СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 4, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 435–465

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

© 2021 г. В. Ф. Бутузов, Р. Е. Симаков

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет три непересекающихся корня, причём один из них – двукратный, а два других – простые (однократные). Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом от двукратного корня вырожденного уравнения к простому корню в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения являются простыми. В частности, разложение проводится не по целым, а по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, а переходный слой оказывается шестизонным.

DOI: 10.31857/S0374064121040014

1. Постановка задачи и схема её решения. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=F(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d^2v}{dx^2}=f(u,v,x,\varepsilon),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon)=\frac{du}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon)=\frac{dv}{dx}(1,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ – искомые скалярные функции.

Такая задача при условии, что вырожденное уравнение

$$F(u,v,x,0)=0 \tag{3}$$

имеет три простых корня $u=\varphi_i(v,x)$, $i=1,2,3$, исследовалась в работе [1], в которой было доказано существование решения с внутренним переходным слоем и с помощью классического метода Васильевой [2, с. 38] построено его полное асимптотическое разложение.

Сформулируем условия, при которых в работе будет рассматриваться задача (1), (2). Пусть I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v.

Условие А1. Функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon)=(u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x))(u-\varphi_3(v,x))-\varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где $\varphi_i(v,x)\in I_u$ при $(v,x)\in I_v\times[0,1]$, $i=1,2,3$, причём

$$\varphi_1(v,x)<\varphi_2(v,x)<\varphi_3(v,x),\quad (v,x)\in I_v\times[0,1]. \tag{4}$$

Из условия А1 следует, что корень $u=\varphi_1(v,x)$ уравнения (3) является двукратным, а $u=\varphi_2(v,x)$ и $u=\varphi_3(v,x)$ – простые корни этого уравнения.

Условие А2. Уравнения $g_i(v,x):=f(\varphi_i(v,x),v,x,0)=0$ при $i=1,3$ имеют простые корни $v=v_i(x)\in I_v$, $x\in[0,1]$.

Условие А3. Функции $\varphi_i(v,x)$, $i=1,2,3$, $F_1(u,v,x,\varepsilon)$, $f(u,v,x,\varepsilon)$, $v_1(x)$ и $v_3(x)$ являются достаточно гладкими при $(u,v,x,\varepsilon)\in I_u\times I_v\times[0,1]\times[0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

Условие A4. Система уравнений

$$I(v_0,x_0):=\int\limits_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_3(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du=0, \tag{5}$$

$$J(v_0,x_0):=\int\limits_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v,x_0)\,dv+\int\limits_{v_0}^{v_3(x_0)} g_3(v,x_0)\,dv=0 \tag{6}$$

имеет решение $v_0=\bar v_0$, $x_0=\bar x_0$ такое, что $0<\bar x_0<1$,

$$v_1(\bar x_0)<\bar v_0<v_3(\bar x_0), \tag{7}$$

и, кроме того, выполняется неравенство

$$\frac{D(I,J)}{D(v_0,x_0)}\bigg|_{\substack{v_0=\bar v_0\\ x_0=\bar x_0}}\neq 0. \tag{8}$$

Поставим вопрос о существовании и асимптотике по параметру ε решения $(u(x,\varepsilon),v(x,\varepsilon))$ задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $\bar x_0$, удовлетворяющего предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to0}u(x,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_1(v_1(x),x), & 0\leqslant x<\bar x_0,\\ \varphi_3(v_3(x),x), & \bar x_0<x\leqslant 1;\end{cases}\quad \lim_{\varepsilon\to0}v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v_1(x), & 0\leqslant x<\bar x_0,\\ v_3(x), & \bar x_0<x\leqslant 1.\end{cases} \tag{9}$$

Такие решения называются *контрастными структурами типа ступеньки.*

Как будет видно из дальнейшего, асимптотика решения с внутренним переходным слоем задачи (1), (2) в рассматриваемом случае имеет качественно иной характер по сравнению с классическим случаем [1], т.е. когда все корни $u=\varphi_i(v,x)$ – простые, причём такое изменение касается всех слагаемых асимптотического разложения решения: регулярной части, погранслойной части и внутрислойной части, в частности, переходный слой становится многозонным. Отметим, что в более простом случае скалярной задачи (т.е. когда в системе (1) отсутствует второе уравнение, а в краевых условиях (2) – второе равенство, и функция F не зависит от v) многозонный переходный слой рассматривался в работе [3].

Определим точку x_* как точку, в которой u-компонента решения пересекается с корнем φ_2, т.е. $u(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*)$, где v_* – значение v-компоненты решения в этой точке: $v(x_*,\varepsilon)=$ $=v_*$. Забегая вперёд, отметим, что x_* и v_* имеют представления $x_*=\bar x_0+O(\varepsilon^{1/4})$ и $v_*=$ $=\bar v_0+O(\varepsilon^{1/4})$ и, значит, сколь угодно близки к $\bar x_0$ и $\bar v_0$ для достаточно малых ε. Точку x_* назовём *точкой перехода* и будем строить асимптотику искомого решения раздельно слева и справа от точки перехода, для чего поставим две вспомогательные краевые задачи на отрезках $[0,x_*]$ и $[x_*,1]$.

Первая вспомогательная задача:

$$\varepsilon^2\frac{d^2u^{(-)}}{dx^2}=F(u^{(-)},v^{(-)},x,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d^2v^{(-)}}{dx^2}=f(u^{(-)},v^{(-)},x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*, \tag{10}$$

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon)=0,\quad u^{(-)}(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*),\quad v^{(-)}(x_*,\varepsilon)=v_*. \tag{11}$$

Вторая вспомогательная задача:

$$\varepsilon^2\frac{d^2u^{(+)}}{dx^2}=F(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d^2v^{(+)}}{dx^2}=f(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\quad x_*<x<1, \tag{12}$$

$$u^{(+)}(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*),\quad v^{(+)}(x_*,\varepsilon)=v_*,\quad \frac{du^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0. \tag{13}$$

При решении этих задач будем считать, что v_* и x_* – некоторые фиксированные точки из достаточно малых окрестностей точек $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно. Тогда для них будут выполнены неравенства $0<x_*<1$, $v_1(x_*)<v_*<v_3(x_*)$, а условия A5–A11, которые формулируются ниже, сохранятся при замене в них $\bar v_0$ на v_* и $\bar x_0$ на x_*.

После того, как будет доказано существование погранслойных решений обеих вспомогательных задач, точки v_* и x_* будут выбраны так, что функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ u^{(+)}(x,\varepsilon), & x_*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\qquad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ v^{(+)}(x,\varepsilon), & x_*\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

окажутся решением исходной задачи с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*.

2. Вторая вспомогательная задача. Начнём построение асимптотики со второй вспомогательной задачи, которая относится к числу исследованных ранее задач, так как в соответствии с первым равенством в (9) u-компонента её решения близка к простому корню $u=\varphi_3(v,x)$ вырожденного уравнения (3). Этот случай изучен ранее, например, в работе [1]. В связи с этим ограничимся кратким описанием построения асимптотики решения по методу Васильевой [2, с. 38].

Асимптотика решения строится в виде

$$U^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(+)}u(\tilde\xi,\varepsilon)+P^{(+)}u(\tilde\zeta,\varepsilon)+Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)+R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon), \tag{14}$$

$$V^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar v^{(+)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(+)}v(\tilde\xi,\varepsilon)+P^{(+)}v(\tilde\zeta,\varepsilon)+Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)+R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon), \tag{15}$$

где $\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)$, $\bar v^{(+)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(+)}u(\tilde\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\tilde\xi,\varepsilon)$ и $P^{(+)}u(\tilde\zeta,\varepsilon)$, $P^{(+)}v(\tilde\zeta,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x=1$; $Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в правой полуокрестности точки перехода x_*. Используются растянутые переменные $\tilde\xi=(1-x)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde\zeta=(1-x)/\varepsilon$, $\tau=(x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma=(x-x_*)/\varepsilon$, масштабы которых типичны для случая простых корней вырожденных уравнений.

2.1. Регулярная часть асимптотики. Регулярная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням ε:

$$\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\bar u_i^{(+)}(x),\quad \bar v^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\bar v_i^{(+)}(x).$$

Их главные члены $\bar u_0^{(+)}(x)=\varphi_3(v_3(x),x)$ и $\bar v_0^{(+)}(x)=v_3(x)$.

Введём обозначения

$$h^{(+)}(u,v,x):=(u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x)),\quad \bar g_{3v}(x):=\frac{\partial g_3}{\partial v}(v_3(x),x).$$

Регулярные функции более высоких порядков определяются из систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), разрешимость которых обеспечивается первым неравенством из условия A5.

Условие A5. Справедливы неравенства:

$$\bar g_{3v}(x)>0\ \text{ при }\ x\in[\bar x_0,1]\quad \text{и}\quad \frac{\partial g_3}{\partial v}(v,\bar x_0)>0\ \text{ при }\ v\in[\bar v_0,v_3(\bar x_0)].$$

2.2. Погранслойная часть асимптотики. Погранслойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(+)}u(\tilde{\xi},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}u(\tilde{\xi}),\quad \Pi^{(+)}v(\tilde{\xi},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}v(\tilde{\xi}),\tag{16}$$

$$P^{(+)}u(\tilde{\zeta},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}u(\tilde{\zeta}),\quad P^{(+)}v(\tilde{\zeta},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}v(\tilde{\zeta}).\tag{17}$$

Условия Неймана в точке $x=1$ (см. (13)) приводят к тому, что ряды (16) на самом деле начинаются со слагаемых с номером $i=1$, а ряды (17) – со слагаемых с номером $i=2$.

Все $\Pi^{(+)}$- и $P^{(+)}$-функции убывают экспоненциально при $\tilde{\xi}\to+\infty$ и $\tilde{\zeta}\to+\infty$.

2.3. Внутрислойная часть асимптотики. Внутрислойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}u(\tau),\quad Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}v(\tau),$$

$$R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}u(\sigma),\quad R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}v(\sigma),$$

при этом оказывается, что

$$R_0^{(+)}v(\sigma)=R_1^{(+)}v(\sigma)=0.\tag{18}$$

Задачи для $Q_0^{(+)}v(\tau)$ и $R_0^{(+)}u(\sigma)$ сводятся к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}=\left(2\int\limits_0^{Q_0^{(+)}v}g_3(\bar{v}_0^{(+)}(x_*)+s,x_*)ds\right)^{1/2},\quad \tau\geqslant 0,\tag{19}$$

$$\frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma}=\left(2\int\limits_0^{R_0^{(+)}u}h^{(+)}(\varphi_3(v_*,x_*)+s,v_*,x_*)s\,ds\right)^{1/2},\quad \sigma\geqslant 0,\tag{20}$$

с начальными условиями

$$Q_0^{(+)}v(0)=v_*-v_3(x_*),\quad R_0^{(+)}u(0)=\varphi_2(v_*,x_*)-\varphi_3(v_*,x_*).\tag{21}$$

Уравнения (19) и (20) интегрируются в квадратурах, для их решений с начальными условиями (21) справедливы экспоненциальные оценки вида

$$|Q_0^{(+)}v(\tau)|\leqslant c\exp(-\kappa\tau),\quad \tau\geqslant 0;\quad |R_0^{(+)}u(\sigma)|\leqslant c\exp(-\kappa\sigma),\quad \sigma\geqslant 0,$$

здесь и далее c и κ – подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, различные в разных оценках.

Все остальные внутрислойные функции также убывают экспоненциально при $\tau\to+\infty$ и $\sigma\to+\infty$. Экспоненциальные оценки означают, что внутренний слой в правой полуокрестности точки x_* является двухзонным. В первой зоне (определим её так: $x_*\leqslant x\leqslant x_*+\varepsilon^{3/4}$) происходит экспоненциальное убывание $R^{(+)}$-функций при почти не изменяющихся $Q^{(+)}$-функциях (так как в этой зоне $0\leqslant\tau\leqslant\varepsilon^{1/4}$), а вторая зона: $x_*+\varepsilon^{3/4}\leqslant x\leqslant x_*+\delta$, где $\delta>0$ – любое не зависящее от ε фиксированное число, характеризуется экспоненциальным убыванием $Q^{(+)}$-функций, в то время как $R^{(+)}$-функции уже на границе двух зон (т.е. при $\sigma=\varepsilon^{-1/4}$) стали величинами порядка $O(\exp(-\kappa/\varepsilon^{1/4}))$, т.е. величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N>0$.

2.4. Обоснование асимптотики. Для обоснования асимптотики введём ещё одно условие, связанное с производными функций F и f. Чтобы его сформулировать, определим три кривые в пространстве переменных (u,v,x):

$$l_1=\{(u,v,x)\colon \varphi_2(\bar v_0,\bar x_0)\leqslant u\leqslant \varphi_3(\bar v_0,\bar x_0),\quad v=\bar v_0,\quad x=\bar x_0\},$$

$$l_2=\{(u,v,x)\colon u=\varphi_3(v,\bar x_0),\quad \bar v_0\leqslant v\leqslant v_3(\bar x_0),\quad x=\bar x_0\},$$

$$l_3=\{(u,v,x)\colon u=\varphi_3(v_3(x),x),\quad v=v_3(x),\quad \bar x_0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

Условие А6. При $(u,v,x)\in l^{(+)}:=l_1\bigcup l_2\bigcup l_3$ имеют место неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,x,0)<0\quad \text{и}\quad \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0)<0.$$

Из условия А6 следует, что для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно, и достаточно малых ε неравенства $\partial F(u,v,x,0)/\partial v<0$ и $\partial f(u,v,x,0)/\partial u<0$ будут выполнены в некоторой окрестности кривой $l_*^{(+)}$, которая определяется так же, как кривая $l^{(+)}$, с заменой $\bar v_0$ на v_* и $\bar x_0$ на x_*. В таком случае говорят, что в этой окрестности функции F и f удовлетворяют *условию квазимонотонности.*

Обозначим через $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (14) и (15):

$$U_n^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar u_i^{(+)}(x)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}u\biggl(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)+\sum_{i=0}^{2n+2}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}u\biggl(\frac{1-x}{\varepsilon}\biggr)+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}u\biggl(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}u\biggl(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\biggr),\qquad(22)$$

$$V_n^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar v_i^{(+)}(x)+\sum_{i=0}^{2n+2}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}v\biggl(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)+\sum_{i=0}^{2n+3}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}v\biggl(\frac{1-x}{\varepsilon}\biggr)+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}v\biggl(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)+\sum_{i=0}^{2n+3}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}v\biggl(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\biggr).\qquad(23)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия А1–А6. Тогда при произвольных v_* и x_*, достаточно близких к $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно, и любом натуральном n для всех достаточно малых ε существует решение $(u^{(+)}(x,\varepsilon),v^{(+)}(x,\varepsilon))$ задачи (12), (13), для компонент которого при каждом $m=\overline{0,n}$ имеют место представления*

$$u^{(+)}(x,\varepsilon)=U_m^{(+)}(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}),\quad v^{(+)}(x,\varepsilon)=V_m^{(+)}(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}),\quad x\in[x_*,1].\qquad(24)$$

Теорема доказывается с помощью метода дифференциальных неравенств.

Следствие 1.1. *Предельным положением при $\varepsilon\to 0$ кривой $l_\varepsilon^{(+)}=\{(u,v,x)\colon u=u^{(+)}(x,\varepsilon),$ $v=v^{(+)}(x,\varepsilon),\ \ x_*\leqslant x\leqslant 1\}$* [*)] *является кривая $l_*^{(+)}$.*

Стандартным способом (см. [3]) получается

Следствие 1.2. *Для производных решения задачи (12), (13) справедливы асимптотические представления*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)=\frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^n),\quad \frac{dv^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)=\frac{dV_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1/2}),\quad x\in[x_*,1].\qquad(25)$$

[*)] Эту кривую можно назвать графиком решения задачи (12), (13).

3. Первая вспомогательная задача. Более подробно рассмотрим построение и обоснование асимптотики решения первой вспомогательной задачи, существенная особенность которой состоит в том, что при построении будет использоваться двукратный корень $u = \varphi_1(v, x)$ уравнения (3). Будем строить асимптотику в виде

$$U^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon) + R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon), \tag{26}$$

$$V^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon) + R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon), \tag{27}$$

где $\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 0$; $Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в левой полуокрестности точки перехода x_*. Используются растянутые переменные $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$, $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$, $\tau = (x - x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon$. Каждое слагаемое в правых частях представлений (26) и (27) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε.

3.1. Регулярная часть асимптотики. Регулярная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x), \quad \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x).$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(-)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(-)}(x)$ будем извлекать стандартным способом (см. [2, с. 29]) из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\bar{u}^{(-)}}{dx^2} = F(\bar{u}^{(-)}, \bar{v}^{(-)}, x, \varepsilon), \tag{28}$$

$$\varepsilon \frac{d^2\bar{v}^{(-)}}{dx^2} = f(\bar{u}^{(-)}, \bar{v}^{(-)}, x, \varepsilon). \tag{29}$$

В нулевом порядке имеем вырожденную систему уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0,$$

из которой в соответствии с (9) получаем $\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(v_1(x), x)$, $\bar{v}_0^{(-)}(x) = v_1(x)$.

Введём обозначения:

$$h^{(-)}(u,v,x) := (u - \varphi_2(v,x))(u - \varphi_3(v,x)), \quad \bar{h}(x) := h^{(-)}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x), \tag{30}$$

$$\bar{f}_u(x) := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0), \quad \bar{f}_v(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0), \tag{31}$$

$$\bar{\varphi}_{1v}(x) := \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(v_1(x), x), \quad \bar{g}_{1v}(x) := \frac{\partial g_1}{\partial v}(v_1(x), x) = \bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_{1v}(x) + \bar{f}_v(x). \tag{32}$$

Уравнение (28) не содержит членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. членов первого порядка. Во втором порядке получаем квадратное уравнение

$$\bar{h}(x)[\bar{u}_1^{(-)} - \bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_1^{(-)}]^2 = \bar{F}_1(x) := F_1(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0). \tag{33}$$

Условие А7. При $x \in [0, \bar{x}_0]$ имеет место неравенство $\bar{F}_1(x) > 0$.

Так как $\bar{h}(x) > 0$ (в силу (4)), то квадратное уравнение (33) имеет два корня, из которых выбираем положительный:

$$\bar{u}_1^{(-)} - \bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_1^{(-)} = a(x) := (\bar{h}^{-1}(x)\bar{F}_1(x))^{1/2}. \tag{34}$$

Положительность корня $a(x)$ играет в дальнейшем важную роль. Отметим, что случай, когда $\bar{F}_1(x)=0$ в каких-то точках, требует отдельного рассмотрения.

Второе уравнение для $\bar{u}_1^{(-)}$, $\bar{v}_1^{(-)}$ получаем из (29):

$$\bar{f}_u(x)\bar{u}_1^{(-)}+\bar{f}_v(x)\bar{v}_1^{(-)}=0. \tag{35}$$

Определитель СЛАУ (34), (35) равен $\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_{1v}(x)+\bar{f}_v(x)=\bar{g}_{1v}(x)$.

Условие A8. Справедливы неравенства

$$\bar{g}_{1v}(x)>0 \text{ при } x\in[0,\bar{x}_0] \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_1}{\partial v}(v,\bar{x}_0)>0 \text{ при } v\in[v_1(\bar{x}_0),\bar{v}_0].$$

В силу первого неравенства из условия A8 (второе неравенство понадобится в дальнейшем) СЛАУ (34), (35) однозначно разрешима:

$$\bar{u}_1^{(-)}(x)=\bar{f}_v(x)\bar{g}_{1v}^{-1}(x)a(x), \quad \bar{v}_1^{(-)}(x)=-\bar{f}_u(x)\bar{g}_{1v}^{-1}(x)a(x).$$

Для каждого $i=2,3,\ldots$ из равенств (28), (29) извлекается СЛАУ относительно $\bar{u}_i^{(-)}$, $\bar{v}_i^{(-)}$ такого же типа, как (34), (35):

$$\bar{u}_i^{(-)}-\bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_i^{(-)}=a_i^{(-)}(x), \quad \bar{f}_u(x)\bar{u}_i^{(-)}+\bar{f}_v(x)\bar{v}_i^{(-)}=b_i^{(-)}(x),$$

где $a_i^{(-)}(x)$, $b_i^{(-)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(-)}(x)$, $\bar{v}_j^{(-)}(x)$ с номерами $j<i$. Отсюда однозначно определяются функции $\bar{u}_i^{(-)}(x)$, $\bar{v}_i^{(-)}(x)$.

3.2. Погранслойная часть асимптотики. Погранслойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}u(\xi), \quad \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}v(\xi), \quad \xi=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\geqslant 0,$$

$$P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}u(\zeta), \quad P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}v(\zeta), \quad \zeta=\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\geqslant 0.$$

Заметим, что все погранслойные ряды начинаются с членов порядка ε в некоторой положительной степени. Это обусловлено тем, что в точке $x=0$ заданы граничные условия Неймана (см. (11)).

Уравнения для функций $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$ и $P_i^{(-)}u(\zeta)$, $P_i^{(-)}v(\zeta)$ будем извлекать стандартным способом из равенств, традиционных для метода пограничных функций [2, с. 28]:

$$\varepsilon\frac{d^2\Pi^{(-)}u}{d\xi^2}=\Pi F, \quad \frac{d^2\Pi^{(-)}v}{d\xi^2}=\Pi f, \tag{36}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{d^2P^{(-)}u}{d\zeta^2}=PF, \quad \frac{d^2P^{(-)}v}{d\zeta^2}=\sqrt{\varepsilon}Pf, \tag{37}$$

где

$$\Pi F:=[F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v,x,\varepsilon)-F(\bar{u}^{(-)},\bar{v}^{(-)},x,\varepsilon)]\Big|_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi},$$

$$PF:=[F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u+P^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v+P^{(-)}v,x,\varepsilon)-$$
$$-F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v,x,\varepsilon)]\Big|_{x=\varepsilon^{3/4}\zeta,\,\xi=\varepsilon^{1/4}\zeta},$$

функции Πf и Pf имеют выражения, аналогичные выражениям для ΠF и PF.

Чтобы найти граничные условия для погранслойных функций при $\xi = 0$ и $\zeta = 0$, подставим выражения (26) и (27) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ в первое и второе краевые условия из (11), используя представления для $\bar{u}^{(-)}$, $\Pi^{(-)}u$, $P^{(-)}u$ и $\bar{v}^{(-)}$, $\Pi^{(-)}v$, $P^{(-)}v$ в виде рядов и учитывая тот факт, что производные всех членов рядов для $Q^{(-)}u$, $R^{(-)}u$ и $Q^{(-)}v$, $R^{(-)}v$ равны нулю в точке $x = 0$ (см. замечание в конце п. 3.3). Получим равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(0)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{d\Pi_i^{(-)}u}{d\xi}(0)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dP_i^{(-)}u}{d\zeta}(0)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(0)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{d\Pi_i^{(-)}v}{d\xi}(0)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dP_i^{(-)}v}{d\zeta}(0)=0.$$

Из этих равенств стандартным способом получаем

$$\frac{dP_i^{(-)}u}{d\zeta}(0)=-\frac{d\bar{u}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0)-\frac{d\Pi_i^{(-)}u}{d\xi}(0),\quad i=0,1,2,\ldots, \tag{38}$$

$$\frac{d\Pi_0^{(-)}v}{d\xi}(0)=-\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(0), \tag{39}$$

$$\frac{d\Pi_1^{(-)}v}{d\xi}(0)=0,\quad \frac{d\Pi_i^{(-)}v}{d\xi}(0)=-\frac{d\bar{v}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0)-\frac{dP_{i-2}^{(-)}v}{d\zeta}(0),\quad i=2,3,\ldots, \tag{40}$$

где $d\bar{u}_{i/2}^{(-)}(0)/dx = d\bar{v}_{i/2}^{(-)}(0)/dx = 0$, если i – нечётное число.

К полученным граничным условиям добавим стандартные для погранслойных функций условия на бесконечности

$$\Pi_i^{(-)}v(\infty)=0,\quad P_i^{(-)}u(\infty)=0,\quad P_i^{(-)}v(\infty)=0,\quad i=0,1,2,\ldots \tag{41}$$

Уравнения (36), (37) и граничные условия (38)–(41) дают возможность определить последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ погранслойные функции в следующем порядке: $\Pi_i^{(-)}v \to \Pi_i^{(-)}u \to$ $\to P_i^{(-)}u \to P_i^{(-)}v$.

Для $\Pi_0^{(-)}u$, $\Pi_0^{(-)}v$ из равенств (36) следует система уравнений

$$\bar{h}(0)[\bar{u}_1^{(-)}(0)+\Pi_0^{(-)}u-\bar{\varphi}_{1v}(0)(\bar{v}_1^{(-)}(0)+\Pi_0^{(-)}v)]^2-\bar{h}(0)[\bar{u}_1^{(-)}(0)-\bar{\varphi}_{1v}(0)\bar{v}_1^{(-)}(0)]^2=0,$$

$$\frac{d^2\Pi_0^{(-)}v}{d\xi^2}=\bar{f}_u(0)\Pi_0^{(-)}u+\bar{f}_v(0)\Pi_0^{(-)}v,\quad \xi\geqslant 0.$$

Из её первого уравнения получаем равенство

$$\Pi_0^{(-)}u=\bar{\varphi}_{1v}(0)\Pi_0^{(-)}v, \tag{42}$$

в силу которого второе уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\Pi_0^{(-)}v}{d\xi^2}=\bar{g}_{1v}(0)\Pi_0^{(-)}v,\quad \xi\geqslant 0.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (39) и $\Pi_0^{(-)}v(\infty) = 0$ (см. (41)) находится в явном виде:

$$\Pi_0^{(-)}v(\xi)=\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(0)(\bar{g}_{1v}(0))^{-1/2}\exp(-\sqrt{\bar{g}_{1v}(0)}\xi),\quad \xi\geqslant 0.$$

Так как $\bar{g}_{1v}(0) > 0$ в силу условия A8, то функция $\Pi_0^{(-)}v(\xi)$ имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0^{(-)}v(\xi)| \leqslant c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geqslant 0. \tag{43}$$

Функция $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ определяется теперь из равенства (42) и также имеет оценку вида (43). Кроме того, так как функция $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ найдена, то из условий (38) при $i = 0$ получаем граничное условие для $P_0^{(-)}u(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$:

$$\frac{dP_0^{(-)}u}{d\zeta}(0) = -\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\Pi_0^{(-)}u}{d\xi}(0) =: \gamma_0. \tag{44}$$

Уравнения для $P_0^{(-)}u$, $P_0^{(-)}v$ извлекаются из равенств (37) и имеют вид

$$\frac{d^2P_0^{(-)}u}{d\zeta^2} = 2\bar{h}(0)a(0)P_0^{(-)}u, \quad \zeta \geqslant 0, \tag{45}$$

$$\frac{d^2P_0^{(-)}v}{d\zeta^2} = \bar{f}_u(0)P_0^{(-)}u, \quad \zeta \geqslant 0, \tag{46}$$

где величина $a(0)$ определена в (34).

Решение уравнения (45) с граничными условиями (44) и $P_0^{(-)}u(\infty) = 0$ (см. (41)) также находится в явном виде:

$$P_0^{(-)}u(\zeta) = -\gamma_0 k_0^{-1}\exp(-k_0\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

где $k_0 := \sqrt{2\bar{h}(0)a(0)} > 0$, и имеет, очевидно, экспоненциальную оценку

$$|P_0^{(-)}u(\zeta)| \leqslant c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \geqslant 0. \tag{47}$$

Зная $P_0^{(-)}u(\zeta)$, из уравнения (46) с условием $P_0^{(-)}v(\infty) = 0$ (см. (41)) находим функцию $P_0^{(-)}v(\zeta)$:

$$P_0^{(-)}v(\zeta) = \int\limits_{\infty}^{\zeta}\int\limits_{\infty}^{s} \bar{f}_u(0)P_0^{(-)}u(t)\,dt\,ds,$$

для неё также имеет место оценка вида (47).

При $i = 1, 2, \ldots$ для $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$ из равенств (36) вытекает линейная система уравнений

$$\Pi_i^{(-)}u - \bar{\varphi}_{1v}(0)\Pi_i^{(-)}v = \tilde{\pi}_i(\xi),$$

$$\frac{d^2\Pi_i^{(-)}v}{d\xi^2} = \bar{f}_u(0)\Pi_i^{(-)}u + \bar{f}_v(0)\Pi_i^{(-)}v + \pi_i(\xi), \quad \xi \geqslant 0,$$

а для $P_i^{(-)}u$, $P_i^{(-)}v$ из равенств (37) – линейная система уравнений

$$\frac{d^2P_i^{(-)}u}{d\zeta^2} = k_0^2P_i^{(-)}u + p_i(\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

$$\frac{d^2P_i^{(-)}v}{d\zeta^2} = \bar{f}_u(0)P_i^{(-)}u + \tilde{p}_i(\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

где неоднородности $\tilde{\pi}_i(\xi)$, $\pi_i(\xi)$ и $p_i(\zeta)$, $\tilde{p}_i(\zeta)$ выражаются рекуррентно через функции $\Pi_j^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_j^{(-)}v(\xi)$ и $P_j^{(-)}u(\zeta)$, $P_j^{(-)}v(\zeta)$ с номерами $j<i$ и имеют экспоненциальные оценки вида (43) и (47), если такие же оценки имеют погранслойные функции с номерами $j<i$. Эти уравнения с граничными условиями (40), (38), (41) решаются в той же последовательности, как и уравнения для погранслойных функций при $i=0$, при этом решения находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки вида (43) и (47).

Итак, погранслойные ряды построены.

3.3. Внутрислойная часть асимптотики. Внутрислойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}u(\tau),\quad Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}v(\tau), \tag{48}$$

$$R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}u(\sigma),\quad R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}v(\sigma). \tag{49}$$

Стандартным способом (см. [2, с. 28]) для функций $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ получаем систему уравнений

$$\varepsilon\frac{d^2Q^{(-)}u}{d\tau^2}=QF,\quad \frac{d^2Q^{(-)}v}{d\tau^2}=Qf, \tag{50}$$

где

$$QF:=[F(\bar{u}^{(-)}+Q^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+Q^{(-)}v,x,\varepsilon)-F(\bar{u}^{(-)},\bar{v}^{(-)},x,\varepsilon)]\Big|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функция Qf имеет аналогичное выражение. Из этой системы также стандартным способом будем последовательно для $i=0,1,2,\ldots$ извлекать уравнения для функций $Q_i^{(-)}u$, $Q_i^{(-)}v$.

Для $Q_0^{(-)}u$, $Q_0^{(-)}v$ получаем систему уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}u,\bar{v}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v,x_*,0)=0,$$

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}v}{d\tau^2}=f(\bar{u}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}u,\bar{v}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v,x_*,0),\quad \tau\leqslant 0.$$

Из первого уравнения следует равенство

$$\bar{u}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}u=\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v,x_*), \tag{51}$$

в силу которого второе уравнение, используя вид функции $g_1(v,x)$ (см. условие A2), запишем в виде

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}v}{d\tau^2}=g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v,x_*),\quad \tau\leqslant 0. \tag{52}$$

К этому уравнению нужно добавить граничные условия. Чтобы получить граничное условие при $\tau=0$, подставим выражение (27) для $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ в четвёртое краевое условие из (11), используя представления $\bar{v}^{(-)}$, $Q^{(-)}v$, $R^{(-)}v$ в виде рядов и учитывая тот факт, что все члены рядов $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}v$ равны нулю при $x=x_*$ (см. замечание в конце этого пункта). В результате получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}v(0)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}v(0)=v_*. \tag{53}$$

Отсюда находим $\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(0) = v_*$, и, следовательно, граничное условие для $Q_0^{(-)}v(\tau)$ при $\tau = 0$ имеет вид
$$Q_0^{(-)}v(0) = v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*). \tag{54}$$
Отметим, что $v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*) = v_* - v_1(x_*) > 0$ (см. (7)).

В качестве второго граничного условия для функции $Q_0^{(-)}v(\tau)$ и также для остальных функций $Q_i^{(-)}v(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots$, возьмём стандартное условие на бесконечности:
$$Q_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{55}$$

Для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, в силу второго неравенства из условия A8 справедливо неравенство $\partial g_1(v, x_*)/\partial v > 0$ при $v \in [\bar{v}_0^{(-)}(x_*), v_*]$. Поэтому задача (52), (54), (55) для функции $Q_0^{(-)}v(\tau)$ сводится стандартным способом к уравнению первого порядка
$$\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau} = \left(2 \int\limits_0^{Q_0^{(-)}v} g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + s, x_*)ds\right)^{1/2}, \quad \tau \leqslant 0, \tag{56}$$
с начальным условием (54).

Уравнение (56) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (54) является возрастающей функцией (от нуля при $\tau = -\infty$ до $(v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*))$ при $\tau = 0$) и имеет экспоненциальную оценку
$$|Q_0^{(-)}v(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0. \tag{57}$$

Теперь из равенства (51) находим $Q_0^{(-)}u(\tau)$:
$$Q_0^{(-)}u(\tau) = \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*) - \bar{u}_0^{(-)}(x_*) =$$
$$= \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*), x_*). \tag{58}$$
Отсюда следует, что $Q_0^{(-)}u(\tau)$ и её производные также имеют экспоненциальные оценки вида (57).

Несложные вычисления показывают, что справедливы равенства
$$Q_1^{(-)}v(\tau) = 0, \quad Q_1^{(-)}u(\tau) = 0, \quad \tau \leqslant 0, \tag{59}$$
а для функций $Q_2^{(-)}u$, $Q_2^{(-)}v$ вследствие (50) получаем систему уравнений
$$\hat{h}(x_*, \tau)(Q_2^{(-)}u - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)Q_2^{(-)}v + \psi_2(\tau))^2 = B(\tau), \tag{60}$$
$$\frac{d^2Q_2^{(-)}v}{d\tau^2} = \hat{f}_u(x_*, \tau)Q_2^{(-)}u + \hat{f}_v(x_*, \tau)Q_2^{(-)}v + \chi_2(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{61}$$
где $\hat{h}(x, \tau) := h^{(-)}(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)$ (см. (30)),
$$\psi_2(\tau) := \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_{1x}(\tau)\right)\tau + \bar{u}_1^{(-)}(x_*) - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)\bar{v}_1^{(-)}(x_*),$$
$$\hat{\varphi}_{1v}(x, \tau) := \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x), \tag{62}$$
$$\hat{\varphi}_{1x}(\tau) := \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*),$$

$$B(\tau) := \frac{d^2 Q_0^{(-)} u}{d\tau^2}(\tau) + \hat{F}_1(\tau), \tag{63}$$

$$\hat{F}_1(\tau) := F_1(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*), \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*, 0),$$

$$\chi_2(\tau) := (\hat{f}_u(x_*, \tau) - \bar{f}_u(x_*))\left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right) +$$

$$+ (\hat{f}_v(x_*, \tau) - \bar{f}_v(x_*))\left(\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{v}_1^{(-)}(x_*)\right) + (\hat{f}_x(x_*, \tau) - \bar{f}_x(x_*))\tau,$$

$$\hat{f}_u(x, \tau) := \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)} v(\tau), x), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)} v(\tau), x, 0); \tag{64}$$

обозначения $\hat{f}_v(x, \tau)$ и $\hat{f}_x(x, \tau)$ имеют аналогичный смысл, $\bar{f}_u(x)$ и $\bar{f}_v(x)$ определены в (31).

Дифференцируя дважды выражение (58) для функции $Q_0^{(-)} u(\tau)$ и используя равенства (52) и (56), приходим к равенству

$$\frac{d^2 Q_0^{(-)} u}{d\tau^2}(\tau) = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau) g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*) + 2\hat{\varphi}_{1vv}(x_*, \tau) \int\limits_{\bar{v}_0^{(-)}(x_*)}^{\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)} g_1(s, x_*)\, ds.$$

Поэтому выражение (63) для $B(\tau)$ можно записать в виде

$$B(\tau) = [G(v, x_*) + F_1(\varphi_1(v, x_*), v, x_*, 0)]\big|_{v = \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)}, \tag{65}$$

где

$$G(v, x) := \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(v, x) g_1(v, x) + 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2}(v, x) \int\limits_{v_1(x)}^{v} g_1(s, x)\, ds.$$

Из уравнения (60) следует, что для разрешимости системы (60), (61) необходимо выполнение условия

$$B(\tau) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \tau \leqslant 0. \tag{66}$$

Учитывая вид (65) функции $B(\tau)$ и то, что $(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)) \in (\bar{v}_0^{(-)}(x_*), v_*] = (v_1(x_*), v_*]$ при $\tau \leqslant 0,$ введём требование, обеспечивающее выполнение неравенства (66).

Условие A9. При $v \in [v_1(\bar{x}_0), \bar{v}_0]$ выполняется неравенство

$$G(v, \bar{x}_0) + F_1(\varphi_1(v, \bar{x}_0), v, \bar{x}_0, 0) > 0.$$

Тогда $B(\tau) > 0$ при $\tau \leqslant 0$ (для v_* и $x_*,$ достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно), и из уравнения (60) получаем

$$Q_2^{(-)} u = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau) Q_2^{(-)} v + b(\tau) - \psi_2(\tau), \tag{67}$$

где

$$b(\tau) := (\hat{h}^{-1}(x_*, \tau) B(\tau))^{1/2} \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad \tau \leqslant 0, \tag{68}$$

берём положительное значение корня из $\hat{h}^{-1}(x_*, \tau) B(\tau),$ что будет важно при определении функций $R_i^{(-)} u(\sigma),$ $R_i^{(-)} v(\sigma).$

Из определения (63) для $B(\tau),$ используя экспоненциальные оценки функций $Q_0^{(-)} u,$ $Q_0^{(-)} v,$ $d^2 Q_0^{(-)} u / d\tau^2,$ а также равенства (34) для корня $a(x),$ получаем $\hat{h}(x_*, -\infty) = \bar{h}(x_*),$

$$b(-\infty) = (\bar{h}^{-1}(x_*) B(-\infty))^{1/2} = (\bar{h}^{-1}(x_*) \bar{F}_1(x_*))^{1/2} = a(x_*). \tag{69}$$

Кроме того, из выражения для $\psi_2(\tau)$ следует, что $\psi_2(-\infty) = a(x_*)$, а $r_2(\tau) := b(\tau) - \psi_2(\tau)$ имеет экспоненциальную оценку вида (57):

$$|r_2(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0.$$

Такую же оценку имеет функция $\chi_2(\tau)$.

Подставляя выражение (67) для $Q_2^{(-)}u$ в уравнение (61) и учитывая, что

$$\hat{f}_u(x_*,\tau)\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) + \hat{f}_v(x_*,\tau) = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau) := \frac{\partial g_1}{\partial v}(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*),$$

приходим к следующему уравнению для функции $Q_2^{(-)}v(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_2^{(-)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau)Q_2^{(-)}v + q_2(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{70}$$

где $q_2(\tau) = \chi_2(\tau) + \hat{f}_u(x_*,\tau)r_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ имеет оценку вида (57).

Граничные условия для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ следуют из (53) и (55):

$$Q_2^{(-)}v(0) = -\bar{v}_1^{(-)}(x_*) - R_0^{(-)}v(0), \quad Q_2^{(-)}v(-\infty) = 0. \tag{71}$$

Мы видим, что первое граничное условие содержит неизвестную пока величину $R_0^{(-)}v(0)$.

Обратимся поэтому к построению рядов для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$. В отличие от рядов для $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ ряды для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ будут построены не стандартным способом, а с помощью алгоритма, разработанного для сингулярно возмущённых задач с кратным корнем вырожденного уравнения [3–6], в которых стандартный алгоритм не применим. С этой целью введём ещё одну внутрислойную переменную $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$ и, используя равенства $x = x_* + \varepsilon^{3/4}\eta$, $\tau = \varepsilon^{1/4}\eta$, запишем систему уравнений для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ в виде

$$\frac{d^2R^{(-)}u}{d\sigma^2} = RF, \quad \frac{d^2R^{(-)}v}{d\sigma^2} = \varepsilon Rf, \tag{72}$$

где

$$RF := [F(\bar{u}^{(-)} + Q^{(-)}u + R^{(-)}u, \bar{v}^{(-)} + Q^{(-)}v + R^{(-)}v, x, \varepsilon) -$$
$$- F(\bar{u}^{(-)} + Q^{(-)}u, \bar{v}^{(-)} + Q^{(-)}v, x, \varepsilon)]\Bigg|_{\substack{x=x_*+\varepsilon^{3/4}\eta \\ \tau=\varepsilon^{1/4}\eta}},$$

функция Rf имеет аналогичное выражение. Разложив правые части уравнений в ряды по степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, будем последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ извлекать из системы (72) уравнения для $R_i^{(-)}u$, $R_i^{(-)}v$ нестандартным способом.

Уравнения для $R_0^{(-)}u$, $R_0^{(-)}v$ возьмём в виде (для упрощения записи используем равенства $\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(0) = v_*$, $\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) = \varphi_1(v_*, x_*)$)

$$\frac{d^2R_0^{(-)}u}{d\sigma^2} = h^{(-)}(\varphi_1(v_*,x_*) + R_0^{(-)}u, v_*, x_*)[(R_0^{(-)}u)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u], \tag{73}$$

$$\frac{d^2R_0^{(-)}v}{d\sigma^2} = \sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(\sigma), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{74}$$

где $R_0^{(-)}f(\sigma) := f(\varphi_1(v_*,x_*) + R_0^{(-)}u, v_*, x_*, 0) - f(\varphi_1(v_*,x_*), v_*, x_*, 0)$, величина $b(0)$ определена в (68), $b(0) > 0$ (это существенно для поведения функции $R_0^{(-)}u(\sigma)$).

Чтобы получить граничное условие для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ при $\sigma = 0$, подставим выражение (26) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ в третье краевое условие из (11). Получим равенство, аналогичное (53):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(-)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)} u(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)} u(0) = \varphi_2(v_*, x_*), \tag{75}$$

откуда имеем $\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) + R_0^{(-)}u(0) = \varphi_2(v_*, x_*)$. Из этого равенства находим $R_0^{(-)}u(0)$. Так как $\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) = \varphi_1(v_*, x_*)$ (см. (51) и (54)), то

$$R_0^{(-)}u(0) = \varphi_2(v_*, x_*) - \varphi_1(v_*, x_*). \tag{76}$$

В качестве второго граничного условия для функции $R_0^{(-)}u(\sigma)$ и также для остальных функций $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots,$ возьмём стандартное условие на бесконечности:

$$R_i^{(-)}u(-\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{77}$$

Задача (73), (76), (77) для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma} = \left(2 \int\limits_0^{R_0^{(-)}u} h^{(-)}(\varphi_1(v_*, x_*) + s, v_*, x_*)(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon} b(0)s)\,ds\right)^{1/2}, \quad \sigma \leqslant 0, \tag{78}$$

с начальным условием (76). Уравнение (78) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (76) является возрастающей функцией (от нуля при $\sigma = -\infty$ до величины $(\varphi_2(v_*, x_*) - \varphi_1(v_*, x_*))$ при $\sigma = 0$) и имеет двустороннюю оценку (см. [5]):

$$c_1 R_{\kappa_1}(\sigma, \varepsilon) \leqslant R_0^{(-)}u(\sigma) \leqslant c_2 R_{\kappa_2}(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{79}$$

где c_1, c_2, κ_1, κ_2 – не зависящие от ε постоянные, $c_2 \geqslant c_1 > 0$, $\kappa_1 \geqslant \kappa_2 > 0$, а

$$R_\kappa(\sigma, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)[1 + \varepsilon^{1/4} - \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)]^{-2}, \quad \kappa > 0, \quad \sigma \leqslant 0, \tag{80}$$

– функция, которая будет эталонной (оценочной) функцией для всех функций $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ т.е. каждая из этих функций будет иметь оценку вида

$$|R_i^{(-)}u(\sigma)| \leqslant c R_\kappa(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{81}$$

с различными, вообще говоря, числами c и κ для различных i. Для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ эта оценка следует из (79).

Несложный анализ выражения (80) показывает, что функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ монотонно стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$, причём убывание носит различный характер на трёх промежутках (в трёх зонах) полупрямой $\sigma \leqslant 0$.

Первая зона – отрезок $[-\varepsilon^{-\gamma} \leqslant \sigma \leqslant 0]$, где в качестве γ можно взять любое число из интервала $(0, 1/4)$, сколь угодно близкое к $1/4$. В этой зоне функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ убывает с уменьшением σ (т.е. с ростом $|\sigma|$) степенным образом: $R_\kappa(\sigma, \varepsilon) = O(1/(1 + \sigma^2))$ при фиксированном ε.

Вторая (переходная) зона – отрезок $[-\varepsilon^{-1/4} \leqslant \sigma \leqslant -\varepsilon^{-\gamma}]$. Здесь происходит постепенное изменение масштаба внутрислойной переменной и характера убывания функции $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ от степенного убывания по отношению к σ до экспоненциального по отношению к новой внутрислойной переменной $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$.

Третья зона – полупрямая $\sigma \leqslant -\varepsilon^{-1/4}$. Здесь функция $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ убывает экспоненциально по отношению к внутрислойной переменной η, именно: $R_\kappa(\sigma,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\exp(\kappa\eta))$, $\eta \leqslant -1$.

Отметим, что если формировать уравнение для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ стандартным способом, то в правой части уравнения (73) не будет слагаемого $2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u$, и тогда на всей полупрямой $\sigma \leqslant 0$ функция $R_0^{(-)}u(\sigma)$ будет иметь оценку $R_0^{(-)}u(\sigma) = O(1/(1+\sigma^2))$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (10), (11) в окрестности точки $x = x_*$.

Отметим также, что функция $R_0^{(-)}u$ зависит не только от σ, но и от ε, и то же самое имеет место для всех других внутрислойных функций, но для упрощения записи их зависимость от ε указывать не будем, т.е. будем писать $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$ вместо $R_i^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R_i^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$.

Итак, функция $R_0^{(-)}u(\sigma)$ определена, и, значит, правая часть в уравнении (74) для $R_0^{(-)}v(\sigma)$ является теперь известной функцией, имеющей, очевидно, оценку

$$|\sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(\sigma)| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}R_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0. \tag{82}$$

Для однозначного определения функции $R_0^{(-)}v(\sigma)$ (и так же будет для остальных функций $R_i^{(-)}v(\sigma)$) достаточно задать стандартное условие на бесконечности:

$$R_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{83}$$

Решение уравнения (74) с условием $R_0^{(-)}v(-\infty) = 0$ имеет вид

$$R_0^{(-)}v(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{s}\sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(t)\,dt\,ds, \tag{84}$$

откуда в силу (82) следует оценка

$$|R_0^{(-)}v(\sigma)| \leqslant cR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0. \tag{85}$$

Отметим, что нестандартность формирования уравнения (74) для функции $R_0^{(-)}v(\sigma)$, состоящая в том, что правая часть в (74) содержит множитель $\sqrt{\varepsilon}$, имела целью получить для $R_0^{(-)}v(\sigma)$ оценку (85). Кроме того, из (84) следует, что

$$\frac{dR_0^{(-)}v}{d\sigma}(0) = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{86}$$

Эта оценка понадобится в п. 4.

Так как функция $R_0^{(-)}v(\sigma)$ найдена, то известно число $R_0^{(-)}v(0)$, входящее в граничное условие для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ (см. (71)). Это даёт возможность определить функцию $Q_2^{(-)}v(\tau)$. Она выражается формулой

$$Q_2^{(-)}v(\tau) = \Phi(\tau)\bigg(\Phi^{-1}(0)Q_2^{(-)}v(0) + \int\limits_0^{\tau}\Phi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^{s}\Phi(t)q_2(t)\,dt\,ds\bigg),$$

где $\Phi(\tau) := dQ_0^{(-)}v(\tau)/d\tau$, $Q_2^{(-)}v(0) = -\bar{v}_1^{(-)}(x_*) - R_0^{(-)}v(0)$ (см. (71)). Отсюда для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ следует экспоненциальная оценка вида (57). Зная $Q_2^{(-)}v(\tau)$, по формуле (67) находим функцию $Q_2^{(-)}u(\tau)$, для которой, очевидно, также справедлива оценка вида (57).

Таким образом, на данном этапе определены все главные члены внутрислойных рядов (48) и (49), причём они находились в следующем порядке: $Q_0^{(-)}v \to Q_0^{(-)}u \to R_0^{(-)}u \to R_0^{(-)}v$, и, кроме того, найдены функции $Q_1^{(-)}v$, $Q_1^{(-)}u$ (см. (59)) и $Q_2^{(-)}v$, $Q_2^{(-)}u$.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ внутрислойные функции определяются в таком же порядке, как и для $i = 0$. При $i = 3, 4, \ldots$ для $Q_i^{(-)}u(\tau)$, $Q_i^{(-)}v(\tau)$ получается линейная система уравнений, которая приводится к виду, аналогичному (67), (70):

$$Q_i^{(-)}u = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)Q_i^{(-)}v + \psi_i(\tau), \tag{87}$$

$$\frac{d^2 Q_i^{(-)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_{1v}(x_*, \tau)Q_i^{(-)}v + q_i(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{88}$$

где функции $\psi_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(-)}u(\tau)$, $Q_j^{(-)}v(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (57).

Граничные условия для функции $Q_i^{(-)}v(\tau)$ извлекаются из (53), (55):

$$Q_i^{(-)}v(0) = -(\bar{v}_{i/2}^{(-)}(x_*) + R_{i-2}^{(-)}v(0)), \quad Q_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \tag{89}$$

где $\bar{v}_{i/2}^{(-)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число.

Решение задачи (88), (89) задаётся формулой, аналогичной выражению для $Q_2^{(-)}v(\tau)$, а функция $Q_i^{(-)}u(\tau)$ определяется после этого формулой (87). Из этих формул для функций $Q_i^{(-)}v(\tau)$, $Q_i^{(-)}u(\tau)$ получаются оценки вида (57).

Для $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$ при $i = 1, 2, \ldots$ из системы (72) извлекается нестандартным способом линейная система уравнений

$$\frac{d^2 R_i^{(-)}u}{d\sigma^2} = K(\sigma, \varepsilon)R_i^{(-)}u + r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon), \tag{90}$$

$$\frac{d^2 R_i^{(-)}v}{d\sigma^2} = \sqrt{\varepsilon}\tilde{f}_u(\sigma)R_i^{(-)}u(\sigma) + \rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{91}$$

где

$$K(\sigma, \varepsilon) := 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}b(0)) + \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + 2\sqrt{\varepsilon}b(0))R_0^{(-)}u(\sigma), \tag{92}$$

$$\tilde{h}^{(-)}(\sigma) := h^{(-)}(\varphi_1(v_*, x_*) + R_0^{(-)}u(\sigma), v_*, x_*),$$

$$\tilde{h}_u^{(-)}(\sigma) := \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(\varphi_1(v_*, x_*) + R_0^{(-)}u(\sigma), v_*, x_*),$$

обозначения $\tilde{h}_v^{(-)}(\sigma)$, $\tilde{f}_u(\sigma)$, $\tilde{f}_v(\sigma)$ имеют аналогичный смысл, а функции $r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ выражаются рекуррентно через $R_j^{(-)}u(\sigma)$, $R_j^{(-)}v(\sigma)$ с номерами $j < i$ и формируются с помощью нестандартного алгоритма так, чтобы они имели оценку

$$|r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)| + |\rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)| \leqslant c(R_\kappa^2(\sigma, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}R_\kappa(\sigma, \varepsilon)), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{93}$$

функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ в которой определена в (80). При этом в процессе формирования этих функций используется переменная $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$, а в уравнениях (90) и (91) она заменяется на $\varepsilon^{1/4}\sigma$ (более детальное описание нестандартного алгоритма см. в [3–6]).

Запишем, например, выражения для $r_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\rho_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$:

$$r_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \left(\tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}(0) + \tilde{h}_v^{(-)}(\sigma)\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0)\right)\varepsilon^{1/4}\sigma[(R_0^{(-)}u(\sigma))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u(\sigma)],$$

$$\rho_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \left\{(\tilde{f}_u(\sigma) - \hat{f}_u(x_*, 0))\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}(0) + (\tilde{f}_v(\sigma) - \hat{f}_v(x_*, 0))\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0)\right\}\varepsilon^{3/4}\sigma.$$

Эти функции имеют, очевидно, оценку вида (93).

Граничные условия для функции $R_i^{(-)}u(\sigma)$ следуют из (75) и (77):

$$R_i^{(-)}u(0) = -(\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*) + Q_i^{(-)}u(0)), \quad R_i^{(-)}u(-\infty) = 0, \tag{94}$$

где $\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*) = 0,$ если i – нечётное число, а для функции $R_i^{(-)}v(\sigma)$ имеем граничное условие (83).

Решение задачи (90), (94) выражается формулой

$$R_i^{(-)}u(\sigma) = \Psi(\sigma)\biggl(\Psi^{-1}(0)R_i^{(-)}u(0) + \int\limits_0^\sigma \Psi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s \Psi(t)r_i^{(-)}(t,\varepsilon)\,dt\,ds\biggr), \tag{95}$$

где $\Psi(\sigma) := dR_0^{(-)}u(\sigma)/d\sigma,$ значение $R_i^{(-)}u(0)$ определено в (94). Из представления (95) для $R_i^{(-)}u(\sigma)$ следует оценка (81).

Так как функция $R_i^{(-)}u(\sigma)$ найдена, то правая часть в уравнении (91) является теперь известной функцией, имеющей оценку вида (93). Решение задачи (91), (83) выражается формулой, аналогичной (84):

$$R_i^{(-)}v(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^\sigma \int\limits_{-\infty}^s (\sqrt{\varepsilon}\tilde{f}_u(t)R_i^{(-)}u(t) + \rho_i^{(-)}(t,\varepsilon))dt\,ds,$$

откуда следует оценка $|R_i^{(-)}v(\sigma)| \leqslant cR_\kappa(\sigma,\varepsilon),\ \ \sigma \leqslant 0.$

Итак, внутрислойные ряды (48) и (49) построены, и их коэффициенты имеют оценки вида (57) и (81). Из этих оценок следует, что внутренний слой в левой полуокрестности точки x_* является четырёхзонным. Первые две зоны определены при описании поведения эталонной функции $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ – это отрезки $[-\varepsilon^{-\gamma} \leqslant \sigma \leqslant 0]$ и $[-\varepsilon^{-1/4} \leqslant \sigma \leqslant -\varepsilon^{-\gamma}],$ т.е. $[x_* - \varepsilon^{1-\gamma} \leqslant x \leqslant x_*]$ и $[x_* - \varepsilon^{3/4} \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{1-\gamma}],$ где $0 < \gamma < 1/4.$ В качестве третьей зоны можно взять отрезок $[x_* - \varepsilon^{5/8} \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{3/4}].$ На этом отрезке происходит экспоненциальное убывание $R^{(-)}$-функций по отношению к внутрислойной переменной $\eta,$ изменяющейся от -1 до $-\varepsilon^{-1/8},$ а $Q^{(-)}$-функции почти не изменяются, так как на этом отрезке $\tau \in [-\varepsilon^{1/8}, -\varepsilon^{1/4}].$ И, наконец, в четвёртой зоне $[x_* - \delta \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{5/8}]$ $R^{(-)}$-функции являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0,$ а $Q^{(-)}$-функции экспоненциально убывают.

Замечание. При построении рядов $\Pi^{(-)}u,$ $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}u,$ $P^{(-)}v$ утверждалось, что производные всех членов внутрислойных рядов $Q^{(-)}u,$ $Q^{(-)}v$ и $R^{(-)}u,$ $R^{(-)}v$ будут равны нулю в точке $x = 0.$ Это свойство является результатом стандартной процедуры умножения внутрислойных функций на бесконечно дифференцируемые срезающие функции (см. [2, с. 82]). Аналогичное умножение на срезающие функции произведём для членов погранслойных рядов $\Pi^{(-)}u,$ $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}u,$ $P^{(-)}v,$ а также для погранслойных и внутрислойных функций во второй вспомогательной задаче.

3.4. Обоснование асимптотики.

