

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ЖУРНАЛ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА

ТОМ 162, ВЫПУСК 3 (9)

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

СЕНТЯБРЬ 2022

МОСКВА

«НАУКА»

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК РАН

СОДЕРЖАНИЕ

АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ, ОПТИКА

Электромагнитно-индуцированная прозрачность в газовых ячейках с антирелаксационным покрытием .....	Фофанов Я. А., Соколов И. М.	297
Геометрическая фаза как основа квантовой гироскопии .....	Ростом А. М., Томилин В. А., Ильичёв Л. В.	307
Влияние качества антирелаксационного покрытия на характер эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности в газовых ячейках .....	Волошин Г. В., Мэн Хуэй, Курапцев А. С., Соколов И. М.	313
Асимметричный эффект Бормана в пассивном РТ-симметричном фотонном кристалле .....	Бушуев В. А., Манцызов Б. И.	322
Декогеренция конденсата в гибридном атомарно-оптическом квантовом гироскопе .....	Томилин В. А., Ильичёв Л. В.	331

ЯДРА, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ, ГРАВИТАЦИЯ И АСТРОФИЗИКА

Исследование реакции ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ в диапазоне энергий 12–34 кэВ .....	Варлачëв В. А., Дудкин Г. Н., Нечаев Б. А., Пеньков Ф. М., Филиппов А. В.	339
О распространении гравитона на фоне искривлённого пространства-времени .....	Арбузова Е. В., Долгов А. Д., Панасенко Л. А.	354
Нарушение Т-симметрии в осцилляциях нейтрино .....	Лобанов А. Е., Чухнова А. В.	364
Holographic description of the dissipative model of universe with curvature	Brevik I., Timoshkin A. V.	373
Cylindrical gravitational pulse waveguide excitations .....	Defo J. J., Kuetche V. K.	377

© Российская академия наук, 2022

© Редакция журнала ЖЭТФ (составитель), 2022

Поляризация и скорость гравитационных волн в гибридной метрической-Палатини $f(R)$ -гравитации .....	Дядина П. И.	382
--	--------------	-----

### ПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

К теории динамической магнитоэлектрической связи в $\text{CuV}_2\text{O}_4$ .....	Нурмухаметов А. Р., Еремин М. В.	390
Фазовые переходы и критические явления в двумерной примесной модели Поттса на квадратной решетке .....	Муртазаев А. К., Бабаев А. Б., Атаева Г. Я., Магомедов М. А.	398
Динамические и статические свойства негейзенберговского ферримагнетика с одноионной аннизотропией типа «легкая плоскость» . .	Космачев О. А., Матюнина Я. Ю., Фридман Ю. А.	406
Теория вихреподобных структур в перфорированных магнитных пленках с учетом размагничивающих полей .....	Магадеев Е. Б., Вахитов Р. М., Канбеков Р. Р.	417
Температурная эволюция спектров магнитного резонанса металл-диэлектрических наногранулярных композитов с парамагнитными ионами в изолирующей матрице .....	Дровосеков А. Б., Крейнс Н. М., Ковалев О. А., Ситников А. В., Николаев С. Н., Рыльков В. В.	426

### ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Влияние сильного магнитного поля на транспортные свойства МДП-структуры $\text{Fe}/\text{SiO}_2/\text{n-Si}$ на переменном токе .....	Смоляков Д. А., Рауцкий М. В., Бондарев И. А., Яковлев И. А., Овчинников С. Г., Волков Н. В., Тарасов А. С.	432
---	---	-----

### СТАТИСТИЧЕСКАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЗИКА, ФИЗИКА «МЯГКОЙ» МАТЕРИИ

Инверсная заселенность уровней $\text{Ar VIII}$ в плазме быстрого конического разряда .....	Анциферов П. С., Дорохин Л. А., Кошелев К. Н.	440
---	---	-----

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-ИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ В ГАЗОВЫХ ЯЧЕЙКАХ С АНТИРЕЛАКСАЦИОННЫМ ПОКРЫТИЕМ

Я. А. Фофанов<sup>а</sup>, И. М. Соколов<sup>а,б\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт аналитического приборостроения Российской академии наук  
190103, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>б</sup> *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 05 апреля 2022 г.,  
после переработки 12 мая 2022 г.  
Принята к публикации 12 мая 2022 г.

Рассмотрены особенности эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности в газовых ячейках с антирелаксационным покрытием стенок. Показано, что одновременное влияние движения атомов, конечного размера ячейки и невырожденности основного состояния атомов приводит к целому ряду качественных эффектов. В частности, уже для простейшей трехуровневой лямбда-схемы с невырожденным основным состоянием обнаружено и детально исследовано существенное различие спектров электромагнитно-индуцированной прозрачности в зависимости от соотношения частот пробного и управляющего полей, т. е. в зависимости от того, происходит ли рассеяние пробного излучения по стоксовскому или антистоксовскому каналу. Обнаружена существенная пространственная неоднородность возбуждаемой низкочастотной когерентности, сохраняющейся для протяженных ячеек даже вдали от их границ. При этом резонансы электромагнитно-индуцированной прозрачности, формируемые атомами в разных областях ячейки, оказываются по-разному сдвинутыми по частоте, что служит причиной дополнительного неоднородного уширения наблюдаемого контура. Исследована зависимость обнаруженных эффектов от характера аккомодации атомов на поверхности антирелаксационного покрытия.

DOI: 10.31857/S0044451022090012

EDN: EJKTGU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Создание систем с заданными оптическими свойствами и поиск путей управления этими свойствами в масштабах реального времени составляют одну из наиболее важных задач современной квантовой электроники и квантовой оптики. В последнее время большой интерес вызывает возможность изменения оптических свойств вещества при воздействии на него вспомогательным когерентным излучением. Такое воздействие приводит к возникновению оптически-индуцированной когерентности в атомных, молекулярных системах или в твердых телах и, как следствие, к существенному изменению их оптических характеристик. Наведен-

ная атомная когерентность является причиной таких явлений, как когерентное пленение населенностей, электромагнитно-индуцированная прозрачность (ЭИП), замедление и «остановка света» [1–4].

В основе этих эффектов лежат двух- или многофотонные резонансные процессы. Во многих практически важных случаях ширины этих резонансов оказываются существенно меньше естественных ширин атомных переходов, что и определяет большой потенциал практического применения этих эффектов для решения широкого круга задач квантовой информатики, метрологии, стандартизации частоты и т. п.

Особый интерес для практического использования представляют ансамбли атомов в ячейках, имеющих температуры, близкие к комнатным. Это связано с рядом технических преимуществ по сравнению с ансамблями атомов, охлаждаемыми до низких температур в специальных ловушках. Основ-

\* E-mail: ims@is12093.spb.edu

ным достоинством горячих газов являются сравнительная простота приготовления систем с заданными параметрами и простота управления их свойствами, в частности плотностью. В то же время для горячих газов определенным негативным фактором является большое доплеровское уширение линий однофотонных атомных переходов, что зачастую ограничивает их использование для задач прецизионной спектроскопии. В случае многофотонных резонансов, однако, доплеровское уширение может быть подавлено посредством выбора оптимальной геометрии их возбуждения. Так, например, для двухфотонных переходов, происходящих в лямбда-схеме, при выборе коллинеарной геометрии двух квазирезонансных полей остаточное доплеровское уширение определяется малой разностью волновых чисел этих полей. Таким образом, доплеровские эффекты не являются препятствием для наблюдения узких нелинейных резонансов в экспериментах с горячими атомами (см., например, работы [5,6], а также [4] и ссылки там). Более того, в ряде случаев может наблюдаться дополнительное, так называемое доплеровское, сужение двухфотонных резонансов, предсказанное в работах [7–9].

Еще одной важной особенностью горячих газов в ячейках является необходимость учета столкновений, которые испытывают атомы с поверхностями ячейки и между собой. Эти столкновения уменьшают время когерентного взаимодействия атомов с полями и увеличивают ширины, в том числе и нелинейных резонансов. При типичных, сравнительно низких концентрациях атомов в газовых ячейках существенную негативную роль играют столкновения со стенками. Для ослабления влияния этих столкновений и уменьшения скоростей релаксации атомных когерентностей на практике используются два основных метода. Первый состоит в заполнении ячейки буферным инертным газом, увеличивающим время диффузии активных атомов и уменьшающий частоту их столкновений со стенками. Во втором используются антирелаксационные покрытия стенок. Для практических применений использование покрытий имеет некоторые преимущества по сравнению с ячейками с буферным газом. Для них менее существенен градиент внешних полей, нет вызванного буферным газом дополнительной столкновительной релаксации возбужденных состояний атомов. В ряде метрологических применений они позволяют получать большее отношение сигнал/шум. Важной особенностью покрытий является то, что они могут сохранять свои свойства в течение длительного времени.

К настоящему времени имеется довольно большое число работ, в которых как непосредственно исследуются свойства таких покрытий, так и анализируются возможности прецизионной спектроскопии атомарных газов, находящихся в соответствующих ячейках [4, 10–49]. Однако, несмотря на это, некоторые важные аспекты влияния конечного размера ячеек и столкновений атомов с покрытием, приводящие к качественным особенностям многофотонных резонансов в этом случае, остаются недостаточно изученными.

В настоящей работе при исследовании влияния столкновений атомов со стенками газовых ячеек мы ограничимся анализом этого влияния на характер ЭИП. Мы рассмотрим модельную трехуровневую лямбда-схему и покажем, что уже в этом простейшем случае имеет место ряд эффектов или вовсе не исследованных ранее, или изученных недостаточно детально. Так, наличие границ приводит к существенной пространственной неоднородности атомных когерентностей в ячейках. Как будет показано ниже, в силу медленной релаксации неоднородность низкочастотной когерентности сохраняется даже для ячеек очень больших размеров. Эта неоднородность приводит к появлению макроскопических потоков когерентностей, что, в свою очередь, связано с возникновением дополнительных доплеровских сдвигов двухфотонных резонансов. Эти сдвиги различны в разных частях ячейки и, следовательно, приводят к дополнительному неоднородному уширению линий ЭИП. Этот механизм неоднородного уширения в настоящее время практически совершенно не изучен.

Недостаточно изучена также роль невырожденности основного состояния рассматриваемой системы. Для лямбда-схемы при параллельных и одинаково направленных лучах двухфотонные сдвиги сильно подавлены. На этом основании ими зачастую пренебрегают, рассматривая только роль однофотонной отстройки и однофотонного доплеровского сдвига. Мы покажем, что двухфотонные сдвиги могут приводить к качественно новым эффектам, в частности к сильной зависимости характера ЭИП от того, рассеивается ли пробное излучение по стоксовскому или антистоксовскому каналу. В подавляющем большинстве работ по исследованию нелинейных резонансов в ячейках с покрытием рассматривается случай, когда радиусы лазерных лучей много меньше размеров ячейки, при этом обычно ограничиваются учетом столкновений только с боковой поверхностью, перпендикулярной волновым векторам полей, причем зачастую без учета доплеровских

сдвигов, вызванных отражением от нее. В этом случае реализуется квазиэрмиевская схема наблюдения. Атом испытывает многократные столкновения со стенками, прежде чем повторно окажется в луче [4, 18, 26, 27]. При большом числе столкновений до возвращения в луч релаксация происходит даже при высоком качестве покрытия. Для широких лучей или небольших ячеек [50] это не так, и важно также учитывать столкновения с торцевыми поверхностями.

В настоящей работе мы учтем и проанализируем все отмеченные выше факторы, при этом мы будем принимать во внимание различные возможные характеры взаимодействия с антирелаксационным покрытием в зависимости от времени адсорбции атома на нем. Мы рассмотрим как большие времена, когда скорость отлетающего от поверхности атома не зависит от начальной и определяется температурой стенки, так и отражение без адсорбции, при котором столкновение можно считать зеркальным.

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОДХОДЫ

Основной целью данной работы является анализ влияния конечных размеров ячейки и характера столкновений с антирелаксационным покрытием на форму резонанса ЭИП. Учитывая эту основную цель, мы сделаем ряд приближений, которые, по нашему мнению, не являются критичными для обнаруженных нами физических особенностей эффекта ЭИП в этом случае.

Мы ограничимся простой модельной системой с лямбда-схемой энергетических уровней (ис. 1). При этом мы будем предполагать типичную ситуацию, когда пробное поле вызывает переходы только с одного из подуровней основного состояния. То же относится и к управляющему полю: оно вызывает переходы с другого подуровня. В случае невырожденного основного состояния для ультрахолодных газов, когда доплеровскими эффектами можно полностью пренебречь, неважно, с каким из подуровней взаимодействует пробное, а с каким управляющее поле. То же, очевидно, относится и к случаю горячих атомов для совпадающих энергий состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Как показывают наши расчеты, для горячих атомов с невырожденным основным состоянием существенно, какое из полей имеет более высокую частоту, т. е. происходит ли рассеяние пробного света по стоксовскому или антистоксовскому каналу. Поэтому мы подробно рассмотрим оба случая.

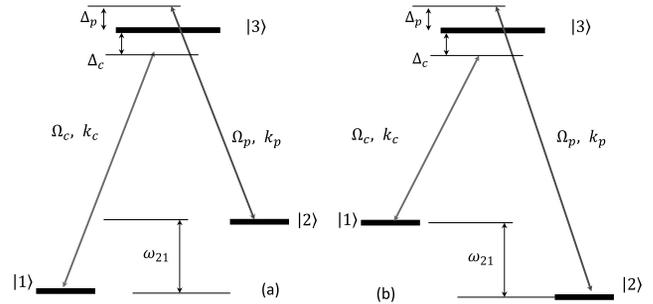


Рис. 1. Две возможные схемы возбуждения ЭИП резонанса, различающиеся соотношением частот пробного и управляющего полей: (а) — частота управляющего поля меньше, чем пробного; (б) — наоборот

Внешние поля — управляющее и пробное, предполагаются слабыми. Их частоты Раби много меньше скоростей спонтанного распада возбужденных состояний. При этом управляющее поле считается много сильнее пробного. Спектральные ширины каждой компоненты предполагаются меньше естественной ширины атомного перехода. Концентрацию атомов считаем малой настолько, чтобы пренебречь коллективными эффектами, вызванными резонансным диполь-дипольным взаимодействием [51, 52], и использовать приближение оптически тонкой среды.

Резонансы ЭИП мы будем анализировать на основе расчета величины наведенной пробным излучением атомной поляризации, определяемой интегральной по скоростям атомной когерентностью  $\rho_{32}$ . Эта поляризация, в свою очередь, позволяет рассчитать восприимчивость ансамбля [8, 53], а следовательно, определить и его коэффициент поглощения, и показатель преломления. Таким образом, расчет оптических свойств рассматриваемого атомного ансамбля будем проводить на основе решения системы квантовых кинетических уравнений для одноатомной матрицы плотности  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ . Соответствующая система уравнений с учетом движения атомов приведена в Приложении. В этой статье мы ограничимся одномерным случаем, когда оба поля распространяются вдоль оси  $z$ , а границы ячейки перпендикулярны этой оси. Наличие границ ячейки и характер столкновений с ними будем учитывать посредством соответствующих граничных условий.

Чтобы не загромождать несущественными техническими деталями исследуемые качественные эффекты, рассмотрим модельные граничные условия. Поскольку для современных покрытий полная релаксация атомной спиновой когерентности происходит после  $10^4$ – $10^6$  столкновений, рассмотрим модель

идеального покрытия, не влияющего вовсе на внутреннее состояние атома.

Что касается характера аккомодации на поверхности, то здесь мы также ограничимся двумя предельными случаями. Во-первых, рассмотрим случай абсолютно упругого (зеркального) отражения, когда нормальная составляющая скорости меняет знак, а тангенциальная сохраняется, т. е. при условии  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости до и после столкновения. При этом для идеальных покрытий имеем

$$\rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v}')_{r \in S} = \rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v})_{r \in S}. \quad (1)$$

Второй случай — полная термализация, когда, независимо от скорости до столкновения, атомы вылетают с поверхности со случайной скоростью, задаваемой распределением Максвелла. При этом граничное условие предполагает равенство потоков, налетающих на поверхность и вылетающих с нее. Для частного случая плоского слоя толщиной  $L$  имеем

$$\begin{aligned} j_{ij}^-|_{z=0} &= j_{ij}^+|_{z=0}, \\ j_{ij}^+|_{z=L} &= j_{ij}^-|_{z=L}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $j_{ij}^\pm(z) = \int_0^\infty \rho_{ij}^\pm(v, z)(\pm v)dv$ ,  $\rho_{ij}^\pm(v, z) = \rho_{ij}(\pm v, z)$ . Случай, описываемый соотношениями (2), обычно называют диффузным отражением. В дальнейшем мы также будем использовать этот термин.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

#### 3.1. Пространственное распределение атомной поляризации

Ключевым для понимания особенностей эффекта ЭИП в рассматриваемой нами схеме (см. рис. 1) является величина наводимой низкочастотной когерентности  $\rho_{12}$ . Поэтому рассмотрим подробно пространственное распределение именно этой компоненты одноатомной матрицы плотности.

На рис. 2 показано стационарное пространственное распределение  $\rho_{12}(z) = \int \rho_{12}(v, z) dv$  для двух типов отражения атомов от стенки: зеркального (рис. 2a) и диффузного (рис. 2b) в условиях точных однофотонных и двухфотонных резонансов, когда частота каждого из полей совпадает с частотой соответствующего атомного перехода,  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ . Двум кривым на каждом рисунке соответствуют два возможных варианта реализации эффекта ЭИП: сплошные линии — случаю, когда управляющее поле приложено на более коротковолновом переходе  $k_c > k_p$ , т. е. имеет более высокую частоту, чем

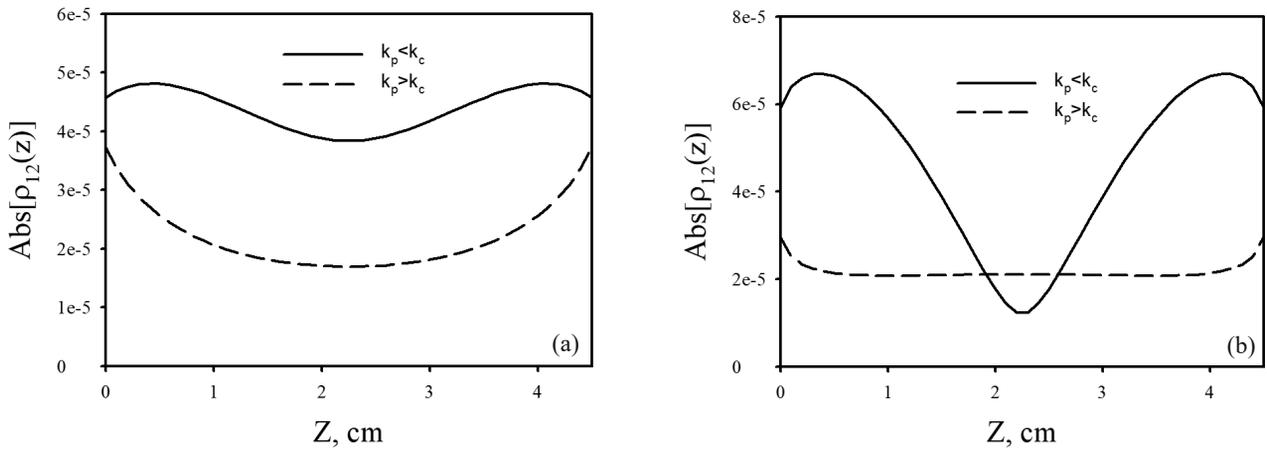
пробное, а штриховые — наоборот. Расчеты проведены для следующих параметров. Половина частоты Раби управляющего поля равна  $V_c = 10^5 \text{ с}^{-1}$ , пробного —  $V_p = 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Скорость спонтанного распада возбужденного состояния  $\gamma_3 = 6 \text{ МГц}$ , при этом атом с равной вероятностью распадается на оба нижних подуровня. Скорость поперечной релаксации низкочастотной когерентности равна  $\gamma_{21} = 10 \text{ Гц}$ . Длина волны низкочастотного перехода равна  $\lambda = 4.5 \text{ см}$ . Длина ячейки  $L = \lambda$ . Температура ячейки  $T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Рисунок 2 демонстрирует несколько важных физических результатов. Хорошо видно, что наличие границ делает рассматриваемое пространственное распределение существенно неоднородным, причем характер неоднородности зависит от характера отражения. Помимо типа отражения, на вид пространственного распределения существенно влияет соотношение частот переходов, вызываемых пробным и управляющим полями. Больше в среднем значение когерентности  $\rho_{12}$ , а следовательно, и более сильный эффект ЭИП наблюдается в случае  $k_c > k_p$ . Это составляет важную особенность эффекта ЭИП в случае горячих атомных ансамблей. В модели неподвижных рассеивателей такая зависимость отсутствует.

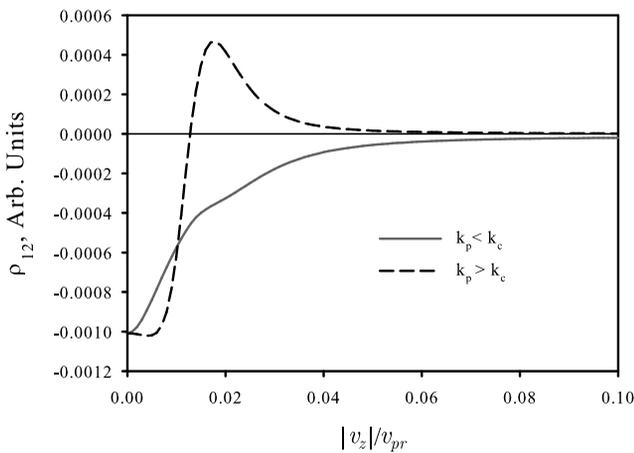
Для объяснения данной асимметрии проанализируем вклад атомов, двигающихся с разными скоростями, в когерентность в данной области ячейки. Для простоты рассмотрим случай, когда  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ . На рис. 3 такой вклад показан для ячейки длиной  $L = 10 \text{ см}$ . Расчет проведен для области посередине ячейки,  $z = 5 \text{ см}$ . Отражение от стенки предполагается диффузным.

Хорошо видно, что при  $k_c < k_p$  величина  $\rho_{12}$  меняет знак. Это означает, что вклады разных атомов компенсируют друг друга и ослабляют эффект ЭИП в этом случае. При  $k_c > k_p$  этого не происходит.

Фазы когерентности зависят от отстройки пробного поля относительно двухфотонного резонанса. Эта отстройка для разных атомов разная. При фиксированных  $\Delta_c$  и  $\Delta_p$  фаза определяется величиной скорости. При заданной скорости атома имеют место однофотонные доплеровские сдвиги. Есть также сдвиг, который можно назвать световым. Он обусловлен зависимостью положения квазиуровней атома, «одетого» взаимодействием с сильным управляющим полем, от интенсивности и отстройки этого поля, т. е. от скорости атома. В случае  $k_c < k_p$  некоторые атомные диполи колеблются в противофазе, что и обуславливает описанное выше ослабление эффекта ЭИП.



**Рис. 2.** Пространственные распределения низкочастотной когерентности (в произвольных единицах) для двух типов отражения атомов от стенки: зеркального (а) и диффузного (б). Двум кривым на каждом рисунке соответствуют два возможных соотношения частот управляющего и пробного полей. Расчеты проведены для случая  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ ,  $V_c = 10^5 \text{ c}^{-1}$ ,  $V_p = 10^3 \text{ c}^{-1}$ ,  $\gamma_3 = 6 \text{ МГц}$ ,  $\gamma_{21} = 10 \text{ Гц}$ ,  $L = \lambda = 4.5 \text{ см}$ ,  $T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$



**Рис. 3.** Парциальные вклады атомов,двигающихся с различными по модулю скоростями, в низкочастотную когерентность для ячейки длиной  $L = 10 \text{ см}$ . Расчет проведен для случая диффузного отражения для области посередине ячейки,  $z = 5 \text{ см}$ . Остальные параметры как на рис. 2 ( $v_{pr}$  — наиболее вероятная скорость)

Заметим, что подобный эффект зависимости характера эффекта ЭИП от знака разности  $q = k_c - k_p$  имеет место и без учета влияния границ ячейки. Для безграничной среды в условиях сильного управляющего поля, когда заселенностью уровня  $|1\rangle$  можно пренебречь, система (А.1) (см. Приложение) допускает приближенное аналитическое решение, которое имеет наиболее простой вид для  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ . В этом случае для  $\gamma_{21} = 0$  когерентность  $\rho_{12}$  веще-

ственна и мы имеем

$$\rho_{12} = -\frac{8V_c V_p (qkv^2 + V_c^2)}{qv^2 \gamma_3 + (qkv^2 + V_c^2)^2} \quad (3)$$

Здесь  $k = k_c \simeq k_p$ . Эта формула достаточно хорошо описывает зависимости, показанные на рис. 3. В частности, при отрицательных  $q$  изменение знака  $\rho_{12}$  происходит при  $v = \sqrt{V_c^2 / qk}$ .

Величина области, в которой наблюдается существенная пространственная неоднородность низкочастотной когерентности, обусловленная наличием границ ячейки, зависит от скорости ее релаксации. В силу относительно медленной релаксации пространственная зависимость  $\rho_{12}(z)$  наблюдается для ячеек больших размеров не только в приграничных областях, но и по всему объему. Это хорошо демонстрирует рис. 4, на котором показан парциальный вклад атомов,двигающихся в противоположных направлениях, для ячейки, размеры которой в десять раз больше длины волны низкочастотного перехода. Характерный пространственный период наблюдающихся осцилляций в рассматриваемом случае определяется длиной волны низкочастотного перехода и практически не зависит от размеров ячейки.

Заметим, что кривые, показанные на рис. 2 и 4, обладают определенной пространственной симметрией. Это связано с тем, что они получены для случая  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ . При наличии двухфотонной отстройки эта симметрия нарушается. Пространственная зависимость атомных когерентностей становится более сложной.

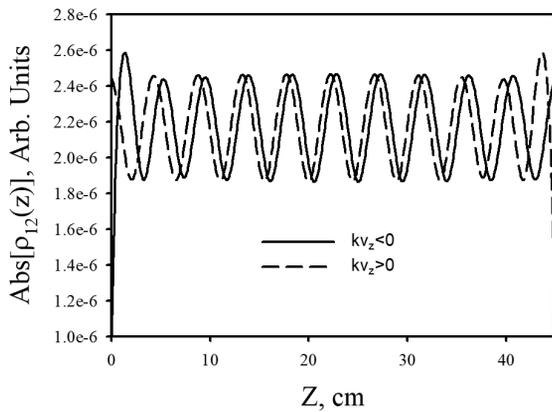


Рис. 4. Парциальные вклады атомов, двигающихся в противоположных направлениях, в когерентность для случая диффузного отражения и  $k_c > k_p$ .  $L = 10\lambda$ , остальные параметры те же, что и на рис. 2

Наличие существенной пространственной неоднородности когерентности  $\rho_{12}$  приводит к появлению отличных от нуля средних потоков как этой когерентности, так и других элементов матрицы плотности. Это может приводить к важной модификации спектральных характеристик рассматриваемого атомного ансамбля [54, 55], в частности, к сдвигам резонансов ЭИП, которые оказываются разными в разных областях ячейки. На рис. 5 показаны коэффициенты поглощения пробного излучения в разных областях ячейки длиной  $L = 10$  см при диффузном характере отражения от стенок. Этот коэффициент рассчитан на основе мнимой части оптической когерентности на переходе, возбуждаемом пробным излучением, т. е.  $\rho_{32}$ .

Заметим, что при изменении частоты пробного поля меняется как пространственное распределение, так и соотношение вкладов атомов, двигающихся в противоположных направлениях. Все это приводит к сложной спектральной форме контура ЭИП в разных областях ансамбля (см. рис. 5). Различие сдвигов в разных областях вызывает дополнительное неоднородное уширение наблюдаемого контура ЭИП для всей ячейки в целом, а также искажение его формы, которое будет обсуждено в следующем разделе. Заметим также, что аналогичные спектральные эффекты, связанные с пространственной неоднородностью атомного возбуждения в оптически толстых ячейках, были предсказаны в работе [55].

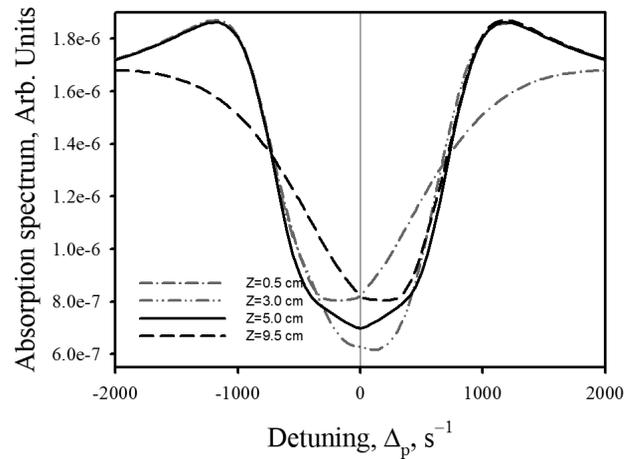


Рис. 5. (В цвете онлайн) Коэффициенты поглощения пробного излучения в разных областях ячейки длиной  $L = 10$  см, остальные параметры те же, что и на рис. 3

### 3.2. Спектры ЭИП при различных типах отражения

При анализе спектров прозрачности будем считать, что управляющее поле настроено в резонанс с переходом в неподвижном атоме,  $\Delta_c = 0$ , и, как и ранее, будем рассматривать два случая:  $k_c > k_p$  и  $k_c < k_p$ . Для удобства сравнения спектров ЭИП для ячеек разной длины будем нормировать коэффициенты поглощения так, чтобы для разных размеров вдали от двухфотонного резонанса коэффициенты поглощения были бы одинаковы. Это позволит лучше выявить особенности частотной зависимости эффекта.

На рис. 6 показаны спектры поглощения в условиях ЭИП для ячеек различной длины при диффузном характере отражения атомов от покрытия. При малых размерах, существенно меньших длины волны, наблюдается типичная для эффекта Дике двойная структура с узким центральным пиком и более широкой подложкой. При увеличении размеров характер резонансов в случаях  $k_c > k_p$  и  $k_c < k_p$  меняется существенно различным образом. При  $k_c > k_p$  амплитуды резонансов увеличиваются, выходя на некоторое фиксированное значение. При  $k_c < k_p$  с увеличением размера резонанс ЭИП ослабевает. При больших  $L$  резонанс практически полностью отсутствует.

Качественно аналогичное поведение наблюдается и при зеркальном отражении атомов от поверхности. Количественное сравнение формы резонансов для разных покрытий показано на рис. 7 для

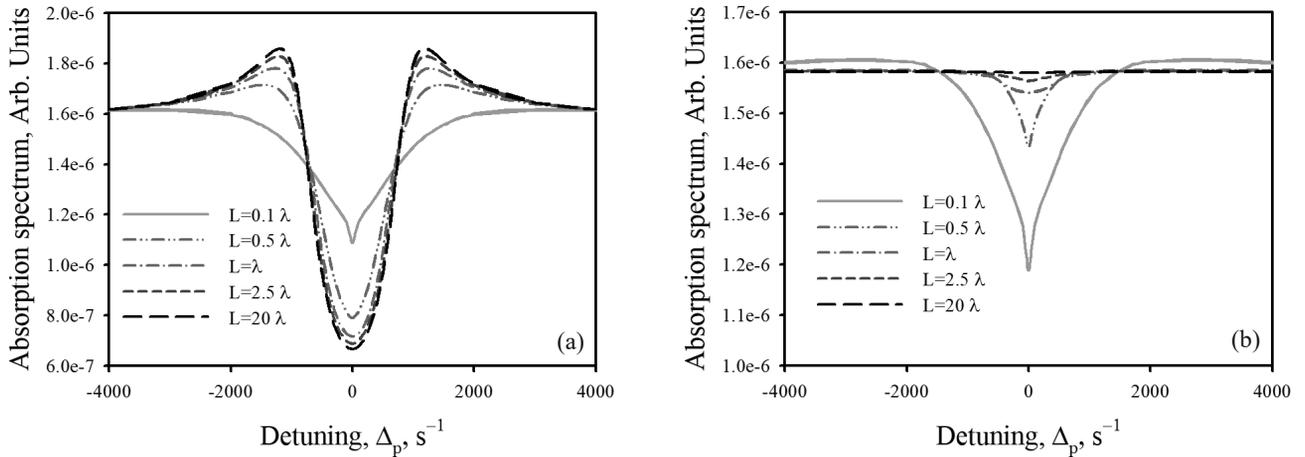


Рис. 6. (В цвете онлайн) Спектры поглощения при диффузном рассеянии для разного соотношения частот и волновых чисел пробного и управляющего полей:  $k_c > k_p$  (a) и  $k_c < k_p$  (b). Коэффициенты поглощения нормированы с учетом разной длины ячейки. Остальные параметры — как на рис. 2

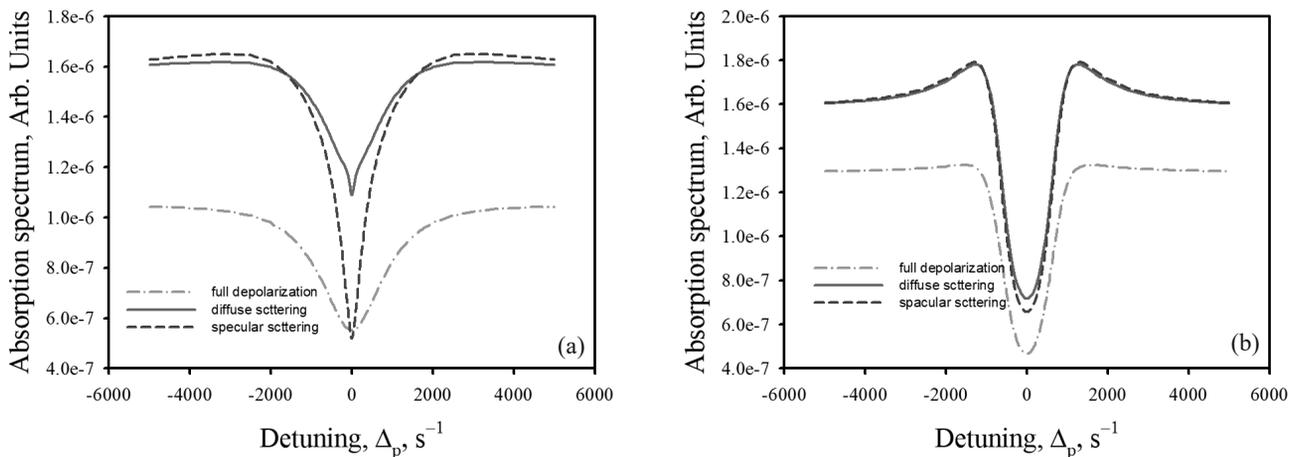


Рис. 7. (В цвете онлайн) Сравнение спектров поглощения для разных типов отражения от поверхности ячейки для  $L = 0.1\lambda$  (a) и  $L = \lambda$  (b). Остальные параметры — как на рис. 2

$L = 0.1\lambda$  и  $L = \lambda$ . Для сравнения на этих рисунках приведены резонансы поглощения для ячеек без покрытия. В последнем случае форма спектра не зависит от характера адсорбции атомов на поверхности — спектры одинаковы для зеркального и диффузного отражения.

