским сдвигом частоты (отражение от движущихся лопастей винта), а также с модуляцией сигнала при отражении от периодически изменяющегося рассеивателя (коэффициент отражения винта с определенной точностью можно рассматривать в виде периодической функции с периодом $1/NF$, где F — частота вращения вала пропеллера, а N — число лопастей). В случае моностатической локации, для монохроматического сигнала частоты f, отраженного от вращающегося винта с N одинаковыми лопастями, известно выражение [8], которое может быть представлено в виде:

$$s_\Sigma(t) \simeq L\exp\{-2ikR\}\times \times\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{sinc}\{\Phi_n(t)\}\exp\{-i\Phi_n(t)\}, \tag{1}$$

где фазовая функция $\Phi_n(t)$ имеет следующий вид:

$$\Phi_n(t) = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{L}{2}\sin\beta\cos\left(2\pi Ft + \varphi_0 + 2\pi n/N\right), \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Здесь L — длина лопасти, β — угол между направлением распространения зондирующей волны и осью вращения винта (рис. 1), φ_0 — начальный угол поворота винта, R — расстояние от локатора до центра винта, $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Из (1), (2) следует [8, 9], что спектр отраженного сигнала будет искажен за счет доплеровского сдвига, определяемого множителем $2f\dfrac{\upsilon}{c}\sin\beta$, где υ — скорость вращения винта, c — скорость звука (предполагается, что среда распространения является однородной и стационарной), а также за счет появления “комбинационных” частот вида $f \pm nNF$.

Пусть теперь излучаемый сигнал $u_{in}(t)$ представляет собой ЛЧМ-сигнал, с мгновенной частотой $f(t) = f_0 + bt$, которая изменяется медленно за время излучения T (здесь постоянная b определяет скорость изменения частоты $f(t)$, $t \in [0, T]$). В этом случае спектр отраженного сигнала $u_r(t)$ в каждый момент времени будет содержать частоту $f(t)$, сдвинутую за счет эффекта До-

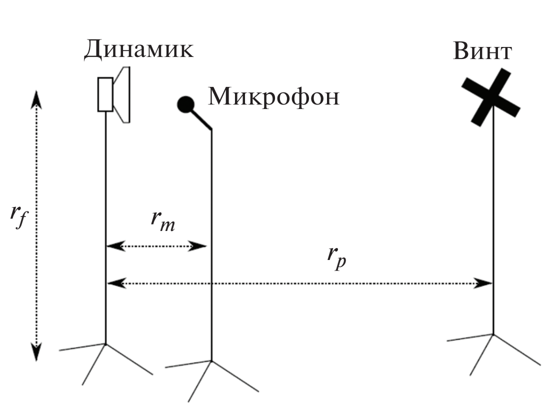

Рис. 2. Схематическое изображение (*а*) и фотография (*б*) эксперимента в звукозаглушенной камере.

плера, и комбинационные частоты $f(t) \pm mNF$. Рассмотрим функцию взаимной корреляции

$$K(\tau) = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} u_{in}(t+\tau) u_r(t) dt. \qquad (3)$$

В интеграл (3) входят произведения сигналов, близких к гармоническим (с медленно меняющимися частотами). Ненулевой вклад в интеграл дают фрагменты произведения, на которых мгновенные частоты совпадают. Поэтому сдвиг по частоте на δf в сигнале $u_r(t)$ соответствует сдвигу $\delta\tau$ по переменной τ на величину

$$\delta\tau = \frac{\delta f}{b}.$$

Например, сдвиг по частоте $\delta f_M = NF$ приведет к смещению корреляционного пика по дальности $L = c\tau/2$ на величину $\delta L_M = \frac{c\delta\tau_M}{2} = \frac{c\delta f_M}{2b} = \frac{cNF}{2b}$. Если в каждый момент времени имеются сигналы с мгновенными частотами $f(t)$, $f(t) + \delta f$, $f(t) - \delta f$, то корреляционный пик будет представлять собой триплет. В рассматриваемом случае присутствия в сигнале $u_r(t)$ комбинационных частот вида $f(t) \pm mNF$ приводит к формированию в корреляционной функции не триплета, а мультиплета, причем этот мультиплет оказывается искаженным за счет доплеровского сдвига частоты.

Для практического применения следует отметить случай, когда дальность до цели L много больше смещения по дальности δL_M (предполагается, что этот режим зондирования может быть реализован при соответствующем выборе посылки $u_{in}(t)$). В этом случае в качестве критерия обнаружения может использоваться факт присутствия или отсутствия информативных пиков корреляционной функции в области отрицательных временных задержек, т.е. там, где их быть не должно в случае отражения сигнала от рассеивателя без винта.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАЛЮДЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОТРАЖЕННОГО ЛЧМ-СИГНАЛА

Для экспериментальной проверки принципиальной работоспособности обсуждаемого подхода был проведен эксперимент в звукозаглушенной камере кафедры акустики физического факультета МГУ. Использовался источник звука с рабочей частотой 3–20 кГц, измерительный микрофон и закрепленный на штативе вентилятор. Вентилятор имел $N = 4$ лопасти и вращался с частотой $F \approx 50$ Гц. Частота вращения вентилятора определялась в ходе дополнительных измерений по основному тону в спектре шума, который регистрировался с помощью лабораторного шумомера, располагаемого в непосредственной близости от вращающегося винта. Ошибка оценки частоты вращения пропеллера F не превышала 8%.

Схема экспериментальной установки по измерению акустических сигналов, отраженных от вращающегося пропеллера, а также фотография, сделанная при проведении эксперимента, представлены на рис. 2. На динамик подался ЛЧМ-сигнал, синтезированный цифровым способом. Принятый микрофоном сигнал оцифровывался звуковой картой и далее обрабатывался на ЭВМ. Частота дискретизации для ЦАП и АЦП составляла 44.1 кГц. В процессе обработки вычислялась взаимная корреляционная функция принятого сигнала с исходной ЛЧМ посылкой. Главной задачей эксперимента является наблюдение дополнительных пиков корреляционной функции. При-

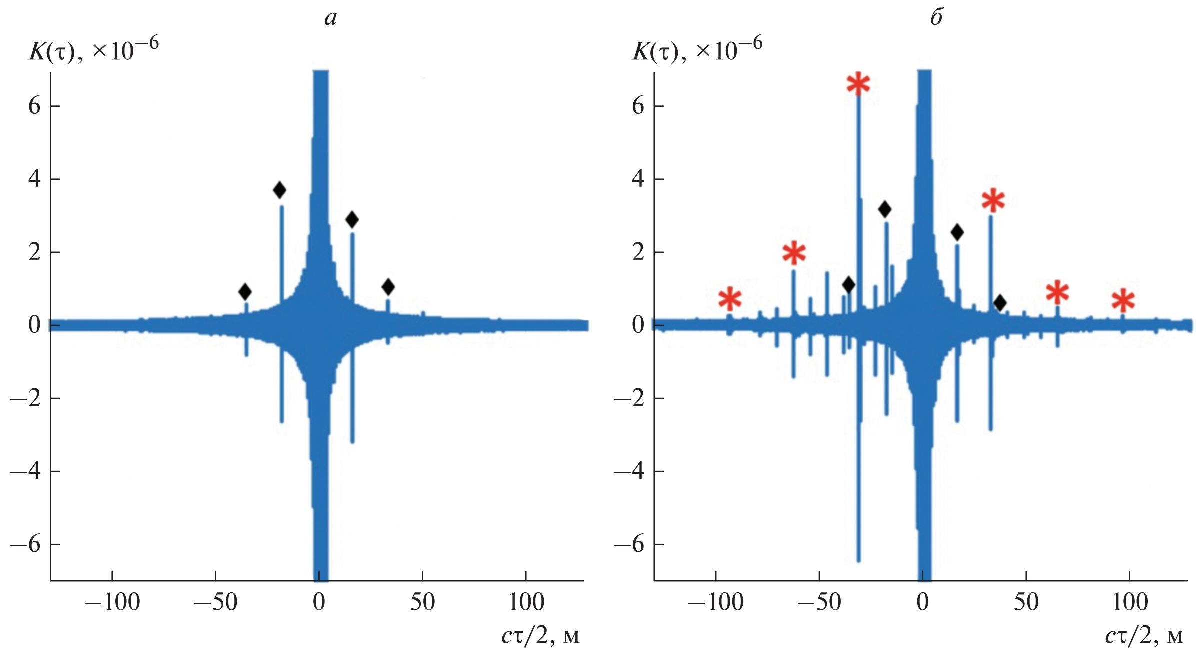

Рис. 3. Результат вычисления экспериментальной корреляционной функции при выключенном винте (*а*) и в случае, когда винт вращался (*б*). Звездочками на рисунке изображены информативные максимумы, ромбами – ложные пики.

чем в условиях эксперимента рассматривался случай, в котором дальность до цели L много меньше смещения по дальности δL_M, что позволило проверить наличие пиков в отрицательных и положительных временных задержках.

Вентилятор облучался с направления, незначительно отличающегося от осевого ($\beta \approx 10°$). В этом случае влияние доплеровского сдвига заметно уменьшается. При этом расположение источника и приемника выбирались таким образом, чтобы за счет сложной геометрии винта лопасти давали блик от источника на приемник в каком-то положении вентилятора. Модуляция коэффициента отражения достигается с помощью периодического попадания блика на приемник. При строго осевом падении зондирующего сигнала нельзя ожидать, что коэффициент отражения будет зависеть от угла поворота винта, в силу симметрии. В итоге, специальным выбором относительного расположения источника, приемника и вентилятора удалось добиться уменьшения влияния доплеровского сдвига, сохранив при этом эффекты, связанные с модуляцией рассеянного сигнала за счет отражения от периодически вращающегося винта.

Геометрические параметры установки приведены ниже в соответствии с обозначениями на рис. 2*а*:

$$r_f = 1 \text{ м}, \quad r_m = 0.4 \text{ м}, \quad r_p = 1.6 \text{ м}.$$

Характеристики изучаемого ЛЧМ-сигнала следующие. Начальная частота $f_0 = 5$ кГц, конечная частота $f_1 = 15$ кГц, длительность излучения сигнала $T = 10$ с. Это соответствует

$$b = \frac{f_1 - f_0}{T} = 1000 \text{ с}^{-2}.$$

На рис. 3 приведен результат вычисления взаимной корреляционной функции при неподвижном вентиляторе (слева) и при работающем вентиляторе (справа). Для удобства рассмотрения шкала временных задержек τ переведена в метры $\frac{c\tau}{2}$. На рис. 3*б* отчетливо виден пик, соответствующий сигналу, отраженному от пропеллера, а также несколько побочных пиков мультиплета. Для неподвижного вентилятора информативные побочные пики не наблюдаются (рис. 3*а*). Звездочками на рис. 3*б* отмечены пики, соответствующие теоретическим значениям дальностей $\delta L_M = c\delta\tau_M/2 = \pm cnNF/2b$, где $n = 1, 2, 3$. Экспрементально полученные значения положения пиков $\delta\hat{L}_M$ отличаются от теоретических не более чем на 7.5%, что соответствует точности определения частоты вращения винта F. Следует отметить и неидеальность условий проведения эксперимента. Так, на рис. 2*а* при отключенном вентиляторе в корреляционной функции наблюдаются симметричные пики как в положительных, так и отрицательных временных задержках (отмечены ромбами на рис. 3). Присутствие этих ложных пиков связано с наличием в исходных данных наводки, а также нелинейными эффектами, проявляющимися в используемом приемо-излучаемом обрудовании. По-видмому, эти же причины приводят и к возникновению множества дополнительных пиков, расположенных между информативными максимумами корреляционной функции. В дальнейшем особое внимание будет уделено улучшению характеристик используемого оборудования. Вместе с тем следует отметить, что присутствие ложных пиков в проведенном эксперименте не совпадает с положениями иноформативных максимумов, что позволяет даже в такой сложной и неоднозначной помеховой обстановке однозначно идентифицировать обсуждаемые в работе эффекты, возникающие при корреляционной обработке ЛЧМ-сигналов, отраженных от вращающегося винта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе данные указывают на принципиальную возможность экспериментального наблюдения побочных пиков корреляционной функции сигналов, отраженных вращающимся винтом, в том числе в области отрицательных временных задержек, что может использоваться в качестве дополнительного информативного параметра при идентификации малогабаритных винтовых БПЛА. Взаимное расположение этих пиков вдоль оси временных задержек зависят от параметров излучаемого сигнала и характеристик винта. Важной отличительной особенностью рассматриваемого подхода является анализ не самих отраженных сигналов, а результатов их корреляционной обработки, что позволяет улучшить отношение сигнал/помеха, повысив тем самым достоверность получаемых оценок. Среди перспектив дальнейших исследований можно выделить применение к сигналам, отраженным вращающимся винтом, векторно-фазовых методов обработки [10–12]. Полученные в работе результаты требуют дальнейшего детально исследования, прежде чем можно будет говорить о возможности их применения к решению конкретных практических задач.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.С. Виноградову за помощь в организации и проведении эксперимента в звукозаглушенной камере. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-29-06048-мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Farlik J., Kratky M., Casar J. et al.* // Sensors. 2019. V. 19. No 7. P. 1517.
2. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Воронцов В.И. и др.* // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 651.
3. *Воронцов В.И., Фараносов Г.А., Карабасов С.А. и др.* // Акуст. журн. 2017. Т. 66. № 3. С. 308.
4. *Sedunov A., Haddad D., Salloum H., Sutin A. et al.* // 2019 IEEE Int. Symp. on Technol. for Homeland Security (Woburn, 2019).
5. *Shi Zhiguo, Chang Xianyu, Yang Chaoqun et al.* // IEEE Trans. Vehicular Tech. 2020. V. 69. No 3. P. 2731.
6. http://drones.cnas.org.
7. *Coluccia A., Fascista A., Schumann A. et al.* // Proc. 16th IEEE Int. Conf. on Advanced Video and Signal Based Surveillance. (Taipei, 2019).
8. *Chen V.C. et al.* Micro-Doppler effect in radar. Artech House, 2011. 309 p.
9. *Martin J., Mulgrew B.* // Proc. IEEE International Radar Conference. 1990. P. 569.
10. *Гончаренко Б.И., Веденев А.И., Муханов П.Ю., Шуруп А.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83. № 1. С. 96; *Goncharenko B.I., Vedenev A.I., Mukhanov P.Yu., Shurup A.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. No 1. P. 82.
11. *Медведева Е.В., Гончаренко Б.И., Шуруп А.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 278; *Medvedeva E.V., Goncharenko B.I., Shurup A.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 82. No 2. P. 278.
12. *Гончаренко Б.И., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 6. С. 777.

Acoustic method for localization and identification of aerial vehicles with propeller

A. I. Korolkov[a,*], E. V. Medvedeva[a,b], A. S. Shurup[a,b,c]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*
[b]*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, 117218 Russia*
[c]*Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, 123995 Russia*
**E-mail: korolkov@physics.msu.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The method of active acoustic location of aircraft with a propeller is discussed. The method is based on the analysis of additional maxima of the cross-correlation function of a linearly frequency-modulated signal reflected from a rotating propeller. These maxima occur in a wide range of time delays, which allows them to be used as an additional informative parameter in the identification of helical aerial vehicles.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 121–126

УДК 534.2:517.9

ВЗАИМОСВЯЗЬ ФАЗ И АМПЛИТУД МУЛЬТИПОЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ДИСКРЕТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

 К. В. Дмитриев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

**E-mail: kdmitrie@lanat.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Акустическое поле, рассеянное объектом, представимо в виде мультипольного разложения. Для объектов с цилиндрической симметрией в отсутствие внутренних источников энергии множество значений каждого коэффициента этого разложения ограничено. Приведены соотношения между фазами и амплитудами этих коэффициентов, а также между мощностями поглощенного и рассеянного полей.

DOI: 10.31857/S0367676521010099

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств распространения волн внутри метаматериалов в акустике и оптике в последние годы широко обсуждается. В эту область входят эффекты отрицательного преломления, маскировки, акустического диода, поглощения волн и многие другие. Эти эффекты имеют большое практическое значение.

Один из подходов к описанию волновых процессов в неоднородных средах основан на теории рассеяния. Когда волна распространяется в среде, каждый из элементов среды начинает колебаться, становясь источником вторичных волн. Итоговое поле может быть представлено в виде суммы падающего поля, которое создается первичными источниками, и рассеянного поля, которое представляет собой сумму полей, рассеянных всеми элементами среды. Рассеянное поле создается так называемыми вторичными источниками, которые в каждой точке пропорциональны именно итоговому полю в этой точке. Таким образом, задача рассеяния является самосогласованной и требует учета процессов многократного рассеяния между элементами среды.

Для метаматериалов, которые представляют собой упорядоченные (или расположенные хаотически) дискретные неоднородности, помещенные в фоновую среду, такой подход наиболее естественен. В этом случае происходит многократное рассеяние волн на отдельных неоднородностях. Конструкция этих неоднородностей определяет их отклик на падающую волну в виде возникающих вторичных источников поля и, таким образом, оказывает влияние на волновые свойства среды в целом.

Широко применяется представление поля, рассеянного каждой отдельной неоднородностью, в виде ряда мультипольных компонент [1–3] для решения задач рассеяния, включая задачи сокрытия неоднородного объекта [4]. В системе без нелинейных эффектов величина этих компонент линейно зависит от поля, падающего на неоднородность. В представляемой работе из общих соображений решается задача выявления связи между амплитудой и фазой этих рассеянных мультипольных компонент. Отдельно рассматривается случай пассивных неоднородностей, не содержащих внутреннего источника энергии.

ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТ МЕТАМАТЕРИАЛА

Рассматривается двумерная задача, которая при необходимости может быть обобщена и на трехмерный случай. Элемент метаматериала в виде неоднородности $\mathfrak{R}$ конечных размеров (рис. 1) расположен вблизи начала координат. Остальное пространство заполнено однородной непоглощающей фоновой средой. Следует отметить, что сначала не делается (пока не будет оговорено особо) каких-либо предположений о конструкции элемента метаматериала и уравнениях, описыва-

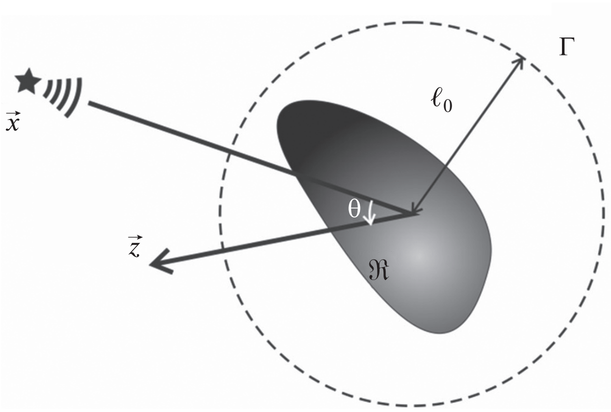

Рис. 1. Геометрия задачи. Область расположения неоднородности $\Re$ находится внутри окружности Γ с центром в начале координат. Падающее поле создается первичным источником, который находится в точке $\vec{x}$.

ющих волновые процессы внутри него. Этот элемент может включать источник энергии, различные электроакустические преобразователи, быть нелинейным и т.д. Эти особенности скажутся в дальнейшем, после получения выражений для потоков энергии в такой системе.

Пусть окружность Γ с центром в начале координат и радиусом ℓ_0 полностью охватывает элемент метаматериала $\Re$ (рис. 1), и единственный монопольный δ-образный первичный источник акустического поля находится в точке $\vec{x}$ вне окружности Γ, т.е. $|\vec{x}| > \ell_0$. Будет рассматриваться монохроматический случай с временнóй зависимостью полей ~ $\exp(-i\omega t)$. Потенциал падающего поля $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x})$, которое создает первичный источник (т.е. это потенциал поля в фоновой среде в отсутствие неоднородности) в произвольной точке $\vec{z}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla_{\vec{z}}^2\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) + k_0^2\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = \phi\delta(\vec{z}-\vec{x}),$$

где k_0 – волновое число в фоновой среде, ϕ – нормировочный амплитудный коэффициент первичного источника. Верхний индекс “+” здесь и далее означает, что рассматриваются запаздывающие поля, удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда. Решение уравнения Гельмгольца $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = \phi G_0^+(\vec{z}-\vec{x})$ выражается через двумерную запаздывающую функцию Грина однородной среды

$$G_0^+(\vec{z}-\vec{x}) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0|\vec{z}-\vec{x}|), \tag{1}$$

где $H_n^{(\xi)}(\varsigma)$ – функции Ханкеля n-го порядка ξ-го рода ($\xi = 1$ или $\xi = 2$). Согласно теореме сложения Графа это решение может быть представлено в виде ряда, содержащего функции Бесселя $J_n(\varsigma)$:

$$\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{4}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)J_n(k_0|\vec{z}|) \quad \text{при} \quad |\vec{z}| < |\vec{x}|, \tag{2}$$

где угол $\theta \equiv \angle(\vec{z},\vec{x})$ между векторами $\vec{z}$ и $\vec{x}$ отсчитывается в направлении против часовой стрелки (рис. 1). Выражение (2) при фиксированном $\vec{x}$ представляет собой разложение падающего поля по мультипольным компонентам, порядок которых задается величиной $|n|$. Таким образом, член с $n = 0$ соответствует монопольной компоненте, с $n = \pm 1$ – дипольной, с $n = \pm 2$ – квадрупольной и т.д. Надо заметить, что возникновение в (2) мультипольных компонент с $n \neq 0$ связано с достаточно произвольным выбором начала координат; в то же время в поле (1) присутствует только монопольная компонента в системе координат с центром в точке $\vec{x}$.

Поскольку выполнено тождество $J_n(\varsigma) \equiv \equiv \frac{1}{2}\left(H_n^{(1)}(\varsigma) + H_n^{(2)}(\varsigma)\right)$, то падающее поле (2) можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\begin{aligned}\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) &= -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\times \\ &\times\left[H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|) + H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)\right] \equiv \\ &\equiv \varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x}).\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\times \times H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|)$ – при фиксированном $\vec{x}$ это поле, “выходящее” из начала координат; $\varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x}) = = -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)$ – поле, “входящее” в начало координат. Такое отличие этих полей проявляется в том, что зависимость от точки $\vec{z}$ для $\varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x})$ включает функции Ханкеля только первого рода, а для $\varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x})$ – только второго рода. Поскольку обе рассматриваемые составляющие являются частями исходного падающего поля $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x})$, для каждой из них сохранен верхний индекс “+”. Векторы потоков мощности, которые проходят через окружность Γ и соответствуют “входящей” и “выходящей” составляющим, равны по модулю и противоположны по направлению в каждой точке окружности Γ; поэтому суммарный поток мощности падающего поля через нее равен нулю.

Рассеянное неоднородностью $\Re$ поле φ_{sc}^{+} также можно разложить вне $\Re$ в ряд по мультипольным компонентам:

$$\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{\phi}{16}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\beta_n^{+}(\vec{x})H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|), \quad \vec{z}\notin\Re. \tag{4}$$

Здесь введены коэффициенты рассеяния $\beta_n^{+}(\vec{x})$, характеризующие вторичные источники $|n|$-й мультипольности. Они зависят от положения первичного источника $\vec{x}$. В отличие от выражения (3), ряд (4) содержит только одну "выходящую" составляющую, которая связана с появлением вторичных источников поля внутри области $\Re$ расположения неоднородности (именно вторичные источники создают рассеянное поле).

Мультипольные разложения типа (3) и (4) хорошо известны [1]. В ряде случаев для неоднородностей простых форм коэффициенты $\beta_n^{+}(\vec{x})$ могут быть определены аналитически. К таким неоднородностям относятся, например, однородные цилиндры и сферы, обладающие сдвиговой упругостью [5]; цилиндрические и сферические оболочки и полости внутри жидких и твердых сред [6]. Зависимость $\beta_n^{+}(\vec{x})$ от координаты источника $\vec{x}$ можно описать матрицей рассеяния [7, 8], которая связывает значения $\beta_n^{+}(\vec{x})$ с соответствующими коэффициентами мультипольного разложения падающего поля (2).

Если неоднородность $\Re$ имеет малый волновой размер, некоторая точка $\vec{r}_0 = \vec{0}$ совпадает с началом координат и находится внутри $\Re$, и рассеяние на этой неоднородности носит преимущественно монопольный характер, то выражение (4) будет содержать единственный член: $\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{\phi}{16}H_0^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\beta_0^{+}(\vec{x})H_0^{(1)}(k_0|\vec{z}|)$. Падающее поле (2) в точке $\vec{z} = \vec{r}_0 = \vec{0}$ также содержит единственное слагаемое, поскольку $J_n(0) = 0$ при всех $n \neq 0$: $\varphi_0^{+}(\vec{r}_0 = \vec{0},\vec{x}) = -\frac{i}{4}\phi H_0^{(1)}(k_0|\vec{x}|)$. Тогда, с учетом вида функции Грина (1),

$$\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = G_0(\vec{z})\beta_0^{+}(\vec{x})\varphi_0^{+}(\vec{r}_0 = \vec{0},\vec{x}). \tag{5}$$

Если же точка $\vec{r}_0 \in \Re$ не совпадает с началом координат, то соотношение (5) приобретает вид $\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = G_0(\vec{z}-\vec{r}_0)\beta_0^{+}(\vec{x}-\vec{r}_0)\varphi_0^{+}(\vec{r}_0,\vec{x})$; именно это соотношение рассматривалось в [9–11].

Суммируя (3) и (4), можно представить полное поле $\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) = \varphi_0^{+}(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ как

$$\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i\phi}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\times \left[\left(1-\frac{i\beta_n^{+}(\vec{x})}{2}\right)H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|) + H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)\right]; \quad \vec{z}\notin\Re;\ \ |\vec{z}|<|\vec{x}|; \tag{6}$$

т.е. $\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) \equiv \varphi_{\rightarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$.

Оно также состоит из "выходящей" $\varphi_{\rightarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ и "входящей" $\varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ составляющих, причем $\varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = \varphi_{0\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$.

Поток мощности полного поля по направлению внешней нормали $\vec{n}(\vec{z})$ к окружности Γ определяется выражением $W_\Gamma^{+} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_\Gamma p(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}^{*}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})d\Gamma$. Здесь $p(\vec{z},\vec{x}) = i\omega\rho_0\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})$ и $\vec{\upsilon}(\vec{z},\vec{x}) = \nabla\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})$ – поля акустического давления и колебательной скорости на частоте ω; ρ_0 – плотность однородной фоновой среды вне $\Re$; символ "*" означает комплексное сопряжение.

При вычислении произведения $p(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}^{*}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})$ на основе выражения (6) нужно учесть следующее. Во-первых, поскольку Γ – окружность, и ее центр совпадает с началом координат, то $\vec{\upsilon}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z}) = \partial\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})/\partial|\vec{z}|$. Во-вторых, $|\vec{z}| = \ell_0$, $d\Gamma = \ell_0 d\theta$, и после интегрирования по углу θ в произведении двух сумм будут отличны от нуля лишь члены, соответствующие совпадающим порядкам мультипольности. Поэтому

$$W_\Gamma^{+} = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\mathrm{Im}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times \left[\left(1+\frac{\beta_n^{+}(\vec{x})}{2i}\right)H_n^{(1)}(k_0\ell_0) + H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\right]\times \frac{\partial}{\partial\ell_0}\left[\left(1+\frac{\beta_n^{+}(\vec{x})}{2i}\right)H_n^{(1)}(k_0\ell_0) + H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\right]^{*}\right\}.$$

В полученном выражении можно раскрыть квадратные скобки, принимая во внимание, что $\left\{H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|)\right\}^{*} = H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)$, и отбрасывая возникающий при этом чисто действительный член. Тогда

$$W_\Gamma^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left|1+\frac{\beta_n^+(\vec{x})}{2i}\right|^2 W_{0,n,\Gamma\to}^+ + W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^+\right), \qquad (7)$$

где $W_{0,n,\Gamma\to}^+ = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times$
$\times \operatorname{Im}\left\{H_n^{(1)}(k_0\ell_0)\frac{\partial H_n^{(2)}(k_0\ell_0)}{\partial\ell_0}\right\}$ и

$$W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^+ = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times$$
$$\times \operatorname{Im}\left\{H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\frac{\partial H_n^{(1)}(k_0\ell_0)}{\partial\ell_0}\right\}.$$

Здесь $W_{0,n,\Gamma\to}^+$ и $W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^+$ представляют собой составляющие потока мощности через Γ, которые соответствуют n-му порядку мультипольности для “выходящей” составляющей и “входящей” составляющей падающего поля (3), соответственно. Можно заметить, что $W_{0,n,\Gamma\to}^+ = -W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^+$. Тогда, в итоге,

$$W_\Gamma^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{n,\Gamma}^+, \quad \text{где}$$
$$W_{n,\Gamma}^+ = \left(\left|1+\frac{\beta_n^+(\mathbf{x})}{2i}\right|^2 - 1\right)W_{0,n,\Gamma\to}^+. \qquad (8)$$

ПАССИВНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Рассматриваются пассивные неоднородности, т.е. не содержащие внутренних источников энергии. В таком случае поток мощности полного поля W_Γ^+ может быть либо равен нулю, либо меньше нуля. Эти два типа неоднородностей будут называться непоглощающими (какой поток мощности входит внутрь области, ограниченной контуром Γ, такой и выходит из этой области; поэтому $W_\Gamma^+ = 0$) и поглощающими (выходящий поток меньше входящего из-за поглощения внутри $\Re$, поэтому $W_\Gamma^+ < 0$), соответственно. При этом поглощение может иметь как чисто акустическую природу, так и являться следствием преобразований энергии внутри неоднородности. Такой подход позволяет включить в рассмотрение широкий класс неоднородных сред.

С точки зрения коэффициентов рассеяния, к цилиндрически симметричным следует отнести неоднородности, которые характеризуются условием (при $\vec{r}_0 = \vec{0}$)

$$\beta_n^+(\vec{x}) = \beta_n^+(|\vec{x}|). \qquad (9)$$

Таким образом, определяющее значение играет расстояние $|\vec{x}|$ до первичного источника, но не направление на него. Следует отметить, что условие (9) выполняется для неоднородностей более широкого класса, чем неоднородности с цилиндрически симметричной конструкцией. Например, оно справедливо для слабоконтрастных неоднородностей малого волнового размера [12]. Для неоднородностей, удовлетворяющих условию (9), и для любой совокупности первичных источников поля, у которых фиксирован $|\vec{x}| = \text{const}$, выполнено соотношение (8), где коэффициенты $\beta_n^+(\vec{x}) = \beta_n^+$ зависят только от порядка мультипольности n и от $|\vec{x}|$. Выбирая разные совокупности первичных источников, можно создавать падающие поля с произвольной зависимостью $W_{0,n,\Gamma\to}^+$ от n. Это имеет ряд следствий.

Во-первых, поскольку для пассивных неоднородностей $W_\Gamma^+ \le 0$ (причем $W_\Gamma^+ = 0$, если поглощения нет), то, как следует из (8) и условия цилиндрической симметрии неоднородности, для всех n выполнено $\left|1+\frac{\beta_n^+}{2i}\right|^2 \le 1$. Это равносильно выражениям

$$\frac{i}{\beta_n^+} - \frac{i}{\left(\beta_n^+\right)^*} \le -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\beta_n^+}\right) \ge \frac{1}{4}. \qquad (10)$$

Данные условия для неоднородностей малого волнового размера в отсутствие поглощения (тогда в (10) будут строгие равенства) были ранее получены для $n = 0$ [9], а также для $n = \pm 1$ [10]. Вводя, по аналогии с [9], амплитуду $\left|\beta_n^+\right|$ и фазу ψ_n коэффициента рассеяния $\beta_n^+ = \left|\beta_n^+\right|\exp(i\psi_n)$, можно получить из (10) их связь в виде $\left|\beta_n^+\right| \le -4\sin\psi_n$. Эта связь в отсутствие поглощения ранее обсуждалась в [9—12] и с учетом поглощения для квазиточечных неоднородностей в [13]. Важным ее следствием является ограниченность коэффициента рассеяния и, тем самым, потока мощности поля, рассеянного неоднородностью рассматриваемого типа.

Во-вторых, поток мощности рассеянного поля через Γ равен $W_{sc,\Gamma}^+ = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_\Gamma p_{sc}(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}_{sc}^*(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})d\Gamma$. Вычисления, аналогичные предыдущим — однако вместо потенциала (6) используется потенциал (4) — приводят к выражению

$$W^{+}_{sc,\Gamma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W^{+}_{sc,n,\Gamma}, \quad \text{где} \quad W^{+}_{sc,n,\Gamma} = \left|\frac{\beta^{+}_{n}}{2i}\right|^{2} W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}. \quad (11)$$

Используя амплитуды и фазы каждого коэффициента рассеяния, с помощью соотношений (8) и (11) можно получить выражения для относительной поглощенной мощности $\mathrm{w}^{+}_{ab,n,\Gamma} = -\frac{W^{+}_{n,\Gamma}}{W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}} = 1 - \left|1 + \frac{\beta^{+}_{n}}{2i}\right|^{2} = -\frac{1}{4}\left|\beta^{+}_{n}\right|^{2} - \left|\beta^{+}_{n}\right|\sin\psi_{n}$ и относительной рассеянной мощности $\mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma} = \frac{W^{+}_{sc,n,\Gamma}}{W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}} = \frac{1}{4}\left|\beta^{+}_{n}\right|^{2}$. Эти соотношения, с учетом возможного диапазона $\frac{\left|\beta^{+}_{n}\right|}{4} \le -\sin\psi_{n} \le 1$, приводят к неравенству

$$0 \le \mathrm{w}^{+}_{ab,n,\Gamma} \le 2\sqrt{\mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma}} - \mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma}. \quad (12)$$

Условие такого типа обсуждалось в [14]. Мощность, поглощенная в неоднородности, с одной стороны, неотрицательна, а с другой стороны — ограничена сверху некоторым предельным значением, однозначно связанным с рассеянной мощностью. Особыми свойствами обладает неоднородность, у которой $\beta^{+}_{n} = -2i$ для всех присутствующих мультипольных компонент n. В этом случае, согласно (6), “выходящее” поле $\varphi^{+}_{\rightarrow}(\vec{z}, \vec{x})$ обращается в ноль, т.е. такая неоднородность является “идеальным” поглотителем. Наоборот, неоднородность, у которой $\beta^{+}_{n} = -4i$, характеризуется максимальной мощностью рассеянного поля; поглощенная мощность при этом равна нулю. Это отвечает наличию резонанса; такие случаи исследовались в [6, 15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируя все вышесказанное, можно отметить следующее. Рассеяние акустической волны на элементе метаматериала может быть описано с помощью коэффициентов рассеяния $\beta^{+}_{n}(\vec{x})$. Они описывают возникновение рассеянного поля n-го порядка мультипольности в ответ на падающее поле точечного монопольного источника, расположенного в точке $\vec{x}$. Для пассивных неоднородностей, не содержащих внутренних источников, поток мощности поля, идущего изнутри неоднородности, не может превосходить поток, идущий внутрь неоднородности. Если коэффициенты рассеяния не зависят от направления на источник падающего поля, то данное условие на поток оказывается справедливым и для каждой мультипольной компоненты поля в отдельности. Это возможно, если коэффициенты рассеяния не являются произвольными. А именно, если поглощения нет, их значения образуют на комплексной плоскости окружность радиусом 2 с центром в точке $-2i$. В присутствие поглощения значения лежат внутри этой окружности.

Такое ограничение множества значений $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|)$, во-первых, проявляется в виде связи амплитуды и фазы рассеянного поля [9]. Во-вторых, мощность, рассеянная неоднородностью, имеет фиксированное максимальное значение, которое достигается при $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|) = -4i$. Эта ситуация соответствует отсутствию поглощения и проявляется, когда неоднородность резонирует. В-третьих, мощность, поглощенная внутри неоднородности, также ограничена. “Идеальному” поглотителю соответствует $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|) = -2i$. Максимальные значения поглощенной и рассеянной неоднородностью мощностей связаны между собой соотношением (12).