3.4.1. Теорема об асимптотике решения первой вспомогательной задачи. Для обоснования построенной асимптотики нам понадобятся ещё два условия, связанные с производными функций $\varphi,$ F и $f.$

Условие A10. Справедливы неравенства

$$\bar{\varphi}_{1v}(x) > 0 \ \text{ при } \ x \in [0, \bar{x}_0] \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(v, \bar{x}_0) > 0 \ \text{ при } \ v \in [v_1(\bar{x}_0), \bar{v}_0].$$

Чтобы сформулировать условие A11, определим кривые $l_4,$ $l_5,$ l_6 в пространстве переменных $(u, v, x),$ аналогичные кривым $l_1,$ $l_2,$ l_3 из условия A6:

$$l_4 = \{(u,v,x)\colon \varphi_1(\bar{v}_0, \bar{x}_0) \leqslant u \leqslant \varphi_2(\bar{v}_0, \bar{x}_0), \ \ v = \bar{v}_0, \ \ x = \bar{x}_0\},$$

$$l_5 = \{(u, v, x)\colon u = \varphi_1(v, \bar{x}_0), \quad v_1(\bar{x}_0) \leqslant v \leqslant \bar{v}_0, \quad x = \bar{x}_0\},$$
$$l_6 = \{(u, v, x)\colon u = \varphi_1(v_1(x), x), \quad v = v_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_0\}.$$

Условие A11. Имеют место неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, \bar{v}_0, \bar{x}_0, 0) < 0 \ \text{ при } \ \varphi_1(\bar{v}_0, \bar{x}_0) < u \leqslant \varphi_2(\bar{v}_0, \bar{x}_0)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v, x, 0) < 0 \ \text{ при } \ (u, v, x) \in l^{(-)} = l_4 \bigcup l_5 \bigcup l_6.$$

Отметим, что для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, неравенства из условий A10 и A11 останутся верными, если в них заменить $\bar{v}_0$ на v_* и $\bar{x}_0$ на x_*.

Обозначим через $U_n^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $V_n^{(-)}(x, \varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (26) и (27):

$$U_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(-)} u\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} P_i^{(-)} u\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)} u\left(\frac{x - x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)} u\left(\frac{x - x_*}{\varepsilon}\right), \tag{96}$$

$$V_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(-)} v\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{5/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4} P_i^{(-)} v\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)} v\left(\frac{x - x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)} v\left(\frac{x - x_*}{\varepsilon}\right). \tag{97}$$

Из алгоритма построения рядов (26) и (27) следуют равенства

$$L_\varepsilon(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}) := \varepsilon^2 \frac{d^2 U_n^{(-)}}{dx^2} - F(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (0, x_*), \tag{98}$$

$$M_\varepsilon(V_n^{(-)}, U_n^{(-)}) := \varepsilon \frac{d^2 V_n^{(-)}}{dx^2} - f(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in (0, x_*), \tag{99}$$

$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon) = 0,$$
$$U_n^{(-)}(x_*, \varepsilon) = \varphi_2(v_*, x_*), \quad V_n^{(-)}(x_*, \varepsilon) = v_* + O(\varepsilon^{(n+1)/2}).$$

Они означают, что ряды (26), (27) являются (пока) формальными асимптотическими рядами для задачи (10), (11).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A1–A4 и A7–A11. Тогда при произвольных v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, и любом натуральном n для всех достаточно малых ε существует решение $(u^{(-)}(x, \varepsilon), v^{(-)}(x, \varepsilon))$ задачи (10), (11), для компонент которого при каждом $m = \overline{0, n}$ имеют место представления*

$$u^{(-)}(x, \varepsilon) = U_m^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(m+1)/2}), \quad v^{(-)}(x, \varepsilon) = V_m^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(m+1)/2}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{100}$$

3.4.2. О методе доказательства теоремы 2. Докажем теорему 2 с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. построив верхнее и нижнее решения задачи (10), (11) на основе формальных асимптотических рядов (26), (27) [7]. Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (10), (11).

Определение. Две пары функций $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ и $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0,x_*)\bigcap C^{(1)}[0,x_*)\bigcap C[0,x_*]$, называются *упорядоченными верхним* и *нижним решениями* задачи (10), (11), если они удовлетворяют следующим условиям:

1° имеют место неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon)\quad\text{и}\quad\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon)\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant x_*;$$

2° выполняются неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},v)\leqslant 0\leqslant L_\varepsilon(\underline{U},v)\quad\text{при}\quad \underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*,$$

$$M_\varepsilon(\overline{V},u)\leqslant 0\leqslant M_\varepsilon(\underline{V},u)\quad\text{при}\quad \underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (98) и (99));

3° справедливы неравенства

$$\frac{d\overline{U}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon),\quad \frac{d\overline{V}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon),$$

$$\underline{U}(x_*,\varepsilon)\leqslant\varphi_2(v_*,x_*)\leqslant\overline{U}(x_*,\varepsilon),\quad \underline{V}(x_*,\varepsilon)\leqslant v_*\leqslant\overline{V}(x_*,\varepsilon).$$

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (10), (11), то эта задача имеет решение $u=u^{(-)}(x,\varepsilon)$, $v=v^{(-)}(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), для компонент которого верхнее и нижнее решения являются соответствующими оценками сверху и снизу:

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u^{(-)}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v^{(-)}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\quad x\in[0,x_*]. \tag{101}$$

Если функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ – невозрастающей функцией аргумента u в области

$$G_0=\{(u,v,x,\varepsilon)\colon \underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\,\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\,0\leqslant x\leqslant x_*,\,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\} \tag{102}$$

(т.е. функции F и f удовлетворяют в области G_0 условию квазимонотонности), то для выполнения условия 2° из определения достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})\leqslant 0\leqslant L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}),\quad x\in(0,x_*), \tag{103}$$

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})\leqslant 0\leqslant M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}),\quad x\in(0,x_*). \tag{104}$$

Мы будем использовать это утверждение при доказательстве теоремы 2.

3.4.3. Нижнее и верхнее решения задачи (10), (11). Определим функции $\alpha(x,\tau)$ и $\beta(x,\tau)$ как решение СЛАУ

$$\alpha-\hat\varphi_{1v}(x,\tau)\beta=A,\quad \hat f_u(x,\tau)\alpha+\hat f_v(x,\tau)\beta=A, \tag{105}$$

где функции $\hat\varphi_{1v}(x,\tau)$ и $\hat f_u(x,\tau)$, $\hat f_v(x,\tau)$ заданы равенствами (62) и (64), $A>0$ – число, которое будет выбрано ниже достаточно большим. Определитель этой системы равен

$$\hat f_v(x,\tau)+\hat f_u(x,\tau)\hat\varphi_{1v}(x,\tau)=\hat g_{1v}(x,\tau):=\frac{\partial g_1}{\partial v}(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x). \tag{106}$$

Для входящих в равенство (106) производных имеют место при $0\leqslant x\leqslant x_*$, $\tau\leqslant 0$ представления

$$\hat f_u(x,\tau)=\hat f_u(x_*,\tau)+\bar f_u(x)-\bar f_u(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{107}$$

$$\hat f_v(x,\tau)=\hat f_v(x_*,\tau)+\bar f_v(x)-\bar f_v(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{108}$$

$$\hat\varphi_{1v}(x,\tau)=\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)+\bar\varphi_{1v}(x)-\bar\varphi_{1v}(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\hat{g}_{1v}(x,\tau) = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau) + \bar{g}_{1v}(x) - \bar{g}_{1v}(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon});$$

функции $\bar{f}_u(x)$, $\bar{f}_v(x)$, $\bar{\varphi}_{1v}(x)$, $\bar{g}_{1v}(x)$ определены равенствами (31), (32).

Из этих представлений для $\hat{f}_u(x,\tau)$ (в силу условия A11), для $\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)$ (в силу условия A10) и для $\hat{g}_{1v}(x,\tau)$ (в силу условия A8) при достаточно малых ε следуют оценки

$$\hat{f}_u(x,\tau) \leqslant c < 0, \quad \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0, \quad \hat{g}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0. \tag{109}$$

В свою очередь, из (106) и этих оценок вытекает аналогичная оценка для $\hat{f}_v(x,\tau)$:

$$\hat{f}_v(x,\tau) \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0. \tag{110}$$

Числа c в каждом из неравенств (109) и в неравенстве (110), вообще говоря, различны, но все они не зависят от ε.

Так как $\hat{g}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0$, то система (105) имеет единственное решение:

$$\alpha(x,\tau) = (\hat{f}_v(x,\tau) + \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\hat{g}_{1v}^{-1}(x,\tau)A, \quad \beta(x,\tau) = (1 - \hat{f}_u(x,\tau))\hat{g}_{1v}^{-1}(x,\tau)A, \tag{111}$$

для которого в силу (109) и (110) справедливы оценки $0 < c_1 A \leqslant \alpha(x,\tau) \leqslant c_2 A$, $0 < c_1 A \leqslant \beta(x,\tau) \leqslant c_2 A$ при $0 \leqslant x \leqslant x_*$, $\tau \leqslant 0$, где постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε.

Нам понадобятся ещё оценки производных:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\alpha\left(x, \frac{x - x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,\tau) + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial\tau}(x,\tau) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau^2}(x,\tau) = O\left(\frac{A}{\varepsilon}\right), \tag{112}$$

$$\varepsilon\frac{d^2\beta}{dx^2} = \varepsilon\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(x,\tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial\tau}(x,\tau) + \frac{\partial^2\beta}{\partial\tau^2}(x,\tau) = Aq(\tau) + O(A)\sqrt{\varepsilon}, \tag{113}$$

где

$$|q(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad c > 0, \quad \kappa > 0, \quad \tau \leqslant 0. \tag{114}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (10), (11) построим в виде

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2}Z(x,\varepsilon), \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2}z(x,\varepsilon), \tag{115}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2}Z(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2}z(x,\varepsilon), \tag{116}$$

где $n \geqslant 2$,

$$Z(x,\varepsilon) := \alpha(x,\tau) + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau) + G(\sigma,\varepsilon) + \exp(-\xi),$$
$$z(x,\varepsilon) := \beta(x,\tau) + \gamma(\tau) - \sqrt{\varepsilon}H(\sigma,\varepsilon) + \exp(-\xi),$$

$\alpha(x,\tau)$, $\beta(x,\tau)$ – решение (111) системы (105), а функции $\gamma(\tau)$, $G(\sigma,\varepsilon)$ и $H(\sigma,\varepsilon)$, выбор которых уточним ниже, будут иметь оценки

$$0 \leqslant \gamma(\tau) \leqslant cA\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{117}$$

$$0 \leqslant G(\sigma,\varepsilon) \leqslant cAR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{118}$$

$$0 \leqslant H(\sigma,\varepsilon) \leqslant cAR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0; \tag{119}$$

положительные числа c и κ не зависят от ε и, вообще говоря, различны в разных оценках.

В п. 3.4.5 мы покажем, как выбрать число A и функции γ, G, H, чтобы для всех достаточно малых ε две пары функций (115) и (116) были верхним и нижним решениями задачи (10), (11). С этой целью в следующем пункте получим некоторые представления и оценки для производных функций F и f.

3.4.4. Оценки производных функций F и f. Введём обозначения

$$\tilde{U}(x,\varepsilon) := \bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + \sqrt{\varepsilon}(\bar{u}_1^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}u(\xi) + Q_2^{(-)}u(\tau)),$$

$$\tilde V(x,\varepsilon) := \bar v_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + \sqrt{\varepsilon}(\bar v_1^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}v(\xi) + Q_2^{(-)}v(\tau)),$$

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(U_n^{(-)}(x,\varepsilon), V_n^{(-)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon), \quad n \geqslant 1, \tag{120}$$

$$\tilde F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(\tilde U(x,\varepsilon), \tilde V(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

аналогичный смысл имеют обозначения $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$, $\tilde F_v(x,\varepsilon)$.

При оценках производных нам понадобятся равенства

$$\bar u_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) = \varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0, \tag{121}$$

$$\tilde U(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde V(x,\varepsilon), x) = \sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon), \tag{122}$$

где функции $a(x)$ и $b(\tau)$ определены равенствами (34) и (68).

Так как $a(x) > 0$, $b(\tau) > 0$ и $b(\tau) \to a(x_*)$ при $\tau \to -\infty$ (см. (69)), то из (122) при достаточно малых ε вытекает оценка

$$\tilde U(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde V(x,\varepsilon), x) \geqslant C\sqrt{\varepsilon} > 0. \tag{123}$$

Приступим к представлениям и оценкам производных. Начнём с очевидных равенств при $x \in [0, x_*]$:

$$f_u(x,\varepsilon) = \hat f_u(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{124}$$

$$f_v(x,\varepsilon) = \hat f_v(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{125}$$

где $\hat f_u(x,\tau)$ и $\hat f_v(x,\tau)$ определены в (64), $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ – в (80).

Рассмотрим теперь производные функции F, используя равенство (122):

$$\tilde F_u(x,\varepsilon) = 2h^{(-)}(\tilde U, \tilde V, x)(\tilde U - \varphi_1(\tilde V, x)) + \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(\tilde U, \tilde V, x)(\tilde U - \varphi_1(\tilde V, x))^2 - \varepsilon\frac{\partial F_1}{\partial u}(\tilde U, \tilde V, x, \varepsilon) =$$

$$= 2h^{(-)}(\bar u_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \bar v_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), x) \times$$

$$\times \sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon) = 2\hat h(x,\tau)\sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon).$$

Отсюда (в силу (123)) следует оценка

$$\tilde F_u(x,\varepsilon) \geqslant c_0\sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [0, x_*]. \tag{126}$$

Для $\tilde F_v(x,\varepsilon)$ аналогичным способом получается представление

$$\tilde F_v(x,\varepsilon) = -\hat\varphi_{1v}(x,\tau)\tilde F_u(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \tag{127}$$

откуда в силу (126) и неравенства $\hat\varphi_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0$ (см. (109)) вытекает оценка

$$\tilde F_v(x,\varepsilon) \leqslant -c_1\sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [0, x_*]. \tag{128}$$

Чтобы получить представления для производных $F_u(x,\varepsilon)$ и $F_v(x,\varepsilon)$ (обозначения см. в (120)), воспользуемся равенствами (при $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant x_*$)

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \tilde U(x,\varepsilon) + R_0^{(-)}u(\sigma) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}),$$

$$V_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \tilde V(x,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{129}$$

Используя их, получаем

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varphi_1(V_n^{(-)}(x,\varepsilon), x) = \tilde U(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde V(x,\varepsilon), x) +$$

$$+ R_0^{(-)}u(\sigma) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{130}$$

Отсюда с учётом (122) получается более грубая оценка для этой разности:

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varphi_1(V_n^{(-)}(x,\varepsilon), x) = O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{131}$$

С помощью равенств (129)–(131) оценим разность $F_u(x,\varepsilon) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon) = 2h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V}, x) + R_0^{(-)}u + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4})) +$$

$$+ \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)(O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon}))^2 - 2h^{(-)}(\tilde{U}, \tilde{V}, x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V}, x)) + O(\varepsilon) =$$

$$= 2[h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x) - h^{(-)}(\tilde{U}, \tilde{V}, x)](\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V}, x)) +$$

$$+ 2h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}) =$$

$$= 2[O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4})]O(\sqrt{\varepsilon}) + 2[\hat{h}(x,\tau) + O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon})]R_0^{(-)}u +$$

$$+ O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}) = 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}).$$

Отсюда следует, что

$$F_u(x,\varepsilon) = \tilde{F}_u(x,\varepsilon) + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{132}$$

Аналогично получается равенство

$$F_v(x,\varepsilon) = \tilde{F}_v(x,\varepsilon) - 2\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{133}$$

Сравнивая равенства (132) и (133) и учитывая представление (127), приходим к равенству

$$F_v(x,\varepsilon) = -\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)F_u(x,\varepsilon) + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{134}$$

Запишем также более грубую оценку, которая следует из (132):

$$F_u(x,\varepsilon) = O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{135}$$

Наряду с полученными представлениями и оценками, нам понадобится ещё одно представление для производной $F_u(x,\varepsilon)$. Оно связано с функцией $K(\sigma,\varepsilon)$ (см. (92)). Преобразуем разность $F_u(x,\varepsilon) - K(\sigma,\varepsilon)$ следующим образом:

$$F_u(x,\varepsilon) - K(\sigma,\varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) + O(\varepsilon^{1/4}), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), x, \varepsilon) -$$

$$- 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}b(0)) - \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + 2\sqrt{\varepsilon}b(0))R_0^{(-)}u(\sigma) =$$

$$= 2h^{(-)}(M)(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)) +$$

$$+ \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x))^2 -$$

$$- 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)R_0^{(-)}u(\sigma) - \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma))^2 + O(\varepsilon^{1/4}),$$

где $M := (\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)$.

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями $R_0^{(-)}u(\sigma)$:

$$F_u(x,\varepsilon)-K(\sigma,\varepsilon)=\left[\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)-\tilde h_u^{(-)}(\sigma)\right](R_0^{(-)}u(\sigma))^2+\Big[2h^{(-)}(M)-2\tilde h^{(-)}(\sigma)+$$

$$+2\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))\Big]R_0^{(-)}u(\sigma)+$$

$$+\Big[2h^{(-)}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))+$$

$$+\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))^2\Big]+O(\varepsilon^{1/4}).$$

Тогда, используя равенство (121) и заменяя x на $x_*+\varepsilon\sigma$ и τ на $\sqrt{\varepsilon}\sigma$ в координатах точки M, получаем оценку

$$F_u(x,\varepsilon)-K(\sigma,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma))^2+\left[O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)+2\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)O(\sqrt{\varepsilon})\right]R_0^{(-)}u(\sigma)+$$

$$+\left[2h^{(-)}(M)O(\sqrt{\varepsilon})+\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(O(\sqrt{\varepsilon}))^2\right]+O(\varepsilon^{1/4}),$$

а поскольку $O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)R_0^{(-)}u(\sigma)=O(\varepsilon^{1/4})$ при $\sigma\leqslant 0$ (это следует из оценки (79)), то $F_u(x,\varepsilon)-$ $-K(\sigma,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/4})$ и, значит,

$$F_u(x,\varepsilon)=K(\sigma,\varepsilon)+O(\varepsilon^{1/4}),\quad x\in[0,x_*]. \tag{136}$$

3.4.5. Проверка выполнения условий 1°–3° определения. Пусть теперь в формулах (115) и (116) $n\geqslant 2$. Покажем, что число A и функции $\gamma(\tau)$, $G(\sigma,\varepsilon)$, $H(\sigma,\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам (117)–(119), можно выбрать так, что пары функций $(\overline{U},\overline{V})$ и $(\underline{U},\underline{V})$, определённые формулами (115) и (116), будут удовлетворять для достаточно малых ε условиям 1°–3° определения, т.е. будут верхним и нижним решениями задачи (10), (11).

Условие 1° (т.е. условие упорядоченности) очевидно выполнено.

Перейдём к проверке условия 2°. Заметим, что функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу условия A11) и $F(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу неравенства (128) и условия A11) удовлетворяют условию квазимонотонности для достаточно малых ε в области G_0 (см. (102), где $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ определены в (115) и (116)), поэтому для выполнения условия 2° достаточно, чтобы были выполнены неравенства (103) и (104).

Проверим выполнение неравенства (103) для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$. Используя формулы (115), получаем

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})=\varepsilon^2\frac{d^2\overline{U}}{dx^2}-F(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon)=\varepsilon^2\frac{d^2U_n^{(-)}}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2\alpha}{dx^2}+$$

$$+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2}{dx^2}(\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau))+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2G}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\xi}-$$

$$-F(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)=$$

$$=L_\varepsilon(U_n^{(-)},V_n^{(-)})+\varepsilon^{n/2+2}O(A/\varepsilon)+\varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2}{d\tau^2}(\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau))+\varepsilon^{n/2}\frac{d^2G}{d\sigma^2}+\varepsilon^{n/2+1}e^{-\xi}-$$

$$-[F(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)-F(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon)]=$$

$$=O(\varepsilon^{(n+1)/2})+O(A)\varepsilon^{n/2+1}+\varepsilon^{n/2}\frac{d^2G}{d\sigma^2}-[\ldots]. \tag{137}$$

При записи этих равенств были использованы равенства (98), (112) и априорное предположение о том, что функции $|d\gamma/d\tau|$ и $|d^2\gamma/d\tau^2|$ имеют такие же оценки, как и сама функция $\gamma(\tau)$ (см. (117)). Отметим, что первое слагаемое $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$ в правой части последнего равенства в (137) не зависит от A.

Преобразуем выражение в квадратных скобках, используя равенство (134), первое равенство в (105) и учитывая, что функции α, β, γ, G и H являются величинами порядка $O(A)$ (см. (111) и (117)–(119)):

$$[\ldots] = F_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} + F_v(x,\varepsilon)(\beta + \gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} - F_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n =$$
$$= F_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)F_u(x,\varepsilon)(\beta + \gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} +$$
$$+ O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n = F_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} + F_u(x,\varepsilon)(\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\gamma\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ F_u(x,\varepsilon)(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} + F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Рассмотрим по отдельности первые четыре слагаемых в правой части последнего равенства. В первом слагаемом используем формулу (132) для $F_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} = (\tilde{F}_u(x,\varepsilon) + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma) + O(R_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}))A\varepsilon^{n/2} =$$
$$= \tilde{F}_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4}.$$

Во втором слагаемом используем формулу (135) и оценку (117):

$$F_u(x,\varepsilon)(\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\gamma\varepsilon^{n/2} = (O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))O(\sqrt{\varepsilon}\tau)\gamma\varepsilon^{n/2} =$$
$$= O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A)\varepsilon^{n/2+1}.$$

В третьем слагаемом снова воспользуемся формулой (135) и учтём, что $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)e^{-\xi} = o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$:

$$F_u(x,\varepsilon)(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} = (O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} = O(\varepsilon^{(n+1)/2}).$$

В четвёртом слагаемом используем представление (136) для $F_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} = K(\sigma,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(\varepsilon^{n/2+1/4})G.$$

Возвращаемся теперь к выражению для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$ из (137), используя полученные равенства, оценку (126) и неравенство $|O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))| \leqslant c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)$:

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} - 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ \left(\frac{d^2G}{d\sigma^2} - K(\sigma,\varepsilon)G + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\right)\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n \leqslant$$
$$\leqslant O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - c_0A\varepsilon^{(n+1)/2} - 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} + \left(\frac{d^2G}{d\sigma^2} - K(\sigma,\varepsilon)G + c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)\right)\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n. \tag{138}$$

Определим функцию $G(\sigma,\varepsilon)$ как решение краевой задачи

$$\frac{d^2G}{d\sigma^2} = K(\sigma,\varepsilon)G - c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma<0; \quad G(0,\varepsilon)=0, \quad G(-\infty,\varepsilon)=0.$$

Тогда

$$G(\sigma,\varepsilon) = -c_3A\Psi(\sigma)\int\limits_0^\sigma \Psi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s \Psi(t)R_\kappa^2(t,\varepsilon)\,dt\,ds,$$

где $\Psi(\sigma) := dR_0^{(-)}u(\sigma)/d\sigma$. Отсюда следует оценка (118).

Из неравенства (138) следует, что

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) \leqslant O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - c_0A\varepsilon^{(n+1)/2} - 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n. \tag{139}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (139) не зависит от A, поэтому сумму первых двух слагаемых можно сделать отрицательной за счёт выбора достаточно большого A. При фиксированном A сумма третьего и четвёртого слагаемых также будет отрицательной при достаточно малых ε в силу оценок (79). Так как $n\geqslant 2$, то пятое и шестое слагаемые имеют более высокий порядок малости по ε, чем первые четыре и, значит, при достаточно малых ε не изменят знака всей суммы в правой части (139), т.е. будет выполнено неравенство для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$ из (103):

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) \leqslant 0, \quad x\in(0,x_*).$$

Проверим выполнение неравенства (104) для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$:

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) = \varepsilon\frac{d^2\overline{V}}{dx^2} - f(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon) = \varepsilon\frac{d^2V_n^{(-)}}{dx^2} + \varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2\beta}{dx^2} + \varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2\gamma}{dx^2} -$$
$$- \varepsilon^{(n+3)/2}\frac{d^2H}{dx^2} + \varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\xi} - f(U_n^{(-)} + \varepsilon^{n/2}(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + G + e^{-\xi}),$$
$$V_n^{(-)} + \varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H + e^{-\xi}),x,\varepsilon) = M_\varepsilon(V_n^{(-)},U_n^{(-)}) + \varepsilon^{n/2}(Aq(\tau) + O(A)\sqrt{\varepsilon}) +$$
$$+ \varepsilon^{n/2}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \varepsilon^{(n-1)/2}\frac{d^2H}{d\sigma^2} + \varepsilon^{n/2}e^{-\xi} - [f(U_n^{(-)} + \varepsilon^{n/2}(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + G + e^{-\xi}),$$
$$V_n^{(-)} + \varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H + e^{-\xi}),x,\varepsilon) - f(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon)] =$$
$$= O(\varepsilon^{n/2}) + \varepsilon^{n/2}\left(Aq(\tau) + \frac{d^2\gamma}{d\tau^2}\right) - \varepsilon^{(n-1)/2}\frac{d^2H}{d\sigma^2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} - [\ldots]. \tag{140}$$

При записи этих равенств были использованы равенства (99) и (113). Отметим, что первое слагаемое $O(\varepsilon^{n/2})$ в правой части последнего равенства в (140) не зависит от A.

Преобразуем выражение в квадратных скобках, используя полученную оценку

$$G = O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))$$

и априорную оценку $H=O(A)$, которая следует из (119). Имеем

$$[\ldots] = f_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + G + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} + f_v(x,\varepsilon)(\beta+\gamma+e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} -$$
$$- f_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n =$$
$$= f_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2} + f_v(x,\varepsilon)(\beta+\gamma)\varepsilon^{n/2} +$$
$$+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Продолжим преобразование этого выражения, используя формулы (124) и (125):

$$
\begin{gathered}
[\ldots] = (\hat f_u(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(\alpha + \hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2} + \\
+ (\hat f_v(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(\beta + \gamma)\varepsilon^{n/2} + \\
+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n = \\
= \hat f_u(x,\tau)(\alpha + \hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2} + \hat f_v(x,\tau)(\beta+\gamma)\varepsilon^{n/2} + \\
+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n = \\
= A\varepsilon^{n/2} + \{\hat f_u(x,\tau)\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau) + \hat f_v(x,\tau)\}\gamma\varepsilon^{n/2} + \\
+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n.
\end{gathered}
$$

Выражение в фигурных скобках преобразуем, используя формулы (106)–(108):

$$
\begin{gathered}
\{\ldots\} = (\hat f_u(x_*,\tau) + \bar f_u(x) - \bar f_u(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon}))\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau) + \hat f_v(x_*,\tau) + \bar f_v(x) - \bar f_v(x_*) + \\
+ O(\sqrt{\varepsilon}) = \hat f_u(x_*,\tau)\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau) + \hat f_v(x_*,\tau) + (\bar f_u(x) - \bar f_u(x_*))\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau) + \\
+ \bar f_v(x) - \bar f_v(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \hat g_{1v}(x_*,\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}).
\end{gathered}
$$

Воспользовавшись оценкой (117), заключаем, что

$$
\{\hat g_{1v}(x_*,\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau) + O(\sqrt{\varepsilon})\}\gamma\varepsilon^{n/2} = \hat g_{1v}(x_*,\tau)\gamma\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2}.
$$

Возвращаемся теперь к выражению (140) для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$, используя полученные равенства, оценку $|q(\tau)| \leqslant c_4\exp(\kappa\tau)$ (см. (114)) и неравенство $|O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))| \leqslant c_5 AR_\kappa(\sigma,\varepsilon)$:

$$
\begin{gathered}
M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) = O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + \left(Aq(\tau) + \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \hat g_{1v}(x_*,\tau)\gamma\right)\varepsilon^{n/2} + \\
+ \left(\sqrt{\varepsilon}O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon)) - \frac{d^2H}{d\sigma^2}\right)\varepsilon^{(n-1)/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n \leqslant \\
\leqslant O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + \left(c_4A\exp(\kappa\tau) + \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \hat g_{1v}(x_*,\tau)\gamma\right)\varepsilon^{n/2} + \\
+ \left(\sqrt{\varepsilon}c_5AR_\kappa(\sigma,\varepsilon) - \frac{d^2H}{d\sigma^2}\right)\varepsilon^{(n-1)/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n. \qquad (141)
\end{gathered}
$$

Определим функции $\gamma(\tau)$ и $H(\sigma,\varepsilon)$ как решения задач

$$
\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = \hat g_{1v}(x_*,\tau)\gamma - c_4A\exp(\kappa\tau), \quad \tau<0; \quad \gamma(0)=0, \quad \gamma(-\infty)=0
$$

и

$$
\frac{d^2H}{d\sigma^2} = \sqrt{\varepsilon}c_5AR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma<0; \quad H(-\infty,\varepsilon)=0.
$$

Тогда

$$
\gamma(\tau) = -c_4A\Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s \Phi(t)\exp(\kappa t)\,dt\,ds,
$$

где $\Phi(\tau) := dQ_0^{(-)}v(\tau)/d\tau$, и

$$H(\sigma,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}c_5 A \int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{s} R_\kappa(t,\varepsilon)\,dt\,ds,$$

откуда следуют оценки (117) и (119).

В результате из неравенства (141) следует, что

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) \leqslant O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Очевидно, что при достаточно большом A и достаточно малых ε выполнено неравенство для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$ из (104):

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) \leqslant 0, \quad x\in(0,x_*).$$

Таким же образом доказывается, что функции $\underline{U}$, $\underline{V}$, определённые в (116), при достаточно большом A и достаточно малых ε удовлетворяют неравенствам для $L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V})$ и $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ из (103) и (104). Итак, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2° из определения.

Несложно проверяется, что эти функции удовлетворяют также условию 3° из определения, и, значит, две пары функций $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ и $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, определённые формулами (115) и (116), являются для достаточно большого A и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (10), (11).

3.4.6. Завершение доказательства теоремы 2. Из существования верхнего и нижнего решений задачи (10), (11) следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $(u^{(-)}(x,\varepsilon),v^{(-)}(x,\varepsilon))$, удовлетворяющее неравенствам (101), а так как $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от $U_n^{(-)}$, $V_n^{(-)}$ на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2})$, то и решение $(u^{(-)}(x,\varepsilon),v^{(-)}(x,\varepsilon))$ отличается от $(U_n^{(-)},V_n^{(-)})$ на величины того же порядка, т.е.

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x\in[0,x_*]. \tag{142}$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если записать равенства (142) для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $x\in[0,x_*]$. Тогда для $n\geqslant 1$ получим равенства

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x\in[0,x_*]. \tag{143}$$

Таким же способом из равенств (143) получаются аналогичные равенства для $m=\overline{0,n-1}$, и, значит, для каждого $m=\overline{0,n}$ справедливы равенства (100). Теорема 2 доказана.

Следствие 2.1. *Предельным положением при $\varepsilon\to 0$ кривой $l_\varepsilon^{(-)}=\{(u,v,x)\colon u=u^{(-)}(x,\varepsilon),$ $v=v^{(-)}(x,\varepsilon),\ 0\leqslant x\leqslant x_*\}$ (т.е. графика решения задачи (10), (11)) является кривая $l_*^{(-)}$, которая определяется так же, как кривая $l^{(-)}$ в условии A11, с заменой $\bar{v}_0$ на v_* и $\bar{x}_0$ на x_*.*

Стандартным способом получается

Следствие 2.2. *Для производных решения задачи (10), (11) справедливы асимптотические представления*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n-1)/2}),$$

$$\frac{dv^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x\in[0,x_*]. \tag{144}$$

4. Основная теорема. Решения $(u^{(-)},\ v^{(-)})$ и $(u^{(+)},\ v^{(+)})$ первой и второй вспомогательных задач зависят от v_* и x_* как от параметров. Введём обозначения, отражающие эту зависимость: $u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$.

Для любых v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, решения $(u^{(-)},\ v^{(-)})$ и $(u^{(+)},\ v^{(+)})$ непрерывно сшиваются в точке x_*, так как (см. (11) и (13))

$$u^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=u^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=\varphi_2(v_*,x_*),$$

$$v^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=v^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=v_*.$$

Поэтому функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\quad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

будут решением исходной задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*, если в этой точке непрерывно сшиваются также и производные $du^{(-)}/dx$ и $du^{(+)}/dx$, $dv^{(-)}/dx$ и $dv^{(+)}/dx$, т.е. если

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)-\frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=0,\quad \frac{dv^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)-\frac{dv^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=0. \tag{145}$$

Докажем, что существует решение системы уравнений (145) относительно v_*, x_*, сколь угодно близкое к $\bar{v}_0$, $\bar{x}_0$ при достаточно малых ε. С этой целью построим сначала формальные асимптотические ряды для v_* и x_* следующим образом. Подставим в равенства (145) вместо $u^{(-)}$ и $v^{(-)}$ ряды (26) и (27), а вместо $u^{(+)}$ и $v^{(+)}$ – ряды (14) и (15) с учётом того, что производные $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю в точке x_* и, кроме того, $R_0^{(+)}v = R_1^{(+)}v=0$ (см. (18)). После умножения первого из полученных равенств на ε и второго на $\sqrt{\varepsilon}$ придём к равенствам

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(x_*)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*)-$$
$$-\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(x_*)-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dQ_i^{(+)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*)-\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dR_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*)=0, \tag{146}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*)-$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(x_*)-\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*)-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dR_{i+2}^{(+)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*)=0, \tag{147}$$

в записи которых отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\pm)}$- и $R^{(\pm)}$-функции зависят от v_* и x_* как от параметров.

Асимптотические ряды для v_* и x_* будем строить в виде

$$v_*=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}v_i,\quad x_*=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}x_i. \tag{148}$$

Подставим ряды (148) в равенства (146), (147) и разложим затем левые части этих равенств в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, после чего будем приравнивать нулю коэффициенты разложений. Учитывая оценку (86), в нулевом порядке получим следующие уравнения относительно v_0, x_0:

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma}(0,v_0,x_0)=\frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma}(0,v_0,x_0),\quad \frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0,v_0,x_0)=\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0,v_0,x_0).$$

Подставляя в них выражения (19), (20), (56), (78) для производных, приходим к системе уравнений

$$\tilde{I}(v_0,x_0) := \Bigg(2\int\limits_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du\Bigg)^{1/2} - \Bigg(2\int\limits_{\varphi_3(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du\Bigg)^{1/2} = 0,$$

$$\tilde{J}(v_0,x_0) := \Bigg(2\int\limits_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v,x_0)\,dv\Bigg)^{1/2} - \Bigg(2\int\limits_{v_3(x_0)}^{v_0} g_3(v,x_0)\,dv\Bigg)^{1/2} = 0. \qquad (149)$$

Эта система эквивалентна системе (5), (6), которая в силу условия A4 имеет решение $v_0 = \bar{v}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$. В следующих порядках при $i \geqslant 1$ будут получаться СЛАУ вида

$$\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)v_i + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)x_i = a_i, \quad \frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)v_i + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)x_i = b_i, \qquad (150)$$

где числа a_i и b_i рекуррентно выражаются через v_j и x_j с номерами $j < i$, которые на i-м шаге уже известны. Определителем этой системы является якобиан $\dfrac{D(\tilde{I},\tilde{J})}{D(v_0,x_0)}\Bigg|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}}$, равный произведению положительного множителя на якобиан $\dfrac{D(I,J)}{D(v_0,x_0)}\Bigg|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}}$, который отличен от нуля (см. (8)). Поэтому для каждого $i \geqslant 1$ СЛАУ (150) имеет единственное решение $v_i = \bar{v}_i$, $x_i = \bar{x}_i$. Таким образом, построены ряды (148), в которых $v_i = \bar{v}_i$, $x_i = \bar{x}_i$, и эти ряды удовлетворяют формально уравнениям (146), (147).

Положим теперь

$$v_* = Y_m(\delta) := \sum_{i=0}^{4m+3} \varepsilon^{i/4}\bar{v}_i + \varepsilon^{m+3/4}\delta, \quad x_* = X_m(\rho) := \sum_{i=0}^{4m+3} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i + \varepsilon^{m+3/4}\rho, \qquad (151)$$

где δ и ρ – произвольные числа, которые могут зависеть от ε, но остаются ограниченными при $\varepsilon \to 0$, и рассмотрим решения $(u^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)), v^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)))$ и $(u^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)), v^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)))$ первой и второй вспомогательных задач. Для их производных по x справедливы представления (25) и (144). Возьмём представление (25) при $n = m$, представление (144) при $n = 2m+1$, положим $x = X_m(\rho)$ и, учитывая, что в точке $x = X_m(\rho)$ производные всех $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю, подставим полученные выражения для производных в уравнения (145) и разложим затем левые части этих уравнений по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Так как $(\bar{v}_0,\bar{x}_0)$ и $(\bar{v}_i,\bar{x}_i)$ удовлетворяют уравнениям (149) и (150), то левые части уравнений (145) примут вид

$$\varepsilon\bigg(\frac{du^{(-)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)) - \frac{du^{(+)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))\bigg) =$$

$$= \tilde{I}(\bar{v}_0,\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{4m+3} \varepsilon^{i/4}\bigg(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{v}_i + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{x}_i - a_i\bigg) +$$

$$+ \varepsilon^{m+3/4}\bigg(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho\bigg) + O(\varepsilon^{m+1}) =$$

$$= \varepsilon^{m+3/4}\bigg(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho + O(\varepsilon^{1/4})\bigg), \qquad (152)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\biggl(\frac{dv^{(-)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))-\frac{dv^{(+)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))\biggr)=$$

$$=\tilde{J}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)+\sum_{i=1}^{4m+3}\varepsilon^{i/4}\biggl(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{v}_i+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{x}_i-b_i\biggr)+$$

$$+\varepsilon^{m+3/4}\biggl(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho\biggr)+O(\varepsilon^{m+1})=$$

$$=\varepsilon^{m+3/4}\biggl(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho+O(\varepsilon^{1/4})\biggr).\qquad(153)$$

Слагаемые $O(\varepsilon^{1/4})$ в правых частях равенств (152) и (153) зависят от δ и ρ, но являются величинами указанного порядка малости при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно δ и ρ из фиксированной окрестности точки $(\delta=0,\rho=0)$, а так как $\dfrac{D(\tilde{I},\tilde{J})}{D(v_0,x_0)}\Big|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}}\neq 0$, то при всех достаточно малых ε существуют такие $\delta=\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$ и $\rho=\bar{\rho}=O(\varepsilon^{1/4})$, для которых правые части в (152) и (153) равны нулю. Следовательно, $v_*=Y_m(\bar{\delta})$ и $x_*=X_m(\bar{\rho})$ являются решением системы уравнений (145), а пара функций

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

– решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $X_m(\bar{\rho})$. Заметим, что $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ сколь угодно близки к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ для достаточно малых ε, что и требовалось при разбиении исходной задачи на две вспомогательные.

Обозначим через $U_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ и $V_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ функции, определённые формулами (22), (23) и (96), (97) при $v_*=V,\ x_*=X$. Тогда для компонент решения $(u(x,\varepsilon),v(x,\varepsilon))$ исходной задачи (1), (2) в силу представлений (24) и (100) при $m\geqslant 1$ справедливы асимптотические равенства

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_{2m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^m), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ U_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^m), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon)=\begin{cases}V_{2m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^m), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ V_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^m), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\qquad(154)$$

Формулы (154) имеют тот недостаток, что величины $\bar{\delta}$ и $\bar{\rho}$, от которых зависят $U_{2m-1}^{(-)}$, $V_{2m-1}^{(-)}$ и $U_{m-1}^{(+)}$, $V_{m-1}^{(+)}$, точно не известны, известен только их порядок ($\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$, $\bar{\rho}=O(\varepsilon^{1/4})$), и, следовательно, $Y_m(\bar{\delta})$, $X_m(\bar{\rho})$, $\tau=(x-X_m(\bar{\rho}))/\sqrt{\varepsilon}$ и $\sigma=(x-X_m(\bar{\rho}))/\varepsilon$ также не определены точно. Заменим в формулах (154) $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$, т.е. в выражениях (151) для $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ отбросим последние слагаемые $\varepsilon^{m+3/4}\bar{\delta}=O(\varepsilon^{m+1})$ и $\varepsilon^{m+3/4}\bar{\rho}=O(\varepsilon^{m+1})$. Тогда аргумент τ изменится на величину порядка $O(\varepsilon^{m+1/2})$, а аргумент σ – на величину порядка $O(\varepsilon^m)$, и, значит, $Q^{(\pm)}$-функции изменятся на величины порядка $O(\varepsilon^{m+1/2})$, а $R^{(\pm)}$-функции – на величины порядка $O(\varepsilon^m)$. Поэтому при замене $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$ формулы (154) не изменятся.

Заменив в этих формулах m на $n+1$, сформулируем полученный основной результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A1–A11. Тогда для любого целого* $n \geqslant 0$ *при всех достаточно малых* ε *существует решение* $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ *задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0,1], \tag{155}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{2n+1}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0 \leqslant x \leqslant X_{n+1}(0), \\ U^{(+)}_{n}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0) \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V^{(-)}_{2n+1}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0 \leqslant x \leqslant X_{n+1}(0), \\ V^{(+)}_{n}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0) \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$Y_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{v}_i$, $X_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i$, *а функции* $U^{(-)}_{2n+1}$, $V^{(-)}_{2n+1}$ *и* $U^{(+)}_n$, $V^{(+)}_n$ *определены формулами (96), (97) и (22), (23), в которых* $x_* = X_{n+1}(0)$.

Из представлений (155) вытекают утверждения.

Следствие 3.1. *Имеют место предельные равенства (9).*

Следствие 3.2. *Предельным положением при* $\varepsilon \to 0$ *кривой* $l_\varepsilon = \{(u,v,x)\colon u = u(x,\varepsilon),\ v = v(x,\varepsilon),\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *является кривая* $l = l^{(-)} \bigcup l^{(+)}$, *где кривые* $l^{(+)}$ *и* $l^{(-)}$ *определены в условиях A6 и A11.*

Следствие 3.3. *При каждом* $m = \overline{0, n-1}$ *для решения* $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ *справедливы равенства вида (155), в которых* n *заменено на* m.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенная краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 5–22.
4. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 1. С. 68–80.
5. *Бутузов В.Ф.* Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1593–1605.
6. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. математическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89.
7. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 05.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 466–472

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52+517.977

УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИАГОНАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

 А. К. Деменчук

Рассматривается линейная система управления с почти периодической матрицей коэффициентов, имеющей диагональное усреднение, и управлением в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Матрица при управлении постоянная квадратная, имеет нулевые строки, а её ненулевые строки линейно независимы. Коэффициент обратной связи предполагается почти периодическим и таким, что его частотный модуль содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых разрешима задача управления асинхронным спектром этой системы, состоящая в нахождении такого управления из допустимого множества, чтобы у замкнутой этим управлением системы появились почти периодические решения с наперёд заданными частотами, причём пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально.

DOI: 10.31857/S0374064121040026

Введение. Изучению различных вопросов теории управления для обыкновенных дифференциальных периодических систем посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1–3] и др.). Для почти периодических систем управления подобные исследования существенно усложняются. В этом направлении можно отметить работы [4–8], характерной особенностью которых является рассмотрение так называемого *регулярного случая,* т.е. когда априори предполагается, что множество частот любого почти периодического решения системы является подмножеством множества частот её правой части.

Вместе с тем, как показали в 1955 г. Я. Курцвейль и О. Вейвода [9], нормальная система первого порядка обыкновенных дифференциальных почти периодических уравнений может допускать такие решения, для которых пересечение их частотных модулей и частотных модулей правой части системы является тривиальным. Впоследствии такого рода решения были названы *сильно нерегулярными,* их частотный спектр – *асинхронным,* а описываемые ими колебания – *асинхронными.* В случае периодической системы нерегулярность означает несоизмеримость частот системы и её решения.

Отметим, что ещё в середине 30-х годов прошлого века в исследованиях параметрического воздействия на двухконтурные системы, проводившихся под общим руководством Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси, в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была продемонстрирована возможность возбуждения колебаний на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров [10]. Асинхронные колебания, начиная с 70-х годов прошлого века, реализовывались в ряде технических устройств. В частности, пример устойчивой колебательной системы, в которой действующая на пролетающий в конденсаторном поле заряд гармоническая сила имеет в общем случае частоту, несоизмеримую с частотой колебаний самого заряда, приведён в работе [11]. В обзоре [12] показано, что некоторые неавтономные системы, а именно, системы с высокочастотным источником энергии, могут вести себя как автоколебательные, важным свойством которых является независимость частотного спектра колебаний от спектра источника. Осуществимость асинхронных колебаний при переходе к макроскопическим массам установлена в работе [13] на примере электромеханической системы.

Задача синтеза обыкновенных дифференциальных периодических систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, поставлена в работе [14] в виде задачи управления асинхронным спектром. Серия условий её разрешимости приведена в монографии [15, гл. III].

Задача управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем сформулирована в работе [16], в которой дан критерий её разрешимости в случае, когда среднее значение матрицы коэффициентов нулевое.

В настоящей статье исследуются вопросы разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем, у которых усреднение матрицы коэффициентов является диагональным, а матрица при управлении имеет нулевые строки.

1. Предварительные сведения и обозначения. Пусть $P = (p_{ij}),\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m},$ – некоторая матрица и $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n,\ \ 1 \leqslant l_1 < \ldots < l_q \leqslant m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Подматрицу матрицы $P,$ стоящую на пересечении строк с номерами $k_1, \ldots, k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ldots, l_q,$ обозначим через $P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s}$, т.е. эта $s \times q$-матрица имеет вид

$$P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s} = \begin{pmatrix} p_{k_1 l_1} & \ldots & p_{k_1 l_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k_s l_1} & \ldots & p_{k_s l_q} \end{pmatrix}.$$

Приведём необходимые для дальнейшего изложения понятия и факты из теории почти периодических (по Бору) функций [17, гл. 1, 2]. Пусть $F(t)$ – непрерывная на всей числовой оси почти периодическая вещественнозначная матрица (вектор). Через $\widehat{F}$ будем обозначать её *среднее значение*

$$\widehat{F} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t)\,dt,$$

а через $\widetilde{F}$ – *осциллирующую часть:* $\widetilde{F}(t) = F(t) - \widehat{F}.$ Вещественное число λ называется *показателем Фурье (частотой)* матрицы $F(t),$ если хотя бы один из пределов

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t)\cos(\lambda t)\,dt, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

отличен от нуля. Как известно, множество таких чисел λ не более чем счётно. Через $\operatorname{Mod}(F)$ обозначим *модуль частот* (*частотный модуль*) матрицы $F(t),$ т.е. наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую все показатели Фурье этой матрицы.

Под *частотным модулем* нормальной системы первого порядка будем понимать частотный модуль её правой части. Из результатов работы [9] следует, что линейная дифференциальная система $\dot z = F(t)z$ может иметь почти периодическое решение $z(t)$ такое, что пересечение частотных модулей решения $\operatorname{Mod}(z)$ и системы $\operatorname{Mod}(F)$ тривиально:

$$\operatorname{Mod}(z) \bigcap \operatorname{Mod}(F) = \{0\}.$$

Такого рода решения называются *сильно нерегулярными* [18]. Из результатов работы [18] следует, что вектор-функция $z(t)$ является также решением линейной функциональной системы.

Столбцовым рангом матрицы $F(t)$ называется наибольшее число её линейно независимых столбцов, т.е. наибольшее число её столбцов таких, что никакая нетривиальная линейная их комбинация, коэффициенты которой – вещественные числа, не равна тождественно нулю. Столбцовый ранг матрицы $F(t)$ обозначим $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}}F.$ Аналогично – с заменой столбцов строками – определяется строчный ранг матрицы $F(t),$ который обозначим $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}}F.$ Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать между собой[*)]. Будем говорить, что $F(t)$ – матрица *неполного столбцового ранга*, если её столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Справедлива вытекающая из [18]

[*)] Простейший пример доставляет матрица $F(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \sin t \\ \cos t & \cos t \end{pmatrix};$ для неё $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}}F = 1,$ а $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}}F = 2.$

Лемма. *Линейная функциональная система*

$$\widetilde{F}(t)z = 0$$

имеет нетривиальное сильно нерегулярное почти периодическое решение $z(t)$ *в том и только в том случае, когда* $\widetilde{F}(t)$ *– матрица неполного столбцового ранга.*

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$ – вход, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $n \times n$-матрица коэффициентов, матрица B при управлении является постоянной квадратной и имеет порядок n. Будем считать, что управление задаётся в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $n \times n$-матрицей $U(t)$ (*коэффициентом обратной связи*), модуль частот которой содержится в модуле частот матрицы коэффициентов, т.е. $\operatorname{Mod}(U) \subset \subset \operatorname{Mod}(A)$.

Задачу выбора такого коэффициента обратной связи $U(t)$, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L, будем называть *задачей управления асинхронным спектром с целевым множеством* L. Для системы (1) исследуем вопросы разрешимости поставленной задачи.

Заметим, что если матрица при управлении невырожденная, то решение такой задачи не вызывает затруднений. Поэтому далее считаем, что матрица B вырожденная, её строки с номерами $k_1, \ldots, k_d$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_d \leqslant n$, нулевые, а ненулевые её строки линейно независимы, т.е.

$$\operatorname{rank} B = r < n, \quad B^{1\ldots n}_{k_1\ldots k_d} = 0 \quad (d = n - r). \tag{4}$$

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов является диагональным

$$\widehat{A} = \operatorname{diag}[\widehat{a}_{11}, \ldots, \widehat{a}_{nn}]. \tag{5}$$

3. Основной результат. Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \leqslant k_{d+1} < \ldots < k_n \leqslant n$, – номера ненулевых строк матрицы B при управлении. С учётом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{21}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t), \quad A_{22}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t),$$

$$U_{11}(t) = U^{k_1\ldots k_d}_{1\ldots n}(t), \quad U_{12}(t) = U^{k_{d+1}\ldots k_n}_{1\ldots n}(t), \quad x' = \operatorname{col}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}), \quad x'' = \operatorname{col}(x_{k_{d+1}}, \ldots, x_{k_n}).$$

Если у некоторой матрицы M произвольным образом поменять местами её строки (столбцы), то через $\operatorname{ord}_{\text{col}} M$ (через $\operatorname{ord}_{\text{row}} M$) обозначим результат обратной перестановки строк (столбцов) в порядке возрастания их номеров. Тогда, в частности, будем иметь

$$\operatorname{ord}_{\text{row}}(\operatorname{col}(x', x'')) = x, \quad \operatorname{ord}_{\text{col}}(U_{11}(t)\ U_{12}(t)) = U(t).$$

Пусть $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots,$ – множество действительных чисел таких, что пересечение образованного ими модуля и частотного модуля матрицы коэффициентов $A(t)$ тривиально. Справедлива

Теорема. *Для системы (1), (4), (5) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством* L *разрешима в том и только в том случае, когда матрица* $A_{12}(t)$ *имеет неполный столбцовый ранг*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{col}} A_{12} = r_1 < r \tag{6}$$

и мощность $|L|$ *целевого множества удовлетворяет оценке**)

$$|L| \leqslant [(r - r_1)/2]. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть поставленная задача разрешима. Это означает, что существует коэффициент обратной связи $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subset \mathrm{Mod}\,(A)$, такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$ с множеством частот L.

Из компонент вектора $x(t)$ образуем векторы $x'(t)$ и $x''(t)$. Из [19] следует, что вектор $x'(t)$ будет решением линейной однородной системы с постоянной матрицей коэффициентов, которая в силу условий (4), (5) является диагональной. Поэтому этот вектор не может иметь нетривиальных частот. Следовательно, множество L определяется только частотами вектор-функции $x''(t)$, а значит, она должна быть нетривиальной.

Согласно [19] вектор $x''(t)$ удовлетворяет, с одной стороны, линейной стационарной дифференциальной системе, а с другой, с учётом условия (4), – линейной функциональной системе

$$A_{12}(t)x'' = 0. \tag{8}$$

Так как вектор-функция $x(t)$ – сильно нерегулярное решение системы (3), то выполняется условие $\mathrm{Mod}\,(x) \bigcap \mathrm{Mod}\,(A) = \{0\}$. Отсюда, поскольку имеют место включения $\mathrm{Mod}\,(x'') \subset$ $\subset \mathrm{Mod}\,(x)$ и $\mathrm{Mod}\,(A_{12}) \subset \mathrm{Mod}\,(A)$, вытекает равенство $\mathrm{Mod}\,(x'') \bigcap \mathrm{Mod}\,(A_{12}) = \{0\}$, которое означает, что вектор-функция $x''(t)$ является сильно нерегулярным решением функциональной системы (8). Тогда из леммы следует, что матрица коэффициентов этой системы имеет неполный столбцовый ранг, т.е. справедливо неравенство (6).

В силу того, что столбцовый ранг матрицы $A_{12}(t)$ равен r_1, между компонентами решения $x''(t)$ системы (8) имеется следующая зависимость: некоторые его r_1 компонент линейно выражаются через остальные $r - r_1$ компонент (назовём их *базисными*). Поэтому частоты вектор-функции $x''(t)$ определяются только частотами её базисных компонент. Как отмечено выше, вектор-функция $x''(t)$, а значит, и $r - r_1$ её базисных компонент являются решением линейной стационарной системы. Следовательно, число частот базисных компонент не превосходит величины $[(r - r_1)/2]$. Поскольку других частот у решения $x(t)$ системы (3) нет, то справедлива оценка (7).

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Требуемый для решения поставленной задачи матричный коэффициент обратной связи будем искать в так называемом *каноническом* виде $U(t) = \widehat{U} + \widetilde{U}(t)$. Предварительно рассмотрим систему

$$\dot{x} = (\widehat{A} + B\widehat{U})x, \quad (\widetilde{A}(t) + B\widetilde{U}(t))x = 0. \tag{9}$$

Применительно к матрице B при управлении для краткости положим

$$B_{11} = B^{1\ldots n}_{k_1\ldots k_d}, \quad B_{21} = B^{1\ldots n}_{k_{d+1}\ldots k_n}.$$

Из условия (4) вытекает, что $d \times n$-матрица B_{11} является нулевой, а $r \times n$-матрица B_{21}, составленная из ненулевых строк матрицы B с номерами $1 \leqslant k_{d+1} < \ldots < k_n \leqslant n$, имеет полный строчный ранг

$$\mathrm{rank}\, B_{21} = r. \tag{10}$$

Поскольку, согласно предположению (5), среднее значение матрицы $A(t)$ является диагональным, то матрицы $\widehat{A}_{11}$ и $\widehat{A}_{22}$ также диагональные, а матрицы $\widehat{A}_{12}$ и $\widehat{A}_{21}$ нулевые, при этом $\widetilde{A}_{12}(t) = A_{12}(t)$, $\widetilde{A}_{21} = A_{21}(t)$.

*) Здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа.

Значит, с учётом условий (4), (5) и принятых обозначений систему (9) можно записать в виде

$$\dot{x}' = \widehat{A}_{11}x', \quad \dot{x}'' = (\widehat{A}_{21} + B_{21}\widehat{U}_{11})x' + (\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})x',$$
$$\widetilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad (A_{21}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{11}(t))x' + (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))x'' = 0. \qquad (11)$$

Так как матрица $\widehat{A}_{11}$ диагональная, то первое уравнение системы (11) не имеет почти периодических решений $x'(t)$ с ненулевыми частотами, отличных от тривиального. Поэтому $x'(t) \equiv 0$ и система (11) примет вид

$$A_{12}(t)x'' = 0, \quad \dot{x}'' = (\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})x'', \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))x'' = 0, \quad x'(t) \equiv 0. \qquad (12)$$

Как видим, блоки $\widehat{U}_{11}$ и $\widetilde{U}_{11}(t)$ могут быть произвольными. Поскольку столбцовый ранг матрицы $A_{12}(t)$ равен $r_1 < r$, то найдётся постоянная неособенная $r \times r$-матрица Q такая, что у матрицы $A_{12}(t)Q$ первые $d_1 = r - r_1$ столбцов нулевые, а остальные r_1 столбцов линейно независимые между собой (один из алгоритмов построения матрицы Q приведён в монографии [15, с. 43]). Тогда замена переменных

$$x'' = Qy \qquad (13)$$

приводит систему (12) к системе

$$A_{12}(t)Qy = 0, \quad \dot{y} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})Qy, \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Qy = 0, \quad x'(t) \equiv 0. \qquad (14)$$

Ввиду того, что последние r_1 столбцов матрицы $A_{12}(t)Q$ линейно независимы, из леммы следует, что соответствующие компоненты искомого сильно нерегулярного почти периодического решения $y(t)$ первого уравнения системы (14) тривиальны, т.е. $y(t) = \operatorname{col}(y'(t), y''(t))$, $y'(t) = \operatorname{col}(y_1(t), \ldots, y_{d_1}(t))$, $y''(t) \equiv \operatorname{col}(0, \ldots, 0)$. Поэтому система (14) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})Q\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Q\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$y''(t) \equiv 0, \quad x'(t) \equiv 0. \qquad (15)$$

Принимая во внимание условие (7), возьмём постоянную блочно-треугольную $r \times r$-матрицу

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix},$$

у которой $d_1 \times d_1$- блок H_{11} имеет чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_s, \quad \lambda_j \in L, \quad j = \overline{1, s}, \quad s \leqslant [d_1/2],$$

а остальные блоки H_{12} и H_{22} произвольные.