Наиболее сильное влияние характера отражения наблюдается при малых размерах ячейки. Для  $L = 0.1\lambda$  при диффузном отражении контраст резонанса приблизительно в два раза меньше, чем при зеркальном. При малых размерах равновесное внутреннее состояние устанавливается только для

медленно движущихся атомов, для которых время пролета между последовательными столкновениями со стенками велико. При диффузном отражении скорость таких атомов с большой вероятностью увеличится и новое равновесное состояние не успеет сформироваться. При зеркальном отражении всегда есть группа атомов, которые переходят в некоторое равновесное когерентное состояние в результате серии последовательных отражений от стенок ячейки.

Для больших размеров среднее время пролета увеличивается и различие в характере адсорб-

ции проявляется существенно слабее. На рис. 7b видно, что различие контрастов для диффузного и зеркального отражения составляет несколько процентов.

При отсутствии покрытия происходит существенное перемешивание атомов между двумя подуровнями основного состояния, поэтому населенность состояния  $|2\rangle$  после столкновения уменьшается в два раза, если до него атом находился на этом подуровне. Это объясняет меньший коэффициент поглощения в этом случае. Заметим также, что при столкновении атомов с непокрытыми поверхностями газовых ячеек может иметь место целый ряд интересных эффектов. Например, границу раздела «стекло–пары атомов» можно рассматривать как своеобразный оптический демпфер, снижающий квантовые (фотонные) флуктуации при отражении света [56–59].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы проанализировали ряд качественных особенностей явления ЭИП, имеющих место в ячейках с антирелаксационным покрытием стенок. Этот анализ проведен нами для модельной трехуровневой системы при использовании ряда приближений. Однако основные обнаруженные эффекты, такие как существенная пространственная неоднородность атомной поляризации, наличие потоков когерентностей и связанных с ними локальных сдвигов, приводящих к дополнительному неоднородному уширению резонансов, а также существенная зависимость эффекта ЭИП от того, рассеивается ли пробное излучение по стоксовскому или антистоксовскому каналу, обусловлены влиянием тех факторов, которые имеют место для реальных атомарных газов в ячейках. Это — движение атомов и изменение направления этого движения, вызванное столкновениями со стенками, а также невырожденность основного состояния. По этой причине мы считаем, что предсказываемые в данной работе эффекты необходимо учитывать во всех потенциальных приложениях эффекта ЭИП, в которых используются газовые ячейки с антирелаксационным покрытием стенок.

**Финансирование.** Проведение исследований было поддержано грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Анализ влияния характера аккомодации атомов на поверхности покрытия на спектры ЭИП осуществлен в рамках выполнения Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код

темы FSEG-2020-0024). Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (<http://www.spbstu.ru>).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Пренебрегая столкновениями атомов между собой, систему уравнений для медленных амплитуд матрицы плотности в представлении Вигнера  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  в приближении вращающейся волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{11} &= i(V_c^* \rho_{31} - V_c \rho_{13}) + \gamma_{31} \rho_{33}, \\ \dot{\rho}_{22} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{22} &= i(V_p^* \rho_{32} - V_p \rho_{23}) + \gamma_{32} \rho_{33}, \\ \dot{\rho}_{12} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{12} &= i(V_c^* \rho_{32} - V_p \rho_{13}) + \\ &+ [i(\Delta_p - \Delta_c + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - \gamma_{12}] \rho_{12}, \\ \dot{\rho}_{13} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{13} &= \\ &= -i(V_c^* \rho_{11} + V_p^* \rho_{12} - V_c^* \rho_{33}) - \\ &- [i(\Delta_c - \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{v}) + \gamma_3/2] \rho_{13}, \\ \dot{\rho}_{23} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{23} &= -i(V_c^* \rho_{21} + V_p^* \rho_{22} - V_p^* \rho_{33}) - \\ &- [i(\Delta_p - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{v}) + \gamma_3/2] \rho_{23}, \\ \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} &= 1, \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}^*. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Здесь предполагаем, что управляющее поле вызывает переходы только с подуровня  $|1\rangle$ , а пробное — только с  $|2\rangle$ , а также используем следующие обозначения:  $V_c = \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_c / 2\hbar$ ,  $V_p = \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_p / 2\hbar$ ,  $\mathbf{d}_{eg}$  — дипольные моменты переходов,  $\mathbf{E}_c$  и  $\mathbf{E}_p$  — медленные амплитуды соответственно управляющего и пробного полей,  $\gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_c - \mathbf{k}_p$ ,  $\Delta_c = \omega_c - \omega_{31}$ ,  $\Delta_p = \omega_p - \omega_{32}$ . Для краткости у матрицы плотности опущены аргументы. В системе (A.1) мы также пренебрегли вероятностями спонтанных переходов между близкорасположенными уровнями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Marangos, J. Mod. Opt. **45**, 471 (1998).
2. M. D. Lukin, Rev. Mod. Phys. **75**, 457 (2003).
3. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005).
4. I. Novikova, R. L. Walsworth, and Y. Xiao, Laser Photonics Rev. **6**, 333 (2012).
5. M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev,

- E. S. Fry, and M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5229 (1999).
6. D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, and V. V. Yashchuk, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1767 (1999).
  7. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **72**, 173 (2000).
  8. A. Javan, O. Kocharovskaya, H. Lee and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* **66**, 013805 (2002).
  9. L. Ma and G. Raithel, *J. Phys. Comm.* **4**, 095020 (2020).
  10. D. Budker, V. Yashchuk, and M. Zolotarev, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5788 (1998).
  11. D. Budker, L. Hollberg, D. J. Kimball, J. Kitching, S. Pustelny, and V. V. Yashchuk, *Phys. Rev. A* **71**, 012903-1-9 (2005).
  12. M. T. Graf, D. F. Kimball, S. M. Rochester, K. Kerner, C. Wong, D. Budker, E. B. Alexandrov, M. V. Balabas, and V. V. Yashchuk, *Phys. Rev. A* **72**, 023401 (2005).
  13. D. Budker and M. Romalis, *Nature Phys.* **3**, 227 (2007).
  14. Е. Б. Александров, А. К. Вершовский, *УФН* **179**, 605 (2009).
  15. M. V. Balabas, T. Karaulanov, M. P. Ledbetter, and D. Budker, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070801 (2010).
  16. M. V. Balabas, K. Jensen, W. Wasilewski, H. Krauter, L. S. Madsen, J. H. Muller, T. Fernholz, and E. S. Polzik, *Opt. Express* **18**, 5825 (2010).
  17. E. Breschi, G. Kazakov, C. Schori, G. Di Domenico, G. Mileti, A. Litvinov, and B. Matisov, *Phys. Rev. A* **82**, 063810 (2010).
  18. K. Nasyrov, S. Gozzini, A. Lucchesini, C. Marinelli, S. Gateva, S. Cartaleva, and L. Marmugi, *Phys. Rev. A* **92**, 043803 (2015).
  19. M. A. Hafiz, V. Maurice, R. Chutanil, N. Passilly, C. Gorecki, S. Guerande, E. de Clercq, and R. Boudot, *J. Appl. Phys.* **117**, 184901 (2015).
  20. H. Chi, W. Quan, J. Zhang, L. Zhao, and J. Fang, *Appl. Surf. Sci.* **501**, 143897 (2020).
  21. S. J. Seltzera and M. V. Romalis, *J. Appl. Phys.* **106**, 114905 (2009).
  22. K. A. Barantsev, S. V. Bozhokin, A. S. Kuraptsev, A. N. Litvinov, and I. M. Sokolov, *JOSA B* **38**, 1613 (2021).
  23. A. Krasteva, R. K. Nasyrov, N. Petrov, S. Gateva, S. Cartaleva, and K. A. Nasyrov, *Optoelectron. Instrum. Proc.* **54**, 307 (2018).
  24. W. Li, M. Balabas, X. Peng, S. Pustelny, A. Wickenbrock, H. Guo, and D. Budker, *J. Appl. Phys.* **121**, 063104 (2017).
  25. G. Kazakov, B. Matisov, A. Litvinov, and I. Mazets, *J. Phys. B* **40**, 3851 (2007).
  26. G. A. Kazakov, A. N. Litvinov, B. G. Matisov, V. I. Romanenko, L. P. Yatsenko, and A. V. Romanenko, *J. Phys. B* **44**, 235401 (2011).
  27. M. Klein, M. Hohensee, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, *Phys. Rev. A* **83**, 013826 (2011).
  28. A. Litvinov, G. Kazakov, B. Matisov, and I. Mazets, *J. Phys. B* **41**, 125401 (2008).
  29. S. Knappe and H. G. Robinson, *New J. Phys.* **12**(6), 1 (2010)
  30. E. N. Pestov, A. N. Besedina, D. E. Pestov and V. V. Semenov, *Appl. Magn. Res.* **51**, 195 (2020).
  31. S. J. Seltzer and M. V. Romalis, *J. Appl. Phys.* **106**, 114905 (2009).
  32. S. N. Atutov, A. I. Plekhanov, V. A. Sorokin, S. N. Bagayev, M. N. Skvortsov, and A. V. Taichenachev, *Eur. Phys. J. D* **72**, 155 (2018).
  33. S. N. Atutov, V. A. Sorokin, S. N. Bagayev, M. N. Skvortsov, and A. V. Taichenachev, *Eur. Phys. J. D* **73**, 11 (2019).
  34. M. Bhattarai, V. Bharti, V. Natarajan, A. Sargsyan, and D. Sarkisyan, *Phys. Lett. A* **383**, 91 (2019).
  35. S. Kobtsev, D. Radnatarov, S. Khripunov, I. Popkov, V. Andryushkov, and T. Steshchenko, *JOSA B* **36**, 2700 (2019).
  36. A. Krasteva, E. Mariotti, Y. Dancheva, C. Marinelli, L. Marmugi, L. Stiaccini, S. Gozzini, S. Gateva, and S. Cartaleva, *J. Contemp. Phys.* **55**, 383 (2020).
  37. H. Chi, W. Quan, J. Zhang, L. Zhao, and J. Fang, *Appl. Surf. Sci.* **501**, 143897 (2020).
  38. M. Bhattarai, V. Bharti, and V. Natarajan, *Sci. Rep.* **8**, 7525 (2018).
  39. S. Kobtsev, D. Radnatarov, S. Khripunov, I. Popkov, V. Andryushkov, and T. Steschenko, *Proc. SPIE* **10548**, 1054820 (2018).
  40. Y. Ji, J. Shang, Q. Gan, and L. Wu, in *Proc. of Electronic Components and Technology Conference*, Art. No. 7999974 (2017) p. 2116.

41. N. Sekiguchi and A. Hatakeyama, *Appl. Phys. B* **122**, 81 (2016).
42. O. Yu. Tretiak, J. W. Blanchard, D. Budker, P. K. Olshin, S. N. Smirnov, and M. V. Balabas, *J. Chem. Phys.* **144**, 094707 (2016).
43. M. Pellaton, C. Affolderbach, G. Mileti, R. Straessle, Y. Pétremand, D. Briand, and N. F. De Rooij, in *European Frequency and Time Forum 2014*, Art. No. 7331561 (2015) p. 554.
44. G. Zhang, L. Wei, M. Wang, and K. Zhao, *J. Appl. Phys.* **117**, 043106 (2015).
45. R. Straessle, M. Pellaton, C. Affolderbach, Y. Pétremand, D. Briand, G. Mileti, and N. F. De Rooij, *Appl. Phys. Lett.* **105**, 043502 (2014).
46. Z. Chowdhuri, M. Fertl, M. Horras, K. Kirch, J. Krempel, B. Lauss, A. Mtchedlishvili, D. Rebreyend, S. Rocchia, P. Schmidt-Wellenburg, and G. Zsigmond, *Appl. Phys. B* **115**, 257 (2014).
47. R. Straessle, M. Pellaton, C. Affolderbach, Y. Pétremand, D. Briand, G. Mileti, and N. F. De Rooij, *J. Appl. Phys.* **113**, 064501 (2013).
48. T. Bandi, C. Affolderbach, and G. Mileti, *J. Appl. Phys.* **111**, 124906 (2012).
49. M. Hasegawa, P. Dziuban, L. Nieradko, A. Douahi, C. Gorecki, and V. Giordano, in *IEEE/LEOS Int. Conf. on Optical MEMS and Nanophotonics*, OPT MEMS, Art. No. 4607879 (2008) p. 162.
50. S. N. Nikolić, A. J. Krmpot, N. M. Lučić, B. V. Zlatković, M. Radonjić, and B. M. Jelenković, *Phys. Scr.* **T157** (2013) 014019.
51. И. М. Соколов, Д. В. Куприянов, М. Д. Хэви, *ЖЭТФ* **139**, 288 (2011)
52. Н. А. Васильев, А. С. Трошин, *ЖЭТФ* **125**, 1276 (2004).
53. A. S. Kuraptsev and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. A* **91**, 053822 (2015).
54. V. V. Batygin and I. M. Sokolov, *Phys. Lett. A* **108**, 29 (1985).
55. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaeв, O. N. Prudnikov, and S. N. Bagaev, *JOSA B* **39**, 1979 (2022).
56. Ya. A. Fofanov, *Proc. SPIE* **7993**, 79930O-6 (2010).
57. Ya. A. Fofanov, in *Advances in Optoelectronics Research*, ed. by M. R. Oswald, Nova Sci. Publ., USA (2014) p. 75.
58. Ya. Fofanov, *Eur. Phys. J. WEB of Conf.* **220**, 01004 (2019).
59. А. В. Белинский, М. Х. Шульман, *УФН* **184**, 1135 (2014).

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА КАК ОСНОВА КВАНТОВОЙ ГИРОСКОПИИ

*А. М. Ростом, В. А. Томилин\*, Л. В. Ильичёв*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 8 апреля 2022 г.,  
после переработки 8 апреля 2022 г.  
Принята к публикации 24 мая 2022 г.

Перспективные подходы квантовой метрологии должны найти применение в новых типах гироскопов. В волновых схемах гироскопии, оптические реализации которых уже известны, в ближайшем будущем могут быть использованы макроскопические когерентные структуры атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна. В предлагаемой в настоящей работе схеме, как и в ряде других, чувствительными к вращению элементами служат кольцевые конфигурации конденсата, нарушенные на некотором своем участке дополнительным потенциалом — «дефектом». Показано, что варьирование формы этого «дефекта» генерирует геометрическую фазу системы атомов кольцевой конфигурации. В двух таких конфигурациях единого конденсата можно получить противоположные геометрические фазы, разность которых обращается в нуль в отсутствие вращения и которая может быть обнаружена при последующем наблюдении интерференции атомов из разных конфигураций. Приведены результаты расчета геометрической фазы для модели «дефекта» в кольце диаметром 0.5 см, детектирующего вращение Земли вокруг своей оси.

DOI: 10.31857/S0044451022090024

EDN: EJJDRH

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические гироскопы (и классические, и квантовые) основаны на эффекте Саньяка [1] — на измерении индуцированного им фазового сдвига интерференционной картины. Основная идея такого рода схем гироскопии может быть перенесена на системы с атомарным конденсатом Бозе–Эйнштейна (БЕС), т. е. можно использовать в интерференции вместо оптических волн волны материи. При этом точность измерения увеличивается с увеличением числа атомов в конденсате. Прогресс в технологии создания когерентных пространственных конфигураций БЕС позволяет в перспективе извлекать значение фазы Саньяка из картины интерференции конденсата.

Эффект Саньяка можно наблюдать в системе отсчета устройства с конденсатом при его вращении относительно инерциальной системы отсчета. Примером могут служить классические эксперименты по наблюдению интерференции волн материи [2–4]. Буквальное воспроизведение конструкции оптиче-

ского интерферометра Саньяка при использовании атомарного конденсата является непростой задачей. В литературе в качестве одного из возможных решений предлагается использование интерференции конденсатов в нетривиальных пространственных конфигурациях, в частности, в оптических решетках [5, 6]. Целесообразно рассмотреть схемы ВЕС-гироскопов, где возникновение фазы Саньяка и наблюдение интерференции связаны через некоторый дополнительный физический процесс, модифицирующий картину интерференции, например, сдвигающий ее. Если этот сдвиг чувствителен к вращению, из его величины можно извлечь значение угловой скорости вращения. В настоящей работе в качестве такого процесса предлагается использовать генерацию геометрической фазы в БЕС. Геометрическая фаза является кинематической величиной, определяемой формой пути в пространстве параметров, по которому эволюционирует состояние системы, и не зависит от скорости этой эволюции [7].

Основную идею такого рода гироскопа можно представить следующим образом. Конденсат предполагается двухмодовым, и ориентация пространственных конфигураций мод по отношению к угловой скорости вращения  $\Omega$  системы отсчета конден-

\* E-mail: 8342tomilin@mail.ru

сата относительно инерциальной системы такова, что вращение в разной степени сказывается на состояниях мод. Во всех остальных отношениях моды 1 и 2 эквивалентны. Предполагается, что одинаковым образом организованы и процессы генерации геометрических фаз в модах<sup>1)</sup>. Однако различная восприимчивость мод к вращению приводит к различию возникающих геометрических фаз:  $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$ . Состояние конденсата претерпевает изменение:

$$\sum_{n=0}^N f_n |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \mapsto \sum_{n=0}^N f_n \exp(in\vartheta_1) |n\rangle_1 \otimes \exp(i(N-n)\vartheta_2) |N-n\rangle_2. \quad (1)$$

Здесь для простоты предполагается фиксированным полное число  $N$  частиц в конденсате,  $f_n$  — амплитуды вероятности распределений атомов по модам. Физически значимым является изменение относительных фаз этих амплитуд:

$$f_n \mapsto f_n \exp(in(\vartheta_1 - \vartheta_2)), \quad (2)$$

что модифицирует картину последующей интерференции атомов из мод 1 и 2. Существенно, что эта модификация обусловлена вращением устройства и обращается в нуль при  $\Omega = 0$ .

В следующем разделе рассмотрена модель кольцевой пространственной конфигурации атомарного конденсата, чувствительной к вращению. Далее приведен пример генерации геометрической фазы в моде конденсата такой конфигурации. Как иллюстрация обрисованной выше гироскопической схемы сделаны численные расчеты с прицелом на регистрацию угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси.

## 2. КОЛЬЦЕВАЯ СТРУКТУРА ВЕС ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В настоящей работе, как и в [8], элементом ВЕС-гироскопа, чувствительным к вращению относительно инерциальной системы отсчета, служит кольцевая конфигурация конденсата, нарушенная на некотором участке дополнительным потенциалом — «дефектом» (рис. 1). Структура дефекта в общем случае задает ориентацию на кольце. Это отражено на рис. 1 и крайне важно для предмета на-

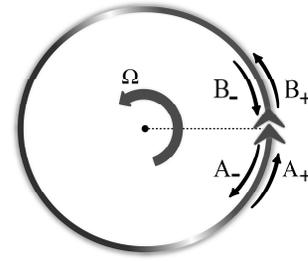


Рис. 1. Кольцевая конфигурация атомарного конденсата во вращающейся системе отсчета. Показаны «дефект» конфигурации, задающий ориентацию, и амплитуды волн

стоящей работы. Квазиодномерные бозе-газы являются популярной моделью в теории сверхтекучести и достаточно хорошо изучены [9–12]. Также в данный момент совершенствуются технологии их экспериментальной реализации [13]. В частности, в эксперименте уже возможно создание тороидальных оптических ловушек с хорошей пространственной локализацией в поперечном направлении [14]. Наличие «дефекта» обуславливает зависимость состояния конденсата от вращения, и эта зависимость максимальна, когда вектор угловой скорости вращения  $\Omega$  нормален плоскости кольца. В работе [8] при рассмотрении модели с «дефектом» в виде прямоугольного барьера или ямы была показана возможность сведения его к эффективному сингулярному потенциалу, что существенно упрощает рассмотрение.

В общем случае «дефект» может быть комбинацией нескольких барьеров и ям разной формы. В теоретической модели гироскопа очень удобным свойством явилась бы возможность конструировать «дефект» из отдельных базовых элементов с сохранением его эффективного локализованного характера (по крайней мере на первоначальном этапе рассмотрения). Этим условиям вполне удовлетворяет подход на основе трансфер-матриц [15]. Конструирование «дефекта» из отдельных элементов сводится к перемножению соответствующих трансфер-матриц, а эффективный точечный характер при этом сохраняется, если он имел место для используемых элементов.

Формализм трансфер-матриц, изначально созданный для задач оптики, вполне применим и в физике волн материи. Трансфер-матрица связывает амплитуды стационарных волн конденсата по разные стороны «дефекта». Описание этих волн необходимо осуществлять, находясь во вращающейся системе отсчета. Стационарная волновая функция  $\Psi(\varphi)$  атома на кольце описывается урав-

<sup>1)</sup> Имеются в виду геометрические фазы волновых функций одночастичных состояний мод. Для простоты исключаем взаимодействие между атомами конденсата.

нением Шредингера, содержащим в присутствии вращения добавочный член с первой производной по координате [8]:

$$\Psi''(\varphi) - 2i\xi\Psi'(\varphi) + \varepsilon\Psi(\varphi) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение предполагается справедливым при  $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ , т.е. везде, кроме точки, где расположен «дефект»;  $\varepsilon = 2mR^2E/\hbar^2$  — безразмерная энергия ( $m$  — масса атома,  $R$  — радиус кольца);  $\xi = mR^2\Omega/\hbar$  — параметр, отражающий вращение системы отсчета кольца с ВЕС. При  $\varepsilon \geq -\xi^2$  решением уравнения (3) является пара встречных волн  $\propto \exp(i\kappa_{\pm}\varphi)$ , где

$$\kappa_{\pm} \equiv \kappa_{\pm}(\xi) = \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}. \quad (4)$$

На рис. 1 введены амплитуды  $A_{\pm}$  и  $B_{\pm}$  соответствующих волн по обе стороны «дефекта»:

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{M}$  — трансфер-матрица «дефекта». Как известно [15], она принадлежит группе  $SU(1,1)$  псевдоунитарных унитарных матриц:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $|u|^2 - |v|^2 = 1$  (черта над символом обозначает комплексное сопряжение). Предполагаем, что зависимость параметров  $u$  и  $v$  от  $\varepsilon$  известна. Вид матрицы  $\mathcal{M}$  одинаков и в инерциальной, и во вращающейся системах отсчета<sup>2)</sup>.

Величины  $A_{\pm}$  и  $B_{\pm}$  связаны также условием цикличности на кольце:

$$A_{\pm} = B_{\pm} \exp(2\pi i\kappa_{\pm}). \quad (7)$$

Далее будут использоваться обозначения  $\psi_+ = B_+$  и  $\psi_- = B_-$ . Условие цикличности с участием трансфер-матрицы:

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \psi_+ \exp(2\pi i\kappa_+) \\ \psi_- \exp(2\pi i\kappa_-) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

<sup>2)</sup> Можно было бы предположить, что во вращающейся системе отсчета трансфер-матрица имеет иной вид:  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\xi) \neq \mathcal{M}(0)$ . Вывод ее зависимости от угловой скорости опирается на факт инвариантности свойств дефекта относительно обращения времени (что эквивалентно замене  $\xi \rightarrow -\xi$ ) и закон сохранения потока, выполняющийся в любой системе отсчета. Из уравнения (3) следует, что во вращающейся системе отсчета этот закон имеет вид  $\kappa_+|A_+|^2 + \kappa_-|A_-|^2 - \xi(|A_+|^2 + |A_-|^2) = \kappa_+|B_+|^2 + \kappa_-|B_-|^2 - \xi(|B_+|^2 + |B_-|^2)$ , что с учетом (4) сводится к обычному соотношению  $|A_+|^2 - |A_-|^2 = |B_+|^2 - |B_-|^2$ , справедливому в инерциальной системе отсчета. Следовательно, вид трансфер-матрицы в обеих системах отсчета одинаков.

Требование разрешимости этого соотношения приводит к уравнению для уровней энергии атома:

$$\cos(2\pi\xi) = \text{Re}[u \exp(2\pi i\sqrt{\xi^2 + \varepsilon})]. \quad (9)$$

Это уравнение обобщает соотношение из работы [8], полученное для «дефекта» в виде  $\delta$ -образного потенциала.

### 3. ГЕНЕРАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФАЗЫ

Амплитуды  $\psi_{\pm}$  зависят не только от  $\varepsilon$  и  $\xi$ , но и от совокупности  $\mathbf{p}$  остальных параметров трансфер-матрицы. От  $\mathbf{p}$  зависит также и само значение  $\varepsilon$  как решение уравнения (9).

Предполагаем, что некоторый замкнутый путь в пространстве параметров  $\mathbf{p}$  обходится достаточно медленно (адиабатически) так, что изначально выбранное решение  $\Psi_{\mathbf{p}_0}(\varphi)$  уравнения (3) с энергией  $\varepsilon_{\mathbf{p}_0}$  остается решением  $\Psi_{\mathbf{p}}(\varphi)$  уравнения (3) с энергией  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  в любой точке пути. Обход порождает геометрическую фазу [16]

$$\vartheta = \frac{i}{2} \oint \frac{\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \nabla_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}} \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle}{\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle} d\mathbf{p}. \quad (10)$$

В общем случае эта фаза чувствительна к вращению:  $\vartheta = \vartheta(\xi)$  и  $\vartheta(\xi) |_{\xi \neq 0} \neq \vartheta(0)$ .

Для иллюстрации данной схемы будут использованы две из трех канонических трансфер-матриц [15], к произведению которых может быть сведена любая матрица  $\mathcal{M} \in SU(1,1)$ :

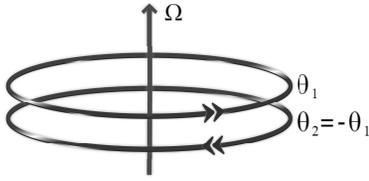
$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(\eta) & i \text{sh}(\eta) \\ -i \text{sh}(\eta) & \text{ch}(\eta) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\eta)e^{i\alpha} & i \text{sh}(\eta)e^{i\alpha} \\ -i \text{sh}(\eta)e^{-i\alpha} & \text{ch}(\eta)e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (11) \end{aligned}$$

Уравнение (9) в данном случае принимает вид

$$\cos(2\pi\xi) = \text{ch}(\eta) \cos(2\pi\sqrt{\xi^2 + \varepsilon} + \alpha). \quad (12)$$

Пространство параметров является бесконечным цилиндром:  $-\infty < \eta < \infty$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Окружность  $\alpha$  выбрана в качестве пути обхода. Нетрудно убедиться, что при таком выборе пути обхода в принятой нами модели одномерного кольца  $\vartheta(0) \equiv 0$ , а  $\vartheta(-\xi) = -\vartheta(\xi)$ . Необходимые соотношения представлены в Приложении.

На рис. 2 воспроизведена возможная схема регистрирующей части двухмодового ВЕС-гироскопа (схема последующего наблюдения интерференции



**Рис. 2.** Комбинация двух противоположно ориентированных кольцевых конфигураций атомарного конденсата. Возникающие геометрические фазы различаются знаком

атомов разных мод не рассматривается). Обе моды имеют конфигурацию кольца с «дефектом». Противоположная ориентация второго кольца задается изменением порядка матричных сомножителей в средней части выражения (11). Расположив оба кольца перпендикулярно вектору  $\Omega$  угловой скорости вращения и реализовав эволюцию  $\alpha$  по единому замкнутому контуру, мы получим преобразования (1) состояния конденсата с  $\vartheta_1 = \vartheta(\xi)$ ,  $\vartheta_2 = -\vartheta(\xi)$ . Данный выбор конфигурации мод обладает еще одним важным преимуществом — динамические фазы, пропорциональные  $\int \varepsilon_{\mathbf{p}(t)} dt$  и приобретаемые ими в результате эволюции, оказываются одинаковыми и компенсируют друг друга в разности  $\vartheta_1 - \vartheta_2$ . Итоговая регистрируемая разность фаз  $\vartheta_1 - \vartheta_2$  не будет содержать в себе следов динамической фазы, а сведется к удвоенной фазе  $\vartheta(\xi)$ . Подобный прием ранее использовался в работе [17], посвященной переносу геометрической фазы с оптической моды на состояние двухмодового атомарного конденсата через канал квантовой запутанности.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Оставшимся свободным параметром при определении контура эволюции потенциального дефекта является  $\eta$ . На рис. 3а приведена зависимость разности геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, от значения угловой скорости вращения и параметра  $\eta$ . Видно, что наибольшее по величине значение этой разности наблюдается при малых  $\eta$ . С учетом цикличности фазы значение  $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$  должно отвечать наиболее резкой модификации состояния конденсата<sup>3)</sup>. На рис. 3а выделена кривая, соответствующая этому значению.

При решении реальной задачи об определении угловой скорости необходимо знать зависимость

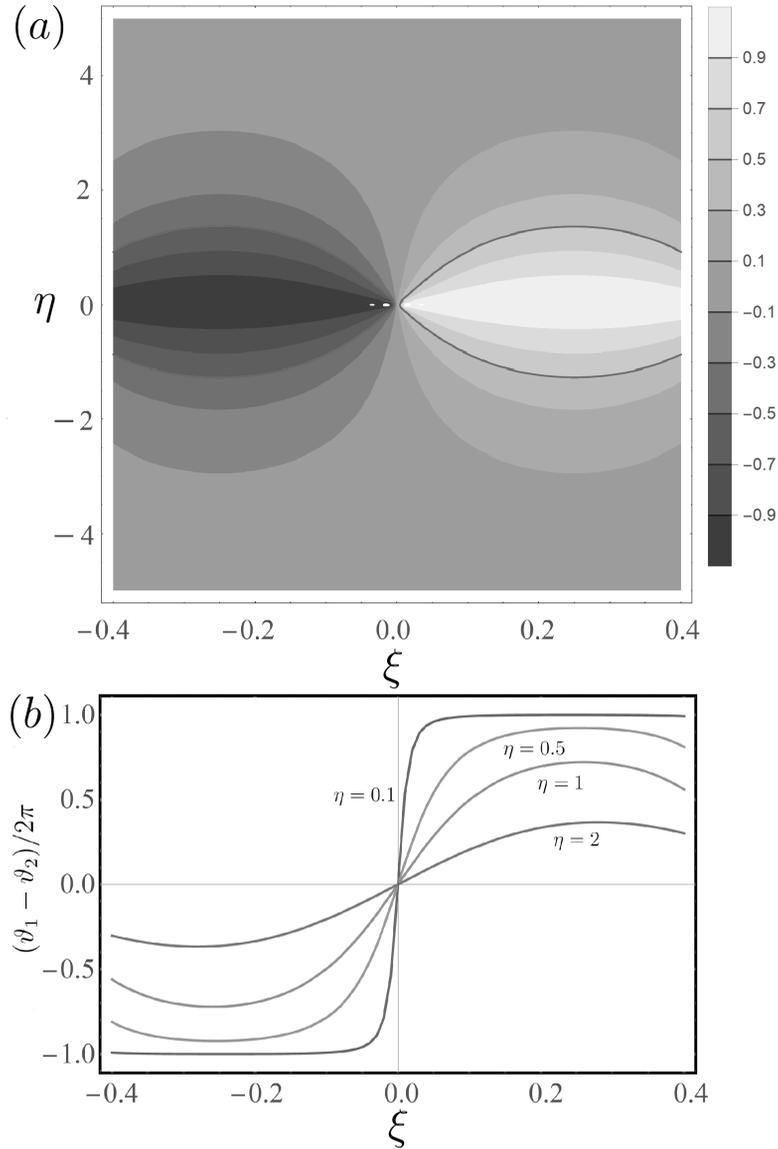
<sup>3)</sup> Заметим, что при симметрии между модами, т. е. в случае  $f_n = \sqrt{N!/(n!(N-n)!)}$  в выражении (1), модификация  $f_n \mapsto \exp(i\pi n)f_n$  переводит состояние конденсата в ортогональное.

от нее регистрируемой фазы при известном значении параметров потенциала. Эта зависимость приведена на рис. 3б. Видно, что при малых значениях  $\eta$  фаза мало чувствительна к изменению связанного с угловой скоростью безразмерного параметра  $\xi$ . Следовательно, существует некоторое оптимальное значение параметра  $\eta$ , обеспечивающее одновременно значительную величину геометрической фазы и ее чувствительность к угловой скорости. В частности, для рассматриваемого примера определения угловой скорости вращения Земли (см. Приложение) оптимальным для точности измерения оказывается значение  $\eta \simeq 1$ . Точность измерения вдвое меньшего значения угловой скорости ( $\xi \simeq 0.2$ ) при  $\eta = 1$  оказывается низкой, но снова возрастает при дальнейшем уменьшении  $\xi$ .

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена модель квантового гироскопа, основанного на использовании геометрической фазы атомарного бозе-конденсата. Измерение угловой скорости вращения осуществляется парой пространственных мод единого когерентного конденсата, имеющих вид кольцеобразных конфигураций, нарушенных дополнительными потенциалами — «дефектами». Последние обеспечивают чувствительность состояния конденсата к вращению системы отсчета всего устройства. Варьирование параметров «дефектов» приводит к возникновению геометрической фазы в каждой моде. Разность этих фаз оказывается зависящей от вращения и может быть обнаружена в интерференционном эксперименте. В основе отмеченной чувствительности состояния конденсата к вращению лежит прямой (нерелятивистский) аналог эффекта возникновения фазы Саньяка в оптических гироскопах. Получается, что процесс генерации геометрической фазы опосредует эффект изначального влияния вращения на состояние конденсата и процесс регистрации сдвига картины интерференции конденсата. Разлит формализм описания «дефекта» на основе трансфер-матриц. Показано, что существует оптимальный для измерения фазы диапазон параметров, характеризующих «дефект».

В работе использована модельная форма трансфер-матрицы дефекта. Более интересной с практической точки зрения может оказаться комбинация потенциального барьера и ямы. Такой «дефект» также обладает необходимым свойством — задает ориентацию кольца. Геометрическая



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) (а) Разность геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, в зависимости от безразмерной угловой скорости  $\xi$  и от характеристики потенциального дефекта  $\eta$  (в единицах  $2\pi$ ). Красная жирная линия соответствует уровню  $\pi$ . (б) Профили разности геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, в зависимости от безразмерной угловой скорости  $\xi$  (в единицах  $2\pi$ ) при различных значениях параметра потенциального дефекта  $\eta$ . Параметры задачи: радиус кольца  $R = 0.25$  см,  $m = m(^{37}\text{Rb})$

фаза может генерироваться при обходе контура в двумерном пространстве параметров «глубина ямы–высота барьера».