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
2. *Godin O.A.* // JASA. 2011. V. 130. No 4. Art. No EL135.
3. *Godin O.A.* // JASA. 2013. V. 133. No 2. P. 709.
4. *Guild M.D., Alù A., Haberman M.R.* // JASA. 2011. V. 129. No 3. P. 1355.
5. *Faran Jr J.J.* // JASA. 1951. V. 23. No 4. P. 405.
6. *Flax L., Gaunaurd G.C., Uberall H.* Theory of resonance scattering. Physical Acoustics. V. 15. N.Y.: Academic, 1981. P. 191.
7. *Waterman P.C.* // JASA. 1969. V. 45. No 6. P. 1417.
8. *Waterman P.C.* // JASA. 1976. V. 60. No 3. P. 567.
9. *Буров В.А., Морозов С.А.* // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751; *Burov V.A., Morozov S.A.* // Acoust. Phys. 2001. V. 47. No 6. P. 659.
10. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 656; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2015. V. 61. No 6. P. 623.
11. *Бадалян Н.П., Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 3; *Badalyan N.P., Burov V.A., Morozov S.A., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. No 1. P. 1.
12. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 125; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2018. V. 64. No 2. P. 131.

13. *Дмитриев К.В., Фадеев Е.В., Румянцева О.Д.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 266; *Dmitriev K.V., Fadeev E.V., Rumyantseva O.D.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 2. P. 210.
14. *Бобровницкий Ю.И.* // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113; *Bobrovnitskii Yu.I.* // Acoust Phys. 2007. V. 53. No 1. P. 100.
15. *Flax L., Dragonette L.R., Überall H.* // JASA. 1978. V. 63. No 3. P. 723.

The relations between phases and amplitudes of multipole components of the acoustic field scattered by discrete inhomogeneities

K. V. Dmitriev*

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia

**E-mail: kdmitrie@lanat.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The acoustic field scattered by an object can be represented as a multipole series. The set of values of every coefficient in this series is limited for objects with cylindrical symmetry in the case of absence of internal energy sources. The relationships between the phases and amplitudes of these coefficients, as well as between the powers of the absorbed and scattered fields are given.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 127–133

УДК 534.08:534.21

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОРИСТЫХ УГЛЕПЛАСТИКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШИРОКОПОЛОСНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ С ЛАЗЕРНЫМ ИСТОЧНИКОМ УЛЬТРАЗВУКА

© 2021 г. Ю. Г. Соколовская[1, *], Н. Б. Подымова[1], А. А. Карабутов[2]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Международный учебно-научный лазерный центр, Москва, Россия*

**E-mail: yu.sokolovskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Экспериментально реализован метод широкополосной лазерно-ультразвуковой спектроскопии для исследования пористых углепластиков. Исследованные образцы представляли собой однонаправленные углепластики с различным объемным содержанием матрицы и волокна. Показано, что величина относительной дисперсии фазовой скорости продольных акустических волн характеризует пористость образца.

DOI: 10.31857/S0367676521010282

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема разработки и усовершенствования методов неразрушающего контроля полимерных композиционных материалов является весьма актуальной вследствие их широкого применения в промышленности. Одним из примеров таких материалов, часто используемых в авиации и ракетостроении, являются углепластики [1–3]. Хорошо известно, что в углепластиках уже на этапе изготовления возможно возникновение некоторой пористости – объемной доли газовых пор [3–5]. Пористость оказывает негативное влияние на механические свойства материала: его упругие модули, межслойную сдвиговую прочность, прочность на сжатие, растяжение и изгиб, а также на усталостную долговечность, что приводит к снижению срока службы композитных конструкций [5]. Таким образом, необходимо развивать методы оперативной количественной диагностики структуры углепластиков.

Ультразвуковые методы неразрушающего контроля композиционных материалов, основанные на измерении различных параметров акустических волн, распространяющихся в исследуемом материале, получили широкое распространение благодаря своей оперативности, надежности, безопасности и относительной простоте. Размер пор и неоднородностей в углепластиках может варьироваться от нескольких микрон до нескольких миллиметров, поэтому для количественного анализа структуры таких материалов необходимо использовать зондирующие импульсы, обеспечивающие широкий частотный диапазон для проводимых измерений (от нескольких сотен килогерц до десятков мегагерц). Следует отметить, что исследования частотных зависимостей фазовой скорости акустических волн в различных композиционных материалах и полимерах часто проводятся с применением традиционных пьезоэлектрических излучателей ультразвука (см., например, [6–8]). Известно, что использование пьезоэлектрических преобразователей имеет некоторые проблемы, связанные с низкой эффективностью пьезовозбуждения широкополосных акустических сигналов и с трудностями в получении равномерной частотной характеристики в широком спектральном диапазоне [9]. К настоящему времени было проделано существенное количество исследований, связанных с разработкой эффективных широкополосных пьезокерамических и пьезополимерных акустических преобразователей [10, 11]. Однако их конструирование требует некоторых сложных методов подавления возбуждения собственных резонансов пьезоэлемента для обеспечения рав-

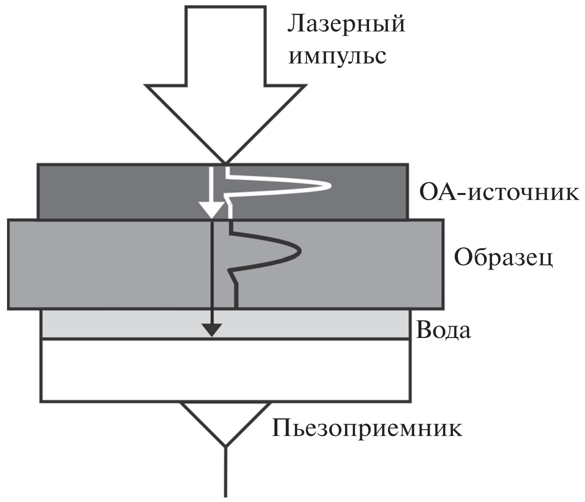

Рис. 1. Оптико-акустическая ячейка.

номерной частотной характеристики, что приводит к дополнительным потерям при электроакустическом преобразовании и к снижению эффективности широкополосного возбуждения ультразвука. Кроме того, для этих преобразователей могут использоваться только специальные мелкозернистые керамики и пьезополимеры, изготовленные по особым технологиям. Поэтому часто вместо одного широкополосного преобразователя используется набор из нескольких преобразователей с различными центральными частотами (см., например, [8, 12]), что не всегда удобно, и может вносить погрешности в измерения из-за замены датчиков. В качестве альтернативы пьезоэлектрическим преобразователям представляется перспективным использование метода, основанного на лазерном термооптическом возбуждении широкополосных акустических импульсов (оптико-акустический эффект [13—16]). Такой метод позволяет получить короткие и мощные широкополосные зондирующие импульсы продольных акустических волн со спектральным диапазоном от долей до десятков мегагерц и амплитудой до сотен мегапаскалей, что актуально для исследования сильно поглощающих и рассеивающих ультразвук композиционных материалов [14—16].

Целью настоящей работы является применение метода широкополосной лазерно-ультразвуковой спектроскопии для исследования частотных зависимостей фазовой скорости продольных акустических волн $C(f)$ в пористых углепластиках. Новизна работы состоит в получении зависимостей относительной дисперсии фазовой скорости для углепластиков с различным объемным содержанием матрицы и волокон, и вдобавок обладающих близкими значениями импедансов слоев, что приводит к отсутствию резонансного поведения кривой $C(f)$, которое обычно наблюдается в слоистых материалах. Основная идея заключается в том, что влияние пористости материала на дисперсию фазовой скорости продольных акустических волн позволяет использовать величину ее относительной дисперсии для количественной оценки содержания пористости в исследуемом образце.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Широкополосный лазерно-ультразвуковой спектрометр, используемый в данной работе, состоит из Nd:YAG-лазера с модуляцией добротности на длине волны 1064 нм, оптико-акустической (ОА) ячейки, цифрового осциллографа и персонального компьютера. Характерная длительность лазерного импульса 10—12 нс, частота повторения импульсов 10 Гц, энергия в импульсе 10—15 мДж. Схема ОА-ячейки представлена на рис. 1. При поглощении лазерного импульса в специальном источнике звука (ОА-источнике) происходит неоднородный нестационарный нагрев приповерхностного слоя, приводящий к возникновению в нем механических напряжений, которые, в свою очередь, являются источниками продольных акустических волн. Возбуждаемый в источнике ОА-сигнал является зондирующим (опорным) в данном спектрометре. В качестве ОА-источника ультразвука использовался водный раствор черной туши. Временной профиль, амплитудный и фазовый спектры зондирующего акустического импульса представлены на рис. 2. Отметим, что амплитуда и спектр возбуждаемого в источнике ОА-сигнала зависят как от параметров лазерного излучения, так и от свойств самого источника (в первую очередь, коэффициента поглощения света на длине волны используемого излучения), а также от граничных условий возбуждения [15, 16]. Таким образом, путем подбора материала ОА-источника с определенными свойствами возможно получить зондирующие импульсы с необходимой для конкретной задачи полосой частот. Это является важным преимуществом лазерно-ультразвукового метода. Регистрация ультразвуковых импульсов, прошедших через исследуемый образец, осуществлялась с помощью широкополосного пьезоприемника с рабочей полосой частот 0.1—30 МГц, изготовленного на основе ПВДФ пленки толщиной 30 мкм. Акустический контакт между образцом и пьезоприемником в ОА-ячейке обеспечивался слоем дистиллированной воды толщиной 3 мм. Электрические сигналы с пьезоприемника передавались на цифровой осциллограф с аналоговой полосой частот 200 МГц и затем обрабатывались на персональном компьютере. Запуск осциллографа был синхронизирован с моментом

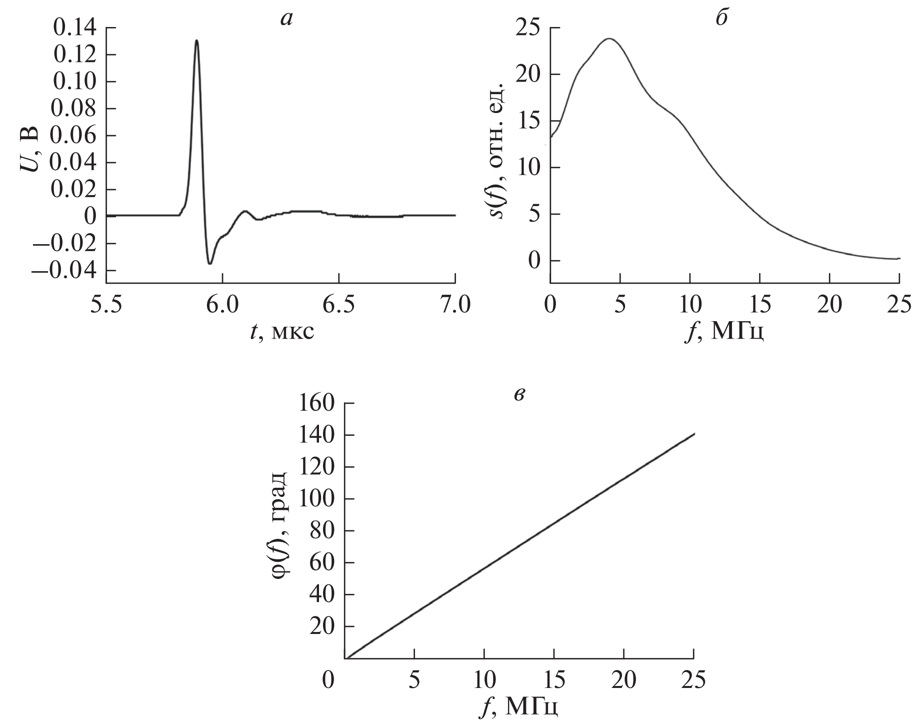

Рис. 2. Временной профиль (*а*), амплитудный спектр (*б*) и фазовый спектр (*в*) зондирующего ультразвукового импульса.

излучения лазерного импульса. Максимальное соотношение сигнал-шум регистрируемых электрических сигналов составляло порядка 2000.

Дисперсия фазовой скорости продольных акустических волн в образце $C(f)$ рассчитывается с использованием фазовых спектров зондирующего ультразвукового импульса $\varphi_0(f)$, и импульса, прошедшего через образец, $\varphi(f)$ [17]:

$$C(f) = \frac{H}{\Delta T + [\varphi(f) - \varphi_0(f)]/2\pi f}, \qquad (1)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ – разность моментов начала записи в осциллографе ультразвукового импульса, прошедшего исследуемый образец, и опорного ультразвукового импульса, H – толщина образца. Оба значения T_1 и T_2 отсчитываются от момента излучения лазерного импульса [16]. Разность фаз $\delta\varphi(f) = \varphi(f) - \varphi_0(f)$ не связана с набегом фазы импульса при его распространении в образце, а определяется искажением временной формы этого импульса за счет затухания и дисперсии фазовой скорости акустических волн в образце. Величины $\varphi_0(f)$ и $\varphi(f)$ рассчитываются с использованием стандартной процедуры "развертывания фазы" для получения непрерывных фазовых спектров [16]. Спектры ультразвуковых импульсов рассчитывались с использованием стандартного программного пакета быстрого преобразования Фурье, также для всех спектров применялась процедура компенсации частотно-зависимого дифракционного искажения широкополосных ультразвуковых импульсов, детально изложенная в [18].

ИССЛЕДУЕМЫЕ ОБРАЗЦЫ

Углепластик представляет собой композиционный материал, состоящий из чередующихся слоев ткани из углеродных волокон и полимерной матрицы. В настоящей работе исследовались восемь образцов углепластиков с различной пористостью и с различным объемным содержанием полимерной матрицы и углеродного наполнителя. Образцы условно разделены на группы с одинаковым содержанием компонентов, процентный состав исследованных образцов приведен в табл. 1. Исследуемые образцы являются так называемым однонаправленными углепластиками, в которых все ленты углеродных волокон, образующих армирующую ткань, сонаправлены. Толщина образцов составляла 10–11 мм.

Величина фазовой скорости продольных акустических волн C_0 для беспористого материала может быть рассчитана исходя из модели двухкомпонентной среды, связывающей объемные концентрации матрицы и наполнителя и фазовые скорости в отдельных компонентах с фазовой

Таблица 1. Процентный состав исследованных углепластиковых образцов

№ образца	P, %	Объемное содержание матрицы n_m, %	Объемное содержание наполнителя n_f, %	Скорость продольных акустических волн в беспористом образце C_0, м/с
1-1	2.5	32.8	67.2	3035 ± 15
1-2	4.2			
2-1	0	34.9	65.1	3008 ± 15
3-1	0	37.5	62.5	2977 ± 15
3-2	0.7			
3-3	2			
4-1	1.4	44.2	55.8	2905 ± 15
4-2	2.9			

скоростью продольных акустических волн в композитном материале [19]:

$$C_0^2 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{n_m}{\rho_m C_m^2} + \frac{n_f}{\rho_f C_f^2}\right)^{-1}, \tag{2}$$

где плотности матрицы и наполнителя составляют $\rho_m = 1200$ кг/м^3 и $\rho_f = 1744$ кг/м^3 соответственно, а фазовые скорости в матрице и наполнителе C_m и C_f могут быть измерены с использованием вышеописанной методики широкополосной акустической спектроскопии и считаются известными. Полученные с помощью формулы (2) величины C_0 для каждой группы образцов с различным содержанием компонентов также представлены в табл. 1. Погрешность определения C_0 определяется точностью измерения C_m и C_f по данной методике (см. ниже).

Практически все исследованные образцы содержали некоторую пористость. Пористость P, усредненная по всему объему образца, определяется как $P = (1 - \rho/\rho_0)$, где ρ — фактическая плотность образца, а ρ_0 — плотность твердой фазы образца (без пор), которая рассчитывается по известным плотностям полимерной матрицы ρ_m и углеродной ткани ρ_f и их объемным концентрациям n_m и n_f в данном образце: $\rho_0 = n_m\rho_m + n_f\rho_f$ (где $n_m + n_f = 1$). Оценка пористости исследованных образцов проводилась с помощью рентгеновской компьютерной томографии. Результаты томографии показали, что суммарная (средняя по объему) пористость P в исследованных образцах варьируется от 0 до 4.2% (см. табл. 1).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Расчет фазовой скорости продольных акустических волн в образцах углепластика проводился по измеренным фазовым спектрам с помощью формулы (1). Частотные зависимости фазовой скорости в исследованных образцах получены в частотном диапазоне от 0.8 до 10 МГц. Для частот $f < 0.8$ МГц величина фазовой скорости не определялась из-за достаточно большой погрешности, возникающей вследствие дифракции низкочастотных составляющих сигнала в образцах. Из-за сильного затухания высоких частот в композитных образцах для частот $f > 10$ МГц амплитуда прошедшего импульса достаточно мала и сравнима с уровнем шума, поэтому на частотах выше 10 МГц фазовая скорость также не определялась. Точность измерения фазовой скорости акустических волн определяется погрешностью измерения толщины исследуемого образца, а также соотношением сигнал—шум для спектральной амплитуды каждой гармоники сигнала. В данных экспериментах относительная погрешность измерения скорости ультразвука составляла около 0.5%.

На рис. 3 показаны полученные частотные зависимости фазовой скорости продольных акустических волн в углепластиках $C(f)$. Из рисунков видно, что дисперсия скорости имеет место для всех образцов, но ее величина для образцов с различной пористостью будет отличаться. Ранее авторами уже было показано, что дисперсия фазовой скорости продольных акустических волн может наблюдаться даже для беспористых углепластиков [15]. Это связано с наличием поглощения ультразвуковых волн в полимерной матрице, обусловленным особенностями внутренней структуры полимера [20], а также с рассеянием ультразвука на углеродных волокнах. Увеличение относительной дисперсии фазовой скорости для пористого материала происходит из-за преобразования исходной продольной акустической волны в объемную волну, которая будет огибать поры по их границам (см., например, [21]). Это приводит к уменьшению скорости ультразвуковых волн на низких частотах по сравнению со

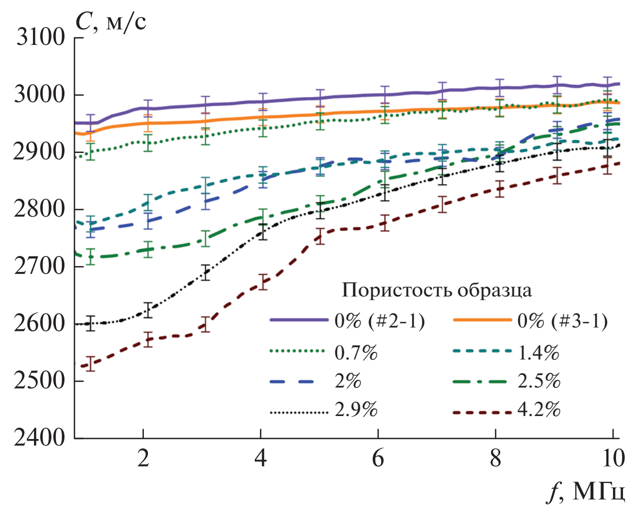

Рис. 3. Частотные зависимости фазовой скорости продольных акустических волн $C(f)$ для пористых углепластиков.