Пусть $E_{r,r}$ – квадратная единичная матрица порядка r. Так как ранг $r \times n$-матрицы B_{21} равен r и $r < n$, то ранг расширенной $r \times (n + r)$-матрицы, составленной из матриц B_{21} и $E_{r,r}$, также равен r. Следовательно, алгебраическая неоднородная система

$$B_{21}V = E_{r,r} \qquad (16)$$

с неизвестной $r \times r$-матрицей V имеет решение $V = V_0$. Положим

$$\widehat{U}_{12} = V_0(QHQ^{-1} - \widehat{A}_{22}). \qquad (17)$$

Подставляя определённое равенством (17) значение $\widehat{U}_{12}$ в первое уравнение системы (15), получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}(W_0(QHQ^{-1} - \widehat{A}_{22})))Q\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда с учётом строения матрицы H находим, что

$$\dot{y}' = H_{11}y'.$$

Полученная система имеет $2s$-параметрическое семейство почти периодических решений

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{s}(A_j\cos(\lambda_j t) + B_j\sin(\lambda_j t)), \tag{18}$$

где постоянные векторы A_j, B_j, $j=\overline{1,s}$, зависят от $2s$ произвольных вещественных постоянных. Итак, при выполнении условий (16), (17) первое уравнение системы (15) имеет решение (18).

Далее возьмём почти периодическую блочную матрицу $G(t) = \begin{pmatrix}G_{11}(t) & G_{12}(t)\end{pmatrix}$ такую, что её $r\times d_1$-блок G_{11} нулевой, а $r\times r_1$-блок G_{12} – произвольная почти периодическая матрица с нулевым средним значением и $\operatorname{Mod}(G_{12})\subset\operatorname{Mod}(A)$. В силу условия (4) матричное уравнение

$$B_{21}W = G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)$$

относительно неизвестной $r\times r$-матрицы W имеет решение

$$W(t) = V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)), \quad \operatorname{Mod}(W)\subset\operatorname{Mod}(G)\subset\operatorname{Mod}(A).$$

Положим

$$\widetilde{U}_{12}(t) = W(t) = V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)). \tag{19}$$

Тогда выполняется тождество

$$(\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Q\begin{pmatrix}y'(t)\\0\end{pmatrix} = (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)))Q\begin{pmatrix}y'(t)\\0\end{pmatrix} \equiv 0.$$

Значит, при выполнении условия (16), (19) вектор $y'(t)$ будет удовлетворять и второму уравнению системы (15). В результате получаем, что система (15) имеет решение

$$y'(t), \quad y''(t)\equiv 0, \quad x'(t)\equiv 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным с учётом преобразования (13), находим решение системы (11):

$$x'(t)\equiv 0, \quad x''(t) = Q\operatorname{col}(y'(t), y''(t)) = Q\operatorname{col}(y'(t), 0). \tag{20}$$

Тогда вектор-функция

$$x(t) = \operatorname{ord}_{\mathrm{row}}(\operatorname{col}(x'(t), x''(t))), \tag{21}$$

компоненты которой определяются равенствами (18), (20), удовлетворяет системе (9), при этом в силу свойства чисел λ_j, $j=\overline{1,s}$, из множества L выполняется условие

$$\operatorname{Mod}(x)\bigcap\operatorname{Mod}(A) = \{0\}.$$

Следовательно, согласно [19], вектор-функция $x(t)$ является сильно нерегулярным почти периодическим решением с множеством частот L системы (3).

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L. Требуемый для этого коэффициент обратной связи управления (2) имеет вид

$$U(t) = \operatorname{ord}_{\mathrm{col}}(U_{11}(t)\ U_{12}(t)),$$

где блок $U_{11}(t)$ – произвольная почти периодическая $d_1\times r$-матрица, модуль частот которой содержится в модуле частот матрицы коэффициентов, а стационарная и осциллирующая части блока $U_{12}(t)$ задаются равенствами (17) и (19) соответственно. Сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$ замкнутой управлением (2) системы (3) определяется равенством (21). Достаточность, а вместе с ней и теорема доказаны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф20Р-005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
3. *Тонков Е.Л.* Линейная задача оптимального управления периодическими решениями // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 1007–1011.
4. *Иванов А.Г.* Оптимальное управление почти периодическими движениями // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 837–846.
5. *Гайшун И.В.* Введение в теорию нестационарных линейных систем. Минск, 1999.
6. *Иванов А.Г.* Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Изв. Ин-та математики и информатики. 2002. Вып. 1. С. 3–100.
7. *Попова С.Н.* Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2008. Вып. 2. С. 117–118.
8. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012.
9. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.
10. *Папалекси Н.Д.* Об одном случае параметрически связанных систем // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1939. Т. 1. С. 373–379.
11. *Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б., Козаков М.И.* Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1065–1066.
12. *Ланда П.С., Дубошинский Я.Б.* Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физ. наук. 1989. Т. 158. Вып. 4. С. 729–742.
13. *Пеннер Д.И., Дубошинский Д.Б., Козаков М.И., Вермель А.С., Галкин Ю.В.* Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.
14. *Деменчук А.К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.
15. *Деменчук А.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Saarbrücken, 2012.
16. *Деменчук А.К.* Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним матрицы коэффициентов // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 176–181.
17. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
18. *Demenchuk A.K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. V. 126. № 1. P. 221–228.
19. *Деменчук А.К.* О почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных систем // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1987. № 4. С. 16–22.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 12.09.2020 г.
После доработки 12.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 473–487

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОПИСАНИЕ СТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. **А. В. Липницкий**

Рассматривается класс линейных параметрических дифференциальных систем $\dot{x} = \mu A(t)x$, заданных на полуоси $t \geqslant 0$, где $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр, $x \in \mathbb{R}^n$, а матрица $A(\cdot)\colon [0,+\infty) \to \to \mathbb{R}^{n\times n}$ кусочно-непрерывна и ограничена. Доказано, что при каждом $n \geqslant 2$ некоторое множество тогда и только тогда представляет собой множество неправильности одной из таких систем (т.е. множество тех μ, при которых эта система неправильна по Ляпунову), когда оно является $G_{\delta\sigma}$-множеством вещественной прямой, не содержащим нуль. Необходимость указанных условий установлена ранее. Сформулированное утверждение решает задачу, поставленную Н.А. Изобовым в начале 90-х годов.

DOI: 10.31857/S0374064121040038

Рассмотрим зависящую от параметра $\mu \in \mathbb{R}$ линейную систему

$$\dot{x} = \mu C(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1_μ}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов. Множеством неправильности системы

$$\dot{x} = C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2_C}$$

называется [1] множество тех значений $\mu \in \mathbb{R}$, при которых соответствующая система (1_μ) неправильна по Ляпунову [2, с. 38].

Первый пример правильной системы (2), для которой множество неправильности не пусто, построен Н.А. Изобовым (см. [1]). Позднее были построены (см. библиографию в [3]) примеры систем (2_C) с различными метрическими и топологическими свойствами их множеств неправильности. В частности, как установлено в [4, 5], мера Лебега такого множества может принимать любое наперёд заданное значение. В работе [4] установлено также, что множество неправильности необходимо должно быть $G_{\delta\sigma}$-множеством вещественной прямой, не содержащим нуля.

В связи с этими результатами в работе [3] была поставлена задача о полном описании класса множеств неправильности линейных систем (2_C). В направлении решения этой задачи в работах [6] и [7] доказано, что множеством неправильности может быть соответственно любое открытое и любое замкнутое множества вещественной прямой, не содержащие нуля. Вместе с тем задача полного описания множеств неправильности оставалась нерешённой. Она решена в настоящей работе. Оказывается, что приведённые выше необходимые условия [4], которым должны удовлетворять множества неправильности: быть $G_{\delta\sigma}$-множеством и не содержать нуля, являются и достаточными. Для доказательства этого утверждения нам понадобится ряд лемм, из которых оно будет следовать непосредственно.

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и положим

$$J := U(2^{-1}\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всякого $y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ и 2×2-матрицы Z используем обозначения $\|y\| \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ для евклидовой нормы и $\|Z\| \equiv \max\limits_{\|y\|=1} \|Zy\|$ для спектральной нормы.

Для любой строго возрастающей последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и чисел $5 \leqslant i_k \in \mathbb{N}$ определим последовательность $(T_k)_{k=1}^{\infty}$, полагая

$$T_1 := 2, \quad T_{k+1} := m_k(i_k+2)T_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим также

$$\theta_k := m_k i_k T_k, \quad \tau_k := \theta_k + m_k T_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для любой последовательности $(b_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и числа $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, определим матрицу $A(\cdot) = A(\,\cdot\,, d, (m_k, i_k, b_k)_{k=1}^{\infty})$, для всех $l = \overline{1, T_k}$, $k \in \mathbb{N}$, полагая

$$A(t) \equiv b_k J, \quad t \in (\tau_k - m_k l, \tau_k - m_k l + 1],$$

$$A(t) \equiv -b_k J, \quad t \in [\tau_k + m_k l - 1, \tau_k + m_k l).$$

Для всех остальных $t \in \mathbb{R}_+$ положим $A(t) \equiv d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $X_A(t,s)$ матрицу Коши системы (2_A) и зададим число $\delta(d)$ равенствами $\delta(d) := 1$, если $d > 0$, и $\delta(d) := 2$, если $d < 0$. Обозначим также

$$L_d(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_{3-\delta(d)}/x_{\delta(d)}| \leqslant \alpha\}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} L_d(\alpha) = L_d(m^{-2\operatorname{sgn} d}\alpha).$$

Лемма 1. *Матрица $X_A(T_{k+1}, \theta_k)$ является самосопряжённой.*

Доказательство. Для любых $s(t) := 2\tau_k - t$ и $t \in [\tau_k, T_{k+1}]$ выполняется равенство $A(s(t)) = A^{\mathrm{т}}(t)$, следствием которого являются соотношения

$$\frac{d}{dt} X_A(s(t), \tau_k) = -A(s(t)) X_A(s(t), \tau_k) = -A^{\mathrm{т}}(t) X_A(s(t), \tau_k).$$

Таким образом, столбцы матрицы $X_A(s(t), \tau_k)$ – решения сопряжённой к (2_A) системы $\dot{x} = -A^{\mathrm{т}}(t)x$, из чего вытекает равенство

$$X_A(s(t), \tau_k) = X_{-A^{\mathrm{т}}}(t, \tau_k)C, \tag{3}$$

матрица C в котором не зависит от t.

Согласно [8, с. 119] справедливо соотношение

$$X_{-A^{\mathrm{т}}}(t, \tau_k) = [X_A^{-1}(t, \tau_k)]^{\mathrm{т}} = X_A^{\mathrm{т}}(\tau_k, t). \tag{4}$$

Полагая в (3) $t := \tau_k$, получаем равенство $C = E$, учитывая которое и полагая в (3), (4) $t := T_{k+1}$, будем иметь $X_A(\tau_k, \theta_k) = X_A^{\mathrm{т}}(T_{k+1}, \tau_k)$. Отсюда следует соотношение

$$X_A(T_{k+1}, \theta_k) = X_A(T_{k+1}, \tau_k) X_A^{\mathrm{т}}(T_{k+1}, \tau_k),$$

из которого вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Для каждого $d \neq 0$ определим число $k_0(d) \in \mathbb{N}$ равенством $k_0(d) := 2 + [|d|^{-1}]$ (здесь и в дальнейшем $[\cdot]$ обозначает целую часть числа).

Лемма 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0(d) - 1$, имеет место включение*

$$X(T_{k+1}, T_{k_0(d)}) e_{\delta(d)} \subset L_d(2e^{4m_k T_k |d|}). \tag{5_k}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k \geqslant k_0(d)$. Поскольку в силу леммы 1 матрица $X_A(T_{k+1}, \theta_k)$ является самосопряжённой, то она ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду [9, с. 78], а её собственные значения вещественны и положительны, т.е. вследствие вытекающего из соотношения $\operatorname{Tr} A(t) \equiv 0$ равенства $\det X_A(T_{k+1}, \theta_k) = 1$ найдутся $f_1, h \in \mathbb{R}$, $h \geqslant 1$, такие, что

$$X_A(T_{k+1}, \theta_k) = U(f_1)\operatorname{diag}[h^2, h^{-2}]U(-f_1). \tag{6}$$

В силу верной для любого $l \in \mathbb{N}$ оценки $T_{l+1} \geqslant 2T_l$ и того, что $T_1 = 2$, имеет место неравенство $T_n \geqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда для любого $n \geqslant k-1$ в силу неравенств $n \geqslant k_0(d) - 1 \geqslant |d|^{-1}$ получаем оценки

$$e^{-T_n|d|} \leqslant e^{-1} < 2^{-1}. \tag{7_n}$$

Тогда, так как $i_j \geqslant 5$ при всех значениях j, то

$$2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|} \leqslant 2e^{-T_{k-1}|d|}e^{T_k|d|} \overset{(7_{k-1})}{<} e^{T_k|d|} \quad \text{и} \quad 2\theta_k - 3T_k \geqslant 7m_kT_k,$$

откуда вытекают включение $L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \subset L_d(e^{T_k|d|})$ и, с учётом последнего, соотношение

$$\begin{gathered} X(\theta_k, T_k)L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}}) \subset \operatorname{diag}[e^{d(\theta_k - T_k)}, e^{-d(\theta_k - T_k)}]L_d(e^{T_k|d|}) = \\ = L_d(e^{(-2\theta_k + 3T_k)|d|}) \subset L_d(e^{-7m_kT_k|d|}). \end{gathered} \tag{8}$$

С другой стороны, из представления (6) для любого $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = 1$, и $g = g_x \in \mathbb{R}$, $z_x \in \mathbb{R}^2$, определяемых равенствами

$$(\cos g, \sin g)^{\mathrm{т}} := U(-f_1)x, \quad z_x := X_A(T_{k+1}, \theta_k)x,$$

следуют равенства (ниже через $(u \vee v) \overset{\mathrm{def}}{=} \det[u, v]$ обозначено псевдоскалярное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{gathered} (x \vee z_x) = (U(-f_1)x \vee U(-f_1)z) \overset{(6)}{=} (U(-f_1)x \vee \operatorname{diag}[h^2, 1/h^2]U(-f_1)x) = \\ = ((\cos g, \sin g)^{\mathrm{т}} \vee (h^2\cos g, h^{-2}\sin g)^{\mathrm{т}}) = -(h^2 - h^{-2})\cos g \sin g, \end{gathered} \tag{9}$$

откуда имеем

$$|\sin\angle(x, z_x)| \overset{(6),(9)}{=} (h^2 - h^{-2})|\cos g \sin g| \|(h^2\cos g, h^{-2}\sin g)^{\mathrm{т}}\|^{-1} \leqslant 1 - h^{-4}. \tag{10}$$

Для любых $j \in \mathbb{N}$, $t, s \in [j-1, j]$ справедливо одно из двух равенств: либо $X_A(t,s) = \operatorname{diag}[e^{d(t-s)}, e^{d(s-t)}]$, либо найдётся $\gamma_j \in \mathbb{R}$ такое, что $X_A(t,s) = U(\gamma_j(t-s))$. Поэтому

$$\|X_A(t,s)\| \leqslant \max\{\|\operatorname{diag}[e^{d(t-s)}, e^{d(s-t)}]\|, \|U(\gamma_j(t-s))\|\} = e^{|d||t-s|}.$$

Отсюда для любых $r, s \in \mathbb{R}$, $[r] > s \geqslant 0$, получаем оценки (произведение по пустому множеству считаем равным единице)

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant \|X_A(r,[r])\| \Bigg(\prod_{j=1+[s]}^{[r]-1} \|X(j, j-1)\|\Bigg) \|X_A(1+[s], s)\| \leqslant e^{|d|(r-s)}.$$

Аналогично в случае $0 \leqslant r < [s]$ выполняются оценки

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant \|X_A(r,[r]+1)\| \Bigg(\prod_{j=1+[r]}^{[s]-1} \|X(j-1, j)\|\Bigg) \|X_A([s], s)\| \leqslant e^{|d|(s-r)}.$$

В обоих случаях имеем неравенство

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant e^{|d||r-s|}, \quad 0 \leqslant r,s \in \mathbb{R}. \tag{$11_{r,s}$}$$

Для любого $x \in L_d(e^{-7m_kT_k|d|}) \overset{(7_k)}{\subset} L_d(2^{-1}e^{-4m_kT_k|d|})$ из $(11_{T_{k+1},\theta_k})$ в силу оценок

$$h = \|X_A(T_{k+1},\theta_k)\|^{1/2} \overset{(11)}{\leqslant} e^{2^{-1}|T_{k+1}-\theta_k||d|} = e^{m_kT_k|d|}$$

вытекают неравенства

$$|\sin\angle(e_{\delta(d)},x)| = \frac{|x_{3-\delta(d)}|}{\|x\|} \leqslant \frac{|x_{3-\delta(d)}|}{|x_{\delta(d)}|} \leqslant 2^{-1}e^{-4m_kT_k|d|} \leqslant \frac{1}{2h^4}.$$

Отсюда вследствие (10) получаем, что

$$|\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)| \leqslant |\sin\angle(e_{\delta(d)},x)||\cos\angle(x,z_x)| + |\sin\angle(x,z_x)||\cos\angle(e_{\delta(d)},x)| \overset{(10)}{\leqslant} 1-1/(2h^4). \tag{12}$$

В случае $k=k_0(d)-1$ имеем $X_A(T_{k+1},T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} = e_{\delta(d)} \subset L_d(2e^{4m_kT_k|d|})$, т.е. справедливо включение $(5_{k_0(d)-1})$.

Предположим, что включение (5_{k-1}) верно для некоторого $k \geqslant k_0(d)$. Тогда в силу вытекающих для любого $x \in L_d(e^{-7m_kT_k|d|})$ из неравенства (12) оценок

$$\left|\frac{(z_x)_{3-\delta(d)}}{(z_x)_{\delta(d)}}\right| = \left|\frac{\cos\angle(e_{3-\delta(d)},z_x)}{\cos\angle(e_{\delta(d)},z_x)}\right| \leqslant \frac{|\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)|}{|1-\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)|} \overset{(12)}{\leqslant} \frac{1-2^{-1}h^{-4}}{2^{-1}h^{-4}} = 2h^4-1$$

имеют место включения

$$X_A(T_{k+1},T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} = X_A(T_{k+1},T_k)X_A(T_k,T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} \overset{(5_{k-1})}{\subset}$$

$$\overset{(5_{k-1})}{\subset} X_A(T_{k+1},\theta_k)X_A(\theta_k,T_k)L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \overset{(8)}{\subset} X_A(T_{k+1},\theta_k)L_d(e^{-7m_kT_k|d|}) \subset$$
$$\subset L_d(2h^4-1) \subset L_d(2e^{4m_kT_k|d|}).$$

Таким образом, выполняется включение (5_k), откуда, согласно методу математической индукции, следует справедливость включения (5_n) для любого целого $n \geqslant k_0(d)-1$. Лемма доказана.

Введём обозначение $\hat{Y}_\varkappa(\gamma) := U(\gamma)\begin{pmatrix} e^{\varkappa} & 0 \\ 0 & e^{-\varkappa}\end{pmatrix}$, где $\gamma,\varkappa \in \mathbb{R}$.

Замечание. В работе [7] определена матрица

$$Y_k(\mu) := U(\mu/k+\pi/2)\begin{pmatrix} e^{k\mu} & 0 \\ 0 & e^{-k\mu}\end{pmatrix}.$$

Леммы 1 и 2 из [7] не верны. Их утверждения становятся корректными, если заменить $Y_k(\mu)$ матрицей

$$\check{Y}_k(\mu) := U(\mu/k+\pi/2)\begin{pmatrix} e^{k} & 0 \\ 0 & e^{-k}\end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Для любых $\gamma,\varkappa \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|\cos\gamma| \leqslant 1/e^{2|\varkappa|}$, справедлива оценка*

$$\|\hat{Y}_\varkappa^2(\gamma)\| < e^2. \tag{13}$$

Доказательство в силу равенства $\hat{Y}_{\varkappa}(\gamma)=\check{Y}_{\varkappa}(\gamma\varkappa-\pi/2)$ совпадает с учётом приведённого выше замечания с доказательством леммы 2 из [7], в котором k следует заменить на $\varkappa$, а вместо r_μ взять γ.

Лемма 4. *Если $d\neq 0$ и найдутся $l\in\mathbb{N}$ и последовательность $(k_j)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ такие, что для любого $p\in\{k_j: j\in\mathbb{N}\}$ выполняются неравенства $i_p\leqslant l$, $m_p\geqslant 2\max\{l,|d|^{-1}\}$ и оценка $|\cos b_p|<e^{-2m_p|d|}$, то система (2_A) неправильна по Ляпунову.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $0\neq d\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{N}$. Обозначим $\varkappa_k:=$ $:=d(m_k-1)$. Имеют место равенства

$$X_A(\tau_k-m_kl+1,\tau_k-m_k(l+1)+1)=U(b_k)\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)},e^{d(1-m_k)}]=\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k),\quad 0<l\leqslant T_k,\tag{14}$$

$$X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)=\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)},e^{d(1-m_k)}]=\hat{Y}_{\varkappa_k}(0),\quad X_A(\theta_k+1,\theta_k)=U(b_k),\tag{15}$$

$$X_A(\tau_k+m_kl,\tau_k+m_k(l-1))=U(-b_k)\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)},e^{d(1-m_k)}]=\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k),\quad 0<l\leqslant T_k.\tag{16}$$

Из них с учётом чётности T_k вытекает, что

$$X_A(\tau_k,\theta_k)=X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)\biggl(\prod_{l=1}^{T_k-1}X_A(\tau_k-m_kl+1,\tau_k-m_k(l+1)+1)\biggr)X_A(\theta_k+1,\theta_k)\overset{(14),(15)}{=}$$

$$\overset{(14),(15)}{=}U(-b_k)\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^{T_k}U(b_k).\tag{17}$$

Аналогичным образом приходим к равенствам

$$X_A(T_{k+1},\tau_k)=\prod_{l=0}^{T_k-1}X_A(T_{k+1}-m_kl,T_{k+1}-m_k(l+1))\overset{(16)}{=}\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^{T_k}.\tag{18}$$

Возьмём произвольное p из последовательности $(k_j)_{j=1}^{\infty}$, определённой в формулировке леммы. Из равенств (17) и (18) в силу леммы 3, учитывая делимость T_p на $T_1=2$, получаем оценки

$$\|X(T_{p+1},\theta_p)\|=\|X(T_{p+1},\tau_p)X_A(\tau_p,\theta_p)\|\leqslant\|X(T_{p+1},\tau_p)\|\|X_A(\tau_p,\theta_p)\|\overset{(17),(18)}{=}$$

$$\overset{(17),(18)}{=}\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^{T_p}\|\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^{T_p}\|\leqslant\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^2\|^{T_p/2}\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^2\|^{T_p/2}\overset{(13)}{\leqslant}e^{2T_p}.\tag{19}$$

Из неравенства $(11_{\theta_p,0})$ следует, что

$$\|X_A(\theta_p,0)\|\leqslant e^{|d|\theta_p}=e^{m_pi_pT_p|d|}.\tag{20}$$

Используя (19), (20) и учитывая верные по условию леммы неравенства $2/m_p\leqslant|d|$ и $i_p\leqslant l$, получаем оценки

$$\frac{\ln\|X(T_{p+1},0)\|}{T_{p+1}}=\frac{1}{T_{p+1}}(\ln\|X(T_{p+1},\theta_p)\|+\ln\|X(\theta_p,0)\|)\overset{(19),(20)}{\leqslant}\frac{2T_p+m_pi_pT_p|d|}{m_p(i_p+2)T_p}=$$

$$=\frac{1}{i_p+2}\biggl(\frac{2}{m_p}+i_p|d|\biggr)\leqslant|d|\frac{1+i_p}{i_p+2}=|d|\biggl(1-\frac{1}{i_p+2}\biggr)\leqslant|d|\biggl(1-\frac{1}{l+2}\biggr)\leqslant|d|\biggl(1-\frac{1}{3l}\biggr).\tag{21_p}$$

В силу неравенства $(11_{0,T_p})$ справедлива оценка

$$\|X_A(0,T_p)\|\leqslant e^{|d|T_p},\tag{22}$$

учитывая которую и оценки $i_p\geqslant 4$, $m_p\geqslant 2l$,

$$\|X(\theta_p,T_p)\|\leqslant\|X(\theta_p,0)\|\|X(0,T_p)\|,\tag{23}$$

а также равенства

$$\|X(\theta_p,T_p)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(\theta_p-T_p)}, e^{-d(\theta_p-T_p)}]\| = e^{|d|(\theta_p-T_p)}, \tag{24}$$

будем иметь

$$\frac{1}{\theta_p}\ln\|X(\theta_p,0)\| \overset{(23)}{\geqslant} \frac{1}{\theta_p}(\ln\|X(\theta_p,T_p)\| - \ln\|X(0,T_p)\|) \overset{(22),(24)}{\geqslant}$$

$$\overset{(22),(24)}{\geqslant} \frac{|d|(\theta_p-2T_p)}{\theta_p} = |d|\bigg(1-\frac{2}{m_p i_p}\bigg) \geqslant |d|\bigg(1-\frac{1}{4l}\bigg). \tag{25}$$

Согласно формуле Ляпунова [10, с. 41] для старшего характеристического показателя $\lambda_{\max}(A)$ имеет место равенство

$$\lambda_{\max}(A) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\|. \tag{26}$$

Пусть $x(t),\ t\geqslant 0,\ \|x(0)\|=1,$ – какое-либо решение системы (2_A) такое, что $\lambda[x]=\lambda_{\max}(A)$.

Тогда из соотношений (25) и (26) вытекает оценка

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \overset{(26)}{=} \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{\theta_k}\ln\|X_A(\theta_k,0)\| \overset{(25)}{\geqslant} |d|\bigg(1-\frac{1}{4l}\bigg). \tag{27}$$

С другой стороны, поскольку $\|x(t)\|\leqslant\|X_A(t,0)\|,\ t\geqslant 0,$ в силу $(21_{k_j}),\ j\in\mathbb{N},$ справедливы неравенства

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \leqslant \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| \leqslant \varliminf_{j\to+\infty}\frac{1}{T_{k_j+1}}\ln\|X_A(T_{k_j+1},0)\| \overset{(21)}{\leqslant} |d|\bigg(1-\frac{1}{3l}\bigg). \tag{28}$$

Из оценок (27) и (28) следует отсутствие точного предела у функции $\ln\|x(t)\|$ при $t\to+\infty$, что, согласно [8, с. 284], влечёт за собой неправильность системы (2_A). Лемма доказана.

Обозначим $\tilde L_\varkappa := L_{\mathrm{sgn}\,\varkappa}(2^3\varkappa^2),\ \ \varkappa\in\mathbb{R}$.

Лемма 5. *Для любых* $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$ *таких, что*

$$|\sin\gamma|\geqslant\varkappa^{-2}\quad\text{и}\quad\varkappa>2^4, \tag{29}$$

имеют место включение

$$\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)\tilde L_\varkappa\subset\tilde L_\varkappa \tag{30}$$

и для любого $x\in\tilde L_\varkappa$ *неравенство*

$$\|\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)x\|/\|x\| > e^{\varkappa-\sqrt{\varkappa}}. \tag{31}$$

Доказательство в силу равенства $\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)=\check Y_\varkappa(\gamma\varkappa)$ совпадает с учётом приведённого выше замечания с доказательством леммы 2 из [7], в котором k следует заменить на $\varkappa$, L_k – конусом $\tilde L_\varkappa$, а вместо ρ_μ взять γ.

Обозначим $\hat L_{k,d} := L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)$.

Лемма 6. *Для любых* $d\neq 0,\ \ k\in\mathbb{N}$ *таких, что*

$$m_k>1+2^4/|d|,\qquad|\cos b_k|\geqslant d^{-2}(m_k-1)^{-2}, \tag{32}$$

выполняется включение

$$X_A(T_{k+1},\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}\subset\hat L_{k,d}, \tag{33}$$

а для всякого решения $x(\cdot)$ *системы* (2_A) *с начальным условием* $x(\theta_k-m_k+1)\in\hat L_{k,d}$ *при любых* $1\leqslant l\leqslant 2T_k$ *имеет место оценка*

$$\frac{\|x(\theta_k+m_kl)\|}{\|x(\theta_k+m_k(l-1))\|}\geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}. \tag{34_l}$$

Доказательство. В случае, если $d>0$, полагая в условиях леммы 5 $\varkappa=\varkappa_k:=d(m_k-1)$, $\gamma:=\delta b_k-\pi/2$, где $\delta\in\{-1,0,1\}$, учитывая равенства $\tilde L_\varkappa=\hat L_{k,d}$, $\hat Y_{\varkappa_k}(\gamma+\pi/2)=\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)$ и то, что, как следует из неравенств (32), справедливы условия (29), получаем из (30) включение

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,d}\subset\hat L_{k,d}, \tag{35_d}$$

а из (31) для любого $x\in\hat L_{k,d}$ имеем неравенство

$$\|\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)x\|/\|x\|>e^{\varkappa_k-\sqrt{\varkappa_k}}=e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}. \tag{36}$$

Если же $d<0$, то в силу равенств

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)=U(\delta b_k)\mathrm{diag}\,[e^{\varkappa_k},e^{-\varkappa_k}]=U(\delta b_k)J\,\mathrm{diag}\,[e^{-\varkappa_k},e^{\varkappa_k}]J^{-1}=J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1} \tag{37}$$

с учётом включения (35_{-d}) и того, что

$$\hat L_{k,d}=J\hat L_{k,-d}, \tag{38}$$

справедливы включения

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,d}\overset{(37)}{=}J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}\hat L_{k,d}\overset{(38)}{=}J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,-d}\overset{(35_{-d})}{\subset}J\hat L_{k,-d}\overset{(38)}{=}\hat L_{k,d},$$

т.е. включение (35_d) выполняется для любых $d\ne0$.

В силу соотношений (36) и (37) для любого $x\in\hat L_{k,d}$, поскольку $J^{-1}x\in J^{-1}\hat L_{k,d}\overset{(38)}{=}\hat L_{k,-d}$, имеем оценки

$$\|\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)x\|\overset{(37)}{=}\|J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}x\|=$$
$$=\|\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}x\|\overset{(36)}{>}\|x\|e^{-\varkappa_k-\sqrt{-\varkappa_k}}=\|x\|e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}.$$

Таким образом, неравенство (36) справедливо для всех $d\ne0$.

Из включения (35), используя равенства (14)–(16), получаем соотношения

$$X_A(\theta_k+m_kl+1,\theta_k+m_k(l-1)+1)\hat L_{k,d}\overset{(14)}{=}\hat Y_{\varkappa_k}(b_k)\hat L_{k,d}\overset{(35)}{\subset}\hat L_{k,d},\quad 0\leqslant l<T_k, \tag{39}$$

$$\begin{gathered}X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)},e^{d(1-m_k)}]L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)=\\=L_d(e^{-2|d|(m_k-1)}2^3d^2(m_k-1)^2)\subset L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)=\hat L_{k,d},\end{gathered} \tag{40}$$

$$X_A(\tau_k+m_kl,\tau_k+m_k(l-1))\hat L_{k,d}\overset{(16)}{=}\hat Y_{\varkappa_k}(-b_k)\hat L_{k,d}\overset{(35)}{\subset}\hat L_{k,d},\quad 0<l\leqslant T_k. \tag{41}$$

Тогда для любого $0\leqslant j<T_k$ выполняются включения

$$\begin{gathered}X_A(\theta_k+jm_k+1,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=\\=\biggl(\prod_{l=0}^{j}X_A(\theta_k+m_k(j-l)+1,\theta_k+m_k(j-l-1)+1)\biggr)\hat L_{k,d}\overset{(39)}{\subset}\hat L_{k,d}.\end{gathered} \tag{42}$$

В частности, при $j=T_k-1$ отсюда вытекает, что

$$X_A(\tau_k-m_k+1,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}\subset\hat L_{k,d}. \tag{43}$$

Из (40) и (43) следуют включения

$$X_A(\tau_k,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)X_A(\tau_k-m_k+1,\theta_k-k+1)\hat L_{k,d}\overset{(40),(43)}{\subset}\hat L_{k,d}, \tag{44}$$

в силу которых и включения (41) заключаем, что

$$X_A(\tau_k+jm_k,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=\biggl(\prod_{l=1}^{j}X_A(\tau_k+m_kl,\tau_k+m_k(l-1))\biggr)\times$$

$$\times X_A(\tau_k,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}\overset{(41),(44)}{\subset}\hat L_{k,d} \tag{45}$$

для любого $0<j\leqslant T_k$. В частности, при $j=T_k$ имеем включение (33).

Положим $\tilde\delta(j):=1$, если $0\leqslant j<T_k$, и $\tilde\delta(j):=0$, если $T_k\leqslant j\leqslant 2T_k$.

Пусть $x(\cdot)$ – какое-либо решение системы (2_A) с начальным условием $x(\theta_k-m_k+1)\in\hat L_{k,d}$. Из (42), (44) и (45) следует включение

$$y_{k,j}:=x(\theta_k+m_kj+\tilde\delta(j))\in\hat L_{k,d},\quad 0\leqslant j<2T_k. \tag{46_j}$$

Для любого $0\leqslant j<T_k$ справедливы равенства

$$\|y_{k,j}\|=\|U(b_k)x(\theta_k+m_kj)\|=\|x(\theta_k+m_kj)\|. \tag{47_j}$$

Тогда в силу (46_j) для любого $0<j\leqslant 2T_k$ и некоторого $\hat\delta(j)\in\{-1,0,1\}$ выполняются оценки

$$\frac{\|x(\theta_k+m_kj)\|}{\|x(\theta_k+m_k(j-1))\|}\overset{(47_j)}{=}\frac{\|y_{k,j}\|}{\|y_{k,j-1}\|}\overset{(14)-(16)}{=}\frac{\|\hat Y_{\varkappa_k}(\hat\delta(j)b_k)y_{k,j-1}\|}{\|y_{k,j-1}\|}\overset{(36),(46_{j-1})}{>}e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}},$$

т.е. имеет место неравенство (34_j). Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $m_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$ и для любого $l\in\mathbb N$ найдётся $k_l\in\mathbb N$ такое, что для всех $k\geqslant k_l$, удовлетворяющих условию $i_k\leqslant l$, выполняется оценка**)

$$|\cos b_k|>|d|^{-2}(m_k-1)^{-2}, \tag{48}$$

то система (2_A) правильна по Ляпунову.

Доказательство. Обозначим $x(t):=X_A(t,T_{k_0(d)})e_{\delta(d)}$.

Считаем, что $d\neq 0$, и зафиксируем произвольное $k\in\mathbb N$, $k\geqslant k_0(d)$.

Из неравенства $T_{k+1}\geqslant i_km_kT_k$ вытекают оценки

$$4m_kT_k+2|d|^{-1}\ln 2\overset{(7_k)}{\leqslant}5m_kT_k\leqslant 5T_{k+1}i_k^{-1}. \tag{49_k}$$

Возьмём произвольные $1\leqslant\alpha\in\mathbb R$ и $y\in L_d(\alpha)$. Если $|y_{3-\delta(d)}|\leqslant 2^{-1}\|y\|$, то выполняются неравенства $|y_{\delta(d)}|\geqslant\|y\|-|y_{3-\delta(d)}|\geqslant 2^{-1}\|y\|$. В противном случае, так как $y\in L_d(\alpha)$, будут справедливы неравенства $|y_{\delta(d)}|\geqslant\alpha^{-1}|y_{3-\delta(d)}|\geqslant 2^{-1}\alpha^{-1}\|y\|$. В обоих случаях, учитывая, что $\alpha\geqslant 1$, получаем оценку

$$|y_{\delta(d)}|\geqslant 2^{-1}\alpha^{-1}\|y\|,\quad \alpha\geqslant 1,\quad y\in L_d(\alpha). \tag{50_α}$$

Положим $\alpha:=2e^{4m_kT_k|d|}$. Поскольку $T_k\geqslant k\geqslant k_0(d)>|d|^{-1}$, то, следовательно, $\alpha\geqslant 1$, поэтому в силу (5_k), (50_α) и (49_k) получаем неравенство

$$|x_{\delta(d)}(T_{k+1})|\overset{(5_k),(50_\alpha)}{\geqslant}2^{-2}e^{-4m_kT_k|d|}\|x(T_{k+1})\|\overset{(49_k)}{\geqslant}e^{-5T_{k+1}i_k^{-1}|d|}\|x(T_{k+1})\|.$$

Отсюда для любого $t\in[T_{k+1},\theta_{k+1}]$ следует, что

$$\|x(t)\|=\|\mathrm{diag}\,[e^{d(t-T_{k+1})},e^{d(-t+T_{k+1})}]x(T_{k+1})\|\geqslant$$

*) Второе неравенство в (32).

$$\geqslant e^{|d|(t-T_{k+1})}|x_{\delta(d)}(T_{k+1})| \geqslant e^{|d|(t-T_{k+1}-5T_{k+1}i_k^{-1})}\|x(T_{k+1})\|. \qquad (51_k)$$

При всех неотрицательных $r, s \in \mathbb{R}$ вследствие неравенства $(11_{r,s})$ справедливы оценки

$$\|x(r)\| = \|X_A(r,s)x(s)\| \leqslant \|X_A(r,s)\|\|x(s)\| \overset{(11_{r,s})}{\leqslant} e^{|d||r-s|}\|x(s)\|. \qquad (52_{r,s})$$

Полагая в них $r := T_{k_0(d)}$, $s := T_k$ и учитывая равенства $\|x(T_{k_0(d)})\| = \|e_{\delta(d)}\| = 1$, получаем

$$\|x(T_k)\| \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||T_{k_0(d)}-T_k|}\|x(T_{k_0(d)})\| \geqslant e^{-|d|T_k}. \qquad (53)$$

Далее, зафиксируем произвольно $l \in \mathbb{N}$ и число $k > k_0(d)$ такое, что выполняется неравенство $m_k \geqslant 1 + 2^4|d|^{-1}$. Из (53) в силу (51_{k-1}) с учётом неравенства $i_k \geqslant 5$ вытекают оценки

$$\|x(\theta_k)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(\theta_k-T_k)}, e^{-d(\theta_k-T_k)}]x(T_k)\| \overset{(51_{k-1})}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k-T_k)}e^{-T_k|d|}\|x(T_k)\| \overset{(53)}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k-3T_k)}. \qquad (54)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $i_k \leqslant l$.

Вследствие оценок (48), (49_{k-1}) и неравенств $i_k \geqslant 5$, $i_{k-1} \geqslant 5$ имеем

$$-2(\theta_k - T_k - m_k + 1) + |d|^{-1}\ln 2 + 4m_{k-1}T_{k-1} \overset{(49_{k-1})}{\leqslant} 2(-i_k m_k T_k + T_k + m_k) + 5T_k i_{k-1}^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2(-3m_kT_k + (1-m_k)T_k + (1-T_k)m_k) + T_k \leqslant$$

$$\leqslant -6m_kT_k + T_k \leqslant 0 \leqslant |d|^{-1}\ln\frac{1}{|\cos b_k|} \overset{(48)}{\leqslant} |d|^{-1}\ln(|d|^2(m_k-1)^2). \qquad (55)$$

В силу включения (5_{k-1}), полагая $\alpha := \theta_k - m_k + 1$ и учитывая оценку (55), получаем соотношения

$$x(\alpha) = \mathrm{diag}\,[e^{d(\alpha-T_k)}, e^{-d(\alpha-T_k)}]x(T_k) \overset{(5_{k-1})}{\in} \mathrm{diag}\,[e^{d(\alpha-T_k)}, e^{-d(\alpha-T_k)}]L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) =$$

$$= L_d(e^{-2(\theta_k-T_k-m_k+1)|d|}2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \overset{(55)}{\subset} \hat{L}_{k,d}. \qquad (56)$$

Обозначим $\beta_{k,d} := m_k^{-1}(m_k - 1 - \sqrt{(m_k-1)|d|^{-1}})$.

Из (48) и (56) в силу леммы 6 следует для любого $1 \leqslant l \leqslant 2T_k$ оценка

$$\frac{\|x(\theta_k + m_k l)\|}{\|x(\theta_k + m_k(l-1)\|} \geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}} = e^{|d|\beta_{k,d}m_k} \qquad (57)$$

и включение $x(T_{k+1}) \subset \hat{L}_{k,d}$, из которого вследствие (50_α), где $\alpha := 2^3d^2(m_k-1)^2$, вытекает неравенство

$$|x_{\delta(d)}(T_{k+1})| \geqslant 2^{-4}m_k^{-2}|d|^{-2}\|x(T_{k+1})\|. \qquad (58)$$

Для любого $\theta_k \leqslant t \leqslant T_{k+1}$ найдётся единственное $l_t \in \mathbb{N}$ такое, что $t \in [m_k(l_t-1), m_k l_t)$.

Для таких t из $(52_{m_kl_t,t})$ и (57) следуют оценки

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(\theta_k)\|} = \frac{\|x(t)\|}{\|x(m_kl_t)\|}\frac{\|x(m_kl_t)\|}{\|x(\theta_k)\|} \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||t-m_kl_t|}\prod_{p=1+\theta_km_k^{-1}}^{l_t}\frac{\|x(m_kp)\|}{\|x(m_k(p-1))\|} \overset{(57)}{\geqslant}$$

$$\overset{(57)}{\geqslant} e^{-|d|m_k}e^{(l_t-\theta_km_k^{-1})\beta_{k,d}m_k|d|} \geqslant e^{|d|(\beta_{k,d}(t-\theta_k)-m_k)}. \qquad (59)$$

Отсюда и из (54), поскольку $\beta_{k,d} \leqslant 1$ и $t^{-1}(m_k + 3T_k) \leqslant \theta_k^{-1}(m_k + 3T_k) = i_k^{-1}(T_k^{-1} + 3m_k^{-1})$, вытекают неравенства

$$\frac{\ln \|x(t)\|}{t} = \frac{1}{t}\left(\ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\theta_k)\|} + \ln \|x(\theta_k)\|\right) \overset{(54),(59)}{\geqslant}$$

$$\overset{(54),(59)}{\geqslant} \frac{|d|}{t}(\beta_{k,d}(t-\theta_k) - m_k + \theta_k - 3T_k) \geqslant |d|(\beta_{k,d} - T_k^{-1} - 3m_k^{-1}), \quad t \in [\theta_k, T_{k+1}]. \qquad (60_t)$$

В силу (58) для любого $t \in [T_{k+1}, \theta_{k+1}]$ выполняются оценки

$$\|x(t)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(t-T_{k+1})}, e^{-d(t-T_{k+1})}]x(T_{k+1})\| \overset{(58)}{\geqslant} e^{|d|(t-T_{k+1})}2^{-4}m_k^{-2}|d|^{-2}\|x(T_{k+1})\|.$$

Отсюда и из $(60_{T_{k+1}})$, так как

$$\frac{\ln(4m_k|d|)}{t|d|} \leqslant \frac{4m_k|d|}{T_{k+1}|d|} = \frac{4}{i_k+2} \leqslant \frac{1}{T_k}, \quad t \geqslant T_{k+1}, \qquad (61)$$

вытекают неравенства

$$\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \overset{(60)}{\geqslant} \frac{1}{t}(|d|(t-T_{k+1}) - \ln(2^4 m_k^2|d|^2) + |d|(\beta_{k,d} - T_k^{-1} - 3m_k^{-1})T_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant |d|\left(1 - \left(1 - \beta_{k,d} + \frac{1}{T_k} + \frac{3}{m_k}\right)\frac{T_{k+1}}{t} - 2\frac{\ln(4m_k|d|)}{t|d|}\right) \overset{(61)}{\geqslant}$$

$$\overset{(61)}{\geqslant} |d|\left(\beta_{k,d} - \frac{2}{T_k} - \frac{3}{m_k}\right), \quad T_{k+1} \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}. \qquad (62)$$

В случае же, когда $i_k > l$, для любого $t \in [\theta_k, T_{k+1}]$ вследствие $(52_{T_{k+1},t})$ и (54), поскольку

$$2\theta_k - t = t - 2(\theta_k - t) \geqslant t - 2(\theta_k - T_{k+1}) = t - 4m_kT_k,$$

справедливы неравенства

$$\|x(t)\| \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||t-\theta_k|}\|x(\theta_k)\| \overset{(54)}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k - t)}e^{|d|(\theta_k - 3T_k)} = e^{|d|(2\theta_k - t - 3T_k)} \geqslant e^{|d|(t-(4m_k+3)T_k)}, \qquad (63)$$

откуда, так как

$$\frac{(4m_k+3)T_k}{t} \leqslant \frac{(4m_k+3)T_k}{\theta_k} = \frac{4m_k+3}{i_km_k} \leqslant \frac{7}{i_k}, \qquad (64)$$

вытекают оценки

$$\frac{\ln\|x(t)\|}{t} \overset{(63)}{\geqslant} \frac{|d|}{t}(t - (4m_k+3)T_k) \overset{(64)}{\geqslant} |d|\left(1 - \frac{7}{i_k}\right), \quad t \in [\theta_k, T_{k+1}]. \qquad (65)$$

Полагая, в частности, в (65) $t := T_{k+1}$, получаем в силу оценок (51_k) для любого $t \in \in [T_{k+1}, \theta_{k+1}]$ неравенства

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \overset{(51_k),(65)}{\geqslant} t^{-1}|d|(t - T_{k+1} - 5i_k^{-1}T_{k+1} + (1 - 7i_k^{-1})T_{k+1}) =$$

$$= |d|(1 - 12t^{-1}i_k^{-1}T_{k+1}) \geqslant |d|(1 - 12i_k^{-1}). \qquad (66)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $l_\varepsilon := 12|d|\varepsilon^{-1}$.

Выберем $k_\varepsilon \geqslant \max\{k_0(d)+1, 4\varepsilon^{-1}|d|\}$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$m_{k_\varepsilon} \geqslant \max\{1+2^4|d|^{-1}, 2^4|d| \max\{1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}\}\}.$$

Зафиксируем произвольные $k \geqslant k_\varepsilon$ и $t \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$.

Справедливы оценки

$$|d|\beta_{k,d} \geqslant |d| - \frac{|d|}{m_k} - \sqrt{\frac{|d|}{m_k}} \geqslant |d| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{67}$$

Отсюда, если выполняется неравенство $i_k \leqslant l_\varepsilon$, вследствие (60) и (62) получаем, так как $T_k \geqslant k \geqslant 4\varepsilon^{-1}|d|$, оценки

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \overset{(60),(62)}{\geqslant} |d|(\beta_{k,d} - 2T_k^{-1} - 3m_k^{-1}) \overset{(67)}{\geqslant} |d| - \varepsilon. \tag{68}$$

Если же $i_k > l_\varepsilon$, то в силу (65) и (66) имеют место оценки

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \geqslant |d| - 12|d|i_k^{-1} \geqslant |d| - \varepsilon. \tag{69}$$

Из (68) и (69) вытекает существование точного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|x(t)\|$, откуда в силу леммы из [11] следует правильность системы (2_A). Лемма доказана.

Пусть M – произвольное $G_{\delta\sigma}$-множество. Найдутся открытые множества $\check{M}_{n,l} \subset \mathbb{R}$, $l, n \in \mathbb{N}$, такие, что множества $\tilde{M}_l$, $l \in \mathbb{N}$, определённые равенствами $\tilde{M}_l := \bigcap_{n=1}^\infty \check{M}_{n,l}$, удовлетворяют соотношению $M = \bigcup_{l=1}^\infty \tilde{M}_l$. Обозначим $\hat{M}_{n,l} := \bigcap_{p=1}^n \check{M}_{p,l}$. Справедливы включение

$$\hat{M}_{n+1,l} \subset \hat{M}_{n,l} \tag{70_n}$$

и равенство $\tilde{M}_l = \bigcap_{n=1}^\infty \hat{M}_{n,l}$.

Определим рекуррентно последовательность $\{j_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{N}\bigsqcup\{0\}$, полагая $j_0 := 0$ и $j_n := 2n9^{n+n^3} + j_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любых $k, l, n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим $J_n := \{j_{n-1}+1, \ldots, j_n\}$,

$$\varkappa_k = \varkappa_k(n) := \frac{1}{9^{n+n^3}}\left(k - \frac{j_n + j_{n-1}}{2}\right), \quad \rho_{n,l}(\alpha) = \rho_{n,l}(\alpha, \hat{M}_{n,l}) := \inf_{\beta\in\mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l}} |\alpha - \beta|.$$

Обозначим также через $I_{n,k} = I_{n,k}(\{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}})$ множество тех $l \in \mathbb{N}$, для которых либо $\rho_{n,l}(\varkappa_k(n)) \geqslant 2/n$, либо найдётся $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ такое, что

$$2/n \leqslant \rho_{p,l}(\varkappa_k(n)) \leqslant 5/n. \tag{$71_{p,n}$}$$

Лемма 8. *Для любых $\mu \notin M$ и $l \in \mathbb{N}$ существует $n_0 = n_0(\mu, l) \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $n \geqslant n_0$ выполнение для некоторого $k \in J_n$ неравенства*

$$|\mu - \varkappa_k(n)| < 2/n \tag{$72_{k,n}$}$$

влечёт за собой включение $l \notin I_{n,k}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\mu \notin M$ и $l \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathfrak{F}_{\mu,l} := \{p : \mu \in \hat{M}_{p,l}\}$. Так как $\mu \in \mathbb{R}\setminus M \subset \mathbb{R}\setminus\tilde{M}_l = \mathbb{R}\setminus(\bigcap_{n=1}^\infty \hat{M}_{n,l}) = \bigcup_{n=1}^\infty(\mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l})$, то найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu \in \mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l} \overset{(72)}{\subset} \mathbb{R}\setminus\hat{M}_{r,l}$, $r \geqslant n$. Поэтому $\sup\mathfrak{F}_{\mu,l} < n$, т.е. множество $\mathfrak{F}_{\mu,l}$ конечно.

Если $\mathfrak{F}_{\mu,l} = \varnothing$, то положим $q(\mu, l) := 0$, $n_0 := 1$. В противном случае обозначим $q = q(\mu, l) := \max\mathfrak{F}_{\mu,l}$. Из включения $\mu \in \hat{M}_{q,l}$ и того, что множество $\hat{M}_{q,l}$ открыто, следует положительность числа $\rho_{q,l}(\mu)$. Поэтому определена величина $n_0 := 1 + [8/\rho_{q,l}(\mu)]$.

Предположим, что для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, и $k \in J_n$ справедливо неравенство $(72_{k,n})$.

Для любого $p > q(\mu, l)$ в силу соотношения $p \notin \mathfrak{F}_{\mu,l}$, эквивалентного включению $\mu \in \in \mathbb{R}\backslash\hat{M}_{p,l}$, имеет место равенство $\rho_{p,l}(\mu) = 0$. Из него вследствие неравенств $(72_{k,n})$ вытекают оценки

$$\rho_{p,l}(\varkappa_k) \leqslant \rho_{p,l}(\mu) + |\mu - \varkappa_k(n)| \overset{(72_{k,n})}{<} 2/n, \quad p > q(\mu, l). \tag{73_p}$$

Отсюда в случае $q(\mu, l) = 0$ следует соотношение $l \notin I_{n,k}$.

Рассмотрим теперь случай $q(\mu, l) > 0$. Справедливо неравенство

$$8/\rho_{q,l}(\mu) < n_0. \tag{74}$$

Тогда для любого $p \in \{1, \ldots, q\}$ в силу вытекающего из (70_r), $r \in \{p, \ldots, q-1\}$, включения $\hat{M}_{q,l} \subset \hat{M}_{p,l}$ справедливы неравенства

$$\rho_{p,l}(\varkappa_k) \geqslant \rho_{q,l}(\varkappa_k(n)) \geqslant \rho_{q,l}(\mu) - |\mu - \varkappa_k| \overset{(72),(74)}{>} \frac{8}{n_0} - \frac{2}{n} \geqslant \frac{6}{n}, \quad p \in \{1, \ldots, q\}.$$

Отсюда и из (73_p) следует, что соотношения $(71_{p,n})$, $p \in \mathbb{N}$, не выполнены, а это влечёт за собой включение $l \notin I_{n,k}$. Лемма доказана.

Для любого натурального k найдётся единственное $n = n(k) \in \mathbb{N}$ такое, что $k \in J_n$. Определим значения m_k, i_k и b_k, зависящие от выбора открытых множеств $\check{M}_{n,l} \subset \mathbb{R}$, $l, n \in \in \mathbb{N}$, таких, что $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \check{M}_{n,l}$, равенствами

$$d := \mu, \quad m_k := 1 + n(k)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{75}$$

$$i_k := \max\{5, \min I_{n,k}\}, \quad b_k(\mu) := \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}(\mu - \varkappa_k(n)), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \text{если} \quad I_{n,k} \neq \varnothing, \tag{76}$$

$$i_k := 5, \quad b_k(\mu) \equiv 0, \quad \text{если} \quad I_{n,k} = \varnothing. \tag{77}$$

Зададим матрицу $\tilde{A}_\mu(\cdot) = \tilde{A}_\mu(\,\cdot\,, (\hat{M}_{n,l})_{n,l \in \mathbb{N}})$, $\mu \in \mathbb{R}$, равенством

$$\tilde{A}_\mu(t) := A(t) = A(t, d, (m_k, i_k, b_k)_{k=1}^{\infty}), \quad t \geqslant 0,$$

в котором величины d, m_k, i_k, b_k определяются соотношениями (75)–(77).

Лемма 9. *Если* $0 \notin M$, *то система* $(2_{\tilde{A}_\mu})$ *неправильна по Ляпунову при любом* $\mu \in M$ *и правильна при всех остальных* $\mu \in \mathbb{R}\backslash M$.

Доказательство. Пусть $\mu \notin M$. Зафиксируем произвольное $l_0 \in \mathbb{N}$.

Положим $n_1 = n_1(\mu, l_0) := \max(\{2|\mu|\} \bigcup \{n_0(\mu, l) : 1 \leqslant l \leqslant l_0\})$ (число $n_0(\mu, l)$ определено в формулировке леммы 8).

Для любого $k > j_{n_1}$ найдётся $n \geqslant n_1$ такое, что $k \in J_n$. Справедливы оценки

$$|\varkappa_k(n)| \leqslant \max\{|\varkappa_{j_{n-1}}(n)|, |\varkappa_{j_n}(n)|\} = 9^{-n-n^3}|j_n - j_{n-1}|/2 = n. \tag{78}$$

Если $I_{n,k} = \varnothing$, то выполняются соотношения

$$\cos b_k(\mu) = 1 > n^{-2}. \tag{79}$$

Рассмотрим случай, когда $I_{n,k} \neq \varnothing$. Из оценки (78) вытекают неравенства

$$\left|\frac{\pi}{2} - b_k(\mu)\right| = \frac{1}{n}|\mu - \varkappa_k(n)| \leqslant \frac{|\mu|}{n} + \frac{|\varkappa_k|}{n} \overset{(78)}{\leqslant} \frac{1}{2} + 1 < \frac{\pi}{2}. \tag{80}$$

Если $|\mu - \varkappa_k(n)| \geqslant 2/n,$ то вследствие (80) имеют место оценки

$$|\cos b_k(\mu)| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - b_k(\mu)\right)\right| \overset{(80)}{>} \frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{2} - b_k(\mu)\right| = \frac{1}{2n}|\mu - \varkappa_k(n)| \geqslant \frac{1}{n^2}. \tag{81}$$

Если же $|\mu - \varkappa_k(n)| < 2/n,$ то в силу леммы 8 любое натуральное $l,$ не превосходящее $l_0,$ не содержится в множестве $I_{n.k}.$ Отсюда следуют неравенства $i_k \geqslant \min I_{n,k} > l_0.$

Таким образом, для любого $k > j_{n_1(\mu,l_0)}$ выполняется одно из двух неравенств: либо $i_k > l_0,$ либо, поскольку $n^2 = (m_k-1)^2/n^2 \leqslant \mu^2(m_k-1)^2,$ вследствие (79) и (81) справедлива оценка $|\cos b_k(\mu)| > \mu^{-2}(m_k-1)^{-2}.$ Следовательно, выполнены условия леммы 7, а значит, система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ правильна.