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект АААА-А21-121021800168-4) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН. Участие одного из авторов (И.Л.В.) поддержано Российским научным фондом (грант 20-12-00081).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Уравнение (12) для уровней энергии имеет две ветви решений:

$$\begin{aligned}
 2\pi\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_n^{(+)}} &= \arccos\left(\frac{\cos(2\pi\xi)}{\text{ch}(\eta)}\right) - \alpha + 2\pi n, \\
 2\pi\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_n^{(-)}} &= -\arccos\left(\frac{\cos(2\pi\xi)}{\text{ch}(\eta)}\right) - \alpha + 2\pi n.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Поскольку нет необходимости заботиться о нормировке волновой функции, можно положить  $\psi_- = 1$ , тогда

$$\psi_+(\alpha) = \frac{i \operatorname{sh}(\eta) \exp(i\alpha + 2\pi i \kappa_-)}{1 - \operatorname{ch}(\eta) \exp(i\alpha + 2\pi i \kappa_+)}. \quad (14)$$

Используя вспомогательное равенство  $\dot{\kappa}_{\pm} = \mp 1/2\pi$ , можно получить следующие соотношения для функций, входящих в выражение для геометрической фазы:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\alpha} | \Psi_{\alpha} \rangle &= 2\pi(1 + |\psi_+(\alpha)|^2) + \\ &+ \frac{i\bar{\psi}_+(\alpha)}{2\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} (\exp(-4\pi i \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}) - 1) - \\ &- \frac{i\psi_+(\alpha)}{2\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} (\exp(4\pi i \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}) - 1), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\alpha} | \dot{\Psi}_{\alpha} \rangle - \langle \dot{\Psi}_{\alpha} | \Psi_{\alpha} \rangle &= 2\pi i + 6\pi i |\psi_+(\alpha)|^2 - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} [\bar{\psi}_+(\alpha) (\exp(-4\pi i \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}) - 1) - \\ &- \psi_+(\alpha) (\exp(4\pi i \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}) - 1)]. \end{aligned}$$

Значение  $\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}$  определяется выбором ветви и номера решения (13). В их записи неявно предполагается, что подкоренное выражение принимает действительные значения. Для конденсата атомов  $^{37}\text{Rb}$  в кольце радиуса  $R = 0.25$  см, вращающегося с угловой скоростью  $\Omega$  порядка угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси, безразмерный параметр  $\xi$  оказывается равным 0.392. Если  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , то вышеуказанному требованию в диапазоне параметров  $-0.392 \leq \xi \leq 0.392$  удовлетворяет решение  $\varepsilon_1^{(+)}$ . Именно оно и было выбрано для вычисления геометрической фазы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Sagnac, C. R. Acad. Sci. **157**, 708 (1913); **157**, 1410 (1913); J. de Phys. **4**, 177 (1914).
2. T. L. Gustavson, P. Bouyer, and T. L. Kasevich, Phys. Rev. Lett. **78**, 2046 (1997).
3. A. Lenef T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **78**, 760 (1997).
4. D. S. Durfee, Y. K. Shaham, and M. A. Kasevich, Phys. Rev. Lett. **97**, 240801 (2006).
5. M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
6. Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004).
7. M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **392**, 45 (1984).
8. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, Письма в ЖЭТФ **113**, 212-217 (2021).
9. D. W. Hallwood, T. Ernt, and J. Brand, Phys. Rev. A **82**, 063623 (2010).
10. M. Cazalilla, J. Phys. B **37**, 1 (2004).
11. D. Hellweg, S. Dettmer, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, Appl. Phys. B **73**, 781 (2001).
12. S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
13. C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier, Phys. Rev. Lett. **111**, 205301 (2013).
14. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
15. L. L. Sanchez-Soto, J. J. Monzón, A. G. Barriuso, and J. F. Cari nena, Phys. Rep. **513**, 191 (2012).
16. D. Chruscinski and A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (2004).
17. T. S. Yakovleva, A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, Opt. Comm. **436**, 52 (2019).

# ВЛИЯНИЕ КАЧЕСТВА АНТИРЕЛАКСАЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ НА ХАРАКТЕР ЭФФЕКТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-ИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ В ГАЗОВЫХ ЯЧЕЙКАХ

*Г. В. Волошин\**, *Хуэй Мэн*, *А. С. Курапцев*, *И. М. Соколов\*\**

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 18 апреля 2022 г.,  
после переработки 3 мая 2022 г.  
Принята к публикации 4 мая 2022 г.

Проанализирована зависимость характера электромагнитно-индуцированной прозрачности в газовых ячейках без буферного газа от качества антирелаксационного покрытия стенок, т. е. от вероятности релаксации внутреннего состояния атома при столкновении с этим покрытием. Обнаружено, что в ряде практически важных случаев релаксация на стенках слабо влияет на контраст резонанса электромагнитно-индуцированной прозрачности, а при некоторых условиях приводит даже к усилению этого эффекта. Для невырожденного основного состояния атомов исследовано существенное различие двух схем реализации электромагнитно-индуцированной прозрачности — случаев стоксовского и антистоксовского рассеяния пробного излучения, а также двух типов отражения — зеркального (упругого) и диффузного, когда скорость атома после отражения не зависит от скорости до столкновения, а определяется температурой стенки. Особое внимание уделено особенностям спектров электромагнитно-индуцированной прозрачности при учете невырожденности возбужденного состояния атомов.

DOI: 10.31857/S0044451022090036  
EDN: EJRVSZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Атомная когерентность, наводимая в атомных ансамблях внешним когерентным электромагнитным излучением, может существенно модифицировать их оптические свойства. Соответствующая модификация приводит к целому ряду физических эффектов, таких как когерентное пленение населенностей, электромагнитно-индуцированная прозрачность, замедление и «остановка» света [1–4].

В основе этих эффектов лежат двух- или многофотонные резонансные процессы, спектральные ширины которых определяются медленной релаксацией когерентностей, наводимых на запрещенных или низкочастотных переходах в среде. Эти ширины существенно меньше естественных ширин возбужденных состояний, как в случае однофотонных процес-

сов, что и определяет большой потенциал практического применения соответствующих явлений в задачах квантовой метрологии, стандартизации частоты, квантовой информатики и т. п. При возбуждении нелинейных резонансов в газовых ячейках спектральные ширины определяются релаксацией когерентностей при столкновениях атомов со стенками ячеек и между собой. Одним из эффективных методов сужения линий в этом случае является использование ячеек без буферного газа, но со специальным антирелаксационным покрытием стенок.

В настоящей работе мы рассмотрим, как влияет качество антирелаксационного покрытия на эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП). К настоящему времени опубликовано большое число работ, в которых исследуются как свойства таких покрытий, так и возможности прецизионной спектроскопии атомарных газов, находящихся в соответствующих ячейках [4–45]. Однако, как показывают наши исследования, некоторые важные особенности, приводящие к качественным эффектам, остаются малоизученными.

\* E-mail: gavriilvsh@gmail.com

\*\* E-mail: ims@is12093.spb.edu

Недостаточно изучено влияние времени адсорбции атомов на покрытии. Даже для идеального покрытия, сохраняющего внутреннее состояние атома, в зависимости от длительности адсорбции возможен различный характер отражения — от идеально зеркального до диффузного. Если процесс отражения сопровождается адсорбцией атома в течение относительно продолжительного времени, то скорость отлетающего от поверхности атома перестает зависеть от начальной скорости и определяется температурой стенки. Происходит полная термализация при однократном отражении. Подобная ситуация характерна для парафиновых покрытий. Для некоторых материалов, например, для покрытий типа Octadecyltrichlorosilane (OTS), характерное время адсорбции существенно меньше, чем для парафинов [20, 21]. Это означает, что для них вероятность полной термализации будет заметно меньше. Отражения с малым изменением величины скорости будут более вероятны. При отсутствии адсорбции возможно и упругое отражение. В теории обычно ограничиваются одним из предельных случаев. В этой работе мы проведем сравнение этих двух случаев и покажем, как характер аккомодации влияет на спектральные свойства атомного газа.

При исследовании влияния покрытия на эффект ЭИП обычно также ограничиваются рассмотрением случая, когда ширины лазерных пучков много меньше характерных размеров газовых ячеек. Это так называемая квазиэрмиевская геометрия, при которой атом испытывает многократные отражения от стенок, прежде чем повторно попадает в лазерный луч [4, 13, 20, 21]. При большом числе столкновений до возвращения в луч заметная релаксация атомной поляризации и термализация происходят даже при высоком качестве покрытия [13] и малых временах адсорбции.

Для узких лучей, как правило, ограничиваются учетом столкновений только с боковой поверхностью, перпендикулярной волновым векторам полей. Для широких лучей (см., например, работу [46]) или при малых размерах ячеек важно учитывать столкновения с торцевыми поверхностями. К настоящему времени роль этих столкновений практически не исследована.

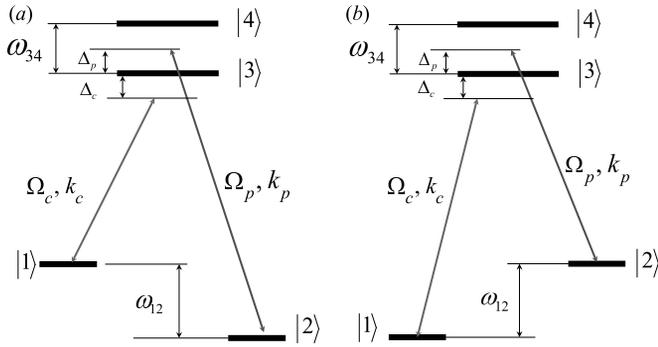
Еще одним существенным ограничением большинства работ по описанию ЭИП является рассмотрение модельной трехуровневой лямбда-схемы. В такой схеме при коллинеарном распространении управляющего и пробного излучения удается существенно подавить двухфотонный доплеровский сдвиг (см., например, работы [47, 48], а также [4]

и ссылки в них). Более того, в ряде случаев может наблюдаться дополнительное, так называемое доплеровское сужение двухфотонных резонансов, предсказанное в работах [49, 50] (см. также [51]). На этом основании обычно двухфотонным сдвигом пренебрегают. Мы покажем, что наличие таких сдвигов для невырожденного основного состояния может существенно модифицировать спектр ЭИП. Мы проанализируем, как качество покрытия влияет на эти спектры при стоксовском и антистоксовском характере рассеяния пробного излучения. Мы также покажем, что учет уже одного дополнительного возбужденного состояния движущихся атомов оказывается существенным при теоретическом описании эффекта ЭИП.

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОДХОДЫ

При описании эффекта ЭИП в газовой ячейке конечных размеров мы воспользуемся подходом, основанном на решении системы дифференциальных уравнений для одночастичной матрицы плотности с граничными условиями, как это делалось, например, в работах [20, 21]. При этом мы будем предполагать типичную ситуацию, когда пробное поле вызывает переходы только с одного из подуровней основного состояния. То же относится и к управляющему полю, оно вызывает переходы с другого подуровня. В случаях невырожденного основного состояния для ультрахолодных газов, а также вырожденного состояния для горячих газов, не важно, с каким из подуровней взаимодействует пробное, а с каким управляющее поле. Как будет видно далее, для горячих асамблей с невырожденным основным состоянием атомов существенно, какое из полей имеет более высокую частоту, т. е. происходит ли рассеяние пробного света по стоксовскому или антистоксовскому каналу. Поэтому мы рассмотрим оба случая (рис. 1).

Внешние поля, управляющее и пробное, предполагаются слабыми. Их частоты Раби много меньше скоростей спонтанного распада возбужденных состояний. При этом считается, что управляющее поле намного сильнее пробного. Спектральные ширины каждой компоненты предполагаются меньше естественной ширины атомного перехода. Концентрацию атомов считаем малой настолько, чтобы пренебречь коллективными эффектами, вызванными резонансным диполь-дипольным взаимодействием [52, 53], и использовать приближение оптически тонкой среды.



**Рис. 1.** Две схемы лазерной накачки, различающиеся соотношением частот пробного и управляющего полей: *a* — частота управляющего поля меньше, чем пробного, *b* — наоборот

В этом случае систему уравнений для медленных амплитуд одноатомной матрицы плотности в представлении Вигнера,  $\hat{\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ , в приближении вращающейся волны можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{11} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{11} &= -i \sum_{e=3}^4 (V_{ce} \rho_{1e} - V_{ce}^* \rho_{e1}) + \\
 &\quad + \gamma_{31} \rho_{33} + \gamma_{41} \rho_{44}, \\
 \dot{\rho}_{22} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{22} &= -i \sum_{e=3}^4 (V_{pe} \rho_{2e} - V_{pe}^* \rho_{e2}) + \\
 &\quad + \gamma_{32} \rho_{33} + \gamma_{42} \rho_{44}, \\
 \dot{\rho}_{33} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{33} &= iV_{c3} \rho_{13} - iV_{c3}^* \rho_{31} + \\
 &\quad + iV_{p3} \rho_{23} - iV_{p3}^* \rho_{32} - \gamma_3 \rho_{33}, \\
 \dot{\rho}_{12} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{12} &= i \sum_{e=3}^4 (V_{ce}^* \rho_{e2} - V_{pe} \rho_{1e}) + \\
 &\quad + [i(\Delta_p - \Delta_c + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - \gamma_{12}] \rho_{12}, \quad (1) \\
 \dot{\rho}_{1e} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{1e} &= iV_{ce}^* \rho_{e'e} - iV_{ce}^* \rho_{11} - \\
 &\quad - iV_{pe}^* \rho_{12} + iV_{ce}^* \rho_{ee} \\
 &\quad + [-i(\Delta_c - \omega_{e1} + \omega_{31} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}) - \gamma_e/2] \rho_{1e}, \\
 \dot{\rho}_{2e} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{2e} &= iV_{pe}^* \rho_{e'e} - iV_{ce}^* \rho_{21} - \\
 &\quad - iV_{pe}^* \rho_{22} + iV_{pe}^* \rho_{ee} + \\
 &\quad + [-i(\Delta_p - \omega_{e2} + \omega_{32} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}) - \gamma_e/2] \rho_{2e}, \\
 &\quad e, e' = 3, 4, \quad e' \neq e, \\
 \dot{\rho}_{34} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_{34} &= iV_{c3} \rho_{14} + iV_{p3} \rho_{24} \\
 &\quad - iV_{c4}^* \rho_{31} - iV_{p4}^* \rho_{32} + [i\omega_{43} - \gamma_{34}] \rho_{34}, \\
 \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} &= 1, \\
 \rho_{ij} &= \rho_{ji}^*.
 \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли столкновениями атомов между собой и предположили, что управляющее поле вызывает переходы только с подуровня |1>, а проб-

ное — только с подуровня |2>, а также использовали обозначения  $V_{ce} = \mathbf{d}_{e1} \cdot \mathbf{E}_c/2\hbar$ ,  $V_{pe} = \mathbf{d}_{e2} \cdot \mathbf{E}_p/2\hbar$ ;  $\mathbf{d}_{eg}$  — дипольные моменты переходов  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ;  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{34}$  — скорости распадов когерентностей соответственно  $\rho_{12}$  и  $\rho_{34}$ ,  $\mathbf{E}_c$  и  $\mathbf{E}_p$  — медленные амплитуды соответственно управляющего и пробного полей,  $\gamma_e = \gamma_{e1} + \gamma_{e2}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_c - \mathbf{k}_p$ ,  $\Delta_c = \omega_c - \omega_{31}$ ,  $\Delta_p = \omega_p - \omega_{32}$ . Для краткости здесь и далее мы опускаем аргументы у матрицы плотности. В системе (1) мы также пренебрегли вероятностями спонтанных переходов между близкорасположенными уровнями |1> и |2>, |3> и |4>.

В этой статье мы ограничимся одномерным случаем, когда оба поля распространяются вдоль оси  $z$ , а границы ячейки перпендикулярны этой оси. Наличие границ ячейки и характер столкновения с ними будем учитывать посредством соответствующих граничных условий.

Как отмечалось выше, скорость атома, покидающего поверхность, зависит от времени адсорбции атомов. При малых временах велика вероятность упругого (зеркального) отражения, при больших временах атомы вылетают, имея случайную скорость, распределенную по закону Максвелла. В этой работе мы ограничимся двумя предельными случаями.

В случае зеркального отражения, когда нормальная составляющая скорости к поверхности  $S$  меняет знак, а тангенциальная сохраняется, т. е. при условии  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости до и после столкновения, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 \rho_{ii}^0 - \rho_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{v}')_{r \in S} &= \alpha_1 (\rho_{ii}^0 - \rho_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{v})_{r \in S}), \\
 \rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v}')_{r \in S} &= \alpha_2 \rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v})_{r \in S}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\rho_{ii}^0$  — населенность уровня в отсутствие возбуждающих полей. Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $0 \leq \alpha_{1,2} \leq 1$ ) характеризуют степень сохранения соответственно населенностей и когерентностей в результате соударения атомов со стенкой. Далее для простоты будем считать эти параметры одинаковыми,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

Второй случай — полная термализация. При этом граничное условие предполагает равенство потоков, налетающих на поверхность и вылетающих с нее. Для частного случая плоского слоя толщиной  $L$  имеем

$$\begin{aligned}
 j_{ij}^-|_{z=0} &= \alpha j_{ij}^+|_{z=0} + (1 - \alpha) j_{ij}^0|_{z=0}, \\
 j_{ij}^+|_{z=L} &= \alpha j_{ij}^-|_{z=L} + (1 - \alpha) j_{ij}^0|_{z=L},
 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $j_{ij}^\pm(z) = \int_0^\infty \rho_{ij}^\pm(v, z)(\pm v) dv$ ,  $\rho_{ij}^\pm(v, z) = \rho_{ij}(\pm v, z)$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $j_{ij}^0$  — поток компоненты  $\rho_{ij}^0$  атомов, находящихся в равновесном состоянии.

В следующем разделе мы исследуем эффект ЭИП на основе численного решения системы (1) с граничными условиями (2) и (3). Характер ЭИП-резонанса будем анализировать на основе расчета величины наведенной пробным излучением атомной поляризации, определяемой интегральными по скоростям атомными когерентностями  $\rho_{32}$  и  $\rho_{42}$ . Эта поляризация, в свою очередь, задает восприимчивость ансамбля (см., например, работы [3, 50, 54]), а следовательно, определяет его коэффициент поглощения и показатель преломления.

Поскольку при неидеальном покрытии происходит изменение населенности уровня  $|2\rangle$ , существенно влияющей на распространение пробного излучения, абсолютная величина атомной восприимчивости изменяется даже при отсутствии двухфотонных резонансов. По этой причине при сравнении характера эффекта ЭИП для покрытий разного качества мы будем анализировать не абсолютные величины восприимчивостей, а контрасты резонансов. Так, контраст поглощения  $C(\Delta_p)$  при заданной частоте пробного поля в условиях ЭИП мы определяем как  $C(\Delta_p) = 1 - \beta(\Delta_p)/\beta_0$ . Здесь  $\beta(\Delta_p)$  — коэффициент поглощения на заданной частоте (отстройке), а  $\beta_0$  — коэффициент поглощения в отсутствие двухфотонного резонанса.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 показаны спектральные зависимости контрастов резонансов ЭИП для ячеек с диффузным характером отражения атомов от антирелаксационного покрытия для случая  $k_p < k_c$ . На рис. 2a проанализирована зависимость от качества покрытия для ячейки длиной  $L = \lambda = 4.5$  см, на рис. 2b — зависимость от размеров при фиксированном  $\alpha = 0.999$ . Остальные параметры выбраны следующим образом:  $V_{ce} = 10^5$  с<sup>-1</sup>;  $V_{pe} = 10^3$  с<sup>-1</sup>; температура ячейки  $T = 50$  °С; расщепление возбужденных состояний  $\omega_{34} = 300$  МГц; скорости спонтанного распада этих состояний  $\gamma_3 = \gamma_4 = 6$  МГц; скорость релаксации низкочастотной когерентности основного состояния  $\gamma_{21} = 10$  Гц. Скорость релаксации когерентности  $\rho_{43}$  выбрана равной полусумме скоростей спонтанной релаксации населенностей двух возбужденных уровней. Управляющее поле предполагается настроенным на точный резонанс с переходом  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  неподвижного атома:  $\Delta_c = 0$ .

Рисунок 2 демонстрирует несколько важных физических результатов. Во-первых, качество покрытия очень слабо влияет на контраст резонанса ЭИП

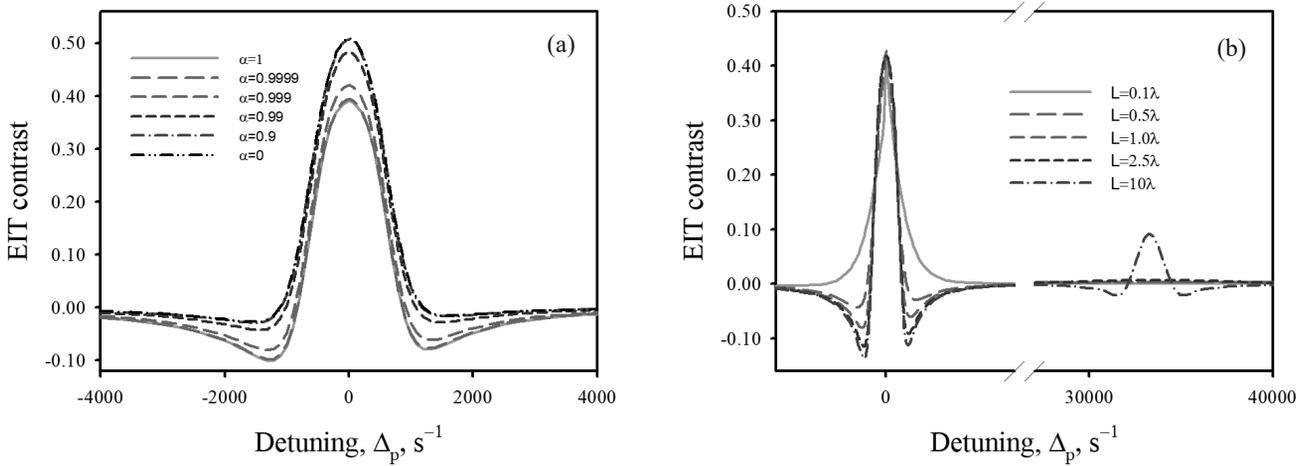
при рассмотренных условиях. Объяснить этот эффект можно влиянием двух конкурирующих между собой факторов. Коэффициент поглощения пробного поля определяется как величиной населенности рабочего уровня, так и величиной низкочастотной когерентности  $\rho_{21}$ . Один механизм усиливает поглощение за счет разрушения когерентности и ослабления двухфотонных резонансов, второй — ослабляет поглощение за счет ухода атомов с рабочего подуровня, в нашем случае это подуровень  $|2\rangle$ . Действительно, в объеме ячейки в силу отсутствия столкновений оптическая накачка сильным управляющим полем приводит к тому, что подавляющая часть атомов накапливается на уровне  $|2\rangle$ . Столкновение со стенками вызывает переходы на уровень  $|1\rangle$ . Уменьшение населенности уровня  $|2\rangle$  приводит к уменьшению коэффициента поглощения в отсутствие двухфотонного резонанса, т. е. величины  $\beta_0$ . Это обстоятельство увеличивает контраст.

Рисунок 2b демонстрирует еще один интересный эффект. При увеличении длины ячейки появляется дополнительный пик, сильно отстроенный в область положительных отстроек. При сравнительно малых размерах мы имеем широкий дополнительный резонанс с малой амплитудой. По мере увеличения длины его амплитуда растет. Появление этого пика связано с наличием второго возбужденного уровня атомов. В приближении трехуровневой лямбда-модели этот пик отсутствует. В атомном ансамбле есть группа атомов, движущихся со скоростями  $v_z \simeq -\omega_{34}/k$ . Для них из-за доплеровского сдвига управляющее поле оказывается резонансным переходу  $|1\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ , а условие двухфотонного резонанса выполняется, если управляющее поле отстроено на величину

$$\Delta_p = \frac{\omega_{34}(k_c - k_p)}{k} = \frac{\omega_{34}q}{k}.$$

После столкновения со стенкой начинаются переходные процессы установления равновесного внутреннего состояния атома, соответствующего новой величине и направлению его скорости. При малых размерах ячейки максимально возможное значение низкочастотной когерентности не достигается до следующего столкновения, поэтому дополнительный резонанс не успевает сформироваться. При увеличении размеров ячейки  $L$  время свободного пробега увеличивается, эффект усиливается.

Приведенный на рис. 2 результат получен для диффузного отражения. При зеркальном отражении ситуация иная. Скорость атомов меняется только по направлению. Это создает условия для усиле-



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Спектральные зависимости контрастов резонансов ЭИП для ячеек с диффузным характером отражения атомов от антирелаксационного покрытия для случая  $k_p < k_c$ : *a* — от качества покрытия для ячейки длиной  $L = \lambda = 4.5$  см; *b* — от размеров при фиксированном  $\alpha = 0.999$ . Расчет проведен для  $V_c = 10^5$   $c^{-1}$ ,  $V_p = 10^3$   $c^{-1}$ ,  $T = 50$  °С,  $\omega_{34} = 300$  МГц,  $\gamma_3 = \gamma_4 = 6$  МГц,  $\gamma_{21} = 10$  Гц,  $\Delta_c = 0$ .

ния механизма формирования дополнительных резонансов ЭИП, что хорошо демонстрирует рис. 3.

В случае хорошего покрытия и зеркального отражения, помимо одного пика, появляется серия дополнительных пиков. Похожий эффект наблюдался ранее для резонансов когерентного пленения населенностей [55]. Серия квазиэквидистантных пиков связана с модуляцией частот управляющего и пробного полей в системе отсчета, связанной с движущимся атомом. Частота модуляции определяется скоростью атома  $v_{at}$  и размером ячейки:  $\omega_{mod} = v_{at}\pi/L$ . Это модулированное поле можно разложить в ряд Фурье. Учитывая, что скорость атомов, обуславливающих эти резонансы, имеет величину порядка  $v_z \simeq -\omega_{34}/k$ , получаем, что частоты дополнительных резонансов могут быть описаны простым соотношением

$$\Delta_{pn} = \frac{\pi n}{kL} \omega_{34}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ухудшение качества покрытия ослабляет дополнительные пики в отличие от основного. Изменение длины ячейки влияет на частоту модуляции, поэтому при разных размерах они расположены на разных частотах (см. рис. 3*b*). Уменьшение длины увеличивает частоту модуляции, поэтому для случая  $L = 0.5\lambda$  в рассматриваемой области частот виден только один дополнительный резонанс. Для  $L = 0.1\lambda$  они наблюдаются при еще больших обстрояках, выходящих за пределы рисунка.

Результаты, показанные на рис. 2 и 3, соответствуют случаю, когда частота пробного излучения меньше частоты управляющего,  $k_p < k_c$ . В другом случае, когда  $k_p > k_c$ , ситуация изменяется существенно.

На рис. 4 показаны спектры резонансов ЭИП в широком интервале частот для двух типов отражения атомов от покрытия. Обращает на себя внимание заметное уменьшение абсолютной величины контраста по сравнению со случаем  $k_p < k_c$ . Для идеального покрытия при диффузном отражении контраст уменьшается более чем в двадцать раз. При зеркальном отражении ослабление меньше, но также хорошо заметно.

Помимо уменьшения абсолютной величины контраста в рассматриваемом случае наблюдается сложная зависимость амплитуды резонансов от качества покрытия. Увеличение вероятности релаксации на поверхности ячейки приводит к усилению наблюдаемого эффекта ЭИП. При этом увеличивается не только амплитуда основного резонанса (вблизи  $\Delta_p = 0$ ), которая оказывается максимальна при отсутствии антирелаксационного покрытия, но и растут амплитуды дополнительных, более слабых резонансов. Заметим, что, как и следовало ожидать, при  $k_p > k_c$  эти резонансы наблюдаются при отрицательных отстройках  $\Delta_p$ . Для идеального покрытия они практически не заметны.

Рисунок 5 позволяет объяснить наблюдаемые особенности эффекта ЭИП при  $k_p > k_c$ . На нем

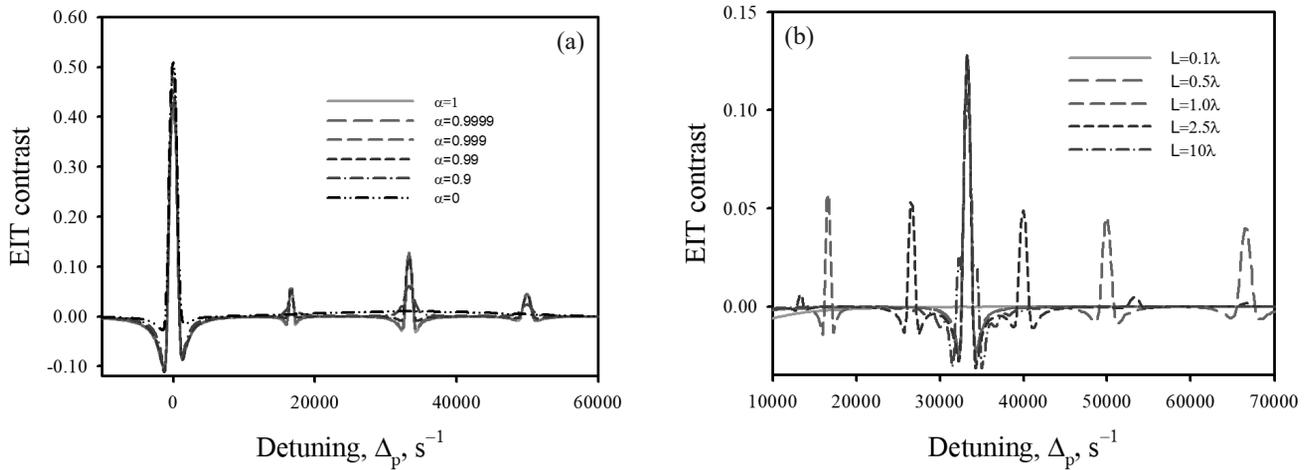


Рис. 3. (В цвете онлайн) Спектральные зависимости контрастов резонансов ЭИП для ячеек с зеркальным характером отражения атомов от антирелаксационного покрытия для случая  $k_p < k_c$ : а — от качества покрытия для ячейки длиной  $L = \lambda = 4.5$  см; б — от размеров при фиксированном  $\alpha = 0.999$ . Остальные параметры, как на рис. 2

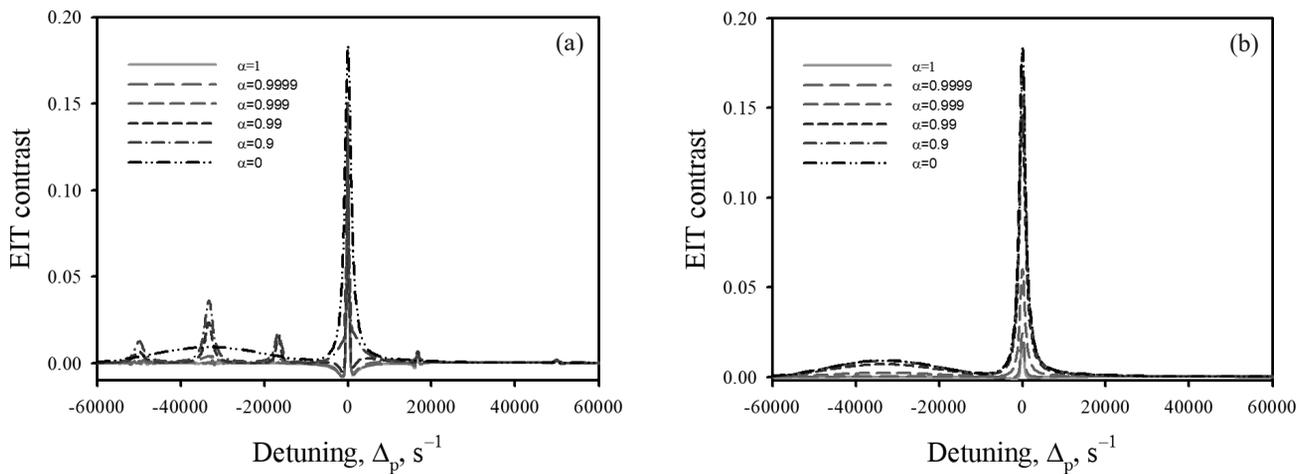
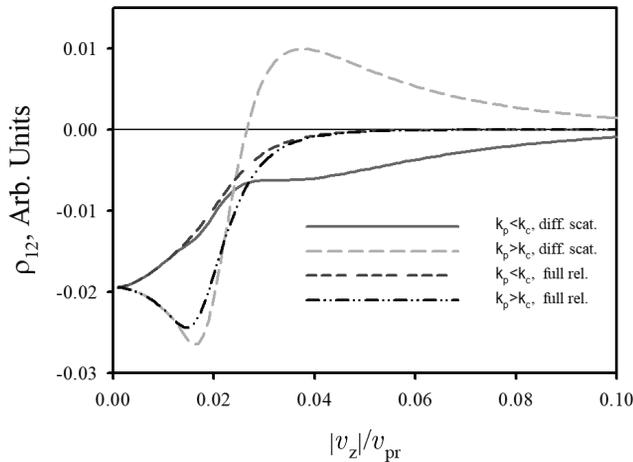


Рис. 4. (В цвете онлайн) Спектральные зависимости контрастов резонансов ЭИП для ячеек с зеркальным (а) и диффузным (б) характером отражения атомов от антирелаксационного покрытия для случая  $k_p > k_c$ . Остальные параметры, как на рис. 2

изображен парциальный вклад атомов,двигающихся с заданной по величине скоростью в низкочастотную когерентность. Расчет проведен для области посередине ячейки длиной  $L = \lambda = 4.5$  см. Две кривые соответствуют идеальному покрытию с диффузным типом отражения атомов, две — отсутствию покрытия, что соответствует полной релаксации на поверхности. В последнем случае характер отражения не важен. Чтобы упростить анализ, мы рассмотрели для простоты случай трехуровневой схемы, возбуж-

даемой резонансным излучением,  $\Delta_p = \Delta_c = 0$ . При этом когерентность вещественна, что позволяет легко сравнивать вклад разных атомов. Расчет проведен для  $V_c = 2 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>,  $V_p = 2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>,  $T = 50^\circ\text{C}$ ,  $\gamma_3 = \gamma_4 = 6$  МГц,  $\gamma_{21} = 10$  Гц. На рис. 5  $v_{pr}$  — наиболее вероятная скорость.

Отличительной особенностью кривой, соответствующей аномально слабому эффекту ЭИП, т.е. случаю диффузного отражения при  $k_p > k_c$  (см. рис. 5), является взаимная компенсация



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Парциальные вклады атомов, движущихся с разными скоростями в низкочастотную когерентность  $\rho_{12}$  для ячеек с идеальным покрытием ( $\alpha = 1$ ) и при его отсутствии ( $\alpha = 0$ ). Для идеального покрытия рассмотрен случай диффузного отражения атомов. Каждому случаю соответствует два возможных соотношения частот пробного и управляющего полей:  $k_p > k_c$  и  $k_p < k_c$ . Расчет проведен для ячейки длиной  $L = \lambda = 4.5$  см, остальные параметры следующие:  $\Delta_c = \Delta_p = 0$ ,  $V_c = 2 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ ,  $V_p = 2 \cdot 10^3$  с $^{-1}$ ,  $T = 50$  °С,  $\gamma_3 = \gamma_4 = 6$  МГц,  $\gamma_{21} = 10$  Гц

вкладов атомов, движущихся с разными скоростями. При рассмотренных параметрах суммарная по скоростям низкочастотная атомная поляризация близка к нулю. Для этого же характера отражения, но при  $k_p < k_c$  такой компенсации не происходит. Аналогичные, хотя и более слабые эффекты имеют место и для зеркального отражения. Чтобы не загромождать рисунок, соответствующие кривые мы не приводим.