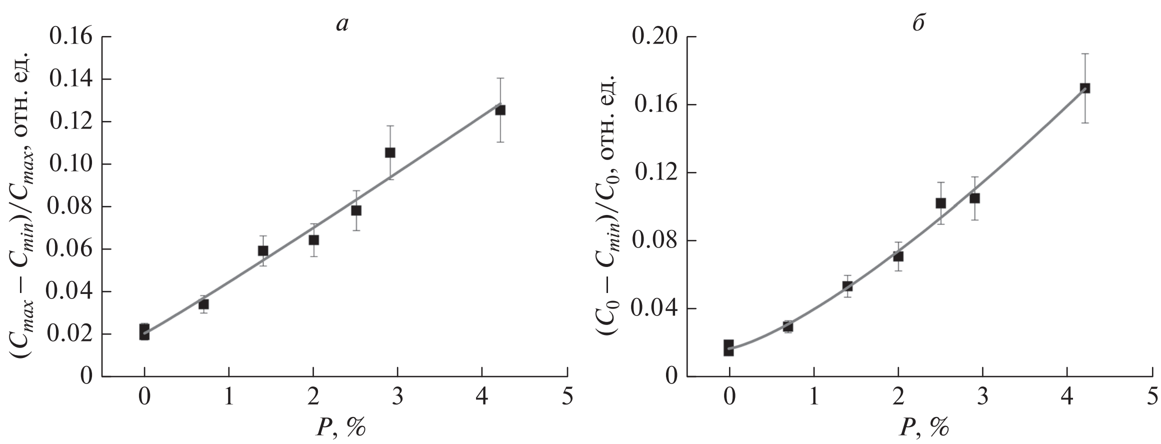

Рис. 4. Зависимости относительного изменения фазовой скорости продольных акустических волн для пористых углепластиков $\Delta C_1 = (C_{max} - C_{min})/C_{max}$ (*а*) и $\Delta C_2 = (C_0 - C_{min})/C_0$ (*б*).

скоростью в беспористом материале. Отсутствие резонансов в $C(f)$ для исследуемых композитных образцов связано с технологией производства материала, обеспечивающей близкие значение акустических импедансов слоев волокон и матрицы (различие порядка 3%) и высокой адгезией волокон к матрице. Для проверки данного факта была дополнительно проведено исследование зависимости $C(f)$ для аналогичного по методу изготовления беспористого тонкого образца толщиной 2.5 мм. Затухание ультразвука в данном образце было относительно слабым, что позволило получить $C(f)$ вплоть до 20 МГц. Полученная кривая также имела монотонный нерезонансный характер. Следует также отметить, что во всем исследуемом спектральном диапазоне абсолютное значение фазовой скорости для беспористого материала будет тем выше, чем больше объемная концентрация углеродного волокна в образце (поскольку скорость ультразвука в волокне выше, чем в матрице).

Для получения зависимости дисперсии фазовой скорости от пористости углепластика предлагается рассматривать ее относительное изменение $\Delta C_1 = (C_{max} - C_{min})/C_{max}$, где C_{max} и C_{min} – максимальная и минимальная величины фазовой скорости продольных акустических волн в диапазоне 0.8–10 МГц. Экспериментально полученная зависимость $\Delta C_1(P)$ показана на рис. 4*а*. Анализ полученных результатов показал, что $\Delta C_1(P)$ может быть аппроксимирована по методу наименьших квадратов степенной функцией с корреляцией не хуже 0.978:

$$y = 0.021 + 0.024x^{1.04}, \quad (3)$$

где независимая переменная x соответствует пористости углепластика P, а переменная y – величине относительного изменения фазовой скорости продольных акустических волн ΔC_1 в исследуемом частотном диапазоне.

Величина фазовой скорости C на высоких частотах должна стремиться к величине скорости C_0 для беспористого материла, зависящей только от процентного содержания компонентов. Для большинства исследуемых образцов данная величина скорости с учетом погрешностей измерения достигается уже на частотах 9–10 МГц, причем достигается тем раньше, чем меньше величина абсолютной дисперсии скорости $\Delta C = C_{max} - C_{min}$. Для двух образцов с высокой абсолютной дисперсией величина C_0 в исследуемом спектральном диапазоне не достигается, C будет стремиться к C_0 на несколько бóльших частотах, недоступных в данных экспериментах из-за сильного затухания высоких частот в данных образцах. Это может быть связано как с высокой пористостью этих образцов, так и с тем, что они имеют наиболее высокое содержание волокон (рассеяние на волокнах является дополнительным фактором, влияющим на затухание ультразвука в образце). Тем не менее, учитывая закономерность $C \to C_0$, можно также оценить величину относительной дисперсии фазовой скорости продольных акустических волн в образцах как $\Delta C_2 = (C_0 - C_{min})/C_0$. Полученная зависимость $\Delta C_2(P)$ показана на рис. 4*б*. Анализ результатов показал, что $\Delta C_2(P)$ может быть аппроксимирована по методу наименьших квадратов степенной функцией с корреляцией не хуже 0.997:

$$y = 0.017 + 0.023x^{1.32}, \tag{4}$$

где независимая переменная x, как и в предыдущем случае, соответствует пористости углепластика P, а переменная y – величине относительного изменения фазовой скорости ΔC_2. Отметим, что в данном случае точность аппроксимации выше, чем для зависимости $\Delta C_1(P)$. Таким образом, обе рассчитанные величины $\Delta C_2(P)$ и $\Delta C_1(P)$ могут служить характеристикой влияния пористости материала на относительное изменение фазовой скорости. Полученные эмпирические соотношения (3) и (4) могут быть использованы для оперативной неразрушающей оценки пористости композитов по частотной зависимости скорости ультразвука.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод широкополосной акустической спектроскопии с лазерным источником ультразвука позволяет получать частотные зависимости фазовой скорости ультразвуковых волн в углепластиковых композитах в диапазоне от единиц до десятков мегагерц. В работе исследовались образцы однонаправленных углепластиков с различным объемным содержанием матрицы и наполнителя и различной средней пористостью. Получены частотные зависимости фазовой скорости продольных акустических волн в спектральном диапазоне 0.8–10 МГц. Показано, что во всех исследованных образцах наблюдается дисперсия фазовой скорости, причем дисперсия тем больше, чем выше пористость материала. Получены эмпирические зависимости относительной дисперсии скорости ультразвука от пористости углепластика. Данные зависимости могут использоваться для оперативной неразрушающей оценки пористости углепластиков. Полученные результаты могут быть полезны как для контроля качества получаемых материалов с целью модернизации технологий изготовления, так и для предсказания поведения конструкций и деталей из данного материала под действием внешних нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Soutis C.* // Prog. Aerospace. Sci. 2005. V. 41. P. 143.
2. *Петронюк Ю.С., Мороков Е.С., Левин В.М. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 5. С. 560; *Petronyuk Y.S., Levin V.M., Morokov E.S. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 5. P. 491.
3. *Петронюк Ю.С., Левин В.М., Мороков Е.С. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. № 10. С. 1363; *Petronyuk Y.S., Levin V.M., Morokov E.S. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. No 10. P. 1224.
4. *Adams R.D., Cawle P.* // NDT Int. 1988. V. 21. No 4. P. 208.
5. *Scott A.E., Sinclair I., Spearing S.M. et al.* // Compos. Sci. Technol. 2014. V. 90. P. 147.
6. *Jeong H., Hsu D.K.* // Ultrasonics. 1995. V. 33. No 3. P. 195.
7. *Aksoy H.G.* // Ultrasonics. 2016. V. 67. P. 168.
8. *Zellouf D., Jayet Y., SaintPierre N. et al.* // J. Appl. Phys. 1996. V. 80. No 5. P. 2728.
9. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 302 с.
10. *Chung C.-H., Lee Y.-C.* // J. Nondestruct. Eval. 2009. V. 28. P. 101.
11. *Foster F.S., Ryan L.K., Turnbull D.H.* // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1991. V. 38. P. 446.
12. *Ghodhbani N., Maréchal P., Duflo H.* // Ultrasonics. 2015. V. 56. P. 308.
13. *Егерев С.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 5. С. 532; *Egerev S.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 5. P. 465.
14. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б.* // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 3. С. 265; *Karabutov A.A., Podymova N.B.* // Acoust. Phys. 2017. V. 63. No 3. P. 288.
15. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Соколовская Ю.Г.* // Акуст. журн. 2019. Т.65. № 2. С. 182; *Karabutov A.A.,*

Podymova N.B., Sokolovskaya Y.G. // Acoust. Phys. 2019. V. 65. No 2. P. 158.

16. *Podymova N.B., Karabutov A.A.* // J. Nondestruct. Eval. 2014. V. 33. No 1. P. 141.
17. *Fitting D.W., Adler L.* Ultrasonic spectral analysis for nondestructive evaluation. N.Y.: Plenum Press, 1981. 354 p.
18. *Karabutov A.A., Savateeva E.V., Podymova N.B. et al.* // J. Appl. Phys. 2000. V. 87. No 4. P. 2003.
19. *Карабутов А.А., Соколовская Ю.Г.* // Вестн. МГУ. Физ. астрон. 2018. № 6. С. 45; *Karabutov A.A., Sokolovskaya Yu.G.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. V. 73. No 6. P. 622.
20. *Перепечко И.И.* Акустические методы исследования полимеров. М.: Химия, 1973. 296 с.
21. *Wright T.W.* // J. Mech. Phys. Sol. 1998. V. 46. No 10. P. 2033.

Investigation of frequency dependences for phase velocity of longitudinal acoustic waves in porous carbon fiber plastic composites using broadband acoustic spectroscopy with laser ultrasound source

Yu. G. Sokolovskaya[a], *, N. B. Podymova[a], A. A. Karabutov[b]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*

[b]*Lomonosov Moscow State University, International Laser Center, Moscow, 119991 Russia*

**E-mail: yu.sokolovskaya@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

A broadband laser ultrasonic spectroscopy method for the investigation of porous carbon fiber plastic composites is experimentally realized. The studied samples were unidirectional carbon plastics with different volume contents of the matrix and fiber. It is shown that the relative dispersion of the phase velocity of longitudinal acoustic waves characterizes the porosity of the sample.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 134–139

УДК 532.526.4

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПОТОКА С ОБРАТНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

© 2021 г. О. Н. Мельникова[1, *], К. В. Показеев[1], Х. Ян[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: olamel@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Экспериментально получены вертикальные профили скорости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления в различных фазах периодического процесса торможения жидкости. При максимальном падении скорости профиль имеет локальный минимум с двумя точками перегиба у верхней границы вязкого слоя, где в этот момент формируются цепочки вихрей, что свидетельствует о потере устойчивости ламинарного движения.

DOI: 10.31857/S0367676521010233

ВВЕДЕНИЕ

Во всех технических и природных системах, включающих потоки жидкости, возникает взаимодействие течений и твердых поверхностей. В тонком слое потока, прилегающем к стенке, вязкость доминирует, и жидкость течет без проскальзывания, в отличие от “идеальной” жидкости. Выше вязкого слоя существует область, где вязкость еще сильно влияет на течение, образуя пограничный слой. Хотя двухслойная модель немного упрощена, этот подход является практическим способом моделирования. Течение жидкости удовлетворяет уравнению Навье–Стокса, включающего влияние вязкой диффузии и градиента давления. Для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{u}, \quad \vec{\nabla}\vec{u} = 0, \quad \vec{u}\big|_S = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{u}$ – скорость течения, ρ, ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости, p – давление, t – время, S – поверхность раздела. Для стационарных потоков без градиента давления на основе соображений подобия получен вертикальный профиль скорости $u(y)$, называемый “универсальным законом стенки” [1]:

$$u = u_*\left(\frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_*}{\nu} + C\right), \quad u_* = \sqrt{\nu\frac{\partial u}{\partial y}}, \quad \kappa,\ C\text{-const.} \qquad (2)$$

В [1] Прандтль впервые предположил, что под действием положительного градиента давления в пограничном слое потока течение должно тормозиться вплоть до полной остановки жидкости, нарушая устойчивость ламинарного течения, что приводит к возникновению вихрей. Математическое моделирование таких нестационарных пограничных течений является сложной задачей, которую пока решить не удалось. Были сделаны попытки эмпирически подобрать параметры и способы нормировки, чтобы представить вертикальные профили усредненной по времени скорости замедляющегося течения в виде экспонент, подобных решению (2), однако решить эту задачу не удалось [2]. Профили скорости, полученные в зонах замедления стационарного течения методами прямого численного моделирования, имеют однородный участок в тонком слое у дна канала вместо линейного распределения по вертикали, зафиксированного в экспериментальных и натурных условиях [2–5]. Форма профиля имеет точку перегиба, но не гарантирует потерю устойчивости ламинарного течения к малым возмущениям. В [6] экспериментально показано, что в прямом канале в пограничном слое потока с обратным градиентом давления имеет место нестационарный циклический процесс торможения жидкости, а каждый цикл заканчивается формированием цепочки цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, направленной в поперечном направлении. В [7] экспериментально зафиксирован периодический выброс возмущений у стенки в потоке с положительным градиентом давления в зоне резкого расширения прямой трубы и замедления течения. В исследованиях замедляющихся потоков [6, 7] при малых числах Рейнольдса $Re < 10^4$ потеря устойчивости ламинарного движения не зависела от числа Re и энергии возмущений, что свидетельствует о линейном характере потери устойчивости. Можно предположить, что в процессе торможения форма профилей скорости меняется, и, что существует критическая фаза периодического процесса торможения, в которой на профиле формируется особенность, обеспечивающая потерю устойчивости ламинарного движения для бесконечно малых возмущений. Для проверки сделанного предположения необходимо получить экспериментально вертикальные профили скорости в различных фазах процесса торможения течения в потоках с обратным градиентом давления. Решение этой задачи является целью настоящей работы.

МЕТОДИКА И АППАРАТУРА

Эксперименты проводились в прямом канале с гладкими прозрачными стенками из оргстекла длиной 3.5 м, шириной 15 см, с регулируемым наклоном дна. Были исследованы равномерные потоки с нулевой составляющей градиента давления в направлении движения $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и потоки с обратным градиентом давления $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$. Расход воды не менялся во времени. Толщина слоя воды составляла $2.1 < h < 3.1$ см. Максимальная (в сечении) скорость потоков в серии экспериментов составляла $15 < U_{max} < 40$ см · с$^{-1}$, продольный градиент скорости не превышал по модулю 0.1 с$^{-1}$. Для исследования поля скорости использовалась видеозапись перемещения частиц с плотностью $\rho = 1.05$ г · см$^{-3}$ и средним диаметром 0.2 мм. Размер частиц позволял разрешать скорость течения в вязком слое потока толщиной порядка 2 мм. Видеозапись велась через боковую стенку канала. Скорость видеозаписи – 25 кадров в секунду. Камера вручную фокусировалась на ось канала, чтобы по четкости изображения отличать и использовать частицы, перемещающиеся вдали от вертикальных стенок. Рабочий участок занимал 15–18 см вдоль продольной оси канала. Обработка данных видеозаписи с помощью программы Adobe Photoshop позволила получить траектории и скорости частиц, одновременно перемещавшихся вдоль рабочего участка на разных горизонтах. Скорость потока определялась по смещению частиц от кадра к кадру. Для исследования поля скорости основного плоскопараллельного течения учитывалось перемещение только тех частиц, которые имели горизонтальные траектории, направленные вдоль оси канала (оси x). Такой выбор частиц исключал учет возмущений, вносимых вихрями, скорость и траектория которых отличаются от скорости и линий тока основного плоскопараллельного течения [6, 8]. Среднее значение скорости для координаты x, y, z определялось по нескольким частицам, имеющим близкие траектории.

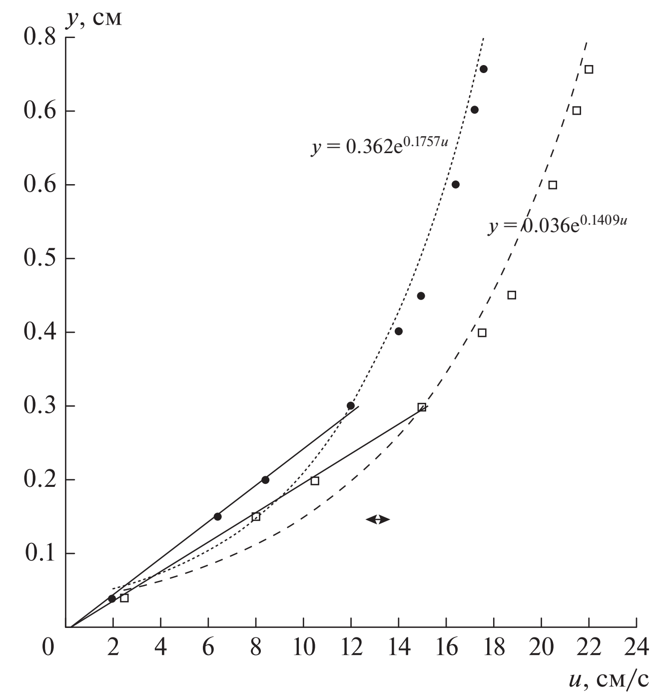

Рис. 1. Вертикальные профили средней скорости равномерного потока. $h = 3$ см, $U_{max} = 24$ и 30 см · с$^{-1}$. Линии аппроксимируют экспериментальные данные (маркеры).

РАВНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Экспериментальные данные показали, что в стационарных равномерных потоках средняя скорость течения, определенная по перемещению частиц нейтральной плавучести вдоль оси канала на данном горизонте, меняется в пределах доверительного интервала 1.5 см · с$^{-1}$ для вероятности 0.67. Доверительный интервал получен при усреднении данных для 10 частиц на всем рабочем участке. Вертикальные профили средней скорости потока глубиной $h = 3$ см для двух значений U_{max} приведены на рис. 1. Из приведенных данных следует, что в равномерных потоках у дна существует вязкий слой с линейной зависимостью $u(y)$. Выше вязкого слоя экспериментальные данные можно аппроксимировать экспонен-

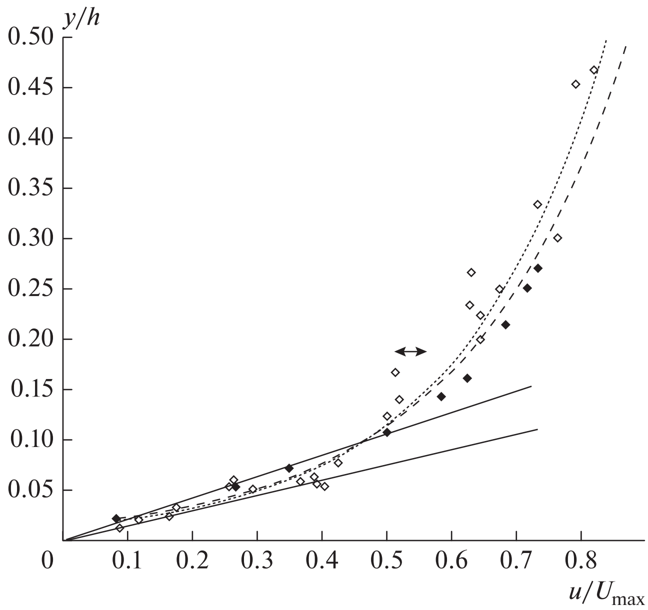

Рис. 2. Равномерный (закрашенные маркеры) и замедляющийся (пустые маркеры) потоки. $U_{max} = 30$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $h = 3$ см. Время усреднения – несколько циклов процесса торможения. Стрелка – доверительный интервал.

циальной зависимостью $y(u)$, подобной (2). Толщина вязкого слоя определяется точкой пересечения линий тренда: линейной функции для вязкого слоя и экспоненты для внешней части пограничного слоя. В исследованном диапазоне значений скорости ($15 < U_{max} < 40$ см $\cdot$ с$^{-1}$) при глубине потока $h = 3$ см толщина вязкого слоя составляет $\delta \approx 0.1h$, а скорость $u(\delta) \approx 0.5U_{max}$. При нормировке данных на глубину слоя воды и максимальную в сечении скорость течения вертикальные профили средней скорости равномерных потоков в канале с гладким дном подобны во всем пограничном слое.

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ И ЗАМЕДЛЯЮЩИХСЯ ТЕЧЕНИЙ

На рис. 2 приведены нормированные профили усредненной по времени скорости для двух потоков одинаковой глубины и одинаковой максимальной в сечении скорости. Один из потоков – равномерный, а второй – с обратным градиентом давления. Время усреднения значений скорости на порядок превышало период процесса торможения замедляющегося потока. Во внешней области пограничного слоя экспоненциальные линии тренда экспериментальной зависимости $y(u)$ равномерного и замедляющегося потоков очень близки, что свидетельствует о подобии профилей выше вязкого слоя. В замедляющемся потоке толщина слоя с линейным профилем средней скорости $\delta \approx 0.06h$, это значение меньше, чем в равномерном потоке. Скорость течения на верхней границе вязкого слоя $u(\delta) \approx 0.4U_{max}$ тоже меньше, чем в равномерном потоке. Во внешнем слое скорость замедляющегося потока ниже, а отклонения скорости от линии тренда выше, чем в равномерном потоке на всех горизонтах. Это связано с периодическим торможением жидкости в потоке с обратным градиентом давления. Форма профиля в замедляющемся потоке подобна профилю (2) и не содержит особенностей, гарантирующих потерю устойчивости ламинарного движения. Для объяснения неустойчивости течения замедляющегося потока и формирования вихрей в фазе максимального торможения жидкости, наблюдаемого в эксперименте [5], было исследовано изменение формы вертикального профиля скорости в различных фазах процесса торможения.

ПРОФИЛИ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ ФАЗАХ ПРОЦЕССА ТОРМОЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

На рис. 3 приведены зависимости $u(x)$, полученные для частиц, перемещающихся на различных горизонтах. Скорость жидкости определялась по смещению частиц на последовательных кадрах видеозаписи. Толщина слоя воды составляла 3 см, $U_{max} = 24$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \approx -0.01$ с$^{-1}$ на свободной поверхности. На верхних горизонтах $y > 0.8$ см течение соответствует ламинарному движению. В слое $y < 0.6$ см зафиксировано резкое замедление течения на всех горизонтах в двух зонах продольной оси: $3 < x < 4$ см и $7 < x < 8$ см. Частицы проходят зоны торможения примерно за 0.2 с (5 кадров), снижение скорости зависит от фазы торможения и координаты. На рис. 3 приведены зависимости $u(x)$ частиц, скорость которых минимальная в зонах торможения. Падение скорости происходит периодически с интервалом времени 0.8 с. На основе этих данных можно получить вертикальный профиль скорости в фазе максимального торможения жидкости. Для построения профиля проводилось усреднение данных для 10 циклов торможения в этой фазе. На рис. 4 приведены вертикальные профили средней скорости, соответствующие начальной и максимальной фазе торможения. Максимальная скорость течения составляла $U_{max} = 40$ см $\cdot$ с$^{-1}$, толщина слоя воды 2.4 см, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \approx -0.1$ с$^{-1}$. На профиле,

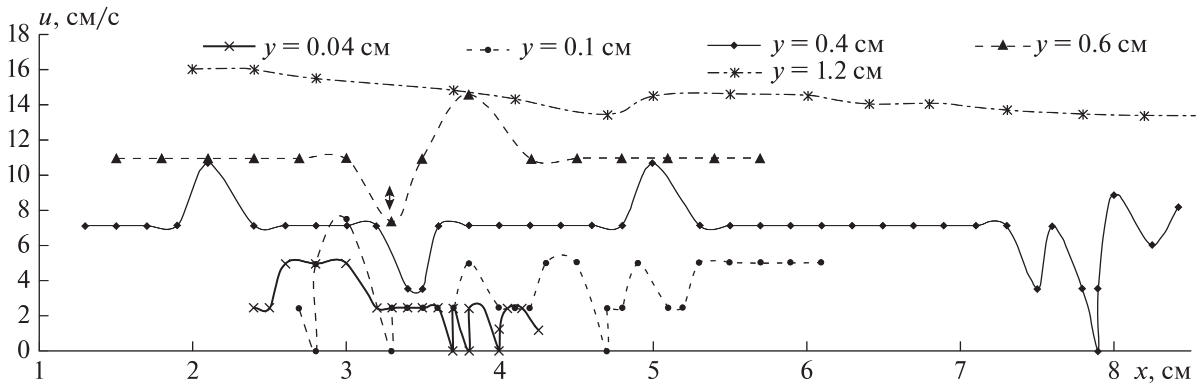

Рис. 3. Изменение скорости частиц вдоль продольной оси. Все частицы имеют минимум скорости в зонах интенсивного торможения.

полученном в начальной фазе торможения, экспериментальные данные хорошо следуют экспоненциальной линии тренда во внешней части пограничного слоя и линейной функции $u(y)$ в вязком слое у дна канала. Однако скорость течения на всех горизонтах ниже, чем на профилях, полученных вне зон интенсивного торможения жидкости. Скорость на верхней границе слоя с линейным профилем толщиной 0.1 см составляет 13.2 см $\cdot$ с$^{-1}$.

На профиле, полученном в фазе максимального торможения, экспериментальные данные обозначены пустыми маркерами, соединенными подгоночной штриховой линией. Такое построение позволяет подчеркнуть форму профиля и показать, что экспериментальный профиль существенно отличается от экспоненциальной линии тренда выше вязкого слоя на координатах $0.1 < y < 0.48$ см. В этом слое на профиле появилась особенность в виде локального минимума скорости течения с двумя точками перегиба на координатах $y \approx 0.2$ и 0.4 см. В нижней точке перегиба вторая производная скорости $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ меняет знак, а первая производная имеет минимум. Два профиля, приведенных на рис. 4 представляют собой начальную и конечную стадию деформации за один цикл торможения жидкости. Скорость течения убывает под действием обратного градиента давления во всем слое, кроме тонкой придонной области. На профиле сохраняется слой, в котором зависимость $u(y)$ имеет линейный характер. Толщина слоя с линейным профилем скорости не меняется, скорость на верхней границе слоя уменьшается в 2 раза. Как только на профиле появляется локальный минимум скорости, показанный на рис. 4, в эксперименте фиксируется сворачивание цилиндрических вихрей. На рис. 4 приведен кадр видеозаписи, на котором зафиксировано формирование вихря над верхней границей вязкого слоя. Визуализация получена белыми частицами нейтральной плавучести, захваченными вихрем в процессе формирования. Формирование вихря свидетельствует о потере устойчивости ламинарного движения для потока с профилем скорости, содержащим две точки перегиба.

Мгновенные профили, полученные методами прямого численного моделирования для стационарных потоков с обратным градиентом давления, например [3], в вязком слое имеют однородное распределение скорости по вертикальной координате. Полученные нами результаты показывают, что в эксперименте такой однородный участок не формируется. Как только на профиле возникает локальный минимум скорости на верхней границе вязкого слоя, ламинарное течение теряет устойчивость: возникает цепочка вихрей в зонах торможения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная экспериментальная методика позволила изучить поле скорости в пограничном слое равномерных потоков и потоков с обратным градиентом давления в прямом канале с гладким дном. Показано, что вертикальные профили скорости, осредненной на больших временах, имеют линейную зависимость скорости от вертикальной координаты в придонном слое равномерных и замедляющихся потоков и экспоненциальную зависимость $y(u)$ выше этого слоя. Толщина слоя с линейным профилем скорости максимальна для равномерного потока $\delta \approx 0.1h$ и уменьшается в замедляющемся потоке. Скорость на верхней

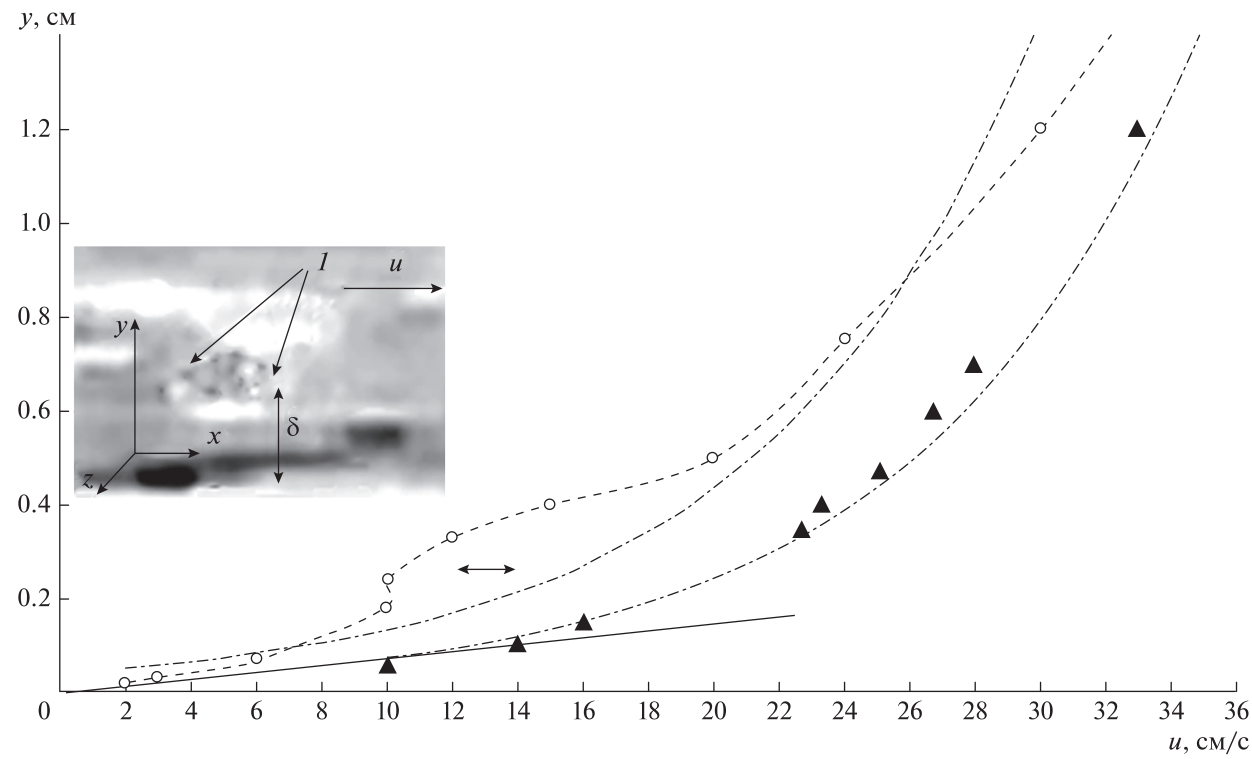

Рис. 4. Вертикальные профили скорости в начальной фазе (закрашенные маркеры) и в фазе максимального торможения (пустые маркеры соединены подгоночной кривой). На врезке кадр видеозаписи – цилиндрический вихрь (*1*).

границе вязкого слоя максимальная в равномерном потоке и составляет $u(\delta) \approx 0.5U_{max}$.

В пограничном слое замедляющегося потока течение нестационарное – периодически жидкость тормозится. Процесс торможения имеет наибольшую интенсивность в дискретных зонах, расположенных вдоль оси x, в слое $0.04 < \frac{y}{h} < 0.2$. В этих зонах на всех горизонтах периодически наблюдается синхронное уменьшение скорости потока, что приводит к постепенной деформации вертикального профиля скорости в течение одного цикла торможения. В начальной фазе профиль подобен профилю, полученному при осреднении данных за несколько циклов торможения. Затем профиль деформируется, а в фазе максимального торможения на вертикальном профиле скорости формируется локальный минимум, имеющий две точки перегиба на координатах $0.08h$ и $0.16h$. Локальный минимум располагается на горизонте $y = 0.1h$, соответствующем верхней границе вязкого слоя равномерного потока. В момент формирования локального минимума скорости в слое между точками перегиба в эксперименте фиксируется формирование цилиндрических вихрей, что свидетельствует о потере устойчивости ламинарного движения. Полученные данные показывают, что для адекватного описания процесса формирования вихрей в потоке с обратным градиентом давления, следует решать нестационарную задачу с начальными данными, учитывающую циклический процесс торможения жидкости в пограничном слое потока жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prandtl L.* // Proc. Third Inter. Math. Congr. (Heidelberg, 1904). P. 484.
2. *Materny M., Drozdz A., Elsner V. et al.* // Arch. Mech. 2008. V. 60. No 6. P. 449.
3. *Ardakani S.R., McKinley G.H.* // Phys. Fluids. 2019. V. 31. Art. No 053601.
4. *Nagib H.M., Chauhan K.A.* // Phys. Fluids. 2008. V. 20. Art. No 101518.
5. *Stone M.C., Hotchkiss R.H.* // J. Hydr. Res. 2007. V. 45. No 6. P. 752
6. *Мельникова О.Н.* // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2005. Т. 41. № 5. С. 682; *Mel'nikova O.N.* // Izv. Atm. Ocean. Phys. 2005. V. 41. No 5. P. 620.
7. *Lebon B., Nguyen M.Q., Peixinho J. et al.* // Phys. Fluids. 2018. V. 30. Art. No 031701.
8. *Ahmadi F., Sanders S., Ghaemi S.* // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. Art. No 014302.

Features of the flow of an adverse pressure gradient boundary layer

O. N. Melnikova[a, *], K. V. Pokazeev[a], H. Yang[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Department of Physics, Moscow, 119992 Russia*

**E-mail: olamel@yandex.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

It was experimentally obtained vertical velocity profiles in the boundary layer of the flow with an inverse pressure gradient in various phases of the periodic process of fluid deceleration. At the maximum drop in velocity, the profile has a local minimum with two inflection points at the upper boundary of the viscous layer, where at that moment chains of vortices form, which indicates a loss of stability of the laminar motion.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 140–144

УДК 534.6.08

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ТКАНЯХ ЭМБРИОНОВ КОСТИСТЫХ РЫБ

© 2021 г. С. А. Титов[1, *], А. Б. Бурлаков[2], П. В. Зинин[1], А. Н. Богаченков[3]

[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской академии наук, Москва, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Москва, Россия

[3]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "МИРЭА – Российский технологический университет", Москва, Россия

*E-mail: sergetitov@mail.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Разработана неинвазивная методика ультразвуковой визуализации структуры эмбрионов рыб и измерения скорости звука в их тканях. С помощью акустического микроскопа с центральной частотой 50 МГц проведено исследование икры вьюна (*Misgurnus fossilis*), развивающегося в иммерсионной ячейке прибора, на 6–8 стадиях развития измерена скорость звука в желтке и клеточном слое (бластуле) эмбриона.

DOI: 10.31857/S0367676521010294

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время эмбрионы рыб представляются популярным и перспективным объектом исследований в биологии развития, генетике, регенеративной медицине, экологии и др. благодаря краткому периоду эмбрионального развития, сравнительно большому размеру и возможности развития вне родительского организма [1]. Основным инструментом исследований эмбриогенеза рыб является оптическая микроскопия, позволяющая с достаточно высоким разрешением наблюдать структурные изменения [2, 3]. Вместе с тем, оптические изображения часто имеют низкий контраст и малую глубину резко изображаемых элементов, а использование высокоэнергетического излучения в течение длительного времени негативно сказывается на живой организм. Недавно было показано [4, 5], что эффективным методом исследования эмбриогенеза рыб является ультразвуковая визуализация. Ультразвуковые волны оказывают незначительное воздействие на организм, что позволяет проводить наблюдение одного эмбриона на протяжении всего цикла его развития. Этот метод дает высокий контраст, обусловленный вариациями упруговязкостных свойств тканей и позволяет визуализировать структурные изменения глубоко расположенных органов и их движение.