Пусть теперь $\mu \in M.$ В этом случае найдётся $l \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu \in \tilde{M}_l.$ Тогда $\mu \in \hat{M}_{n,l}$ для всех $n \in \mathbb{N}.$

Зафиксируем произвольно натуральное $n \geqslant \max\{3, 2|\mu|\}.$ В силу вытекающей из включения $\mu \in \hat{M}_{n,l}$ и того, что множество $\hat{M}_{n,l}$ открыто, положительности числа $\rho_{n,l}(\mu)$ определена величина $r = r(\mu, n, l) := [4/\rho_{n,l}(\mu)].$

Выполняются неравенства $r \leqslant 4/\rho_{n,l}(\mu) < 1 + r,$ откуда следуют оценки

$$4/r \geqslant \rho_{n,l}(\mu) > 4/(1+r). \tag{82}$$

Рассмотрим случай, когда имеет место неравенство

$$\rho_{n,l}(\mu) < 2^{-n} + 9^{-n-n^3}. \tag{83}$$

Из (82) и (83) вытекает, что $1/n \overset{(83)}{>} \rho_{n,l}(\mu)/2 \overset{(82)}{>} 2/(1+r),$ откуда следуют оценки

$$r > 2n - 1 \geqslant n \geqslant 3. \tag{84}$$

Поэтому в силу (82) и (84) справедливы неравенства

$$\rho_{n,l}(\mu) \overset{(82)}{>} 4/(1+r) \overset{(84)}{>} 4/(3^{-1}r + r) = 3/r. \tag{85}$$

Для любого целого $p \geqslant n,$ поскольку $|\mu| \leqslant 2^{-1}p \overset{(78)}{<} \max\{|\varkappa_{j_{p-1}}(p)|, |\varkappa_{j_p}(p)|\},$ найдётся $q_p = q_p(\mu) \in J_p$ такое, что

$$|\mu - \varkappa_{q_p}(p)| \leqslant 9^{-p-p^3}. \tag{86_p}$$

В силу (82), (85) и (86_r) выполняются неравенства

$$\frac{5}{r} \geqslant \frac{4}{r} + \frac{1}{9^{r+r^3}} \overset{(82),(86_r)}{\geqslant} \rho_{n,l}(\mu) + |\mu - \varkappa_{q_r}(r)| \geqslant \rho_{n,l}(\varkappa_{q_r}(r)) \geqslant$$

$$\geqslant \rho_{n,l}(\mu) - |\mu - \varkappa_{q_r}(r)| \overset{(85),(86_r)}{>} \frac{3}{r} - \frac{1}{9^{r+r^3}} \geqslant \frac{2}{r}.$$

Следовательно, имеют место оценки $(71_{n,r}),$ в силу которых, учитывая верное, согласно (84), неравенство $n < r,$ получаем включение $l \in I_{r,q_r}.$

В случае же, когда неравенство (83) не выполняется, справедливы вследствие (86_n) неравенства

$$\rho_{n,l}(\varkappa_{q_n}(n)) \geqslant \rho_{n,l}(\mu) - |\mu - \varkappa_{q_n}(n)| \overset{(86_n)}{\geqslant} 2/n,$$

из которых вытекает включение $l \in I_{n,q_n}.$ Таким образом, в любом случае для некоторого $p \in \{n, r\}$ имеет место включение $l \in I_{p,q_p},$ влекущее за собой в силу (76) оценку

$$i_{q_p} \leqslant \tilde{l} := \max\{5, l\}.$$

Обозначим
$$\Xi_l := \{k \in \mathbb{N} : i_k \leqslant \tilde{l},\ \ |\cos b_k(\mu)| < e^{-2m_k|\mu|}\}.$$

Предположим, что существует $k_0 := \max \Xi_l$. Зафиксируем произвольно
$$n_0 \geqslant \max\{k_0, 2\tilde{l}, 2|\mu|, 2|\mu|^{-1}\}.$$

Тогда для некоторого $p \geqslant n_0$ существует $q_p \in J_p$, при котором выполняются оценка $i_{q_p} \leqslant \tilde{l}$ и соотношение $I_{p,q_p} \neq \varnothing$. Вследствие этого и неравенства (86_p) справедливы оценки
$$|\cos b_{q_p}(\mu)| = |\sin(p^{-1}(\mu - \varkappa_{q_p}(p)))| \leqslant |p^{-1}(\mu - \varkappa_{q_p}(p))| \overset{(86_p)}{\leqslant} 9^{-p-p^3} \leqslant 3^{-2m_{q_p}|\mu|} < e^{-2m_{q_p}|\mu|}.$$

Поэтому $q_p \in \Xi_l$. При этом $q_p > j_{p-1} \geqslant j_{n_0-1} \geqslant j_{k_0}$, откуда с учётом неравенства $k_0 \leqslant j_{k_0}$ получаем оценку $q_p > k_0$. Последнее противоречит равенству $k_0 := \max \Xi_l$, а значит, множество Ξ_l неограничено.

Учитывая верные для любого целого $p > j_{n_0-1}$ неравенства
$$m_p = 1 + n(p)^2 > n(p) \geqslant n_0 \geqslant 2\max\{\tilde{l}, |\mu|^{-1}\},$$
заключаем, что для данного l выполнены условия леммы 4, в которой вместо l следует взять $\tilde{l}$, а в качестве последовательности $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ – множество $\Xi_l \bigcap (j_{n_0-1}, +\infty)$. Следовательно, система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ неправильна. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех $t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tilde{A}_\mu(t) = \mu\,\mathrm{diag}\,[1, -1]$.

Для каждого $t \in \mathcal{T}$ определим функцию $\omega(\cdot)$ равенством $\omega(t) \equiv 0$. Для всех остальных $t \in [T_k, T_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, полагаем $q_t := 0$, если $t < \tau_{k,j}$, и $q_t := 1$ в противном случае, и пусть $\omega(t) := (-1)^{q_t} b_k(0)$. Справедливо равенство
$$\tilde{A}_0(t) = \omega(t)J, \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}. \tag{87}$$

Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ число ζ_k, полагая $\zeta_k = 0$, если $I_{n(k),k} = \varnothing$, и $\zeta_k := 1/n(k)$ в противном случае. При любом $t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}$ выполняются соотношения
$$\tilde{A}_\mu(t) = (-1)^{q_t}\zeta_k \mu J + \tilde{A}_0(t) \overset{(87)}{=} ((-1)^{q_t}\zeta_k\mu + \omega(t))J, \tag{88_μ}$$
влекущие за собой равенства
$$\mu\tilde{A}_1(t) + (1-\mu)\omega(t)J \overset{(88_1)}{=} \mu((-1)^{q_t}\zeta_k + \omega(t))J + (1-\mu)\omega(t)J \overset{(88_\mu)}{=} \tilde{A}_\mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}. \tag{89}$$

Зададим матрицу $C(t)$, $t \geqslant 0$, следующим образом:
$$C(t) := U^{-1}(\tau)\biggl(\tilde{A}_1(t)U(\tau) - \frac{d}{dt}U(\tau)\biggr), \quad t \geqslant 0, \quad \tau = \tau(t) := \int\limits_0^t \omega(s)ds. \tag{90}$$

Сделав в семействе (1_μ) с матрицей $C(\cdot)$, задаваемой равенством (90), линейную замену переменных $y(t) := U(\tau(t))x(t)$, учитывая соотношения
$$\frac{d}{dt}U(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -\sin\tau & \cos\tau \\ -\cos\tau & -\sin\tau \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\tau(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \omega(t) = \omega(t)JU(\tau(t)) \tag{91}$$

и используя равенство (89), придём, как легко убедиться, к семейству $(2_{\tilde{A}_\mu})$:

$$\frac{dy}{dt} = \mu U(\tau(t))C(t)x + \left(\frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x \overset{(90)}{=} \mu\left(\tilde{A}_1(t)U(\tau(t)) - \frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x +$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x \overset{(91)}{=} \mu\tilde{A}_1(t)U(\tau(t))x + (1-\mu)\omega(t)JU(\tau(t))x \overset{(89)}{\equiv} \tilde{A}_\mu(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0.$$

Основной результат настоящей работы составляет следующая

Теорема. *Для любого $G_{\delta\sigma}$-множества $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$, система (1_μ) с матрицей $C(\cdot)$, заданной равенством (90), неправильна по Ляпунову при всех $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из леммы 9 следует, что система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ неправильна по Ляпунову при всех $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.

Отсюда, поскольку в силу асимптотической эквивалентности систем (1_μ) и $(2_{\tilde{A}_\mu})$ они обе одновременно либо правильны, либо неправильны, и вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изобов Н.А., Макаров Е.К.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 1870–1880.
2. *Ляпунов А.М.* Собр.соч.: в 6-ти т. Т. 2. М.-Л., 1956.
3. *Изобов Н.А.* Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и её приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034–2055.
4. *Макаров Е.К.* О мере множества неправильности линейной системы с параметром при производной // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 4. С. 302–305.
5. *Липницкий А.В.* О мере множеств неправильности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 211–215.
6. *Барабанов Е.А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1067–1084.
7. *Липницкий А.В.* Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 189–194.
8. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц М., 1973.
10. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.
11. *Макаров Е.К.* О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 209–212.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.07.2020 г.
После доработки 17.07.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 488–495

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. С. М. Пономарёв

Получены некоторые теоремы о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром λ.

DOI: 10.31857/S037406412104004X

Рассмотрим уравнение
$$u_{xx}+(\operatorname{sgn}y)u_{yy}+\lambda u=0, \tag{1}$$
в котором λ – комплексный параметр, в области G, ограниченной в полуплоскости $y>0$ лежащей в этой полуплоскости ляпуновской кривой Γ с концами в точках $A_1(-l_1,0)$ и $A_2(l_2,0)$, где l_1 и l_2 – заданные положительные числа, и при $y\leqslant 0$ отрезками A_1C_1, C_1O, OC_2, C_2A_2 характеристик соответственно $x+y=-l_1$, $x-y=0$, $x+y=0$, $x-y=l_2$ уравнения (1), где координаты точек $C_1(-l_1/2,-l_1/2)$, $O(0,0)$ и $C_2(l_2/2,-l_2/2)$.

Через G_0 обозначим область $G\bigcap\{y>0\}$ и в полуплоскости $y<0$ через G_1 – треугольную область A_1C_1O, а через G_2 – треугольную область OC_2A_2.

В области G для уравнения (1) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внутренних характеристиках, которую обозначим G^1_λ.

Задача G^1_λ. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:
$$u(x,y)\in C(\overline{G})\bigcap C^1(G)\bigcap C^2(G_0\bigcup G_1\bigcup G_2); \tag{2}$$
$$u_{xx}+(\operatorname{sgn}y)u_{yy}+\lambda u=0,\quad (x,y)\in G_0\bigcup G_1\bigcup G_2; \tag{3}$$
частные производные u_x и u_y непрерывны в замкнутой области $\overline{G_0}$ за исключением точек A_1, O, A_2 и для любого $\varepsilon>0$ градиент функции $u(x,y)$ в точках A_1, O, A_2 может иметь особенность:
$$|\nabla u(x,y)|\leqslant\frac{C}{[((x+l_1)^2+y^2)((x-l_2)^2+y^2)]^{1/4-\varepsilon}(x^2+y^2)^{1/2-\varepsilon}},\quad C=\mathrm{const}>0; \tag{4}$$
$$u(x,y)|_\Gamma=u(x(s),y(s))=\varphi(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l, \tag{5}$$
где $x=x(s)$, $y=y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, s – длина её дуги, отсчитываемой от точки $A_2(l_2,0)$, l – длина кривой Γ, а $\varphi(s)$ – заданная достаточно гладкая функция;
$$u(x,y)|_{C_1O}=u(x,x)=\psi_1(x),\quad -l_1/2\leqslant x\leqslant 0; \tag{6}$$
$$u(x,y)|_{OC_2}=u(x,-x)=\psi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l_2/2, \tag{7}$$
где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

В дальнейшем считаем, что λ – вещественный параметр.

Обозначим через G_0^* область в полуплоскости $y<0$, симметричную области G_0 относительно оси $y=0$.

Пусть λ_0 – наименьшее положительное собственное значение спектральной задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad (x,y) \in \Omega = G_0 \bigcup G_0^* \bigcup A_1A_2,$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Теорема 1. *Если существует решение задачи G_λ^1 (2)–(7), то оно единственно при всех $\lambda < \lambda_0$.*

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ задачи G_λ^1, получаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи G_λ^1 и удовлетворяет однородной задаче [1]

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{в} \ G_0, \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \lambda \int\limits_x^0 \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)}\tau(t)\,dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{10}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\lambda \int\limits_0^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l_2, \quad u(0,0) = 0, \tag{11}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$, $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

Поскольку Γ – ляпуновская кривая, то, применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая неравенство (4) и условия (8), (9), получаем

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\int\limits_{-l_1}^0 \frac{\partial u}{\partial y} u\bigg|_{y=0} dx - \int\limits_0^{l_2} \frac{\partial u}{\partial y} u\bigg|_{y=0} dx, \tag{12}$$

а учитывая условия (10), (11) и равенства $\tau(-l_1) = \tau(0) = \tau(l_2) = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\lambda \int\limits_{-l_1}^0 \tau(x) \int\limits_x^0 \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$- \lambda \int\limits_0^{l_2} \tau(x) \int\limits_0^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx. \tag{13}$$

Если $\lambda = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$.

Если $\lambda > 0$, то, учитывая, что $J_1(-z) = -J_1(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, и меняя порядок интегрирования в интегралах из правой части неравенства (13), получаем

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\frac{\lambda}{2} \int\limits_{-l_1}^0 \tau(x) \int\limits_{-l_1}^0 \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$- \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^{l_2} \tau(x) \int\limits_0^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx \equiv (-\lambda)(M_1 + M_2). \tag{14}$$

Заменив в равенстве (14) функцию Бесселя её интегральным преобразованием [2, с. 92–93]

$$\frac{J_1(z)}{z} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-\theta^2}\cos(z\theta)\,d\theta,$$

будем иметь

$$M_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{l_2}\tau(x)\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-\theta^2}\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-t)\theta\right)d\theta\,\tau(t)\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-\theta^2}\left[\left(\int\limits_0^{l_2}\tau(x)\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta x\right)dx\right)^2 + \left(\int\limits_0^{l_2}\tau(x)\sin\left(\sqrt{\lambda}\theta x\right)dx\right)^2\right]d\theta \geqslant 0, \qquad (15)$$

$$M_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l_1}^{0}\tau(x)\int\limits_{-l_1}^{0}\int\limits_0^1 \sqrt{1-\theta^2}\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-t)\theta\right)d\theta\,\tau(t)\,dt\,dx \geqslant 0 \qquad (16)$$

для всех $\lambda > 0$.

Продолжим функцию $u(x,y)$ чётным образом на область $\overline{G_0^*}$. Тогда получим функцию $w(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т.е. функцию $w(x,y)$, равную нулю на всей границе области Ω. Известно, что для любой функции $w(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\int\limits_\Omega w^2\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\lambda_0}\int\limits_\Omega (w_x^2 + w_y^2)\,dx\,dy,$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{G_0} u^2\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\lambda_0}\int\limits_{G_0}(u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy. \qquad (17)$$

Отметим, что множитель $1/\lambda_0$ в правой части неравенства Фридрихса нельзя заменить меньшим числом. В некоторых работах вместо $1/\lambda_0$ часто пишут, что найдётся такая постоянная $c(\Omega) > 0$, при которой

$$\int\limits_\Omega w^2\,dx\,dy \leqslant c(\Omega)\int\limits_\Omega |\nabla w|^2\,dx\,dy.$$

Например, из оценки [3, с. 71, (2.12)] вытекает, что

$$\|w\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{3}{2}(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\|\nabla w\|_{2,\Omega},$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ – мера Лебега области Ω. Отсюда имеем

$$\int\limits_{G_0} u^2\,dx\,dy \leqslant \frac{9\operatorname{mes}G_0}{2}\int\limits_{G_0}(u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy. \qquad (18)$$

Теперь из равенства (14), воспользовавшись неравенствами (15)–(17), получим, что

$$(\lambda_0 - \lambda)\int\limits_{G_0} u^2\,dx\,dy \leqslant 0,$$

и отсюда, если $0 < \lambda < \lambda_0$, тогда $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$.

Рассмотрим теперь случай $\lambda < 0$. Функциональные уравнения (10) и (11), дающие связь между функциями $\tau(x)$ и $\partial u(x,0)/\partial y$, запишем в виде [1, с. 94]

$$\tau(x) = \int\limits_x^0 J_0(\sqrt{\lambda}(t-x))\nu(t)\,dt, \quad -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{19}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x J_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_2, \tag{20}$$

где $\nu(x) = \partial u(x,0)/\partial y$, $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Положим $\mu = -\lambda > 0$, тогда из равенства (12), учитывая представления (19) и (20), получаем

$$\int\limits_{G_0}(u_x^2 + u_y^2 + \mu u^2)\,dx\,dy + \int\limits_{-l_1}^0 \nu(x)\int\limits_x^0 I_0(\sqrt{\mu}(t-x))\nu(t)\,dt\,dx +$$
$$+ \int\limits_0^{l_2} \nu(x)\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\nu(t)\,dt\,dx = 0, \tag{21}$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим задачу нахождения экстремумов (минимумов или максимумов) функционалов

$$V_1(\nu) = \int\limits_{-l_1}^0 \nu(x)\int\limits_x^0 I_0(\sqrt{\mu}(t-x))\nu(t)\,dt\,dx = \int\limits_{-l_1}^0 \Phi_1(x,\nu)\,dx, \tag{22}$$

$$V_2(\nu) = \int\limits_0^{l_2} \nu(x)\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\nu(t)\,dt\,dx = \int\limits_0^{l_2} \Phi_2(x,\nu)\,dx \tag{23}$$

в формуле (21).

Рассмотрим функционал (23). Для него необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера) имеет вид

$$\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\nu(t)\,dt + \nu(x)\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\,dt = 0. \tag{24}$$

Очевидно, что функция $\nu(x) \equiv 0$ является решением этого однородного интегрального уравнения Вольтерры третьего рода. Докажем, что уравнение (24) не имеет других решений в классе функций, удовлетворяющих условиям (2), (4), и, следовательно, экстремум функционала (23) может быть равен лишь нулю.

Положим

$$z(x) = \int\limits_0^x \nu(t)\,dt \tag{25}$$

(в частности, $z(0) = 0$) и запишем уравнение (24) в виде

$$z'(x)\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\,dt + z(x) + \sqrt{\mu}\int\limits_0^x I_0'(\sqrt{\mu}(x-t))z(t)\,dt = 0. \tag{26}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}x}\int\limits_0^{\sqrt{\mu}x} I_0(s)\,ds = \left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{\mu}x}{2}\right)^2+\ldots\right] = \frac{1}{\sqrt{\mu}x}\left(2I_1(\sqrt{\mu}x)-\int\limits_0^{\sqrt{\mu}x} I_2(s)\,ds\right) = P(x),$$

будем иметь

$$\left[\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\,dt\right]^{-1} = \frac{1}{xP(x)} = \frac{A(x)}{x} = \frac{1}{x}\left[A(0)+A^{(1)}(0)x+\int\limits_0^x (x-t)A^{(2)}(t)\,dt\right],$$

где $A(0)=1,$ $A^{(1)}(0)=0.$ Положим $B(x)=\int_0^x (x-t)A^{(2)}(t)\,dt,$ тогда в силу уравнения (26) получим

$$z'(x)+\frac{1}{x}z(x)=F(x), \tag{27}$$

где

$$F(x) = -\frac{\sqrt{\mu}[1+B(x)]}{x}\int\limits_0^x I_1(\sqrt{\mu}(x-t))z(t)\,dt - \frac{B(x)}{x}z(x). \tag{28}$$

Решая для уравнения (27) начальную задачу с условием $z(0)=0,$ находим, что

$$z(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x tF(t)\,dt. \tag{29}$$

Заменяя в определении (28) функцию $z(x)$ её представлением (29), получаем

$$F(x) = -\frac{\sqrt{\mu}[1+B(x)]}{x}\int\limits_0^x I_1(\sqrt{\mu}(x-t))\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t sF(s)\,ds\right)dt - \frac{B(x)}{x^2}\int\limits_0^x sF(s)\,ds. \tag{30}$$

Положим $y(x)=xF(x),$ тогда из (30) вытекает следующее интегральное уравнение для искомой функции $y(x)$:

$$y(x) = -\int\limits_0^x \left[\sqrt{\mu}(1+B(x))\left(\int\limits_s^x \frac{I_1(\sqrt{\mu}(x-t))}{t}\,dt\right)+\frac{B(x)}{x}\right]y(s)\,ds. \tag{31}$$

Учитывая равенство [5, с. 539]

$$\int\limits_0^1 (\ln\varepsilon^{-1})^2\,d\varepsilon = 2,$$

нетрудно убедиться в том, что

$$\int\limits_0^{l_2}\left(\int\limits_0^x |K(x,s)|^2\,ds\right)dx<\infty,$$

где $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения (31). Следовательно, функция $y(x)\equiv 0$ является единственным решением однородного интегрального уравнения Вольтерры второго рода (31).

Отсюда, учитывая равенства (29) и (25), заключаем, что $\nu(x)\equiv 0$ – единственное решение уравнения (24) в классе функций, удовлетворяющих условиям (2), (4).

Для того чтобы установить, сообщает ли экстремаль $\nu\equiv 0$ функционалу (23) минимальное или максимальное значение, рассмотрим функцию $V_2(\nu+\alpha\eta)$ вещественной переменной α (где функция $\eta(x)$ принадлежит классу пробных функций) и разложим её в ряд Тейлора

$$V_2(\nu+\alpha\eta)=V_2(\nu)+\left[\frac{d}{d\alpha}V_2(\nu+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}\alpha+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}V_2(\nu+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}\alpha^2+\ldots=$$

$$=V_2(\nu)+\alpha\int\limits_0^{l_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu}\eta\,dx+\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^{l_2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\nu^2}\eta^2\,dx=$$

$$=V_2(\nu)+\delta V_2(\nu,\eta)+\alpha^2\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{x}I_0(\sqrt{\mu}(x-t))\,dt\,\eta^2\,dx, \tag{32}$$

где $\delta V_2(\nu,\eta)$ – первая вариация функционала (23).

Подставив в формулу (32) экстремаль $\nu\equiv 0$, нетрудно убедиться, что при условии $\mu>0$ экстремаль сообщает функционалу (23) минимум (равный нулю).

Рассмотрим теперь функционал (22). Для него необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера) имеет вид

$$\int\limits_x^0 I_0(\sqrt{\mu}(t-x))\nu(t)\,dt+\nu(x)\int\limits_x^0 I_0(\sqrt{\mu}(t-x))\,dt=0.$$

Записав вторую вариацию функционала (22), нетрудно убедиться, что единственная экстремаль $\nu\equiv 0$ функционала (22) сообщает этому функционалу при условии $\mu>0$ минимум, равный нулю. Таким образом, в силу равенства (21), учитывая, что все слагаемые в левой части не могут быть отрицательными, получаем, что если $\mu=-\lambda>0$, то $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$. Теорема доказана.

Заметим, что если Γ – единичная полуокружность $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, то значение λ_0 легко находится (методом разделения переменных). Для сравнения имеем

$$\frac{2}{9\,\mathrm{mes}\,G_0}=\frac{4}{9\pi}=0.14;\quad \lambda_0=5.78;\quad \lambda_{11}=\pi^2=9.86,$$

где λ_{11} – первое собственное значение спектральной задачи G^1_λ [5].

Заметим, что не во всех случаях можно найти точные значения λ_0, поэтому априорная оценка типа (18) может быть использована при доказательстве теоремы 1.

Рассмотрим уравнение

$$(\mathrm{sgn}\,y)u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0, \tag{33}$$

в котором λ – вещественный параметр, в области G (характеристики уравнений (1) и (33) совпадают).

В области G для уравнения (33) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внутренних характеристиках, которую обозначим G^2_λ.

Задача G^2_λ. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{G})\bigcap C^1(G)\bigcap C^2(G_0\bigcup G_1\bigcup G_2, \tag{34}$$

$$(\mathrm{sgn}\,y)u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0,\quad (x,y)\in G_0\bigcup G_1\bigcup G_2 \tag{35}$$

и условиям (4)–(7).

Теорема 2. *Если существует решение задачи* G^2_λ *(34), (35), (4)–(7), то оно единственно при всех* $\lambda < \lambda_0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ задачи G^2_λ, получаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи G^2_λ, а значит, если положить $\alpha = -\lambda$, удовлетворяет следующей однородной задаче [1]:

$$u_{xx} + u_{yy} - \alpha u = 0 \quad \text{в} \;\; G_0, \tag{36}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{37}$$

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \alpha \int\limits_x^0 \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\alpha}(t-x)}\tau(t)\,dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{38}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\alpha \int\limits_0^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l_2, \quad u(0,0) = 0. \tag{39}$$

Применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая условия (36) и (37), получаем

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\,dx\,dy = -\int\limits_{-l_1}^0 \frac{\partial u}{\partial y} u\Big|_{y=0} dx - \int\limits_0^{l_2} \frac{\partial u}{\partial y} u\Big|_{y=0} dx. \tag{40}$$

Отсюда, используя условия (38), (39) и равенства $\tau(-l_1) = \tau(0) = \tau(l_2) = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\,dx\,dy = -\alpha \int\limits_{-l_1}^0 \tau(x) \int\limits_x^0 \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\alpha}(t-x)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$- \alpha \int\limits_0^{l_2} \tau(x) \int\limits_0^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx.$$

Если $\alpha = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ $(\lambda = 0)$.

Если $\alpha > 0$, то, учитывая равенство (14) и неравенства (15), (16), получаем

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\,dx\,dy \leqslant 0,$$

и, следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ $(\lambda < 0)$.

Если $\alpha < 0$, то функциональные уравнения (38) и (39), дающие связь между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, запишем в виде [1, с. 94]

$$\tau(x) = \int\limits_x^0 J_0(\sqrt{\alpha}(t-x))\nu(t)\,dt, \quad -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{41}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x J_0(\sqrt{\alpha}(x-t))\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_2. \tag{42}$$

Из равенства (40), учитывая представления (41) и (42), следует, что $(\lambda = -\alpha > 0)$

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy + \int\limits_{-l_1}^0 \nu(x) \int\limits_x^0 I_0(\sqrt{\lambda}(t-x))\nu(t)\,dt\,dx +$$

$$+\int\limits_0^{l_2}\nu(x)\int\limits_0^x I_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t)\,dt\,dx=0.$$

Отсюда, учитывая обозначения (22) и (23), имеем

$$\int\limits_{G_0}(u_x^2+u_y^2-\lambda u^2)\,dx\,dy+V_1(\nu)+V_2(\nu)=0,$$

и, воспользовавшись неравенством (17) и тем, что функционалы $V_1(\nu)$ и $V_2(\nu)$ не могут быть отрицательными, получаем

$$(\lambda_0-\lambda)\int\limits_{G_0}u^2\,dx\,dy\leqslant 0.$$

Поэтому, если $0<\lambda<\lambda_0$, то $u\equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области $\overline{G}$. Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 1 и 2 доказаны без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарёв С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции Т. II. М., 1974.
3. *Ладыженская О.А., Уравльцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
4. *Градштейн Г.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
5. *Пономарёв С.М.* К спектральной задаче Геллерстедта–Франкля для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1699–1702.

г. Москва

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.
После доработки 23.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 496–506

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛОСЕ С НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ РАЗДЕЛА СРЕД

© 2021 г. С. И. Сахаров

Доказано существование классического решения контактной задачи для параболических по Петровскому систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полосе, разделённой негладкой кривой на две области.

DOI: 10.31857/S0374064121040051

Важное место в теории краевых задач для параболических систем занимают задачи с разрывными коэффициентами (см. [1, с. 157]). Однозначная классическая разрешимость в классах Гёльдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ контактной задачи для параболических систем установлена в работах [2–4]. Особый интерес такая задача представляет в случае негладкой кривой раздела сред (см., например, [5, с. 183–188; 6, 7]). В [8] исследованы существование и единственность решения в классе Дини контактной задачи для параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на негладкой кривой раздела сред, принадлежащей классу Дини–Гёльдера. В работах [9, 10] доказана однозначная разрешимость в классах $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$ контактной задачи для многомерного по пространственной переменной x параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на негладкой поверхности раздела сред.

В настоящей работе установлена классическая разрешимость в классе $C^{1,0}$ контактной задачи для одномерных (по x) параболических систем второго порядка с негладкой кривой раздела сред, принадлежащей классу Дини–Гёльдера, при более слабых, чем в [8], предположениях о гладкости коэффициентов и минимальных предположениях о гладкости правых частей в условиях сопряжения. В частности, от правой части в условии сопряжения первого рода требуется только существование непрерывной дробной производной порядка $1/2$, а от правой части в условии сопряжения второго рода – лишь непрерывность. Исследование проводится методом интегральных уравнений, разработанным в [11–13].

Статья состоит из трёх пунктов. В п. 1 вводятся используемые в работе обозначения и функциональные пространства, ставится контактная задача и формулируется основная теорема. В п. 2 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений, к которой редуцируется исходная задача. В п. 3 доказывается основная теорема.

1. Постановка задачи. Пусть фиксировано положительное число T. Через $C[0,T]$ обозначим линейное пространство непрерывных (вектор-)функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 = \max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$, а через $\underset{0}{C}[0,T]$ – его подпространство, состоящее из (вектор-)функций, обращающихся в нуле в нуль. Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под нормой $|a|$ (соответственно, нормой $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [11, 12], введём следующие линейные нормированные пространства: $C^{1/2}[0,T] := \{\psi \in C[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in C[0,T]\}$ с нормой $\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)| + \max\limits_{t\in[0,T]}|\partial^{1/2}\psi(t)|$ и $\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T] := \{\psi \in C^{1/2}[0,T] : \psi(0) = 0,$ $\partial^{1/2}\psi(0) = 0\}$.

Пусть $D=\mathbb{R}\times(0,T)$, а Ω – некоторая область в D. Рассмотрим линейное пространство $C^0(\overline{\Omega})$ непрерывных и ограниченных (вектор-)функций $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$ и его подпространство $\underset{0}{C}(\overline{\Omega}):=\{u\in C^0(\overline{\Omega}):u(x,0)=0\}$, а также линейное пространство $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}):=\{u\in \underset{0}{C}(\overline{\Omega}):\partial_x u\in \underset{0}{C}(\overline{\Omega})\}$ с нормой $\|u;\Omega\|^{1,0}=\sum_{l=0}^1\|\partial_x^l u;\Omega\|^0$.

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Функция $\nu(z)$, $z\geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если при некоторой положительной постоянной C выполняется неравенство $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$ для всех $z_1\geqslant z_2\geqslant 0$.

Следуя [14, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ такую, что $\omega(0)=0$. Заметим, что

$$\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\}\leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\}$$

для некоторых положительных постоянных C, c и всех $x\in\mathbb{R}$ и $t>0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если выполняется соотношение

$$\widetilde{\omega}(z):=\int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0. \tag{1}$$

Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини (1), то функция $\widetilde{\omega}$ – также модуль непрерывности, причём $\omega(z)\leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z\geqslant 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z)=\omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом, если ω удовлетворяет условию (1), то ω^* также удовлетворяет условию Дини (1) и при $z\geqslant 0$ имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z)=2\widetilde{\omega}(z^{1/2})$.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Через $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ обозначим линейное пространство (вектор-)функций $\psi\in\underset{0}{C}[0,T]$, для которых

$$\|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega}=\|\psi;[0,T]\|^0+\sup_{t,t+\Delta t\in(0,T)}\left\{\frac{|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty.$$

Введём пространство $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$ (вектор-)функций $\psi\in\underset{0}{C}[0,T]$, для которых

$$\|\psi;[0,T]\|^{\omega}=\|\psi;[0,T]\|^0+\sup_{t,t+\Delta t\in(0,T)}\left\{\frac{|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|}{\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty.$$

Замечание 1.1. Если $\psi\in\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, где ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), то $\psi\in\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. [15]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [12]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболические по Петровскому (см. [16]) операторы

$$L^{(s)}u=\partial_t u-\sum_{k=0}^2 A_k^{(s)}(x,t)\partial_x^k u,\quad u=(u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}},\quad s=1,2,$$

где $A_k^{(s)}=\|a_{ijk}^{(s)}\|_{i,j=1}^m$ – $m\times m$-матрицы, элементы которых – вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(a) собственные числа $\mu_r^{(s)}$ матриц $A_2^{(s)}$ подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r^{(s)}(x,t)\geqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $r=\overline{1,m}$, $s=1,2$;

(b) $a_{ijk}^{(s)}\in C^0(\overline{D})$ и $|\Delta_{x,t}a_{ijk}^{(s)}(x,t)|\leqslant\omega_0(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})$, $k=0,1,2$, $i,j=\overline{1,m}$, $s=1,2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что $\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z)=\int_0^z y^{-1}\,dy\int_0^y\omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty$, $z>0$, и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает.

Полоса D разделяется на области $\Omega^{(1)} = \{(x,t) \in D : x < g(t)\}$ и $\Omega^{(2)} = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ негладкой, вообще говоря, кривой $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию

$$|\Delta_t g(t)| \leqslant |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{2}$$

ω_1 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), и такой, что при некотором $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z > 0$, почти убывает.

Ставится задача нахождения (вектор-)функций $u^{(s)} \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s = 1,2$, являющихся регулярными решениями уравнений

$$L^{(s)}u^{(s)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1,2, \tag{3}$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$u^{(1)}(x,0) = 0, \quad x \leqslant g(0); \quad u^{(2)}(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \tag{4}$$

и на границе Σ условиям сопряжения

$$\partial_x^k (u^{(1)} - u^{(2)})(g(t),t) = \psi_{k+1}(t), \quad k = 0,1, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ – заданные функции.

Известно (см. [17]), что при выполнении условий (a) и (b) у систем $L^{(s)}u^{(s)} = 0$, $s = 1,2$, существуют фундаментальные матрицы решений

$$\Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau) = Z(x-\xi, t-\tau; A_2^{(s)}(\xi,\tau)) + W^{(s)}(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}, \quad t > \tau, \tag{6}$$

где

$$Z(x,t;A_2^{(s)}(\xi,\tau)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\exp\{-\sigma^2 A_2^{(s)}(\xi,\tau)t\}\,d\sigma, \quad t > 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$W^{(s)}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(x-y, t-\eta; A_2^{(s)}(y,\eta))\mu^{(s)}(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{8}$$

(вектор-)плотности $\mu^{(s)}$ в представлении (8) находятся из условия, что матрицы $\Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau)$ при любых фиксированных (ξ,τ), $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \tau < T$, удовлетворяют по переменным (x,t) уравнениям $L^{(s)}u^{(s)} = 0$ в слое $\mathbb{R} \times (\tau, T)$.

Имеют место следующие оценки (см. [17]):

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},$$

$$|\partial_t^k \partial_x^l W^{(s)}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{9}$$

$2k + l \leqslant 2$, $x,\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$,

$$|\partial_t^k \partial_x^l Z(x,t;A_2^{(s)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-x^2/t\}, \tag{10}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k \partial_x^l Z(x,t;A_2^{(s)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)\omega_0(|\Delta\xi| + |\Delta\tau|^{1/2})t^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-cx^2/t\},$$

$k,l \geqslant 0$, $x,\xi,\xi+\Delta\xi \in \mathbb{R}$, $\tau,\tau+\Delta\tau \in [0,T]$, $t > 0$,

$$|\Delta_t \partial_x^l W^{(s)}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{11}$$

$l=0,1,\ x,\xi\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T,\ \Delta t\leqslant t-\tau$. Здесь и далее через C и c обозначаем положительные постоянные, зависящие от величин δ, T, коэффициентов операторов $L^{(s)}$ и кривой Σ.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть коэффициенты операторов $L^{(s)}$, $s=1,2$, удовлетворяют условиям (a) и (b), а для функции g, задающей кривую Σ, выполняется условие (2). Тогда для любых (вектор-)функций $\psi_1\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2\in \underset{0}{C}[0,T]$ решением задачи (3)–(5) являются потенциалы простого слоя*

$$u^{(s)}(x,t)=\int\limits_0^t\Gamma^{(s)}(x,t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Omega^{(s)}},\quad s=1,2,\tag{12}$$

где $(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)})^{\text{т}}\in \underset{0}{C}[0,T]\times\underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]\times C[0,T]$ решение системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^2(-1)^{(s+1)}\int\limits_0^t\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\,d\tau=\psi_1(t),\tag{13}$$

$$\sum_{s=1}^2\left[(2A_2^{(s)})^{-1}(g(t),t)\varphi^{(s)}(t)+(-1)^{s+1}\int\limits_0^t\partial_x\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\,d\tau\right]=\psi_2(t),\tag{14}$$

$t\in[0,T]$, *и справедливы оценки*

$$\|u^{(s)};\Omega^{(s)}\|^{1,0}\leqslant C(\|\psi_1;[0,T]\|^{1/2}+\|\psi_2;[0,T]\|^0),\quad s=1,2.\tag{15}$$

Замечание 1.2. Условия $\psi_1\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $\psi_2\in \underset{0}{C}[0,T]$ теоремы являются минимальными для того, чтобы функции $u^{(s)}$, $s=1,2$, являющиеся решением задачи (3)–(5), принадлежали классам $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s=1,2$.

В самом деле, пусть $D^+=\{(x,t)\in D: x>0\}$ и функция $u\in\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D^+})$ является регулярным решением уравнения $\partial_t u-\partial_x^2u=0$ в D^+. Обозначим $\hat\psi_1(t)=u(0,t)$, $\hat\psi_2(t)= =\partial_x u(0,t)$, $t\in[0,T]$. Тогда $\hat\psi_2\in\underset{0}{C}[0,T]$. Докажем, что $\hat\psi_1\in\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$. Из представления

$$u(x,t)=-2\int\limits_0^t Z(x,t-\tau)\hat\psi_2(\tau)\,d\tau,\quad\text{где}\quad Z(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,$$

и равенства (см. [12])

$$\partial_t^{1/2}Z(x,t)=-\partial_x Z(x,t),\quad x>0,\quad t>0,$$

следует, что

$$\partial_t^{1/2}u(x,t)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_t\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\,d\tau\int\limits_0^\tau Z(x,\tau-\eta)\hat\psi_2(\eta)\,d\eta=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_t\int\limits_0^t\hat\psi_2(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^t(t-\eta)^{-1/2}Z(x,\eta-\tau)\,d\eta=-2\int\limits_0^t\hat\psi_2(\tau)\partial_t^{1/2}Z(x,t-\tau)\,d\tau=$$

$$=2\int\limits_0^t\hat\psi_2(\tau)\partial_x Z(x,t-\tau)\,d\tau=-\partial_x u(x,t),\quad (x,t)\in D^+.\tag{16}$$

Из равномерной по $t \in [0,T]$ сходимости $\partial_x u(x,t) \to \hat{\psi}_2(t)$ при $x \to +0$ и из (16) следует, что

$$\partial_t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x,\tau)\, d\tau \to -\hat{\psi}_2(t)$$

при $x \to +0$ равномерно по $t \in [0,T]$. Отсюда в силу соотношения

$$\lim_{x\to+0} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x,\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} \hat{\psi}_1(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T],$$

заключаем, что существует

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} \hat{\psi}_1(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T],$$

и $\hat{\psi}_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$.

2. Система интегральных уравнений. Следуя методу из [11–13], докажем, что для любых $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ существует единственное решение $\varphi^{(s)} \in \underset{0}{C}[0,T]$, $s = 1,2$, системы (13), (14). Пусть $\overline{A}^{(s)}(\tau) = A_2^{(s)}(g(\tau),\tau)$, $s = 1,2$. Используя представление (6), положим

$$\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau) = Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau)) + N_1^{(s)}(t,\tau),$$

где

$$N_1^{(s)}(t,\tau) = [Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau)) - Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))] + W^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau).$$

Обозначим $N_2^{(s)}(t,\tau) = \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)$. Тогда система (13), (14) запишется в виде

$$\sum_{s=1}^{2} (-1)^{s+1} \bigg\{ \int\limits_0^t Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))\varphi^{(s)}(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t N_1^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\, d\tau \bigg\} = \psi_1(t), \tag{17}$$

$$\sum_{s=1}^{2} \bigg\{ \frac{1}{2}(\overline{A}^{(s)})^{-1}(t)\varphi^{(s)}(t) + (-1)^{s+1} \int\limits_0^t N_2^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\, d\tau \bigg\} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Пусть

$$M^{(s)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 \overline{A}^{(s)}(\tau)\}\, dy, \quad s = 1,2, \tag{19}$$

и

$$I^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T].$$

В силу обозначения (7) имеем

$$Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} M^{(s)}(\tau), \quad s = 1,2,$$

поэтому уравнение (17) может быть записано в виде

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{s+1}\left\{\frac{1}{2}I^{1/2}(M^{(s)}\varphi^{(s)})(t)+\int\limits_0^t N_1^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\,d\tau\right\}=\psi_1(t),\quad t\in[0,T].$$

Обозначим

$$H_k^{(s)}\varphi^{(s)}(t)=\int\limits_0^t N_k^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)\,d\tau,\quad s=1,2,\quad k=1,2,\quad t\in[0,T],$$

и запишем систему (17), (18) в операторном виде

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{s+1}\left\{\frac{1}{2}I^{1/2}(M^{(s)}\varphi^{(s)})+H_1^{(s)}\varphi^{(s)}\right\}=\psi_1, \tag{20}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\{(2\overline{A}^{(s)})^{-1}\varphi^{(s)}+(-1)^{s+1}H_2^{(s)}\varphi^{(s)}\}=\psi_2. \tag{21}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы* $H_1^{(s)}$, $s=1,2$, *являются ограниченными операторами из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega=\widetilde{\omega}_0+\omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|H_1^{(s)}\varphi(t)|\leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}), \tag{22}$$

$$|\Delta_t H_1^{(s)}\varphi(t)|\leqslant C\|\varphi\|^0(\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \tag{23}$$

$t,t+\Delta t\in[0,T]$, $\Delta t>0$, $s=1,2$, $\|\varphi\|^0=\|\varphi;[0,T]\|^0$.

Докажем неравенство (22). В силу условия (2) и оценки (10) имеем

$$|Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))-Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))|\leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\omega_1((t-\tau)^{1/2}),$$

откуда, с учётом (9),

$$|N_1^{(s)}(t,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\omega((t-\tau)^{1/2}), \tag{24}$$

и, следовательно,

$$|H_1^{(s)}\varphi(t)|\leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\omega((t-\tau)^{1/2})\,d\tau\leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}),\quad s=1,2.$$

Неравенство (23) в силу оценки (22) достаточно доказать в случае $0<\Delta t<t$. Положим

$$\Delta_t H_k^{(s)}\varphi(t)=\sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t}N_k^{(s)}(t+j\Delta t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t-\Delta t}[\Delta_t N_k^{(s)}(t,\tau)]\varphi(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv R_{k,1}^{(s)}(t)-R_{k,0}^{(s)}(t)+R_{k,2}^{(s)}(t),\quad k=1,2,\quad s=1,2. \tag{25}$$

Из неравенства (24) вытекает оценка для $R_{1,j}^{(s)}(t)$ при $j=0,1$ и $s=1,2$:

$$|R_{1,j}^{(s)}(t)|\leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t}(t+j\Delta t-\tau)^{-1/2}\omega((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})\,d\tau\leqslant C\|\varphi\|^0(\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим функцию $R_{1,2}^{(s)}(t)$. Из представления (см. [18])

$$\partial_x Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau)) = -\frac{g(t)-g(\tau)}{2(t-\tau)}(\overline{A}^{(s)})^{-1}(\tau)Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau)), \qquad (26)$$

теоремы о среднем и неравенств (2), (10) следует, что

$$|\Delta_t[Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))-Z(0,t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))]| \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})[(\Delta t)^{1/2}(t-\tau)^{-1}\omega_1((\Delta t)^{1/2})+\Delta t(t-\tau)^{-3/2}], \quad \Delta t\leqslant t-\tau.$$

Отсюда и из оценки (11) вытекает неравенство

$$|\Delta_t N_1^{(s)}(t,\tau)| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1}\omega_1((t-\tau)^{1/2})+$$

$$+\Delta t(t-\tau)^{-3/2}\omega((t-\tau)^{1/2})\}, \quad \Delta t\leqslant t-\tau,$$

вследствие которого получаем

$$|R_{1,2}^{(s)}(t)| \leqslant C\bigg\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\widetilde{\omega}_1(T^{1/2})+(\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2}\widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}\,d\tau+$$

$$+(\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2}\,d\tau\bigg\}\|\varphi\|^0 \leqslant C\|\varphi\|^0(\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s=1,2.$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы* $H_2^{(s)}$, $s=1,2$, *являются ограниченными операторами из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}{}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$, $\widetilde{\omega}=\widetilde{\widetilde{\omega}}_0+\widetilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценок

$$|H_2^{(s)}\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}(t^{1/2}), \qquad (27)$$

$$|\Delta_t H_2^{(s)}\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}), \qquad (28)$$

$t, t+\Delta t\in[0,T]$, $s=1,2$, $\Delta t>0$.

Докажем неравенство (27). В силу представления (6) имеем

$$N_2^{(s)}(t,\tau)=\partial_x Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))+\partial_x W^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau), \quad s=1,2.$$

Из неравенств (2), (10) и представления (26) следует оценка

$$|\partial_x Z(g(t)-g(\tau),t-\tau;\overline{A}^{(s)}(\tau))| \leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1},$$

которая вместе с неравенством (9) даёт оценку

$$|N_2^{(s)}(t,\tau)| \leqslant C\omega((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}, \quad s=1,2, \qquad (29)$$

и, следовательно,

$$|H_2^{(s)}\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\omega((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}(t^{1/2}), \quad s=1,2.$$

Неравенство (28) для $s = 1,2$ доказываем с помощью представления (25). При этом в силу оценки (27) можно считать, что $0 < \Delta t < t$. Из (29) вытекает, что при $s = 1,2$, $j = 0,1$ справедлива оценка

$$|R^{(s)}_{2,j}(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} \omega((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})(t+j\Delta t-\tau)^{-1}\, d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим $R^{(s)}_{2,2}(t)$. Используя соотношения (2), (10) и (26), получаем

$$|\Delta_t\partial_x Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{A}^{(s)}(\tau))| \leqslant C[(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2} + (\Delta t)\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-2}] \leqslant$$
$$\leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}, \quad 0 < \Delta t < t-\tau, \quad s = 1,2.$$

Вместе с неравенством (11) это даёт оценку

$$|R^{(s)}_{2,2}(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\bigg\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-3/2}\, d\tau +$$
$$+ (\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2}\widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}\, d\tau\bigg\} \leqslant C\|\varphi\|^0\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1,2.$$

Приведём известные результаты для дальнейшего исследования полученной системы интегральных уравнений.

Лемма 2.3 [15]. *Пусть ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1). Тогда $\partial^{1/2}$ – ограниченный оператор из $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ в $\underset{0}{H}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$.*

Следуя А.Н. Тихонову [19], назовём оператор $K : C[0,T] \to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t \in [0,T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 2.4 [12]. *Пусть $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, где ω – модуль непрерывности. Тогда для любой (вектор-)функции $\psi \in C[0,T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$ и справедлива оценка $\|\varphi; [0,T]\|^0 \leqslant C\|\psi; [0,T]\|^0$ с некоторой положительной постоянной C.*

Основным результатом этого пункта работы является

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любых (вектор-)функций $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ система (13), (14) имеет единственное решение $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) \in \underset{0}{C}[0,T] \times \underset{0}{C}[0,T]$ и для него справедливы оценки*

$$\|\varphi^{(s)}; [0,T]\|^0 \leqslant C(\|\psi_1; [0,T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0,T]\|^0), \quad s = 1,2. \tag{30}$$

Доказательство. Как показано выше, система (13), (14) может быть записана в виде системы (20), (21). Применяя к обеим частям векторного уравнения (20) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получаем в силу лемм 2.1–2.3 и равенств $\partial^{1/2}I^{1/2}\varphi = \varphi$, $I^{1/2}\partial^{1/2}\psi = \psi$, справедливых для любых $\varphi \in C[0,T]$ и $\psi \in C^{1/2}[0,T]$, следующую систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентную для $\varphi^{(s)} \in C[0,T]$ системе (20), (21):

$$\sum_{s=1}^{2}[(-1)^{s+1}M^{(s)}\varphi^{(s)} + K^{(s)}_1\varphi^{(s)}] = 2\partial^{1/2}\psi_1, \tag{31}$$

$$\sum_{s=1}^{2}[(\overline{A}^{(s)})^{-1}\varphi^{(s)} + K^{(s)}_2\varphi^{(s)}] = 2\psi_2, \tag{32}$$

где $K^{(s)}_1 = (-1)^{s+1}2\partial^{1/2}H^{(s)}_1$, $K^{(s)}_2 = (-1)^{s+1}2H^{(s)}_2$, $s = 1,2$.

Положим

$$A(t)=\begin{pmatrix} M^{(1)} & -M^{(2)} \\ (\overline{A}^{(1)})^{-1} & (\overline{A}^{(2)})^{-1} \end{pmatrix}(t), \quad t\in[0,T],$$

и докажем, что $\det A(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$. В самом деле, пусть $t_0\in[0,T]$ фиксировано, $A = A(t_0)$, $A^{(s)}=\overline{A}^{(s)}(t_0)$, $M^{(s)}=M^{(s)}(t_0)$, $s=1,2$, и

$$Q(p)=\begin{pmatrix} M^{(1)}/\sqrt{p} & -M^{(2)}/\sqrt{p} \\ (A^{(1)})^{-1} & (A^{(2)})^{-1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

Достаточно проверить, что $\det Q(p)\neq 0$, $\operatorname{Re} p>0$. Известны оценки (см. [20, с. 299])

$$|\exp\{-t(pE+A^{(s)}\sigma^2)\}|\leqslant C(1+t^{1/4}+t^{1/4}|\sigma|)^{8(m-1)}\exp\{-ct(1+\sigma^2)\}, \tag{33}$$

$t\geqslant 0$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Re} p>0$, $s=1,2$, где C и c – некоторые положительные постоянные, E – единичная матрица. В [21, с. 354] доказано, что

$$\det(pE+A^{(s)}\sigma^2)\neq 0, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} p>0, \quad s=1,2. \tag{34}$$

Вследствие обозначения (19) и соотношений (33), (34) с использованием теоремы Коши (см. [21, с. 357]) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{p}}M^{(s)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-tA^{(s)}\sigma^2\}\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_0^{+\infty}2\exp\{-t(pE+A^{(s)}\sigma^2)\}\,d\sigma=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}d\sigma\int\limits_0^{+\infty}2(pE+A^{(s)}\sigma^2)^{-1}\partial_t\exp\{-t(pE+A^{(s)}\sigma^2)\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(pE+A^{(s)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\gamma^+}(pE+A^{(s)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma, \tag{35}$$

$\operatorname{Re} p>0$, $s=1,2$, где γ^+ – простой замкнутый контур, лежащий целиком в положительной полуплоскости и охватывающий корни уравнений $\det(pE+A^{(s)}\sigma^2)$, $s=1,2$, имеющие положительные мнимые части.

Кроме того, известны равенства (см. [21, с. 357])

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma^+}\sigma(pE+A^{(s)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma=(A^{(s)})^{-1}, \quad \operatorname{Re} p>0, \quad s=1,2.$$

Отсюда и из представления (35) следует, что

$$Q(p)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{\gamma^+}(pE+A^{(1)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma & -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{\gamma^+}(pE+A^{(2)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma^+}\sigma(pE+A^{(1)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma & \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma^+}\sigma(pE+A^{(2)}\sigma^2)^{-1}\,d\sigma \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

Условие $\det Q(p) \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, совпадает (см. [1, с. 694–700]) с условием однозначной разрешимости следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$L(d/dx, p)v = 0, \quad x > 0,$$
$$(B(d/dx)v)(x,p)|_{x=0} = 0,$$
$$|v(x,p)| \underset{x\to+\infty}{\to} 0,$$

где

$$L(d/dx,p) = pE + \hat{A}\, d^2/dx^2, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B(d/dx) = \begin{pmatrix} E & -E \\ E\, d/dx & E\, d/dx \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

и равносильным образом может быть сформулировано в виде (см. [1, с. 700]): строки матрицы

$$\hat{Q}(p) = \begin{pmatrix} P^{(1)}(\sigma)(pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} & -P^{(2)}(\sigma)(pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} \\ i\sigma P^{(1)}(\sigma)(pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} & i\sigma P^{(2)}(\sigma)(pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} \end{pmatrix},$$

где $P^{(s)}$, $s = 1,2$, – полиномы по σ, корни которых совпадают соответственно с корнями уравнений $\det(pE + A^{(s)}\sigma^2)$, $s = 1,2$, имеющими отрицательную мнимую часть, линейно независимы как полиномы по σ при $\operatorname{Re} p > 0$. Так как это условие для $\hat{Q}$, очевидно, выполнено, то, следовательно, $\det Q(p) \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Введём обозначения

$$K = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} & K_1^{(2)} \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 2\partial^{1/2}\psi_1 \\ 2\psi_2 \end{pmatrix}$$

и запишем систему (31), (32) в виде векторного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \tag{36}$$

где оператор $\hat{K}$ действует по правилу:

$$(\hat{K}\varphi)(t) = A^{-1}(t)(K\varphi)(t), \quad \varphi \in C[0,T], \quad \hat{\psi}(t) = A^{-1}(t)\psi(t).$$

В силу лемм 2.1–2.3 $\hat{K} : C[0,T] \to \underset{0}{H}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, и по лемме 2.4 уравнение (36) имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$, причём выполнена оценка $\|\varphi;[0,T]\|^0 \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^0$. Следовательно, справедлива оценка (30). Кроме того, из вида уравнений (31), (32), условий на ψ_1, ψ_2 и лемм 2.1–2.3 следует, что $\varphi^{(s)}(0) = 0$, $s = 1,2$.

3. Доказательство теоремы. Решение задачи (3)–(5) ищем в виде потенциалов простого слоя (12), где (вектор-)плотности $\varphi^{(s)} \in \underset{0}{C}[0,T]$, $s = 1,2$, подлежат определению. Для любых $\varphi^{(s)} \in C[0,T]$, $s = 1,2$, (вектор-)функции $u^{(s)}$, $s = 1,2$, являются регулярными решениями уравнений (3) и удовлетворяют начальным условиям (4). Подставляя представления (12) в условия сопряжения (5), получаем для нахождения неизвестных (вектор-)плотностей $\varphi^{(s)}$, $s = 1,2$, систему интегральных уравнений Вольтерры (13), (14). Из леммы 2.5 следует, что система (13), (14) имеет единственное решение $\varphi^{(s)} \in \underset{0}{C}[0,T]$, $s = 1,2$. Поэтому существует решение задачи (3)–(5), которое имеет вид (12), где $\varphi^{(s)}$, $s = 1,2$, – решение системы (13), (14). Из результатов работы [13] о свойствах потенциала простого слоя и оценок (30) следует, что найденные решения принадлежат классам $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s = 1,2$, и выполнены оценки (15). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Житарашу Н.В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 3. С. 511–513.
3. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Матрица Грина однородной параболической граничной задачи для систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 4. С. 797–800.
4. *Дринь М.М., Ивасишен С.Д.* Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И.Г. Петровскому системы с разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С. 7–10.
5. *Лахтин Ю.М., Коган Я.Д., Шпис Г.И., Бёмер З.* Теория и технология азотирования. М., 1992.
6. *Mittemeijer E., Somers M.A.J.* Thermodynamics, kinetics, and process control of nit riding // Surface Enjineering. 1997. V. 13. № 6. P. 483–497.
7. *Ratajski J.* Model of growth kinetics of nitrided layer in the binary Fe–N system, nitriding technology. Theorie & practice // Proc. the 9th Intern. Seminar. Warsaw, 2003. P. 149–159.
8. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
9. *Шевелева В.Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 172–174.
10. *Шевелева В.Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности. II // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С. 729–730.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
12. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
13. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 753–765.
14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
15. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
16. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
17. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
18. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. ВИНИТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-В88.
19. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
20. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
21. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 507–525

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С НЕЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

© 2021 г. С. Н. Тимергалиев

Изучается разрешимость нелинейной краевой задачи для системы пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных анизотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064121040063

1. Постановка задачи. В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}+R^j=0,\quad j=1,2,$$

$$T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda}+k_\lambda T^{\lambda\lambda}+(T^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda}+R^3=0,$$

$$M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}-T^{j3}+L^j=0,\quad j=1,2, \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$T^{j1}\,d\alpha^2/ds-T^{j2}\,d\alpha^1/ds=P^j(s),\quad j=1,2,$$

$$T^{13}\,d\alpha^2/ds-T^{23}\,d\alpha^1/ds+T^{11}w_{3\alpha^1}\,d\alpha^2/ds-T^{22}w_{3\alpha^2}\,d\alpha^1/ds+$$

$$+T^{12}(w_{3\alpha^2}\,d\alpha^2/ds-w_{3\alpha^1}\,d\alpha^1/ds)=P^3(s),$$

$$M^{j1}\,d\alpha^2/ds-M^{j2}\,d\alpha^1/ds=N^j(s),\quad j=1,2. \tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$T^{ij}\equiv T^{ij}(\gamma^0)=D_0^{ijkn}\gamma^0_{kn},\quad M^{ij}\equiv M^{ij}(\gamma^1)=D_2^{ijkn}\gamma^1_{kn},\quad i,j,k,n=\overline{1,3},$$

$$\gamma^l=(\gamma^l_{11},\gamma^l_{12},\gamma^l_{13},\gamma^l_{22},\gamma^l_{23},\gamma^l_{33}),\quad l=0,1;$$

$$D_m^{ijkn}=D_m^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2)=\int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2}B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)(\alpha^3)^m\,d\alpha^3,\quad m=0,2,\quad i,j,k,n=\overline{1,3};$$

$$\gamma^0_{jj}=w_{j\alpha^j}-k_jw_3+w^2_{3\alpha^j}/2\quad(j=1,2),\quad \gamma^0_{12}=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}+w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},\quad \gamma^1_{jj}=\psi_{j\alpha^j}\quad(j=1,2),$$

$$\gamma^1_{12}=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1},\quad \gamma^0_{j3}=w_{3\alpha^j}+\psi_j\quad(j=1,2),\quad \gamma^0_{33}=\gamma^1_{k3}\equiv 0\quad(k=\overline{1,3}), \tag{3}$$

$B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ – известные функции трёх переменных, $\alpha^j=\alpha^j(s)$ $(j=1,2)$ – уравнения кривой Γ, s – длина дуги Γ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ, $\lambda=1,2$.