В случае отсутствия покрытия или при его невысоком качестве релаксация на стенках приводит к ослаблению относительной роли быстро движущихся атомов. Они чаще сталкиваются с поверхностью, сильнее релаксируют, и за время свободного пролета у них с меньшей вероятностью успевают установиться равновесное внутреннее состояние. Это ослабление хорошо видно на рис. 5.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы проанализировали ряд особенностей явления ЭИП, имеющих место в ячейках без буферного газа, но с антирелаксационным покрытием стенок. Исследована зависимость характера ЭИП от качества покрытия, т.е. от вероятности релак-

сации внутреннего состояния, вызванного столкновением атомов с ним. Обнаружено, что в случае широких лазерных лучей, когда атом при движении не покидает область лазерного луча, т.е. при непрерывном взаимодействии с внешним излучением, релаксация на стенках слабо влияет на контраст ЭИП, а в ряде случаев приводит даже к усилению эффекта. Обнаружено и исследовано существенное различие двух схем реализации ЭИП — случаев стоксовского и антистоксовского рассеяния пробного излучения. Проанализирована зависимость эффекта ЭИП от типа отражения атомов от покрытия. Рассмотрены два предельных случая — зеркальное (упругое) отражение и диффузное, когда атом адсорбируется на поверхность на длительное время и его скорость после взаимодействия с покрытием определяется температурой последнего. Особое внимание уделено особенностям спектров ЭИП при учете невырожденности возбужденного состояния атомов, которая приводит к появлению дополнительных резонансов.

Результаты, обсуждаемые в данной работе, получены нами для упрощенной четырехуровневой системы в одномерной геометрии при использовании ряда приближений. Отказ от этих приближений определенным образом изменит количественные результаты, представленные в статье. Однако основные качественные эффекты, предсказанные и обсуждаемые в работе, такие как зависимость формы резонанса от соотношения частот пробного и управляющего полей, появление гребенки дополнительных импульсов при зеркальном отражении, различие формы спектров при разном характере аккомодации атомов на поверхности, по нашему мнению, сохранятся и для трехмерных ячеек при учете реальной структуры атомных состояний. Действительно, они обусловлены влиянием таких факторов, которые имеют место и для реальных атомарных газов. Это — движение атомов и изменение направления этого движения, вызванное столкновениями со стенками, наличие нескольких атомных возбужденных состояний, а также невырожденность основного и возбужденного состояний. По этой причине мы считаем, что предсказываемые в данной работе эффекты необходимо учитывать во всех потенциальных приложениях ЭИП, в которых используются газовые ячейки с антирелаксационным покрытием стенок.

**Финансирование.** Проведение исследований было поддержано грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Анализ

различия диффузного и зеркального отражений от покрытия на спектры ЭИП проведен в рамках выполнения Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2020-0024). Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (<http://www.spbstu.ru>).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Marangos, *J. Mod. Opt.* **45**, 471 (1998).
2. M. D. Lukin, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 457 (2003).
3. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633 (2005).
4. I. Novikova, R. L. Walsworth, and Y. Xiao, *Laser Photonics Rev.* **6**, 333 (2012).
5. D. Budker, V. Yashchuk, and M. Zolotarev, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5788 (1998).
6. D. Budker, L. Hollberg, D.F. Kimball, J. Kitching, S. Pustelny, and V. V. Yashchuk, *Phys. Rev. A* **71**, 012903" 1" 9 (2005).
7. M. T. Graf, D. F. Kimball, S. M. Rochester, K. Kerner, C. Wong, D. Budker, E. B. Alexandrov, M. V. Balabas, and V. V. Yashchuk, *Phys. Rev. A* **72**, 023401 (2005).
8. D. Budker, M. Romalis, *Nature Phys.* **3**, 227 (2007).
9. Е. Б. Александров, А. К. Вершовский, *УФН* **179**, 605 (2009).
10. M. V. Balabas, T. Karaulanov, M. P. Ledbetter, and D. Budker, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070801 (2010).
11. M. V. Balabas, K. Jensen, W. Wasilewski, H. Krauter, L. S. Madsen, J. H. Muller, T. Fernholz, and E. S. Polzik, *Opt. Express* **18**, 5825 (2010).
12. E. Breschi, G. Kazakov, C. Schori, G. Di Domenico, G. Miletì, A. Litvinov, and B. Matisov, *Phys. Rev. A* **82**, 063810 (2010).
13. K. Nasyrov, S. Gozzini, A. Lucchesini, C. Marinelli, S. Gateva, S. Cartaleva, and L. Marmugi, *Phys. Rev. A* **92**, 043803 (2015).
14. M. A. Hafiz, V. Maurice, R. Chutani1, N. Passilly, C. Gorecki, S. Guerande, E. de Clercq, and R. Boudot, *J. Appl. Phys.* **117**, 184901 (2015).
15. H. Chi, W. Quan, J. Zhang, L. Zhao, and J. Fang, *Appl. Surf. Sci.* **501**, 143897 (2020).
16. S. J. Seltzera and M. V. Romalis, *J. Appl. Phys.* **106**, 114905 (2009).
17. K. A. Barantsev, S. V. Bozhokin, A. S. Kuraptsev, A. N. Litvinov, and I. M. Sokolov, *JOSA B* **38**, 1613 (2021).
18. A. Krasteva, R. K. Nasyrov, N. Petrov, S. Gateva, S. Cartaleva, and K. A. Nasyrov, *Optoelectron. Instrum. Proc.* **54**, 307 (2018).
19. W. Li, M. Balabas, X. Peng, S. Pustelny, A. Wickembrock, H. Guo, and D. Budker, *J. Appl. Phys.* **121**, 063104 (2017).
20. G. Kazakov, B. Matisov, A. Litvinov, and I. Mazets, *J. Phys. B* **40**, 3851 (2007).
21. G. A. Kazakov, A. N. Litvinov, B. G. Matisov, V. I. Romanenko, L. P. Yatsenko, and A. V. Romanenko, *J. Phys. B* **44**, 235401 (2011).
22. M. Klein, M. Hohensee, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, *Phys. Rev. A* **83**, 013826 (2011).
23. A. Litvinov, G. Kazakov, B. Matisov, and I. Mazets, *J. Phys. B* **41**, 125401 (2008).
24. S. Knappe and H.G. Robinson, *New J. Phys.* **12**(6), 1 (2010).
25. E. N. Pestov, A. N. Besedina, D. E. Pestov, and V. V. Semenov, *Appl. Magn. Res.* **51**, 195 (2020).
26. S. J. Seltzer and M. V. Romalis, *J. Appl. Phys.* **106**, 114905 (2009).
27. S. N. Atutov, A. I. Plekhanov, V. A. Sorokin, S. N. Bagayev, M. N. Skvortsov, and A. V. Taichenachev, *Eur. Phys. J. D* **72**, 155 (2018).
28. S. N. Atutov, V. A. Sorokin, S. N. Bagayev, M. N. Skvortsov, and A. V. Taichenachev, *Eur. Phys. J. D* **73**, 11 (2019).
29. M. Bhattarai, V. Bharti, V. Natarajan, A. Sargsyan, and D. Sarkisyan, *Phys. Lett. A* **383**, 91 (2019).
30. S. Kobtsev, D. Radnatarov, S. Khripunov, I. Popkov, V. Andryushkov, and T. Steshchenko, *JOSA B* **36**, 2700 (2019).
31. A. Krasteva, E. Mariotti, Y. Dancheva, C. Marinelli, L. Marmugi, L. Stiaccini, S. Gozzini, S. Gateva, and S. Cartaleva, *J. Contemp. Phys.* **55**, 383 (2020).
32. H. Chi, W. Quan, L. Zhang, L. Zhao, and J. Fang, *Appl. Surf. Sci.* **501**, 143897 (2020).
33. M. Bhattarai, V. Bharti, and V. Natarajan, *Sci. Rep.* **8**, 7525 (2018).

34. S. Kobtsev, D. Radnatarov, S. Khripunov, I. Popkov, V. Andryushkov, and T. Steschenko, Proc. SPIE **10548**, 1054820 (2018).
35. Y. Ji, J. Shang, Q. Gan, and L. Wu, in *Proceedings of Electronic Components and Technology Conference*, Art. No. 7999974 (2017) 2116.
36. N. Sekiguchi and A. Hatakeyama, Appl. Phys. B **122**, 81 (2016).
37. O. Yu. Tretiak, J. W. Blanchard, D. Budker, P.K. Olshin, S. N. Smirnov, and M. V. Balabas, J. Chem. Phys. **144**, 094707 (2016).
38. M. Pellaton, C. Affolderbach, G. Mileti, R. Straessle, Y. Petremand, D. Briand, and N. F. De Rooij, *European Frequency and Time Forum 2014*, Art. No. 7331561, (2015) 554.
39. G. Zhang, L. Wei, M. Wang, and K. Zhao, J. Appl. Phys. **117**, 043106 (2015).
40. R. Straessle, M. Pellaton, C. Affolderbach, Y. Petremand, D. Briand, G. Mileti, and N.F. De Rooij, Appl. Phys. Lett. **105**, 043502 (2014).
41. Z. Chowdhuri, M. Fertl, M. Horras, K. Kirch, J. Krempel, B. Lauss, A. Mtchedlishvili, D. Rebreyend, S. Rocchia, P. Schmidt-Wellenburg, and G. Zsigmond, Appl. Phys. B **115**, (2014) 257.
42. R. Straessle, M. Pellaton, C. Affolderbach, Y. Petremand, D. Briand, G. Mileti, and N. F. De Rooij, J. Appl. Phys. **113**, 064501 (2013).
43. T. Bandi, C. Affolderbach, and G. Mileti, J. Appl. Phys. **111**, 124906 (2012).
44. M. Hasegawa, P. Dziuban, L. Nieradko, A. Douahi, C. Gorecki, V. Giordano, in *2008 IEEE/LEOS International Conference on Optical MEMS and Nanophotonics*, OPT MEMS, Art. No. 4607879 (2008) 162.
45. К. А. Насыров, Автометрия **52**, 85 (2016).
46. S. N. Nikolić, A. J. Krmpot, N. M. Lučić, B. V. Zlatković, M. Radonjić, and B. M. Jelenković, Phys. Scr. **T157**, 014019 (2013).
47. M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry, and M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **82**, 5229 (1999).
48. D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, and V. V. Yashchuk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1767 (1999).
49. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Письма в ЖЭТФ **72**, 173 (2000).
50. A. Javan, O. Kocharovskaya, H. Lee, and M. O. Scully, Phys. Rev. A **66**, 013805 (2002).
51. L. Ma, G. Raithel, J. Phys. Comm. **4**, 095020 (2020).
52. И. М. Соколов, Д. В. Куприянов, М. Д. Хэви, ЖЭТФ **139**, 288 (2011)
53. A. S. Kuraptsev and I. M. Sokolov, Phys. Rev. A **91**, 053822 (2015).
54. Н. А. Васильев, А. С. Трошин, ЖЭТФ **125**, 1276 (2004).
55. А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, Письма в ЖЭТФ **113**, 791 (2021).

# АСИММЕТРИЧНЫЙ ЭФФЕКТ БОРМАНА В ПАССИВНОМ РТ-СИММЕТРИЧНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

*В. А. Бушув*<sup>\*</sup>, *Б. И. Манцызов*<sup>\*\*</sup>

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2022 г.,  
после переработки 25 мая 2022 г.  
Принята к публикации 25 мая 2022 г.

Аналитическим спектральным методом решена граничная задача динамической брэгговской дифракции оптического излучения в геометрии Лауэ в одномерном пассивном РТ-симметричном фотонном кристалле (ФК). Показано, что эффект Бормана, или аномально высокая прозрачность кристалла при выполнении брэгговского условия, в пассивном РТ-симметричном ФК имеет ряд особенностей, которые объясняются наличием особой точки спонтанного распада РТ-симметричных компонент мод излучения. Так, при эффекте Бормана увеличивается амплитуда дифрагированной волны за счет роста поглощения среды. Это наблюдается в окрестности особой точки выше порогового значения параметра поглощения при положительном брэгговском угле падения излучения на кристалл. Имеет место также асимметрия эффекта Бормана в пассивном РТ-симметричном ФК: амплитуда дифрагированной волны меняется при смене знака угла Брэгга — увеличивается в случае отрицательного угла падения.

DOI: 10.31857/S0044451022090048

EDN: EKDNPV

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие концепция РТ-симметрии (parity-time symmetry), предложенная впервые в квантовой механике для неэрмитовых систем [1–3], вызывает большой интерес в оптике неконсервативных сред, в которых оптические свойства характеризуются РТ-симметрией [4–7]. Диэлектрическая проницаемость в таких средах с усилением и поглощением описывается РТ-симметричной комплексной функцией координаты  $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$ , где действительная часть  $\text{Re} \varepsilon(x)$  является четной функцией, а мнимая часть, описывающая усиление и поглощение среды, — нечетной функцией. Теоретически и экспериментально было показано, что в РТ-симметричных средах с усилением и поглощением могут распространяться стационарные волны с действительными волновыми векторами и постоянными амплитудами — РТ-симметричные моды [8–11]. Важной характерной особенностью РТ-симметричных систем является

наличие особой точки (ОТ) спонтанного распада РТ-симметричного состояния, когда при определенном значении параметра усиления и поглощения происходит переход к РТ-несимметричным модам, которые при распространении в среде испытывают усиление и поглощение [5, 12, 13]. При условии спектральной сингулярности [14, 15] наблюдался лазерный эффект и идеальное когерентное поглощение [16–18]. В периодических РТ-симметричных средах, или фотонных кристаллах (ФК), исследовались РТ-симметричные эффекты, связанные с трансляционной симметрией структуры. Прежде всего — это блоховские осцилляции [19, 20] и эффект однонаправленного усиленного брэгговского отражения, или однонаправленной невидимости, в особой точке спонтанного распада РТ-симметричной моды для пучков [21–25] и импульсов [26–29].

Особый интерес представляют пассивные РТ-симметричные системы [12, 30, 31], в которых диэлектрическая проницаемость является суперпозицией РТ-симметричной функции и постоянной мнимой величины, описывающей дополнительное поглощение. В таких средах существует только поглощение, а усиление отсутствует. Однако при этом сохраняется наиболее важная и интересная особенность РТ-симметрии — наличие ОТ. Отсюда следует

\* E-mail: vabushuev@yandex.ru

\*\* E-mail: bmantsyzov@gmail.com

и возможность наблюдения РТ-симметричных оптических эффектов, причем условия для эксперимента существенно упрощаются из-за отсутствия необходимости создания усиления в среде. Так, именно в пассивных РТ-симметричных средах наблюдались спонтанный распад РТ-симметричных мод [12], однонаправленное отражение [23] и асимметричная дифракция на решетке [32].

В традиционных пассивных периодических структурах, т.е. в обычных поглощающих кристаллах, хорошо известен эффект Бормана, или эффект аномально слабого поглощения рентгеновского излучения при динамической брэгговской дифракции в геометрии Лауэ (на прохождение) [33]. Суть эффекта заключается в том, что при падении излучения под углом Брэгга в совершенном кристалле распространяются две собственные моды — бормановская и антибормановская. Поле последней моды локализовано преимущественно в областях с большой электронной плотностью, и поэтому оно быстро поглощается, а поле другой моды локализовано в межатомных плоскостях с малой электронной плотностью и поглощается слабо. Оптический эффект Бормана [34] наблюдался и в обычных поглощающих ФК [35], тогда как в пассивных РТ-симметричных ФК он ещё не исследовался.

В настоящей работе теоретически рассмотрены оптические эффекты, возникающие при распространении излучения в одномерном пассивном РТ-симметричном ФК в условиях динамической брэгговской дифракции в геометрии Лауэ. С помощью спектрального метода показано, что для оптического пучка в пассивном РТ-симметричном ФК вблизи ОТ наблюдается асимметричный эффект Бормана. Обсуждаются основные особенности эффекта по сравнению со случаем обыкновенного поглощающего ФК. Показано, что из-за наличия ОТ в пассивном РТ-симметричном ФК в эффекте Бормана наблюдается увеличение пропускания в направлении дифрагированной волны за счет роста поглощения среды. При этом пропускание увеличивается при положительном угле падения и уменьшается в случае отрицательного угла. Подобное асимметричное усиление эффекта Бормана имеет место и в диспергирующей среде, несмотря на нарушение строгих условий ОТ и РТ-симметрии в случае отстройки частоты излучения от резонансного брэгговского значения или при изменении угла падения. Это происходит при выполнении описанного в работах [26–29] условия широкополосной ОТ, когда спектральная область селективного брэгговского отражения суще-

ственно уже, чем ширина линии неоднородного уширения в резонансной среде.

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА В ПАССИВНОМ КВАЗИ-РТ-СИММЕТРИЧНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

Рассмотрим взаимодействие  $s$ -поляризованного оптического пучка

$$E_{in}(\mathbf{r}, t) = A_{in}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (1)$$

с медленно изменяющейся гауссовской амплитудой (на поверхности кристалла  $z = 0$ )

$$A_{in}(x, 0) = A \exp[-(x \cos \theta / r_0)^2] \quad (2)$$

с пассивным, т.е. поглощающим, РТ-симметричным одномерным ФК при условии брэгговской дифракции в геометрии Лауэ (рис. 1). Здесь  $\theta$  — угол падения излучения на поверхность  $z = 0$ ,  $\mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0z})$  — центральный волновой вектор в вакууме,  $k_{0x} = k \sin \theta$ ,  $k_{0z} = k \cos \theta$ ,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega$  — частота пучка,  $c$  и  $\lambda$  — соответственно скорость света и длина волны в вакууме,  $r_0$  — поперечная ширина падающего пучка.

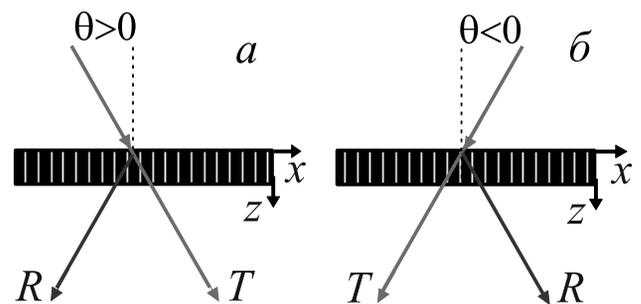


Рис. 1. Схематическое представление двух случаев падения излучения на ФК: (а)  $\theta > 0$  и (б)  $\theta < 0$ ;  $T$  и  $R$  — соответственно прямой проходящий и дифрагированный пучки

Диэлектрическая проницаемость структуры с учетом материальной частотной дисперсии задается следующим образом:

$$\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hx) + \varepsilon_{res}(x, \omega), \quad (3)$$

где  $h = 2\pi/d$  — модуль вектора обратной решетки  $\mathbf{h}$ , который направлен вдоль оси  $x$ ,  $d$  — период решетки. Первые два слагаемых  $\varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hx) > 1$  в выражении (3) описывают периодически модулированную четную функцию действительной части диэлектрической проницаемости, которая задается

прозрачной диэлектрической средой с пренебрежимо малой материальной дисперсией,  $\varepsilon' > 0$ . Третье комплексное слагаемое в (3) соответствует вкладу в диэлектрическую проницаемость резонансных двухуровневых осцилляторов:

$$\varepsilon_{res}(x, \omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega) [1 + \sin(hx)], \quad (4)$$

где величина  $\tilde{\varepsilon}$  для квантовых двухуровневых осцилляторов в приближении некогерентного взаимодействия определяется следующей комплексной функцией [36]:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega_0 - \omega'_0)}{(\omega - \omega'_0) + i/T_2} d(\omega - \omega'_0) = \tilde{\varepsilon}'(\omega) + i\tilde{\varepsilon}''(\omega). \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'(\omega) &\equiv \text{Re} \tilde{\varepsilon}(\omega) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega'_0 - \omega)g(\omega_0 - \omega'_0)}{(\omega'_0 - \omega)^2 + (\gamma_2/2)^2} d\omega'_0, \\ \tilde{\varepsilon}''(\omega) &\equiv \text{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma_2/2)g(\omega_0 - \omega'_0)}{(\omega'_0 - \omega)^2 + (\gamma_2/2)^2} d\omega'_0, \end{aligned} \quad (6)$$

$\beta = 4\pi(-w)N_0\mu^2/\hbar$ ,  $N_0$  — средняя концентрация резонансных атомов,  $\mu$  — величина дипольного момента перехода атома,  $w = -1$  — инверсия невозбужденных резонансных атомов,  $\omega - \omega'_0$  — отклонение частоты падающего излучения  $\omega$  от частоты резонансных атомов  $\omega'_0$ ,  $g(\omega_0 - \omega'_0)$  — функция неоднородного уширения спектральной линии с характерной шириной  $\gamma_2^*$ ,  $\omega_0$  — центральная частота резонанса,  $\gamma_2 = 2/T_2$  — ширина однородно уширенной спектральной линии,  $T_2$  — время поперечной однородной релаксации дипольного момента. Функция  $1 + \sin(hx)$  в (4) задает пространственно-периодическое распределение концентрации  $N_0[1 + \sin(hx)]$  невозбужденных резонансных атомов. Формулы (5) и (6) являются квантовым аналогом формулы Лоренца-Лоренца для классического резонансного диполя. С учетом (4) формулу (3) перепишем в виде

$$\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hx) + \tilde{\varepsilon}(\omega) [1 + \sin(hx)]. \quad (7)$$

Мнимая часть функции  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$  в (4) и (7) задает величину поглощения излучения в среде. Условия  $\tilde{\varepsilon}''(\omega) > 0$  и  $1 + \sin(hx) > 0$  в (7) означают, что среда является пассивной, т. е. только поглощающей, усиление в среде отсутствует. С другой стороны, диэлектрическую проницаемость (7) можно записать

в виде суперпозиции пространственно-однородной функции

$$\tilde{\varepsilon}_0(\omega) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}(\omega)$$

и двух периодических функций, которые являются квази-РТ-симметричной частью функции  $\varepsilon(x, \omega)$  (3) в случае неоднородно уширенной резонансной спектральной линии [26, 27]:

$$\varepsilon(x, \omega) = \tilde{\varepsilon}_0(\omega) + \varepsilon' \cos(hx) + \tilde{\varepsilon}(\omega) \sin(hx), \quad (8)$$

или, иначе, —

$$\varepsilon(x, \omega) = \tilde{\varepsilon}_0(\omega) + \varepsilon_1(\omega)e^{-ihx} + \varepsilon_{-1}(\omega)e^{ihx},$$

где

$$\varepsilon_1(\omega) = \frac{1}{2} [\varepsilon' + i\tilde{\varepsilon}(\omega)], \quad \varepsilon_{-1}(\omega) = \frac{1}{2} [\varepsilon' - i\tilde{\varepsilon}(\omega)] \quad (9)$$

— коэффициенты Фурье.

Величина поля в пучке

$$E(\mathbf{r}, t) = E(x, z) \exp(-i\omega t)$$

в диспергирующей среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta E(x, z) + k^2 \varepsilon(x, \omega) E(x, z) = 0, \quad (10)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  — оператор Лапласа.

В периодической среде вблизи условия Брэгга  $2k \sin \theta_B = sh$ , где  $\theta_B$  — угол Брэгга, имеет место двухволновое приближение брэгговской дифракции [34]. Тогда поле в среде может быть представлено в виде суммы двух сильно связанных волн — прямой проходящей,  $E_0(x, z)$ , и дифракционно отраженной,  $E_h(x, z)$ , волн:

$$E(x, z) = E_0(x, z) + E_h(x, z), \quad (11)$$

где

$$E_g(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_g(K) \exp[i(q_{0x} - sg)x + iq_{0z}z] dK. \quad (12)$$

Здесь  $g = 0, h; s = 1$ , если  $\theta > 0$ , и  $s = -1$ , если  $\theta < 0$  (рис. 1),  $K = k_x - k_{0x}$ ,  $A_0(K)$  и  $A_h(K)$  — комплексные амплитуды спектральных компонент прямой проходящей и дифрагированной волн соответственно. Благодаря сохранению тангенциальных компонент волновых векторов на границе  $z = 0$ ,  $x$ -проекция волновых векторов прямых проходящих волн в среде запишется в виде  $q_{0x}(K) = k_x = k_{0x} + K$ .

Из требования существования нетривиальных решений для полей (11), после их подстановки в уравнение (10), получим следующие дисперсионные уравнения для  $z$ -проекции волновых векторов прямой и дифрагированной волн двух собственных мод, так называемых бормановской,  $q_{0z}^{(1)}$ , и антибормановской,  $q_{0z}^{(2)}$ , мод в пассивном квази-РТ-симметричном ФК:

$$q_{0z}^{(1,2)} = k[\tilde{\varepsilon}_0 - (q_{0x}/k)^2 + \alpha_s \mp (\alpha_s^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^{1/2}]^{1/2}, \quad (13)$$

где параметр

$$\alpha_s = \frac{(sq_{0x} - h/2)h}{k^2} \quad (14)$$

определяет степень отклонения от точного условия Брэгга  $q_{0x} = sh/2$ . Из (13) и (9) следует, что в случае точного резонанса  $\omega = \omega_0$  и брэгговского условия  $\alpha_s = 0$  величина

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^{1/2} = \frac{1}{2} (\varepsilon'^2 - \tilde{\varepsilon}'^2)^{1/2}$$

определяет точку бифуркации  $\tilde{\varepsilon}'' = \varepsilon'$  мнимой части (13) (см. ниже рис. 4a), или ОТ нарушения РТ-симметрии в пассивных РТ-симметричных ФК.

Из условий непрерывности  $x$ -проекции векторов электрического и магнитного полей на границе  $z = 0$  несложно при условии слабого френелевского отражения получить амплитуды полей прямой и дифрагированной волн бормановской ( $j = 1$ ) и антибормановской ( $j = 2$ ) мод:

$$\begin{aligned} A_{0j}(K) &= \mp \frac{r_{2,1}}{r_1 - r_2} A_{in}(K), \\ A_{hj}(K) &= r_j A_{0j}(K). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$A_{in}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{in}(x, 0) \exp(-iKx) dx$$

— преобразование Фурье амплитуды падающего пучка  $A_{in}(x, 0)$  (2),

$$r_j = \frac{\alpha_s \mp (\alpha_s^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^{1/2}}{\varepsilon_{-s}}$$

— парциальные амплитудные коэффициенты дифракционного отражения волн.

Из (15) несложно получить выражения для амплитуд полей  $A_{gj}$  в зависимости от знака  $s$  угла падения  $\theta$  на границу  $z = 0$ . Амплитуды дифрагированных волн запишутся в виде

$$A_{h2}(K) = -A_{h1}(K) = \frac{\varepsilon_s}{2(\alpha_s^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^{1/2}} A_{in}(K). \quad (16)$$

Полное поле пучка в каждой точке ФК в любой момент времени задается следующим выражением:

$$E(x, z, t) = [A_0(x, z) + A_h(x, z)e^{-ishx}]e^{ik_0x - i\omega t}, \quad (17)$$

где

$$A_g(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (A_{g1}e^{iq_{0z}^{(1)}z} + A_{g2}e^{iq_{0z}^{(2)}z})e^{iKx} dK, \quad (18)$$

$g = 0, h$ , а амплитуды  $A_{gj}$  определяются из формул (15).

Из выражений (17) и (18) с учетом (15) несложно получить выражения для спектров прямого пропускания и дифракционного отражения на выходной границе  $z = L$  ФК для падающих монохроматических пучков, т. е. модулей коэффициентов прохождения

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \left| \frac{A_0(L, \omega)}{A_{in}} \right| = \\ &= \left| \frac{A_{01}(\omega)e^{iq_{0z}^{(1)}L} + A_{02}(\omega)e^{iq_{0z}^{(2)}L}}{A_{in}} \right| \end{aligned} \quad (19)$$

и дифракционного отражения

$$\begin{aligned} R^\pm(\omega) &= \left| \frac{A_h^\pm(L, \omega)}{A_{in}} \right| = \\ &= \left| \frac{A_{h1}^\pm(\omega)e^{iq_{0z}^{(1)}L} + A_{h2}^\pm(\omega)e^{iq_{0z}^{(2)}L}}{A_{in}} \right|. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь верхние индексы « $\pm$ » соответствуют положительному и отрицательному знакам угла падения  $\theta$  соответственно. Следует отметить, что величина коэффициента прохождения (19) не зависит от знака угла падения:  $T(\omega) \equiv T^+(\omega) = T^-(\omega)$ .

### 3. ЭФФЕКТ БОРМАНА В ПАССИВНОМ РТ-СИММЕТРИЧНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

Эффект Бормана есть аномально слабое поглощение излучения вблизи точного выполнения брэгговского условия при динамической брэгговской дифракции в геометрии Лауэ [37]. В традиционном поглощающем ФК, где пространственно-неоднородные распределения действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости описываются одинаковыми функциями, например,  $\cos(hx)$ :

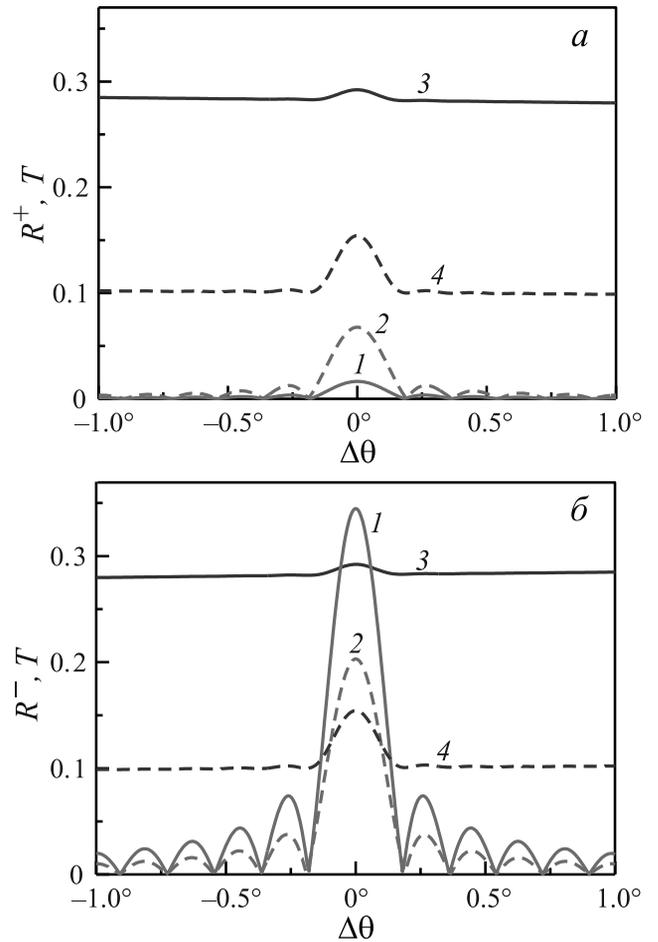
$$\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hx) + \tilde{\varepsilon}(\omega)[1 + \cos(hx)], \quad (21)$$

эффект Бормана объясняется слабым поглощением бормановской моды, поле которой локализуется

преимущественно в областях с малым поглощением. В этом случае проходящее излучение уменьшается с увеличением поглощения, а также наблюдается симметрия эффекта Бормана при смене знака угла падения  $\theta$  [37].

Рассмотрим эффект Бормана в пассивном РТ-симметричном ФК. Покажем, что, в отличие от традиционного поглощающего ФК, в пассивной РТ-симметричной структуре, во-первых, наблюдается асимметрия эффекта Бормана при смене знака угла падения и, во-вторых, амплитуда дифрагированного поля растет при увеличении резонансного поглощения среды в случае положительного угла падения.

В качестве характеристики величины поглощения в среде введем такой параметр, как  $\sigma = \tilde{\varepsilon}''(\omega_0)/\varepsilon'$ , т.е. отношение максимума мнимой части резонансной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$  в (8) к величине  $\varepsilon'$ , которая характеризует глубину периодической модуляции действительной части  $\varepsilon(x, \omega)$ . Тогда условие ОТ запишется как  $\sigma = 1$ . На рис. 2 представлены графики зависимостей коэффициентов дифракционного отражения  $R^\pm$  (20) и прохождения  $T$  (19) в центре пучка от отстройки  $\Delta\theta = \theta - \theta_B$  угла падения от точного брэгговского угла при различных знаках угла  $\theta$  и значениях параметра поглощения  $\sigma$ . Как видно из рис. 2а, при положительном угле  $\theta > 0$  максимумы полей прямой и дифрагированной волн,  $T$  и  $R^+$ , соответствуют точному выполнению условия Брэгга  $\Delta\theta = 0$ , а коэффициент дифракционного отражения  $R^+$  при  $\sigma = 1.1$  (кривая 1) меньше величины  $R^+$  при  $\sigma = 2.0$  (кривая 2). Таким образом, в эффекте Бормана в пассивном РТ-симметричном ФК при  $\theta > 0$  наблюдается увеличение амплитуды поля дифрагированной волны при увеличении параметра поглощения среды  $\sigma$ . Ниже будет показано, что эта закономерность появляется в окрестности ОТ при  $\sigma \geq 1$ . Кроме того, графики на рис. 2 демонстрируют асимметрию эффекта Бормана по отношению к смене знака угла падения. Смена знака угла ( $\theta > 0$  на  $\theta < 0$ ) приводит к увеличению дифракционного отражения,  $R^- > R^+$ , что четко видно из сравнения кривых 1 и 2 для  $R^-$  на рис. 2б с одноименными кривыми для  $R^+$  на рис. 2а. Кроме того, величина  $R^-$  уменьшается с ростом параметра поглощения  $\sigma$  (см. кривые 1 и 2 на рис. 2б), подобно случаю традиционного поглощающего ФК. Из рис. 2 также видно, что модуль амплитуды проходящего поля  $T$  не зависит от знака угла падения и уменьшается с увеличением параметра поглощения  $\sigma$  (кривые 3 и 4).