Известны работы, посвященные ультразвуковым исследованиям эмбрионов мышей и цыплят [6, 7]. Эмбрион рыбы являлся объектом исследований в единственной известной авторам работе [8], причем в большей степени он использовался для демонстрации возможностей разработанной аппаратуры и метода визуализации. Таким образом, акустические свойства основных органов эмбриона рыб неизвестны в настоящее время. В данной работе разрабатывается методика измерения скорости звука в желтке и клеточном слое (бластуле) эмбриона и проводятся измерения на стадиях развития средней и поздней бластулы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В работе использовалась икра вьюна (*Misgurnus fossilis*), которая часто используется в биологических исследованиях. Оплодотворение икры, получаемой после гормональной стимуляции самок, проводилось в отдельном сосуде непосредственно перед ультразвуковыми исследованиями. Работа с данными биологическими объектами выполнялась в соответствии с этическими стандартами учреждения, в котором проводились исследования, и утвержденными правовыми актами РФ и международных организаций.

Упрощенная схема строения икринки костистой рыбы на стадиях развития 6–8 представлена на рис. 1. Общий размер икринки вьюна составляет приблизительно 2 мм, самого эмбриона — 1.2 мм. Она имеет наружную оболочку округлой формы (хорион), заполненную перивителлиновой жидкостью *1.* Внутри икринки располагается желток *2*, к которому примыкает бластула *3*, образованная слоем делящихся клеток. Бластула по мере развития эмбриона распространяется вдоль поверхности желтка, становясь тоньше и охватывая все большую площадь. Размер клеток в бластуле на данных стадиях развития колеблется в пределах 10–20 мкм [1]. Эмбрион располагается приблизительно симметрично по отношению к вертикальной оси икринки и, обладая некоторой свободой передвижения в перивителлиновой жидкости, несколько смещается из центра вниз под действием силы тяжести.

Ультразвуковые измерения проводились с помощью сканирующего импульсного акустического микроскопа [5]. В нем использовался одиночный сфокусированный преобразователь с центральной частотой 50 МГц и относительной полосой частот 50%. Фокусное расстояние и угловая апертура преобразователя при использовании воды в качестве иммерсионной жидкости составляли 5 мм и 30°, соответственно, обеспечивая пространственное поперечное разрешение 30 мкм. В приборе использовалось механическое сканирование преобразователя, позволяющее формировать трехмерный пространственно–временной сигнал $s(x, y, t)$, где x, y — поперечные координаты, t — время. Икринка помещалась в иммерсионной среде на стеклянную подложку. Снизу от подложки располагался видеомикроскоп, позволяющий получать изображение эмбриона с умеренным разрешением, достаточным для контроля состояния и ориентации эмбриона. В качестве иммерсионной среды использовалась вода, взятая из природного источника, ее температура находилась в пределах 22 ± 2°C на протяжении всего эксперимента.

УЛЬТРАЗВУКОВАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЭМБРИОНА

Измерение скорости звука в желтке и бластуле проводилось по акустическим данным, записанным в течение 5 часов развития одного эмбриона на стадиях 6–8. В качестве примера ультразвуковые изображения $I(x, y)$ (С-сканы), полученные в начале, середине и конце этой серии измерений приведены на рис. 2*а*–2*в*, соответственно. Фокальная плоскость преобразователя, располагаемая на расстоянии 0.8 мм от подложки, проходила приблизительно через середину эмбриона. На изображениях представлено двумерное распределение максимального значения огибающей сигнала, принятого во временном окне длительностью 0.6 мкс. Середина этого окна была настроена на прием сигналов, отраженных из фокальной плоскости. Таким образом, полученные сканы отображают акустические неоднородности, находящиеся в фокальной области в слое толщиной 0.45 мм.

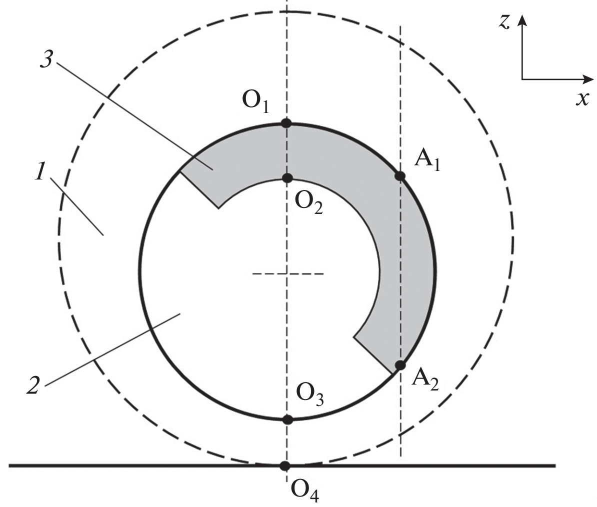

Рис. 1. Строение икры рыбы: *1* — перивителлиновая жидкость; *2* — желток; *3* — бластула.

В изображениях эмбриона различаются темный желток Y, расположенный в центре, и более яркая бластула B, охватывающая желток. Как видно, отражательная способность клеточного слоя бластулы существенно выше, чем у желтка. Характерные размеры клеток в этом слое (10–20 мкм) существенно меньше разрешающей способности микроскопа на используемой частоте ультразвука (30 мкм), поэтому изображение бластулы имеет ярко выраженную спекл структуру. Отражение в области желтка существенно более слабое, хотя и превышает уровень шума. Вокруг эмбриона наблюдаются отдельные яркие отражатели, расположенные вдоль окружности с диаметром 1.8–1.9 мм. По-видимому, эти эхо-сигналы производятся небольшими пузырьками и посторонними частицами, прилипшими к наружной оболочке икринки. Ультразвуковые изображения показывают, что с течением времени слой бластулы становится тоньше и покрывает все большую область на поверхности желтка. Такое поведение является характерным для развития эмбриона на данных стадиях [1, 9].

Структуру исследуемого эмбриона в продольном направлении отображают пространственно-временные сигналы $s(x, t)$ (B-сканы), представленные для начала, середины и конца 5-часовой серии измерений на рис. 3*а*–3*в*, соответственно. В данном формате регистрируемый знакопеременный сигнал s отображается на

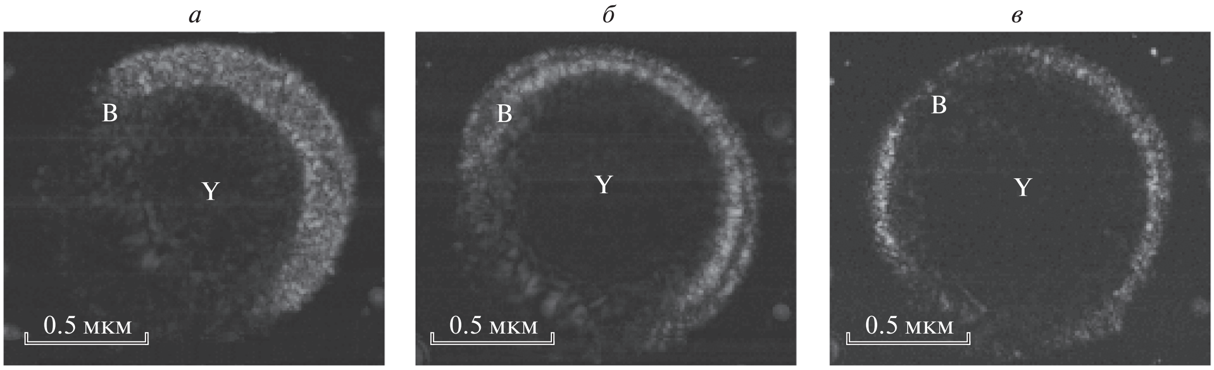

Рис. 2. Ультразвуковые изображения эмбриона $I(x, y)$.

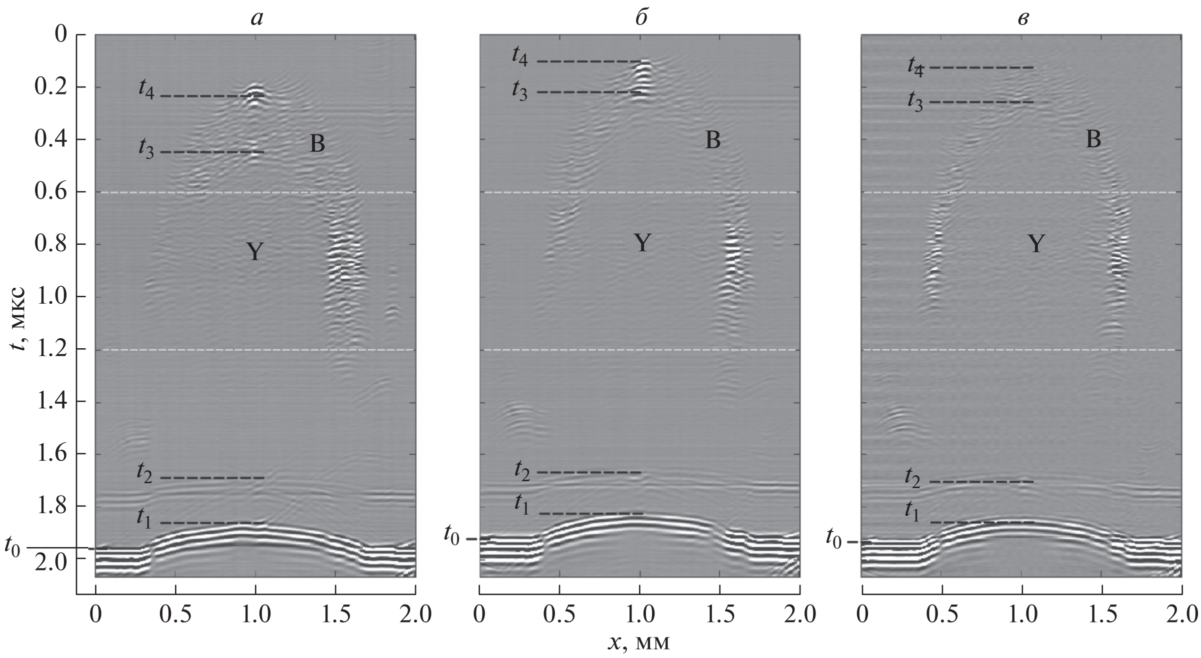

Рис. 3. Ультразвуковые изображения эмбриона $s(x, t)$.

изображениях оттенками серого в зависимости от времени t и координаты сканирования x. Поперечная координата y в таком представлении выбрана постоянной, соответствующей середине эмбриона. Положение временного окна, используемого при генерации изображений $I(x, y)$ (рис. 2), показано на В-сканах пунктирными линиями.

На В-сканах выделяется клеточный слой B, охватывающий область желтка Y. Амплитуда сигнала, отраженного слоем, выше в верхней области бластулы (точки O_1 и O_2, рис. 1), где ее граница перпендикулярна акустический оси преобразователя, и в области фокуса при $0.8 < t < 1$ мкс. В области фокуса для желтка также различимы слабые отражения. Ниже выделенного временного окна сигналы от эмбриона практически не обнаруживаются вследствие расфокусировки и ослабления ультразвука при прохождении через эмбрион. Исключение составляет слабый отклик от нижней поверхности желтка со временем прихода t_2, лежащий на оси в области O_3 (рис. 1). Отклик от подложки, расположенный внизу В-сканов, несмотря на расфокусировку имеет большую амплитуду вследствие значительного различия акустических импедансов жидкости и подложки. Вне области эмбриона этот отклик имеет постоянные амплитуду и время прихода. Под эмбрионом амплитуда отклика от подложки становится меньше вследствие затухания волн в тканях, а время его прихода укорачивается из-за большей скорости звука в эмбрионе по сравнению с иммерсией.

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА

По 11 наборам ультразвуковых данных $s(x, y, t)$, записанных в ходе эксперимента на протяжении 5 ч, были проведены измерения среднего поперечного размера эмбриона d и его продольного размера d_0. Поперечный размер d определялся для каждого С-скана (рис. 2) по положению внешней границы бластулы или желтка в нескольких направлениях. Точность таких измерений ограничивается размытостью границы и разрешающей способностью микроскопа. Однако можно отметить, что наблюдается тенденция уменьшения за время измерений среднего диаметра d с 1.31 до 1.29 мм. Продольный размер $d_0 = l_2 + l_3$ рассчитывался как разность расстояний O_1O_4 и O_3O_4:

$$2d_0 = \left[(t_0 - t_4) - (t_1 - t_2)\right]C_0, \tag{1}$$

где C_0 = 1485 м/с – скорость звука в окружающей эмбрион среде, t_4, t_2 – времена прихода волн, отраженных на соответствующих границах эмбриона, а t_1, t_0 – времена прихода импульсов, отраженных от подложки в области эмбриона и вне его, соответственно. Расчеты показывают, что d_0 с течением времени увеличивается с приблизительно 1.22 до 1.26 мм. Таким образом, ультразвуковые измерения подтверждают, что форма эмбриона близка к сферической, а слабый отклик со временим прихода t_2 соответствует отражению от нижней границы желтка в точке O_3.

Расчет скоростей ультразвука в бластуле и желтке был проведен в приближении геометрической акустики с помощью метода замещения, модифицированного в соответствии с особенностями исследуемого объекта [11, 12]. Допустимость данного приближения обосновывается тем, что характерные размеры эмбриона значительно превышают длину волны. Для измерения скорости в желтке использовался луч O_1O_4, проходящий через центр эмбриона и падающий перпендикулярно на подложку. Кроме того, учитывался опорный сигнал со временем прихода t_0, который отразился от подложки вне эмбриона. Расстояние от вершины эмбриона до подложки определяется временем распространения опорного сигнала в иммерсионной жидкости:

$$t_4 - t_0 = 2(l_1 + l_2 + l_3)C_0^{-1}, \tag{2}$$

где переменные l_1, l_2, l_3 равны длинам отрезков O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, соответственно. Разность времен распространения опорной и измерительной волн равно:

$$\begin{aligned} dt &= t_1 - t_0 = \\ &= 2\left[(l_1 + l_2 + l_3)C_0^{-1} - l_1C_0^{-1} - l_2C_y^{-1} - l_3C_b^{-1}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$C_b = C_0 + \Delta C_b, \quad C_y = C_0 + \Delta C_y \tag{4}$$

скорости звука в бластуле и желтке, соответственно. Учитывая, что:

$$l_3 = (t_3 - t_4)C_b, \quad l_2 = (t_2 - t_3)C_y, \tag{5}$$

относительная задержка равна:

$$dt = \left[(t_2 - t_3)\Delta C_y + (t_3 - t_4)\Delta C_b\right]C_0^{-1}. \tag{6}$$

Таким образом, зная скорости звука в иммерсионной среде и бластуле, скорость в желтке можно определить, измеряя задержки dt, (t_2–t_3), (t_3–t_4). Скорость в воде C_0 известна априорно, а скорость звука в бластуле может быть оценена следующим образом.

Скорость в бластуле можно оценить, рассматривая время прохождения волны вдоль луча A_1A_2, проходящей только через клеточный слой перпендикулярно подложке (рис. 1). На В-сканах границы бластулы в точках пересечения с лучом не являются четкими (рис. 3), так как они не находятся вне фокальной плоскости и луч пересекает их под большим углом. Поэтому путь $l(x)$, проходимый волной в клеточном слое, можно оценить, считая, что сечение поверхности бластулы плоскостью (x, z) в области измерения является окружностью:

$$l(x) = 2\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \tag{7}$$

где радиус кривизны R и положение центра поверхности бластулы x_0 определяются по С-сканам. Разность времен прихода волны, прошедшей через бластулу, и опорной волны, отраженной от подложки, можно записать аналогично (6), полагая малость приращения скорости в бластуле по сравнению со скоростью в воде:

$$dt(x) = 2l(x)\Delta C_b C_0^{-2}. \tag{8}$$

Искомую величину ΔC_b можно оценить методом линейной регрессии, располагая измеренной зависимостью $dt(l)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Для оценки скорости ультразвука в бластуле использовались данные, полученные в начале эксперимента, для которых толщина клеточного слоя в поперечном направлении имеет достаточную величину. По мере развития эмбриона толщина бластулы уменьшается, и предложенная выше методика расчета скорости дает неустойчивые результаты. Используя данные первого В-скана (рис. 3) в диапазоне x 1.44–1.65 мм, была построена зависимость $dt(l)$ и найдено в соответствии с (8) значение ΔC_b = 41 м/с. Погрешность коэффициента пропорциональности этого линейного модельного уравнения, оцененная путем расчета остаточной дисперсии задержки *dt* относительно линии регрессии, составила $\pm 16\%$.

Полученное значение скорости звука в бластуле было использовано при нахождении скорости в желтке ΔC_y по формуле (6). Значение, найденное по всем записанным на протяжении эксперимента 11 сканам, составляет $\Delta C_y = 90 \pm 8$ м/с.

Следует отметить, что на результат измерения ΔC_y влияет величина скорости в бластуле, которая определена со сравнительно большой погрешностью. Кроме того, она оценена только для начального периода эксперимента и может меняться по мере развития организма. Однако зависимость скорости в желтке от скорости звука в бластуле является слабой вследствие малости толщины бластулы по сравнению с размером желтка. Так уменьшение ΔC_b на 10 м/с вызывает в соответствии с (6) увеличение ΔC_y только на 1 м/с.