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой пологой анизотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к декартовой системе координат. При этом: T^{ij} – усилия, M^{ij} – моменты; γ_{ij}^l $(i,j=\overline{1,3},\ l=0,1)$ – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, отождествляемой с областью Ω; w_j $(j=1,2)$ и w_3 – соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек поверхности S_0; ψ_i $(i==1,2)$ – углы поворота нормальных сечений поверхности S_0; R^j, P^j $(j=\overline{1,3})$, L^k, N^k $(k=1,2)$ – компоненты внешних сил, действующих на оболочку; $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ $(i,j,k,n==\overline{1,3})$ – упругие характеристики оболочки; $k_j=k_j(\alpha^j)$ $(j=1,2)$ – главные кривизны; $h_0=\mathrm{const}$ – толщина оболочки; α^1, α^2 – декартовы координаты точек области Ω.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам – от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Необходимо отметить, что к настоящему времени достаточно полно изучена разрешимость системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей состояние равновесия оболочек в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява [2–5]. Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява, вошли в известный список нерешённых проблем математической теории оболочек [2, с. 349]. В настоящее время имеется ряд работ [6–12], в которых в рамках сдвиговой модели Тимошенко исследована разрешимость и доказаны теоремы существования обобщённых решений в соболевских пространствах нелинейных задач для пологих изотропных оболочек с незакреплёнными и шарнирно-опёртыми краями. В основе исследований в [6–12] лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям. Построение интегральных представлений является одним из существенных моментов этого метода исследования.

В настоящей статье метод работ [6–12] развивается на случай пологих неоднородных анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями, который описывается более общей системой нелинейных дифференциальных уравнений, что существенно усложняет исследование краевой задачи.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) квадратичная форма $B^{ijkn}\gamma_{ij}\gamma_{kn}$ положительно определена во всём объёме, занятом оболочкой;

(b) упругие характеристики $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ – чётные функции по переменной α^3 на отрезке $[-h_0/2,h_0/2]$, и имеют место включения $B^{ijkn}\in W_p^{(1)}(\Omega)\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$ $(i,j,k,n==\overline{1,3})$ и $B^{1111},B^{1212},B^{1313}\in C_\beta(\overline{\Omega})\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$;

(c) $k_j\in W_p^{(1)}(\Omega)$ $(j=1,2)$;

(d) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j $(j=\overline{1,3})$ и N^k $(k=1,2)$ – пространству $C_\beta(\Gamma)$;

(e) Ω – произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и везде далее $2<p<4/(2-\beta)$, $0<\beta<1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ *обобщённым решением* задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$ и почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(i)}(\Omega)$ $(i=1,2)$ – пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

2. Построение интегральных представлений для обобщённых перемещений. Введём в рассмотрение две комплексные функции:

$$\omega_j = \omega_j(z) = D^{1111}_{n_j}(\nu_{j1\alpha^1} + \nu_{j2\alpha^2}) + iD^{1212}_{n_j}(\nu_{j2\alpha^1} - \nu_{j1\alpha^2}), \quad n_j = 2(j-1),$$

$$\nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1,2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \tag{4}$$

В системе (1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ^l_{jk} заменим их выражениями из (3). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвёртому уравнению – пятое, умноженное также на i, систему (1) при помощи функций $\omega_j(z)$ из (4) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\omega_{j\bar z} + h^j(a) = f^j(a) - F^j(z), \quad j = 1,2,$$

$$D^{1313}_0(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \tag{5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\omega_{j\bar z} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1,2, \quad f^j(a) = f^j_e(a) + f^j_\chi(a), \quad f^j_e(a) = f^j_s(a'') + f^j_c(a), \quad j = \overline{1,3},$$

$$h^j(a) = D^{1212}_{n_j\alpha^2}\nu_{j2\alpha^1} - D^{1212}_{n_j\alpha^1}\nu_{j2\alpha^2} + i(D^{1212}_{n_j\alpha^1}\nu_{j1\alpha^2} - D^{1212}_{n_j\alpha^2}\nu_{j1\alpha^1}) - (j-1)D^{1313}_0(\gamma^0_{13} + i\gamma^0_{23})/2,$$

$$n_j = 2(j-1), \quad j = 1,2, \quad h^3(a) = D^{1313}_{0\alpha^\lambda}w_{3\alpha^\lambda} + (D^{1313}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda};$$

$$f^{2j-1}_s(a'') = f^{\lambda\mu}_{2j-1k}w_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad j = 1,2, \quad f^2_s(a'') = f^{\lambda\mu}_{2\delta}\psi_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu},$$

$$f^{jj}_{k1} = -iD^{12jj}_{n_k}/2, \quad 2f^{12}_{kj} = -i^{j-1}[D^{12jj}_{n_k} - i(-1)^jD_{n_k}/2], \quad j = 1,2,$$

$$f^{11}_{k2} = -D^{1112}_{n_k}/2, \quad f^{22}_{k2} = [i(D^{1111}_{n_k} - D^{2222}_{n_k}) - D^{1222}_{n_k}]/2, \quad k = 1,2;$$

$$f^{jj}_{13} = -(D^{1jj3}_0 + iD^{j2j3}_0)/2, \quad j = 1,2, \quad 2f^{12}_{13} = -i^{\lambda-1}(D^{1\lambda23}_0 + D^{2\lambda13}_0)/2;$$

$$f^{jj}_{3k} = D^{j3jk}_0, \quad j,k = 1,2, \quad 2f^{12}_{3j} = D^{231j}_0 + D^{13j2}_0, \quad j = \overline{1,3}, \quad f^{11}_{33} = 0, \quad f^{22}_{33} = D^{2323}_0 - D^{1313}_0,$$

$$D_{n_k} = D^{1122}_{n_k} - D^{1111}_{n_k} + 2D^{1212}_{n_k}, \quad n_k = 2(k-1), \quad k = 1,2;$$

$$f^j_c(a) = (-1/2)\{D^{12\lambda\lambda}_{n_j\alpha^2}\nu_{j\lambda\alpha^\lambda} + D^{1112}_{n_j\alpha^1}(\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1}) + D_{n_j\alpha^1}\nu_{j2\alpha^2} + (2-j)[D^{1\mu\lambda3}_{0\alpha^\mu}w_{3\alpha^\lambda} -$$

$$- (D^{1\mu\lambda\lambda}_0k_\lambda w_3)_{\alpha^\mu} + (D^{1\mu\lambda3}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\mu}] + (j-1)[D^{13\lambda\lambda}_0k_\lambda w_3 - D^{1323}_0\gamma^0_{23} - D^{13\lambda\lambda}_0w_{\lambda\alpha^\lambda} -$$

$$- D^{1312}_0e^0_{12}] + i\{D^{1\lambda\lambda2}_{n_j\alpha^1}\nu_{j\lambda\alpha^\lambda} + D^{1222}_{n_j\alpha^2}(\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1}) + D_{n_j\alpha^2}\nu_{j1\alpha^1} + (D^{2222}_{n_j} - D^{1111}_{n_j})_{\alpha^2}\nu_{j2\alpha^2} +$$

$$+ (2-j)[D^{2\mu\lambda3}_{0\alpha^\mu}w_{3\alpha^\lambda} - (D^{2\mu\lambda\lambda}_0k_\lambda w_3)_{\alpha^\mu} + (D^{2\mu\lambda3}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\mu}] + (j-1)[D^{23\lambda\lambda}_0k_\lambda w_3 -$$

$$- D^{1323}_0\gamma^0_{13} + (D^{1313}_0 - D^{2323}_0)\gamma^0_{23} - D^{23\lambda\lambda}_0w_{\lambda\alpha^\lambda} - D^{2312}_0e^0_{12}]\}\}, \quad j = 1,2,$$

$$f^3_c(a) = -\{D^{\lambda311}_{0\alpha^\lambda}w_{1\alpha^1} + D^{\lambda312}_{0\alpha^\lambda}e^0_{12} + D^{\lambda322}_{0\alpha^\lambda}w_{2\alpha^2} + D^{1323}_{0\alpha^\lambda}w_{3\alpha^{3-\lambda}} + (D^{2323}_0 - D^{1313}_0)_{\alpha^2}w_{3\alpha^2} +$$

$$+ (D^{1323}_0\psi_\lambda)_{\alpha^{3-\lambda}} + [(D^{2323}_0 - D^{1313}_0)\psi_2]_{\alpha^2} - (D^{\lambda3\mu\mu}_0k_\mu w_3)_{\alpha^\lambda} + k_\lambda T^{\lambda\lambda}(e^0)\};$$

$$f^1_\chi(a) = (-1/2)[T^{1\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi^0) + iT^{2\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi^0)], \quad f^2_\chi(a) = [T^{13}(\chi^0) + iT^{23}(\chi^0)]/2,$$

$$f^3_\chi(a) = -T^{\lambda3}_{\alpha^\lambda}(\chi^0) - k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\chi^0) - (T^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda}; \quad F^1 = (R^1 + iR^2)/2,$$

$$F^2 = (L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = R^3; \quad e^0 = (e^0_{11}, e^0_{12}, e^0_{22}), \quad \chi^0 = (\chi^0_{11}, \chi^0_{12}, \chi^0_{22}); \tag{6}$$

через e^0_{jk} и χ^0_{jk} обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ^0_{jk}, т.е. $\gamma^0_{jk} = e^0_{jk} + \chi^0_{jk}$, $j,k = 1,2$; a'' – 15-мерный вектор, компонентами которого являются частные производные второго порядка обобщённых перемещений $w_{j\alpha^\lambda\alpha^\mu}$, $\psi_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}$, $j = \overline{1,3}$, $k,\lambda,\mu = 1,2$.

Аналогично, граничные условия (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re}[(-1)^{j-1}i^j t'\omega_1(t)] + 2(-1)^{j-1}D_0^{1212}w_{3-j\alpha^\lambda}\,d\alpha^\lambda/ds = \varphi_j(a)(t) - P^j(s), \quad j = 1,2,$$

$$D_0^{1313}[(w_{3\alpha^2}+\psi_2)\,d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1}+\psi_1)\,d\alpha^2/ds] = \varphi_3(a)(t) - P^3(s),$$

$$\operatorname{Re}[(-1)^{j-1}i^j t'\omega_2(t)] + 2(-1)^{j-1}D_2^{1212}\psi_{3-j\alpha^\lambda}\,d\alpha^\lambda/ds = \varphi_{3+j}(a)(t) - N^j(s), \quad j = 1,2, \quad t\in\Gamma, \tag{7}$$

где

$$\varphi_j(a)(t) = \varphi_{je}(a)(t) + \varphi_{j\chi}(a)(t), \quad j = \overline{1,5};$$

$$\varphi_{je}(a)(t) = (-1)^{j-1}[D_0^{12jj}e_{12}^0 + D_0 w_{3-j\alpha^{3-j}} + D_0^{jj\lambda3}\gamma_{\lambda3}^0 - D_0^{jj\lambda\lambda}k_\lambda w_3 +$$

$$+(j-1)(D_0^{2222} - D_0^{1111})w_{2\alpha^2}]\,d\alpha^{3-j}/ds + (-1)^j(D_0^{12\lambda\lambda}e_{\lambda\lambda}^0 + D_0^{12\lambda3}\gamma_{\lambda3}^0)\,d\alpha^j/ds, \quad j=1,2,$$

$$\varphi_{3+je}(a)(t) = (-1)^{j-1}[D_2^{12jj}\gamma_{12}^1 + D_2\psi_{3-j\alpha^{3-j}} + (j-1)(D_2^{2222} - D_2^{1111})\psi_{2\alpha^2}]\,d\alpha^{3-j}/ds +$$

$$+(-1)^j D_2^{1\lambda\lambda2}\psi_{\lambda\alpha^\lambda}\,d\alpha^j/ds, \quad j=1,2, \quad \varphi_{3e}(a)(t) = (-1)^{\mu-1}(D_0^{\mu3\lambda\lambda}e_{\lambda\lambda}^0 + D_0^{\mu312}e_{12}^0)\,d\alpha^{3-\mu}/ds +$$

$$+(-1)^\mu D_0^{1323}\gamma_{\mu3}^0\,d\alpha^\mu/ds - (D_0^{2323} - D_0^{1313})\gamma_{23}^0\,d\alpha^1/ds;$$

$$\varphi_{j\chi}(a)(t) = T^{j1}(\chi^0)\,d\alpha^2/ds - T^{j2}(\chi^0)\,d\alpha^1/ds, \quad j=1,2,$$

$$\varphi_{3\chi}(a)(t) = T^{13}(\chi^0)\,d\alpha^2/ds - T^{23}(\chi^0)\,d\alpha^1/ds + T^{11}w_{3\alpha^1}\,d\alpha^2/ds -$$

$$-T^{22}w_{3\alpha^2}\,d\alpha^1/ds + T^{12}(w_{3\alpha^2}\,d\alpha^2/ds - w_{3\alpha^1}\,d\alpha^1/ds), \quad \varphi_{3+j\chi}(a)(t) = 0, \quad j=1,2; \tag{8}$$

T^{jk}, $T^{jk}(\chi^0)$ определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (5) с граничными условиями (7) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar z} = \rho^j \quad (j=1,2), \quad D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \tag{9}$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ – произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (9) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения даются формулами [13, с. 29]

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j;\rho^j)(z),$$

$$T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \quad j=1,2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{10}$$

где $\Phi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [13, с. 39–41, 46], что T – вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial\bar z} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{11}$$

где S – линейный ограниченный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$, $p>1$, и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$.

Представления (10) в свою очередь при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$ и $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega_{j\bar z}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_j + d_{n_j}^2\overline{\omega_j}) \equiv id_{n_j}[\omega_j], \quad j=1,2,$$

$$d_{n_j}^k = (1/D_{n_j}^{1111} + (-1)^k/D_{n_j}^{1212})/4, \quad n_j = 2(j-1), \quad j,k=1,2, \tag{12}$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega_j^0(z)=\Psi_j(z)+iTd_{n_j}[\omega_j](z)\equiv\omega_j^0(\Psi_j;\omega_j)(z),\quad j=1,2, \tag{13}$$

где $\Psi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции пространства $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$.

Третье уравнение в (9) представим в виде

$$w_{3z\overline{z}}=\widetilde{\rho}_3/4,\quad \widetilde{\rho}_3=\rho_3/D_0^{1313},\quad w_{3z}=(w_{3\alpha^1}-iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда находим, что

$$w_3(z)=\operatorname{Re}\Psi_3(z)-\widetilde{T}\widetilde{\rho}_3\equiv w_3(\Psi_3;\rho_3)(z),\quad \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\widetilde{\rho}_3(\zeta)\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\xi\,d\eta, \tag{14}$$

где $\Psi_3(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ – произвольная голоморфная функция.

Соотношения (13), (14) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого порядка с учётом равенств (10), (11), (13), (14) несложно получить формулы

$$\nu_{jk\alpha^k}=\operatorname{Im}[\omega^0_{j\overline{z}}-(-1)^k\omega^0_{jz}],\quad \nu_{jk\alpha^n}=\operatorname{Re}[\omega^0_{jz}+(-1)^k\omega^0_{j\overline{z}}],\quad k\ne n,\quad j,k,n=1,2;$$

$$\omega^0_{jz}=\Psi_j'(z)+iSd_{n_j}[\omega_j](z),\quad \nu_{1j}=w_j,\quad \nu_{2j}=\psi_j,$$

$$w_{3\alpha^j}=2\operatorname{Re}(i^{j-1}w_{3z}),\quad j=1,2,\quad w_{3z}=\Psi_3'(z)/2+T\widetilde{\rho}_3(z)/4; \tag{15}$$

$\omega^0_{j\overline{z}}$ $(j=1,2)$ определяются равенствами (12).

Дифференцируя равенство (12) по z и $\overline{z}$, равенство (13) дважды по z, используя при этом формулу (8.20) из [13, с. 58] и соотношения (11), для производных второго порядка функции ω_j^0 получаем представления

$$\omega^0_{j\overline{z}z}=i(d_{n_jz}[\omega_j]+d_{n_j}[\omega_j]_z),\quad \omega^0_{j\overline{z}\overline{z}}=i(d_{n_j\overline{z}}[\omega_j]+d_{n_j}[\omega_j]_{\overline{z}}),\quad n_j=2(j-1),$$

$$\omega^0_{jzz}=\Psi_j''(z)+iS(d_{n_j\zeta}[\omega_j]+d_{n_j}[\omega_j]_\zeta)(z)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{d_{n_j}[\omega_j](\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\overline{\tau},$$

$$w_{3zz}=\Psi_3''(z)/2+S\widetilde{\rho}_3(z)/4,\quad w_{3z\overline{z}}=\widetilde{\rho}_3/4;\quad d_{n_jz}[\omega_j]=d^1_{n_jz}\omega_j+d^2_{n_jz}\overline{\omega_j},$$

$$d_{n_j}[\omega_j]_z=d^1_{n_j}\omega_{jz}+d^2_{n_j}\overline{\omega_{j\overline{z}}},\quad d_{n_j}[\omega_j]_{\overline{z}}=d^1_{n_j}\omega_{j\overline{z}}+d^2_{n_j}\overline{\omega_{jz}},\quad j=1,2; \tag{16}$$

где функции ω_j, $d_{n_j}[\omega_j]$, $\omega_{j\overline{z}}$, ω_{jz} определены в (10), (12), (15).

Производные второго порядка обобщённых перемещений выражаются через функции $\omega^0_{jz\overline{z}}$, $\omega^0_{j\overline{z}\overline{z}}$, ω^0_{jzz} по формулам

$$\nu_{kn\alpha^j\alpha^j}=-\operatorname{Re}\{i^n[\omega^0_{kz\overline{z}}+(-1)^j(\omega^0_{kzz}+\omega^0_{k\overline{z}\overline{z}})]\}\equiv P^{jj}_{kn}(\omega^0_k),\nu_{kn\alpha^1\alpha^2}=\operatorname{Re}\{i^{n-1}(\omega^0_{kzz}-\omega^0_{k\overline{z}\overline{z}})\}\equiv$$

$$\equiv P^{12}_{kn}(\omega^0_k),\quad k,n,j=1,2;\quad w_{3\alpha^j\alpha^j}=2[w_{3z\overline{z}}+(-1)^{j-1}\operatorname{Re}w_{3zz}]\equiv P^{jj}_{13}(w_3),\quad j=1,2,$$

$$w_{3\alpha^1\alpha^2}=-2\operatorname{Im}w_{3zz}\equiv P^{12}_{13}(w_3). \tag{17}$$

3. Решение задачи (1), (2). Интегральные представления (13), (14) для обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j=1,2)$, $\Psi_k(z)$ $(k=\overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j=\overline{1,3})$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (5) и граничным условиям (7), при этом правые части уравнений (5) и граничных условий (7) временно считаем известными. С этой целью представления для функций (9), (13)–(15) подставим в левые части системы (5) и граничных условий (7). В результате система уравнений (5) запишется в виде

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\Phi)(z)=f^j(a)(z)-F^j(z),\quad j=\overline{1,3},\quad z\in\Omega, \tag{18}$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (6), которые содержат функции $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ и $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (7) с учётом представлений

$$Sd_{n_j}[\Phi_j]^+(t)=-(\overline{t}')^2\,d^1_{n_j}(t)\Phi_j(t)+K_{0j}(\Phi_j)(t),$$

$$K_{0j}(\Phi_j)(t)=-\frac{d^1_{n_j}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_j(\tau)\,d\tau-\frac{d^2_{n_j}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{\Phi_j(\tau)}\,d\overline{\tau}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^1_{n_j}(\zeta)-d^1_{n_j}(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_j(\zeta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^2_{n_j}(\zeta)-d^2_{n_j}(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_j(\zeta)}\,d\xi\,d\eta,\quad j=1,2,$$

$$\psi(\tau,t)=(\overline{\tau}-\overline{t})/(\tau-t),\quad \psi(t,t)=(\overline{t}')^2, \tag{19}$$

которые получаются при помощи равенств (10)–(12), формул (4.7), (4.9) из [13, с. 28] и формул Сохоцкого [14, с. 66], преобразуются к виду

$$(-1)^{j-1}\beta_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'\Phi_k(t)]+2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^{j-1}t'\Psi'_k(t)]+$$

$$+\,2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'K_{0k}(\Phi_k)(t)]+H_{3(k-1)+j}\rho^k(t)=\varphi_{3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,$$

$$D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,[it'\Psi'_3(t)]+K_{03}(\Phi)(t)+H_3\rho(t)=\varphi_3(a)(t)-F^6(s), \tag{20}$$

где приняты следующие обозначения:

$$H_{3(k-1)+j}\rho^k(t)=(-1)^{j-1}\mathrm{Re}\,[i^jt'T\rho^k(t)]+2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,\{i^j(t'Sd_{n_k}[T\rho^k]^+(t)+\overline{t}'d_{n_k}[T\rho^k](t))\},$$

$$n_k=2(k-1),\quad j,k=1,2,\quad H_3\rho(t)=D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,[it'T\widetilde{\rho}_3(t)]+D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,\{it'Td_2[T\rho^2](t)\},$$

$$K_{03}(\Phi)(t)=D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,\{t'(\Psi_2(t)+iTd_2[\Phi_2](t))\};\quad \beta_{n_j}(t)=[1-D^{1212}_{n_j}(t)/D^{1111}_{n_j}(t)]/2,$$

$$j=1,2;\quad F^{3+j}(s)=P^j(s)\quad (j=\overline{1,3}),\quad F^{6+k}(s)=N^k(s)\quad (k=1,2);\quad \Phi_j(t)\equiv\Phi_j^+(t), \tag{21}$$

$\Psi'_k(t)\equiv\Psi'^+_k(t)$, $t\in\Gamma$; символ $\Psi^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Psi(z)$ при стремлении $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\Phi_k(z)\in C_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k=1,2)$ и $\Psi_j(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,3})$ получили систему уравнений (18), (20). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\Phi_k(z)=\Theta(\mu_{2k})(z)\equiv\Phi_k(\mu_{2k})(z),\quad k=1,2,$$

$$\Psi'_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z)\equiv\Psi'_j(\mu_{2j-1})(z),\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Theta(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)}, \tag{22}$$

где $\mu_j(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ $(j=\overline{1,5})$ – произвольные действительные функции, $\tau'=d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ – элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$ имеем представления

$$\Psi_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j}\equiv\Psi_j(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j},\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Theta^0(f)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau'}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau, \tag{23}$$

где c_j $(j=\overline{1,6})$ – произвольные действительные постоянные, под $\ln(1-z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Воспользовавшись формулами Сохоцкого [14, с. 66], находим $\Phi_k(t)$ $(k=1,2)$ и $\Psi_j'(t)$ $(j=\overline{1,3})$, $t\in\Gamma$. Подставляя выражения для них, а также представление (23) в систему (18), (20), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)\in L_p(\Omega)$ и $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\mu)(z)=f^j(a)(z)+g_c^j(z)-F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\sum_{n=1}^{5}\left[a_{jn}(t)\mu_n(t)+b_{jn}(t)\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right]+K_j\mu(t)+H_j\rho(t)=$$

$$=\varphi_j(a)(t)+g_c^{3+j}(t)-F^{3+j}(t),\quad t\in\Gamma,\quad j=\overline{1,5}, \tag{24}$$

в которой приняты обозначения

$$K_{3(n-1)+j}\mu(t)=\beta_{j1}^n(t)\{\mathrm{Re}\,[it'\Theta(\mu_{2n+1-j})(t)]-i\Theta(\tau'\mu_{2n+1-j})(t)\}+\beta_{j2}^n(t)\,\mathrm{Re}\,[t'\Theta(\mu_{2n+j-2})(t)]+$$

$$+2D_{m_n}^{1212}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'K_{0n}(\mu_{2n})(t)],\quad n,j=1,2,\quad K_3\mu(t)=K_{03}(\mu)(t)-D_0^{1313}\mathrm{Re}\,[t'\Theta(\mu_5)(t)];$$

$$g_c^2(z)=D_0^{1313}(c_4+ic_3)/2,\quad g_c^3(z)=-c_4D_{0\alpha^1}^{1313}-c_3D_{0\alpha^2}^{1313},$$

$$g_c^6(t)=D_0^{1313}(t)(-c_4\,d\alpha^2/ds+c_3\,d\alpha^1/ds),\quad g_c^1(z)=g_c^{3+j}(t)\equiv0,\quad j=1,2,4,5;$$

$$a_{11}=D_0^{1212},\quad a_{22}=\beta_0/2,\quad a_{35}=-D_0^{1313}/2,\quad a_{43}=D_2^{1212},\quad a_{54}=\beta_2/2,$$

$$b_{12}=\beta_0/(2\pi),\quad b_{21}=D_0^{1212}/\pi,\quad b_{44}=\beta_2/(2\pi),\quad b_{53}=D_2^{1212}/\pi; \tag{25}$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z)\equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_{2j})(t)\equiv K_{0j}(\Phi_j(\mu_{2j}))(t)$, $j=1,2$; $K_{03}(\mu)(t)\equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu)=(\Phi_1(\mu_2),\Phi_2(\mu_4),\Psi_1(\mu_1),\Psi_2(\mu_3),\Psi_3(\mu_5))$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $h_1^j(\rho)$ $(j=\overline{1,3})$ – линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$ $(j=\overline{1,3})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при любом $\nu\in(0,1)$;

3) $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$;

4) $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ при любом $\alpha'<\alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;

5) имеют место включения $f^j(a)(z),F^j(z),g_c^j(z)\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\varphi_j(a)(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ и $F^{3+j}(t),g_c^6(t),a_{jk}(t),b_{jk}(t)\in C_\beta(\Gamma)$ $(j,k=\overline{1,5})$.

Доказательство. Известно [13, с. 26–27], что интеграл типа Коши $\Theta(f)$ в (22) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\Theta'(f)$ – ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1<q<2/(1-\alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\Theta(f)$ – вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при любом $p>1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ при всех $\alpha'<\alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T и S, определённых соответственно в

(10) и (11), используя представления (15) для производных первого порядка обобщённых перемещений и выражения для операторов $h^j(a)$ в (6), получаем, что первые два утверждения леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau,t)\in C_\beta(\Gamma)\times C_\beta(\Gamma)$ [14, с. 28–32], $d_j^k(z)\in C_\beta(\overline{\Omega})$, то, принимая во внимание следствие 4.3 из [15, с. 124], легко убеждаемся в том, что первые два слагаемых правой части равенства в (19), определяющего оператор $K_{0j}(\mu_{2j})$, представляют собой вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвёртое слагаемые этого равенства в (19) представляют собой вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Тогда получаем, что $K_{0j}(\mu_{2j})$ $(j=1,2)$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Так как $D_0^{1313}\in C_\beta(\overline{\Omega})$, то аналогично из определения оператора $K_{03}(\mu)$ в (21) следует, что $K_{03}(\mu)$ – линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu\in(0,1)$.

Далее, первые два слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (25) преобразуем к виду

$$\beta_{j1}^n(t)\biggl\{\frac{\overline{t}'}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu_{2n+1-j}(\tau)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\tau'}{\tau-t}\right)d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2n+1-j}(\tau)}{\tau' t'}\frac{(\tau'-t')^2}{\tau-t}\,d\tau\biggr\}.$$

Следовательно, с учётом включений $\tau',\beta_{j1}^n\in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$\mathrm{Im}\,[\tau'/(\tau-t)]=k_*(\tau,t)/|\tau-t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau,t)\in C_{\beta/2}(\Gamma)\times C_{\beta/2}(\Gamma)$ [14, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4, 4.5 из [15, с. 125] получаем, что первые два слагаемых в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (25) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$. Третье слагаемое в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ запишем в виде

$$\frac{\beta_{j2}^n(t)}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2n+j-2}(\tau)}{\tau'}\,\mathrm{Im}\left(\frac{t'}{\tau-t}\right)d\tau,$$

откуда, как и выше, получаем, что третье слагаемое представляет собой линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ в (25) вытекает справедливость третьего утверждения леммы. Справедливость четвёртого её утверждения следует из представлений операторов $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ в (21) с учётом свойств операторов T и S, интеграла типа Коши и соотношений

$$Sd_{n_k}[T\rho^k]^+(t)=T\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\,d_{n_k}[T\rho^k]\right)(t)-\frac{1}{2}(\overline{t}')^2\,d_{n_k}[T\rho^k](t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{d_{n_k}[T\rho^k](\tau)}{\tau-t}\,d\overline{\tau},\quad k=1,2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [13, с. 58] и формул Сохоцкого. Справедливость пятого утверждения леммы непосредственно вытекает из формул (6), (8), (25). Лемма доказана.

Исследуем разрешимость системы уравнений (24) в пространстве $L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha'<\alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (24) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (25), вычисляем определитель

$$\det\,[A(t)-\pi iB(t)]=(-1/4)D_0^{1212}D_2^{1212}D_0^{1313}\beta_0\beta_2,$$

где β_0, β_2 определены в (21), а $A=(a_{jk})_{5\times5}$, $B=(b_{jk})_{5\times5}$ – квадратные матрицы 5-го порядка. Итак, $\det\,[A(t)-\pi iB(t)]\neq0$ на Γ и для индекса системы (24) получаем равенство

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det\,(A-\pi iB)}{\det\,(A+\pi iB)}\right]_\Gamma=0$$

(здесь символ $[\arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (24) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ – решение системы (24) при нулевой правой части $((f^j+g_c^j-F^j)(z)\equiv 0,\ j=\overline{1,3},\ (\varphi_j+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Этому решению по формулам (22), (23) с постоянными $c_j=0\ \ (j=\overline{1,6})$ соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z),\ \Psi_j(z)$, которые в свою очередь, согласно формулам (13), (14), определяют обобщённые перемещения $w_j\ \ (j=\overline{1,3}),\ \psi_k\ \ (k=1,2)$. Эти перемещения, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (5) $(f^j-F^j\equiv 0,\ j=\overline{1,3})$ и однородным линейным граничным условиям (7) $(\varphi_j-F^{3+j}\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (5) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения – соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение – на w_3. После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий в (7) при выполнении условий

$$D_{n_j}^{1111}(z)-D_{n_j}^{1212}(z)>0,\quad n_j=2(j-1),\quad z\in\overline{\Omega},\quad j=1,2, \tag{26}$$

получаем, что $w_j\ \ (j=\overline{1,3})$ и $\psi_k\ \ (k=1,2)$ удовлетворяют системе

$$\nu_{j1\alpha^1}=0,\quad \nu_{j2\alpha^2}=0,\quad \nu_{j1\alpha^2}+\nu_{j2\alpha^1}=0,\quad w_{3\alpha^j}+\psi_j=0,\quad j=1,2, \tag{27}$$

где $\nu_{1j}=w_j,\ \nu_{2j}=\psi_j,\ j=1,2.$ Решая систему (27), находим

$$w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad w_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5, \tag{28}$$

где c_j – произвольные действительные постоянные. Так как $\Psi_j(0)=0\ \ (j=\overline{1,3}),\ w_3(0)=0$, то из (28) вытекает, что $w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\ w_2=c_0\alpha^1+c_2,\ w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0.$ Тогда $\omega_1(z)=2ic_0D_0^{1212},\ \omega_2(z)\equiv 0$ и из уравнений (9) следуют равенства

$$\rho^1(z)=2ic_0D_{0\bar z}^{1212},\quad \rho^2(z)=\rho^3(z)\equiv 0,\quad z\in\Omega. \tag{29}$$

Используя формулы (10), (13), (14) и представление для ω_{jz}^0 из (15), находим

$$\Phi_1(z)=c_0\alpha_0(z),\quad \Psi_1'(z)=c_0\gamma_0'(z),\quad \Phi_2(z)=\Psi_2'(z)=\Psi_3'(z)\equiv 0,$$

$$\alpha_0(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma\frac{D_0^{1212}(t)}{t-z}\,dt,\quad \gamma_0'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{d\bar t}{t-z},$$

подставляя эти функции в (22), получаем

$$\mu_1(t)/t'-c_0(\overline{t}')^2=F_1^-(t),\quad \mu_2(t)/t'-2ic_0D_0^{1212}(t)=F_2^-(t),\quad \mu_j(t)/t'=F_j^-(t),\quad j=\overline{3,5},$$

где $F_j^-(t)$ – граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)]=f_j^-(t),\ j=\overline{1,5}$, где $f_1^-(t)=c_0\operatorname{Re}(it'),\ f_2^-(t)=2c_0D_0^{1212}(t)\operatorname{Re}t',\ f_j^-(t)=0,\ j=\overline{3,5}.$ Решение этой задачи имеет вид [16, с. 253]

$$F_j^-(z)=c_0f_j^0(z)+\beta_{0j}f_j^1(z),\quad j=1,2,\quad F_j^-(z)=\beta_{0j}f_j^1(z),\quad j=\overline{3,5},\quad z\in\Omega_1\equiv\mathbb{C}\backslash\overline{\Omega};$$

здесь $f_j^k(z)$ – известные голоморфные вне области Ω функции, $c_0,\ \beta_{0j}$ – произвольные действительные постоянные. Тогда для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t)=c_0\mu_j^0(t)+\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=1,2,\quad \mu_j(t)=\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=\overline{3,5}, \tag{30}$$

где $\mu_j^k(t)$ – известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (24) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (18) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (20) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi_k'(z)$ их выражениями из (22), (23) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j}+2(-1)^{j-1}Td_{n_j}[S_jv](z)+2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z)=0, \quad v^j=v_{3j-2}+iv_{3j-1}, \quad \nu^j=\nu_{3j-2}+i\nu_{3j-1}, \quad j=1,2,$$
$$D_0^{1313}v_3(z)+\operatorname{Re}\,[T(D_0^{1313}v^2)(z)/4-T(D_{0\bar\zeta}^{1313}v_3)(z)+\Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z)]=0 \tag{31}$$

в области Ω и с условиями

$$\operatorname{Re} i\{(-1)^{j-1}Td_{n_j}[S_jv](t)+\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)\}=0, \quad j=1,2,$$
$$\operatorname{Re}\{T(D_{0\bar\zeta}^{1313}v_3)(t)-T(D_0^{1313}v^2)(t)/4-\Theta^-(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(t)\}=0,$$
$$\operatorname{Re}\{T(D_{n_j\bar\zeta}^{1212}v^j)(t)-2\Theta^-(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(t)+(j-1)[iT^0(D_{0\bar\zeta}^{1313}v_3)(t)-$$
$$-\,iT^0(D_0^{1313}v^2)(t)/4+T^0_\Gamma(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\}=0, \quad j=1,2, \tag{32}$$

на границе Γ.

В уравнениях (31), (32) приняты обозначения

$$S_jv(z)=(-1)^j\{S(D_{n_j\bar\zeta}^{1212}v^j)(z)-D_{n_jz}^{1212}v^j(z)-2\Theta'(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(z)\}+$$
$$+\,(j-1)\{T(D_0^{1313}v^2)(z)/4-T(D_{0,\bar\zeta}^{1313}v_3)(z)+D_0^{1313}v_3(z)+\Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z)\}, \quad j=1,2,$$
$$T^0f(z)=-\frac{1}{\pi i}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)\ln\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)d\xi\,d\eta, \quad T^0_\Gamma f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\sigma,$$
$$\Theta'(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)^2}, \quad v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5); \tag{33}$$

$\Theta^-(f)(t)$ – граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при стремлении $z\to t\in\Gamma$ извне области Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (10)–(12), (22) соответственно.

Система (31), (32), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим для них явные выражения. Далее в (31), (32) под $v\in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$ будем понимать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T и T^0, T^0_Γ, введённые соответственно в (10) и (33), определяют функции $Tf(z)$, $T^0f(z)$, $T^0_\Gamma f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладают и функции $\Theta(f)(z)$. Поэтому равенства в (32) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне области Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, равенства в (32) преобразуются к виду

$$(-1)^{j-1}Td_{n_j}[S_jv](z)+\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z)=0, \quad j=1,2,$$
$$T(D_{0\bar\zeta}^{1313}v_3)(z)-T(D_0^{1313}v^2)(z)/4-\Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z)=0,$$
$$T(D_{n_j\bar\zeta}^{1212}v^j)(z)-2\Theta(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(z)+(j-1)[iT^0(D_{0\bar\zeta}^{1313}v_3)(z)-$$
$$-\,iT^0(D_0^{1313}v^2)(z)/4+T^0_\Gamma(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)]=0, \quad j=1,2, \quad z\in\Omega_1. \tag{34}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_{n_j}^{1212} \quad (j=1,2), \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad 2<p<4/(2-\beta). \tag{35}$$

Тогда из системы (31) в силу указанных выше свойств операторов T, S и интеграла типа Коши $\Theta(f)(z)$, следует, что функции v_j $(j=\overline{1,5})$ принадлежат пространству $W_{q_1}^{(1)}(\Omega)$, $1<q_1<2/(1-\alpha)$. Перейдём в равенствах (31) к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трёх равенствах в (34) – извне области Ω и последние вычтем из первых трёх соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f\in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t)=-2\nu^j(t), \quad j=1,2, \quad v_3(t)=-\nu_3(t), \quad t\in\Gamma. \tag{36}$$

Продифференцируем первые два соотношения в (31) по $\overline{z}$. С учётом (11) получим

$$\overline{v^j}_{\overline{z}}=2(-1)^j\,d_{n_j}[S_jv](z), \quad z\in\Omega, \quad j=1,2.$$

Рассматривая последние равенства как систему относительно S_jv, $j=1,2$, и решая её, будем иметь

$$S_jv(z)=2(-1)^{j-1}D_{n_j}^{1111}D_{n_j}^{1212}(d_{n_j}^1\overline{v^j}_{\overline{z}}-d_{n_j}^2v_z^j), \quad j=1,2. \tag{37}$$

Используя представления в (33) для операторов S_jv $(j=1,2)$, находим производные по $\overline{z}$:

$$(S_jv)_{\overline{z}}=(-1)^{j-1}(D_{n_jz}^{1212}v_{\overline{z}}^j-D_{n_j\overline{z}}^{1212}v_z^j)+(j-1)D_0^{1313}(v_{3\overline{z}}+v^2/4), \quad j=1,2. \tag{38}$$

Теперь соотношения (37) продифференцируем по $\overline{z}$, после этого левые части получившихся равенств заменим их выражениями из (38). Третье равенство в (31) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением системы линейных уравнений (5) при нулевой правой части $(f^j-F^j\equiv 0,\ j=\overline{1,3})$.

Далее, в равенствах (37) переходим к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $(S_jv)^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представления $(S_jv)(z)$ в (33). Затем из них вычитаем соответственно равенства, которые получаются в результате дифференцирования по z последних двух соотношений в (34) и последующего перехода в них к пределу при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω. Продифференцируем третьи соотношения в (31) и (34) по z, в получившихся равенствах перейдём к пределу при $z\to t\in\Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ, используя соотношения (36) и формулы

$$(Sf)^+(t)-(Sf)^-(t)=-f(t)\cdot(\overline{t}')^2, \quad \Theta'^+(\tau'f)(t)-\Theta'^-(\tau'f)(t)=f_t+f_{\overline{t}}\cdot(\overline{t}')^2, \quad t\in\Gamma,$$

в которых операторы Sf, $\Theta'(f)$ определены в (11), (33), после несложных преобразований приходим к тому, что вектор-функция $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ удовлетворяет также и однородным линейным граничным условиям в (7) $(\varphi_j-F^{3+j}\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Таким образом, вектор-функция $\widetilde{v}=(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений (5), удовлетворяющим однородным граничным условиям в (7). Тогда вектор-функция $\widetilde{v}$ удовлетворяет и системе уравнений (27), поэтому в соответствии с (28) для её компонент получаем следующие представления:

$$v_1=-c_0\alpha^2+c_1, \quad v_2=c_0\alpha^1+c_2, \quad v_3=(-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6)/2, \quad v_4=c_4, \quad v_5=c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и $v_k(t)$ связаны друг с другом формулами (36). Следовательно, решение $(v,\nu)^{\mathrm{т}}$, $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ союзной системы (31), (32) можно представить в виде $(v,\nu)^{\mathrm{т}}=c_0\gamma_1+c_1\gamma_2+c_2\gamma_3+c_4\gamma_4+c_5\gamma_5+c_6\gamma_6$, где $\gamma_k=(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\ldots,\gamma_{k10})$

$(k=\overline{1,6})$ – линейно независимые решения системы (31), (32). Тогда для разрешимости системы (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_{\Omega}\{\operatorname{Re}[(f^1+g_c^1-F^1)(z)(\gamma_{k1}-i\gamma_{k2})(z)+(f^2+g_c^2-F^2)(z)(\gamma_{k4}-i\gamma_{k5})(z)]+$$

$$+(f^3+g_c^3-F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\}\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\sum_{j=1}^{5}\int\limits_{\Gamma}(\varphi_j+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t)\,ds=0,\quad k=\overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\iint\limits_{\Omega}R^j d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^j\,ds=0,\quad j=1,2,\quad \iint\limits_{\Omega}(R^1\alpha^2-R^2\alpha^1)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(P^1\alpha^2-P^2\alpha^1)\,ds=0,$$

$$\iint\limits_{\Omega}(L^j-R^3\alpha^j)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(N^j-P^3\alpha^j)ds-\iint\limits_{\Omega}[k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\gamma^0)\alpha^j-T^{j\mu}(\gamma^0)w_{3\alpha^\mu}]\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,$$

$$j=1,2,\quad \iint\limits_{\Omega}R^3\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^3\,ds+\iint\limits_{\Omega}k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\gamma^0)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0, \tag{39}$$

где γ^0 и w_3 – произвольно фиксированные вектор деформации и функция соответственно. При выполнении условий (39) общее решение системы (24) можно представить в виде

$$\rho^j(z)=\rho_e^j(a)(z)+\rho_\chi^j(a)(z)+\rho_*^j(z)+\rho_F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\mu_k(t)=\mu_{ke}(a)(t)+\mu_{k\chi}(a)(t)+\mu_{k*}(t)+\mu_{kF}(t),\quad t\in\Gamma,\quad k=\overline{1,5};$$

$$\rho_e^j(a)=\mathcal{R}_jf_e(a),\quad \rho_\chi^j(a)=\mathcal{R}_jf_\chi(a),\quad \rho_*^j(z)=\mathcal{R}_jg_c(z)+\widetilde{\rho}^j(z),\quad \rho_F^j(z)=-\mathcal{R}_jF(z),\quad j=\overline{1,3},$$

$$\mu_{ke}(a)=\mathcal{R}_{k+3}f_e(a),\quad \mu_{k\chi}(a)=\mathcal{R}_{k+3}f_\chi(a),\quad \mu_{k*}(t)=\mathcal{R}_{k+3}g_c(t)+\widetilde{\mu}_k(t),$$

$$\mu_{kF}(t)=-\mathcal{R}_{k+3}F(t),\quad k=\overline{1,5}, \tag{40}$$

где $f_e(a)=(f_e^1,f_e^2,f_e^3,\varphi_{1e},\ldots,\varphi_{5e})$, $f_\chi(a)=(f_\chi^1,f_\chi^2,f_\chi^3,\varphi_{1\chi},\ldots,\varphi_{5\chi})$, $g_c=(g_c^1,g_c^2,\ldots,g_c^8)$, $F==(F^1,F^2,\ldots,F^8)$; $\mathcal{R}_j$ $(j=\overline{1,3})$ и $\mathcal{R}_k$ $(k=\overline{4,8})$ – линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho}^j(z)$, $\widetilde{\mu}_k(t)$ заданы равенствами (29), (30), а f_e^j, f_χ^j, φ_{ke}, $\varphi_{k\chi}$, g_c^n, F^n – равенствами в (6), (8), (26).

Если выражения для функций $\mu_k(t)$ из (40) подставить в равенства (22), (23), то для голоморфных функций получим представления

$$\Phi_k(z)=\Phi_{ke}(a)(z)+\Phi_{k\chi}(a)(z)+\Phi_{k*}(z)+\Phi_{kF}(z),\quad k=1,2,$$

$$\Psi_j^{(n)}(z)=\Psi_{je}^{(n)}(a)(z)+\Psi_{j\chi}^{(n)}(a)(z)+\Psi_{j*}^{(n)}(z)+\Psi_{jF}^{(n)}(z),\quad n=0,1,\quad j=\overline{1,3};$$

$$\Phi_{ke}(a)=\Phi_k(\mu_{2ke}(a))(z),\quad \Phi_{k\chi}(a)=\Phi_k(\mu_{2k\chi}(a))(z),\quad \Phi_{k*}(z)=\Phi_k(\mu_{2k*})(z)+\widetilde{\Phi}_k(z),$$

$$\Phi_{kF}(z)=\Phi_k(\mu_{2kF})(z),\quad \Psi_{je}^{(n)}(a)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1e}(a))(z),$$

$$\Psi_{j\chi}^{(n)}(a)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1\chi}(a))(z),\quad \Psi_{jF}^{(n)}(z)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1F})(z),$$

$$\Psi_{j*}^{(n)}(z)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1*})(z)+\widetilde{\Psi}_j^{(n)}(z),\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,3},\quad n=0,1, \tag{41}$$

где $\widetilde{\Phi}_1(z) = c_0\alpha_0(z)$, $\widetilde{\Phi}_2(z) \equiv 0$, $\widetilde{\Psi}_1(z) = c_0\gamma_0(z) + c_1 + ic_2$, $\widetilde{\Psi}_j(z) = c_{2j-1} + ic_{2j}$, $j = 2, 3$; $\alpha_0(z)$, $\gamma_0(z)$ – известные функции, определённые выше; c_j – произвольные действительные постоянные.

Выражения для $\rho^j(z)$ из (40) и голоморфных функций из (41) подставим в равенства (13), (14). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде

$$\omega_j^0(z) = \omega_{je}^0(a) + \omega_{j\chi}^0(a) + \omega_{j*}^0(z) + \omega_{jF}^0(z), \quad j = 1, 2,$$

$$w_3(z) = w_{3e}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega, \tag{42}$$

где $\omega_{je}^0(a) = \omega_j^0(\Psi_{je}(a); \omega_{je}(a))$, $\omega_{je}(a) = \omega_j(\Phi_{je}(a); \rho_e^j(a))$, $j = 1, 2$, $w_{3e}(a) = w_3(\Psi_{3e}(a); \rho_e^3(a))$; операторы $\omega_{j\chi}^0(a), w_{3\chi}(a)$, функции $\omega_{j*}^0(z), w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z), w_{3F}(z)$ определяются по тем же формулам, что и операторы $\omega_{je}^0(a), w_{3e}(a)$, с той лишь разницей, что в нижнем индексе вместо “e” нужно взять “χ”, “$*$”, “F” соответственно; операторы $\omega_j(\Phi_j; \rho^j)$, $\omega_j^0(\Psi_j; \omega_j)$ и $w_3(\Psi_3; \rho^3)$ определены в (10), (13), (14). Отметим, что функции $\omega_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как легко заметить, функции $\omega_{1*}^0(z) = w_{2*} + iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$ удовлетворяют системе уравнений (27), следовательно, для них имеют место представления (28).

Исследуем разрешимость системы (42) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\omega_{je}^0(a)$ $(j = 1, 2)$ *и* $w_{3e}(a)$ *– линейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$;

2) $\omega_{j\chi}^0(a)$ $(j = 1, 2)$ *и* $w_{3\chi}(a)$ *– нелинейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *причём для любых* $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$ *выполняются оценки*

$$\|\omega_{j\chi}^0(a^1) - \omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} +$$

$$+ \|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \tag{43}$$

где c – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

3) $\omega_{j*}^0(z), \omega_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Из представлений для $f_e^j(a)$, $f_\chi^j(a)$ в (6) и $\varphi_{je}(a)$, $\varphi_{j\chi}(a)$ в (8) следует, что $f_e^j(a)$ и $\varphi_{je}(a)$ – линейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; $f_\chi^j(a)$ и $\varphi_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; для $f_\chi^3(a)$, $\varphi_{3\chi}(a)$ справедливы оценки вида (43), а для $f_\chi^j(a)$, $\varphi_{j\chi}(a)$ $(j = 1, 2)$ – оценки

$$\|f_\chi^j(a^1) - f_\chi^j(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{j\chi}(a^1) - \varphi_{j\chi}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leqslant c(\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} +$$

$$+ \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \tag{44}$$

Тогда из (40) с учётом ограниченности операторов $\mathcal{R}_j$ получаем, что $\rho_e^j(a)$, $\mu_{ke}(a)$ – линейные, а $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно и для $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки (43). Следовательно, с учётом свойств интеграла типа Коши из представлений (41) следует, что $\Phi_{ke}(a)$, $\Psi'_{je}(a)$ – линейные, $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при любом $q > 1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ при всех $\alpha' < \alpha$, причём для нелинейных операторов $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ справедливы оценки (43).

Заметим, что функции $\rho_e^j(a)(z)$, $\mu_{ke}(a)(t)$, определённые в (40), являются решением системы (24) с правой частью $f_e^j(a)(z)$ $(j=\overline{1,3})$, $\varphi_{ke}(a)(t)$ $(k=\overline{1,5})$. Принимая этот факт во внимание, а также выражения для операторов $f_e^j(a)$, $\varphi_{ke}(a)$ в (6), свойства интеграла типа Коши и операторов T, S, а также соотношение (4.9) из [13, с. 29] и лемму 1, после несложных, но достаточно громоздких преобразований получаем, что операторы $\Phi'_{ke}(a) = \Theta'(\mu_{2ke}(a))$, $\Psi''_{je}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta'(\mu_{2j-1e}(a))$ (оператор $\Theta'(f)$ определён в (33)) и $\rho_e^j(a)$ представимы в виде

$$\Phi'_{ke}(a) = \Phi'_{ks}(a'') + \Phi'_{kc}(a), \quad k=1,2,$$

$$\Psi''_{je}(a) = \Psi''_{js}(a'') + \Psi''_{jc}(a), \quad \rho_e^j(a) = f_s^j(a'') + \rho_c^j(a), \quad j=\overline{1,3}, \tag{45}$$

где $\Phi'_{kc}(a)$, $\Psi''_{jc}(a)$, $\rho_c^j(a)$ – линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, а операторы $\Phi'_{ks}(a'')$, $\Psi''_{js}(a'')$ задаются равенствами

$$\Phi'_{ks}(a'') = \overline{f_s^k(a'')} - S\overline{Sf_s^k(a'')} - (\overline{t}'_z)^2(\overline{d_{n_k}[Tf_s^k(a'')]_z} - S\overline{S_{n_k}f_s^k(a'')})/d_{n_k}^1 +$$

$$+\,\overline{t}'_z\mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z]i^{-\delta}[\Theta_{\delta\lambda}^{n_k}(a'') - S\overline{\Theta_{\delta\lambda}^{n_k}(a'')}]/(2\,d_{n_k}^1)^{2-\delta}, \quad n_k = 2(k-1), \quad k=1,2,$$

$$\Psi''_{js}(a'') = i(\overline{t}'_z)^2[\overline{f_s^j(a'')} - S\overline{Sf_s^j(a'')}]/(4D_{n_j}^{1212}) + (\overline{t}'_z/2)\,\mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z]i^{\delta-1}[\Theta_{\delta\lambda}^{n_k}(a'') -$$

$$-\,S\overline{\Theta_{\delta\lambda}^{n_k}(a'')}]/(2\,d_{n_j}^1)^{\delta-1}, \quad j=1,2,$$

$$\Psi''_{3s}(a'') = (\overline{t}'_z)^2[\overline{f_s^3(a'')}/D_0^{1313} - S\overline{S(f_s^3(a'')/D_0^{1313})}]/2 + \overline{t}'_z\mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z][\Theta_{3\lambda}^0(a'') - S\overline{\Theta_{3\lambda}^0(a'')}], \tag{46}$$

в которых приняты обозначения

$$S_{n_j}f_s^j(a'') = S(d_{n_j}[Tf_s^j(a'')]_\zeta) - (\overline{t}'_z)^2\,d_{n_j}^2(\overline{f_s^j(a'')} - S\overline{Sf_s^j(a'')}),$$

$$\Theta_{nj}^0(a'') = \delta_{0n}\varphi_{0,nj}^{k,\lambda\mu}w_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad n=\overline{1,3}, \quad \Theta_{nj}^2(a'') = \delta_{2n}\varphi_{2,nj}^{k,\lambda\mu}\psi_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad n,j=1,2;$$

$$\delta_{n_j1} = 1/D_{n_j}^{1212}, \quad \delta_{n_j2} = 1/\beta_{n_j}, \quad j=1,2, \quad \delta_{03}=1;$$

$\varphi_{n_\delta,mj}^{k,\lambda\mu}(z) \in W_p^{(1)}(\Omega)$ – известные функции, зависящие, как и функции $f_{nj}^{\lambda\mu}(z)$ в (6), только от упругих характеристик D_m^{ijkn} оболочки (при этом отметим, что в случае изотропных оболочек имеет место тождество $\varphi_{n_\delta,mj}^{k,\lambda\mu}(z)\equiv 0$); операторы $f_s^k(a'')$, T, S, $d_{n_k}[f]_z$ определены в (6), (10), (11), (16) соответственно; $t'_z = dt_z/ds$, t_z – точка кривой Γ, ближайшая к $z\in\Omega$.

Принимая во внимание указанные выше свойства операторов T, S, $f_s^j(a'')$ и $t'_z \in C_\beta(\Gamma)$, $|t'_z|=1$, вследствие определений (46) получаем, что $\Phi'_{ks}(a'')$ и $\Psi''_{js}(a'')$ – линейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Теперь, если использовать соотношения (12), (15)–(17), (45) и оценки (44), то утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Отметим, что в случае изотропных оболочек $\omega_{je}^0(a)$ $(j=1,2)$ и $w_{3e}(a)$ – линейные вполне непрерывные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Систему (42) сведём к системе относительно вторых производных обобщённых перемещений. С этой целью уравнения (42) дважды дифференцируем по переменным z и $\overline{z}$, при этом используем соотношения (16), (45). Подставляя полученные выражения для $\omega_{jz\overline{z}}^0$, ω_{jzz}^0, $\omega_{j\overline{z}\overline{z}}^0$ $(j=1,2)$, $w_{3z\overline{z}}$, w_{3zz} в правые части формул (17), приходим к искомой системе относительно производных второго порядка, которую запишем в виде

$$a'' - P_s(a'') = P_c(a) + P_\chi(a) + P_F(z), \tag{47}$$

где a'' – вектор, введённый в (6); $P_c(a)$ – линейный вполне непрерывный и $P_\chi(a)$ – нелинейный ограниченный матричные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$; для $P_\chi(a)$ справедлива оценка (44);

$P_F(z) \in L_p(\Omega)$ – известная вектор-функция, зависящая от внешних сил; $P_s(a'')$ – матричный оператор с компонентами вида

$$P_{jks}^{\lambda\mu}(a'') = P_{jk}^{\lambda\mu}(\omega_{js}^0), \quad P_{13s}^{\lambda\mu}(a'') = P_{13}^{\lambda\mu}(w_{3s}), \quad j,k,\lambda,\mu = 1,2,$$

$$\omega_{jsz\overline{z}}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_{jsz} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{js\overline{z}}}), \quad \omega_{js\overline{zz}}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_{js\overline{z}} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{jsz}}),$$

$$\omega_{jszz}^0 = \Psi_{js}''(a'') + iS(d_{n_j}^1\omega_{js\zeta} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{js\overline{\zeta}}}) - i(\overline{t}_z')^2[d_{n_j}^1\Phi_{js}'(a'') - d_{n_j}^2(S\overline{\Phi_{js}'(a'')} - \overline{f_s^j(a'')} + S\overline{Sf_s^j(a'')})],$$

$$\omega_{js\overline{z}} = f_s^j(a''), \quad \omega_{jsz} = \Phi_{js}'(a'') + Sf_s^j(a''), \quad j = 1,2; \tag{48}$$

операторы $P_{jk}^{\lambda\mu}$ определены в (17).