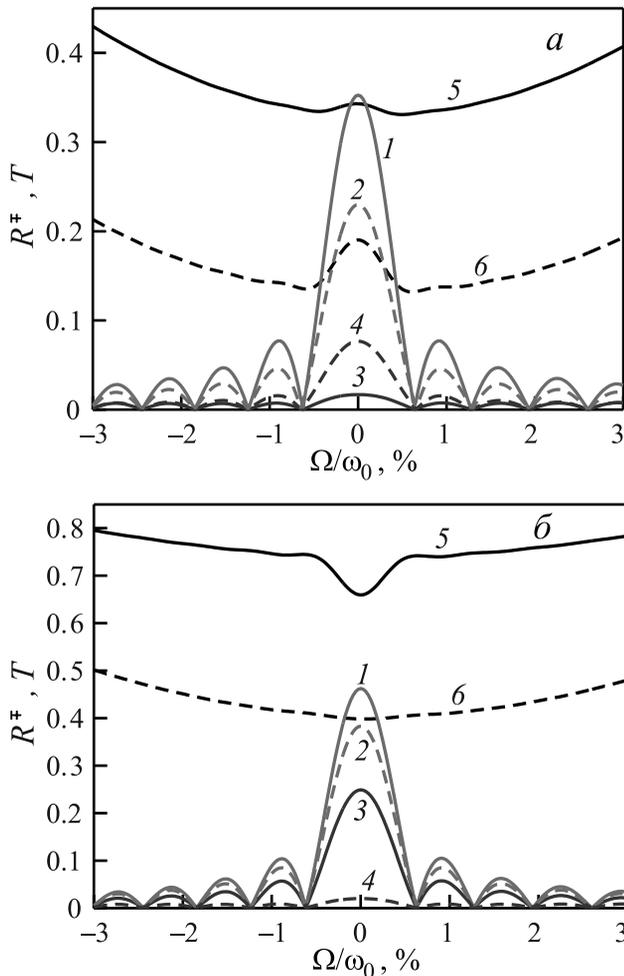


**Рис. 2.** а) Угловые зависимости при  $\theta > 0$  коэффициентов дифракционного отражения  $R^+$  при  $\sigma = 1.1$  (кривая 1) и  $\sigma = 2.0$  (кривая 2) и прохождения  $T$  при  $\sigma = 1.1$  (кривая 3) и  $\sigma = 2.0$  (кривая 4) от отстройки  $\Delta\theta = \theta - \theta_B$  угла падения от брэгговского значения. б) Зависимости  $R^-(\Delta\theta)$  (кривые 1 и 2) и  $T(\Delta\theta)$  (кривые 3 и 4) при  $\theta < 0$ . Параметры поглощения:  $\sigma = 1.1$  (кривые 1 и 3) и  $\sigma = 2.0$  (кривые 2 и 4). Толщина ФК  $L = 0.26$  мм,  $\lambda = 0.8$  мкм,  $\omega = \omega_0$ ,  $d = 0.8$  мкм,  $\theta_B = 30^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 1.3$ ,  $\varepsilon' = 0.001$ ,  $r_0 = 200$  мкм

Расчеты пространственного распределения амплитуд полей в ФК (18) при используемых ниже параметрах излучения и фотонного кристалла показывают, что для анализа и выявления основных особенностей распространения и дифракции пучка можно ограничиться рассмотрением плосковолнового случая при поперечном размере падающего пучка  $r_0 \geq (2 \div 3)L \sin \theta_B$ .

Известно [38], что в случае значительной частотной дисперсии, условие РТ-симметрии нарушается при отстройке  $\Omega = \omega - \omega_0$  частоты излучения  $\omega$  от точного значения резонансной частоты  $\omega_0$ . Поэтому важно ответить на вопрос: сохра-

нятся ли особенности эффекта Бормана в пассивной РТ-симметричной среде, описанные выше, в частотных спектрах отражения  $R^\mp(\Omega)$  (20) и прохождения  $T(\Omega)$  (19)? Из рис. 3 видно, что основные закономерности эффекта Бормана сохраняются при выполнении условия широкополосной ОТ [26, 29], когда ширина брэгговской кривой отражения  $\Delta\Omega$  существенно меньше ширины линии неоднородного уширения:  $\Delta\Omega/\gamma_2^* \ll 1$ .



**Рис. 3.** а) Спектры отражения  $R^-(\Omega)$  при  $\sigma > 1$ :  $\sigma = 1.1$  и 2.0 (кривые 1 и 2),  $R^+(\Omega)$  при  $\sigma = 1.1$  и 2.0 (кривые 3 и 4), и прохождения  $T(\Omega)$  при  $\sigma = 1.1$  и  $\sigma = 2.0$  (кривые 5 и б) при различных знаках угла  $\theta_B$ . б) Спектры отражения  $R^-(\Omega)$  при  $\sigma < 1$ :  $\sigma = 0.3$  и 0.9 (кривые 1 и 2),  $R^+(\Omega)$  при  $\sigma = 0.3$  и 0.9 (кривые 3 и 4), и прохождения  $T(\Omega)$  при  $\sigma = 0.3$  и 0.9 (кривые 5 и б) при различных знаках угла  $\theta_B$ . Расчеты выполнены в условиях широкополосной ОТ:  $\gamma_2/\omega_0 = 0.005$ ,  $\gamma_2^*/\omega_0 = 0.1 \gg \Delta\Omega/\omega_0$ . Форма линии  $g(\omega_0 - \omega'_0)$  — гауссова. Остальные параметры такие же, как в подписи к рис. 2

Действительно, выше ОТ спонтанного распада РТ-симметричных мод,  $\sigma > 1$ , рис. 3а, наблюдается асимметрия спектра отражения  $R^\mp(\Omega)$  при смене знака угла падения:  $R^-(\Omega) > R^+(\Omega)$  — кривые 1, 2 для  $R^-(\Omega)$  и 3, 4 для  $R^+(\Omega)$ . Также в случае  $\theta > 0$  наблюдается увеличение коэффициента дифракционного отражения при усилении поглощения  $\sigma$ :  $R^+(\sigma = 1.1) < R^+(\sigma = 2)$  (кривые 3 и 4). В области существования РТ-симметричных мод, т.е. ниже ОТ при  $\sigma < 1$ , рис. 3б, величины  $R^\mp(\Omega)$  всегда, т.е. при любом знаке угла  $\theta$ , уменьшаются с увеличением поглощения  $\sigma$  (кривые 1, 2 и 3, 4). Независимо от знака угла падения коэффициенты прохождения  $T(\Omega)$  уменьшаются при увеличении поглощения  $\sigma$  в обоих случаях — как выше (рис. 3а), так и ниже (рис. 3б) ОТ (кривые 5 и б). Особенность хода кривой 5 на рис. 3б — наличие минимума при точном выполнении условия Брэгга  $\Omega = 0$  — связана с маятниковым эффектом [39], т.е. периодической перекачкой энергии прямых волн бормановской и антибормановской мод в дифрагированные волны и обратно по мере распространения излучения вдоль оси  $z$ . Маятниковый эффект существует ниже ОТ при  $\sigma < 1$  из-за ортогональности бормановской и антибормановской мод,  $\text{Re } q_{0z}^{(1)} \neq \text{Re } q_{0z}^{(2)}$  (13), и отсутствует выше ОТ при  $\sigma > 1$ .

#### 4. УСИЛЕНИЕ БРЭГГОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ ЗА СЧЕТ УВЕЛИЧЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В ПАССИВНОМ РТ-СИММЕТРИЧНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

Для наглядного объяснения полученных выше закономерностей в эффекте Бормана в пассивной РТ-симметричной среде — асимметрии дифракционного отражения при смене знака угла падения и роста амплитуды дифрагированного поля при увеличении параметра поглощения среды — рассмотрим простой частный случай. Пусть в среде точно выполняются условие Брэгга  $\alpha_s = 0$  и условие резонанса  $\omega = \omega_0$ , т.е.  $\tilde{\epsilon}'(\omega_0) = 0$  (см. (6)). Коэффициенты поглощения бормановской и антибормановской мод определяются мнимыми частями констант распространения  $\text{Im } q_{0z}^{(1,2)}$  (13). Тогда из (13) при  $\sigma < 1$  получим, что

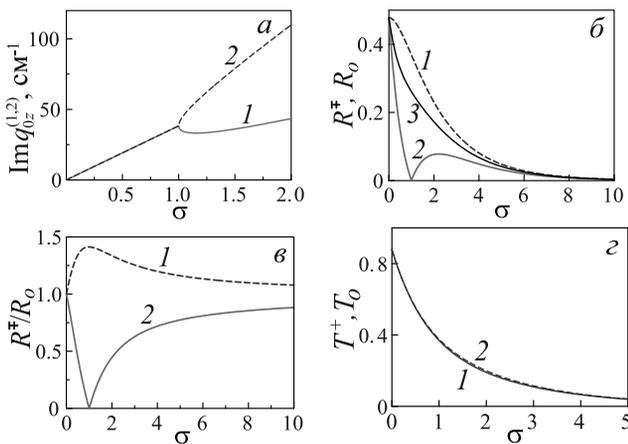
$$\text{Im } q_{0z}^{(1,2)} = \frac{k}{2\gamma_0} \epsilon' \sigma, \tag{22a}$$

а при  $\sigma \geq 1$  —

$$\text{Im } q_{0z}^{(1,2)} = \frac{k}{2\gamma_0} \epsilon' \left[ \sigma \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 1} \right], \tag{22b}$$

где  $\gamma_0^2 = \epsilon_0 - (q_{0x}/k)^2$ . Из графиков, построенных на основе этих формул на рис. 4а, видно, что в слу-

чае относительно слабого поглощения,  $\sigma < 1$ , величина  $\text{Im} q_{0z}^{(1,2)}(\sigma)$  и, следовательно, поглощение среды линейно возрастают с увеличением  $\sigma$ . Проявление этого роста поглощения наблюдается также и в уменьшении коэффициентов отражения  $R^\mp(\Omega)$  на графиках рис. 3б (кривые 1, 2 и 3, 4). В особой точке  $\sigma = 1$  происходит распад РТ-симметричной части решения и бифуркация кривой  $\text{Im} q_{0z}^{(1,2)}(\sigma)$  (рис. 4а). При  $\sigma > 1$  бормановская мода поглощается слабее (кривая 1), чем антибормановская (кривая 2). Более того, в некотором интервале значений  $\sigma$  выше ОТ на кривой 1 для бормановской моды наблюдается минимум. Качественно различное поглощение бормановской и антибормановской мод совпадает с эффектом Бормана в обычном поглощающем ФК [34, 35] (см. рис. 4б, кривая 3).



**Рис. 4.** а) Графики зависимостей  $\text{Im} q_{0z}^{(1,2)}(\sigma)$  для бормановской (кривая 1) и антибормановской (кривая 2) мод. б) Зависимости коэффициентов дифракционного отражения при различных знаках угла падения излучения для пассивного РТ-симметричного ФК  $R^\mp(\sigma)$  (кривые 1 и 2) и для традиционного ФК  $R_o(\sigma)$  (кривая 3) от параметра поглощения  $\sigma$ . в) Зависимости отношений коэффициентов отражения  $R^-/R_o$  (кривая 1) и  $R^+/R_o$  (кривая 2) от  $\sigma$ . г) Зависимости коэффициентов прохождения для пассивного РТ-симметричного ФК  $T^+(\sigma) = T^-(\sigma)$  (кривая 1), а также для традиционного ФК  $T_o(\sigma)$  (штриховая кривая 2). Толщина ФК  $L = L_{EP} = 0.26$  мм, остальные параметры такие же, как в подписи к рис. 2

Однако основной особенностью брэгговской дифракции в геометрии Лауэ в РТ-симметричном ФК является асимметрия отклика среды при смене знака угла падения излучения на структуру [26, 27, 29]. Это приводит не только к асимметрии дифракционного отражения  $R^+ \neq R^-$ , но и к увеличению коэффициента отражения  $R^+(\sigma)$  при росте поглощения. Изменение амплитуд дифрагированных волн  $A_{h1,2}$  при смене знака брэгговского угла  $\theta_B$  происходит

из-за изменения величины коэффициентов Фурье  $\varepsilon_s$  в (16) при  $s = +1 \leftrightarrow -1$ . В случае пассивного РТ-симметричного ФК зависимости амплитуд дифрагированных волн  $R^+(\sigma)$  и  $R^-(\sigma)$  от параметра поглощения  $\sigma$  различаются. Действительно, из (16) следует, что при  $\theta_B > 0$

$$A_{h1}^+ = -A_{h2}^+ = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}, \quad (23)$$

а в случае  $\theta_B < 0$

$$A_{h1}^- = -A_{h2}^- = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}. \quad (24)$$

Здесь  $A_{in} = 1$ .

Как видно из (23), в особой точке спонтанного распада РТ-симметричной части решения, т. е. при  $\sigma = 1$ , модули амплитуд  $A_{h1,2}^+$  равны нулю и далее возрастают при увеличении поглощения  $\sigma > 1$ , т. е. выше порога ОТ. Поэтому можно ожидать, что и коэффициент дифракционного отражения  $R^+$  будет возрастать при увеличении поглощения  $\sigma$  в окрестности ОТ, что соответствует рис. 2а (кривые 1 и 2) и рис. 3а (кривые 3 и 4). Амплитуды  $A_{h1,2}^-$  (24) стремятся к бесконечности в ОТ, но с различными знаками, а затем монотонно убывают. Из соотношений (17) и (18) прямое и дифрагированное поля  $E_0(z, \sigma)$  и  $E_h(z, \sigma)$  в (11) при  $\theta_B > 0$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} E_0(z, \sigma) &= \frac{1}{2} e^{-\mu(\sigma)z} [e^{\beta(\sigma)z} + e^{-\beta(\sigma)z}], \\ E_h(z, \sigma) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} e^{-\mu(\sigma)z} [e^{\beta(\sigma)z} - e^{-\beta(\sigma)z}], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= \frac{k\varepsilon'\sigma}{2\gamma_0}, \quad \beta(\sigma) = \frac{k\varepsilon'\sqrt{\sigma^2-1}}{4\gamma_0}, \\ \gamma_0 &= \sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2 \theta_B}. \end{aligned}$$

Коэффициент поглощения удобно представить в виде  $\mu(\sigma) = L_{EP}^{-1}\sigma$ , где  $L_{EP} = 2\gamma_0/k\varepsilon'$  — толщина структуры, равная длине поглощения в ОТ  $\sigma = 1$ .

На рис. 4б представлены графики зависимостей коэффициентов дифракционного отражения  $R^\mp(\sigma)$  от параметра поглощения  $\sigma$  для пассивного РТ-симметричного ФК (кривые 1 и 2), рассчитанные по формулам (20). Для сравнения представлен также график  $R_o(\sigma)$  (кривая 3) для традиционного поглощающего ФК с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(x, \omega)$  (21). Из (21) следует, что в соотношениях (13), (16), (19) и (20) коэффициенты Фурье  $\varepsilon_{1,-1}$  имеют следующий вид:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{-1} = (\varepsilon'/2)(1 + i\sigma)$ .

Из графиков на рис. 4б видно, что при отрицательном угле падения величина  $R^-(\sigma)$  (кривая 1) монотонно убывает с ростом поглощения аналогично случаю традиционного ФК (кривая 3), что объясняет уменьшение  $R^-(\sigma)$  с ростом  $\sigma$  на рис. 2б и 3а. Если же  $\theta_B > 0$ , то коэффициент дифракционного отражения  $R^+(\sigma)$  (кривая 2) возрастает при увеличении поглощения в области выше ОТ,  $1 < \sigma < 2$ . Аналогичные закономерности наблюдаются для кривых отражения при эффекте Бормана на рис. 2а (кривые 1 и 2) и рис. 3а (кривые 3 и 4). Видно, что ниже ОТ величина  $R^-(\sigma)$  (кривая 1) убывает медленнее, чем  $R_o(\sigma)$  (кривая 3).

Графики на рис. 4в показывают изменение относительных коэффициентов отражения  $R^\mp/R_o$  в зависимости от поглощения  $\sigma$ . При  $\theta_B > 0$  это отношение монотонно увеличивается в области выше ОТ, тогда как при  $\theta_B < 0$  оно уменьшается и стремится к единице с ростом параметра поглощения.

Зависимости коэффициентов прохождения на рис. 4г для пассивного РТ-симметричного ФК  $T^+(\sigma) = T^-(\sigma)$  (кривая 1), рассчитанные по формуле (19), практически совпадают с зависимостью коэффициента прохождения для традиционного ФК  $T_o(\sigma)$  (кривая 2).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе аналитическим спектральным методом решена задача распространения оптического излучения в пассивном РТ-симметричном ФК в условиях динамической брэгговской дифракции в геометрии Лауэ. Показано, что в пассивном РТ-симметричном ФК наблюдается эффект Бормана — уменьшение поглощения в среде при выполнении брэгговского условия. Эффект имеет ряд специфических особенностей по сравнению со случаем традиционного поглощающего ФК. Во-первых, эффект Бормана становится асимметричным по отношению к смене знака брэгговского угла падения на структуру — эффект усиливается при отрицательном угле падения. Во-вторых, в окрестности особой точки в случае положительного угла падения наблюдается увеличение амплитуды прошедшей дифрагированной волны за счет роста поглощения среды. Полученные результаты для пассивных РТ-симметричных структур имеют значительный фундаментальный интерес, поскольку открывают возможности для экспериментальных исследований новых РТ-симметричных явлений в более простых чисто поглощающих структурах. С прикладной точки

зрения использование описанного асимметричного эффекта Бормана в пассивных РТ-симметричных ФК позволит предложить новые способы управления динамикой и параметрами световых пучков в структурах с решеточной дисперсией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
2. C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).
3. Z. Bian, L. Xiao, K. Wang et al., Phys. Rev. Res. **2**, 022039(R) (2020).
4. *Parity-time Symmetry and Its Applications*, ed. by D. Christodoulides, J. Yang, Springer Tracts Mod. Phys., Vol. 280, Springer, Singapore (2018).
5. M.-A. Miri and A. Alù, Science **363**, eaar7709 (2019).
6. А. А. Зябловский, А. П. Виноградов, А. А. Пухов и др., УФН **184**, 1177 (2014).
7. V. V. Konotop, J. Yang, and D. A. Zezyulin, Rev. Mod. Phys. **88**, 035002 (2016).
8. S. K. Moayedi and A. Rostami, Europ. Phys. J. B **36**, 359 (2003).
9. A. Ruschhaupt, F. Delgado, and J. G. Muga, J. Phys. A **38**, L171 (2005).
10. R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides et al., Opt. Lett. **32**, 2632 (2007).
11. C. E. Ruter, K. G. Makris, R. El-Ganainy et al., Nature Phys. **6**, 192 (2010).
12. A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009).
13. K. H. Kim, M. S. Hwang, H. R. Kim et al., Nature Commun. **7**, 13893 (2016).
14. A. Mostafazadeh, Phys. Rev. Lett. **102**, 220402 (2009).
15. A. Mostafazadeh, Phys. Rev. Lett. **110**, 260402 (2013).
16. Y. D. Chong, L. Ge, H. Cao, and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **105**, 053901 (2010).
17. S. Longhi and L. Feng, Opt. Lett. **39**, 5026 (2014).
18. Z. J. Wong, Y. Xu, J. Kim et al., Nature Photon. **10**, 796 (2016).
19. S. Longhi, Phys. Rev. Lett. **103**, 123601 (2009).

20. Y. L. Xu, W. S. Fegadolli, L. Gan et al., *Nature Commun.* **7**, 11319 (2016).
21. M. Kulishov, J. M. Laniel, N. Bélanger et al., *Opt. Express* **13**, 3068 (2005).
22. Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut et al., *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213901 (2011).
23. L. Feng, Y. Xu, W. S. Fegadolli et al., *Nature Mater.* **12**, 108 (2012).
24. S. Longhi, *Opt. Lett.* **40**, 5694 (2015).
25. F. Loran and A. Mostafazadeh, *Phys. Rev. A* **100**, 053846 (2019).
26. D. M. Tsvetkov, V. A. Bushuev, V. V. Konotop, and B. I. Mantsyzov, *Phys. Rev. A* **98**, 053844 (2018).
27. D. M. Tsvetkov, V. A. Bushuev, and B. I. Mantsyzov, *Phys. Rev. A* **99**, 023846 (2019).
28. V. A. Bushuev, D. M. Tsvetkov, V. V. Konotop, and B. I. Mantsyzov, *Opt. Lett.* **44**, 5667 (2019).
29. D. M. Tsvetkov, V. A. Bushuev, and B. I. Mantsyzov, *Opt. Express* **29**, 10, 14548 (2021).
30. M. Ornigotti and A. Szameit, *J. Opt.* **16**, 065501 (2014).
31. Ş. K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori et al., *Nature Mater.* **18**, 783 (2019).
32. X. Zhu, Y. Xu, Y. Zou et al., *Appl. Phys. Lett.* **109**, 111101 (2016).
33. G. Borrmann, *Phys. Z.* **42**, 157 (1941).
34. А. А. Скорынин, В. А. Бушуев, Б. И. Манцызов, *ЖЭТФ* **142**, 64 (2012).
35. V. B. Novikov and T. V. Murzina, *Opt. Lett.* **42**, 1389 (2017).
36. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
37. A. Authier, *Dynamical Theory of X-ray Diffraction*, Oxford Univ. Press, Oxford (2004).
38. A. A. Zyablovsky, A. P. Vinogradov, A. V. Doro-feenko et al., *Phys. Rev. A* **89**, 033808 (2014).
39. V. A. Bushuev, L. V. Dergacheva, and B. I. Mantsyzov, *Phys. Rev. A* **95**, 033843 (2017).

# ДЕКОГЕРЕНЦИЯ КОНДЕНСАТА В ГИБРИДНОМ АТОМАРНО-ОПТИЧЕСКОМ КВАНТОВОМ ГИРОСКОПЕ

*В. А. Томилин<sup>\*</sup>, Л. В. Ильичёв*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 1 мая 2022 г.,  
после переработки 1 мая 2022 г.  
Принята к публикации 24 мая 2022 г.

Развивается идея гибридного атомарно-оптического квантового гироскопа, главным элементом которого является кольцевая структура бозе-эйнштейновского конденсата атомов. Зондирующее оптическое излучение обеспечивает чувствительность системы к вращению и регистрирует в режиме оптической интерферометрии реакцию конденсата на вращение. Процесс измерения угловой скорости вращения гироскопа может в идеале осуществляться без потери атомов, но неизбежно приводит к деградации пространственной когерентности конденсата. Построена математическая модель этого принципиально важного явления. Выведено квантовое управляющее уравнение для состояния конденсата и получено его аналитическое решение при относительно медленной декогеренции.

DOI: 10.31857/S004445102209005X  
EDN: EKGRCA

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в методах создания и контроля атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна (БЕС) позволяет рассматривать перспективные схемы его применения в метрологии [1–4]. Одним из практически значимых приложений является использование БЕС в устройствах инерциальной навигации. Ценным ресурсом при этом оказывается пространственная когерентность конденсата как макроскопической протяженной квантовой системы. Ее наличие теоретически позволяет инициализировать конденсат в различных экзотических квантовых состояниях, например NOON-состояниях [5, 6] или запутанных когерентных состояниях [7], что может существенно повысить чувствительность таких устройств.

Все известные нам схемы квантовой гироскопии с использованием ультрахолодных атомов основаны на прямой регистрации интерференции волн материи. В их основе лежит эффект влияния вращения на наклон полос при интерференции фрагментов единого конденсата [8]. При этом неизбежно разрушение конденсата при проведении измере-

ния. Весьма привлекательным было бы создание гироскопа, который использует преимущества БЕС, однако не предполагает потери атомов в процессе функционирования. В работе [9] была предложена схема гибридного атомарно-оптического квантового гироскопа. Его основой является кольцевая структура БЕС, нарушенная на узком участке дополнительным оптическим потенциалом. Это делает состояние конденсата чувствительным к вращению системы отсчета всего устройства в плоскости кольца. Роль излучения двоякая: оптический пучок создает упомянутый дополнительный потенциал и одновременно считывает информацию о реакции конденсата на вращение. Пучок приобретает фазовый сдвиг, зависящий от числа попавших в него атомов и регистрируемый интерферометром Маха–Цандера (MZI). Модификация состояния конденсата при вращении с угловой скоростью  $\Omega$  меняет этот фазовый сдвиг:  $\Theta = \Theta(\Omega)$ .

Измерение  $\Omega$  по сдвигу интерференционной картины на выходе MZI не требует разрушения конденсата для наблюдения его интерференции, как это имеет место в ранее предложенных схемах гироскопии на основе БЕС, и может проходить без потери атомов. Однако указанный эффект использует пространственную когерентность конденсата — именно она определяет его сильную реакцию на вращение и поэтому принципиально важна.

<sup>\*</sup> E-mail: 342tomilin@mail.ru

В работе [9] использовалась простейшая модель конденсата, где он описывается единой волновой функцией. При этом была отмечена ограниченность такого подхода. Действительно, через зондирующий оптический пучок информация о состоянии конденсата (о числе атомов в области пучка) поступает в окружение. Происходит своего рода непрерывное измерение. Конденсат становится открытой квантовой системой, поэтому пространственная когерентность ВЕС неизбежно деградирует при функционировании гироскопа. Предметом настоящей работы является построение теоретической модели этого процесса, без чего предлагаемая схема гироскопа не может считаться полной.

Конденсат описывается в рамках формализма вторичного квантования. Это позволяет корректно вывести основное управляющее уравнение для статистического оператора (матрицы плотности) конденсата. Оказывается возможным получить аналитическое решение этого уравнения в широком диапазоне входящих в него параметров. Это дает математическую модель эволюции состояния ВЕС во времени при функционировании гироскопа, т.е. наиболее полное описание процесса декогеренции конденсата. Воздействие нерезонансного оптического излучения на атомарные конденсаты, приводящее к декогеренции, изучалось и ранее [10–14] в основном в контексте получения их фазово-контрастных изображений в непрерывном и импульсном режимах. К сожалению, нет возможности непосредственно воспользоваться вариантами описания эволюции конденсата как открытой квантовой системы, примененными в работах [10–14], поскольку специфика каждой решаемой задачи привносит свои особенности в вывод и форму соответствующего эволюционного уравнения.

В разд. 2 построен фрагмент основного управляющего уравнения, отвечающий за явление декогеренции. Вывод этого уравнения и его решение приведены в разд. 3. В разд. 4 подводятся основные итоги и кратко намечены направления дальнейших исследований.

## 2. МОДЕЛЬ ДЕКОГЕРЕНЦИИ

Мы сохраним, где это возможно, обозначения работы [9]. Вывод управляющего уравнения целесообразно начать с рассмотрения кольцевого резонатора в схеме гироскопа (рисунок). Его роль состоит в формировании оптического пучка, зондирующего кольцо с ВЕС. Амплитуда пучка на выходе резонатора

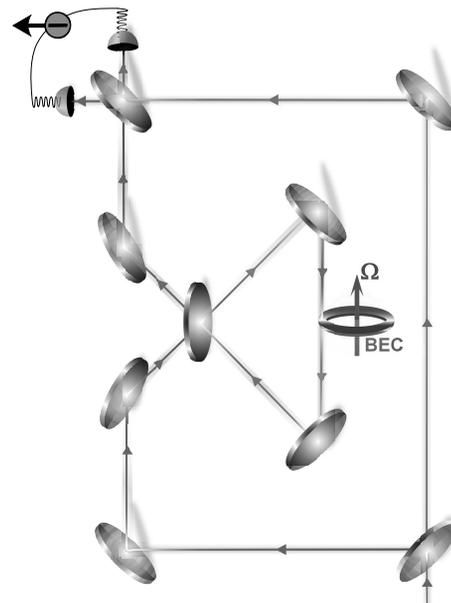
связана с амплитудой падающего пучка соотношением [9]

$$\alpha_1(n) = \frac{1 - e^{-\nu l/c} e^{i\phi(n)l/c}}{1 - e^{-\nu l/c} e^{-i\phi(n)l/c}} \alpha_0 = e^{i\Theta(n)} \alpha_0. \quad (1)$$

Здесь  $l$  — длина резонатора,  $\nu$  — параметр размерности частоты такой, что фактор  $e^{-\nu l/c} = \sqrt{1-T}$ , где  $T$  — коэффициент отражения зеркала на входе–выходе резонатора ( $c$  — скорость света),  $\phi(n) = nU/\hbar$ ,  $n$  — число атомов в пучке,  $U$  — величина потенциала, создаваемого пучком. Для простоты считается, что кольцевой резонатор отрегулирован так, что фазовый сдвиг, вносимый удлинением пути пучка в резонаторе, пренебрежимо мал и величина  $\Theta(n)$  обусловлена только присутствием атомов конденсата в пучке. Если их число становится оператором  $\hat{n}$ , операторную природу по отношению к состоянию конденсата приобретает и амплитуда  $\alpha_1(\hat{n})$ . Считаем, что сбалансированный делитель пучка на входе MZI создает амплитуды  $\alpha_0$  в каждом из внутренних плеч интерферометра. Амплитуды после выходного (сбалансированного) делителя пучка,

$$\alpha_{\pm}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_0 \pm \alpha_1(n)), \quad (2)$$

также становятся операторами  $\alpha_{\pm}(\hat{n})$ .



Принципиальная схема атомно-оптического гироскопа. Все устройство находится во вращающейся системе отсчета. Направление вектора угловой скорости  $\Omega$  этого вращения показано стрелкой

Компоненты искомого управляющего уравнения, ответственные за декогеренцию конденсата, долж-

ны образовывать трехчленную структуру Линдблада, универсально возникающую при описании необратимых процессов:

$$(\partial_t \hat{\rho})_{decoh} \propto \sum_{\sigma=+,-} \left( \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \right). \quad (3)$$

Здесь  $\hat{\rho}$  — статистический оператор атомарного конденсата; операторами Линдблада являются амплитуды  $\alpha_{\pm}(\hat{n})$  и их сопряженные  $\bar{\alpha}_{\pm}(\hat{n})$ . Этот выбор обоснован тем, что след первого (так называемого сэндвичного) слагаемого в правой части соотношения (3),  $\sum_{\sigma=\pm} \text{Tr}[\bar{\alpha}_{\sigma}(\hat{n}) \alpha_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\rho}]$ , оказывается тогда пропорциональным частоте регистрации фотоотчетов на выходе интерферометра, т.е. интенсивности контактов ВЕС с окружением. Информация о числе атомов в пучке содержится в разности

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\bar{\alpha}_{+}(\hat{n}) \alpha_{+}(\hat{n}) - \bar{\alpha}_{-}(\hat{n}) \alpha_{-}(\hat{n})) \hat{\rho}] &= \\ &= \text{Tr}[(\alpha_{1}(\hat{n}) \bar{\alpha}_{0} + \bar{\alpha}_{1}(\hat{n}) \alpha_{0}) \hat{\rho}] = \\ &= 2|\alpha_0|^2 \text{Tr}(\cos \Theta(\hat{n}) \hat{\rho}). \end{aligned} \quad (4)$$

Необходимо определить коэффициент пропорциональности, превращающий соотношение (3) в равенство. Он имеет размерность  $c^{-1}$  и может быть найден через связь амплитуды  $\alpha_0$  и напряженности  $E$  поля оптической волны на входе резонатора:

$$E = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{V}} \alpha_0. \quad (5)$$

Здесь  $\omega$  — частота излучения, а  $V$  — объем оптической моды, к которой отнесена амплитуда  $\alpha_0$ . Полагаем  $V = SL$ , где  $S$  — сечение пучка, а  $L$  — длина когерентности<sup>1)</sup>. Соотношение (5) позволяет выразить  $\alpha_0$  через легко контролируемую величину  $W = cSE^2/4\pi$  — поступающую в MZI мощность. Поскольку та же мощность покидает интерферометр, коэффициент пропорциональности в (3) равен  $c/L$  (обратное время когерентности). С учетом выражений (1) и (2) имеем

$$(\partial_t \hat{\rho})_{decoh} = \frac{|\alpha_0|^2 c}{L} (e^{i\Theta(\hat{n})} \hat{\rho} e^{-i\Theta(\hat{n})} - \hat{\rho}). \quad (6)$$

Это наиболее общий вид структуры, отвечающей за декогеренцию конденсата.

<sup>1)</sup> Считаем, что  $L \gg l$ , т.е. конечная длина когерентности излучения не мешает наблюдению интерференции, несмотря на удлинение пути в одном из плеч MZI из-за присутствия кольцевого интерферометра.

Из выражения (1) следует, что фаза  $\Theta$  является нечетной функцией  $\phi$ , следовательно при малых значениях  $\phi$  величина  $\Theta(n)$  оказывается пропорциональной  $n$ . Выражение в круглых скобках в (6) в этом пределе приобретает вид

$$e^{i\zeta\hat{n}} \hat{\rho} e^{-i\zeta\hat{n}} - \hat{\rho}, \quad (7)$$

где

$$\zeta = \frac{2Ul}{\hbar c(1 - e^{l\nu/c})}.$$

В наинизшем порядке по  $\zeta$  имеем

$$\begin{aligned} (\partial_t \hat{\rho})_{decoh} &= \\ &= i \frac{|\alpha_0|^2 c}{L} \zeta [\hat{n}, \hat{\rho}] + \frac{|\alpha_0|^2 c}{2L} \zeta^2 (2\hat{n}\hat{\rho}\hat{n} - \hat{n}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{n}^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое в правой части имеет динамическую природу, а второе описывает собственно процесс разрушения когерентности конденсата по числам его атомов в пучке. Очевидно, что (8) — модель слабой декогеренции. Именно она будет фигурировать далее.

### 3. УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Стационарные волновые функции  $\Psi_k(\varphi)$  атома на окружности, нарушенной потенциалом  $U(\varphi)$ , подчинены уравнению [9, 15–17]

$$\Psi_k''(\varphi) - 2i\xi\Psi_k'(\varphi) - U(\varphi)\Psi_k(\varphi) = -E_k\Psi_k(\varphi). \quad (9)$$

Здесь величина  $\xi$  пропорциональна скорости вращения системы отсчета. Каждому (нормированному) решению  $\Psi_k(\varphi)$  можно сопоставить операторы рождения  $\hat{\Psi}_k^{\dagger}$  и уничтожения  $\hat{\Psi}_k$  атома в моде  $k$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_k^{\dagger} &= \int_0^{2\pi} \Psi_k(\varphi) \hat{\psi}^{\dagger}(\varphi) d\varphi, \\ \hat{\Psi}_k &= \int_0^{2\pi} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\hat{\psi}^{\dagger}(\varphi)$  и  $\hat{\psi}(\varphi)$  — операторы рождения и уничтожения атома в точке  $\varphi$  окружности. Они подчиняются соотношениям коммутации

$$[\hat{\psi}(\varphi), \hat{\psi}^{\dagger}(\varphi')] = \delta(\varphi - \varphi'), \quad [\hat{\psi}(\varphi), \hat{\psi}(\varphi')] = 0,$$

из которых следует  $[\hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'}^{\dagger}] = \delta_{k,k'}$ . Это стандартное соотношение для операторов бозонных мод.

Предполагаем прямоугольную форму потенциала  $U(\varphi)$ , равного  $U$  при  $-\delta \leq \varphi \leq \delta$  и нулю в остальных точках окружности. Ориентируясь на области нулевого и ненулевого потенциалов, каждый оператор  $\hat{\Psi}_k$  можно представить в виде

$$\hat{\Psi}_k = \sqrt{p_k} \hat{a}_k + \sqrt{q_k} \hat{b}_k.$$

Здесь введены вероятности обнаружить атом (при условии помещения его в  $k$ -е состояние) внутри области потенциала и вне ее:

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{-\delta}^{\delta} |\Psi_k(\varphi)|^2 d\varphi, \\ q_k &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\Psi_k(\varphi)|^2 d\varphi = 1 - p_k, \end{aligned} \quad (11)$$

и соответствующие операторы уничтожения

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{p_k}} \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi, \\ \hat{b}_k &= \frac{1}{\sqrt{q_k}} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \Psi_k^*(\varphi) \hat{\psi}(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

с бозевскими соотношениями коммутации

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad [\hat{a}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0.$$

Гамильтониан системы невзаимодействующих атомов на кольце в формализме вторичного квантования предстает как сумма по модам:

$$\hat{H}' = \sum_k E_k \hat{\Psi}_k^\dagger \hat{\Psi}_k.$$

Взаимодействие между атомами приводит к тому, что атомы могут покидать конденсат. То же самое происходит и при приведении во вращение изначально покоящегося конденсата. В таком случае при описании системы необходимо было бы учитывать также состояние надконденсатных частиц. Мы ограничимся случаем, когда приготовление начального состояния конденсата осуществляется в уже вращающейся системе отсчета и факт вращения отражен в форме волновых функций мод  $\Psi_k(\varphi)$ . В заключительном разделе мы еще вернемся к возможному каналу появления надконденсатных атомов.