Сравнивая результаты измерений с опубликованными данными [10], можно отметить, что полученное значение скорости звука в желтке эмбриона меньше, чем скорость в таких плотных тканях, как хрящи или хрусталик глаза. Однако она больше скорости звука в тканях мозга или почек и сравнима с тканями печени и мышц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика измерения *in vivo* скорости звука в желтке и клеточном слое (бластуле) эмбрионов рыб. Для 6 стадии развития икры вьюна (*Misgurnus fossilis*) получена оценка скорости в бластуле, которая составила 1526 ± 7 м/с. Найдено, что при развитии эмбриона в течение 5 ч с 6 до 8 стадий скорость звука в желтке находится в пределах 1575 ± 8 м/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbert S.F., Barresi M.J.F.* Developmental Biology. N.Y.: Oxford Univ. Press, 2017. 810 p.
2. *Greer C.J., Holy T.E.* // Nat. Commun. 2019. V. 10. Art. No 4483.
3. *Abu-Siniyeh A., Al-Zyoud W.* // Lab. Anim. Res. 2020. V. 36. Art. No 12.
4. *Бурлаков А.Б., Хохлов Д.Д., Мачихин А.С. и др.* // Радиотехн. и электрон. 2020. Т. 65. № 7. С. 1; *Burlakov A.B., Khokhlov D.D., Machihin A.S. et al.* // J. Commun. Tech. Electron. 2020. T. 65. No 7. P. 851.
5. *Burlakov A.B., Khokhlov D.D., Domanskiy V.L., Titov S.A.* // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1421. Art. No 012050.
6. *Ho S., Tan G.X.Y., Foo T.J. et al.* // Ann. Biomed. Eng. 2017. V. 45. No 10. P. 2309.
7. *Greco A., Mancini M., Gargiulo S. et al.* // J. Biomed. Biotechnol. 2012. Art. No 519238.
8. *Park J., Lee J., Lau S.T. et al.* // Ann. Biomed. Eng. 2012. V. 40. No 4. P. 907.
9. *Костомарова А.А.* // в кн.: Объекты биологии развития. М.: Наука, 1975. С. 309.
10. *Hill C.R., Bamber J.C. Haar. G.R.* Physical principles of medical ultrasonics. Chichester: John Wiley and Sons, 2004. 528 p.
11. *Weiss E.C., Anastasiadis P., Pilarczyk G. et al.* // IEEE Trans. UFFC. 2007. V. 54. No 11. P. 2257.
12. *Anastasiadis P., Zinin P.* // Op. Neuroimag. J. 2018. V. 12. No 1. P. 69.

Measurement of speed of sound in tissues of embryos of teleost fish

S. A. Titov[a, *], A. B. Burlakov[b], P. V. Zinin[a], A. N. Bogachenkov[c]

[a]*Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation of RAS, Moscow, 117342 Russia*

[b]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

[c]*MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia*

**E-mail: sergetitov@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

A non-invasive technique for ultrasonic visualization of the structure of fish embryos and for measuring the speed of sound in their tissues has been developed. An acoustic microscope with a central frequency of 50 MHz was used to study the loach egg (*Misgurnus fossilis*) which developed in the immersion cell of the device. The speed of sound in the yolk and the cell layer (blastula) of the embryo was measured at developmental stages 6–8.

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 145–149

УДК 537.86:577.35

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПО ЭЭГ ГОЛОВНОГО МОЗГА ЧЕЛОВЕКА

© 2021 г. А. О. Сельский[1, *], М. О. Журавлев[1], А. Е. Руннова[1, 2], Е. П. Емельянова[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского", Саратов, Россия*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовский государственный медицинский университет имени В.И. Разумовского" Министерства здравоохранения Российской Федерации, Саратов, Россия*

**E-mail: selskiiao@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Разработан способ применения рекуррентного анализа для определения индивидуальных особенностей по ЭЭГ данным головного мозга испытуемых, выполняющих серии движений. Суть метода заключается в анализе повторяющихся активностей для выделения каналов с наличием паттернов или увеличением частоты. Показаны результаты применения метода к экспериментальным данным.

DOI: 10.31857/S0367676521010257

ВВЕДЕНИЕ

Изучение активности головного мозга в настоящее время привлекает большое внимание со стороны исследователей из различных областей науки [1–3]. Одним из наиболее популярных методов измерения активности головного мозга традиционно считается электроэнцефалография (ЭЭГ) [4, 5]. Этот способ отличается доступностью, неинвазивностью и отсутствием ограничения двигательной активности испытуемых, поэтому он остается популярным несмотря на то, что другие методы способны предоставить большее пространственное и/или временное разрешения. Большую роль в анализе ЭЭГ данных головного мозга играют математические методы обработки сигналов, в том числе методы нелинейной динамики [6, 7]. Данные методы можно условно разделить на две группы: пространственно-временные и корреляционные. Одним из таких методов является рекуррентный анализ [8].

В настоящей статье рассматривается метод, основанный на кросс-рекуррентном анализе, позволяющий выделить наиболее важные каналы при выполнении повторяющейся активности. Испытуемый совершал серию движений, при которых проводилась запись ЭЭГ. По этой записи с помощью предложенного метода были выделены каналы, в которых появлялись паттерны или наблюдалось увеличение частоты. По этим каналам можно делать вывод об индивидуальных особенностях испытуемых при выполнении определенных видов активности, что имеет большое значение в программах реабилитации людей с ограниченными возможностями при настройке и использовании интерфейсов мозг-компьютер.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В ходе эксперимента испытуемые были обращены к экрану, на котором в качестве визуального стимула отображалась команда к совершению определенного движения. Перед началом эксперимента было предусмотрено время, когда испытуемый отдыхал, позволяя сделать запись фоновой активности мозга испытуемого. После записи фоновой активности следовал ряд движений, воображаемых и реальных, когда человеку приходилось совершать движения левой/правой рукой/ногой. Для каждого движения проводилась серия повторений (5–6 движений). Затем следовала пауза для отдыха, которая давала возможность записать промежуточное состояние между выполнением движений и фоновой активностью. В ходе эксперимента были выполнены четыре серии движений, перемежающихся с отдыхом. Зрительные стимулы присутствовали только во время выполнения движений.

Многоканальная ЭЭГ была записана с частотой дискретизации 250 Гц с 19 электродов, с двумя эталонными электродами, расположенными в стандартных положениях международной системы 10–20 [9]. Сигналы ЭЭГ обрабатывали полосовым филь-

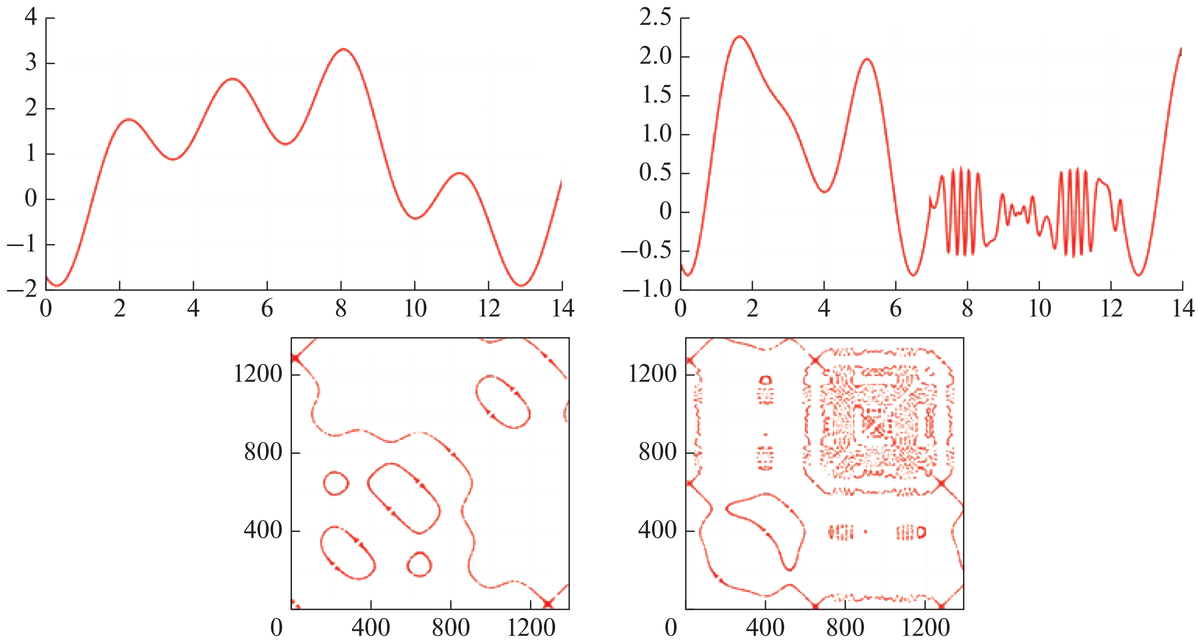

Рис. 1. Сверху несколько модельных сигналов. Снизу, построенные для них рекуррентные диаграммы. Для сигнала по оси ординат отложено безразмерное время, для рекуррентных диаграмм отсчеты (шаг по времени 0.01).

тром с точками отсечки 1 и 100, а также режекторный фильтр на частоте 50 Гц. Электроэнцефалограф-рекордер “Энцефалан – EEGR – 19/26” (Таганрог, Российская Федерация) с несколькими каналами ЭЭГ и двумя кнопками на устройстве ввода (джойстик) использовался для усиления и аналого-цифрового преобразования сигналов ЭЭГ. Предварительная обработка сигнала обеспечивалась оригинальным программным обеспечением для подавления артефактов регистрации ЭЭГ. Алгоритмы машинного обучения были реализованы с помощью MATLAB. Для демонстрации стимула в оттенках серого мы использовали 24-дюймовый ЖК-монитор BenQ с пространственным разрешением 1080 пикселей и частотой обновления 60 Гц. Предметы располагались на расстоянии 70–80 см от монитора с углом обзора, примерно равным 0.25 рад.

Экспериментальные исследования проводились в соответствии с этическими стандартами [10] и утверждены местными исследовательский комитет по этике Саратовского государственного медицинского университета в Саратове (по ЭЭГ). Двадцать здоровых людей из группы неоплачиваемые добровольцы, мужчины и женщины, в возрасте от 20 до 45 лет с нормальным или скорректированным зрением участвовали в экспериментах. Все субъекты дали информированное согласие до участия в эксперименте.

МЕТОД

В основе метода рекуррентного анализа лежит теорема Пуанкаре о возвращении. Динамическая система возвращается в некоторое состояние, за достаточно долгое время. Рекуррентный анализ предполагает учет количества возвратов в окрестность некоторого состояния на конечном временном отрезке [11]. На основе того как часто данное состояние встречается на ограниченном временном ряду можно делать вывод об общей динамике системы. Большое число возвратов означает важность этого состояния, малое – то, что такое состояние является редким для системы. С точки зрения математического аппарата необходимо для временного ряда заполнить рекуррентную матрицу по следующему правилу:

$$R_{ij}(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon - \|x_j - x_i\|); \tag{1}$$

где R_{ij} – элемент матрицы; x_j и x_i – значения величины сигнала в моменты времени i и j; ε – значение порога, определяемое эмперически; Θ – функция Хевисайда. Таким образом, матрица заполняется 0 и 1. 1 означет что состояние в момент времени i и j идентичны, с точностью ε, 0 – что в эти моменты времени состояния систем далеки. Можно построить данную матрицу заменив 1 точками, а 0 не обзначать. Пример построенных рекуррентных диаграмм для нескольких модельных сигналов показан на рис. 1. Можно заметить характерные особенности рекуррентных диаграмм: по обеим осям отложено время (на рисунке показано время в итерациях при шаге по времени 0.01); периодический сигнал на рекуррентной диаграмме выглядит решеткой с периодом равным периоду колебаний сигнала; чем выше частота периодического сигнала, тем выше число точек на рекуррентной диаграмме. Существует множество способов оценки рекуррентных диа-

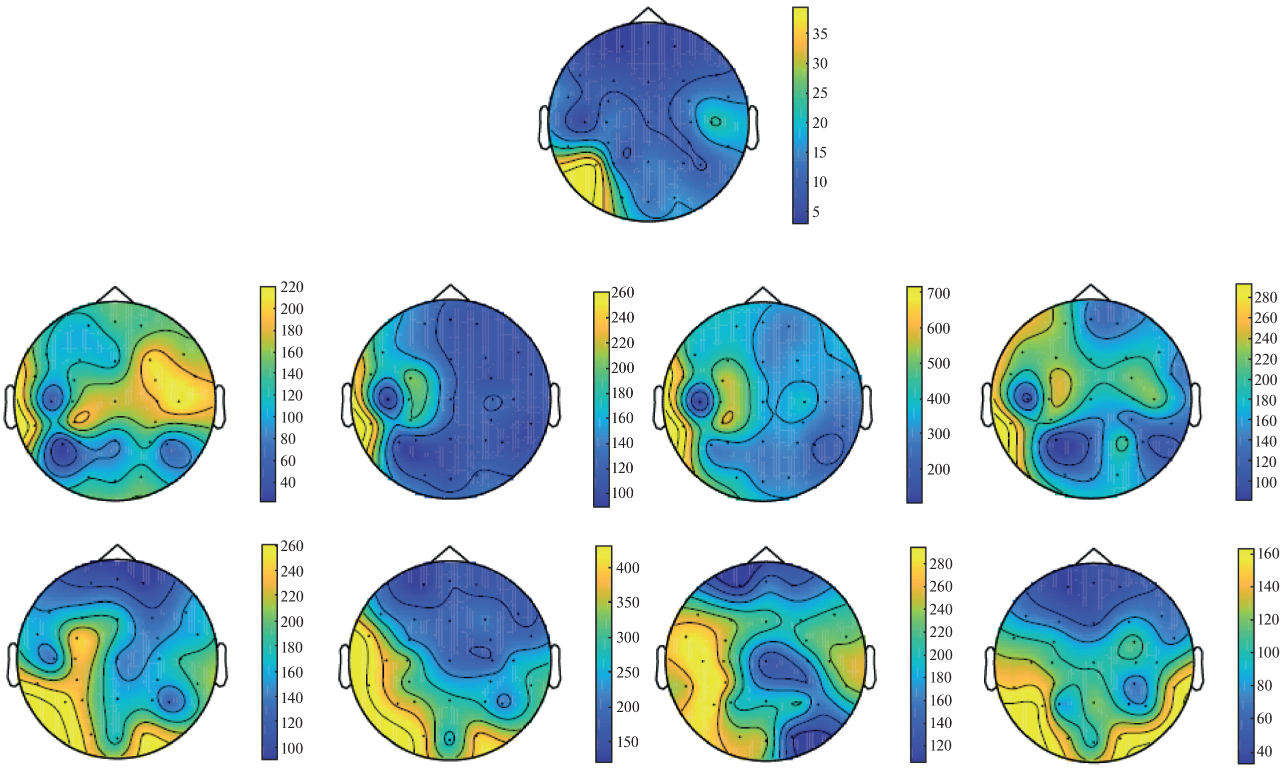

Рис. 2. Пример испытуемого с различным типом ЭЭГ активности при выполнении воображаемых и реальных движений. Слева направо: движение левой рукой, правой рукой, левой ногой, правой ногой. Верхний ряд – реальные движения, нижний – воображаемые. Отдельно результаты по фоновой записи.

грамм, позволяющих оценить по ним динамику сигнала. Самым простым является расчет рекуррентного показателя. Это подсчет числа точек на рекуррентной диаграмме.

Более сложным методом является кросс-рекуррентный анализ. Он позволяет оценить то насколько велика корреляция между двумя сигналами.

$$CR_{ij}(\varepsilon) = \Theta\left(\varepsilon - \left\|x_j - x_i\right\|\right)\Theta\left(\varepsilon - \left\|y_j - y_i\right\|\right). \qquad (2)$$

где CR_{ij} – элемент матрицы; x и y – сигналы. Можно сказать что кросс-рекуррентная матрица заполняется поэлементным умножением двух рекуррентных матриц. Если для такой кросс-рекуррентной матрицы посчитать кросс-рекуррентный показатель, отнормировать его на квадрат времени, то получится коэффициент корреляции. Если сигналы совершают возвраты одновременно всегда, то коэффициент будет наибольшим, если в разное время – коэффициент будет близок к 0. Такой коэффициент корреляции будет нелинейным, так как сигналы могут быть разных амплитуд, разных фаз и частот, но если есть нелинейная связь и возвраты в них будут происходить одновременно, то коэффицент будет большим.

Данный подход является классическим, однако, в рамках данной работы используется другой подход. Он призван помочь сделать расчет того насколько значим данный канал ЭЭГ при выполнении одинаковой активности. Для этого в кросс-рекуррентном анализе сравниваются не два сигнала, а два временных отрезка при выполнении одной и той же активности, например, при движении левой рукой. Если движение в этом канале вызывает некоторый паттерн на ЭЭГ, то кросс-рекуррентный показатель будет выше, чем для фоновой записи. Аналогичное изменение кросс-рекуррентного показателя вызывает увеличение частоты сигнала при выполнении активности. Как описывалось ранее, в ходе эксперимента было 8 типов движений: воображаемые и реальные движения левой/правой рукой/ногой. Для каждого движения было 12 повторов. Для увеличения точности расчета строились кросс-рекуррентные диаграммы для всех пар и рассчитывался кросс-рекуррентный показатель. Этот показатель усреднялся по числу пар, как для активности, так и для фоновой записи. По сравнению этих двух показателей делается вывод о том насколько этот канал важен для конкретного типа движения. Такой подход можно применять для любых повторяющихся сигналов, чтобы оценить, насколько важно повторение в них определенной динамики.

РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

Результаты анализа приведены на рис. 2 и 3 для одного из испытуемых. Величина усредненного

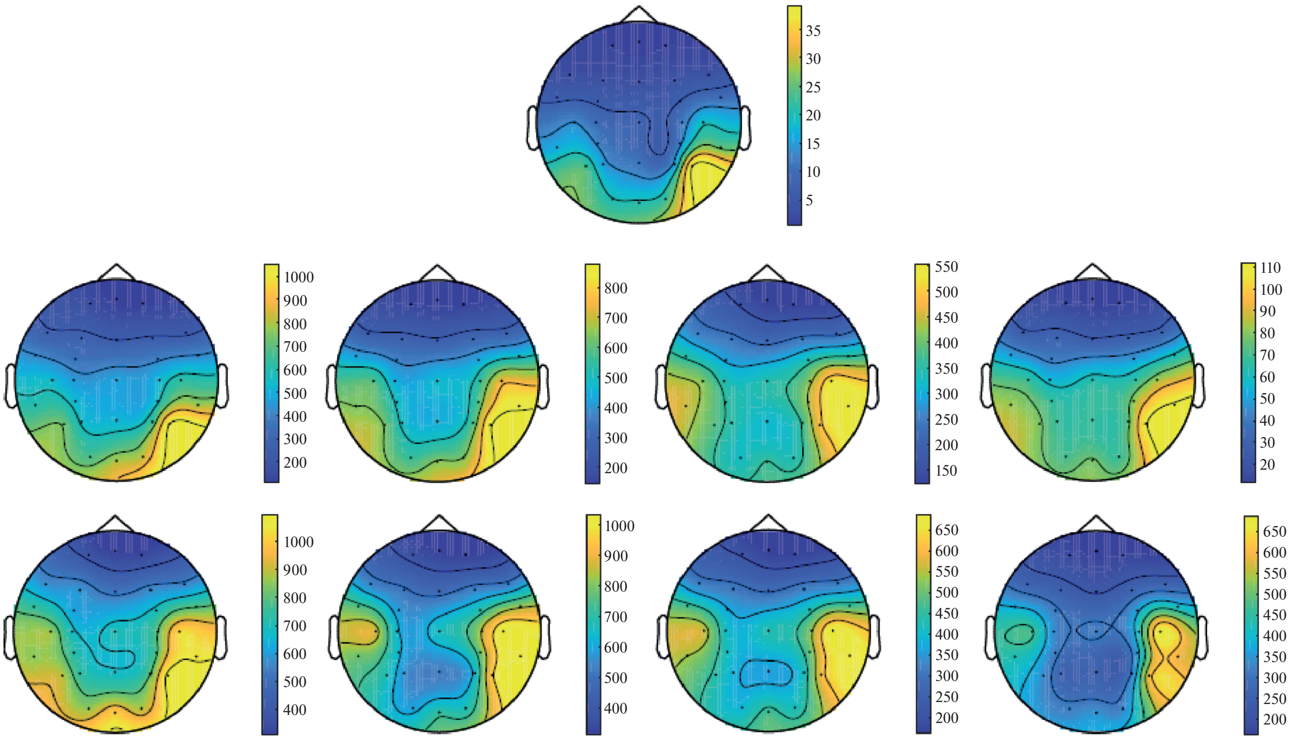

Рис. 3. Пример испытуемого со схожим типом ЭЭГ активности при выполнении воображаемых и реальных движений. Слева направо: движение левой рукой, правой рукой, левой ногой, правой ногой. Верхний ряд – реальные движения, нижний – воображаемые. Отдельно результаты по фоновой записи.

по парам повторяющихся движений кросс-рекуррентного показателя показана цветом в соответствии со шкалой рядом. Изображения получены с помощью модуля fieldtrip. Можно видеть, что фоновая активность по кросс-рекуррентному показателю всегда ниже, чем при выполнении движений. В целом, область активности при фоновой записи сохраняется и при выполнении активности.

Для испытуемого на рис. 2 можно видеть большое отличие в изображениях для воображаемых и реальных движений. Для реальных движений меньше важных каналов и они сосредоточены в теменной и височных зонах, ближе к моторной коре. Для воображаемых движений более важные каналы сосредоточены ближе к затылочной зоне, отвечающей за обработку визуальных сигналов.

Для испытуемого на рис. 3 такой связи не наблюдается, почти все движения выглядят схожими и отличаются от фоновой записи только величиной кросс-рекуррентного показателя. Таким образом, второй испытуемый не имеет особенностей при выполнении воображаемых движений. И для него тренировка воображаемых движений мало отличается от тренировки реальных движений, с точки зрения мозговой активности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрирован метод выделения индивидуальных особенностей по ЭЭГ сигналу, полученному при выполнении повторяющейся активности. В рамках работы использовались воображаемые и реальные движения. Показано, что для испытуемых можно выделить индивидуальные особенности на основе наиболее важных каналов ЭЭГ при выполнении данной активности. Полученные с помощью предложенного метода результаты могут использоваться в программах реабилитации людей с ограниченными возможностями при настройке и использовании интерфейсов мозг-компьютер.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meng J., Edelman B.J., Olsoe J. et al.* // Front. Neurosci. 2018. V. 12. P. 227.
2. *van Luijtelaar G., Lttjohann A., Makarov V.V. et al.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. Art. No 012316.
3. *Maksimenko V.A., Heukelum S., Makarov V.V. et al.* // Sci. Rep. 2017. V. 7. P. 1.
4. *Sitnikova E., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al.* // J. Neurosci. Meth. 2009. V. 180. P. 304.

5. *Karimi F., Kofman J., Mrachacz-Kersting N. et al.* // Front Neurosci. 2017. V. 11. P. 356.
6. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V. et al.* // Brain Res. 2012. V. 1436. P. 147.
7. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V. et al.* // Proc. SPIE. 2014. V. 1543. P. 290.
8. *Thiel M., Marwan N., Zou Y. et al.* // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2011. V. 21. Art. No 1099.
9. *Niedermeyer E., da Silva F.L.* Electroencephalography: basic principles, clinical applications, and related fields. Lippincot Williams & Wilkins, 2004.
10. World medical association (2000) declaration of Helsinki: ethical principles for medical research involving human subjects // J. Am. Med. Ass. 2000. V. 284(23). P. 3043.
11. *Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D.* // Phys. Rep. 1987. V. 5. Art. No 973977.
12. *Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J.* // Phys. Rep. 2007. V. 438. P. 237.
13. *Acharya U.R., Sree S.V., Chattopadhyay S. et al.* // Int. J. Neural Syst. 2011. V. 21. P. 199.

The use of recurrent analysis to highlight individual characteristics of the human brain EEG

A. O. Selskii[a, *], M. O. Zhuravlev[a], A. E. Runnova[a, b], E. P. Emelyanova[a]

[a]*Saratov National Research State University, Saratov, 410012 Russia*

[b]*Saratov State Medical University, Saratov, 410000 Russia*

**E-mail: selskiiao@gmail.com*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

We developed a method of applying recurrence analysis to determine individual characteristics by EEG data of the brain of subjects performing a series of movements. The essence of the method is to analyze repeating activities to highlight channels with patterns or an increase in frequency. The results of applying the method to experimental data are shown.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ПУБЛИКАЦИЙ В ЖУРНАЛЕ "ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ"

Журнал "Известия Российской академии наук. Серия физическая" учрежден Отделением физических наук РАН и Институтом прикладной физики РАН.

Издание содержит полнотекстовые статьи по наиболее актуальным разделам современного естествознания: физика и астрономия, физика твердого тела, нанофотоника, нелинейная оптика, рентгеновская оптика, оптическая спектроскопия, ядерная физика, космические лучи, физика Солнца, физические приложения в науках о жизни и другие.

Основная цель журнала — предоставление авторам возможности опубликовать и обсудить результаты актуальных фундаментальных и прикладных научных исследований, представленных на конференциях, симпозиумах и научных школах, организованных Российской академией наук, которые признаны мировым научным обществом и междисциплинарными экспертами. К опубликованию принимаются полнотекстовые статьи, подготовленные по материалам лучших докладов, рекомендованных программными комитетами конференций, которые интересны широкому кругу читателей. Статьи, содержащие новые, нигде ранее не опубликованные результаты, проходят научное рецензирования как минимум двумя независимыми рецензентами и публикуются в специальных тематических выпусках журнала. Журнал открыт для публикации наиболее авторитетных и передовых результатов исследований в области фундаментальной и прикладной физики, полученных в России и странах ближнего зарубежья, а также от авторов со всего мира.

Материалы для опубликования представляют: а) бюро отделения физических наук; б) оргкомитеты совещаний или конференций; в) научные советы РАН. Непосредственно от авторов редакция журнала никаких материалов не принимает.

К представляемым в редакцию материалам предъявляются следующие требования.

1. Статьи и рисунки к ним присылаются в одном экземпляре. Текст статьи, подписи к рисункам, список литературы должны быть четко напечатаны 14 кеглем через два интервала прямым светлым (обычным, не жирным) шрифтом. Выделять отдельные части текста подчеркиванием, полужирным шрифтом или курсивом не рекомендуется. Поля должны быть по 2 см с каждой стороны. Страницы рукописи нумеруются сквозной нумерацией. Функция переноса слов в документе должна быть отключена.

2. Оформление титульной страницы. В начале статьи в левом верхнем углу ставится индекс УДК (курсив). Далее на первой странице идут данные в такой последовательности: полное название статьи прописными буквами крупным полужирным шрифтом, с новой строки: копирайт и год, инициалы и фамилии авторов полужирным шрифтом, с новой строки: названия организаций, где выполнена работа (в обязательном порядке указываются полные, включая правовую форму, наименования всех организаций, например, "Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт спектроскопии Российской академии наук"), город, страна. Инициалы и фамилии иностранных авторов необходимо указывать в русской транскрипции, также как и название, город и страну для зарубежной организации. С новой строки необходимо указать E-mail, по которому будет отправлена корректура. Корреспондирующий автор, чей e-mail указан в статье, отмечается звездочкой. Сам e-mail отмечается звездочкой спереди.

3. Во всех статьях при опубликовании указываются три даты: дата поступления статьи в редакцию (дата сдачи материалов авторами в оргкомитет конференции), дата поступления материала после доработки (дата сдачи исправленного материала оргкомитетом в редакцию), дата принятия к публикации (дата сдачи номера в печать редакцией). Первые две даты устанавливаются редакцией по согласованию с оргкомитетом конференции. Третья дата зависит от календарного плана работы редакции.

4. С новой строки пишется краткая (на 5–6 строк) аннотация. В аннотации не допускаются сокращения, ссылки на литературу и благодарности. Далее после двух пустых строк идет текст самой статьи (см. файл с шаблоном оформления на сайте http://www.izv-fiz.ru). Сведения о финансовой поддержке работы могут быть указаны только в заключении работы. После текста статьи в этом же файле на отдельной странице дается "Список литературы". Далее в этом же файле на отдельной странице следуют подписи к рисункам. Рисунки размещаются в этом же файле на отдельных страницах после подписей и таблиц. Размер рисунков должен соответствовать одному из журнальных форматов (в одну колонку, на ширину полосы – на две колонки, на всю полосу с разворотом). Окон-

чательный размер рисунков определяется редакцией. Если в статье есть таблицы, их надо разместить вместе с подписями на отдельных страницах в этом же файле. Кроме того, на отдельной странице в этом же файле нужно дать на английском языке фамилии и инициалы всех авторов, название статьи, аннотацию, названия организаций, где проведена работа, и их адреса (указать почтовый индекс, город и страну), а также e-mail корреспондирующего автора. Далее указываются три даты и аннотация к статье, которая должна полностью соответствовать русской версии.

Состав файлов публикации в электронном виде: полный текст статьи в формате word (содержание текстового файла – см. выше), рисунки в одном из форматов *gif, *tiff, *jpeg или *eps (на каждый рисунок свой файл), файл со сведениями об авторах (включая точные координаты авторов – почтовый адрес, телефон, e-mail), сканы заполненных и подписанных лицензионного и авторского договоров в формате pdf.

Примечание. Статьи без УДК, аннотаций и точных координат авторов приниматься не будут.

5. Используемые в статьях термины, единицы измерения и условные обозначения должны быть общепринятыми. Сокращения слов, имен и названий не допускаются, за исключением принятых сокращений единиц измерения, физических, химических, технических и математических величин. Термины и аббревиатуры по возможности должны быть на русском языке. Аббревиатуры и сокращения, которые не являются общепринятыми, должны быть расшифрованы при первом упоминании. Единицы измерения даются в русской транскрипции, стоящие в знаменателе единицы измерения даются в отрицательной степени (например, $E = 195$ кэВ; $v = 100$ см $\cdot$ с$^{-1}$). Если в состав единиц измерения входят длинные слова, то допускается их написание через косую черту (например, МэВ/нуклон или пиксел/деление).

При наборе обозначений физических величин и формул необходимо придерживаться следующих правил (это же касается и подписей к рисункам). Размер шрифта в формулах должен совпадать с размером шрифта в тексте. **Латинские буквенные обозначения физических величин (в том числе и векторных) набираются светлым курсивом,** так же – латинские буквы, обозначающие частицы и легчайшие ядра: p, n, d, t и т.п. Нельзя использовать для их набора сходные по написанию буквы из русского регистра. Обозначения функций (exp, ln, sin, Re, det, constant и т.п.), химических элементов, **все греческие буквы**, цифры (в том числе в формулах и индексах), аббревиатуры и термины **набираются светлым прямым шрифтом**. **Векторные величины обозначаются стрелочкой сверху** ($\vec{a}$), а не жирным шрифтом. В формулах нужно разъяснить каждый знак (при первом упоминании – обязательно). Расстояние между строчками формул должно быть не менее 1 см (т.е. через 2 интервала). Индексы и показатели степени должны быть расположены четко ниже или выше строки, русские индексы набираются прямым шрифтом, латинские – курсивом. Нумерация формул дается справа в круглых скобках: (3), ссылки на литературу – в квадратных: [3].

6. Рисунки не должны быть размещены в тексте, а представляются на отдельных страницах после текста (и отдельными файлами в электронном виде). Рисунки должны быть выполнены с хорошим разрешением в масштабе, позволяющем четко различать надписи, обозначения и символы точек. Заключать рисунок в рамку не нужно. Переменные по осям желательно обозначать не длинной надписью, а символами, объясняя их значение в тексте или в подписи к рисунку. Не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: врезки необходимо по возможности убрать, большинство надписей выносится в подпись к рисунку, а на рисунке заменяется цифрами (курсив). Надписи и единицы измерения должны быть на русском языке. Если рисунок состоит из нескольких частей, каждая из них обозначается русскими курсивными буквами *а*, *б*, *в* и т.д. Под каждым рисунком должен быть проставлен номер.

Внимание! Допускается включение в статью цветных рисунков. Цветные рисунки будут представлены только в электронной версии статьи (on-line), для размещения в печатной версии цветные рисунки будут конвертироваться в формат “в шкале серого цвета”. Авторы, направляющие для опубликования цветные рисунки, должны самостоятельно удостовериться в корректности и информативности рисунков с учетом конвертации. На этапе корректуры любое изменение рисунков по сравнению с авторским вариантом возможно только за отдельную плату, размер которой определяется в каждом случае индивидуально по согласованию с издателем.

7. Ссылки на литературу (источники цитирования) приводятся в конце статьи в порядке их упоминания в тексте. Иностранные фамилии даются в тексте в русской транскрипции, а в ссылке – в транскрипции издания. Установлен следующий порядок оформления ссылок.

Для периодических изданий должны быть указаны фамилии и инициалы авторов (курсивом), далее “//”, название журнала, год, том, номер, страница. Если авторов более трех, необходимо **указав первых трех авторов** добавить “и др.” (для ссылок на иностранные издания – “et al.”). Например: 1. *Ladd T.D., Jelezko F., Laflamme R. et al.* // Nature. 2010. V. 464. No 7285. P. 45. Если авторов четыре, то указываются все.

При ссылках на все российские журналы, имеющие переводную версию, необходимо в обязательном порядке указывать в одной ссылке обе версии

статьи. Например: 2. *Никифоров В.Г., Лобков В.С., Самарцев В.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 8. С. 1108; *Nikiforov V.G., Lobkov V.S., Samartsev V.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2018. V. 82. No 8. P. 1004.

Нумерация страниц, а в некоторых случаях и номер выпуска, в окончательных версиях опубликованных статей могут отличаться от тех, что были указаны в корректуре. Просьба сверять выходные данные статей и правильно их цитировать. Содержания опубликованных номеров размещены на сайте Научной электронной библиотеки (ссылки на статьи, опубликованные в нашем журнале, доступны в разделе “Содержания” на сайте: http://izv-fiz.ru/contents/).

Следует обратить внимание, что в иностранных журналах нередко указываются не порядковые страницы, а номера статей (Art. No). Ссылки на такие статьи необходимо оформлять следующим образом: 3. *Nemoto K., Munro W.J.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. No 5. Art. No 250502.

Для книг указываются авторы, название книги, том, город, издательство, год издания, страница (с. 42), либо количество страниц (169 с.). Например: 4. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000, 896 с. Для авторефератов и диссертаций – название, ученая степень (например, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук), место защиты (институт, город), автор и год. Для препринтов – название, номер, место издания, год. Для материалов, размещенных в Интернете, – полная электронная ссылка. Далее приведены некоторые примеры оформления ссылок. Материалы конференций: *Gopalswamy N., Akiyama S., Yashiro S. et al.* // Proc. 14th IIES (Alexandria, 2015). P. 1. Статьи в ArXiv: *Omodei N., Pesce-Rollins M., Longo F. et al.* // arXiv: 1803.07654. 2018. Патенты: *Баранова Е.Р., Злоказов В.Б., Кобелев Л.Я. и др.* Резистивный материал. Пат. РФ № 1779192, кл. H01C7/00. 1996. Ссылки на неопубликованные материалы не допускаются. Все библиографические данные должны быть тщательно выверены.

8. К тексту статьи должны быть приложены следующие документы:

– сопроводительное письмо из организации, в которой выполнена работа;

– экспертное заключение о возможности опубликования, выданное организацией;

– рецензия на статью, выданная оргкомитетом конференции. Редакция направляет представленные материалы на дополнительное рецензирование;

– лицензионный договор с редакцией журнала “Известия РАН. Серия физическая” в одном экземпляре (актуальный текст договора размещен на сайте http://www.izv-fiz.ru);

– договор о передаче авторского права для опубликования переводной версии статьи (актуальный текст договора размещен на сайте http://www.izv-fiz.ru).

Редакция не ставит в известность авторов об изменениях и сокращениях рукописи, имеющих редакционный характер и не затрагивающих содержание статьи. Рукописи авторам не возвращаются. Для проверки статьи издательство высылает на адрес корреспондирующего автора корректуру, после проверки которой необходимо в указанные сроки выслать файл с исправлениями и сообщить в ответном письме свои краткие замечания. Авторам необходимо самостоятельно убедиться в правильности указанного для связи электронного адреса и настроить почтовую программу таким образом, чтобы своевременно получить письмо с корректурой. На этапе корректуры редакция не имеет возможности вносить большие авторские правки в статью. После корректуры и до выхода номера в свет могут быть исправлены лишь небольшие опечатки.