Из выражений (48) вытекает, что $P_s(a'')$ относительно $a'' \in L_p(\Omega)$ является линейным ограниченным оператором в $L_p(\Omega)$ и его норма вследствие (48) и неравенства $\|Sf\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \leqslant \Lambda_p\|f\|_{L_p(\Omega)}$ [13, с. 66] удовлетворяет оценке

$$\|P_s(a'')\|_{L_p(\Omega)} \leqslant q(\Lambda_p)\|a''\|_{L_p(\Omega)},$$

где

$$q(\Lambda_p) = \max_{k=\overline{1,3},\ \lambda,\mu,\delta=1,2}[q_{1k}^{\lambda\mu}(\Lambda_p), q_{2\delta}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)], \quad q_{1k}^{\nu\beta}(\Lambda_p) = 2^{2-\delta}p_{2\delta-11}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|f_{2\delta-1k}^{\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})} +$$

$$+ 2p_{11+\gamma}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\delta_{0\gamma}\varphi_{0,\gamma\delta}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta + p_{32}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\varphi_{0,\delta 3}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta, \quad k = \overline{1,3},$$

$$q_{2k}^{\nu\beta}(\Lambda_p) = 2p_{21}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|f_{2k}^{\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})} + 2p_{21+\gamma}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\delta_{2\gamma}\varphi_{2,\gamma\delta}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta, \quad k,\nu,\beta = 1,2;$$

$$p_{j1}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p^2)b_j + [2 + (1+\Lambda_p)^2]a_j + (1+\Lambda_p)(3+\Lambda_p)(1+\Lambda_p^2)l_ja_j^2,$$

$$p_{j2}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[(3+\Lambda_p)l_ja_j + 1]/2, \quad p_{j3}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[(3+\Lambda_p)a_j + 2\|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})}], \quad j,\lambda = 1,2;$$

$$p_{j1}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)^2a_j[1 + (1+\Lambda_p^2)l_ja_j] + (1+\Lambda_p^2)b_j, \quad p_{j2}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[1 + (1+\Lambda_p)l_ja_j]/2,$$

$$p_{j3}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[2\|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})} + (1+\Lambda_p)a_j], \quad j = 1,2;$$

$$p_{31}^{\lambda\mu}(\Lambda_p) = (1/2)(2 + \Lambda_p + \Lambda_p^2)\|1/D_0^{1313}\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad p_{32}^{\lambda\mu}(\Lambda_p) = 1 + \Lambda_p, \quad \lambda,\mu = 1,2;$$

$$a_j = \|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})} + \|d_{n_j}^2\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad b_j = \|1/D_{n_j}^{1212}\|_{C(\overline{\Omega})}/4, \quad l_j = \|1/d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad n_j = 2(j-1), \quad j = 1,2;$$

здесь символ $a^{\lambda\mu}1_{\lambda\mu}$ означает суммирование $\Sigma_{\lambda,\mu}a^{\lambda\mu}$, $\Lambda_p = \|S\|_{L_p(\Omega)}$.

Пусть выполнено условие

$$q(1) < 1, \tag{49}$$

где $q(1)$ – значение функции $q(\Lambda_p)$ при $\Lambda_p = 1$. Отметим, что в случае изотропных оболочек $q(\Lambda_p) = 0$.

Несложно видеть, что $q(\Lambda_p)$ представляет собой непрерывную функцию переменной Λ_p. Так как Λ_p непрерывна по p и $\Lambda_2 = 1$ [13, с. 270], то в силу (49) найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство $q(\Lambda_p) < 1$, если $2 < p \leqslant 2 + \varepsilon < 4/(2-\beta)$. Тогда линейный оператор $P_s(a'')$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2 + \varepsilon$, будет сжимающим. Следовательно, существует обратный оператор $(I - P_s)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, применив который к уравнению (47), для производных второго порядка обобщённых перемещений получим представление

$$a'' = a_c''(a) + a_\chi''(a) + a_F''(z), \tag{50}$$

где $a_c''(a) = (I - P_s)^{-1}P_c(a)$, $a_\chi''(a) = (I - P_s)^{-1}P_\chi(a)$, $a_F''(z) = (I - P_s)^{-1}P_F(z)$, I – тождественный оператор.

Заметим, что $a''_c(a)$ – линейный вполне непрерывный и $a''_\chi(a)$ – нелинейный ограниченный операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, причём для $a''_\chi(a)$ справедлива оценка (43); $a''_F(z)\in L_p(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил.

С учётом представления (50) операторы $\omega^0_{je}(a)$ и $w_{3e}(a)$, входящие в систему (42), запишем в виде

$$\omega^0_{je}(a)=\omega^0_{je,c}(a)+\omega^0_{je,\chi}(a)+\omega^0_{je,F}(z),\quad j=1,2,\quad w_{3e}(a)=w_{3e,c}(a)+w_{3e,\chi}(a)+w_{3e,F}(z),$$

где $\omega^0_{je,c}(a)$, $w_{3e,c}(a)$ – линейные вполне непрерывные и $\omega^0_{je,\chi}(a)$, $w_{3e,\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы в $W^{(2)}_p(\Omega)$; $\omega^0_{je,F}(z),w_{3e,F}(z)\in W^{(2)}_p(\Omega)$ – известные функции, зависящие от внешних сил. Тогда система (42) преобразуется к эквивалентному виду

$$a-K(a)-G(a)=a_*+\widetilde a_F, \tag{51}$$

где

$$K=(K_1,\ldots,K_5),\quad G=(G_1,\ldots,G_5),\quad a_*=(w_{1*},w_{2*},w_{3*},\psi_{1*},\psi_{2*}),$$
$$\widetilde a_F=(\widetilde w_{1F},\widetilde w_{2F},\widetilde w_{3F},\widetilde\psi_{1F},\widetilde\psi_{2F}),\quad \omega^0_{1*}=w_{2*}+iw_{1*},\quad \omega^0_{2*}=\psi_{2*}+i\psi_{1*},$$
$$K_{3(n-1)+j}(a)=-\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{ne,c}(a)],\quad G_{3(n-1)+j}(a)=-\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{ne,\chi}(a)+\omega^0_{n\chi}(a)],\quad n,j=1,2;$$
$$K_3(a)=w_{3e,c}(a),\quad G_3(a)=w_{3e,\chi}(a)+w_{3\chi}(a),\quad \widetilde w_{jF}=-\mathrm{Re}\,[i^j(\omega^0_{1e,F}+\omega^0_{1F})],$$
$$\widetilde\psi_{jF}=-\mathrm{Re}\,[i^j(\omega^0_{2e,F}+\omega^0_{2F})],\quad j=1,2,\quad \widetilde w_{3F}=w_{3e,F}+w_{3F}.$$

Отметим, что $K(a)$ – линейный вполне непрерывный и $G(a)$ – нелинейный ограниченный операторы в $W^{(2)}_p(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (44); $\widetilde a_F\in W^{(2)}_p(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил, компоненты вектора a_* задаются формулами (28).

Покажем, что уравнение $a-K(a)=0$ имеет лишь нулевое решение в пространстве $W^{(2)}_p(\Omega)$, $2<p\leqslant 2+\varepsilon$. Если $a\in W^{(2)}_p(\Omega)$ – ненулевое его решение, то ему по формулам $\rho^j(z)=\rho^j_e(a)(z)$, $\mu_k(t)=\mu_{ke}(a)(t)$ (операторы $\rho^j_e(a)$, $\mu_{ke}(a)$ определены в (40)) соответствуют функции $\rho^j(z)$, $\mu_k(t)$, которые в свою очередь по формулам $\Phi_k(z)=\Phi_{ke}(a)(z)$, $\Psi_j(z)=\Psi_{je}(a)(z)$ (операторы $\Phi_{ke}(a)$, $\Psi_{je}(a)$ определены в (41)) определяют голоморфные функции $\Phi_k(z)$ $(k=1,2)$, $\Psi_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$, причём выполнены условия $\Psi_j(0)=0$, $j=\overline{1,3}$. Тогда вектор a удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\omega^0_j-\omega^0_{je}(a)=0,\quad j=1,2,\quad w_3-w_{3e}(a)=0,$$

следовательно, является решением системы линейных однородных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Рассуждая так же, как и в случае системы (24), приходим к заключению, что вектор a удовлетворяет системе $e^0_{jk}=0$, $\gamma^1_{jk}=0$, $\gamma^0_{j3}=0$, $j,k=1,2$. Решая её, для компонент вектора a получаем представления

$$w_1=c_4[\widetilde k_2(\alpha^2)-k^1_1(\alpha^1)]-c_5\alpha^2k^0_1(\alpha^1)+c_6k^0_1(\alpha^1)-c_0\alpha^2+c_1,$$
$$w_2=c_5[\widetilde k_1(\alpha^1)-k^1_2(\alpha^2)]-c_4\alpha^1k^0_2(\alpha^2)+c_6k^0_2(\alpha^2)+c_0\alpha^1+c_2,$$
$$w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5,$$
$$k^m_j(\alpha^j)=\int\limits_0^{\alpha^j}x^mk_j(x)\,dx,\quad m=0,1,\quad \widetilde k_j(\alpha^j)=\int\limits_0^{\alpha^j}k^0_j(x)dx,\quad j=1,2, \tag{52}$$

где c_j – произвольные действительные постоянные, откуда с учётом условий $\Psi_j(0)=0$, $j=2,3$, $w_3(0)=0$ будем иметь $w_1=-c_0\alpha^2+c_1$, $w_2=c_0\alpha^1+c_2$, $w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0$. Подставляя эти значения обобщённых перемещений в соотношения для операторов $f_e^j(a)$, $\varphi_{ke}(a)$ из (6), (8), получаем, что $f_e(a) \equiv 0$, следовательно, $\rho^j(z) \equiv 0$, $j = \overline{1,3}$. С другой стороны, для $\rho^1(z)$ справедливо представление (29), откуда следует, что $c_0 = 0$. Тогда с учётом условия $\Psi_1(0) = 0$ будем иметь $c_1 = c_2 = 0$. Итак, существует обратный оператор $(I-K)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (51) сводится к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_c + a_F, \tag{53}$$

где $G_*(a) = (I-K)^{-1}G(a)$, $a_c = (I-K)^{-1}a_*$, $a_F = (I-K)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Заметим, что вектор a_c, зависящий от шести произвольных постоянных, является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому для его компонент справедливы представления (52).

Также отметим, что вектор a_F в (53) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_*(a)$ *– нелинейный ограниченный оператор в* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *причём для любых вектор-функций* $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ $(j = 1,2)$ *выполняется оценка*

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \\ + \|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \tag{54}$$

где c_* *– известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;*

2) $a_c, a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы 3 вытекает из леммы 2 вследствие указанных выше свойств операторов $(I-K)^{-1}$ и G.

Исследуем разрешимость уравнения (53) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2+\varepsilon$. Используя оценку (54), для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1,2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant q_*\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара, внешние силы и вектор a_c таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_c + a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1-q_*)r. \tag{55}$$

Тогда к уравнению (53) можно применить принцип сжатых отображений [17, с. 146], согласно которому уравнение (53) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathfrak{R}(a_c + a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, которое можно представить в виде

$$a = a_0 + a^*, \quad a_0 = \mathfrak{R}(a_c + a_F) - \mathfrak{R}(a_c), \quad a^* = \mathfrak{R}(a_c), \tag{56}$$

где $\mathfrak{R}$ – резольвента оператора G_*, $a_0 = (w_1^0, w_2^0, w_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0)$, $a^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, т.е. $a_F = 0$, то вектор a_0 нулевой. Тогда вектор $a = a^*$ – это вектор “жёстких смещений” оболочки, т.е. обращает в нуль компоненты деформации γ_{jk}^l, $j,k = \overline{1,3}$, $l = 0,1$. Необходимо отметить, что эти “жёсткие смещения” отличаются от реальных жёстких перемещений оболочки как абсолютно твердого тела. Решая систему $\gamma_{jk}^l = 0$, $j,k = \overline{1,3}$, $l = 0,1$, для “жёстких смещений” получаем явные выражения

$$w_1^* = c_4[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - c_5\alpha^2 k_1^0(\alpha^1) + c_6 k_1^0(\alpha^1) - c_0\alpha^2 + c_1 - c_4^2\alpha^1/2 - c_4c_5\alpha^2/2,$$

$$w_2^* = c_5[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] - c_4\alpha^1 k_2^0(\alpha^2) + c_6 k_2^0(\alpha^2) + c_0\alpha^1 + c_2 - c_5^2\alpha^2/2 - c_4c_5\alpha^1/2,$$

$$w_3^* = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1^* = c_4, \quad \psi_2^* = c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Вектор a_0 определяется внешними силами, действующими на оболочку, вектором a_c и удовлетворяет неравенствам [17, с. 149]

$$\|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}/(1+q_*) \leqslant \|a_0\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}/(1-q_*).$$

Вернёмся к условиям разрешимости (39), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем понимать решение задачи (1), (2). Тогда при помощи системы (1) условия разрешимости преобразуем к виду

$$\iint\limits_{\Omega} R^j d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} P^j\, ds = 0, \quad j = 1, 2, \quad \iint\limits_{\Omega} (R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1)\, d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} (P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1)\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} [R^1 k_1^0(\alpha^1) + R^2 k_2^0(\alpha^2) + R^3]\, d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} [P^1 k_1^0(\alpha^1) + P^2 k_2^0(\alpha^2) + P^3]\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} \{R^1[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - R^2\alpha^1 k_2^0(\alpha^2) - R^3\alpha^1 + L^1 + R^1 w_3\}\, d\alpha^1\, d\alpha^2 +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \{P^1[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - P^2\alpha^1 k_2^0(\alpha^2) - P^3\alpha^1 + N^1 + P^1 w_3\}\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} \{R^1\alpha^2 k_1^0(\alpha^1) - R^2[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] + R^3\alpha^2 - L^2 - R^2 w_3\}\, d\alpha^1\, d\alpha^2 +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \{P^1\alpha^2 k_1^0(\alpha^1) - P^2[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] + P^3\alpha^2 - N^2 - P^2 w_3\}]\, ds = 0, \tag{57}$$

Нетрудно видеть, что условия (57), в которых под перемещением w_3 понимается величина $w_3 = w_3^0 + w_3^*$, являются не только достаточными, но и необходимыми условиями разрешимости задачи (1), (2). Отметим, что в случае линейных задач слагаемые в (57), содержащие w_3, отсутствуют.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e), (26), (35) и неравенства (55). Тогда для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (57). В случае их выполнения задача (1), (2) имеет в пространстве* $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2 + \varepsilon < 4/(2-\beta)$, *обобщённое решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ *вида (56).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975.
2. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
3. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.
4. *Карчевский М.М.* Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. № 3. С. 105–110.
5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек. Казань, 2011.
6. *Тимергалиев С.Н.* Доказательство существования решения системы дифференциальных уравнений с частными производными нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 450–454.

7. *Тимергалиев С.Н.* О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 40–56.
8. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 373–386.
9. *Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С.* Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 651–664.
10. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2017. № 4. С. 59–75.
11. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. № 1. С. 98–113.
12. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 238–254.
13. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
15. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.
16. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963.
17. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 27.11.2020 г.
После доработки 27.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 526–535

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+519.216

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО p-РАДИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

© 2021 г. Д. Е. Шафранов, О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк

Рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова для стохастического варианта линейного уравнения Гинзбурга–Ландау в гильбертовых пространствах гладких дифференциальных форм, заданных на компактном ориентированном римановом многообразии без края, со стохастическими процессами в качестве коэффициентов. Это уравнение приводится к абстрактному стохастическому уравнению соболевского типа с относительно радиальным оператором в правой части, для которого устанавливается разрешимость задачи Шоуолтера–Сидорова, а устойчивость решений исследуются с помощью дихотомий. Дифференцирование стохастических процессов, являющихся коэффициентами дифференциальных форм, понимается в смысле производной Нельсона–Гликлиха.

DOI: 10.31857/S0374064121040075

Введение. Линейное обобщённое уравнение Гинзбурга–Ландау

$$(\lambda+\Delta)\alpha_t=\nu\Delta\alpha-ib\Delta^2\alpha \tag{1}$$

изучалось в различных аспектах [1, гл. 2; 2; 3]. Здесь коэффициенты $\lambda,\nu,b\in\mathbb{R}$ описывают параметры системы, i – мнимая единица. Мы будем рассматривать уравнение (1) на d-мерном компактном ориентированном римановом гладком многообразии M без края. Здесь Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, а α – k-форма (подробности см. [4, гл. 5, § 2; 5 гл. 6]), коэффициенты которой зависят от t.

Уравнение (1) представляет собой частный случай общего стохастического уравнения соболевского типа вида

$$L\overset{\circ}{\eta}=M\eta, \tag{2}$$

где оператор M сильно (L,p)-радиален, $p\in\{0\}\bigcup\mathbb{N}$ [6, гл. 2], а $\eta=\eta(t)$ – стохастический процесс и $\overset{\circ}{\eta}=\overset{\circ}{\eta}(t)$ – его производная Нельсона–Гликлиха [7, гл. 8].

Авторами ранее рассматривалась задача Коши

$$\lim_{t\to 0+}(\eta(t)-\eta_0)=0 \tag{3}$$

для уравнения (1) и задача Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+}P(\eta(t)-\eta_0)=0 \tag{4}$$

для уравнения

$$L\overset{\circ}{\eta}=M\eta+\omega. \tag{5}$$

(Здесь оператор P – проектор, построенный по операторам L и M.) Были изучены случаи (L,p)-ограниченного оператора M [8, 9] и сильно (L,p)-секториального оператора M [10]. Кроме того были проведены вычислительные эксперименты [11, 12], иллюстрирующие теоретические положения и выводы [10]. Данная статья инициирована работой [13], однако главное её отличие от [13] – рассмотрение задач (3), (4) для уравнений (2), (5) в пространствах стохастических k-форм.

Статья кроме введения и списка литературы содержит три пункта. В п. 1, основываясь на производной Нельсона–Гликлиха, вводятся пространства дифференциальных стохастических **K**-“шумов”. В п. 2 описываются расщепления линейных пространств и действия операторов в случае уравнений соболевского типа и их связь с C_0-полугруппами. В п. 3 определяются гильбертовы пространства дифференциальных форм, заданных на гладком компактном римановом многообразии без края, с коэффициентами, являющимися стохастическими процессами. Доказана разрешимость и существование дихотомий, и как следствие устойчивого и неустойчивого инвариантного подпространств для стохастического варианта линейного уравнения Гинзбурга–Ландау.

1. Пространства стохастических K-шумов. Пусть $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделённое борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – интервал. Измеримое отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ назовём *стохастическим процессом*, для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функцию $\eta(\cdot, \omega) : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ – его *траекторией*, а для каждого фиксированного $t \in \mathfrak{I}$ случайную величину $\eta(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ – его *сечением*. Стохастический процесс $\eta = \eta(t, \omega)$ назовём *непрерывным*, если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных на $\mathfrak{I}$ стохастических процессов, чьи сечения лежат в пространстве $\mathbf{L_2}$, образует банахово пространство $\mathbf{CL_2}(\mathfrak{I})$ с нормой

$$\|\eta\|_0^2 = \max_{t \in \mathfrak{I}} D\eta(t, \cdot).$$

Хорошим примером непрерывного стохастического процесса служит винеровский процесс

$$\beta(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)t\right), \tag{6}$$

описывающий броуновское движение в модели Энштейна–Смолуховского (подробности смотри в [2]). Здесь случайные величины $\xi_k \in \mathbf{L}_2$ *равномерно ограничены*, т.е. $\mathbf{D}\xi_k \leqslant K$, $k \in \mathbb{N}$, K – некоторая положительная константа, и *попарно независимы*, т.е. $(\xi_k, \xi_l) = 0$, $k \neq l$, $k, l \in \mathbb{N}$. В дальнейшем стохастический процесс $\beta = \beta(t, \omega)$, определяемый равенством (6), будем называть *броуновским движением*.

Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно σ-подалгебры $\mathcal{A}_0$. *Условным математическим ожиданием* $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$ случайной величины ξ называется значение $\Pi\xi$, где $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{CL}_2(\mathfrak{I})$ и $t \in \mathfrak{I}$, обозначим $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$, где $\mathcal{N}_t^\eta$ – σ-алгебра, порождённая случайной величиной $\eta(t)$. *Производной Нельсона–Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in \mathfrak{I}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t+\Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t-\Delta t, \cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$. Производные Нельсона–Гликлиха стохастического процесса $\eta = \eta(t, \omega)$ определяются по индукции и обозначаются через $\overset{\circ}{\eta}{}^{(l)} = \overset{\circ}{\eta}{}^{(l)}(t, \omega)$, $l \in \mathbb{N}$. Пространство тех стохастических процессов, производные Нельсона–Гликлиха которых непрерывны на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно, обозначается через $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$. При любом $l \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$ является банаховым с нормой

$$\|\eta\|_l^2 = \sum_{k=0}^{l} \max_{t \in \mathfrak{I}} \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t, \cdot),$$

где $\overset{\circ}{\eta}{}^{(0)} = \eta$. В [14] показано, что $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} \in \mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathbb{R}_+)$ при всех $l \in \mathbb{N}$, причём $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} = (2t)^{-l}\beta$. Заметим, что обычную производную по t броуновского движения $\beta = \beta(t, \omega)$ (которой, кстати, не существует ни в одной точке $t \in \mathbb{R}_+$) принято называть белым шумом. Поэтому производную Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\beta} = (2t)^{-1}\beta$ называют "белым шумом" [8, 13–16], а пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$ – пространствами "шумов". Отметим ещё, что "белый шум" отвечает модели Энштейна–Смолуховского точнее, чем традиционный белый шум (детали см. в [2]). Для полноты картины укажем ещё один подход [17], при котором белый шум понимается как обобщённая производная броуновского движения. К сожалению, в рассматриваемой ситуации подход [17] очень трудно реализуем технически.

Пусть $\mathcal{H}$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Зафиксируем ортонормированный базис $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{H}$. Возьмём любую монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющую лишь требованию $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < \infty$, и произвольную последовательность равномерно ограниченных случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$. Построим *случайную* $\mathbf{K}$*-величину*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки случайных $\mathbf{K}$-величин по норме

$$\|\xi\|^2_{\mathbf{H_K L}_2} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\mathbf{D}\xi_k$$

является гильбертовым пространством. Обозначим его через $\mathbf{H_K L}_2$ и назовём *пространством случайных* $\mathbf{K}$*-величин*.

2. Относительно радиальные операторы и C_0-полугруппы в пространствах K-шумов. Пусть $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) – сепарабельное вещественное гильбертово пространство, через $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$) обозначим базис в этом пространстве. Выберем последовательность случайных величин. Аналогично тому, как это сделано выше, построим пространство $\mathbf{U_K L}_2$ ($\mathbf{F_K L}_2$) $\mathfrak{U}$-значных ($\mathfrak{F}$-значных) случайных $\mathbf{K}$-величин, элементами которого являются векторы

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k \quad \left(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\zeta_k\psi_k\right),$$

где последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < +\infty$, а $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ ($\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2$), причём $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \mathrm{const}$ ($\|\zeta_k\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \mathrm{const}$).

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ пространство линейных ограниченных операторов, а через $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – пространство линейных замкнутых операторов с всюду плотной областью определения действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Пространства $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$ всюду плотны в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Справедлива следующая

Лемма 1 [10]. *(i) Включение $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$;*

(ii) включение $A \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$.

В силу леммы 1 все результаты [7, гл. 2] можно перенести на пространства случайных $\mathbf{K}$-величин $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$.

Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Через $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ обозначим *L-резольвентное множество*, а через $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ – *L-спектр оператора M*.

Оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются *правой L-резольвентой* и *левой L-резольвентой* оператора M соответственно, а функции $(p+1)$-го переменного $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = \overline{0,p}$, определяемые равенствами $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p}(\mu_q L - M)^{-1}L$ и $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p}L(\mu_q L - M)^{-1}$, – *правой (L,p)-резольвентой* и *левой (L,p)-резольвентой* оператора M соответственно.

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно оператора* L, или *(L,p)-радиальным*, если он удовлетворяет двум условиям:

(i) существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $\mu \in \rho^L(M)$ для любого $\mu > a$;

(ii) существует постоянная $K > 0$ такая, что при любых $\mu_k > a$, $k = \overline{0,p}$, и каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{F_K L_2})}\} \leqslant K\biggl(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n\biggr)^{-1}.$$

Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным слева*, если он (L,p)-радиален и существует линеал $\mathbf{F}$, плотный в $\mathbf{F_K L_2}$, такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\| \leqslant \mathrm{const} \times (\lambda - a)^{-1}\biggl(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)\biggr)^{-1}$$

для всех $f \in \mathbf{F}$ при любых λ, μ_0, μ_1, $\mu_p > a$.

Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если он сильно (L,p)-радиален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \leqslant \mathrm{const} \times (\lambda - a)^{-1}\biggl(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)\biggr)^{-1}$$

при любых λ, μ_0, μ_1, $\ldots$, $\mu_p > a$.

Лемма 2 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) длины всех цепочек M-присоединённых векторов оператора L ограничены числом p;

(ii) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}$ совпадает с M-корневым пространством оператора L;

(iii) $\ker R^L_{(\mu,p)} \bigcap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)} = \{0\}$ $(\ker L^L_{(\mu,p)} \bigcap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)} = \{0\})$.

Определение 2. Отображение $V^\bullet \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathbf{H_K L_2}))$ называется *полугруппой* в гильбертовом пространстве $\mathbf{H_K L_2}$, если $V^\tau V^t = V^{\tau+t}$ для всех $\tau, t \in \mathbb{R}_+$.

Отождествим полугруппу с её графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовём *C_0-полугруппой (сильно непрерывной полугруппой)*, если она сильно непрерывна при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v$ п.н. (т.е. при почти всех $\omega \in \Omega$). Множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L_2}:$ п.н. $V^t v = 0$ для некоторого $t = t_\nu \in \mathbb{R}_+\}$ назовём *ядром*, а множество $\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L_2}:$ п.н. $v = V^0 v\}$ – *образом* полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Теорема 1 [15]. *Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Тогда существует C_0-полугруппа операторов на пространстве $\mathbf{U_K L_2}$ $(\mathbf{F_K L_2})$.*

Полугруппу на пространстве $\mathbf{U_K L_2}$ $(\mathbf{F_K L_2})$ можно представить в виде

$$U^t = s - \lim_{k\to\infty}\biggl(\frac{k(p+1)}{t} R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\biggr)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}) \tag{7}$$

$$\biggl(F^t = s - \lim_{k\to\infty}\biggl(\frac{k(p+1)}{t} L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\biggr)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{F_K L_2})\biggr).$$

Лемма 3 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда*

$$\operatorname{im} U^\bullet = \overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}} \quad (\operatorname{im} F^\bullet = \overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}}).$$

Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Обозначим $\ker U^\bullet = \mathbf{U^0_K L_2}$, $\ker F^\bullet = \mathbf{F^0_K L_2}$, $\operatorname{im} U^\bullet = \mathbf{U^1_K L_2}$, $\operatorname{im} F^\bullet = \mathbf{U^1_K L_2}$, а через L^k (M^k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathbf{U^k_K L_2}$ $(\operatorname{dom} M \bigcap \mathbf{U^k_K L_2})$ при $k = 0, 1$.

Лемма 4 [10]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) имеют место включения $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ *и* $M_0 \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$;

(iii) оператор $H = M_0^{-1}L$ $(G = LM_0^{-1})$ *нильпотентен, причём степень его нильпотентности не превосходит числа p.*

Пусть существует оператор

$$L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2) \tag{8}$$

и пространства $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ расщепляются следующим образом:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \bigoplus \mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \ \text{ и } \ \mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \bigoplus \mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2. \tag{9}$$

Замечание 1. Условия (8) и (9) выполнены, когда гильбертовы пространства $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ рефлексивны или когда оператор M сильно (L,p)-радиален.

Лемма 5 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Тогда справедливы включения* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$, $M_0 \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Любое из расщеплений (9) пространства эквивалентно существованию соответствующего проектора. Этот проектор имеет вид $s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$.

Теорема 2 [15]. *Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Тогда оператор* $S = L_1^{-1}M_1$ $(T = M_1L_1^{-1})$ *– генератор C_0-полугруппы $U_1^\bullet$ $(F_1^\bullet)$, представляющий собой сужение полугруппы $U^\bullet$ $(F^\bullet)$ на пространство* $\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ $(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Непрерывным стохастическим $\mathbf{K}$*-процессом* назовём отображение $\eta : \mathfrak{I} \to \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, задаваемое формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t)\varphi_k,$$

если ряд равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$, где $\{\eta_k\} \subset \mathbf{CL}_2$. Если ряд

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{\circ}{\eta}_k(t)\varphi_k$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$ и $\{\eta_k\} \subset \mathbf{C}^1\mathbf{L}_2$, то стохастический $\mathbf{K}$-процесс назовём *непрерывно дифференцируемым по Нельсону–Гликлиху.* Через $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ обозначим множество непрерывных процессов, а через $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ – множество процессов, непрерывно дифференцируемых по Нельсону–Гликлиху.

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta. \tag{10}$$

Стохастический $\mathbf{K}$-процесс $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ назовём *решением уравнения (10)*, если при подстановке его в это уравнение п.н. получаем тождество.

Определение 3. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ назовём *фазовым пространством* уравнения (10), если для него выполняются следующие условия:

(i) п.н. каждая траектория решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (10) лежит в $\mathfrak{P}$;

(ii) для п.в. $\eta_0 \in \mathfrak{P}$ существует решение уравнения (10), удовлетворяющее условию $\eta(0) = \eta_0$.

Теорема 3 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Тогда фазовое пространство уравнения (10) совпадает с образом разрешающей полугруппы вида (7).*

Определение 4. Подпространство $\mathbf{I}_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ называется *инвариантным пространством уравнения (10)*, если при любом $\eta_0 \in \mathbf{I}_{\mathbf{K}}$ решение задачи $\eta(0) = \eta_0$ для уравнения (10) удовлетворяет включению $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}; \mathbf{I}_{\mathbf{K}})$.

Определение 5. (i) Линейное пространство $\mathbf{I}^+_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{P}$ называется *устойчивым* инвариантным пространством уравнения (10), если существуют такие константы $N_1 \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_1 \in \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^1(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \leqslant N_1 e^{-\nu_1(s-t)} \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \text{ при любых } s \geqslant t,$$

где $\eta^1 = \eta^1(t) \in \mathbf{I}^+_{\mathbf{K}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Линейное пространство $\mathbf{I}^-_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{P}$ называется *неустойчивым* инвариантным пространством уравнения (10), если существуют такие константы $N_2 \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_2 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^2(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \leqslant N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|\eta^2(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \text{ при любых } t \geqslant s,$$

где $\eta^2 = \eta^2(t) \in \mathbf{I}^-_{\mathbf{K}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если фазовое пространство расщепляется на прямую сумму $\mathfrak{P} = \mathbf{I}^+ \bigoplus \mathbf{I}^-$, то говорят, что решения уравнения (10) имеют *экспоненциальную дихотомию.*

Обозначим $\sigma^L_+(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu < 0\}$ и $\sigma^L_-(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu > 0\}$.

Теорема 4 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным, выполнены условия (8), (9) и $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$, причём $\sigma^L_+(M)$ – непустое ограниченное множество. Тогда решения уравнения (10) имеют экспоненциальную дихотомию.*

Следствие 1. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Если $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M)$, то фазовое пространство совпадает с устойчивым инвариантным пространством, а если $\sigma^L(M) = \sigma^L_-(M)$, то – с неустойчивым инвариантным пространством.*

Далее, рассмотрим неоднородное уравнение

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \omega, \tag{11}$$

где вектор-функция ω принадлежит пространству $C^\infty(\mathfrak{I}; \mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I} = [0,t)$. Пусть M – (L,p)-радиальный оператор и выполнены условия (8), (9), тогда уравнение (11) можно рассматривать в виде системы двух уравнений

$$H\dot{\eta}^0 = \eta^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)\omega^0,$$

$$\dot{\eta}^1 = S\eta^1 + L_1^{-1}Q\omega^1. \tag{12}$$

В силу леммы 4 оператор H нильпотентен, поэтому задача Коши $\eta^0(0) = \eta^0_0$ для уравнения (12) неразрешима при

$$\eta^0_0 \neq -\sum_{q=0}^{p} H^p M_0^{-1} \frac{d^q\omega^0}{dt^q}(0).$$

Следовательно, для однозначной разрешимости задачи Коши $\eta(0) = \eta_0$ для уравнения (11) необходимо на вектор η_0 накладывать дополнительные условия, зависящие от правой части уравнения.

В силу сказанного выше в качестве начальных условий будем рассматривать условия Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} (R^L_\alpha(M))^{p+1}(\eta(L) - \eta_0) = 0. \tag{13}$$

Пусть M – (L,p)-радиальный оператор и выполнены условия (8), (9), тогда соотношение (13) эквивалентно условию

$$P(\eta(0) - \eta_0) = 0.$$

Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (11) называется *решением задачи* (11), (13), если

$$\lim_{t\to 0_+} (R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta(t) = (R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta_0.$$

Теорема 5 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным, выполнены условия (8), (9) и включение $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I}=[0,t)$. Тогда при любом $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ существует решение $\eta \in C^1(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L}_2)$ задачи Шоуолтера–Сидорова (13) для уравнения (11), имеющее вид*

$$\eta(t) = U^t\eta_0 - \sum_{q=0}^{p} H^p M_0^{-1}\frac{d^q\omega^0}{dt^q}(t) + \int_0^t U^{t-s}\omega\, ds.$$

3. Относительно радиальные операторы в гильбертовых пространствах дифференциальных *k*-форм со стохастическими коэффициентами. Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое компактное ориентированное риманово многообразие без края с локальными координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$ Обозначим через $H_k = H_k(\mathcal{M},\Omega)$ пространство гладких дифференциальных k-форм, $k=\overline{0,n},$ со стохастическими коэффициентами. В наших рассмотрениях коэффициенты k-форм могут содержать время $t\in[0,+\infty),$ но дифференциалы от времени в наборе из k-форм невозможны, т.е. дифференциальные формы имеют вид

$$\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,\omega) = \sum_{|i_1,i_2,\ldots,i_k|=k} a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k},\omega)\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k},$$

где $a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k},\omega)$ – коэффициенты, зависящие, в том числе, от времени, а $|i_1,i_2,\ldots,i_k|$ – мультииндекс.

В пространствах H_k имеется стандартное скалярное произведение

$$(\xi,\varepsilon)_0 = \int_{\mathcal{M}} \xi\wedge *\varepsilon, \quad \xi,\varepsilon\in H_k. \tag{14}$$

Здесь $*$ – оператор Ходжа и $\wedge$ – оператор внутреннего умножения k-форм.

Пополняя по непрерывности пространство H_k по норме $\|\cdot\|_0,$ соответствующей скалярному произведению (14), получаем пространство $\mathfrak{H}_k^0$. Вводя скалярные произведения в пространствах дифференцируемых или дважды дифференцируемых (в смысле Нельсона–Гликлиха) k-форм и пополняя пространства по нормам, соответствующим этим скалярным произведениям, построим пространства $\mathfrak{H}_k^1$ и $\mathfrak{H}_k^2$ соответственно. Для этих гильбертовых пространств имеют место непрерывные вложения $\mathfrak{H}_k^2\subseteq\mathfrak{H}_k^1\subseteq\mathfrak{H}_k^0$.

В построенных пространствах мы можем использовать обобщение лапласиана – оператор Лапласа–Бельтрами $\Delta = d\delta+\delta\, d,$ где d – оператор внешнего умножения дифференциальных форм, а оператор $\delta = *d*$ сопряжён к оператору d.

Замечание 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на 0-формах, заданных в декартовой системе координат, с точностью до знака совпадает с обычным оператором Лапласа.

Для полученных пространств имеет место обобщение теоремы Ходжа–Кодаиры.

Теорема 6 [10]. *Для пространства $\mathfrak{H}_k^l,$ $l=0,1,2,$ имеет место следующее разложение в прямую сумму подпространств:*

$$\mathfrak{H}_k^l = \mathfrak{H}_{kd}^l \bigoplus \mathfrak{H}_{k\delta}^l \bigoplus \mathfrak{H}_{k\Delta}^l, \quad l=0,1,2,$$

где $\mathfrak{H}_{kd}$ – потенциальные, $\mathfrak{H}_{k\delta}$ – соленоидальные, $\mathfrak{H}_{kd}$ – гармонические формы.

Следствие 2. *В условиях теоремы имеет место разложение*

$$\mathfrak{H}_k^l = (\mathfrak{H}_{k\Delta}^l)^\perp \bigoplus \mathfrak{H}_{k\Delta}^l, \quad l=0,1,2.$$

Аналогично рассуждениям п. 1 введём в рассмотрение *пространства случайных* $\mathbf{K}$*-величин* и *пространства* $\mathbf{K}$*-"шумов"*, определённых на многообразии $\mathcal{M}$. Пусть $\mathbf{K}=\{\lambda_k\}$ – последовательность такая, что $\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2<+\infty$. Через $\{\varphi_k\}\subset\mathfrak{H}_k^0$ и $\{\psi_k\}\subset\mathfrak{H}_k^2$ обозначим системы собственных векторов оператора Лапласа–Бельтрами, ортонормированные относительно скалярного произведения в этих пространствах. Эти системы образуют базисы в пространствах $\mathfrak{H}_k^0$ и $\mathfrak{H}_k^2$. Элементами пространств $\mathbf{H}_{k\mathbf{K}}^0\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{H}_{k\mathbf{K}}^2\mathbf{L}_2$ являются векторы $\chi=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k\xi_k\varphi_k$

и $\kappa = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \zeta_k \psi_k$, в которых последовательности случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ и $\{\zeta_k\} \subset \subset \mathbf{L}_2$ таковы, что для дисперсий выполняются неравенства $\mathbf{D}\xi_k \leqslant \mathrm{const}$ и $\mathbf{D}\zeta_k \leqslant \mathrm{const}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По аналогии с п. 2 построим множество непрерывных процессов $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ и множество непрерывно дифференцируемых по Нельсон–Гликлиху процессов $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Далее, перейдём к вопросу о существовании и устойчивости решений уравнения (1) в пространствах $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$. Для этого операторы $L, M : \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \to \mathbf{H}^2_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ определим формулами

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \nu\Delta - ib\Delta^2 \tag{15}$$

и уравнение (1) сведём к уравнению

$$L\overset{\circ}{\chi} = M\chi. \tag{16}$$

Лемма 6. *При любых $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L, 0)$-радиален.*

Доказательство. Спектр оператора Лапласа–Бельтрами $\{\sigma_k\} \subset \mathbb{R}$ дискретен, конечнократен и сгущается к $+\infty$ [5, гл. 6]. Рассмотрим L-спектр $\mu_k = (\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)/(\lambda + \sigma_k)$ оператора M, перейдём к пределу при $k \to +\infty$, получим в пределе $\nu - i\infty$, что и означает $(L, 0)$-радиальность.

Теорема 7. *(i) Если $\lambda \notin \{\sigma_k\}$, то фазовое пространство уравнения (16) совпадает с пространством $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$.*

(ii) Если $\lambda \in \{\sigma_k\}$, то фазовым пространством уравнения (16) является пространство $\mathcal{P} = \{\varepsilon \in \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 : \langle \varepsilon, \varphi_l \rangle = 0, \ \ \sigma_l = \lambda\}$.

Доказательство вытекает из теоремы 3 при выборе в качестве пространства $\mathbf{U_K L}_2$ пространства $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$.

Относительный спектр оператора M представим в виде двух не пересекающихся компонент $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$, где

$$\sigma^L_+(M) = \left\{\mu_k = \frac{\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2}{\lambda + \sigma_k}, \ \ \sigma_k < -\lambda\right\} \ \text{ и } \ \sigma^L_-(M) = \left\{\mu_k = \frac{\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2}{\lambda + \sigma_k}, \ \ \sigma_k > -\lambda\right\}.$$

Теорема 8. *(i) При любых $\nu, \lambda \in \mathbb{R}_-$ и $b \in \mathbb{R}$ существуют конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные пространства уравнения (16) и решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию.*

(ii) При любых $\nu \in \mathbb{R}_-$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $b \in \mathbb{R}$ фазовое пространство уравнения (16) совпадает с устойчивым инвариантным пространством.

Доказательство следует из теоремы 4.

Наконец, рассмотрим неоднородное стохастическое уравнение Гинзбурга–Ландау

$$(\lambda + \Delta)\chi_t = \nu\Delta\chi - ib\Delta^2\chi + \theta \tag{17}$$

в пространстве дифференциальных форм со стохастическими коэффициентами $\mathbf{H}^q_{0\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, заданных на гладких компактных ориентированных римановых многообразиях без края. Заменив по формуле (15) и обозначив неоднородность $\omega = \Theta$, получим уравнение вида (11) и можем для задачи с условием Шоуолтера–Сидорова

$$P(\chi(0) - \chi_0) = 0 \tag{18}$$

применить теорему 5. Тогда справедлива

Теорема 9. *При любых $\nu, \lambda, b \in \mathbb{R}$, вектор-функции $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I}; \mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I} = [0, t)$, и произвольном $\chi_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ существует решение $\chi \in C^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U_K L}_2)$ задачи Шоуолтера–Сидорова (18) для уравнения (17), имеющее вид*

$$\chi(t) = U^t\chi_0 - \sum_{q=0}^{p} (L_1^{-1}M_1)^p M_0^{-1} \frac{d^q\omega^0}{dt^q}(t) + \int\limits_0^t U^{t-s}\omega\, ds,$$

где

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \\ \sum_{k:\sigma_k\neq\lambda} e^{\mu_k t}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \end{cases}$$

а операторы определяются равенствами

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda+\sigma_k)^{-1}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \\ \sum_{k:\sigma_k\neq\lambda}(\lambda+\sigma_k)^{-1}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}(\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \\ \sum_{k:\sigma_k\neq\lambda}(\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, \end{cases} \qquad M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, \quad \sigma_k\neq\lambda, \quad k\in\mathbb{N}, \\ \sum_{k:\sigma_k\neq\lambda}(\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)^{-1}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k. \end{cases}$$

Доказательство следует из теоремы 5 с учётом того, что операторы имеют вид (15), а также исходя из стандартного [10] представления полугруппы U^t. Запись операторов L_1^{-1}, M_1, M_0^{-1} соответствует разложению операторов из формулы (15) по собственным функциям используемого в нашем случае оператора Лапласа–Бельтрами.

В заключении отметим, что один из способов обобщить результаты работы состоит в изучении вопросов разрешимости и устойчивости решений нелинейного стохастического уравнения Гинзбурга–Ландау $(\lambda+\Delta)\chi_t = \nu\Delta\chi - ib\Delta^2\chi + \beta\chi^3$, где $\beta\in\mathbb{C}$.

Исследование Г.А. Свиридюка выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Челябинской области (проект 20-41-000001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребина С.А., Сагадеева М.А.* Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа. Челябинск, 2016.
2. *Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A., Manakova N.A.* Optimal control of solutions of a multipoint initial-final problem for non-autonomous evolutionary Sobolev type equation // Evolut. Equat. and Contr. Th. 2019. V. 8. № 3. P. 473–488.
3. *Сагадеева М.А., Шулепов А.Н.* Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа // Вестн. Одесского нац. ун-та. Сер. Математика и механика. 2013. Т. 18. № 2. С. 35–43.
4. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М., 2005.
5. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., 1987.
6. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo, 2003.
7. *Gliklikh Yu.E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London; Dordrecht; Heidelberg; New York, 2011.
8. *Shafranov D.E., Kitaeva O.G.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with the Showalter–Sidorov condition and additive “white noise” in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary // Global and Stoch. Anal. 2018. V. 5. № 2. P. 145–159.
9. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A.* Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with “noise” // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2019. Т. 12. Вып. 2. С. 47–57.
10. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A.* Degenerate holomorphic semigroups of operators in spaces of k-“noises” on Riemannian manifolds // Semigroups of Operators-II Theory and Applications SOTA 2018. Springer Proc. in Math. and Statistics. Cham, 2020. V. 325. P. 279–292.

11. *Kitaeva O.G.* Stable and unstable invariant spaces of one stochastic non-classical equations with a relatively radial operator on a 3-torus // J. of Comp. and Eng. Math. 2020. V. 2. P. 40–49.
12. *Shafranov D.E.* Numerical solutions of the Dzektser equation with "white noise" in the space of smooth differential forms on a torus // J. of Comp. and Eng. Math. 2020. V. 2. P. 58–65.
13. *Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A.* Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators in space of "noises" // Mediterranean J. of Math. 2016. V. 6. № 13. P. 4607–4621.
14. *Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A.* Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of "noises" // Abstr. and Appl. Anal. 2015. V. 15. 8 p.
15. *Свиридюк Г.А., Манакова Н.А.* Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова с аддитивными "шумами" // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. Вып. 1. С. 90–103.
16. *Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A.* One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise" // Commun. on Pure and Appl. Anal. 2016. V. 1. № 15. P. 185–196.
17. *Melnikova I.V.* Abstract stochastic equations ii solutions spaces of abstract stochastic distributions // J. of Math. Sci. 2003. V. 5. № 116. P. 3620–3656.

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.
После доработки 23.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 536–551

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

О ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Рассматриваются заданные на положительной полуоси абстрактные линейные неоднородные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, имеющие неограниченные коэффициенты и интегральные слагаемые типа вольтерровой свёртки с ядрами, представимыми интегралом Стилтьеса от убывающей экспоненты. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых начальная задача для рассматриваемых уравнений корректно разрешима в весовых пространствах Соболева, а также установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений. Предложенный подход может быть применён для исследования других интегро-дифференциальных уравнений такого вида.

DOI: 10.31857/S0374064121040087

1. Введение. Постановка задачи. Работа посвящена исследованию интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущённое слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [1–4]), а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина (см. [5–7]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [8]).

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0$ $(\kappa_0 = \mathrm{const} > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B – симметрический неотрицательный оператор, т.е. $(Bx, y) = (x, By)$ и $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(A)$, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$, $0 < \kappa = \mathrm{const} < 1$, для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, Через I обозначаем тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим для заданного на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ интегро-дифференцильного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_0^t Q(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

начальную задачу

$$u(+0) = \varphi_0, \tag{2}$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{3}$$

Предположим, что в уравнении (1) ядра $K(t)$ и $Q(t)$ интегральных операторов имеют следующее представление:

$$K(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu(\tau), \quad Q(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\eta(\tau), \tag{4}$$

где $d\mu$ и $d\eta$ – положительные меры, порождаемые возрастающими непрерывными справа функциями распределения μ и η соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1. \tag{5}$$

Условия (5) означают, что имеют место включения $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и оценки $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (5) добавить также условия

$$K(0) = \int\limits_0^{+\infty} d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var}\mu|_0^{\infty} < +\infty, \quad Q(0) = \int\limits_0^{+\infty} d\eta(\tau) \equiv \operatorname{Var}\eta|_0^{+\infty} < +\infty \tag{6}$$

в предположении, что носители функций μ и η принадлежат полуоси $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$, то ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Введём обозначение

$$A_0 := A + B.$$

Согласно известному результату (см. теорему в [9, с. 361]) оператор A_0 является самосопряжённым и положительным. Превратим область определения $\operatorname{Dom}(A_0^{\beta})$ оператора A_0^{β}, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_{β}, введя на $\operatorname{Dom}(A_0^{\beta})$ норму $\|\cdot\|_{\beta} = \|A_0^{\beta}\cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^{β}.

Замечание 1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} – ограниченные, а оператор A_0^{-1} – компактный.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, операторы A и B в котором порождаются следующими дифференциальными выражениями:

$$A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)\right), \quad B = -\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda\operatorname{grad}(\operatorname{div} u),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ – постоянная плотность, $\rho > 0$, λ – коэффициенты Ламе, μ – положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ – функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трёхмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\operatorname{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (7). Условия (5) имеют конкретный физический смысл (подробнее см. [1, 2]).

В случае, когда оператор B является нулевым, а самосопряжённый положительный оператор A может быть реализован либо как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0,\pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина–Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью (см. подробнее [5–8]).

В наших предшествующих работах [10–14] проводилось подробное исследование задачи (1)–(3) в случае, когда ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде рядов убывающих экспонент с положительными коэффициентами, а также в случае, когда оператор

B нулевой. Наш подход к исследованию основан на спектральном анализе оператор-функции (8) (см. ниже), который также даёт возможность установить корректную разрешимость и получить представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Указанные результаты подытожены в монографии [10, гл. 3]. Эти же вопросы рассматриваются в настоящей работе для более общего, чем в [10–14], уравнения (1).

2. Формулировка результатов. Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённое нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \equiv \bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u^{(n)}(t)\|^2_H + \|A_0^{n/2}u(t)\|^2_H)\,dt\bigg)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. монографию [15, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W^n_{2,0} = W^n_2$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $u(\cdot)$ *сильным* решением задачи (1)–(3), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2), (3).

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1)–(3) с нулевыми начальными условиями $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ имеет следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь $\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, $t \geqslant 0$, оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{8}$$

где, как сказано выше, $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ – преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$ соответственно, т.е., как несложно убедиться,

$$\hat{K}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}.$$

Определение 2. Вектор-функцию $u(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовём *обобщённым* (*слабым*) решением задачи (1)–(3), если $u(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + \langle (A+B)^{1/2}u(t), (A+B)^{1/2}v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\langle u^{(1)}(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\bigg\langle \int\limits_0^t K(t-s)(A+B)^{-1/2}Au(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v(t)\bigg\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\bigg\langle \int\limits_0^t Q(t-s)(A+B)^{-1/2}Bu(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v(t)\bigg\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v(0)\rangle = 0 \tag{9}$$

для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, а также условиям (2), (3).

Отметим, что, согласно определению пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, вектор-функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве задаётся формулой

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \equiv \bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u^{(1)}(t)\|^2_H + \|A_0^{1/2}u(t)\|^2_H)\,dt\bigg)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Корректная разрешимость. Следующие теоремы дают достаточное условие корректной разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4)–(6), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 \geqslant 0$ и $f(0) = 0$, кроме того, $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. Тогда существует такое $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, что для любого $\gamma > \gamma_1$ задача (1)–(3) имеет единственное решение в пространстве $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \leqslant d(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2}\varphi_1\|_H),$$

где константа d не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4)–(6), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 \geqslant 0$ и, кроме того, $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. Тогда существует такое $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, что для любого $\gamma > \gamma_1$ задача (1)–(3) имеет обобщённое решение в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, для которого справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \leqslant d(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H + \|\varphi_1\|_H),$$

где константа d не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Спектральный анализ. Отметим, что в работах [13, 14] изучались интегро-дифференциальные уравнения с сингулярными ядрами.

Перейдём к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (4)–(6). Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (4)–(6). Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в открытой левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ и справедливо неравенство*

$$\|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2}\| \leqslant \mathrm{const}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \gamma > 0. \tag{10}$$

Условия (5) являются существенными для устойчивости решения задачи (1)–(3).

Замечание 2. При нарушении условия (5), т.е. при выполнении неравенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} > 1, \tag{11}$$

в правой полуплоскости может оказаться бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Поясним это замечание, рассмотрев следующий частный случай: функция $\eta(\tau)$ и оператор B нулевые, $\eta(\tau) = 0$ и $B = 0$, а функция $\mu(\tau)$ является ступенчатой функцией, имеющей представление

$$\mu(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi[\gamma_j, \gamma_{j+1}),$$

где $\chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$ – характеристические функции полуинтервалов $[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\gamma_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. В этом случае условие (11) примет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1.$$

При этом оператор-функция $L(\lambda)$ представляется в виде $L(\lambda) = \lambda^2 I + A - \widehat{K}(\lambda)$, где

$$\widehat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda + \gamma_j}.$$

В силу сделанных предположений относительно оператора A его собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Пусть вектору e_j отвечает собственное значение a_j $(Ae_j = a_j e_j)$. Тогда $a_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Рассмотрим скалярные функции

$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n - a_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda + \gamma_j},$$

являющиеся сужениями оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы e_n. Тогда уравнение $l_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, может быть записано в виде $\varphi_n(x) = \psi(x)$, где

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{a_n} + 1, \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x + \gamma_j}.$$

Заметим, что на полуоси $[0, +\infty)$ функция $\psi(x)$ является монотонно убывающей и достигает на ней своего максимума при $x = 0$ и что этот максимум равен $\sum_{j=1}^{\infty}(c_j/\gamma_j) > 1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n, являющихся собственными значениями оператор-функции $L(\lambda)$. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x) = 1$ при положительных x, поскольку $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

В случае $\sum_{j=1}^{\infty}(c_j/\gamma_j) = 1$ точка $\lambda = 0$ является собственным значением оператор-функции $L(\lambda)$ бесконечной кратности.

Следующие теоремы 4 и 5 доказаны в нашей работе [12].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (4)–(6) и носители мер $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ принадлежат отрезку $[d_1, d_2]$, где $(0 < d_1 < d_2 < +\infty)$. Тогда для любого сколь угодно малого $\theta_0 > 0$ существует такое число $R_0 > 0$, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит множеству*

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0, \quad |\lambda| < R_0\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A + B + d_2^2 I)f, f)}, \quad f \in D(A).$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, что для оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на множестве $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \bigcup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$ справедлива оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}.$$

Утверждение. *Для величины α_0 справедлива следующая оценка:*

$$\alpha_0 \geqslant -\frac{1}{2}\|A_0^{-1/2}(K(0)A + Q(0)B)A_0^{-1/2}\|.$$

Замечание 3. Согласно лемме 2.1 из работы [16] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы 2.1 из работы [16] и в силу самосопряжённости оператора $A_0 = A + B$ оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причём для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ собственные значения являются изолированными, т.е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в работе [11]. Теоремы 4, 5 представляют собой естественное развитие результатов, изложенных в монографии [10]. Отметим также, что оператор-функция вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются суммами дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, изучалась в работах [13, 14].

Обозначим через $N(\mu; L(\lambda))$ кратность характеристического числа $\lambda = \mu$ оператор-функции $L(\lambda)$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область. Введём функцию $\nu(r; \Omega; L(\lambda))$ переменной $r \in \mathbb{R}$, представляющую собой функцию распределения в области Ω. Предполагая $L(\lambda)$ аналитической оператор-функцией в области Ω, положим

$$\nu(r; \Omega; L(\lambda)) := \sum_{\substack{\mu \in \Omega \\ |\mu| < r}} N(\mu; L(\lambda)).$$

Причём, если в области $\Omega \bigcap \{\lambda : |\lambda| < r\}$ лежит бесконечное число характеристических чисел функции $L(\lambda)$ или $N(\mu; L(\lambda)) = +\infty$ хотя бы в одной точке $\mu \in \Omega$ с $|\mu| < r$, то полагаем, что $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = +\infty$. Обозначим область

$$\Psi_{\theta,\eta} := \{\lambda : |\lambda| > \eta, \quad |\arg \lambda| < \theta\},$$

где $\pi/2 < \theta < \pi$, причём здесь $-\pi < \arg \lambda \leqslant \pi$. В дальнейшем запись $\nu_1(t) \sim \nu_2(t)$ означает, что $\nu_1(t)/\nu_2(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

Следуя [17], через $\Re$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определённых при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \Re$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\Im$ – множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $\nu(r + \delta r) \leqslant (1 + \varepsilon)\nu(r)$ для всех r из области определения.

Обозначим через $P(\lambda)$ следующую оператор-функцию:

$$P(\lambda) := \lambda^2 I + A + B.$$

Используя теорему 2.1 [17] и теорему 4, получаем, что справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \in \Re \bigcap \Im$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\Psi_{\theta,\eta}$ *состоит из дискретных точек спектра и справедливо соотношение*

$$\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \sim \nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; L(\lambda)). \tag{12}$$

Обозначим через $N(r, A_0^{1/2})$ число собственных чисел оператора $A_0^{1/2}$ (подсчитанных с учётом кратности) меньших чем r.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда* $\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda)) \sim 2N(r, A_0^{1/2})$.