Мы будем исходить из предположения возможности ограничиться основной модой  $\Psi_0$  (индекс  $k = 0$  будем далее опускать)<sup>2)</sup>:

$$\hat{H}' \simeq E \left( p \hat{a}^\dagger \hat{a} + q \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sqrt{pq} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \right). \quad (13)$$

Правая часть содержит оператор  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  числа атомов в области потенциала (т.е. в области пучка). С учетом (8) получаем управляющее уравнение для системы атомов:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}' - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \\ \partial_t \hat{\rho} + i[\hat{H}, \hat{\rho}] &= \gamma \left( 2\hat{n} \hat{\rho} \hat{n} - \hat{n}^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{n}^2 \right), \\ \gamma &= \zeta^2 |\alpha_0|^2 c / 2L. \end{aligned} \quad (14)$$

Нахождение общего решения этого уравнения является сложной задачей. Целесообразен поиск приближенных подходов. Заметим, что с (14) естественным образом ассоциируются два базиса в пространстве состояний ансамбля атомов. Первый, который будем называть «кинетическим», диктуется структурой Линдблада из правой части уравнения. Если полное число атомов фиксировано и равно  $N$ , то этот базис образован состояниями

$$|n, N - n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Использование кинетического базиса придает наиболее простой и естественный вид необратимой составляющей эволюции соответствующих матричных элементов статистического оператора  $\hat{\rho}$ . Элементы

$$\langle n, N - n | \hat{\rho} | n', N - n' \rangle$$

в этом базисе под действием правой части управляющего уравнения затухают со скоростями  $\gamma(n - n')^2$ . Второй, «динамический», базис

$$|n_1, N - n_1\rangle, \quad n_1 = 0, 1, \dots, N$$

<sup>2)</sup> Появление вместо одной моды  $\Psi$  двух мод,  $a$  и  $b$ , при описании конденсата не несет противоречия. Это следует из существования, помимо разложения  $\hat{\Psi} = \sqrt{p} \hat{a} + \sqrt{q} \hat{b}$ , ортогональной комбинации  $\hat{\Psi}_\perp = \sqrt{q} \hat{a} - \sqrt{p} \hat{b}$  такой, что  $[\hat{\Psi}_\perp, \hat{\Psi}^\dagger] = 0$ . По этой причине для состояния конденсата  $|\text{BEC}\rangle \propto (\hat{\Psi}^\dagger)^N |0\rangle_{at}$  имеем  $\langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle = 0$ . В процессе функционирования гироскопа из-за декогеренции последнее равенство нарушается. Описание действительно становится двухмодовым.

диагонализует гамильтониан  $\hat{H}$ . Его удобно переписать в форме, явно приспособленной к динамическому базису:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega_1 \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \omega_2 \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2, \\ \hat{a} &= \cos(\chi) \hat{c}_1 + \sin(\chi) \hat{c}_2, \\ \hat{b} &= -\sin(\chi) \hat{c}_1 + \cos(\chi) \hat{c}_2, \\ \omega_1 &= \left( pE - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \right) \cos^2(\chi) + qE \sin^2(\chi) - \\ &\quad - E\sqrt{pq} \sin(2\chi), \\ \omega_2 &= \left( pE - \zeta |\alpha_0|^2 \frac{c}{L} \right) \sin^2(\chi) + qE \cos^2(\chi) + \\ &\quad + E\sqrt{pq} \sin(2\chi), \\ \text{tg}(2\chi) &= \frac{2\sqrt{pq}E}{(q-p)E + \zeta |\alpha_0|^2 c/L}, \\ \hat{H}|n_1, n_2\rangle &= (\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)|n_1, n_2\rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

Мы используем сходные обозначения для элементов кинетического и динамического базисов. Левое число в символах соответствующих кет-векторов обозначает число атомов в моде  $a$  в первом случае и в моде  $c_1$  во втором. В дальнейшем каждый раз будет указан используемый базис.

Предположим, что возможен выбор режима функционирования гироскопа, в котором основной вклад в эволюцию состояния конденсата вносит динамика (т.е. декогеренция относительно медленная). Для этого достаточно выполнения неравенства  $\omega_1 - \omega_2 \gg N\gamma$ . В таких условиях выбор для описания динамического базиса должен подсказать путь адекватного упрощения уравнения (14) с последующим его решением. Целесообразно несколько изменить форму записи динамического базиса. Пользуясь операторами  $\hat{c}_1, \hat{c}_2$  и их сопряженными, вводим в рамках представления Жордана–Швингера [18, 19] операторы эффективного квантового углового момента («псевдоспина»):

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 - \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2), \quad \hat{S}_+ = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2, \quad \hat{S}_- = \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1. \tag{16}$$

Их соотношения коммутации:

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_\pm] = \pm \hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_0.$$

При фиксированном числе атомов получаем

$$\left[ \frac{1}{2}(\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+) + \hat{S}_0^2 \right] \hat{\rho} = S(S+1)\hat{\rho}, \tag{17}$$

где  $S = N/2$ . Аналогичное соотношение имеет место и при правом действии выражения в квадратных скобках на  $\hat{\rho}$ . Элементы динамического базиса можно записывать как  $|S, M\rangle$ . Здесь

$M = (n_1 - n_2)/2$  — собственное число оператора  $\hat{S}_0$ :  $\hat{S}_0|S, M\rangle = M|S, M\rangle$ . Будем использовать обозначение  $\rho^{(S)}(M, M')$  для элементов матрицы плотности  $\langle S, M | \hat{\rho} | S, M' \rangle$ .

Гамильтониан в (14) можно записать в виде

$$\hat{H} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} S + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \hat{S}_0. \tag{18}$$

Он задает динамическую часть эволюции матрицы плотности:

$$\begin{aligned} (\partial_t \rho^{(S)}(M, M'))_{dyn} &= \\ &= -i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} (M - M') \rho^{(S)}(M, M'). \end{aligned} \tag{19}$$

Для оператора  $\hat{n}$  имеем

$$\hat{n} = S + \cos(2\chi) \hat{S}_0 + \frac{1}{2} \sin(2\chi) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-). \tag{20}$$

Последнее слагаемое в правой части меняет число  $M$  на  $\pm 1$ . Как следствие, в  $(\partial_t \rho^{(S)}(M, M'))_{decoh}$  появляются матричные элементы, у которых разность  $M$ -чисел меняется на  $0, \pm 1, \pm 2$ . Будем удерживать в структуре Линдблада только слагаемые, порождающие «резонансные» матричные элементы с характером динамической эволюции из (19):  $\rho^{(S)}(M, M')$  и  $\rho^{(S)}(M \pm 1, M' \pm 1)$ . После этого управляющее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\rho} &= -i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} [\hat{S}_0, \hat{\rho}] + \\ &\quad + \gamma \sin^2(2\chi) (\hat{S} \hat{\rho} \hat{S} - S(S+1)\hat{\rho}) + \\ &\quad + \gamma (2 \cos^2(2\chi) - \sin^2(2\chi)) \times \\ &\quad \times \left( \hat{S}_0 \hat{\rho} \hat{S}_0 - \frac{1}{2} \hat{S}_0^2 \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{S}_0^2 \right). \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь в последнем слагаемом использована векторная запись оператора псевдоспина в эффективном трехмерном пространстве с ортогональным репером  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$\hat{S} = \hat{S}_+ \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + \hat{S}_- \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + \hat{S}_0 \mathbf{e}_3.$$

Для решения уравнения (21) удобно выделить линейные комбинации матричных элементов, образующие базис неприводимых представлений группы  $SU(2)$  в пространстве псевдоспина [20]:

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa\sigma}^{(S)} &= \\ &= \sum_{M, M' = -S}^S (-1)^{S-M'} \langle S M S - M' | \kappa\sigma \rangle \rho^{(S)}(M, M'). \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь  $\kappa = 0, 1, \dots, 2S$ ;  $\sigma = -\kappa, 1-\kappa, \dots, \kappa$ . Эволюция величин  $\varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}$  выглядит просто:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_{\kappa\sigma}^{(S)} &= -\Gamma_{\kappa\sigma} \varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}, \\ \Gamma_{\kappa\sigma} &= \frac{1}{2} \gamma \sin^2(2\chi) \kappa(\kappa + 1) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 (2 \cos^2(2\chi) - \sin^2(2\chi)) + \\ &\quad + i \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \sigma. \end{aligned} \quad (23)$$

С помощью преобразования, обратного (22), получаем вид эволюции элементов матрицы плотности в динамическом базисе:

$$\begin{aligned} \varrho_t^{(S)}(M, M') &= \\ &= \sum_{M_0, M'_0} K_{t-t_0}^{(S)}(M, M' | M_0, M'_0) \varrho_{t_0}^{(S)}(M_0, M'_0), \\ K_{t-t_0}^{(S)}(M, M' | M_0, M'_0) &= \\ &= (-1)^{M'-M'_0} \sum_{\kappa=0}^{2S} \sum_{\sigma=-\kappa}^{\kappa} \exp(-\Gamma_{\kappa\sigma}(t-t_0)) \times \\ &\quad \times \langle SMS - M' | \kappa\sigma \rangle \langle SM_0S - M'_0 | \kappa\sigma \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Это — общее решение управляющего уравнения (21). Его непосредственное использование неудобно, если ориентироваться на значение  $S \sim 10^6$  (достижимое в настоящее время число атомов в конденсате). Целесообразен поиск упрощающих приемов суммирования по  $M$ -числам. Заметим, что  $\Gamma_{\kappa\sigma}$  содержат слагаемые, квадратичные по  $\kappa$  и описывающие при  $\kappa \gg 1$  быстрый в масштабе  $\gamma$  распад соответствующих  $\kappa$ -гармоник. Из выражений (23) видно, что этот распад может быть в принципе замедлен вторым слагаемым при  $|\sigma| \sim \kappa$ . Однако при этом  $\varrho_{\kappa\sigma}^{(S)}$  оказываются быстроосциллирующими из-за последнего мнимого слагаемого. Поэтому, если нет необходимости исследовать детали эволюции  $\hat{\varrho}_t$  на временах, много меньших  $\gamma^{-1}$ , разумно ограничиться небольшими значениями  $\kappa$ . В пределе  $S \gg \kappa$  существует аппроксимация коэффициентов Клебша–Гордана [20] через матрицы вращения:

$$\langle SMS - M' | \kappa\sigma \rangle \simeq d_{\sigma 0}^{(\kappa)}(\theta),$$

где  $\cos \theta \simeq (M + M')/2S$ . Это приближение в ряде случаев позволяет заменять суммирование в (24) интегрированием по  $\theta$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явное достоинство схемы гибридного атомарно-оптического гироскопа, как было отмечено в рабо-

те [9], состоит в отсутствии необходимости разрушать структуру ВЕС для регистрации вращения через наблюдение интерференции атомов. В то же время пространственная когерентность конденсата оказывается ценным расходуемым ресурсом, и требуется построение модели ее деградации, без чего предлагаемая схема гироскопа остается неполной. Разрушение пространственной когерентности носит фундаментальный характер и неотделимо от процесса измерения угловой скорости вращения. При возникновении информации о чувствительном к вращению числе атомов в области пучка происходит неизбежная декогеренция конденсата.

В настоящей работе получено управляющее уравнение для статистического оператора конденсата в общей форме, описывающее процесс разрушения пространственной когерентности. В предположении медленности этого процесса в сравнении с характерными скоростями гамильтоновой эволюции управляющее уравнение было преобразовано к более простому виду (21), который уже допускает аналитическое решение. Были выведены соотношения связи контролируемых в эксперименте параметров с входящими в это уравнение величинами  $\omega_1, \omega_2, \chi$  и  $\gamma$ . Заметим, что информация об угловой скорости вращения гироскопа отражена в значениях первых трех из них.

В работе [9] при некотором выборе основных параметров гироскопа с прицелом на измерение угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси были сделаны основные оценки. В частности, при радиусе кольца с конденсатом  $R = 0.2$  см и величине сектора, занятого зондирующим пучком,  $0.1$  рад наибольшая чувствительность достигается при глубине создаваемой им потенциальной ямы  $U/\hbar = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Ориентируясь на эту величину, положив длину кольцевого резонатора  $l = 6$  см и выбрав наименее благоприятную нижнюю границу допустимых значений  $\nu \simeq 10^2 \text{ с}^{-1}$ , можно попробовать получить предварительную оценку скорости разрушения когерентности  $\gamma \simeq 8 \text{ с}^{-1}$ . При выборе значений  $\nu$  ближе к реалистичной правой границе указанного в работе [9] допустимого интервала скорость декогеренции падает до  $\gamma \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ . Эти оценки сделаны для отстройки частоты зондирующего излучения  $3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  от частоты перехода  $D$ -линии атома  $^{87}\text{Rb}$ .

На первый взгляд, полученные оценки выглядят довольно оптимистично. Заметим, однако, что при выбранных параметрах среднее число фотонов в кольцевом резонаторе оказывается крайне малым (для безразмерной амплитуды  $\alpha$  поля внутри резонатора).

натора имеем  $|\alpha|^2 \sim 10^{-5}$ ). Это важно, поскольку свидетельствует о сильных квантовых флуктуациях величины потенциала, нарушающего однородность кольцевой ловушки конденсата.

Используемая в проведенной оценке величина  $U$  является фактически значением потенциала, усредненным по состоянию поля в кольцевом резонаторе. Корректный учет флуктуаций потенциала и их влияния на скорость разрушения когерентности требует решения уравнения (9) для волновых функций конденсата  $\Psi_k^{(n_{ph})}(\varphi)$  при различных значениях  $n_{ph}$  числа фотонов в резонаторе. Величина потенциала  $U^{(n_{ph})} \propto n_{ph}$ . Малость среднего числа фотонов в резонаторе в определенном смысле облегчает задачу учета флуктуаций, поскольку можно рассматривать всего две альтернативы, представленные фокковскими состояниями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  резонаторной моды, т. е. иметь дело со своего рода «полевым кубитом». Соответственно, достаточно ограничиться наборами операторов  $\hat{\Psi}_k^{(0)}$  и  $\hat{\Psi}_k^{(1)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и их сопряженными.

Если конденсат изначально приготавливается в моде  $\Psi_{k_0}^{(0)}$ , то главным ее партнером во второй группе окажется мода  $\Psi_{k_1}^{(1)}$ , чья энергия  $E_{k_1}^{(1)}$  наиболее близка к  $E_{k_0}^{(0)}$ . В этих условиях разумной моделью гамильтониана системы «атомы+мода резонатора» является

$$\hat{H}'_{at+ph} = E_{k_0}^{(0)} \hat{\Psi}_{k_0}^{(0)\dagger} \hat{\Psi}_{k_0}^{(0)} \otimes |0\rangle\langle 0| + E_{k_1}^{(1)} \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)\dagger} \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)} \otimes |1\rangle\langle 1|. \quad (25)$$

Операторы  $\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)}$  и  $\hat{\Psi}_{k_1}^{(1)}$  можно представить в виде линейных комбинаций  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , имеющих, как и ранее, смысл операторов уничтожения атома внутри и вне области потенциала. В частности, должно обеспечиваться соотношение  $[\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)}, \hat{\Psi}_{k_1}^{(1)\dagger}] = \langle \Psi_{k_0}^{(0)} | \Psi_{k_1}^{(1)} \rangle$  (скалярное произведение одноатомных волновых функций). Гамильтониан  $\hat{H}'_{at+ph}$  содержит ту же четверку операторов  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{b}$  и  $\hat{b}^\dagger \hat{a}$ , что и  $\hat{H}'$  из (13), но теперь они представлены в произведении с фотонными операторами. Поскольку контакт конденсата с окружением опосредован взаимодействием с модой резонатора, оператор  $\hat{n}$  из (8) следует заменить на  $\hat{n} \otimes |1\rangle\langle 1|$ . В результате полученное ранее управляющее уравнение оказывается адаптированным к случаю квантованной резонаторной моды в режиме малого числа фотонов. Соответствующим образом можно модифицировать и его решение.

При начальном состоянии

$$|\Phi_{at+ph}\rangle \propto (\hat{\Psi}_{k_0}^{(0)\dagger})^N |0\rangle_{at} \otimes (|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$

динамическая эволюция под действием  $\hat{H}_{at+ph}$  приведет к возникновению квантовой запутанности ансамбля атомов и полевого кубита. Но состояние этой объединенной системы остается чистым, т. е. представимым вектором гильбертова пространства. Эта чистота (когерентность) состояния объединенной системы становится ресурсом работы гироскопа, в процессе которой при регистрации интерференции на выходе MZI статистический оператор  $\hat{\rho}_{at+ph}$  приобретает смешанный характер. Заметим, что при этом появляются надконденсатные атомы вне исходной моды  $\Psi_{k_0}^{(0)}$ . Канал возникновения надконденсатных атомов обеспечен ненулевым значением скалярного произведения  $\langle \Psi_{k_0}^{(0)} | \Psi_{k_1}^{(1)} \rangle$ . Вычисление скорости декогеренции с учетом квантовых флуктуаций и сравнение с приведенными выше оценками на основе усредненного потенциала требует дальнейших исследований.

Отмеченная малость среднего числа фотонов в резонаторе явилась следствием необходимости обеспечить указанную в оценке величину потенциала  $U$ . Также к выводу о малости числа фотонов привели выбранные параметры резонатора. Поскольку во всех случаях выбор осуществлялся в значительной степени случайно, есть основания полагать, что он оказался далеко не оптимальным. В частности, нельзя исключать возможность нахождения диапазона параметров, не требующего квантового описания резонаторного пучка.

Отметим, что фазовый сдвиг на выходе интерферометра оказывается вполне регистрируемым (по оценкам из [9] он составляет приблизительно 0.04). Этот сдвиг фазы классического светового пучка создается кольцевым резонатором со слабым внутренним полем, зондирующим конденсат.

Несмотря на то что рассмотренная схема не предполагает неизбежной потери атомов в процессе работы, пространственная когерентность конденсата деградирует со временем. Это означает, что по истечении времени когерентности необходимо восстанавливать исходное состояние конденсата для продолжения функционирования гироскопа. Детальное обсуждение методов осуществления этой процедуры выходит за рамки предмета настоящей статьи, целью которой была демонстрация принципиальной пригодности описанной схемы для регистрации вращения. Тем не менее прогресс в методах создания нетривиальных пространственных конфигураций атомарных бозе-конденсатов позволяет надеяться на техническую возможность ее реализации. В частности, перспективными являются стратегии управления состоянием бозе-

конденсата на основе обратной связи [12, 13, 21]. Поскольку модификации в этом случае подвергается гамильтонова эволюция системы (к примеру, параметры поля, формирующего оптическую ловушку), для рассмотренного выше случая слабой декогеренции такие стратегии представляются наиболее эффективными.

Полученное в работе решение управляющего уравнения позволяет в принципе найти корреляционную функцию числа атомов в пучке  $\langle n(t_2)n(t_1) \rangle$ , где  $t_2 > t_1 \geq 0$ , а в нулевой момент времени, по предположению, приготовлено полностью когерентное состояние ВЕС и начинается функционирование гироскопа. Это в свою очередь позволит определить корреляционную функцию измеряемых значений угловой скорости и рассчитать в итоге девиацию Аллана в предлагаемой схеме.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект АААА-А21-121021800168-4) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН. Участие одного из авторов (И. Л. В.) поддержано Российским научным фондом (грант 20-12-00081).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **54**, R4649 (1996).
2. S. Boixo, A. Datta, M. J. Davis, A. Shaji, A. V. Tacla, and C. M. Caves, *Phys. Rev. A* **80**, 032103 (2009).
3. L. Pezze, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035005 (2018).
4. N. P. Robins, P. A. Altin, J. E. Debs, and J. D. Close, *Phys. Rep.* **529**, 265296 (2013).
5. J. J. Cooper, D. W. Hallwood, and J. A. Dunningham, *Phys. Rev. A* **81**, 043624 (2010).
6. D. V. Tsarev, S. M. Arakelian, YouLin Chuang, Ray-Kuang Lee, and A. P. Alodjants, *Opt. Express* **26**, 19583 (2018).
7. J. Joo, W. J. Munro, and T. P. Spiller, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 083601 (2011).
8. O. I. Tolstikhin, T. Morishita, and S. Watanabe, *Phys. Rev. A* **72**, 051603R (2005).
9. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 212 (2021).
10. U. Leonhardt, T. Kiss, and P. Piwnicki, *Eur. Phys. J. D* **7**, 413 (1999).
11. D. A. R. Dalvit, J. Dziarmaga, and R. Onofrio, *Phys. Rev. A* **65**, 053604 (2002).
12. S. S. Szigeti, M. R. Hush, A. R. R. Carvalho, and J. J. Hope, *Phys. Rev. A* **80**, 013614 (2009).
13. S. S. Szigeti, M. R. Hush, A. R. R. Carvalho, and J. J. Hope, *Phys. Rev. A* **82**, 043632 (2010).
14. E. O. IloOkeke and T. Byrnes, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 233602 (2014).
15. H. Hartmann, *Theor. Chim. Acta* **24**, 201 (1972).
16. M. Kibler and P. Winternitz, *J. Phys. A* **20**, 4097 (1987).
17. L. Chetouani, L. Guechi, and T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **33**, 3410 (1992).
18. P. Jordan, *Z. Phys.* **94**, 531 (1935).
19. J. Schwinger, in *Quantum Theory of Angular Momentum*, ed. by L. C. Biedenharn and H. Van Dam, Academ. Press, New York (1965).
20. Д. А. Варшавович, А. Н. Москалёв, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
21. T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, S. Bernon, A. Aspect, A. Landragin, and P. Bouyer, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 210503 (2013).

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ В ДИАПАЗОНЕ ЭНЕРГИЙ 12–34 кэВ

В. А. Варлачёв<sup>а</sup>, Г. Н. Дудкин<sup>а</sup>, Б. А. Нечаев<sup>а</sup>, Ф. М. Пеньков<sup>б,с</sup>, А. В. Филиппов<sup>д\*</sup>

<sup>а</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
634050, Томск, Россия

<sup>б</sup> Институт ядерной физики Министерства энергетики  
050032, Алматы, Казахстан

<sup>с</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
050040, Алматы, Казахстан

<sup>д</sup> Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 марта 2022 г.,  
после переработки 12 апреля 2022 г.  
Принята к публикации 13 апреля 2022 г.

Исследование реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  представляет значительный интерес как для ядерной физики, так и для ядерной астрофизики. В ядерной астрофизике необходимо получить более точные данные о скорости реакций примордиального синтеза, в частности, приводящих к синтезу  ${}^4\text{He}$ . В ядерной физике существуют теоретические модели, в которых поведения сечения и S-фактора этой реакции в диапазоне энергий порядка десятков кэВ плохо согласуются с экспериментом. Таким образом, необходимо было провести более точное экспериментальное исследование поведения S-фактора этой реакции в астрофизическом диапазоне энергий. Экспериментально полученные значения выходов для различных энергий ионов  ${}^1\text{H}^+$  были использованы для описания поведения S-фактора реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  в зависимости от энергии. В результате точность определения S-фактора реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  была улучшена в несколько раз.

DOI: 10.31857/S0044451022090061

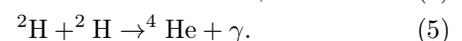
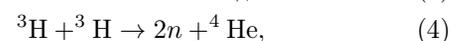
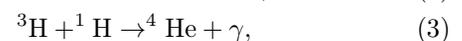
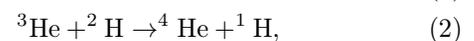
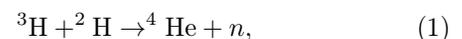
EDN: EKLDQI

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  представляет интерес в отношении двух аспектов: ядерной астрофизики и ядерной физики. Современные теории об эволюции Вселенной основаны на стандартной космологической модели Большого взрыва (Lambda Cold Dark Matter —  $\Lambda\text{CDM}$ ), которая утверждает, что Вселенная расширилась и продолжает расширяться из чрезвычайно плотного и горячего состояния, возникшего  $13.813 \pm 0.058$  млрд лет назад [1]. Экспериментальная основа модели Большого взрыва включает в себя такие явления, как наблюдаемое на базе красного смещения расширение Вселенной, первич-

ный синтез легких элементов; космическое микроволновое фоновое излучение. Считается, что космологический ядерный синтез легких элементов (стандартный нуклеосинтез Большого взрыва (SBBN)) начался примерно через  $\sim 100$  с после Большого взрыва [1, 2] и последовательно протекал в диапазоне энергий 400–30 кэВ с образованием следующих ядер: дейтерия  ${}^2\text{H}$ , трития  ${}^3\text{H}$ , гелия  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  и лития  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$ .

Пять реакций, непосредственно участвующих в образовании  ${}^4\text{He}$  в первичном синтезе, имеют вид



\* E-mail: philippov@jinr.ru

Вклады реакций (1)–(5) в образование  ${}^4\text{He}$  различны и описываются их последовательностью (вклад первой реакции является наибольшим) [3].

В настоящее время для концентрации  ${}^4\text{He}$  получены следующие значения. Результат оптической наблюдательной астрономии является  $Y_p = 0.2449 \pm 0.0040$  (точность 1.63%), а результат модели SBBN  $Y_p = 0.24709 \pm 0.00017$  (точность 0.0688%), представленный в [4], и результат модели SBBN  $Y_p = 0.24705 \pm 0.00019$  (точность 0.0769%), представленный в [5] на основе последних результатов совместной работы Planck [6]. Эти результаты показывают, что точность модели SBBN превышает точность экспериментальных результатов оптической астрономии более чем на порядок.

В настоящее время на расчетное образование  ${}^4\text{He}$  при нуклеосинтезе Большого взрыва (SBBN) не влияет ни одна из реакций (1)–(5), поскольку они были исследованы с гораздо меньшей точностью по сравнению с измерением температуры микроволнового излучения. Величина температуры микроволнового излучения и ее точность однозначно определяют содержание  ${}^4\text{He}$  в рамках модели  $\Lambda\text{CDM}$ . Однако это в рамках модели! Глобальная тенденция заключается в том, чтобы измерять поперечные сечения реакций, участвующих в первичном синтезе, с высочайшей точностью [7–10]. Следует отметить, что S-фактор реакций должен быть измерен до минимально возможных энергий, чтобы сделать правильную экстраполяцию S-фактора до нулевой энергии. Таким образом, проверяется модель  $\Lambda\text{CDM}$ .

Кроме того, рассматриваются различные механизмы изменения скоростей ядерных реакций. Например, в [9] были учтены КЭД-поправки к скоростям реакций радиационного захвата в стандартном процессе BBN, в частности, для реакции  ${}^3\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$ . В ссылке [11] указана возможность протекания реакции  ${}^3\text{H}(p, e^+e^-){}^4\text{He}$  за счет гипотетической частицы X17 [12].

Вторая основа для изучения реакции  ${}^3\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$  связана с ядерной физикой. С точки зрения ядерной физики четырехнуклонная (4N) система в последние годы является объектом интенсивных исследований [13]. Эта система особенно интересна как «теоретическая лаборатория» для проверки точности наших текущих знаний о нуклон-нуклонных (NN) и трехнуклонных (3N) взаимодействиях. А это требует высокой точности экспериментальных исследований.

Скорости ядерных реакций (1)–(5) в плазме определяются поперечными сечениями для неупругих процессов при низких энергиях столкновения  $E$ .

Эти поперечные сечения описываются формулой Гамова – Солпитера [14, 15]

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta(E)}. \quad (6)$$

Здесь  $S(E)$  — астрофизический S-фактор, слабо зависящий от энергии,  $\eta(E)$  — параметр Зоммерфельда, который можно записать в виде  $2\pi\eta(E) = 31.29Z_1Z_2\sqrt{\mu/E}$ , где  $Z_1$  и  $Z_2$  — заряды сталкивающихся ядер,  $\mu$  — их приведенная масса в единицах атомной массы.

Энергетические зависимости поперечного сечения и S-фактора реакции  ${}^3\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$  были давно исследованы в работах [16–18]. В экспериментах [16, 17], которые проводились при высоких энергиях, точность определения S-фактора реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  составляет  $\pm 7\%$ . В эксперименте [18], который проводился при низких энергиях, точность составляет 24%. Целью нашего исследования было повышение точности определения S-фактора реакции при низких энергиях.

Экспериментальный материал трех экспериментов в [18] был использован для получения аппроксимации зависимости S-фактора от энергии в виде

$$S(E) = S_0 + S_1E + S_2E^2, \quad (7)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} S_0 &= (2.0 \pm 0.2) \text{ кэВ} \cdot \text{мб}, \\ S_1 &= (1.6 \pm 0.4) \cdot 10^{-2} \text{ мб}, \\ S_2 &= (1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-4} \text{ мб/кэВ}. \end{aligned} \quad (8)$$

Однако в теоретическом исследовании [10] параметры, используемые для получения зависимости S-фактора от энергии, существенно отличались от (8):

$$\begin{aligned} S_0 &= 0.87 \text{ кэВ} \cdot \text{мб}, & S_1 &= 4.086 \cdot 10^{-2} \text{ мб}, \\ S_2 &= 6.424 \cdot 10^{-5} \text{ мб/кэВ}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что скорость реакции, указанная в работе [3], рассчитана для реакции  ${}^3\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$  с использованием S-фактора с параметрами (8).

Две описанные выше проблемы привели к более детальному исследованию реакции  ${}^3\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$ .

Краткая версия настоящей работы опубликована в [19]. Целью данной публикации является подробное описание экспериментальной процедуры и обработки результатов измерений. Такое расширенное описание эксперимента необходимо для анализа несоответствия между нашими результатами и теоретическими расчетами и правильности учета наших данных в астрофизических и ядерных моделях.

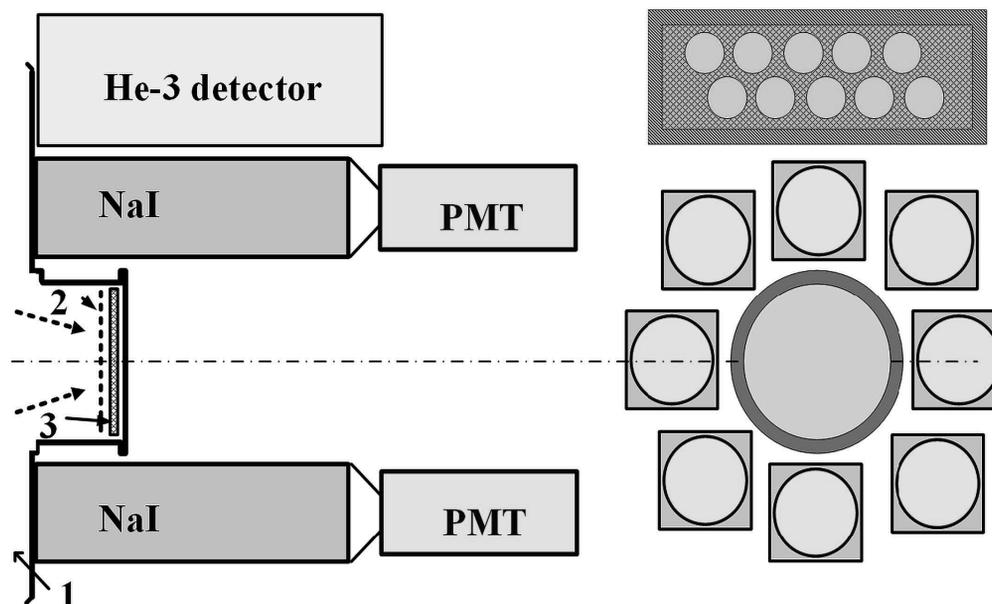


Рис. 1. (В цвете онлайн) Расположение детекторов: 1 — импульсный ионный ускоритель Холла, 2 — сетка, 3 — мишень

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Реакция  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  была исследована в диапазоне энергий 12–34 кэВ в лабораторной системе отсчета ( $E = 7.8\text{--}20.1$  кэВ в системе отсчета центра масс) с использованием импульсного ускорителя ионов Холла (Томск, ТПУ) и твердотельной тритиевой мишени. Гамма-кванты с энергией 19.8 МэВ регистрировались восемью детекторами NaI(Tl) большой площади (3200 см<sup>2</sup>), рис. 1.

### 2.1. Ускоритель

Ускоритель подробно описан в работах [20–22]. Напряжение  $V$ , приложенное к ускоряющему промежутку анод–катод, и ток мишени  $I_m$  измерялись с помощью осциллографа DPO-2024 (рис. 1) с 8-разрядным АЦП со стандартным отклонением измерения  $\sigma \leq 1\%$ . Погрешности осциллографа оценивались для всех измерений, выполненных при постоянном напряжении, с использованием вольтметра класса точности 0.01. Делитель высокого напряжения, расположенный в масляном контейнере высоковольтного генератора импульсов, использовался для измерения импульсного напряжения до 40 кВ. Рабочие значения резисторов делителя высокого напряжения измеряются с точностью до четвертого разряда. Делитель постоянного напряжения периодически калибровался с использованием эталонного киловольтметра класса точности 0.01. Та-

ким образом, погрешность измерения ускоряющего напряжения в диапазоне 10–40 кВ составляет  $\leq 1\%$ .

Камера ускорителя и мишенный блок были откачаны с помощью турбомолекулярного насоса и крионасоса. Рабочий уровень вакуума в измерительной камере был меньше  $10^{-7}$  ммрт. ст. Процессы сорбции (десорбции) на мишени контролировались с помощью кварцевых весов (не показаны на рис. 1) с частотным разрешением  $\sim 1$  Гц (чувствительность  $10^{-2}$  мкг/Гц). Методика, используемая для определения чистоты поверхности мишени, обеспечивала быстрый контроль эффективности вакуумирования ускорительной камеры для выявления и устранения факторов, влияющих на загрязнение поверхности мишени из-за присутствия остаточных газов.