Утверждение следствия немедленно вытекает из теоремы 6 и соотношения

$$P(\lambda) = \lambda^2 I + A_0 = (\lambda I - iA_0^{1/2})(\lambda I + iA_0^{1/2}).$$

Отметим, что в работах [18, 19] получены результаты о корректной разрешимости и получены оценки классических решений задачи вида (1)–(3), основанные на применении теории полугрупп к исследованию интегро-дифференциальных уравнений.

3. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1 приведено в статье [11].

Доказательство теоремы 2. Вначале докажем теорему в случае однородных (нулевых) начальных условий ($\varphi_0 = \varphi_1 = 0$). Для доказательства корректной разрешимости задачи (1)–(3) используем преобразование Лапласа. Напомним основные определения и утверждения, которые будут использоваться далее.

Определение 3. Назовём *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных (аналитических) в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \gamma \geqslant 0\}$, для которых справедливо соотношение

$$\sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x+iy)\|_H^2 \, dy < +\infty \quad (\lambda = x + iy).$$

Сформулируем известную теорему Пэли–Винера для вектор-функций в пространстве Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли–Винер). *1. Пространство $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), представимых в виде*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \tag{13}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma \geqslant 0$.

2. Для любой вектор-функции $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ существует и единственно представление (13), где вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, и справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma + iy) e^{(\gamma+iy)t}\, dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geqslant 0.$$

3. Для вектор-функций $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением (13), справедливо равенство

$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x+iy)\|_H^2\, dy = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2\, dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}.$$

Сформулированная теорема Пэли–Винера хорошо известна для скалярных функций и имеет естественное обобщение для вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

При доказательстве теоремы 2 будут использоваться следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что оператор-функция $(I - V(\lambda))^{-1}$, где*

$$V(\lambda) = \hat{K}(\lambda) A (\lambda^2 I + A_0)^{-1} + \hat{Q}(\lambda) B (\lambda^2 I + A_0)^{-1}, \tag{14}$$

является аналитической в правой полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma\}$ и имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \|(I - V(\lambda))^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Лемма 2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\|\lambda(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\| \leqslant 1/|\operatorname{Re}\lambda|, \quad |\operatorname{Re}\lambda| > \gamma.$$

Доказательства лемм 1 и 2 содержатся в статье [12].

Лемма 3. *Множество функций $h(t)$ таких, что $h(0) = 0$, $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, является всюду плотным в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.*

Для удобства читателей, чтобы не загромождать изложение, доказательство леммы 3 перенесём в п. 4.

Вначале изучим задачу с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Рассмотрим фундаментальную в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функций таких, что $f_n^{(1)}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и $f_n^{(1)}(0) = 0$.

Для функции $f_n(t)$, согласно теореме 2.1, найдётся единственное сильное решение $u_n(t) \in \in W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ задачи (1)–(3). Отметим, что сильное решение $u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (9), что проверяется непосредственно интегрированием по частям. Заметим далее, что последовательность решений $\{u_n(t)\}$ является фундаментальной в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. Указанное свойство вытекает из теоремы Пэли–Винера, а также следующего утверждения.

Лемма 4. *При сделанных предположениях относительно операторов A и B справедливы неравенства*

$$\|A_0^{1/2} L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mathrm{const}/\mathrm{Re}\,\lambda, \tag{15}$$

$$\|\lambda L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mathrm{const}/\mathrm{Re}\,\lambda, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \gamma > 0. \tag{16}$$

Также, чтобы не загромождать изложение, перенесём доказательство леммы 4 в п. 4.

На основании оценок (15), (16), согласно теореме Пэли–Винера, получаем

$$\|u_n(t)\|^2_{W^1_{2,\gamma}} = \|u_n^{(1)}(t)\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|A_0^{1/2} u(t)\|^2_{L_{2,\gamma}} \leqslant \big(\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma} |\lambda| \|L^{-1}(\lambda)\|\big)^2 \|f_n(\lambda)\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma)} +$$

$$+ \big(\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma} \|A_0^{1/2} L^{-1}(\lambda)\|\big)^2 \|\hat{f}_n(\lambda)\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma)} \leqslant \mathrm{const} \|f_n(t)\|^2_{L_{2,\gamma}}. \tag{17}$$

Таким образом, по фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ мы получаем фундаментальную в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ последовательность сильных решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты пространства $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ существует функция $u(t) = = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$, принадлежащая пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и удовлетворяющая интегральному тождеству (9). Последнее свойство вытекает из непрерывности скалярного произведения. В самом деле, рассмотрим интегральное тождество для сильных решений $u_n(t)$, соответствующих вектор-функциям $f_n(t)$:

$$-\langle u_n^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + \langle A_0^{1/2} u_n(t), A_0^{1/2} v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma \langle u_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$- \left\langle \int_0^t K(t-s) A_0^{-1/2} A u_n(s)\, ds, A_0^{1/2} v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \left\langle \int_0^t Q(t-s) A_0^{-1/2} B u_n(s)\, ds, A v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$- \langle f_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} = 0. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (18), в силу непрерывности скалярного произведения, получаем, что предельная функция $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (9) при $\varphi_1 = 0$. Здесь мы использовали то, что операторы $A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2}$ и $A_0^{-1/2} B A_0^{-1/2}$, как отмечалось выше, допускают ограниченные замыкания в пространстве H.

Рассмотрим теперь общий случай, а именно задачу (1)–(3) с ненулевыми начальными условиями φ_0 и φ_1. Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(t) = \cos(A_0^{1/2} t)\varphi_0 + A_0^{-1/2} \sin(A_0^{1/2})\varphi_1 + w(t),$$

где $w(t)$ – неизвестная функция. Очевидно, что функция $w(t)$ является решением следующей задачи с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+A_0w(t)-\int\limits_0^t K(t-s)Aw(s)\,ds-\int\limits_0^t Q(t-s)Bw(s)\,ds=f_1(t),\quad t>0,$$

$$w(+0)=0,$$

$$w^{(1)}(+0)=0,$$

здесь $f_1(t)=f(t)+h(t)$, а вектор-функция $h(t)$ имеет вид $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$, где

$$h_1(t)=\int\limits_0^t K(t-s)A(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds,$$

$$h_2(t)=\int\limits_0^t Q(t-s)B(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds.$$

Для доказательства утверждения о разрешимости достаточно показать, что для некоторого $\gamma_0\geqslant 0$ справедливо включение $h(t)\in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+,H)$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^t e^{-\tau(t-s)}\cos(A_0^{1/2}s)\,ds=(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t})+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)),\tag{19}$$

$$\int\limits_0^t e^{-\tau(t-s)}\sin(A_0^{1/2}s)\,ds=(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t)).\tag{20}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие легко проверяемые предложения 1 и 2.

Предложение 1. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\|(A_0+\tau^2I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{2}\tau^{-2}\|A_0^{-1/2}\|,\quad \tau>0.$$

Доказательство предложения 1 приведено в [12].

Предложение 2. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\|A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\|\leqslant 1,\quad \tau>0.$$

Доказательство предложения 2 очевидно вытекает из спектральной теоремы для оператора A_0.

Далее будем также использовать известные оценки $\|\cos(A_0^{1/2}t)\|_H\leqslant 1$ и $\|\sin(A_0^{1/2}t)\|_H\leqslant 1$, также вытекающие из спектральной теоремы для оператора A_0.

Замечание 4. Из определения оператора A_0 следуют очевидные неравенства

$$\|Ax\|\leqslant\|A_0x\|,\quad \|Bx\|\leqslant\|A_0x\|,\quad x\in\mathrm{Dom}\,(A),$$

из которых, в свою очередь, вытекают неравенства

$$\|AA_0^{-1}\|\leqslant 1,\quad \|BA_0^{-1}\|\leqslant 1.$$

В силу равенств (19), (20) получаем следующее представление для функции $h_1(t)$:

$$h_1(t)=\int_0^t\Big(\int_0^{+\infty}e^{-\tau(t-s)}\,d\mu(\tau)\Big)A(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)}A\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0\,ds\Big)\,d\mu(\tau)+\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)}AA_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1\,ds\Big)\,d\mu(\tau)=$$

$$=\int_0^{+\infty}A(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t}I)+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_0\,d\mu(\tau)+$$

$$+\int_0^{+\infty}A(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(\tau).\qquad(21)$$

Аналогично получаем представление для функции $h_2(t)$:

$$h_2(t)=\int_0^t Q(t-s)B(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}B(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t}I)+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_0\,d\mu(t)+$$

$$+\int_0^{+\infty}B(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(t).$$

Из представления (21) вытекает следующая оценка:

$$\Big\|h_1(t)\|\leqslant\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\tau(\cos A_0^{1/2}t)\varphi_0\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}e^{-\tau t}\varphi_0\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\sin(A_0^{1/2}t)A_0^{1/2}\varphi_0\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0^{-1/2}A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}A_0^{1/2}e^{-\tau t}\varphi_1\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0^{-1/2}A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}A_0^{1/2}(\cos(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0A_0^{-1/2}(A_0+\tau^2I)^{-1}\tau\sin(A_0^{1/2}t)\varphi_1\,d\mu(\tau)\Big\|,$$

в силу которой на основании предложений 1, 2 и замечания 4 получаем

$$\|h_1(t)\| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0^{1/2}\tau(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\cos(A_0^{1/2}t)\| \|A_0^{1/2}\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| e^{-t\tau} \|\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\sin(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|A_0^{1/2}A_0^{-1/2}\| e^{-t\tau} \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|A_0^{1/2}A_0^{-1/2}\| \|\cos(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0^{1/2}\tau(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\sin(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) \leqslant K_1(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|).$$

Таким образом, справедлива следующая оценка:

$$\|h_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma) K_1(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{22}$$

где

$$\theta_1(\gamma) = \biggl(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\, dt\biggr)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}},$$

с постоянной K_1, не зависящей от векторов φ_0 и φ_1.

Дословно повторяя приведённые неравенства с заменой оператора A на оператор B, получаем оценку

$$\|h_2(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma) K_2(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{23}$$

с постоянной K_2, не зависящей от векторов φ_0 и φ_1.

Объединяя оценки (22), (23), приходим к следующей оценке для вектор-функции $h(t)$:

$$\|h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma) K(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \quad K = K_1 + K_2,$$

на основании которой заключаем, что вектор-функция $f_1(t) = f(t) + h(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ и для неё справедливо неравенство

$$\|f_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + d(\gamma)(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{24}$$

где $d(\gamma) = \theta_1(\gamma)K$. Отсюда получаем обобщённую разрешимость задачи (1)–(3) с ненулевыми начальными данными.

Перейдём к оценкам обобщённых решений. Начнём со случая нулевых начальных данных $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Для фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующей ей фундаментальной последовательности решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$

установлено неравенство (17). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (17), в пределе получаем неравенство

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant D\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$$

с постоянной D, не зависящей от функции $f(t)$. Законность соответствующего предельного перехода установлена в начале доказательства теоремы 2.

Перейдём к случаю ненулевых начальных данных. Принимая во внимание то, что задача с ненулевыми начальными данными сводится к задаче с нулевыми начальными данными и новой правой частью $f_1(t) = f(t) + h(t)$ и учитывая оценку (24), получаем для решения исходной задачи оценку

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant d(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|)$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(t)$ и векторов φ_0 и φ_1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Преобразуем оператор-функцию $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = A^{1/2}M(\lambda)A^{1/2},$$

где $M(\lambda) = \lambda^2A^{-1} + (1-\hat{K}(\lambda))I + (1-\hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}$, а через $\mathcal{K}$ обозначен оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Согласно лемме 2.1 из работы [16] оператор $\mathcal{K}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Кроме того, оператор $\mathcal{K}$ является неотрицательным, т.е. $(\mathcal{K}x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$, и симметричным в силу неотрицательности и симметричности оператора B.

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в правой полуплоскости. Рассмотрим форму $(M(\lambda)f, f)$ для $\lambda = x + iy$ таких, что $x > |y|$. Справедлива цепочка неравенств

$$\operatorname{Re}(M(\lambda)f,f) = (x^2-y^2)(A^{-1}f,f) + \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{(x+\tau)\,d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{(x+\tau)\,d\nu(\tau)}{((x+\tau)^2+y^2)}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant (x^2-y^2)(A^{-1}f,f) + \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{x+\tau}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{x+\tau}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)(f,f) = \delta\|f\|^2, \qquad (25)$$

где $\delta = 1 - \int_{d_0}^{+\infty} \tau^{-1}\,d\mu(\tau) > 0$.

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y \geqslant x \geqslant \gamma > 0$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Im}(M(\lambda)f,f) = 2xy(A^{-1}f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f) \geqslant$$

$$\geqslant 2x^2(A^{-1}f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f) \geqslant \gamma\|f\|^2. \qquad (26)$$

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y < -x < -\gamma > 0$, $\gamma > 0$ справедливы неравенства

$$-\operatorname{Im}(M(\lambda)f,f) \geqslant 2x^2(f,f) + |y|\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f) +$$

$$+|y|\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\geqslant\gamma\|f\|^2. \tag{27}$$

Объединяя неравенства (26) и (27), получаем, что в области $\{\lambda=x+iy:|y|>x\geqslant\gamma>0\}$ справедлива оценка

$$|\mathrm{Im}\,(M(\lambda)f,f)|\geqslant\gamma\|f\|^2.$$

В силу произвольности $\gamma>0$ из неравенств (25) и (27) вытекает обратимость оператор-функции $M(\lambda)$, а следовательно, и оператор-функции $L(\lambda)$ в правой полуплоскости. Оценка (10) следует из неравенств (25), (27).

Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$ на мнимой оси. Из представлений

$$\mathrm{Re}\,(M(iy)f,f)=-y^2(A^{-1}f,f)+\biggl(1-\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}\biggr)(f,f)+\biggl(1-\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}\biggr)(\mathcal{K}f,f),$$

$$\mathrm{Im}\,(M(iy)f,f)=y\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+y\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f),$$

из условия (5) вытекает, что существует $\delta>0,$ при котором для всех таких $y,$ что $|y|<\delta,$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\,(M(iy)f,f)\geqslant k(f,f) \tag{28}$$

с некоторой постоянной $k>0.$ С другой стороны, справедливо неравенство

$$|\mathrm{Im}\,(M(iy)f,f)|\geqslant|y|\biggl[\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\biggr]. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29) вытекает обратимость оператор-функции $L(\lambda)$ на мнимой оси. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 6. Отметим, что в области $\Psi_{\theta,\eta}$ выполнено неравенство $|\cos\varphi|>$ $>|\cos\theta|,$ где $\varphi=\arg\lambda,$ $r=|\lambda|,$ и, следовательно,

$$r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2\geqslant r^2-2r\tau\cos\theta+\tau^2\geqslant r^2+\tau^2-\cos\theta(r^2+\tau^2)=(1-\cos\theta)(r^2+\tau^2). \tag{30}$$

Из соотношения

$$\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}=\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{r\cos\varphi+\tau}{r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2}\,d\mu(\tau)-i\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{r\sin\varphi}{r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2}\,d\mu(\tau)$$

и неравенства (30) следует оценка

$$\biggl|\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}\biggr|\leqslant d_1\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{r\,d\mu(\tau)}{r^2+\tau^2}+d_2\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{r^2+\tau^2}, \tag{31}$$

где d_1 и d_2 – положительные постоянные.

Несложно видеть, что справедливы неравенства

$$r\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{r^2(1+\tau^2/r^2)}\leqslant\frac{1}{r}\int\limits_{d_0}^{+\infty}d\mu(\tau)\quad\text{и}\quad\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+r^2}\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau r}=\frac{1}{2r}\int\limits_{d_0}^{+\infty}d\mu(\tau). \tag{32}$$

Аналогичные оценки справедливы для интеграла

$$\left|\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{\tau+\lambda}\right| \leqslant \frac{k}{r}. \tag{33}$$

Вследствие оценок (31), (32) получаем, что выполнены неравенства

$$|\hat{K}(\lambda)| \leqslant k_1/|\lambda|, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leqslant k_2/|\lambda|, \quad \lambda \in \Psi_{\theta,\eta}, \tag{34}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные.

В свою очередь из неравенств (34) и ограниченности операторов AA_0^{-1} и BA_0^{-1} вытекает, что оператор-функция $S(\lambda) = \hat{K}(\lambda)AA_0^{-1} + \hat{Q}(\lambda)BA_0^{-1}$ в области $\Psi_{\theta,\eta}$ допускает оценку

$$\|S(\lambda)\| \leqslant k_3/|\lambda| \tag{35}$$

с положительной постоянной k_3.

Обозначим через $\mathscr{M}(\lambda)$ оператор-функцию вида

$$\mathscr{M}(\lambda) = L(\lambda)A_0^{-1} = I + \lambda^2 A_0^{-1} - S(\lambda).$$

После переобозначения $\mathscr{H} = A_0^{-1/2}$ получим, согласно оценке (35), что оператор-функция

$$\mathscr{M}(\lambda) = I + \lambda^2\mathscr{H}^2 - S(\lambda)$$

удовлетворяет условию теоремы 2.1 в [17]. Следовательно, справедливо соотношение

$$\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}_0(\lambda)) \sim \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}(\lambda)), \tag{36}$$

где $\mathscr{M}_0(\lambda) = I + \lambda^2\mathscr{H}^2$. В силу очевидных равенств

$$\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}_0(\lambda)) = \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, P(\lambda)) \ \text{ и } \ \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}(\lambda)) = \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda))$$

из (36) вытекает доказываемое соотношение (12). Теорема 6 доказана.

4. Дополнение.

Доказательство леммы 3. Пусть $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Будем искать функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям: $h(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $h(0) = 0$ и $\|f(t) - h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \varepsilon$. Обозначим через $g(t) := e^{-\gamma t}f(t)$ такую вектор-функцию, что $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и $\theta(t) := e^{-\gamma t}h(t) \in$ $\in W_2^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|f(t) - h(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t) - h(t)\|^2\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \|e^{-\gamma t}f(t) - e^{-\gamma t}h(t)\|^2\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \|g(t) - \theta(t)\|^2\,dt.$$

Таким образом, вопрос о плотности в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ семейства $\{h(t)\}$ функций таких, что $h(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и $h(+0) = 0$ сводится к вопросу о плотности в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ семейства $\{\theta(t)\}$ функций таких, что $\theta(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и $\theta(+0) = 0$. В свою очередь плотность семейства функций $\{\theta(t)\}$ вытекает из известного результата из монографии [15]. В самом деле, согласно [15, теорема 2.1] семейство бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций всюду плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+,H)$. Следовательно, подмножество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\mathbb{R}_+$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_+,H)$. Но указанное семейство, очевидно, принадлежит семейству функций $\{\theta(t)\}$ таких, что $\theta(t)\in$ $\in W_2^1(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})$ и $\theta(+0)=0$, что и доказывает лемму 3.

Доказательство леммы 4. Установим неравенства (15), (16). Оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ представима в виде

$$L^{-1}(\lambda)=(\lambda^2I+A_0)^{-1}(I-V(\lambda))^{-1}, \tag{37}$$

где оператор-функция $V(\lambda)$ задаётся равенством (14). Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что справедливы неравенства

$$\|A_0^{1/2}(\lambda^2I+A_0)^{-1}\|\leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|,\quad \|\lambda(\lambda^2I+A_0)^{-1}\|\leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|. \tag{38}$$

Отметим, что второе неравенство в (38) доказано в лемме 2. Для доказательства первого неравенства, согласно спектральной теореме (см. [9, с. 452–453]), достаточно установить оценку

$$\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma}\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda^2+\alpha}\leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|,\quad \alpha\in\sigma(A_0)\subset[\kappa_0,+\infty).$$

Переходя к вещественной и мнимой части числа $\lambda=\tau+i\nu$, получаем искомое неравенство

$$\sqrt{\alpha}\Big(\sqrt{\tau^2+(\nu-\sqrt{\alpha})^2}\sqrt{\tau^2+(\nu+\sqrt{\alpha})^2}\Big)^{-1}\leqslant \mathrm{const}/|\tau|.$$

Отсюда на основании представления (37), неравенств (38) и теоремы 3 получаем утверждение леммы 4.

Исследование выполнено в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем” при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator approach to linear // Problems of Hydrodynamics. V. 2. Nonself adjoint Problems for Viscous Fluids. Berlin; Basel; Boston, 2003.
5. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
6. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. Anal. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
7. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
8. *Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyaz'kov D.Yu., Samarin V.A., Shamaev A. S.* Spectral properties of combined media // J. of Math. Sci. 2010. V. 164. № 6. P. 948–963.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.
12. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Spectral analysis of linear models of viscoelasticity // J. of Math. Sci. 2018. V. 230. № 5. P. 668–672.

13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 574–587.
14. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics // J. of Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 170–182.
15. *Лионс Ж.П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
16. *Шкаликов А.А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1988. Т. 177. № 1. С. 96–118.
17. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.
18. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1122–1126.
19. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.
После доработки 27.01.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 552–571

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2021 г. Ю. С. Осипов, В. И. Максимов

На конечном промежутке времени рассматривается управляемая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с правой частью, изменяющей структуру в некоторые моменты времени, расстояние между которыми не может быть меньше некоторой заданной величины. Между двумя соседними моментами изменения структуры правая часть является функцией, липшицевой по фазовым переменным, непрерывной по времени и линейной по управлению и возмущению, которые принимают значения в некоторых выпуклых замкнутых множествах. Предполагается, что в моменты изменения структуры решение системы может испытывать скачок на некоторый вектор, относительно которого известно лишь его направление. На промежутке функционирования системы задана равномерная сетка, в узлах которой измеряются (с ошибкой) значения фазового вектора. Решается задача построения такого алгоритма формирования управления этой системой, который обеспечивает перевод в конечный момент времени траектории системы в минимально возможную окрестность целевого множества. Указывается основанный на конструкциях теории позиционного управления алгоритм решения, устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений.

DOI: 10.31857/S0374064121040099

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается задача управления системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), v(t), V(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1}$$

с начальным состоянием

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \tag{2}$$

Здесь $\vartheta = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$ – управление, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ и $V(t) \in \mathbb{N}$ – возмущения, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Пользуясь терминологией теории позиционных дифференциальных игр [1], будем говорить, что формированием управления $u(\cdot)$ распоряжается первый игрок. В свою очередь возмущения $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$ формирует второй игрок. Функция $V(t)$ кусочно-постоянная и имеет вид

$$V(t) = k \quad \text{при} \quad t \in [a_k^*, a_{k+1}^*), \quad k \in [0:r], \quad a_k^* < a_{k+1}^*, \quad a_0^* = 0, \quad a_{r+1}^* = \vartheta,$$

где число $r \in \mathbb{N}$ и моменты времени a_k^* находятся в распоряжении второго игрока. Правая часть системы (1) имеет следующую структуру:

$$f(t, x, y, u, v, k) = f_k(t, x, u, u, v), \quad k \in [0:r].$$

Таким образом,

$$f(t, x, y, u, v, V(t)) = f_k(t, x, y, u, v) \quad \text{при} \quad t \in [a_k^*, a_{k+1}^*), \quad k \in [0:r].$$

Систему (1) будем записывать также в виде

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t), v(t), V(t)). \tag{3}$$

Начальное состояние последней:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Суть рассматриваемой задачи такова. Полагаем, что $u(t) \in P(t) \subset \mathbb{R}^q$, $v(t) \in Q(t) \subset \mathbb{R}^p$, где $P(t)$ и $Q(t)$ являются выпуклыми ограниченными замкнутыми множествами – "ресурсами" первого и второго игроков соответственно. На промежутке T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$. В узлах сетки τ_i измеряется (с ошибкой) фазовое состояние системы (1), (2) (системы (3), (4)), т.е. находятся векторы ψ_i^h и ξ_i^h такие, что

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leqslant h, \quad |\psi_i^h - \dot{x}(\tau_i)|_n \leqslant h. \tag{5}$$

Здесь и ниже $h \in (0,1)$ – величина *информационной погрешности*, через $|x|_n$ обозначается евклидова норма вектора x. Кроме того, в моменты a_k^*, $k \in [1:r]$, происходит изменение структуры системы (происходит переключение), также меняются и множества P и Q: $P(t) = P_k$, $Q(t) = Q_k$ при $t \in [a_k^*, a_{k+1}^*)$. Считаем, что функции f_k, а также множества P_k и Q_k известны первому игроку, в то время как моменты переключения a_k^* ему неизвестны. Выбором этих моментов (т.е. управлением $V(t)$) распоряжается второй игрок. Будем также считать, что в моменты a_k^*, $k \in [1:r]$, происходят "скачки" фазовых состояний. Именно, если в момент a_k^* должно реализоваться состояние $\{x(a_k^*), y(a_k^*-)\}$, где $x(a_k^*) = \lim\limits_{t \to a_k^*-} x(t)$, $y(a_k^*-) = \lim\limits_{t \to a_k^*-} y(t)$, то полагаем

$$x(a_k^*) = x(a_k^*+), \quad y(a_k^*) = y(a_k^*+) = y(a_k^*-) + b_k^* e_k,$$

где векторы $e_k \in \mathbb{R}^n$, $|e_k|_n = 1$, и величины $b_k^* \in \mathbb{R}$ выбирает второй игрок. При этом считаем структуру "скачка" частично известной первому игроку. Именно, ему известны векторы e_k, но не известны величины b_k^*. В дальнейшем будем называть моменты a_k^* *моментами скачка*. Функции f_k будем предполагать липшицевыми по x, y и непрерывными по t, u, v.

Обсуждаемая в настоящей работе задача, стоящая перед первым игроком, состоит в построении управления $u(t) = u(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, обеспечивающего перевод фазовой траектории системы (1), (2) на замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ (в момент ϑ) или "минимально допустимую" его окрестность. Смысл последнего термина будет пояснён ниже.

В случае, когда структура системы неизменна ($f = f_0$ при всех $t \in T$, "скачки" отсутствуют), обсуждаемая задача может быть решена в рамках предложенного в монографии [1] подхода. Согласно этому подходу необходимо поступить следующим образом. В начальный момент времени, зная начальное состояние, можно определить наименьшую окрестность (ε-окрестность, т.е. M^ε) целевого множества, в которую первый игрок гарантированно может перевести фазовый вектор системы в момент ϑ. (Говоря о той или иной окрестности множества M, мы в дальнейшем понимаем замкнутую окрестность.) Затем можно построить некоторое семейство u-стабильных множеств $W^\varepsilon(t)$, $t \in T$, обрывающееся в момент ϑ на множестве M^ε $(W^\varepsilon(\vartheta) \subset M^\varepsilon)$ и такое, что начальное состояние системы находится во множестве $W^\varepsilon(0)$. В качестве таких множеств можно взять максимально широкое семейство множеств (семейство множеств позиционного поглощения) или более узкое семейство, например, стабильные дорожки. После этого организуется процедура позиционного управления заданной системой, обеспечивающая отслеживание фазовой траекторией этой системы фазовой траектории так называемого поводыря, который движется по выбранному семейству u-стабильных множеств. Стратегия (правило выбора) управления, обеспечивающая указанное выше свойство слежения, называется *экстремальной стратегией.* Если $\{x_0, y_0\} \in W(0)$, то, как установлено в [1, § 57], экстремальная стратегия решает задачу гарантированного наведения на множество M в момент ϑ при любой допустимой реализации управления второго игрока.

Будем говорить, что стратегия формирования управления обеспечивает решение задачи наведения в "минимально допустимую" окрестность множества M, если она определяется следующим образом. (В дальнейшем такую стратегию назовём *стратегией гарантированного наведения* – СГН.) В начальный момент строится семейство u-стабильных множеств $W_0(t)$, $t \in T$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения системы (3) с правой частью $f = f_0$ из начального состояния $\{x_0, y_0\}$ в наименьшую окрестность множества M. После этого в качестве СГН на полуинтервале $[0, a_1^*)$ выбираем стратегию экстремального прицеливания на множества $W_0(t)$. В момент a_1^* в результате применения этой стратегии и действия некоторого допустимого управления $v(\cdot)$ второго игрока реализуется состояние

$\{x(a_1^*), y(a_1^*-)\}$. Вследствие скачка и изменения структуры системы, начиная с момента a_1^* (вплоть до момента a_2^*), система (3) описывает соотношениями

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_1(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) \tag{6}$$

с начальным состоянием

$$x(a_1^*), \quad y(a_1^*) = y(a_1^*+) = y(a_1^*-) + b_1^* e_1. \tag{7}$$

Для системы (6) с начальным в момент $t = a_1^*$ состоянием (7) строится система u-стабильных множеств $W_1(t)$, $t \in [a_1^*, \vartheta]$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения в наименьшую окрестность множества M в момент ϑ. В качестве СГН на полуинтервале $[a_1^*, a_2^*)$ берём стратегию экстремального прицеливания на множества $W_1(t)$. Аналогичным образом СГН определяется на полуинтервалах $[a_k^*, a_{k+1}^*)$, $k \in [2 : r]$. Пусть СГН определена на полуинтервале $[0, a_k^*)$. В момент $t = a_k^*$ в результате применения этой стратегии и действия некоторого допустимого управления $v(\cdot)$ второго игрока реализуется состояние $\{x(a_k^*), y(a_k^*-)\}$. Вследствие изменения структуры системы и скачка, начиная с момента a_k^* (вплоть до момента a_{k+1}^*), система (3) описывается соотношениями

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_k(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) \tag{8}$$

с начальным состоянием

$$x(a_k^*), \quad y(a_k^*) = y(a_k^*+) = y(a_k^*-) + b_k^* e_k. \tag{9}$$

Для системы (8) с начальным в момент $t = a_k^*$ состоянием (9) строится система u-стабильных множеств $W_k(t)$, $t \in [a_k^*, \vartheta]$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения из состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ в наименьшую окрестность множества M. В качестве СГН на полуинтервале $[a_k^*, a_{k+1}^*)$ выбираем стратегию экстремального прицеливания на множество $W_k(t)$.

Мы ввели понятие СГН в предположении, что моменты скачков a_k^* первому игроку известны и что ему известны также состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$. В действительности же это не так. Именно, как моменты a_k^*, так и состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ вида (9) первому игроку неизвестны и подлежат определению. Предположим, что при построении СГН вместо моментов скачков a_k^*, а также состояний $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ берутся их приближённые значения, которые определяются с помощью некоторого алгоритма. Для их вычисления требуется определённое время. Поэтому при построении СГН вместо неизвестных моментов a_k^* скачка естественно использовать другие моменты, немного превосходящие a_k^*. Подобная модификация СГН приводит нас к новой стратегии выбора управления первым игроком, которую мы назовём *ε-стратегией гарантированного наведения* (ε-СГН). Цель настоящей работы состоит в построении ε-СГН.

Заметим, что основы теории гарантированного управления в формализации, восходящей к работам Н.Н. Красовского, заложены в работах [1–7]. Однако в этих работах обсуждались задачи гарантированного управления для систем с фиксированной правой частью (заданной структурой). Кроме того, рассматривался случай измерения всех фазовых координат. Случай измерения части координат исследовался в работах [8–11]. В данной работе изучается задача наведения для систем с переменной структурой при наличии скачков фазовых состояний. Заметим, что такого типа скачки появляются, например, в задачах с импульсным управлением.

В настоящей работе для упрощения мы ограничимся случаем линейных по управлениям функций f_k, т.е. положим

$$f_k = f_{1k}(t, x, \dot{x}) + B_k u - C_k v,$$

где B_k и C_k – постоянные матрицы соответствующих размеров, а в качестве стабильных множеств возьмём стабильные дорожки. При этом естественно в качестве стратегии экстремального прицеливания выбрать стратегию прицеливания на соответствующие дорожки.

Замечание 1. Если в качестве стабильных множеств берутся максимальные стабильные мосты, т.е. множества позиционного поглощения, то в качестве стратегии экстремального прицеливания удобно выбирать стратегию прицеливания на поводыря, движущегося по соответствующему мосту.

Системы с разрывной правой частью являются частным случаем гибридных систем. К последним относятся системы с переменной структурой [12], а также импульсные системы [13, 14]. Теория управления гибридными системами получила в последние годы бурное развитие [15–18]. Важным подклассом гибридных систем являются переключаемые системы [19, 20]. К последним можно отнести и системы, рассматриваемые в настоящей работе.

В дальнейшем предполагаем выполненными следующие два условия.

Условие 1. Существуют выпуклые и замкнутые множества $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0:r]$, такие, что $B_kP_k = C_kQ_k + E_k$.

Здесь $B_kP_k = \{B_ku : u \in P_k\}$, $C_kQ_k = \{C_kv : v \in Q_k\}$, $C_kQ_k + E_k = \{u_1 + u_2 : u_1 \in \in C_kQ_k, u_2 \in E_k\}$.

Условие 2. Заданы числа $b^* > 0$, $d_0^* > 0$ и $d^* > 0$ такие, что

$$b^* \leqslant b_k^* \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r],$$

$$d_0^* \leqslant a_{k+1}^* - a_k^* \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r-1], \quad a_1^* > d^*, \quad a_r^* < \vartheta.$$

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу построения алгоритма нахождения точек, а также величин разрывов производной n-мерной функции $x(\cdot)$, заданной с ошибкой. Суть задачи состоит в следующем. Имеется некоторая n-мерная функция $x(\cdot)$, заданная на конечном промежутке времени $T = [0, \vartheta]$. Промежуток T разбит на конечное число полуинтервалов

$$[\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0:m-1], \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta.$$

В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ измеряются (приближённо) значения $x(\tau_i)$ функции $x(\cdot)$, т.е. находятся векторы $\Xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|x(\tau_i) - \Xi_i^h|_n \leqslant h. \tag{10}$$

Сама функция $x(\cdot)$ неизвестна. Необходимо указать динамический алгоритм вычисления точек, а также величин разрывов производной функции $\dot{x}(\cdot)$ на основе неточного измерения величины $x(\tau_i)$. Такой алгоритм характеризуется двумя свойствами:

а) вычисление точек разрывов (а также соответствующих величин разрывов) производной функции $x(\cdot)$, меньших текущего значения t, производится по результатам измерения состояния $x(\tau)$ в моменты τ, предшествующие t;

б) только после вычисления точек и величин разрывов функции $\dot{x}(\cdot)$ на промежутке $0 \leqslant \leqslant \tau \leqslant t$ возможно использование новой информации для их вычислений в следующие моменты времени (при $\tau > t$).

Для решений указанной задачи воспользуемся методом позиционного управления с моделью, развитым в работах [1–4, 6–12]. В соответствии с этим методом рассматриваемая задача заменяется другой задачей, а именно, задачей управления по принципу обратной связи некоторой системой. Эту систему в дальнейшем называем *моделью*.

Рассмотрим случай, когда $\dot{x}(\cdot)$ – кусочно-непрерывная функция. Именно, пусть $\{a_k\}_{k=1}^r$ – точки (неизвестные) разрывов функции $\dot{x}(\cdot)$, упорядоченные по возрастанию, т.е. $a_{k+1} > a_k$. Для определённости считаем, что в этих точках функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна справа:

$$\dot{x}(a_k) = \dot{x}(a_k+) = \lim_{\substack{t \to a_k \\ t > a_k}} \dot{x}(t).$$

Через b_k обозначим (неизвестные) величины разрывов, т.е.

$$b_k = |\dot{x}(a_k+) - \dot{x}(a_k-)|_n, \quad \dot{x}(a_k-) = \lim_{\substack{t \to a_k \\ t < a_k}} \dot{x}(t).$$

Пусть заданы три числа $b > 0$, $d_0 > 0$ и $d > 0$ и известно, что

$$b \leqslant b_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r],$$

$$d_0 \leqslant a_{k+1} - a_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r-1], \quad a_1 > d_0 \quad a_r < \vartheta,$$

$$|\dot{x}(t)|_n \leqslant d \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

(Значение r может быть неизвестно.) Предположим также, что функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывно-дифференцируема всюду, за исключением точек $\{a_k\}_{k=1}^r$, причём известно число $F > 0$ такое, что

$$|\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$$

во всех точках дифференцируемости функции $\dot{x}(\cdot)$.

Фиксируем семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h^3}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h^3} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h),$$

где $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$. Введём управляемую систему (модель), описываемую векторным дифференциальным уравнением ($w \in \mathbb{R}^n$, $u^h \in \mathbb{R}^n$) следующего вида:

$$\dot{w}(t) = u^h(t) \tag{11}$$

(система M) с управлением $u^h(t)$. Пусть

$$u^h(t) = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] \quad \text{при} \quad t \in \delta_i \equiv [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1], \tag{12}$$

где $\alpha = \alpha(h)$. В уравнении (11) управление $u^h(t)$ зададим согласно (12). Таким образом, управление $u^h(\cdot)$ в системе (11) будет находиться по принципу обратной связи

$$u^h(t) = u^h(\tau_i; w^h(\tau_i), \Xi_i^h), \quad t \in \delta_i.$$

В этом случае система (11) примет вид

$$\dot{w}^h(t) = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1]. \tag{13}$$

Её начальное состояние

$$w^h(0) = \Xi_0^h.$$

Введём обозначение

$$\mu(t) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |w^h(\tau) - x(\tau)|_n. \tag{14}$$

Через $\Xi(x(\cdot), h)$ обозначим множество допустимых результатов измерений, т.е. множество всех кусочно-постоянных функций $\Xi^h(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$ следующей структуры:

$$\Xi^h(t) = \Xi_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1],$$

удовлетворяющих неравенствам (10).

Введём

Условие 3. Имеют место соотношения

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Учитывая это условие, можно утверждать, что найдётся $h_* \in (0,1)$, для которого при любом $h \in (0, h_*)$ справедливы включения

$$\alpha(h) \in (0,1), \quad \delta(h) \in (0,1), \quad h/\alpha(h) \in (0,1), \quad \delta(h)/\alpha(h) \in (0, 1/2). \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть* $\dot{x}(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$, $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$ *при п.в.* $t \in T$, $\mu(a) \leqslant q$ *для некоторого* $a \in T$ *и выполнено условие 3. Тогда при всех* $h \in (0, h_*)$, $\Xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$, $\tau_{i+1} > a$ *справедливы неравенства*

$$\mu(t) \leqslant 2q + (2 + 3d)(\alpha + \delta), \quad t \in [a, \vartheta], \tag{16}$$

$$\left(\int\limits_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}(4 + 4.5d)\delta^{1/2} + 2\sqrt{2}\delta^{1/2}\alpha^{-1}q, \tag{17}$$

где $\tilde{\tau}_i = \tau_i$, *если* $\tau_i \geqslant a$, *и* $\tilde{\tau}_i = a$, *если* $\tau_i < a$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством (13), заключаем, что справедливы соотношения

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - x(t)] = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] - \dot{x}(t) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}[w^h(t) - x(t)] + \Psi_h^{(1)}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h^3 - 1], \tag{18}$$

где

$$\Psi_h^{(1)}(t) = \Psi_h(t) + \frac{1}{\alpha}[w^h(t) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Psi_h(t) = -\frac{1}{\alpha}[x(t) - \Xi_i^h] - \dot{x}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

В силу включений (15) верны неравенства $h\alpha^{-1} \leqslant 1$ и $\delta\alpha^{-1} \leqslant 1/2$ при $h \in (0, h_*)$. В таком случае семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ (равномерно по всем $h \in (0, h_*)$) ограничено:

$$|\Psi_h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}(h + |x(t) - x(\tau_i)|_n) + |\dot{x}(t)|_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(\tau)|_n\, d\tau + |\dot{x}(t)|_n \leqslant 1 + 1,5d \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{19}$$

Из представления (18) следует равенство

$$w^h(t) - x(t) = w^h(a) - x(a) + \int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\Psi_h^{(1)}(s)\, ds, \quad t \in [a, \vartheta]. \tag{20}$$

Далее, верны оценки (см. (13), (14))

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left|\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h]\right|_n ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i) + h), \quad \mu(\tau_i) \leqslant \mu(\tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h^3 - 1]. \tag{21}$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$|\Psi_h^{(1)}(t)|_n \leqslant |\Psi_h(t)|_n + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \quad \text{при} \quad t \in \delta_i. \tag{22}$$

Учитывая соотношения (20)–(22), получаем

$$\mu(t) \leqslant q + \left(\frac{\delta}{\alpha^2}\mu(\tau_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2}\right)\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds + \int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\Psi_h(s)|_n\,ds, \tag{23}$$

$$t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_{i+1} > a.$$

Нетрудно видеть, что верно неравенство

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds \leqslant \alpha(1 - e^{-(t-a)/\alpha}) \leqslant \alpha. \tag{24}$$

Воспользовавшись неравенствами (19) и (24), будем иметь

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\Psi_h(s)|_n\,ds \leqslant (1+1.5d)\left(\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds\right) \leqslant \alpha K_1, \tag{25}$$

где $K_1 = 1+1,5d$. В свою очередь, из (23) и (25), считая в (23) $t = \tilde{\tau}_i$ и учитывая неравенство (24), а также неравенство $\mu(\tau) \leqslant \mu(\tilde{\tau}_i)$ при $\tau \in [0, \tilde{\tau}_i]$, выводим оценку

$$\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\mu(\tilde{\tau}_i) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + \alpha K_1 \leqslant q + K_1\left(\alpha + \frac{\delta h}{\alpha}\right),$$

из которой в силу неравенств $1 - \delta/\alpha \geqslant 1/2$ и $h\alpha^{-1}(h) \leqslant 1$ (см. (15)) следует, что

$$\mu(\tilde{\tau}_i) \leqslant 2q + 2K_1\left(\alpha + \frac{\delta h}{\alpha}\right) \leqslant 2q + 2K_1(\alpha + \delta). \tag{26}$$

Далее, имеем

$$\mu(\tilde{\tau}_i) \geqslant \mu(\tau_i). \tag{27}$$

Учитывая (23) и (25), получаем

$$\mu(t) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha}\mu(\tau_i) + \alpha K_1.$$

Значит, вследствие (26) и (24) справедливо неравенство

$$\mu(t) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + 2\frac{\delta}{\alpha}q + 2\frac{\delta}{\alpha}K_1(\alpha + \delta) + \alpha K_1,$$

из которого вытекает неравенство (16).

Проверим справедливость неравенства (17). Имеем

$$|u^h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}|w^h(\tau_i) - \Xi_i^h|_n \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Поэтому, учитывая (15), (26), (27), получаем

$$|u^h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}(\mu(\tau_i) + h) \leqslant \frac{h}{\alpha} + 2\frac{q}{\alpha} + 2K_1\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) \leqslant 2\frac{q}{\alpha} + (4 + 4.5d) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{28}$$

Из (28) выводим неравенство

$$\int_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2 ds \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(s)|_n^2\, ds \leqslant 8\frac{q^2}{\alpha^2}\delta + 2(4+4.5d)^2\delta,$$

из которого следует неравенство (17). Лемма доказана.

Символом $W^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство дифференцируемых n-мерных функций, производные которых являются элементами пространства $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Если* $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([a,\vartheta];\mathbb{R}^n)$, $a \in [0,\vartheta)$, *то при* $t \in [a,\vartheta]$ *имеет место следующее неравенство:*

$$|u^h(t) - \dot{x}(t)|_n \leqslant \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{t-a}, \frac{\delta q}{\alpha^2}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\alpha}{t-a}d + \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3\delta(h)q\alpha^{-2}(h),$$

где $\tilde{c}_1 = F$, $\tilde{c}_2 = 2\sqrt{2}(4+4.5d) + 2\max\{1,d\}$, $\tilde{c}_3 = 4\sqrt{2}$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{t\in[a,\vartheta]} |\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$, $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$ *при п.в.* $t \in [a,\vartheta]$.

Доказательство. Учитывая представление (20), приходим к равенству

$$\alpha^{-1}[w^h(t) - x(t)] - \alpha^{-1}[w^h(a) - x(a)] = \int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\Psi_h^{(1)}(s)\, ds =$$

$$= -\int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\dot{x}(s)\, ds + \sum_{j=1}^{2}\int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\gamma_\delta^{(j)}(s)\, ds, \quad t \in [a,\vartheta], \tag{29}$$

где

$$\varrho_\alpha(t) = \exp(-\alpha^{-1}t), \quad \gamma_\delta^{(1)}(s) = \alpha^{-1}[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\gamma_\delta^{(2)}(s) = -\alpha^{-1}[x(s) - \Xi_i^h] \quad \text{при п.в.} \quad s \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

В силу леммы 1 (см. (17)) верны соотношения

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\tilde{\tau}_i}^{s} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \leqslant \frac{\delta^{1/2}}{\alpha}\left(\int_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{1/2}}{\alpha}\left\{\sqrt{2}(4+4.5d)\delta^{1/2} + 2\sqrt{2}\frac{\delta^{1/2}}{\alpha}q\right\} = \sqrt{2}(4+4.5d)\frac{\delta}{\alpha} + 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q, \quad s \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}]. \tag{30}$$

Воспользовавшись условием (10), а также неравенством $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$, будем иметь

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)|_n \leqslant c_0(\delta+h)\alpha^{-1}, \quad s \in [a,\vartheta], \tag{31}$$

где $c_0 = \max\{1,d\}$. В таком случае из (30) и (31), учитывая неравенство (24), выводим оценку

$$\left|\sum_{j=1}^{2}\int_a^t \frac{d}{ds}\varrho_\alpha(t-s)\gamma_\delta^{(j)}(s)\, ds\right|_n \leqslant \varrho(h,\alpha,\delta) + 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q, \tag{32}$$

где $\varrho(h,\alpha,\delta) = c_1(\delta+h)/\alpha$, $c_1 = \sqrt{2}(4+4.5d)+c_0$. Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (29), получаем

$$-\int\limits_a^t \left(\frac{d}{ds}\varrho_\alpha(t-s)\right)\dot{x}(s)\,ds = \varrho_\alpha(t-a)\dot{x}(a) - \dot{x}(t) + \int\limits_a^t \varrho_\alpha(t-s)\ddot{x}(s)\,ds, \quad t\in[a,\vartheta]. \tag{33}$$

В свою очередь с учётом соотношений (32), (33) из равенства (29) следует, что

$$\left| -\frac{1}{\alpha}[w^h(t)-x(t)] + \frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)] - \dot{x}(t)\right|_n \leqslant 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q +$$

$$+\varrho(h,\alpha,\delta) + |\varrho_\alpha(t-a)\dot{x}(a)|_n + \int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\ddot{x}(s)|_n\,ds. \tag{34}$$

Поскольку имеют место неравенства

$$|\varrho_\alpha(t-a)\dot{x}(a)|_n = e^{-(t-a)/\alpha}|\dot{x}(a)|_n \leqslant \frac{\alpha}{t-a}|\dot{x}(a)|_n, \quad t\in[a,\vartheta],$$

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\ddot{x}(s)|_n\,ds \leqslant \alpha F, \tag{35}$$

то из них и неравенства (34) вытекает, что

$$\left| -\frac{1}{\alpha}[w^h(t)-x(t)] + \frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)] - \dot{x}(t)\right|_n \leqslant 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q + \varrho(h,\alpha,\delta) + \alpha F + \frac{\alpha}{t-a}|\dot{x}(a)|_n.$$

Кроме того, в силу (10), (30) имеем при $t\in[\tilde{\tau}_i,\tau_{i+1}]$ оценку

$$|\alpha^{-1}\{[w^h(t)-x(t)] - [w^h(\tau_i)-\Xi_i^h]\}|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}\left\{\int\limits_{\tau_i}^t |\dot{w}^h(s)|_n\,ds + h + \int\limits_{\tau_i}^t |\dot{x}(s)|_n\,ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (h+d\delta)\alpha^{-1} + \delta\alpha^{-1}\left(\sqrt{2}(4+4.5d) + 2\sqrt{2}\frac{q}{\alpha}\right). \tag{36}$$

Ввиду ограниченности второй производной $\ddot{x}(\cdot)$ $(|\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$ при п.в. $t\in[a,\vartheta])$ из (34)–(36) вытекает (при $t\in\delta_i$) неравенство

$$\left|\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i)-\Xi_i^h] + \frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)] - \dot{x}(t)\right|_n \leqslant 4\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q +$$

$$+\frac{h}{\alpha} + \varrho(h,\delta,\alpha) + (d+\sqrt{2}(4+4.5d))\frac{\delta}{\alpha} + F\alpha + \frac{\alpha}{t-a}|\dot{x}(a)|_n,$$

из которого и следует справедливость леммы. Лемма доказана.

Введём функции $\alpha=\alpha(h)$, $\gamma=\gamma(h)$ и $N=N(h)$ следующим образом:

$$\alpha(h) = \delta^{2/3}(h), \quad \gamma(h) = \delta(h)m_h^2 = \frac{\vartheta}{m_h} < \frac{d_0}{2}, \quad N(h) = \frac{\gamma(h)}{\delta(h)} = m_h^2.$$

Здесь $\delta(h)$ – шаг разбиения Δ_h, т.е $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h = [(\vartheta/h)^{1/3}]$, через $[a]$ обозначается целая часть числа a. Заметим, что при таком выборе величин α, δ и γ выполняются соотношенния

$$h \leqslant \delta(h), \quad \frac{h}{\alpha(h)} \leqslant \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} = \frac{\vartheta^{2/3}\alpha(h)}{\gamma(h)} = \frac{\vartheta^{1/3}}{m_h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{37}$$

Пусть $\delta(1+N) < \vartheta - a_r$,

$$\chi_1(\alpha,\delta,h) = F(\delta+\gamma) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\right) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h+(2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right),$$

$$\chi(\alpha,\delta,h) = F(\delta+\gamma) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{3\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h+(2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right) +$$

$$+ \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h+(6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right). \tag{38}$$

В силу соотношений (37) можно указать число $h_1 \in (0,h_*)$ такое, что при всех $h \in (0,h_*)$ верны неравенства

$$\delta(h) = \vartheta m_h^{-3} \leqslant d_0/4, \quad \chi_1(\alpha(h),\delta(h),h) \leqslant b/2, \quad \chi(\alpha(h),\delta(h),h) \leqslant b/2. \tag{39}$$

Число h_* определено выше. (Мы считаем выполненным условие 3.)

Опишем алгоритм решения рассматриваемой в настоящем пункте задачи. В качестве модели рассмотрим систему вида (11) с начальным состоянием $w^h(0) = \Xi_0^h$. Управление $u^h(\cdot)$ в модели будем вычислять по правилу (12). До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,h_1)$ и разбиение Δ_h с диаметром $\delta = \delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$. Сначала определим полуинтервал, на котором находится первая точка разрыва. Для этого в каждый момент $\tau_i \geqslant d_0$ вычисляем величину

$$\nu_i = |u^h(\tau_{i-N-1}) - u^h(\tau_i)|_n.$$

Лемма 3. *Пусть при некотором $i \in [1 : m_h^3 - 1]$ таком, что $\tau_i > d_0$, первый раз выполняется неравенство*

$$\nu_i > b/2, \tag{40}$$

т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $d_0 \leqslant \tau_j$ справедливы неравенства $\nu_j \leqslant b/2$. Тогда первая точка разрыва a_1 находится на полуинтервале $\gamma_i = (\tau_{i-N-1}, \tau_{i-N}]$. Причём величина разрыва b_1 такова, что

$$|b_1 - \nu_i| \leqslant \chi_1(\alpha,\delta,h). \tag{41}$$

Пусть вычислены k $(1 \leqslant k)$ полуинтервалов, которым принадлежат первые k точек разрыва, т.е. $a_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1:k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}-1}$. Последнее неравенство следует из оценки $\delta(h) \leqslant d_0/4$. В каждый момент $\tau_i \geqslant \tau_{i_k} + d_0$ вычисляем величину ν_i.

Лемма 4. *Пусть при некотором i таком, что $\tau_i > \tau_{i_k} + d_0$, первый раз выполняется неравенство (40), т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $\tau_{i_k-1} + d_0 \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\nu_j \leqslant b/2$. Тогда $(k+1)$-я точка разрыва функции $x(\cdot)$ лежит на полуинтервале γ_i. Причём для величины b_{k+1} разрыва справедливо неравенство*

$$|b_{k+1} - \nu_i| \leqslant \chi(\alpha,\delta,h).$$

Если известно число (r) точек разрыва, то после вычисления величины a_r, т.е. нахождения полуинтервала γ_i такого, что $a_r \in \gamma_i$, работа алгоритма заканчивается. Если число r неизвестно, то работа алгоритма осуществляется до момента ϑ. При этом в силу условия $\delta(1+N) < \vartheta - a_r$ последняя точка разрыва (a_r) будет определена.

Доказательство леммы 3. Пусть $\tau_{i_1} = \tau_{i_1(h)} \in \Delta_h$, $a_1 \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$. На отрезке $[0, \tau_{i_1-1}]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Значит $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([0, \tau_{i_1-1}]; \mathbb{R}^n))$. Поэтому в силу леммы 2 верно неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\right). \tag{42}$$

Кроме того, учитывая, что $|\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$ при п.в. $t \in T$, имеем

$$|\dot{x}(a_1-) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant F(a_1 - \tau_{i_1-1}) \quad \text{и} \quad |\dot{x}(a_1+) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F(\tau_{i_1} - a_1). \tag{43}$$

В свою очередь из неравенств (43) следует, что

$$||\dot{x}(\tau_{i_1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n - b_1| \leqslant F\delta, \tag{44}$$

где $b_1 = |\dot{x}(a_1+) - \dot{x}(a_1-)|_n$. Воспользовавшись леммой 1, а также неравенством $|x(0) - - w^h(0)|_n \leqslant h$, устанавливаем оценку

$$\mu(\tau_{i_1}) \leqslant 2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta). \tag{45}$$

Так как $\gamma = m_h^2\delta \leqslant 0.5d_0$, то $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]; \mathbb{R}^n)$. Поэтому в силу леммы 2, учитывая оценку (45), имеем неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta))}{\alpha^2}\right). \tag{46}$$

Кроме того, в силу равенства $N(h)\delta(h) = \gamma(h)$ справедлива оценка

$$|\dot{x}(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F\gamma, \tag{47}$$

при выводе которой мы воспользовались непрерывностью функции $\dot{x}(\cdot)$ на отрезке $[\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]$, вытекающей из неравенства $2\gamma \leqslant d_0$. Из (46), (47) выводим неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F\gamma + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta))}{\alpha^2}\right). \tag{48}$$

В свою очередь из неравенств (42) и (44) следует, что

$$||u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n - b_1| \leqslant F\delta + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\right). \tag{49}$$

Объединяя неравенства (48) и (49), получаем $||u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})|_n - b_1| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h)$. Таким образом, считая $i = i_1 + N$, будем иметь $|b_1 - |u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})|_n| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h)$, т.е. $0.5b \leqslant b_1 - \chi_1(\alpha, \delta, h) \leqslant \nu_i \leqslant b_1 + \chi_1(\alpha, \delta, h)$. Неравенство (41) установлено.

Заметим, что если бы функция $\dot{x}(\cdot)$ была непрерывной на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$, то в силу (42), (46), (47) и непрерывности справа функции $\dot{x}(\cdot)$ в точках разрыва выполнялось бы следующее неравенство:

$$\nu_{i_1+N} \equiv |u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant |u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1+N})|_n +$$

$$+ |\dot{x}(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n + |\dot{x}(\tau_{i-1}) - \dot{x}(\tau_i)|_n + |u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h) \leqslant 0.5b, \tag{50}$$

так как $\tau_{i_1+N} - \tau_{i_1-1} = \gamma + \delta < d_0$.

Неравенства (50) будут также справедливы, если мы заменим $i_1 + N$ на любое значение $i \in [i_1^* : i_1 + N - 1]$, где $i_1^* = [d_0/\delta(h)] + 1$. Значит, при всех таких i имеют место неравенства $\nu_i \leqslant 0.5b$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4 проводится по схеме доказательства леммы 3.

Пусть вычислены k полуинтервалов, которым принадлежат первые k точек разрыва, т.е. $a_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1:k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}}$. Тогда $a_{k+1} \in (\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$. На отрезке $[\tau_{i_k+1}, \tau_{i_{k+1}-1}]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Кроме того, $\tau_{i_{k+1}-1} - \tau_{i_k+1} \geqslant 0.5d_0$, поскольку $2\delta(h) \leqslant 0.5d_0$ и $a_{k+1} - a_k \geqslant d_0$.

Поэтому в силу лемм 1 и 2 верно неравенство

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{3\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h + (2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr), \tag{51}$$

так как $\tau_{i_{k+1}-1} > a_k + d_0/3$, а на отрезке $[a_k, a_k - \delta]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Кроме того, верны неравенства

$$|\dot{x}(a_{k+1}-) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant F(a_{k+1} - \tau_{i_{k+1}-1}) \quad \text{и} \quad |\dot{x}(a_{k+1}+) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F(\tau_{i_{k+1}} - a_{k+1}),$$

учитывая которые, получаем

$$||\dot{x}(\tau_{i_{k+1}}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n - b_{k+1}| \leqslant F\delta, \tag{52}$$

где $b_{k+1} = |\dot{x}(a_{k+1}+) - \dot{x}(a_{k+1}-)|_n$.

Заметим, что (см. лемму 1) $\mu(\tau_{i_k}) \leqslant 2h + (2+3d)(\alpha+\delta)$. Поэтому

$$\mu(\tau_{i_{k+1}}) \leqslant 2\mu(\tau_{i_k}) + (2+3d)(\alpha+\delta) \leqslant 4h + (6+9d)(\alpha+\delta). \tag{53}$$

В силу леммы 2 (считаем $a = \tau_{i_k+1}$, $q = 4h + (6+9d)(\alpha+\delta)$) и неравенства (53) имеем

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h + (6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{54}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$|\dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F\gamma, \tag{55}$$

так как $\tau_{i_{k+1}+N} < a_{k+2}$. Из (54), (55) выводим неравенство

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F\gamma + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h + (6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{56}$$

В свою очередь из (51), (52) следует, что

$$||u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n - b_{k+1}| \leqslant F\delta + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h + (2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{57}$$

Объединив неравенства (56), (57), получаем

$$||u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})|_n - b_{k+1}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Таким образом, считая $i = i_{k+1} + N$, будем иметь

$$|b_{k+1} - |u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})|_n| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h),$$

т.е.

$$0.5b \leqslant b_{k+1} - \chi(\alpha, \delta, h) \leqslant \nu_i \leqslant b_{k+1} + \chi(\alpha, \delta, h).$$

Заметим, что если бы функция $\dot{x}(\cdot)$ была непрерывной на полуинтервале $(\tau_{i_k+1-1}, \tau_{i_k}]$, то в силу (51), (54), (55) выполнялось бы неравенство

$$\nu_{i_{k+1}+N} \equiv |u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant |u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N})|_n + |\dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n +$$
$$+ |\dot{x}(\tau_{i_{k+1}}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n + |u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant \chi(\alpha, \delta, h) \leqslant 0.5b. \tag{58}$$

Неравенства (58) будут также справедливы, если мы заменим $i_{k+1}+N$ на любое значение $i \in [i_k^* : i_{k+1}+N-1]$, где $i_k^* = i_k + [d_0/\delta(h)]$. Следовательно, при всех таких i будут верны неравенства $\nu_i \leqslant 0.5b$. Лемма 4 доказана.

3. Алгоритм решения. Пусть при всех возможных действиях первого и второго игроков система (1), (2) остаётся в области

$$|f(t,x,y,u,v,V)|_n \leqslant F, \quad |y|_n \leqslant d. \tag{59}$$

Перейдём к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. Фиксируем семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h^3}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h^3} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h),$$

где $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h \in \mathbb{N}$, $m_h = [(\vartheta/h)^{1/3}]$ (величина $h \in (0,1)$ определена в неравенствах (5)), а также функции $\chi_1(\alpha,\delta,h)$, $\chi(\alpha,\delta,h)$ (см. определения (38), в которых вместо d_0 следует взять d_0^*) и

$$\Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, e^{(1)}, e^{(2)}\right) \equiv e^{(1)}d + \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3 e^{(2)}.$$

Здесь $\tilde{c}_1 = F$, $\tilde{c}_2 = 2\sqrt{2}(4+4.5d) + 2\max\{1,d\}$, $\tilde{c}_3 = 4\sqrt{2}$.

Введём функции $\alpha = \alpha(h)$, $\gamma = \gamma(h)$ и $N = N(h)$ следующим образом:

$$\alpha(h) = \delta^{2/3}(h), \quad \gamma(h) = \delta(h)m_h^2 = \frac{\vartheta}{m_h} \leqslant \frac{d_0^*}{2}, \quad N(h) = \frac{\gamma(h)}{\delta(h)} = m_h^2.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{w}^h(t) = v^h(t), \quad t \in T \quad (w^h, v^h \in \mathbb{R}^n), \tag{60}$$

с начальным состоянием $w^h(0) = \xi_0^h$.

Фиксируем величину погрешности измерения $h \in (0,h_1)$. Здесь $h_1 \in (0,h_*)$ таково, что при $h \in (0,h_1)$ имеют место неравенства $\delta(h) \leqslant d_0^*/4$, а также неравенства (39). Вместе с величиной h мы фиксируем разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h^3}$ отрезка T. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_0(t,x(t),y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in T, \tag{61}$$

с начальным состоянием

$$x(0) = \xi_0^h, \quad y(0) = \psi_0^h \tag{62}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n) : u(t) \in E_0$ при п.в. $t \in T\}$. Решаем задачу оптимального программного управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (61), (62) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_0(\cdot)$ – оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_0} – соответствующая замкнутая ε_0-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории в момент ϑ на множество M, то полагаем $\varepsilon_0 = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_0(t)$, $t \in T$, берём решение системы (61), (62) при $\tilde{u}(t) = u_0(t)$, $t \in T$. Обозначим его $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_0(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На полуинтервале $\delta_0 = [0,\tau_1)$ на систему (1) подаём постоянное управление

$$u(t) = u_0,$$

где u_0 – произвольный элемент множества P_0. Под действием этого управления и неизвестного возмущения $v(t) \in Q_0$, $t \in \delta_0$, $(V(t) = 0)$ реализуется траектория $\{x_p(t), y_p(t)\}$, $t \in [0,\tau_1]$, системы (1). На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i > 0$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно правилам

$$(\psi_i^h - y_0(\tau_i), B_0 u_i) = \min\{(\psi_i^h - y_0(\tau_i), B_0 u) : u \in P_0\}, \quad |\psi_i^h - y_p(\tau_i)|_n \leqslant h, \tag{63}$$

$$v_i^h = -\alpha^{-1}[w^h(\tau_i) - \xi_i^h], \quad |\xi_i^h - x_p(\tau_i)|_n \leqslant h. \tag{64}$$

После этого в (1) и (60) полагаем

$$u(t) = u_i, \quad v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{65}$$

Затем вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1), (2)) и $w^h(\cdot)$ (системы (61), (62)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Теперь определим полуинтервал, на котором находится первая точка разрыва. Для этого в каждый момент $\tau_i \geqslant d_0^*$ вычисляем величину $\tilde{\nu}_i = |v^h(\tau_{i-N-1}) - v^h(\tau_i)|_n$. Пусть при некотором $i \in [1 : m_h^3 - 1]$ таком, что $\tau_i > d_0^*$, первый раз выполняется неравенство

$$\tilde{\nu}_i > b^*/2, \tag{66}$$

т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i символом τ_{i_1+N}. Тогда первая точка скачка a_1^* находится на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$. Причём величина разрыва b_1^* такова, что

$$|b_1^* - \tilde{\nu}_{i_1+N}| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h).$$

Теперь определим полуинтервал, на котором находится вторая точка скачка. В момент τ_{i_1+N} рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta], \tag{67}$$

с начальным состоянием

$$x(\tau_{i_1+N}) = x_0(\tau_{i_1-1}), \quad y(\tau_{i_1+N}+) = y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1 \tag{68}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : u(t) \in E_1$ при п.в. $t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta]\}$. Решаем задачу оптимального управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (67) с начальным состоянием (68) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_1(\cdot)$ – оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_1} – соответствующая замкнутая ε_1-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории на множество M, то полагаем $\varepsilon_1 = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_1(t)$, $t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta]$, берём решение системы (67) при $\tilde{u}(t) = u_1(t)$, $t \in T$. Обозначим его, как и выше, через $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_1(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant i_1 + N$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно формулам (63), (64), в которых B_0 и P_0 заменены на B_1 и P_1 соответственно. Затем управления $u(t)$ в системе (1) и $v^h(t)$ в системе (60) задаём по формуле (65). После формирования указанных выше управлений вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1)) и $w^h(\cdot)$ (системы (60)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Пусть при некотором $i \in [i_1+N+1 : m_h^3 - 1]$ первый раз выполняется неравенство (66), т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $\tau_{i_1-1} + d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i, символом τ_{i_2+N}. Тогда вторая точка скачка a_2^* лежит на полуинтервале $(\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}]$. Причём величина b_2^* разрыва удовлетворяет неравенству

$$|b_2^* - \tilde{\nu}_{i_2+N}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Аналогичные действия осуществляются и при $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$. Именно, в момент τ_{i_k+N}, $k \geqslant 2$, рассматривается система

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta], \tag{69}$$

с начальным состоянием

$$x(\tau_{i_k+N}) = x_0(\tau_{i_k-1}), \quad y(\tau_{i_k+N}+) = y_0(\tau_{i_k-1}) + \tilde{\nu}_{i_k+N} e_k \tag{70}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : u(t) \in E_k$ при п.в. $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]\}$. Решаем задачу оптимального управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (69) с начальным состоянием (70) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_k(\cdot)$ –

оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_k} – соответствующая замкнутая ε_k-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории в момент ϑ на множество M, то полагаем $\varepsilon_k = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_k(t)$, $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$, берём решение системы (69) при $\tilde{u}(t) = u_k(t)$, $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$. Обозначаем его через $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_k(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant i_k + N$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно формулам (63), (64), в которых B_0 и P_0 заменены на B_k и P_k соответственно. Управления $u(t)$ в системе (1) и $v^h(t)$ в системе (60) задаём по формуле (64). После формирования указанных выше управлений вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1)) и $w^h(\cdot)$ (системы (60)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Пусть при некотором $i \in [i_k + N + 1 : m_h^3 - 1]$ первый раз выполняется неравенство (66), т.е. при всех $j \leqslant i - 1$, $\tau_{i_k-1} + d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i, через $\tau_{i_{k+1}+N}$. Тогда $k+1$-я точка скачка a_{k+1}^* лежит на полуинтервале $(\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$. Причём величина b_{k+1}^* разрыва такова, что

$$|b_{k+1}^* - \tilde{\nu}_{i_{k+1}+N}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Итак, в ходе работы алгоритма устанавливается, что $a_k^* \in (\tau_{i_k-1}, \tau_{i_k}]$, $k \in [1 : r]$.

Таким образом, ε-СГН определяется как стратегия экстремального прицеливания (см. (63)) на стабильную дорожку следующего вида:

$$W(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [0, \tau_{i_1+N}), \\ W_k(t), & t \in [\tau_{i_k+N}, \tau_{i_{k+1}+N}), \quad k \in [1 : r-1], \\ W_r(t), & t \in [\tau_{i_r+N}, \vartheta]. \end{cases}$$

Этот факт следует из приведённой ниже теоремы.

Пусть $\delta^{(k)} = [\tau_{i_k-1}, \tau_{i_k+N})$, $\Delta^{(r)} = \bigcup_{k=1}^r \delta^{(k)} \bigcup [0, \tau_1)$, $\rho(h) = \vartheta(m_h^{-1} + m_h^{-3})$. Заметим, что $\tau_{i_k+N} - \tau_{i_k-1} = \rho(h)$. Поэтому мера Лебега множества $\Delta^{(r)}$ равна $r\rho(h) + \delta(h)$.

Теорема. *Для любого $\gamma_* > 0$ можно указать такие числа $h_* \in (0, 1)$ и $\delta_* \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_*)$, $\delta \in (0, \delta_*)$ справедливо неравенство*

$$\varepsilon(\vartheta) \leqslant \gamma_*,$$

где $\varepsilon(t) = |x_p(t) - x_0(t)|_n^2 + |y_p(t) - y_0(t)|_n^2$.

Доказательство теоремы следует из приведённой ниже леммы 9.

Пусть L_k – постоянная Липшица функции f_k, $L = \max\limits_{k\in[0:r]} L_k$, а $\omega_k(\delta)$, $k \in [0 : r]$, – модуль непрерывности функции $t \mapsto f_k(t, x, y, u, v)$ в той области, в которой остаются решения системы (1), а также стабильная дорожка $W(t)$, $t \in T$. Обозначим также

$$\omega(\delta) = \max_{k\in[0:r]} \omega_k(\delta).$$

Заметим, что все точки скачка сосредоточены во множестве $\Delta^{(r)}$.

Лемма 5. *Пусть $\delta_i \bigcap \Delta^{(r)} \neq \varnothing$. Тогда справедливо неравенство*

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + C_1\delta\varepsilon(\tau_i) + C_2\delta^2 + 4\omega^2(\delta)\delta + 2C_0 h\delta,$$

где $C_0 = \sup\{|B_k u^{(1)} + C_k u^{(2)} + u^{(3)}|_n : u^{(1)} \in P_k,\ u^{(2)} \in Q_k,\ u^{(3)} \in E_k,\ k \in [0 : r]\}$, $C_1 = 4(1+L)$, $C_2 = 4L^2(F + d)^2 + 5F^2 + 4d^2$.

Доказательство. Согласно условию леммы на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ нет точек скачка. Пусть

$$a_k^* < \tau_i, \quad \tau_{i+1} < a_{k+1}^*.$$

Тогда траектория $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является решением системы

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + B_k u_i - C_k v(t),$$

а траектория $\{x_0(\cdot), y_0(\cdot)\}$ – решением системы

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + u_k(t),$$

где $u_k(\cdot)$ – соответствующее оптимальное управление, $u_k(t) \in E_k$ при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. В таком случае имеем оценку

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + I_{1i} + I_{2i} + 4(d^2 + F^2)\delta^2, \tag{71}$$

где

$$I_{1i} = 2\bigg(x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(s) - y_0(s)\}\, ds\bigg), \quad I_{2i} = 2\bigg(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} q_i(s)\, ds\bigg),$$

$$q_i(s) = f_*(s, x_p(s), y_p(s), u_i, v(s)) - f_*(s, x_0(s), y_0(s), u_k(s)),$$
$$f_*(s, x_p(s), y_p(s), u_i, v(s)) = f_{1k}(s, x_p(s), y_p(s)) + B_k u_i - C_k v(s),$$
$$f_*(s, x_0(s), y)(s), u_k(s)) = f_{1k}(s, x_0(s), y_0(s)) + u_k(s).$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\bigg|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(s) - y_0(s)\}\, ds\bigg|_n = \bigg|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i) + \bigg(\int\limits_{\tau_i}^{s} \{\dot{y}_p(\tau) - \dot{y}_0(\tau)\}\, d\tau\bigg)\, ds\bigg|_n \leqslant$$

$$\leqslant \delta|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n + 2F\delta^2,$$

воспользовавшись которым, получаем

$$I_{1i} \leqslant 2\delta|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n + 2F\delta^2|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n \leqslant 2\delta\varepsilon(\tau_i) + F^2\delta^3. \tag{72}$$

Далее, в силу липшицевости функций f_{1k} по x, y и непрерывности по t, имеем при $s \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ неравенство

$$|q_i(s)|_n \leqslant |f_*(\tau_i, x_p(\tau_i), y_p(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))|_n + I_{3i}(s) + 2\omega(\delta). \tag{73}$$

Здесь $I_{3i}(s) = L\{|x_p(s) - x_p(\tau_i)|_n + |y_p(s) - y_p(\tau_i)|_n + |x_0(s) - x_0(\tau_i)|_n + |y_0(s) - y_0(\tau_i)|_n\} \leqslant \leqslant 2L\delta(f + d)$. Из (73), снова воспользовавшись липшицевостью функций f_{1k}, выводим неравенство $(s \in \delta_i)$

$$|q_i(s)|_n \leqslant |f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))|_n + q_{1i} + 2\omega(\delta) + 2L\delta(F + d),$$

где $q_{1i} = L\{|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n + |y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n\}$. Очевидно, что $q_{1i} \leqslant L\varepsilon^{1/2}(\tau_i)$. Поэтому $I_{2i} \leqslant I_{4i} + I_{5i}$, где

$$I_{4i} = 2\delta|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n\{L\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + 2\omega(\delta) + 2L\delta(F + d)\},$$

$$I_{5i} = 2\bigg(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))\}\, ds\bigg).$$

Нетрудно видеть, что

$$I_{5i} = 2\bigg(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B_k u_i - C_k v(s) - u_k(s)\}\, ds\bigg).$$

Следовательно,

$$I_{5i} \leqslant 2\biggl(\psi_i^h - y_0(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B_k u_i - C_k v(s) - u_k(s)\}\, ds\biggr) + 2h\delta C_0.$$

Здесь $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $|\psi_i^h - y_p(\tau_i)|_n \leqslant h$. В таком случае, учитывая условие 1, а также правило выбора векторов u_i (см. (63), при этом в (63) B_0 и P_0 заменены на B_k и P_k соответственно) заключаем, что справедлива оценка $I_{5i} \leqslant 2h\delta C_0$. Значит,

$$I_{2i} \leqslant I_{4i} + I_{5i} \leqslant 2(1+L)\delta\varepsilon(\tau_i) + 4\omega^2(\delta)\delta + 4L^2(F+d)^2\delta^2 + 2h\delta C_0.$$

Отсюда в силу (71) и (72) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть $\tau_{i^{(k)}} = \max\{\tau_i : \tau_i < a_{k+1}^*\}$.

Лемма 6. *При всех* $k \in [0 : r-1]$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant \nu_{k+1} = [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (a_{k+1}^* - a_k^*)(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))]\exp C_1(a_{k+1}^* - a_k^*),$$

где $\varepsilon(a_{k+1}^*-) = \lim\limits_{t\to a_{k+1}^*-} \varepsilon(t)$.

Доказательство. В силу леммы из работы [12] и леммы 5 настоящей работы при $\tau_i \in [\tau_{i_k+N}, a_{k+1}^*]$ имеют место оценки

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_i - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))]\exp C_1(\tau_i - \tau_{i_k+N}). \tag{74}$$

Поэтому

$$\varepsilon(\tau_{i^{(k)}}) \leqslant \Psi_k = [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))]\exp C_1(\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k}).$$

Обозначим $\Delta_k = a_{k+1}^* - \tau_{i^{(k)}}$. Аналогично лемме 5, учитывая последнее неравенство, получаем

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant (1 + C_1\Delta_k)\varepsilon(\tau_{i^{(k)}}) + \tilde\rho_k \leqslant (1 + C_1\Delta_k)\Psi_k + \tilde\rho_k, \tag{75}$$

где $\tilde\rho_k = C_2\Delta_k^2 + 4\omega^2(\Delta_k)\Delta_k + 2hC_0\Delta_k$. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$(1 + C_1\Delta_k)\Psi_k \leqslant [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))]\exp C_1(a_{k+1}^* - a_k^*), \tag{76}$$

$$\tilde\rho_k \leqslant (a_{k+1}^* - \tau_{i^{(k)}})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))\exp C_1(a_{k+1}^* - a_k^*). \tag{77}$$

Утверждение леммы следует из неравенств (75)–(77) и неравенства $a_k^* < \tau_{i_k+N}$. Лемма доказана.

Введём обозначение $\rho_1(h) = \rho(h) + \vartheta m_h^{-3}$.

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon(\tau_{i_1+N}+) = |y_0(\tau_{i_1+N}+) - y_p(\tau_{i_1+N}+)|_n^2 + |x_0(\tau_{i_1+N}) - x_p(\tau_{i_1+N})|_n^2 \leqslant 4\varepsilon(a_1^*-) + \phi_1(h,\delta), \tag{78}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) = |y_0(\tau_{i_k+N}+) - y_p(\tau_{i_k+N}+)|_n^2 + |x_0(\tau_{i_k+N}) - x_p(\tau_{i_k+N})|_n^2 \leqslant \\ \leqslant 4\varepsilon(a_k^*-) + \phi(h,\delta) \quad \text{\textit{при}} \quad k \in [2 : r],\end{gathered} \tag{79}$$

где $\phi_1(h,\delta) = 4(\chi_1 + F\rho_1(h))^2 + 8d^2\rho^2(h)$, $\phi(h,\delta) = 4(\chi + F\rho_1(h))^2 + 8d^2\rho^2(h)$.

Доказательство. Проверим неравенство (78). По определению

$$\varepsilon(a_k^*-) = |y_0(a_k^*-) - y_p(a_k^*-)|_n^2 + |x_0(a_k^*) - x_p(a_k^*)|_n^2.$$

В момент τ_{i_1+N} устанавливаем, что $a_1^* \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1+N}]$ и

$$|b_1^* - \tilde\nu_{i_1+N}| \leqslant \chi_1 = \chi_1(\alpha,\delta,h). \tag{80}$$

Полагаем (см. (68))

$$y_0(\tau_{i_1+N}+) = y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N}e_1. \tag{81}$$

По постановке задачи имеет место равенство

$$y_p(a_1^*+) = y_p(a_1^*-) + b_1^*e_1. \tag{82}$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$|y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-). \tag{83}$$

При $t \in (a_1^*, \tau_{i_1+N}]$ скачков нет. Кроме того, $|F_k|_n \leqslant F,\ k \in [0:r]$. В таком случае

$$|y_p(\tau_{i_1+N}) - y_p(a_1^*+)|_n \leqslant F\rho(h). \tag{84}$$

Так как $a_1^* \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}],\ \tau_{i_1} - \tau_{i_1-1} = \delta(h) = \vartheta m_h^{-3},\ |F_k|_n \leqslant F,$ то верна оценка

$$|y_0(\tau_{i_1-1}) - y_0(a_1^*-)|_n \leqslant F\delta = F\vartheta m_h^{-3}. \tag{85}$$

Поэтому вследствие соотношений (80)–(85) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{gathered}
|y_0(\tau_{i_1+N}+) - y_p(\tau_{i_1+N}+)|_n = |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N}e_1 - y_p(\tau_{i_1+N})|_n = \\
= |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N}e_1 - y_p(\tau_{i_1+N}) + y_p(a_1^*+) - y_p(a_1^*+)|_n \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N}e_1 - y_p(a_1^*+)|_n + |y_p(a_1^*+) - y_p(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho(h) \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) - y_0(a_1^*-)|_n + |y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho(h) \leqslant \\
\leqslant |y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho_1(h) \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-) + \chi_1(\alpha,\delta,h) + F\rho_1(h).
\end{gathered} \tag{86}$$

Так как $a_1^* \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}],\ N\delta = \vartheta m_h^{-1}$, функция $x_p(\cdot)$ непрерывна на T, а функция $x_0(\cdot)$ – на $[a_1^*, \tau_{i_1+N}]$, то справедливы неравенства

$$|x_0(\tau_{i_1+N}) - x_0(a_1^*)|_n \leqslant d(\tau_{i_1+N} - a_1^*) \leqslant d\rho(h) \quad \text{и} \quad |x_p(\tau_{i_1+N}) - x_p(a_1^*)|_n \leqslant d\rho(h).$$

Следовательно,

$$|x_p(\tau_{i_1+N}) - x_0(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant |x_0(a_1^*) - x_p(a_1^*)|_n + 2d\rho(h) \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-) + 2d\rho(h). \tag{87}$$

Из (86), (87) вытекает неравенство (78).

Неравенство (79) устанавливается аналогично. Лемма доказана.

Пусть

$$\Psi_0(h,\delta) = (1 + 4\delta^2)(h + 2F\delta)^2 + h^2 + 4h\delta(h + 2F\delta),$$

$$\Psi_1(h,\delta) = [\Psi_0(h,\delta) + a_1^*(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1 a_1^*.$$

Лемма 8. *При* $k \in [1 : r-1]$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant \Psi_{k+1}(h,\delta) = [4\Psi_k(h,\delta) + \phi_*(h,\delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta,$$

где $\phi_*(h,\delta) = \phi_1(h,\delta)$, *если* $k = 1$, *и* $\phi_*(h,\delta) = \phi(h,\delta)$, *если* $k \in [2 : r-1]$.

Доказательство. В силу лемм 6 и 7 имеет место оценка

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + (a_{k+1}^* - a_k^*)(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta.$$

В таком случае

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta. \qquad (88)$$

Аналогично лемме 6 устанавливается неравенство

$$\varepsilon(a_1^*-) \leqslant [\varepsilon(\tau_1) + a_1^*(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1 a_1^* \leqslant \Psi_1(h,\delta). \qquad (89)$$

Заметим, что в силу (5), (62) и (59) справедливы неравенства

$$|y_p(\tau_1) - y_0(\tau_1)|_n \leqslant h + 2F\delta, \quad |x_p(\tau_1) - x_0(\tau_1)|_n \leqslant h + 2\delta(h + 2F\delta).$$

Поэтому

$$\varepsilon(\tau_1) \leqslant (h + 2F\delta)^2 + [h + 2\delta(h + 2F\delta)]^2 \leqslant \Psi_0(h,\delta).$$

Из (88), (89) и последнего неравенства следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 9. *Для любого* $\gamma_0 > 0$ *можно указать такие* $h_* \in (0,1)$ *и* $\delta_* \in (0,1)$, *что при всех* $\delta \leqslant \delta_*$, $h \leqslant h_*$, $\tau_i \notin \Delta^{(r)}$ *верны неравенства*

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant \Psi_r(h,\delta) \leqslant \gamma_0.$$

Доказательство. Функции $\Psi_k(h,\delta)$ обладают следующим свойством:

$$\Psi_k(h,\delta) < \Psi_{k+1}(h,\delta) \quad \text{при} \quad k \in [0:r-1].$$

По всякому $\gamma_0 > 0$ можно указать такие $\delta_* = \delta_*(\gamma_0) > 0$ и $h_* = h_*(\gamma_0) > 0$, что при всех $h \in (0,h_*)$, $\delta \in (0,\delta_*)$ справедливо неравенство $\Psi_r(h,\delta) \leqslant \gamma_0$. Поэтому при $\delta \in (0,\delta_*)$, $h \in \in (0,h_*)$ верны неравенства $\varepsilon(a_k^*-) \leqslant \gamma_0$ при всех $k \in [1:r]$. Как отмечено выше, справедливо неравенство (74). Из этого неравенства и леммы 7 при $\tau_i \in [\tau_{i_k+N}, a_{k+1}^*]$ получаем

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + (\tau_i - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(\tau_i - \tau_{i_k+N}) \leqslant$$

$$\leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta.$$

Отсюда, учитывая лемму 8, выводим оценку $\varepsilon(\tau_i) \leqslant \Psi_{k+1}(h,\delta) \leqslant \gamma_0$. Лемма доказана.

Замечание 2. В силу леммы 9 и неравенства $\vartheta - a_r^* > \rho(h)$ при $\delta \leqslant \delta_*$, $h \leqslant h_*$ справедливо неравенство $\varepsilon(\vartheta) \leqslant \gamma_0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 3. Пусть в начальный момент построено семейство u-стабильных множеств позиционного поглощения, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения системы (3) с правой частью $f = f_0$ из начального состояния $\{x_0, y_0\}$ в наименьшую окрестность множества M. Пусть это будет ε-окрестность. Обозначим построенное семейство через $\tilde{W}^\varepsilon(t)$, $t \in T$. Анализ описанного выше алгоритма позволяет сделать вывод, что, если в момент скачков a_k^* выполняются включения

$$\{x_p(a_k^*), y_p(a_k^*+)\} \in \tilde{W}^\varepsilon(a_k^*), \quad k \in [1:r],$$

то СГН обеспечивает перевод фазовой траектории системы (3) в сколь угодно малую окрестность множества M^ε при достаточно малых h и δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981.

4. Избранные труды Осипова Ю.С. М., 2009.
5. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М., 1990.
6. *Ушаков В.Н.* К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
7. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 123–128.
8. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel, 1995.
9. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4. С. 25–76.
10. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* О сочетании процессов реконструкции и гарантированного управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 26–34.
11. *Максимов В.И.* Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1676–1685.
12. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
13. *Завалищин С.Е., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
14. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М., 2004.
15. *Семеров В.В., Репин В.М., Журина Н.Э.* Алгоритмизация процессов управления летательными аппаратами в классе логико-динамических систем. М., 1987.
16. *Бортаковский А.С.* Оптимизация переключающихся систем. М., 2016.
17. *Engell S., Frehse G., Schnieder E.* Modeling, Analysis and Design of Hybrid System. Berlin; Heidelberg, 2002.
18. *Savkin A.V., Evans R.J.* Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems. Boston, 2002.
19. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань, 2011. С. 23–81.
20. *Axelsson H., Boccadoro V., Egerstedt M., Valigi P.,Wardi Y.* Optimal mode-switching for hybrid systems with varying initial states // J. of Nonlin. Anal.: Hybrid Systems and Appl. 2008. V. 2. № 3. P. 765–772.
21. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Математический институт
им. В.А Стеклова РАН, г. Москва,
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 22.01.2021 г.
После доработки 22.01.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 572–576

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА РАДИУСОВ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ СФЕР РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

© 2021 г. А. С. Войделевич

Рассматриваются линейные стационарные дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Доказано, что если решение такого уравнения имеет в начальный момент непустую внутренность, то показатели Ляпунова радиусов вписанной и описанной сфер этого решения являются строгими и равны соответственно минимальному и максимальному модулям собственных значений матрицы коэффициентов системы.

DOI: 10.31857/S0374064121040105

1. Введение. Постановка задачи. В работе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с производной Хукухары [1; 2, с. 14]. Непосредственно из определения производной Хукухары следует, что решения таких уравнений представляют собой при каждом значении независимой переменной компактные выпуклые множества пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, изучение которых как функций независимой переменной для решений представляет определённый интерес. Так, например, в работе [3] для некоторых классов уравнений с производной Хукухары получена формула вычисления d-мерного объёма значений их решений, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений.

В настоящей работе для линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары рассматриваются две геометрические характеристики решений – радиусы вписанных и описанных сфер значений решений как функции независимой переменной и в терминах матрицы коэффициентов системы вычислены их показатели Ляпунова.

Прежде чем точно сформулировать постановку задачи и изложить её решение, приведём ряд необходимых определений. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$.

Определение 1. *Суммой Минковского* $Z = X+Y$ двух множеств $X,\ Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \{x+y\colon x \in X,\ y \in Y\}$.

Определение 2 [1]. Множество $Z \in K_c(\mathbb{R}^d)$ такое, что $X = Y + Z$, где $X,\ Y \in K_c(\mathbb{R}^d)$, называется *разностью Хукухары* множеств $X,\ Y$ и обозначается как $Z = X - Y$.

Отметим, что не для любой пары множеств $X,\ Y \in K_c(\mathbb{R}^d)$ определена разность Хукухары $X-Y$. Более того, если существует такое множество $Z \in K_c(\mathbb{R}^d)$, что $X = Y+Z$, то, вообще говоря, $Z \neq X + (-Y)$. Однако если разность Хукухары множеств X и Y существует, то она единственна.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Определение 3. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина

$$h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\ \ Y \subset X + rB\}, \quad X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d).$$

Согласно теореме Хана пара $(K_c(\mathbb{R}^d),h)$ – полное метрическое пространство.

Определение 4. Для произвольного множества $X\in\Omega(\mathbb{R}^d)$ через $r(X)$ и $R(X)$ обозначим радиусы его вписанной и описанной сфер соответственно, т.е.

$$r(X)\stackrel{\text{def}}{=}\sup\{r\geqslant 0: x_0+rB\subset X,\quad x_0\in\mathbb{R}^d\}\quad \text{и}\quad R(X)\stackrel{\text{def}}{=}\inf\{r\geqslant 0: X\subset x_0+rB,\quad x_0\in\mathbb{R}^d\}.$$

Через $I\subset\mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря, неограниченный.

Определение 5 [1]. Отображение $X\colon I\to K_c(\mathbb{R}^d)$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0\in I,$ если пределы

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t},\quad \lim_{\Delta t\to+0}\frac{X(t_0)-X(t_0-\Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_HX(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_HX=AX,\quad X(t)\in K_c(\mathbb{R}^d),\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянной $d\times d$-матрицей коэффициентов A. Через $\mu_1(A)$ и $\mu_n(A)$ обозначим соответственно максимальное и минимальное по модулю собственные значения матрицы A. Радиусы вписанной и описанной сфер произвольного решения $X(\cdot)$ уравнения (1) будем рассматривать как функции от времени t.

Естественно возникает задача описания асимптотического поведения радиусов вписанных и описанных сфер решений уравнения (1). Несложно видеть, что если отображение $X\colon I\to$ $\to K_c(\mathbb{R}^d)$ дифференцируемо в каждой точке интервала $I,$ то для любых чисел a и $b,$ $a<b,$ из интервала I определена разность $X(b)-X(a)$. Следовательно, радиус $r(X(t))$ вписанной и радиус $R(X(t))$ описанной сфер решения $X(t)$ являются неубывающими функциями.

В настоящей работе доказано, что если внутренность решения $X(\cdot)$ в начальный момент времени не пустая, то показатели Ляпунова $\lambda[r(X)]$ и $\lambda[R(X)]$ радиусов $r(X(t))$ и $R(X(t))$ являются строгими и равны соответственно величинам $|\mu_n(A)|$ и $|\mu_1(A)|,$ т.е.

$$\lambda[r(X)]\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t))=|\mu_n(A)|\quad\text{и}\quad \lambda[R(X)]\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log R(X(t))=|\mu_1(A)|.$$

2. Основной результат. Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Определение 6. *Опорной функцией* произвольного множества $X\in\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется функция $s(X,\cdot)\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R},$ определяемая равенством $s(X,v)\stackrel{\text{def}}{=}\sup\limits_{x\in X}(x,v),$ $v\in\mathbb{R}^d,$ где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – естественное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Несложно видеть, что для произвольного вектора $v\in\mathbb{R}^d$ верны равенства

$$s(\mathbb{S}^{n-1},v)=s(B,v)=\|v\|,$$

где $\mathbb{S}^{n-1}\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^d\colon \|x\|=1\}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера с центром в нуле. Если $X\subset Y,$ то $s(X,v)\leqslant s(Y,v)$ для любого $v\in\mathbb{R}^d$. Обратно, если $Y\in K_c(\mathbb{R}^d)$ и $s(X,v)\leqslant s(Y,v)$ при всех $v\in\mathbb{R}^d,$ то $X\subset Y$.

Лемма 1. *Пусть $X\in K_c(\mathbb{R}^d)$ – центрально-симметричное относительно нуля множество, т.е. $X=-X,$ тогда имеют место равенства*

$$r(X)=\min_{v\in\mathbb{S}^{n-1}}s(X,v)\quad\text{и}\quad R(x)=\max_{v\in\mathbb{S}^{n-1}}s(X,v).$$

Доказательство. Если для некоторых точек $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных чисел $r_1, r_2 \geqslant 0$ верны включения $p_1 + r_1B \subset X \subset p_2 + r_2B$, то $r_1B \subset X \subset r_2B$. Действительно, так как множество X центрально-симметричное, то $-p_1 + r_1B \subset X \subset -p_2 + r_2B$. Следовательно,

$$r_1B = \frac{1}{2}(-p_1 + r_1B + p_1 + r_1B) \subset X \quad \text{и} \quad X \subset (-p_2 + r_2B) \bigcap (p_2 + r_2B) \subset r_2B.$$

Поэтому в определении 4 радиусов вписанной и описанной сфер достаточно рассматривать сферы с центром в нуле.

Обозначим $\rho = \min\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v)$. Так как множество X является центрально-симметричным относительно нуля, то $\rho \geqslant 0$. Если для некоторого числа $r \geqslant 0$ верно включение $rB \subset X$, то

$$r = s(rB, v) \leqslant s(X, v), \quad v \in \mathbb{S}^{n-1},$$

а значит, $r(X) \leqslant \rho$. С другой стороны, имеем $s(\rho B, v) \leqslant s(X, v)$, $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, и, следовательно, $\rho B \subset X$. Поэтому $r(X) = \min\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v)$. Равенство $R(X) = \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Для произвольного решения $X(\cdot)$ уравнения (1) справедливо равенство

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k X(t_0), \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{2}$$

доказательство которого приведено в работе [4]. В частности, из равенства (2) следует, что, если $X(t_0) = B$, то

$$s(X(t), v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} s(A^k B, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} \|(A^{\mathrm{T}})^k v\|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть $X(\cdot)$ – такое решение уравнения (1), что $X(0) = B$. Тогда показатель Ляпунова $\lambda[r(X)]$ радиуса $r(X(t))$ вписанной сферы решения $X(t)$ является строгим и равен $|\mu_n(A)|$.*

Доказательство. Матрицы A и $A^{\mathrm{т}}$ подобны, поэтому $\mu_n(A^{\mathrm{т}}) = \mu_n(A)$. Если матрица A вырожденная, т.е. $\mu_n(A) = 0$, то найдётся такой вектор $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, что $A^{\mathrm{т}} v = 0$. Следовательно, $s(X(t), v) = 1$. Из равенства (2) следует, что $X(t)$ – центрально-симметричное множество относительно нуля при любом $t \geqslant 0$. Поэтому, согласно лемме 1, верно неравенство $r(X(t)) \leqslant 1$. С другой стороны, $r(X(t)) \geqslant r(X(0)) > 0$, поэтому

$$\lambda[r(X)] = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log r(X(t)) = 0.$$

Пусть $\mu_n(A) \neq 0$, т.е. существует обратная матрица $A^{-\mathrm{т}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (A^{\mathrm{т}})^{-1}$. Тогда для любого вектора $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ и целого числа k верно неравенство

$$\|(A^{\mathrm{т}})^k v\| \geqslant \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{-1} \|v\| = \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{-1}.$$

Согласно формуле Гельфанда [5] имеет место равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{1/k} = |\mu_n(A)|^{-1}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N_\varepsilon > 0$, что при $k \geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\|(A^{-\mathrm{т}})^k\| \leqslant (|\mu_n(A)|^{-1} + \varepsilon)^k$, а значит,

$$\|(A^{\mathrm{т}})^k v\| \geqslant \frac{1}{(|\mu_n(A)|^{-1} + \varepsilon)^k} \quad \text{при} \quad v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Для некоторого многочлена $p_\varepsilon(t)$, коэффициенты которого не зависят от вектора v, имеет место неравенство
$$s(X(t),v)\geqslant p_\varepsilon(t)+\exp\biggl(\frac{t}{|\mu_n(A)|^{-1}+\varepsilon}\biggr).$$
Из леммы 1 следует оценка
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t))\geqslant\frac{1}{|\mu_n(A)|^{-1}+\varepsilon},$$
устремляя в которой ε к нулю, получаем, что
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t))\geqslant|\mu_n(A)|.$$

Пусть $v=x+iy$ – собственный вектор матрицы $A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$, соответствующий собственному значению $\mu_n(A)$. Без нарушения общности считаем $\|v\|=1$ и $\|x\|\geqslant1/\sqrt{2}$ (если $\|x\|\leqslant\|y\|$, то вместо v нужно рассмотреть вектор iv). Так как $\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kv\|^2=\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kx\|^2+\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^ky\|^2$, то выполняется неравенство
$$\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kx\|\leqslant\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kv\|=|\mu_n(A)|^k.$$
Положим $u=x/\|x\|\in\mathbb{S}^{n-1}$. Тогда $\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^ku\|\leqslant\sqrt{2}|\mu_n(A)|^k$, а значит,
$$s(X(t),u)\leqslant\sqrt{2}\exp(|\mu_n(A)|t)\quad\text{и}\quad\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t))\leqslant\mu_n(A).$$
Поэтому показатель Ляпунова $\lambda[r(X)]$ является строгим и равен $|\mu_n(A)|$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $X(\cdot)$ – такое решение уравнения (1), что $X(0)=B$, то показатель Ляпунова $\lambda[R(X)]$ радиуса $R(X(t))$ описанной сферы решения $X(t)$ является строгим и равен $|\mu_1(A)|$.*

Доказательство. Согласно формуле Гельфанда $\lim\limits_{t\to+\infty}\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^k\|^{1/k}=|\mu_1(A)|$. При $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ верно $\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kv\|\leqslant\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^k\|$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получаем, что
$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log R(X(t))\leqslant|\mu_1(A)|.$$

Пусть $v=x+iy$ – единичный собственный вектор матрицы $A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$, соответствующий собственному значению $\mu_1(A)$. Тогда $\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kx\|+\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^ky\|\geqslant\|(A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}})^kv\|=|\mu_1(A)|^k$, а значит,
$$2R(X(t))\geqslant s(X(t),x/\|x\|)+s(X(t),y/\|y\|)\geqslant s(X(t),x)+s(X(t),y)\geqslant\exp(|\mu_1(A)|t),$$
так как $\|x\|\leqslant1$ и $\|y\|\leqslant1$ (если, скажем, $x=0$, то считаем, что $x/\|x\|=0$). Следовательно,
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log R(X(t))\geqslant|\mu_1(A)|.$$
Поэтому показатель Ляпунова $\lambda[R(X)]$ является строгим и равен $|\mu_1(A)|$. Лемма доказана.

Пусть $Y(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ – такие два решения уравнения (1), что для некоторого значения $t_0\geqslant0$ верно равенство $Z(t_0)=p+kY(t_0)$, где $p\in\mathbb{R}^d$ и $k\geqslant0$. Тогда $Z(t)=e^{A(t-t_0)}p+kY(t)$ при $t\geqslant t_0$, а значит,
$$r(Z(t))=kr(Y(t))\quad\text{и}\quad R(Z(t))=kR(Y(t)).$$
В частности, из лемм 2 и 3 вытекает, что если $Z(0)=p+kB$, $k>0$, то показатели Ляпунова $\lambda[r(Z)]$ и $\lambda[R(Z)]$ радиусов $r(Z(t))$ вписанной и $R(Z(t))$ описанной сфер решения $Z(t)$ являются строгими и равны соответственно величинам $|\mu_n(A)|$ и $|\mu_1(A)|$.

Из равенства (2) непосредственно следует, что если для решений $Y(\cdot)$, $Z(\cdot)$ уравнения (1) и некоторого значения $t_0\geqslant0$ верно включение $Y(t_0)\subset Z(t_0)$, то $Y(t)\subset Z(t)$ при всех $t\geqslant t_0$.

Теорема. *Пусть* $X_0 \in K_c(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (1), что* $X(0) = X_0$. *Тогда показатели Ляпунова* $\lambda[r(X)]$ *и* $\lambda[R(X)]$ *радиусов* $r(X(t))$ *вписанной и* $R(X(t))$ *описанной сфер решения* $X(t)$ *являются строгими и равны соответственно величинам* $|\mu_n(A)|$ *и* $|\mu_1(A)|$.

Доказательство. Выберем два шара $p_1 + r_1B$ и $p_2 + r_2B$, $r_2 \geqslant r_1 > 0$, таких, что $p_1 + r_1B \subset X(0) \subset p_2 + r_2B$. Рассмотрим решения $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ уравнения (1) с начальными условиями

$$X_1(0) = p_1 + r_1B \quad \text{и} \quad X_2(0) = p_2 + r_2B.$$

Тогда $X_1(t) \subset X(t) \subset X_2(t)$ при $t \geqslant 0$. Следовательно,

$$r(X_1(t)) \leqslant r(X(t)) \leqslant r(X_2(t)) \quad \text{и} \quad R(X_1(t)) \leqslant R(X(t)) \leqslant R(X_2(t)).$$

Поэтому $\lambda[r(X(t))] = |\mu_n(A)|$ и $\lambda[R(X(t))] = |\mu_1(A)|$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Атамась И.В., Слынько В.И.* Формула Лиувилля–Остроградского для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1452–1464.
4. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
5. *Gelfand I.* Normierte Ringe // Мат. сб. 1941. Т. 9 (51). № 1. С. 3–24.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 08.08.2020 г.
После доработки 08.08.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 577–580

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ УБЫВАЮЩИХ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ИЗМЕНЯЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ПРАВИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. **Н. С. Нипарко**

Доказано, что, какова бы ни была вещественнозначная функция $\theta(\cdot)$, определённая на полуоси $[0,+\infty)$, монотонно возрастающая к $+\infty$ и такая, что $\theta(t)/t\to 0$ при $t\to+\infty$, при любом натуральном $n\geqslant 2$ существует такая n-мерная правильная по Ляпунову линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором возмущении её матрицы коэффициентов, норма которого при всех $t\geqslant 0$ не превосходит $\operatorname{const}\exp\{-\theta(t)\}$. Ранее примеры таких правильных систем были известны только при $\theta(t)=\sqrt{t}$.

DOI: 10.31857/S0374064121040117

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+:=[0,+\infty),\tag{1}$$

порядка $n\geqslant 2$, матрица коэффициентов $A(\cdot)\colon\mathbb{R}_+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ которой кусочно-непрерывна и ограничена на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$. Через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Система (1) называется *правильной* [1, с. 38], если существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{Sp}A(\tau)\,d\tau=:\mathcal{I}_A$, где $\operatorname{Sp}A(\cdot)$ – след матрицы $A(\cdot)$, и для её показателей Ляпунова имеет место равенство $\lambda_1(A)+\ldots+\lambda_n(A)=\mathcal{I}_A$. Класс правильных систем (1) обозначим через $\mathfrak{R}_n$ и, отождествляя систему (1) и её матрицу коэффициентов, принадлежность системы (1) этому классу будем записывать как $A\in\mathfrak{R}_n$.

Класс правильных систем введён А.М. Ляпуновым [1, с. 38] и является следующим после класса приводимых систем классом систем с переменными коэффициентами, по своим свойствам наиболее близким классу систем с постоянными коэффициентами. Так, правильные системы при возмущениях высшего порядка малости сохраняют [1, с. 44–55] условную экспоненциальную устойчивость, а также размерность экспоненциально устойчивого многообразия и показатель асимптотики его решений. Поскольку правильные системы по своим свойствам должны быть близки системам с постоянными коэффициентами, а для последних показатели Ляпунова, как доказано К.П. Персидским, не изменяются при линейных убывающих к нулю возмущениях, то одно время предполагалась справедливой гипотеза о том, что убывающие к нулю возмущения матрицы коэффициентов правильной системы не изменяют показателей Ляпунова системы, т.е. если $A\in\mathfrak{R}_n$ и кусочно-непрерывная $n\times n$-матрица $Q(\cdot)$ такова, что $\|Q(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$, то показатели Ляпунова системы (1) и показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A+Q)$ возмущённой системы

$$\dot{y}=(A(t)+Q(t))y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

равны между собой: $\lambda_k(A)=\lambda_k(A+Q)$ при всех $k=\overline{1,n}$. Справедливость этой гипотеза была подтверждена для некоторых подклассов класса правильных систем в работах Б.Ф. Былова и И.Г. Малкина. Однако в общем случае эта гипотеза оказалась неверной: первые контрпримеры к ней построены Р.Э. Виноградом в работах [2, 3]. Позже В.М. Миллионщиков усилил этот результат, доказав [4], что линейные убывающие к нулю возмущения могут изменять показатели Ляпунова даже статистически правильных систем – специального подкласса класса правильных систем.

В работе [2] Р.Э. Виноградом построена такая система $A \in \mathfrak{R}_2$ и такая кусочно-непрерывная 2×2-матрица $Q(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t \geqslant 0$ оценке $\|Q(t)\| \leqslant \mathrm{const}\, \exp(-\sqrt{t})$, что $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$. Естественно возникает вопрос, сколь быстро может убывать к нулю норма кусочно-непрерывной матрицы-возмущения, чтобы это возмущение могло изменить показатели Ляпунова правильной системы. Результат в противоположном направлении – об устойчивости показателей Ляпунова правильных систем – хорошо известен и вытекает из теоремы Богданова–Гробмана [5, 6], вследствие которой, если матрица-возмущение $Q(\cdot)$ удовлетворяет условию $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| < 0$, то такое возмущение не изменяет показателей Ляпунова правильной системы. Поэтому, чтобы матрица-возмущение $Q(\cdot)$, норма которой убывает к нулю на бесконечности, могла изменять показатели Ляпунова правильной системы, необходимо должно выполняться равенство $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| = 0$.

Это утверждение близко к достаточному, как показывает следующая

Теорема. *Для любого* $n \geqslant 2$, *какова бы ни была положительная функция* $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *монотонно возрастающая к* $+\infty$, *для которой* $\theta(t)/t \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *существуют система* $A \in \mathfrak{R}_n$ *и кусочно-непрерывная* $n \times n$*-матрица* $Q(\cdot)$, *удовлетворяющая при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *оценке* $\|Q(t)\| \leqslant \mathrm{const}\,\exp\{-\theta(t)\}$, *такие, что справедливо неравенство* $\lambda_n(A+Q) > \lambda_n(A)$.

Доказательство теоремы проводится методом поворотов Миллионщикова [4, 7] с использованием δ-характеристической последовательности для функции $\theta(\cdot)$ [8].

1. Для функции $\theta(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, монотонно возрастающей к $+\infty$, определим зависящую от положительных числовых параметров δ и α последовательность $(T_k(\delta,\alpha;\theta))_{k\in\mathbb{N}}$ рекуррентно следующими соотношениями [8]:

$$T_1(\delta,\alpha;\theta) = \alpha \quad \text{и} \quad T_k(\delta,\alpha;\theta) = T_{k-1}(\delta,\alpha;\theta) + \delta\theta(T_{k-1}(\delta,\alpha;\theta)) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где число $\alpha = \mathrm{fix}$ – любое, такое, что $\theta(t) > 0$ при всех $t \geqslant \alpha$. Положим ещё $T_0(\delta,\alpha;\theta) = 0$. Далее считаем, что монотонно возрастающая к $+\infty$ функция $\theta(\cdot)$ задана и удовлетворяет дополнительному условию

$$\theta(t)/t \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Считая функцию $\theta(\cdot)$ и числа δ и α фиксированными, в дальнейшем зависимость от них элементов последовательности (2) будем в записи опускать и вместо $T_k(\delta,\alpha;\theta)$ писать T_k.

Установим нужное в дальнейшем свойство последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$. При $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Delta_k = T_k - T_{k-1}$ и положим

$$S_k = \begin{cases} \Delta_k + \Delta_{k-2} + \ldots + \Delta_2, & \text{если } k \text{ чётное}, \\ \Delta_k + \Delta_{k-2} + \ldots + \Delta_1, & \text{если } k \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Докажем, что $S_k > T_k/2$. В самом деле, вследствие определения (2) и монотонного возрастания функции $\theta(\cdot)$ имеем $\Delta_{i+1} = \delta\theta(T_i) > \delta\theta(T_{i-1}) = \Delta_i$ для любого $i \geqslant 2$. Поэтому $S_k > S_{k-1}$ для любого $k \geqslant 3$, а поскольку $S_k + S_{k-1} = T_k$ при всех $k \geqslant 2$, то $S_k > T_k/2$.

2. Построим искомую систему (1) сначала при $n = 2$. Её матрицу коэффициентов зададим равенствами

$$A(t) \equiv \begin{cases} \mathrm{diag}[1,-1] & \text{при } t \in [T_{2k}, T_{2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathrm{diag}[-1,1] & \text{при } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

Докажем, что система (1) при $n = 2$ с матрицей коэффициентов (4) является правильной. Поскольку след матрицы (3) тождественно нулевой, то для неё $\mathcal{I}_A = 0$.

Найдём показатели Ляпунова системы (1), (4). Определим функцию $a(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равенствами

$$a(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [T_{2k}, T_{2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ -1 & \text{при } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку система (1), (4) является диагональной, то её показатели Ляпунова совпадают [9, гл. 2, § 4.1] с показателями Ляпунова тех двух её решений, которые в момент $t = 0$ выходят из векторов $(1,0)^{\mathrm{т}}$ и $(0,1)^{\mathrm{т}}$, т.е. решений $x_1(t) = (\exp b(t), 0)^{\mathrm{т}}$ и $x_2(t) = (0, \exp\{-b(t)\})^{\mathrm{т}}$, где $b(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$. Очевидно, что показатель Ляпунова $\lambda[x_j]$ решения $x_j(\cdot)$, $j = 1, 2$, определяется равенством

$$\lambda[x_j] = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{t} \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

а так как функция $a(\cdot)$ кусочно-постоянна и $\mathcal{T} = \{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ – множество её точек разрыва, то при вычислении верхних пределов (6) достаточно считать [9, гл. 4, § 11.6, упр. 11.6.1], что t в (6) пробегает только множество $\mathcal{T}$, т.е. считать, что в (6) $t = T_k$ и $k \to +\infty$, и тогда вследствие определения (5) функции $a(\cdot)$ получаем

$$\lambda[x_j] = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{T_k} \int\limits_0^{T_k} a(\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \Delta_i. \tag{7}$$

Из представления (7), поскольку $\Delta_i > \Delta_{i-1}$ при $i \geqslant 3$, следует, что при нечётном k интеграл в (7) отрицателен (не превосходит величины $-T_1$), а при чётном k положителен. Следовательно, $\lambda[x_1] \geqslant 0$ и при вычислении предела в (7) для $j = 1$ можно считать, что k чётное. Заменяя в (7) Δ_i на $T_i - T_{i-1}$ и приводя подобные члены, несложно убедиться, что при чётном k интеграл в (7) равен $T_k - 2S_{k-1} - 2T_1$, а значит, в силу установленного в п. 1 доказательства неравенства $S_{k-1} > T_{k-1}/2$, он не превосходит величины $T_k - T_{k-1} - 2T_1 = \delta\theta(T_{k-1}) - 2T_1$. Поэтому

$$\lambda[x_1] \leqslant \delta \lim_{k\to+\infty} \theta(T_{k-1})/T_k \leqslant \delta \lim_{k\to+\infty} \theta(T_{k-1})/T_{k-1} \overset{(3)}{=} 0.$$

Итак, $\lambda[x_1] = 0$. Точно так же доказывается, что $\lambda[x_2] = 0$.

Следовательно, система (1), (4) имеет нулевые показатели Ляпунова, а так как для неё $\mathcal{I}_A = 0$, то эта система является правильной.

3. Согласно методу поворотов Миллионщикова [7] (см. также [10, § 4.1]), на применении которого мы здесь подробно останавливаться не будем, поскольку оно к настоящему времени является достаточно стандартным и хорошо известным, возмущая систему (1), (4) разве что на единичных отрезках $D_k := [T_k - 1, T_k]$, $k \in \mathbb{N}$, с помощью преобразования $U_k(t)$, $t \in D_k$, представляющего собой преобразование поворота на угол $4\exp\{-\theta(T_k)\}(t - T_k + 1)$, мы получаем матрицу $Q(\cdot)$, удовлетворяющую при $t \in \mathbb{R}_+$ неравенству $\|Q(t)\| \leqslant 24\exp\{-\theta(t)\}$, и такое решение $y(\cdot)$ возмущённой системы

$$\dot y = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

для которого на отрезках $[T_k, T_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{T_{k+1} - T_k - \theta(T_k)\}\|y(T_k)\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

т.е. в силу определения (2) последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ оценка

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{(1 - \delta^{-1})(T_{k+1} - T_k)\}\|y(T_k)\|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Тогда, последовательно применяя оценки (9), приходим к неравенству

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{(1 - \delta^{-1})(T_{k+1} - T_1)\}\|y(T_1)\|.$$

Отсюда для показателя Ляпунова $\lambda[y]$ рассматриваемого решения $y(\cdot)$ системы (8) получаем оценку

$$\lambda[y] \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty} T_{k+1}^{-1} \ln \|y(T_{k+1})\| \geqslant 1 - \delta^{-1}.$$

Поэтому, выбирая при задании (2) последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ число δ большим единицы, будем иметь $\lambda[y] \geqslant 1-\delta^{-1} > 0$.

Двумерная правильная система (1), для которой $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$ при некотором возмущении $Q(\cdot)$, удовлетворяющем при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценке $\|Q(t)\| \leqslant 24\exp\{-\theta(t)\}$, построена. Чтобы построить такую n-мерную систему, достаточно к построенной системе (1), (4) присоединить $n-2$ уравнения $\dot{x}_i = 0$, $i=\overline{3,n}$. Теорема доказана.

В частности, взяв в этой теореме $\theta(t)\equiv\sqrt{t}$, получаем утверждение из примера Р.Э. Винограда [2].

Замечание. Стандартными рассуждениями с использованием теоремы Арцеля–Асколи, применяемыми в методе поворотов В.М. Миллионщикова при оценке младшего показателя Ляпунова [7; 10, § 4.1], аналогично предыдущему получаем, что для системы (1), (4) существует такая матрица-возмущение $Q_0(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценке $\|Q_0(t)\| \leqslant \text{const}\,\exp\{-\theta(t)\}$, что имеет место неравенство $\lambda_1(A+Q_0) < \lambda_1(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. В 6-ти т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Виноград Р.Э.* Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 999–1002.
3. *Виноград Р.Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 6. С. 645–650.
4. *Миллионщиков В.М.* О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем // Мат. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 3. С. 315–318.
5. *Гробман Д.М.* Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
6. *Богданов Ю.С.* Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1957. Т. 41. № 4. С. 481–498.
7. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
8. *Барабанов Е.А.* Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: дис. … канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
10. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.

Белорусский аграрный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.