Мишенный блок представляет собой компактную сборку, в которой компоненты плотно сжаты изолирующими керамическими кольцами. Проволочная сетка с прозрачностью 93% расположена на расстоянии 10 мм перед мишенью для подавления эмиссии электронов из мишени. В центре мишени было проделано отверстие диаметром 5 мм для установки кварцевого датчика весов. На задней стороне мишени установлен медный диск диаметром 100 мм и толщиной 3 мм с отверстием в центре для кварца. Платиновый термометр L 220P установлен рядом с диском. Данные с термометра сохранялись на компьютере. Нагрузочный резистор амперметра

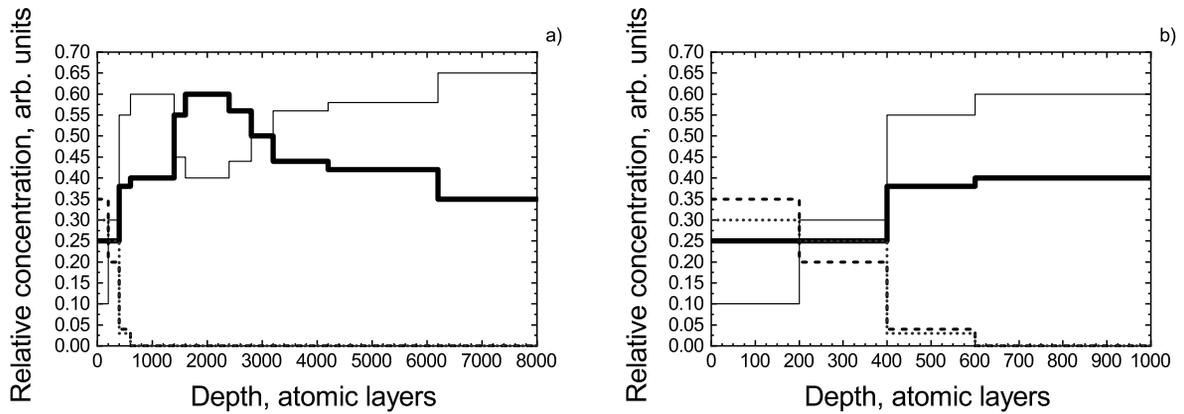


Рис. 2. а) Зависимость относительных концентраций атомов от глубины мишени, б) показана увеличенная область малой глубины. Жирная сплошная линия — тритий, тонкая сплошная линия — титан, пунктирная линия — углерод, штриховая линия — кислород. Атомный слой соответствует  $10^{15}$  атомам на  $\text{см}^2$

установлен на задней стороне медного диска, чтобы минимизировать потери тока.

Количество ионов водорода  $^1\text{H}^+$  в каждом импульсе определяли путем интегрирования тока мишени  $I_m$ . Общий заряд  $Q$  на мишени и количество ионов  $N_{\text{H}}$  рассчитываются как

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I_m dt, \quad N_{\text{H}} = Q/e,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — временные пределы импульса ускорения, а  $e$  — заряд электрона. Точность измерения тока зависит от класса эталонного конденсатора ( $C = 0.4795$  мкФ, 0.5%), а статистическая погрешность калибровочного измерения составляет менее 0.8%. Таким образом, погрешность измерения количества ионов  $^1\text{H}^+$  составляет  $\leq 1\%$ . Количество ускоренных ионов водорода  $^1\text{H}^+$ , попадающих на мишень из тритида титана, составляло  $\sim 5 \cdot 10^{14}$  за импульс 10 мкс. В [22] приведены результаты эксперимента по определению относительного содержания молекулярных ионов водорода  $\text{H}_2^+$  в потоке ускоренных ионов:  $N_{\text{H}_2^+} = 9.8 \pm 2\%$ . Верхний предел относительного содержания нейтральных атомов водорода в потоке ускоренных ионов водорода составлял  $< 1.1\%$  с вероятностью  $P = 0.95$  [22]. Эти данные были использованы при обработке результатов эксперимента.

Энергетическое распределение падающих ионов  $^1\text{H}^+$  измерялось с помощью многосеточного электростатического спектрометра заряженных частиц [22]. Напряжение отсечки  $U$  подавалось на сетку с высоким коэффициентом пропускания, расположенную перед мишенью, и измерялся сред-

ний ток мишени  $I_m$  в каждом цикле ускорения. При этом на мишень падали ионы с энергией, превышающей напряжение отсечки. Величина напряжения  $U$  плавно менялась от нуля до значения, соответствующего полной отсечке ионного тока. Относительное изменение тока мишени при возрастании напряжения на сетке от нуля до полной отсечки ионного тока дает интегральный энергетический спектр ускоренных ионов, который преобразовывался в дифференциальный. Полученный таким образом энергетический разброс протонов в пучке составляет  $\text{FWHM}_E = 16\%$ .  $\text{FWHM}_E$  — это разброс энергии, определяемый как отношение полной ширины на половине максимума пика к центроидному положению пика. Измеренный энергетический разброс для ионного пучка с энергией  $E_{\text{lab}} = 29.5$  кэВ не сильно отличается от измеренного при других энергиях ионов. Поэтому энергетический разброс для всех энергий был принят равным 16%.

## 2.2. Тритиевая мишень

Реакцию  $^3\text{H}(^1\text{H}, \gamma)^4\text{He}$  изучали с использованием мишеней из тритида титана (TiT). Мишень была изготовлена методом магнетронного распыления слоя титана толщиной около 1.5 мкм на молибденовую подложку (диаметр 97 мм, диаметр излучающей поверхности 87 мм). Затем это помещали в аппарат Сивертса, и титановый слой насыщали тритием для достижения желаемой стехиометрии. Мишень была изготовлена и испытана в 2017 г. Измерение распределения плотности тритонов по глубине мишени проводилось методом ERD (метод ядер от-

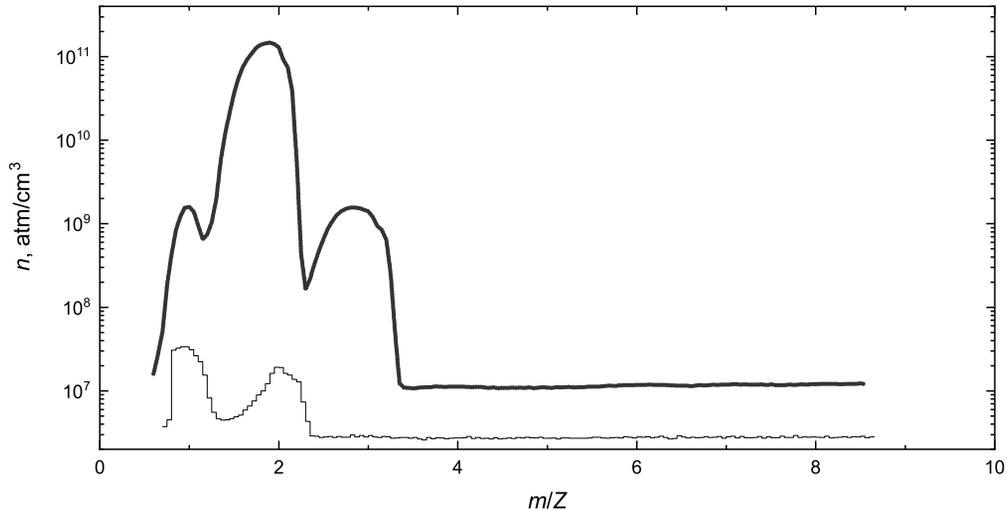


Рис. 3. (В цвете онлайн) Масс-спектры до (тонкая линия) и после (жирная линия) отключения работы крионасоса. Здесь  $n$  — концентрация ионов,  $m$  — масса иона в а. е. м.,  $Z$  — заряд иона

дачи) с использованием пучка альфа-частиц с энергией 2.3 МэВ, созданного с помощью ускорителя Ван де Графа (ОИЯИ, Дубна), рис. 2.

Кроме того, с помощью электронно-индуцированной рентгеновской флуоресцентной спектроскопии была определена равномерность насыщения слоя тритиевого титана по площади мишени ( $74 \text{ см}^2$ ) и по глубине. Вся площадь мишени сканировалась с помощью коллимированного кремниевое полупроводниковое детектора с бериллиевым входным окном толщиной 25 мкм. Позиционное разрешение составляет 4 мм. Зарегистрировано характеристическое рентгеновское излучение атомов титана  $K_{\alpha 1}$  и  $K_{\beta 1}$  с энергиями  $E_r = 4.51, 4.93 \text{ кэВ}$ , возникающее в титане при воздействии  $\beta$ -частиц распада трития. Разброс насыщения титановой подложки тритием не превышает 4%. Размер макроскопического поперечного сечения для когерентного рассеяния (некогерентное рассеяние пренебрежимо мало) фотонов заданной энергии (4.5 кэВ) делает выход рентгеновского излучения «видимым» вдоль пробега протонов в мишени практически без ослабления. Пробег бета-частиц с энергией, соответствующей максимуму распределения 4 кэВ, составляет 0.2 мкм, и это не влияет на позиционное разрешение метода. То есть способ позволяет осуществлять относительный контроль содержания трития в мишени как по площади, так и по глубине.

Выход трития из мишени за счет ионно-ионной эмиссии измеряли с помощью квадрупольного масс-спектрометра Extorr XT-100. Процедура выгляде-

ла следующим образом: в течение дневного сеанса измерений (6 ч) вышедший из мишени тритий накапливался на криопанели криогенного насоса CryoPlex8-350; по окончании сеанса измерений крионасос выключался и тритий выходил в вакуумную камеру; масс-спектрометр Extorr XT-100 по определенной программе анализировал количество атомов трития, вышедших из мишени; далее включался турбомолекулярный насос и с помощью дополнительного насоса откачивал тритий за пределы здания. На рис. 3 представлены спектры масс до и после отключения криогенного насоса.

Сплошные линии на рис. 3 — масс-спектры состава газа в камере ускорителя в конце дневного сеанса измерений. Тонкая сплошная линия — крионасос включен, а турбомолекулярный насос выключен. Камера заполнена атомарным и молекулярным водородом. Жирная сплошная линия — турбомолекулярный насос выключен и крионасос выключен. Температура криопанели  $T_c = 35 \text{ К}$ . Видно, что атомарный водород, молекулярный водород, гелий-3 и тритий выходят из криопанели. Также можно видеть, что большая часть атомарного водорода рекомбинировала с образованием молекул.

Известно, что температура разложения гидрида титана составляет около  $400 \text{ }^\circ\text{C}$  [23]; поэтому мы рассчитали распределение температуры в мишени для чистого титана и дигидрида титана на основе теплоемкости дигидрида, описанной в [23], при воздействии протонного пучка с энергией 34 кэВ и интенсивностью  $5 \cdot 10^{14}$  на импульс. Для расчета температур тормозные способности были оцене-

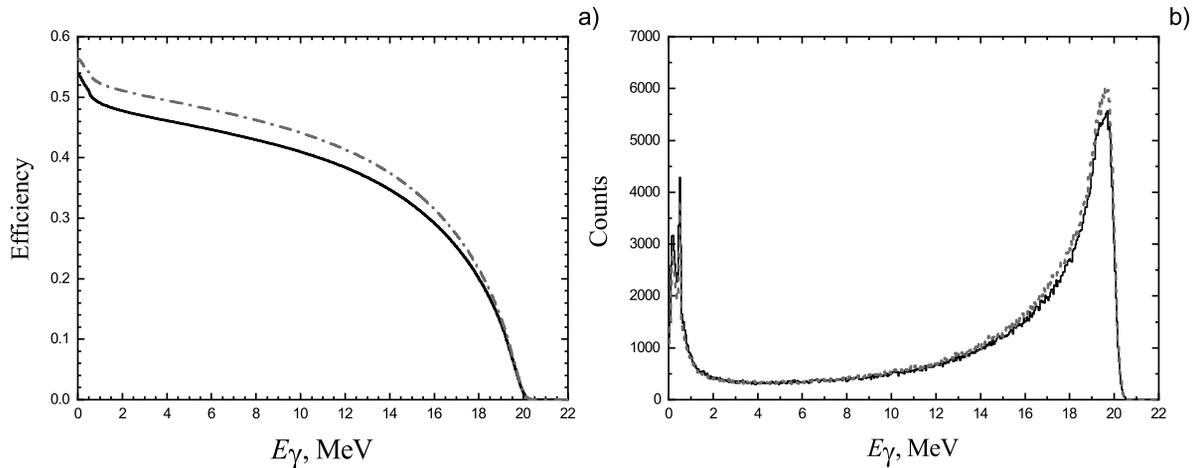


Рис. 4. (В цвете онлайн) а) Эффективность регистрации  $\gamma$ -квантов в зависимости от энергетического порога, б) расчетный энергетический спектр  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 19.8$  МэВ

ны в SRIM [24] при энергиях, варьирующихся от 0.1 до 34 кэВ. Было показано, что наша мишень гарантированно стабильна при температуре до 350 °С. Однако относительное содержание трития в мишени периодически контролировалось с использованием метода электронно-индуцированной рентгеновской флуоресцентной спектроскопии. Эти данные были учтены при обработке результатов измерений выхода реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ .

### 2.3. Детекторы $\gamma$ -квантов

Детектирование  $\gamma$ -квантов реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  осуществлялось с помощью восьми сцинтилляционных детекторов на основе крупноблочных кристаллов NaI(Tl) (каждый размером  $100 \times 100 \times 400$  мм<sup>3</sup>), расположенных вокруг мишени из TiT. Сигналы с детекторов NaI(Tl), оптически соединенных с фотоумножителями Hamamatsu R1307, оцифровывались с помощью двух 4-канальных запоминающих осциллографов Tektronix DPO 2024.

Для экспериментального определения эффективности регистрации  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 19.8$  МэВ источники с близкими энергиями отсутствуют. Поэтому с помощью инструментария Geant4 было выполнено моделирование методом Монте-Карло регистрации  $\gamma$ -квантов сборкой детекторов. При пороге регистрации 14 МэВ эффективность регистрации  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 19.8$  МэВ максимальна для геометрии рис. 1 и составляет 35 %. Кроме того, при расчете эффективности регистрации необходимо было учитывать анизотропию

дифференциального сечения реакции в зависимости от полярного угла  $\theta$  [16, 17]. Угловое дифференциальное сечение пропорционально  $\sin^2 \theta$ . В расчетах Geant4 угол вылета  $\gamma$ -кванта и его энергия были преобразованы в лабораторную систему отсчета для каждой энергии иона водорода с использованием уравнений релятивистской кинематики с поправкой на энергию ядерной отдачи и доплеровский сдвиг. Результат представлен на рис. 4.

Сплошные кривые на рис. 4 относятся к значениям без учета анизотропного углового распределения излучения  $\gamma$ -квантов, штрихпунктирная кривая на рис. 4 а) и пунктирная на рис. 4 б) — к значениям с учетом его.

Программа была протестирована на реакции  ${}^2\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^3\text{He}$ . В этой реакции образуются  $\gamma$ -кванты с энергией  $E_\gamma = 5.5$  МэВ. На рис. 5 представлены экспериментальные спектры  $\gamma$ -квантов и расчетный спектр.

На рис. 5 отчетливо видны три спектра. Спектр 1 — спектр  $\gamma$ -квантов, полученный после регистрации космического фона и радиоактивности материалов, окружающих детекторы, в течение 10 мкс без приложения ускоряющего напряжения (внизу слева). Спектр 2 — спектр  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 5.5$  МэВ. Спектр  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma < 3.5$  МэВ (вверху слева) обусловлен цепочкой фоновых процессов. Первый из них — вторичная упругая реакция протон-дейтронного взаимодействия с передачей энергии. Второй — взаимодействие дейтрона с переданной энергией и соседнего дейтрона в реакции  ${}^2\text{H}({}^2\text{H}, n){}^3\text{He}$ . Третий — взаимодействие нейтрона с энергией  $E_n = 2.5$  МэВ

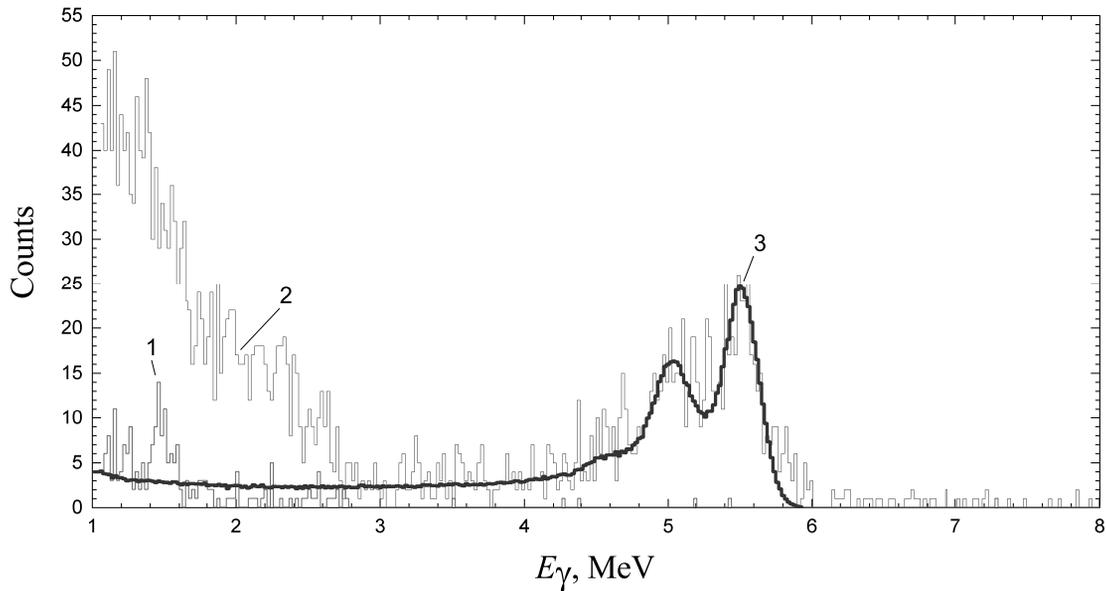


Рис. 5. (В цвете онлайн) Экспериментальные и расчетные спектры  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 5.5$  МэВ из реакции  ${}^2\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^3\text{He}$

из реакции  ${}^2\text{H}({}^2\text{H}, n){}^3\text{He}$  с материалами детектора (I, Na) и другими материалами, окружающими мишень (в основном нержавеющая сталь) в реакциях  $(n, \gamma)$ ,  $(n, n'\gamma)$  [25]. Спектр 3 — спектр  $\gamma$ -квантов, рассчитанный с помощью инструментария Geant4 (жирная сплошная линия). Отметим, что как в экспериментальном, так и в расчетном спектре присутствуют пики полного поглощения и пики выхода (одиночные и двойные). В фоновом спектре наиболее значимый пик приходится на  ${}^{40}\text{K}$  с энергией  $E_\gamma = 1.46$  МэВ.

Для калибровки энергетической шкалы осциллографа-анализатора в единицах МэВ/В использовались две  $\gamma$ -линии: пик полного поглощения  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 5.5$  МэВ из реакции  ${}^2\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^3\text{He}$ ; пик полного поглощения  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 4.438$  МэВ от источника нейтронов AmBe и спектр космических мюонов.

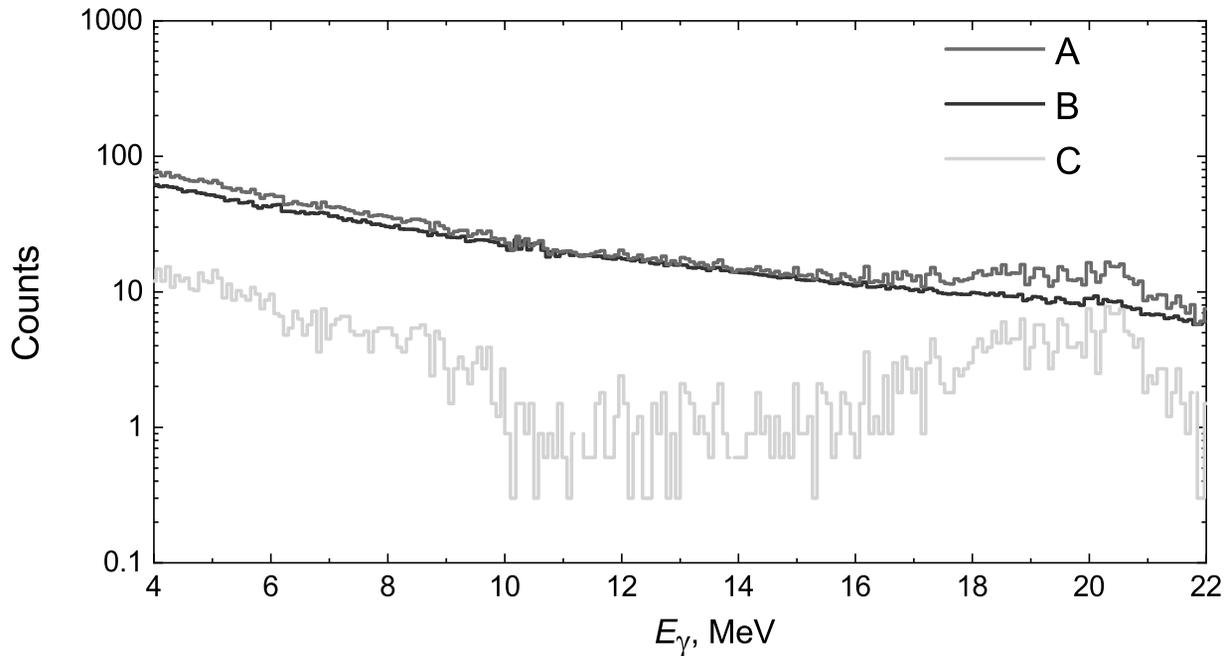
Интенсивность  $\gamma$ -излучения с энергией 4.438 МэВ была рассчитана из отношения потока нейтронов к потоку гамма-излучения источника [26] и получилась равной  $5.3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Энергетическое разрешение детекторов ( $\text{FWHM}_E$ ) находится в диапазоне 4.7–6.2%. Здесь  $\text{FWHM}_E$  — разрешение детектора, определяемое как отношение полной ширины на половине максимума пика к центроидному положению пика. Энергия мюонов, рассчитанная из приведенных в [27] коэффициентов потерь энергии мюонов, прошед-

ших через материал детектора NaI(Tl), равна 47.85 МэВ. Градуировочная зависимость имеет вид  $E_\gamma = 71.934A + 0.408$  МэВ/В при  $\chi^2 = 0.71$ , где  $A$  [В] — амплитуда сигнала детекторов.

### 3. ИЗМЕРЕНИЯ

#### 3.1. Проблема фона

При изучении реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  ( $E_\gamma = 19.8$  МэВ) сопутствующие ей фоновые процессы и методы их устранения имеют большое значение в связи с малым сечением реакции. К фоновым процессам относятся излучение окружающей среды, космическое излучение и продукты реакций, сопровождающих изучаемую реакцию. Импульсный режим работы ускорителя Холла позволяет проводить непрерывные измерения фона, вызванного космическим излучением и естественной радиоактивностью. События, вызванные только внешним фоном и зарегистрированные без подачи ускоряющего напряжения на ускоряющий промежуток, регистрируются детекторами в том же временном интервале 10 мкс, что и события, накопленные при ускорении. Космический и радиационный фон окружающей среды подавляется в  $10^5$  раз за счет импульсного режима работы ускорителя. Излучение, сопровождающее исследуемую реакцию, определяется как  $\gamma$ -излучение, возникающее в результате фо-



**Рис. 6.** (В цвете онлайн) Энергетические спектры  $\gamma$ -квантов: верхний спектр (A) — выход реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ ; средний спектр (B) — спектр гамма-излучения, образующегося в реакции  ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma)\text{X}$  за счет фоновых вторичных процессов; нижний спектр (C) — разность спектров

новых процессов за счет реакции упругого рассеяния  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, {}^1\text{H}){}^3\text{H}$ . Получившее импульс отдачи ядро  ${}^3\text{H}$  из реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, {}^1\text{H}){}^3\text{H}$  может реагировать с соседним ядром  ${}^3\text{H}$  в мишени посредством реакций

$${}^3\text{H}({}^3\text{H}, nn){}^4\text{He}, \quad Q = 11.33 \text{ МэВ}, \quad (10)$$

$${}^3\text{H}({}^3\text{H}, n_1){}^5\text{He}, \quad Q = 9.24 \text{ МэВ}, \quad (11)$$

$${}^3\text{H}({}^3\text{H}, n_0){}^5\text{He}, \quad Q = 10.4 \text{ МэВ}. \quad (12)$$

Соотношение сечений этих реакций (в процентах) составляет 70 : 20 : 10 соответственно [28]. В этих реакциях образуются коррелированные во времени пары нейтронов, а затем в окружающих мишень материалах протекают реакции  $(n, n')$ ,  $(n, n'\gamma)$  с последующим образованием фоновых  $\gamma$ -квантов высокой энергии. Спектр нейтронов от реакций (10)–(12) изменяется в диапазоне энергий 1–9 МэВ [29]. Дополнительным источником фоновых нейтронов и, следовательно,  $\gamma$ -квантов является реакция  ${}^3\text{H}({}^2\text{H}, n){}^4\text{He}$ , происходящая за счет естественной примеси дейтерия в высокочистом газе  $\text{H}_2$  на уровне  $1.35 \cdot 10^{-4}$ .

Расчет, проведенный для оценки фоновых условий по методике, описанной в работе [25] с использованием базы данных реакций МАГАТЭ [30], показал, что нейтронный выход фоновых реакций в  $10^2$

раза превышает выход  $\gamma$ -квантов исследуемой реакции.

Материалами, окружающими мишень, являются материалы детекторов NaI(Tl), корпуса ускорителя и камеры мишени из нержавеющей стали. Масса NaI(Tl)-детекторов равна приблизительно 117 кг, из них йода 98.7 кг, натрия 17.8 кг, таллия 0.5 кг.

Масса нержавеющей стали, примыкающей к детекторам, составляет около 10 кг. Измерялся спектр  $\gamma$ -квантов, возникающих в материалах, окружающих мишень, под действием нейтронов, генерируемых источником AmBe. Спектр нейтронов источника качественно аналогичен спектру нейтронов реакции (10) [31], но нейтроны источника не коррелированы во времени. Линии  $\gamma$ , вызванные взаимодействием нейтронов с окружающими веществами, были следующими:  $E_\gamma = 6.3, 6.69 \text{ МэВ}$  (I-127);  $E_\gamma = 6.2, 6.5 \text{ МэВ}$  (Tl-203);  $E_\gamma = 6.4 \text{ МэВ}$  (Na-23);  $E_\gamma = 6.76 \text{ МэВ}$  (Ti-48);  $E_\gamma = 7.631, 7.645 \text{ МэВ}$  (Fe-56);  $E_\gamma = 8.5 \text{ МэВ}$  (Cr-50, Ni-58, Ni-60, Ni-62);  $E_\gamma = 8.9 \text{ МэВ}$  (Ni-58, Ni-62) [32]. Спектр  $\gamma$ -квантов с энергиями до 10.8 МэВ связан с взаимодействием нейтронов с азотом, присутствующим в воздухе. Энергии этих  $\gamma$ -квантов ниже порога обнаружения  $E_\gamma = 14 \text{ МэВ}$ . Однако коррелированные нейтроны от реакции (10) и суперпозиции импульсов

могут индуцировать события в исследуемом диапазоне энергий.

### 3.2. Измерение выхода реакции

Измерение выхода реакции затруднено невозможностью отделить события, вызванные реакцией  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ , от событий, вызванных фоном. Типичная гистограмма энергетического распределения  $\gamma$ -квантов была аналогична показанной на рис. 6 (верхний спектр А).

Анализ показал, что выход нейтронов из фоновой реакции (10) коррелирован во времени, а особенности работы импульсного холловского ускорителя ионов усложняют измерения. В результате импульсы от детекторов NaI(Tl) могут накладываться друг на друга, а онлайн-программа обработки осциллограмм будет объединять два импульса в один импульс большой амплитуды, что приведет к различию измеренного и реального энергетических распределений событий. Реакция  ${}^2\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^3\text{He}$  косвенно доказывает, что основной причиной суперпозиции являются коррелированные нейтроны. В этой реакции нейтроны с энергией  $E_n = 2.5$  МэВ возникают за счет вторичной реакции упругого рассеяния протонов на ядрах дейтерия, вызывающей, следовательно, реакцию  ${}^2\text{H}({}^2\text{H}, n){}^3\text{He}$ . Однако на рис. 5 видно, что  $\gamma$ -кванты с энергией  $E_\gamma = 5.5$  МэВ хорошо отделены от фоновых событий, поскольку в этой реакции не образуются коррелированные нейтроны.

Для отделения событий от фона использовалось вычитание фона с нормировкой к выходу фоновых нейтронов. Для регистрации фоновых нейтронов использовался нейтронный детектор на основе  ${}^3\text{He}$ -счетчиков (рис. 1). Детектор нейтронов представляет собой сборку из 10 нейтронных счетчиков в виде трубок диаметром 3 см и длиной 50 см, заполненных смесью  ${}^3\text{He} + \text{Ar} + \text{CO}_2$  при давлении 4 атм, помещенных в полиэтиленовый замедлитель. Размеры детектора  $15 \times 30 \times 54$  см<sup>3</sup>. Собственная эффективность регистрации нейтронов, испускаемых источником AmBe, детектором  ${}^3\text{He}$  составляет 15%. Ключевой особенностью таких детекторов является их слабая чувствительность к  $\gamma$ -квантам.

Этот метод был разработан нами при изучении реакции  ${}^2\text{H}({}^4\text{He}, \gamma){}^6\text{Li}$  [33]. Во время сеансов измерений количество нейтронов регистрировалось с помощью детектора нейтронов  ${}^3\text{He}$ , а статистика  $\gamma$ -квантов собиралась с помощью детекторов NaI(Tl). Затем в источнике ионов газ  $\text{H}_2$  (водород) заменялся газом  ${}^4\text{He}$  и отдельно измерялся фон, сопровождающий реакцию  ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma)\text{X}$ . Ионы  ${}^4\text{He}^+$  были ускорены до энергии 28 кэВ.

Энергетический разброс пучка ионов  ${}^4\text{He}^+$ , измеренный описанным выше методом, равен  $\text{FWHM}_E = 20 \pm 1\%$ .

В этой реакции из-за упругого рассеяния ионов  ${}^4\text{He}^+$  на ядрах трития импульс передается ядрам трития, позволяя им взаимодействовать с соседними ядрами трития. В результате инициируется реакция (10) и образуются пары коррелированных во времени нейтронов. Спектр  $\gamma$ -квантов, индуцированных взаимодействием нейтронов с материалами, окружающими мишень, показан в среднем спектре В (рис. 6).

Время измерения выхода  $\gamma$ -квантов высоких энергий из реакций  ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma)\text{X}$ , образующихся при взаимодействии коррелированных нейтронов, генерируемых во вторичных реакциях с окружающими материалами, определялось числом нейтронных событий, регистрируемых  ${}^3\text{He}$ -нейтронным детектором при измерении выхода реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ . Эту процедуру проводили для каждой энергии иона водорода  ${}^1\text{H}^+$ . Следует отметить, что измерения фона проводились при одной энергии ионного пучка  ${}^4\text{He}^+$   $E_{\text{He}} = 28$  кэВ в лабораторной системе координат. Нет необходимости проводить измерения фона по реакции  ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma)\text{X}$  с измененной энергией пучка ионов  ${}^4\text{He}$ , так как фон нормирован на число фоновых нейтронов от реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  на разных энергиях протонов. Процедура онлайн-отбора событий аналогична той, что использовалась при измерении выхода реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ . Результат показан на рис. 6 (нижний спектр С) для энергии иона водорода  ${}^1\text{H}^+$   $E_{\text{lab}} = 12$  кэВ в виде разности энергетических спектров  $\gamma$ -квантов, полученных в экспериментах с водородом и гелием.

Относительный выход фоновых событий увеличивается при уменьшении энергии ионов  ${}^1\text{H}^+$ , поскольку сечение резерфордского рассеяния обратно пропорционально квадрату энергии протона. Поэтому методика измерений была следующей: измерения выхода реакции проводились при увеличении энергии протонов снизу вверх, а потери трития на глубине пробега протонов для данной энергии измерялись с помощью квадрупольного масс-спектрометра Extorr ХТ-100. Экспериментальные данные, полученные с помощью масс-спектрометра Extorr ХТ-100 в рамках дневного сеанса измерений, показывают, что  $4 \cdot 10^{14}$  атомов трития вылетает из тритиевой мишени в результате реакции упругого рассеяния  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, {}^1\text{H}){}^3\text{H}$  (при энергии  $E_{\text{lab}} = 34$  кэВ), а  $4.8 \cdot 10^{16}$  атомов трития вылетает из мишени за счет  $\beta$ -распада трития. При числе ядер трития по пробегу при этой энергии ионов  ${}^1\text{H}^+$

**Таблица 1.** Экспериментальный выход  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 19.8$  МэВ реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$ , нормированный на попадание в мишень  $10^{16}$  ионов водорода  ${}^1\text{H}^+$ , прошедших через мишень.  $F_{\text{H}} = N_{\text{H}}/S_m$  — плотность потока ионов  ${}^1\text{H}^+$ , где  $S_m$  — площадь мишени

$E_{lab}$ , кэВ	$F_{\text{H}} \cdot 10^{-16}$	$N_{exp} \pm \sigma$
$12.00 \pm 0.12$	3.5	$0.82 \pm 0.12$
$14.00 \pm 0.14$	2.5	$1.69 \pm 0.21$
$16.00 \pm 0.16$	1.4	$2.99 \pm 0.36$
$20.00 \pm 0.20$	0.6	$7.5 \pm 0.8$
$24.00 \pm 0.24$	0.4	$14.9 \pm 1.5$
$28.00 \pm 0.28$	0.4	$25.1 \pm 2.1$
$30.00 \pm 0.30$	0.4	$31.9 \pm 2.0$
$32.00 \pm 0.32$	0.4	$40 \pm 2$
$34.00 \pm 0.34$	0.4	$47 \pm 2$

$N_T = 3.2 \cdot 10^{20}$  потеря трития из мишени за 6 ч составляет  $1.2 \cdot 10^{-4} \%$  и  $3.7 \cdot 10^{-3} \%$  соответственно для двух указанных выше процессов. Для минимальной энергии  $E_{lab} = 12$  кэВ потери атомов трития по пробегу составляют  $0.6 \cdot 10^{-3} \%$  и  $3.7 \cdot 10^{-3} \%$  соответственно. Таким образом, поправки на потерю атомов трития из мишени настолько малы, что практически не влияют на выход реакции.

Учитывалось также, что примесь молекулярного водорода в пучке ионов  $\text{H}^+$  вызывает два эффекта. При попадании в мишень молекула водорода диссоциировала на два атомарных иона водорода, что приводило к эффекту удвоения тока. В свою очередь, два атомарных иона водорода с энергией вдвое меньшей, чем у молекулярного водорода, увеличивали выход реакции. Поправка на выход реакции менее 1%.

Температурный эффект также незначителен, меньше 0.5%. Температура мишени, измеренная термометром при  $E_{lab} = 34$  кэВ, за время дневного сеанса измерений увеличивается на  $22^\circ\text{C}$  по сравнению с комнатной температурой.

В табл. 1 приведены экспериментальные результаты для диапазона энергий ионов водорода  $E_{lab} = 12\text{--}34$  кэВ, при пороге обнаружения  $E_\gamma = 14$  МэВ.

Процедура вычитания фона потребовала на порядок меньшего флюенса ионов  ${}^4\text{He}^+$ . Поскольку сечение упругого рассеяния ядер определяется формулой Резерфорда, в упрощенном виде  $\sigma \sim z^2/E^2$ ,

**Таблица 2.** Экспериментальные значения S-фактора при энергии столкновения  $E_{col}$

$E_{lab}$ , кэВ	$E$ , кэВ	$E_{col}$ , кэВ	$S_{exp}$ , мб · кэВ
12	8.99	7.83	$2.01 \pm 0.29$
14	10.49	9.01	$2.11 \pm 0.26$
16	11.99	10.18	$2.11 \pm 0.25$
20	14.99	12.47	$2.18 \pm 0.23$
24	17.99	14.71	$2.24 \pm 0.23$
28	20.99	16.91	$2.24 \pm 0.19$
30	22.49	18	$2.28 \pm 0.14$
32	23.98	19.08	$2.34 \pm 0.12$
34	25.48	20.145	$2.28 \pm 0.10$

где  $z$  — заряд налетающей частицы, а  $E$  — энергия в системе центра масс. Для упругого протон-тритиевого рассеяния  $z = 1$ ,  $E = 3E_{lab}/4$ , для альфа-тритиевого рассеяния  $z = 2$ ,  $E = 3E_{lab}/7$ . Следовательно, отношение вероятностей упругого альфа-тритиевого рассеяния к вероятности упругого протон-тритиевого рассеяния в направлении того же телесного угла при равной энергии в лабораторной системе равно 12.

Выходы обеих реакций статистически независимы и описываются нормальным распределением (распределением Гаусса), где  $\sigma$  — стандартное отклонение (уровень достоверности 68%). Для каждой энергии статистическая ошибка определяется как квадратный корень из суммы квадратов статистических ошибок двух измерений. Доверительному уровню 95% соответствует доверительный интервал  $\pm 1.96\sigma$ .

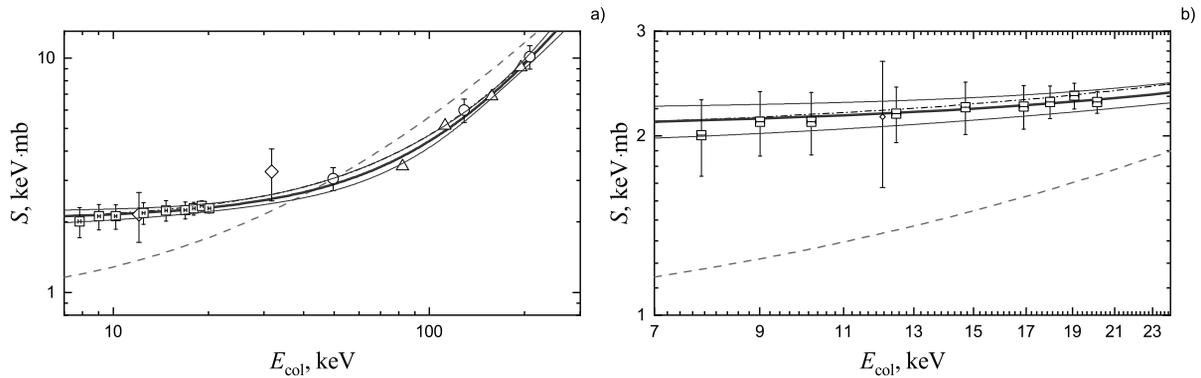
Общая длительность времени эксперимента составляет 1060 ч.

### 3.3. Систематические ошибки измерения

1. Погрешность измерения количества ионов в пучке составляет 1% и не зависит от энергии.

2. Погрешность измерения энергии ионов в пучке составляет 1% и слабо зависит от энергии.

3. Погрешность измерения эффективности регистрации  $\gamma$ -квантов с энергией  $E_\gamma = 19.8$  МэВ. Эффективность регистрации  $\gamma$ -квантов моделировалась методом Монте-Карло с помощью инструментария Geant4. Эффективность регистрации событий с пороговой энергией определялась как отношение числа событий с энергией выше пороговой,



**Рис. 7.** (В цвете онлайн) а) Зависимость  $S$ -фактора от энергии  $E_{\text{col}}$ . б) Увеличенная область низких энергий, содержащая данные настоящего эксперимента. Квадраты — настоящий эксперимент, треугольники — данные из [16], кружки — данные из [17], ромбы — экспериментальные данные из [18], жирная сплошная линия —  $S$ -фактор с параметрами (19), тонкие сплошные линии — 99-процентный доверительный интервал  $S$ -фактора с параметрами (19), штрихпунктирная линия —  $S$ -фактор (8) [18], штриховая линия —  $S$ -фактор (9) [10]

регистрируемых сборкой детекторов, к числу первичных  $\gamma$ -квантов.

При моделировании ошибка эффективности обнаружения определяется статистической ошибкой метода Монте-Карло и ошибкой измерения энергетического порога. Значением верхнего предела оценки статистической погрешности метода Монте-Карло для  $N$  является число первично испущенных  $\gamma$ -квантов ( $1 \cdot 10^6$ )  $\delta = 0.254\%$ . Погрешность измерения пороговой энергии зависит от энергетического разрешения детекторов. Эта ошибка для сборки детектора составляет 2.774%. Суммарная ошибка составляет 2.786%.

4. Погрешность измерения числа ядер в тритиевой мишени. а) Первоначальное определение количества ядер по глубине мишени методом ERD, погрешность этого метода составляет 2% [34]. б) Точность определения потери ядер трития из мишени с помощью масс-спектрометра Extorg XT-100 составляет 2%. в) Неоднородность распределения ядер трития по площади, полученная при измерениях в 12 точках на поверхности мишени методом электронно-индуцированной рентгенофлуоресцентной спектроскопии, составляет 4%.

Суммарная систематическая ошибка составляет 5.8%.

#### 4. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Сечение ядерных реакций (1)–(5) при малых энергиях столкновения  $E$  описывается уравнением Гамова – Солшителя (6) со слабо зависящим от энергии астрофизическим фактором  $S(E)$ . Для наход-

дения  $S(E)$ -факторов реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  были использованы выходы, приведенные в табл. 2, которые сравнивались с расчетными выходами.

Для расчета выходов ядерных реакций при низких энергиях необходимо учитывать энергетическое распределение первичного пучка. Отметим, что достаточно широкое энергетическое распределение ионов  $\text{H}^+$  не препятствует получению достоверных данных о ядерных реакциях, поскольку речь идет об измерении сечения реакции в условиях «толстой мишени». Подобная задача была специально рассмотрена в работе [35], где представлены результаты анализа методом Монте-Карло данных, полученных при взаимодействии пучка дейтронов с металлическими мишенями, насыщенными дейтерием. Код SRIM использовался для расчета энергетического спектра дейтронов, прошедших через мишень определенной толщины. Показано, что энергетические спектры ускоренных ионов дейтерия с одинаковой начальной энергией дейтрона и энергетическим разбросом  $\text{FWHM}_E$  1% и 16% практически идентичны после прохождения ими мишеней толщиной более 50 нм. Измеренные энергетические спектры использовались для расчета выхода нейтронов из dd-реакции в диапазоне энергий спектра падающих дейтронов от 7 до 12 кэВ. Для определения потенциала электронного экранирования dd-реакции расчетные выходы нейтронов сравнивались с экспериментальными данными. Расчеты проводились при разбросе энергии пучка дейтронов ( $\text{FWHM}_E$ ) 1% и 16%. При этом площади под распределениями выхода нейтронов, соответствующими  $\text{FWHM}_E$  1% и 16%, различаются незначительно. То есть было

показано, что пучки дейтронов с относительно высоким энергетическим разбросом (16 %) дают практически такой же результат, как и моноэнергетические пучки дейтронов, формируемые на традиционных ускорителях [35]. Мы полагаем, что такая же ситуация справедлива и для комбинации насыщенной тритием мишени и ускоренных протонов.

Обозначим энергетическое распределение пучка как  $F(E; E_0)$  со вторым аргументом  $E_0$ , указывающим максимум распределения  $F(E; E_0)$  и совпадающим со средней энергией пучка при симметричном относительно максимума распределении. Энергетическая ширина пучка обычно не меняется в диапазоне экспериментальных значений энергий и не указывается в качестве аргумента функции распределения  $F$ . С учетом распределения энергии ожидаемые выходы можно записать в виде

$$Y^{calc}(E_0) = Q\epsilon \int_0^\infty F(E'; E_0) dE' \int_0^\infty n_T(x) \sigma(E(x, E')) dx, \quad (13)$$

где  $Q$  — число частиц, падающих на мишень,  $\epsilon$  — эффективность детектора,  $n_T(x)$  — концентрация трития на глубине мишени  $x$ ,  $E(x, E')$  — энергия падающей частицы на глубине  $x$  при условии, что ее начальная энергия была  $E'$ . Бесконечный предел при интегрировании по глубине  $x$  указывает на бесконечно толстую мишень. Отдельные расчеты показывают, что пробег протонов в нашей мишени не превышает половины ее толщины. При известных S-факторах можно вычислить выход (13), если известны функции торможения протонов в мишени. В нашем случае возникают непринципиальные трудности, вызванные сильно изменчивым составом мишени, состоящей из десяти слоев концентраций, определяемых экспериментально (рис. 2). Поэтому при расчете (13) интеграл по  $x$  был разбит на интегралы по слоям с постоянным составом мишени и своей функцией торможения, которая определялась с помощью SRIM [24]. Функция распределения

пучка по энергии  $F(E; E_0)$  имеет вид функции Гаусса с максимумом при энергии  $E_0$  и относительной шириной ( $\text{FWHM}_E$ ) 16 %.

Далее можно определить параметры модели с энергиями столкновений  $E_{col}$ , которые определяют значения энергий, максимально дающих вклад в выходы (13). Для этого проведем в (13) стандартную замену переменных для интегрирования по энергии на глубине  $x$  и изменим порядок интегрирования:

$$Y^{calc}(E_0) = Q\epsilon \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{27.195}{\sqrt{E}}\right) \left(-\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \times \left(\int_E^\infty n_T(x(E, E')) F(E'; E_0) dE'\right). \quad (14)$$

Сложный аргумент в плотности трития  $n_T(x(E, E'))$  определяет глубину мишени для известной энергии частиц в мишени  $E$  при условии, что начальная энергия была  $E'$ . Схема извлечения экспериментального значения S-фактора из уравнений типа (14) была разработана ранее [36] и многократно использовалась (например, в [20, 21, 37]). Из схемы следует, что при линейной зависимости S-фактора от энергии уравнение (14) без приближений можно переписать следующим образом:

$$Y^{calc}(E_0) = Q\epsilon S(E_{col}) \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{27.195}{\sqrt{E}}\right)}{E} \left(-\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \times \left(\int_E^\infty n_T(x(E, E')) F(E'; E_0) dE'\right). \quad (15)$$

В этом случае  $E_{col}$  представляет собой среднюю энергию относительно распределения  $P(E)$ :

$$E_{col} = \int_0^\infty P(E) E dE, \quad P(E) = \frac{\frac{\exp\left(-\frac{27.195}{\sqrt{E}}\right)}{E} \left(-\frac{dE}{dx}\right)^{-1} \left(\int_E^\infty n_T(x(E, E')) F(E'; E_0) dE'\right)}{\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{27.195}{\sqrt{E}}\right)}{E} \left(-\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \left(\int_E^\infty n_T(x(E, E')) F(E'; E_0) dE'\right)}. \quad (16)$$

Таким образом, приравнивая  $Y^{calc}(E_i)$  из (16) к экспериментальным значениям  $N_{exp}(E_i)$  из табл. 2, можно рассчитать  $S(E_{col})$ , где  $E_{col}$  определяется из (16). Экспериментальные значения S-фактора  $S_{exp}$  при расчетных энергиях  $E_{col}$  приведены в табл. 2.

Ошибки S-фактора (стандартное отклонение) являются только статистическими, отражая статистику выходов реакции  ${}^3\text{H}({}^1\text{H}, \gamma){}^4\text{He}$  и фоновой реакции  ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma)\text{X}$ . Доверительному уровню 95% соответствует доверительный интервал  $\pm 1.96\sigma$ .

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В диапазоне энергий 7.83–20.145 кэВ (в системе отсчета центра масс) поведение S-фактора, как было отмечено выше, практически линейно. Тем не менее в более широком диапазоне энергий до 200 кэВ S-факторы описываются квадратичной зависимостью (8). Для определения поведения зависимости S-фактора в диапазоне энергий до 200 кэВ мы включили в наши расчеты экспериментальные значения из работ [16–18].

Для получения значений параметров (8) для всех экспериментальных значений S-фактора был построен функционал:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(S_{exp}(E_i) - S(E_i; S_0, S_1, S_2))^2}{(\Delta S_{exp}(E_i))^2}, \quad (17)$$

и его минимизация определяет  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и значения  $\chi^2$ . В формуле (17) для  $\chi^2$  величина  $\Delta S_{exp}(E_i)$  представляет собой суммарные ошибки S-фактора из [16–18] при энергии  $E_i$  (табл. 2).

Таким образом, в результате минимизации функционала (17) были получены следующие значения квадратичной модели S-фактора:

$$\begin{aligned} S_0 &= (2.033 \pm 0.059) \text{ кэВ} \cdot \text{мб}, \\ S_1 &= (1.076 \pm 0.279) \cdot 10^{-2} \text{ мб}, \\ S_2 &= (1.313 \pm 0.149) \cdot 10^{-4} \text{ мб/кэВ}. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом  $\chi^2 = 0.34$  при 15 степенях свободы показывает хорошее соответствие между моделью и экспериментом, уровень достоверности составляет 68.27%. Для доверительной вероятности 99% доверительный интервал для значений  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  можно получить с помощью  $t$ -распределения Стьюдента.

Для уровня достоверности 99% и 15 степеней свободы параметр Стьюдента равен  $t = 2.9467$  [38]. Тогда

$$\begin{aligned} S_0 &= (2.033 \pm 0.178) \text{ кэВ} \cdot \text{мб}, \\ S_1 &= (1.076 \pm 0.837) \cdot 10^{-2} \text{ мб}, \\ S_2 &= (1.313 \pm 0.448) \cdot 10^{-4} \text{ мб/кэВ}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для наглядности модельный S-фактор с параметрами (18) и его экспериментальные значения из табл. 2 представлены на рис. 7. На этом же рисунке показаны S-факторы (8) [18] и (9) [10].

Следует отметить, что измеренные в нашем эксперименте S-факторы реакции  ${}^3\text{H}(p, \gamma){}^4\text{He}$  в сочетании с экспериментальными данными в более широком диапазоне энергий [16–18] значительно повысили точность параметров S-факторов: в 3.4 раза для  $S_0$ , в 1.4 раза для  $S_1$  и в 2 раза для  $S_2$ .

Необходимо обсудить два вопроса: могут ли эффекты электронного экранирования ядерной реакции и каналирования повлиять на наши результаты? Известно, что эффект электронного экранирования хорошо проявляется в поведении S-фактора реакции в зависимости от энергии. S-фактор уменьшается при уменьшении энергии, а затем, как правило, начинает расти при дальнейшем уменьшении энергии [7], что не наблюдается в наших экспериментальных данных, рис. 7. Кроме того, эффект электронного экранирования, как правило, не обнаруживается при изучении реакций на тритиевых мишенях [8]. Что касается эффекта каналирования, то в [39] в качестве примера, где обнаружены эффекты каналирования, использовались специально изготовленные мишени. Мишень из тритида титана была получена путем насыщения титана тритием из газовой фазы при высоких температурах и давлениях. Этот метод предотвращает рост поликристаллов в предпочтительном направлении. Возможно текстурирование титановой фольги из-за прокатки, но рентгеноструктурный анализ не показал предпочтительного направления с индексами Миллера [100] на нашей мишени. Наоборот, кристаллы мишени ориентированы преимущественно в направлении антиканалирования, с индексами Миллера [111].

Наша экстраполяция отличается от единственного теоретического расчета [10], повторенного в работе [40], для  $S(0)$  в два раза. В данной работе S-фактор рассчитывался с использованием модели двухчастичного взаимодействия, где параметры парных  $p^3\text{H}$ -потенциалов гауссовой формы в S- и P-волнах определялись из эксперименталь-

ных данных по  $p^3\text{H}$ -рассеянию и энергии связи  $^4\text{He}$ . Можно предположить, что либо двухчастичная модель не описывает все механизмы взаимодействия при низких энергиях, либо данные о  $p^3\text{H}$ -потенциалах и энергии связи  $^4\text{He}$  не полны. Это требует нового независимого теоретического расчета. При этом в работе [13] отмечается, что было бы весьма важно иметь новые и более точные измерения сечений упругого рассеяния  $p + ^3\text{H}$  при низких энергиях ( $< 600$  кэВ), поскольку имеющиеся экспериментальные данные довольно старые и имеют ограниченный угловой диапазон. Наличие более точных волновых функций рассеяния  $n + ^3\text{H}$ ,  $p + ^3\text{He}$ ,  $p + ^3\text{H}$  и  $n + ^3\text{He}$  позволило бы изучить при более низких энергиях реакции радиационного захвата, такие как  $p + ^3\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$  и  $n + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$ .

Мы надеемся, что результаты нашего исследования будут стимулировать экспериментальные и теоретические исследования в этом направлении.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность А. П. Кобзеву за измерение атомных концентраций трития, титана и примесей в мишени из триада титана.

**Финансирование.** Экспериментальные измерения проводились в Томском политехническом университете в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского политехнического университета (грант ТПУ СЕР 2021).

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. A. Bertulani and T. Kajino, *Progr. Part. Nucl. Phys.* **89**, 56 (2016), <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2016.04.001>.
2. R. H. Cyburt, B. D. Fields, K. A. Olive, and T. H. Yeh, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 015004 (2016), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.015004>.
3. P. D. Serpico, S. Esposito, F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, and O. Pisanti, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2004**, 010 (2004), <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2004/12/010>.
4. C. Pitrou, A. Coc, J.-Ph. Uzan, and E. Vangioni, *Phys. Rep.* **754**, 1 (2018), <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.04.005>.
5. B. D. Fields, K. A. Olive, Tsung-Han Yeh, and Ch. Youngd, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, 010 (2020), <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/03/010>, [arXiv:1912.01132](https://arxiv.org/abs/1912.01132).
6. Planck Collaboration, *Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters*, <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
7. R. S. de Souza, Ch. Iliadis, and A. Coc, *Astrophys. J.* **872**, 75 (2019), <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aafda9>.
8. R. S. de Souza, S. Reece Boston, A. Coc, and Ch. Iliadis, *Phys. Rev. C* **99**, 014619 (2019), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.99.014619>.
9. C. Pitrou and M. Pospelov, *Phys. Rev. C* **102**, 015803 (2020), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.015803>.
10. B. Dubovichenko, A. V. Dzhazairov-Kakhramanov, and N. V. Afanasyeva, *Nucl. Phys. A* **963**, 52 (2017), <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.006>.
11. D. S. Firak, A. J. Krasznahorkay, M. Csatlós et al., *EPJ Web Conf.* **232**, 04005 (2020).
12. A. J. Krasznahorkay et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 042501 (2016).
13. M. Viviani, L. Girlanda, A. Kievsky, and L. E. Marcucci, *Phys. Rev. C* **102**, 034007 (2020), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.034007>.
14. E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **88**, 547 (1952).
15. C. E. Rolfs and W. S. Rodney, *Cauldrons in the Cosmos*, Univ. Chicago Press, Chicago (1988).
16. J. E. Perry and S. J. Bame, *Phys. Rev.* **99**, 1368 (1955).
17. K. I. Hahn, C. R. Brune, and R. W. Kavanagh, *Phys. Rev. C* **51**, 1624 (1995), <https://journals.aps.org/prc/abstract/10.1103/PhysRevC.51.1624>.
18. R. S. Canon, S. O. Nelson, K. Sabourov et al., *Phys. Rev. C* **65**, 044008 (2002) <https://journals.aps.org/prc/abstract/10.1103/PhysRevC.65.044008>.
19. V. A. Varlachev, G. N. Dudkin, B. A. Nechaev, F. M. Pen'kov, M. Filipowicz, A. V. Philippov, D. S. Flusova, D. K. Chumakov, and E. N. Shuvalov, *JETP Lett.* **113**, 231 (2021), <https://doi.org/10.1134/S0021364021040111>.
20. V. M. Bystritsky, V. V. Gerasimov, A. R. Krylov, S. S. Parzhitskii, P. S. Ananin, G. N. Dudkin, V. L. Kaminskii, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, A. V. Petrov, G. A. Mesyats, M. Filipowicz, J. Wozniak, and Vit. M. Bystritskii, *Eur. Phys. J. A* **36**, 151 (2008), <https://doi.org/10.1140/epja/i2008-10588-3>.

21. V. M. Bystritsky, Vit. M. Bystritskii, G. N. Dudkin, M. Filipowicz, S. Gazi, J. Hurane, A. P. Kobzev, G. A. Mesyats, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, S. S. Parzhitskii, F. M. Pen'kov, A. V. Philippov, V. L. Kaminskii, Yu. Zh. Tuleushev, and J. Wozniak, *Nucl. Phys. A* **889**, 93 (2012), <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2012.07.001>.
22. V. M. Bystritsky, Vit. M. Bystritskii, G. N. Dudkin, B. A. Nechaev, and V. N. Padalko, *Phys. Part. Nucl.* **48**, 659 (2017), <http://dx.doi.org/10.1134/S1063779617040025>.
23. *Metal Hydrides*, ed. by W. M. Mueller, Acad. Press, New York, London (1968).
24. J. F. Ziegler and J. P. Biersack, *Computer Code SRIM* (2011), [www.srim.org](http://www.srim.org).
25. В. М. Быстрицкий, В. А. Варлачев, Г. Н. Дудкин, А. С. Нуркин, Б. А. Нечаев, В. Н. Падалко, Ф. М. Пен'ков, Ю. Ж. Тулеушев, М. Филиппович, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **152**, 877 (2017) [V. M. Bystritsky, V. A. Varlachev, G. N. Dudkin, A. S. Nurkin, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, F. M. Penkov, Y. Z. Tuleushev, M. Filipovich, and A. V. Philippov, *JETP* **125**, 741 (2017), <https://doi.org/10.1134/S1063776117100041>].
26. S. Croft, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* **281**, 103 (1989).
27. D. E. Groom, N. V. Mokhov, and S. Striganov, *Atom. Data Nucl. Data Tabl.* **76**, No. 2 (2001).
28. D. T. Casey, J. A. Frenje, M. G. Johnson et al., *Phys. Rev. Lett.* **109**, 025003 (2012), <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.025003>.
29. C. R. Brune, J. A. Caggiano, D. B. Sayre et al., *Phys. Rev. C* **92**, 014003 (2015), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.92.014003>.
30. <https://www-nds.iaea.org/ENDF/B-VIII/>
31. H. R. Vega-Carrillo, E. Manzanares-Acuna, A. M. Becerra-Ferreiro, and A. Carrillo-Nuneza, *Appl. Rad. Isotop.* **57**, 167 (2002), <http://cantera.reduaz.mx/~rvega>.
32. R. B. Firestone and V. S. Shirley, *Table of Isotopes*, Wiley, New York (1998).
33. V. M. Bystritsky, G. N. Dudkin, A. R. Krylov, S. Gazi, J. Huran, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, A. B. Sadovskiy, Yu. Zh. Tuleushev, M. Filipowicz, and A. V. Philippov, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **825**, 24 (2016), <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2016.04.034>.
34. A. P. Kobzev, J. Huran, D. Maczka, and M. Turek, *Vacuum* **83**, S124 (2009), <http://dx.doi.org/10.1016/j.vacuum.2009.01.042>.
35. M. Filipowicz, V. M. Bystritsky, G. N. Dudkin, F. M. Pen'kov, and A. V. Philippov, *Int. J. Mod. Phys. E* **21**, 1250089 (2012).
36. V. M. Bystritsky and F. M. Pen'kov, *Phys. Atom. Nucl.* **66**, 75 (2003).
37. V. M. Bystritsky, V. V. Gerasimov, A. R. Krylov, S. S. Parzhitskii, P. S. Ananin, G. N. Dudkin, V. L. Kaminskii, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, A. V. Petrov, G. A. Mesyats, M. Filipowicz, J. Wozniak, and Vit. M. Bystritskii, *Nucl. Instrum. Meth. A* **595**, 543 (2008), <https://doi.org/10.1016/j.nima.2008.07.152>.
38. F. E. James, *Statistical Methods in Experimental Physics*, World Sci., Singapore (2006).
39. V. M. Bystritsky, Vit. M. Bystritskii, G. N. Dudkin, M. Filipowicz, S. Gazi, J. Huran, G. A. Mesyats, B. A. Nechaev, V. N. Padalko, S. S. Parzhitskii, F. M. Pen'kov, A. V. Philippov, and Y. Z. Tuleushev, *JETP Lett.* **99**, 497 (2014), <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364014090033>.
40. S. Dubovichenko, A. Dzhazairov-Kakhramanov, and N. Burkova, *Int. J. Mod. Phys. E* **28**, 1930004 (2019), <http://dx.doi.org/10.1142/S0218301319300042>.

# О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАВИТОНА НА ФОНЕ ИСКРИВЛЁННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

*Е. В. Арбузова<sup>a,b\*</sup>, А. Д. Долгов<sup>c\*\*</sup>, Л. А. Панасенко<sup>c\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Кафедра высшей математики, Государственный университет «Дубна»,  
141983, Московская обл., Дубна, Россия*

<sup>b</sup> *Физический факультет, Новосибирский государственный университет,  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>c</sup> *Объединённый институт ядерных исследований,  
141980, Московская обл., Дубна, Россия*

Поступила в редакцию 02 апреля 2022 г.,  
после переработки 02 апреля 2022 г.  
Принята к публикации 17 мая 2022 г.

Анализируется уравнение, описывающее распространение гравитационных волн (ГВ) на фоне произвольного искривленного пространства-времени. Найдены новые слагаемые, которые отсутствуют в общепринятой однородной и изотропной космологии Фридмана. Представлено несколько реалистичных примеров метрик, где проявляются эти новые слагаемые. Кратко обсуждаются возможные приложения для ГВ очень низких частот.

DOI: 10.31857/S0044451022090073

EDN: EKMVPJ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение гравитационных волн (ГВ) на фоне пространства Минковского и на фоне искривленных пространств было детально рассмотрено в литературе, например в книгах [1–6]. Однако в космологической ситуации рассмотрение ограничено конформно-плоским пространством Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ). В настоящей работе мы снимаем это ограничение и выводим уравнение движения гравитационных волн в произвольной пространственно-временной метрике. Мы показываем, что в уравнении для распространения ГВ на фоне произвольного пространства-времени возникают дополнительные слагаемые, отсутствующие в случае метрики ФЛРУ.

Формально в классической книге [1] разложение точного тензора кривизны до первого порядка по малому тензору возмущения  $h_{\mu\nu}$  представле-

но в произвольной фоновой метрике, см. уравнение 108.4. При этом уравнение сразу же сводится к случаю пустого пространства с исчезающим тензором Риччи,  $R_{\mu\nu} = 0$ , чтобы получить каноническое уравнение  $D^2 h_{\mu\nu} = 0$  (уравнение 108.7 из книги [1]). Тем не менее, в книге явно указано, что ненулевой тензор Риччи изменит уравнение 108.7, и этот случай может представлять интерес.

Соответствующий разд. 1.5 книги [4] соответствует разделу из книги [1], см. уравнение 1.172. Это уравнение также применено к пустому пространству с исчезающим тензором энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ . Цитируем книгу [4]: «Снаружи от материальных источников  $T_{\mu\nu} = 0 \dots$  говорит нам, что  $R_{\mu\nu} = 0$ ». Это немедленно исключает приложение уравнения 1.172 к космологии, помимо тривиального случая асимптотически высокой частоты. В этом случае замыкаются все интересные эффекты, относящиеся к метрике ФЛРУ и тем более к отклонениям от пространства-времени ФЛРУ.

В книге [4] утверждается, что невозможно зафиксировать фоновую метрику, не вводя так называемые «низкие» и «высокие» члены, соответствующие медленно и быстро меняющимся величинам. Это условие противоречит основным рассуждениям в литературе о распространении ГВ

\* E-mail: arbusova@uni-dubna.ru

\*\* E-mail: dolgov@nsu.ru

\*\*\* E-mail: l.vetoshkina@g.nsu.ru

на фоне пространства-времени ФЛРУ. Общепринято, что фоновая метрика обычно просто берется в форме ФЛРУ, и к каким-либо проблемам это не приводит.

В настоящей работе проведена незначительная (хотя технически более сложная) модификация описания распространения ГВ в пространстве-времени, отличном от ФЛРУ, с примерами реалистичной фоновой метрики, которая определяется аналогично определению фона ФЛРУ. Обнаружено, что в таком случае более общей метрики существует несколько новых членов в уравнении, описывающем распространение ГВ, а также имеет место смешивание тензорных мод со скалярными. Все это отсутствует в случае фона ФЛРУ.

Важно отметить, что для пространства-времени, отличного от пространства ФЛРУ, невозможно ввести стандартные условия калибровки, допустимые для метрики Минковского и метрики ФЛРУ. Из-за этого усложнения нельзя разделить распространение чистых тензорных от скалярных и/или векторных мод. Хорошо известен тот факт, что может существовать смешивание между тензорными и скалярными модами в присутствии материи и сильной анизотропии (как в пространстве-времени Бьянки первого типа) или в присутствии неоднородностей. Однако в настоящей работе сделан более общий вывод без указания какой-либо конкретной формы метрики.

Как показано в книге [2], распространение гравитона в пустом, но искривленном пространстве-времени описывается уравнением

$$D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - 2R_{\alpha\mu\nu\beta} h^{\alpha\beta} = 0, \quad (1)$$

где  $h_{\mu\nu}$  — тензор возмущения полной метрики:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$g_{\mu\nu}$  — фоновая метрика, ковариантная производная  $D_\alpha$  определена относительно фоновой метрики, а  $R_{\alpha\mu\nu\beta}$  — тензор Римана в фоновом пространстве-времени, который предполагается не равным нулю, в то время как тензор Риччи исчезает,  $R_{\mu\nu} = 0$ .

В статье [7] утверждается, что левая часть уравнения (1) не изменится в случае распространения гравитона в однородной и изотропной вселенной, описываемой канонической метрикой ФЛРУ и для пространства-времени, заполненного идеальной жидкостью. Как тензор энергии-импульса фона,  $T_{\mu\nu}$ , так и поправка к нему первого порядка,  $T_{\mu\nu}^{(1)}$ , так же как тензор Риччи,  $R_{\mu\nu}$ , предпола-

гаются не равными нулю. Разложим полный тензор энергии-импульса  $\bar{T}_{\mu\nu}$  как:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (3)$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса фоновой материи, а  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  — индуцированный возмущениями.

Плотность энергии гравитационных волн является величиной второго порядка по  $h_{\mu\nu}$ , и ей пренебрегают, как и всеми другими вкладками второго порядка. Обычно предполагается, что  $T_{\mu\nu}^{\nu(1)}$  для смешанных компонент равен нулю. Это условие зависит от типа возмущений материи и, как хорошо известно, может быть выполнено для идеальной жидкости. При таком условии уравнение (1), переписанное в терминах смешанных компонент, сохраняет одну и ту же форму как в пустом, так и в заполненном пространстве.

Однако тут есть тонкий момент. Если наивно поднять или опустить индексы в  $T_{\mu\nu}^{\nu(1)}$  при помощи фоновой метрики, то можно заключить, что  $T_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ . Если это так, то уравнения для распространения ГВ в терминах смешанных и нижних компонент не будут эквивалентны для произвольной метрики, а не только для метрики ФЛРУ. Действительно, далее показано, что если  $T_{\mu\nu}^{\nu(1)} = 0$ , тогда  $T_{\mu\nu}^{(1)} \neq 0$ , и учет этого факта приводит к эквивалентным уравнениям в терминах смешанных и нижних компонент в произвольной метрике.

С другой стороны, если предположить, что  $T_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ , то результирующее уравнение в заполненном пространстве должно было бы значительно отличаться, даже в пространстве ФЛРУ, от принятого в литературе канонического уравнения, записанного в терминах смешанных компонент  $h_{\nu}^{\mu}$ , не говоря уже о произвольном пространстве-времени, рассматриваемом в настоящей работе.

В общепринятом подходе к описанию распространения гравитационных волн на фоне ФЛРУ вводятся следующие условия поперечности и бесследовости  $h_{\nu}^{\mu}$ :

$$D_{\mu} h_{\nu}^{\mu} = 0, \text{ and } h_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (4)$$

Во многих работах проверено, что уравнение (1) позволяет ввести эти условия в пространстве Эйнштейна (в пустом пространстве) с  $R_{\mu\nu} = 0$ . Также хорошо известно, что аналогичное верно и для заполненного пространства-времени ФЛРУ. Но, оказалось, что эти условия нарушаются в пространстве-времени с произвольной метрикой, отличной от метрики ФЛРУ. Следовательно, могут распространяться продольные (скалярные) моды ГВ, и в общем случае тензорные и скалярные моды смешиваются. Эта

ситуация схожа с распространением продольной моды электромагнитной волны в плазме и возникновением ненулевой эффективной массы фотона, равной плазменной частоте.

Наши результаты полностью согласуются, в частности, с результатами работы [8], где рассматривается очень частный случай Риччи-плоской метрики (т.е. пространства с  $R_{\mu\nu} = 0$ ), а также с результатами, приведенными в многочисленной существующей литературе, посвященной распространению ГВ в пространстве-времени ФЛРУ с  $R_{\mu\nu} \neq 0$ .

Кажущееся несоответствие между уравнениями, описывающими распространение ГВ в терминах  $h_{\mu\nu}$  и  $h_{\nu}^{\mu}$ , связано с тем фактом, что  $T_{\mu\nu}^{(1)} \neq g_{\mu\alpha} T_{\nu}^{(1)\alpha}$ . Действительно,

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\nu} \bar{T}_{\mu}^{\alpha} = (g_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu})(T_{\mu}^{\alpha} + T_{\nu}^{(1)\alpha}), \quad (5)$$

так что  $T_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\alpha\nu} T_{\mu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha} T_{\nu}^{(1)\alpha}$ . Прибавление этого слагаемого в правой части уравнения (1) позволяет наложить условие поперечности на это уравнение, поэтому дополнительные моды распространения не возбуждаются на фоне ФЛРУ, в противоположность выраженному в статье [8] опасению. Подробнее см. обсуждение ниже уравнения (28).

В книге [6] детальный вывод уравнения, описывающего распространение ГВ на фоне ФЛРУ представлен для интервала фона, выраженного в терминах конформного времени  $\tau$ :

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (6)$$

в предположении, что  $a(\tau)$  — это скаляр относительно преобразований координат. Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Для конформно-плоской метрики ФЛРУ удобно осуществлять переход к конформному времени, но в рассматриваемом случае произвольного пространства-времени этот переход не особенно полезен, потому что метрика, которая не является конформно-плоской, не может быть преобразована к форме, пропорциональной метрике Минковского.

В настоящей работе уравнение (1) обобщается для случая распространения гравитона на фоне произвольного пространства-времени. Показано, что в левой части этого уравнения появляются новые члены, которые исчезают в метрике ФЛРУ и которые могут доминировать в пределе низких частот.

Напомним, что впервые исследование возмущений метрики было проведено в работе [9], см. также [10], где показано, что  $h_{\mu\nu}$  должны быть разделены на три типа в соответствии с их свойствам по от-

ношению к трехмерным преобразованиям (вращениям): скалярные ( $h_t^t$  и  $h_i^i$ ), векторные ( $h_i^t, \partial_i h_t^i = 0$ ) и тензорные ( $h_i^j$ ) возмущения. Свобода выбора координат позволяет ввести следующие условия на  $h_i^j$ :

$$\partial_i h_j^i = 0, \quad h_i^i = 0, \quad (7)$$

в локальной системе отсчета с метрикой Минковского. Эти условия могут быть введены также глобально в конформно-плоской метрике ФЛРУ. Таким образом, тензорная мода  $h_i^j$  имеет только две независимые компоненты, описывающие распространение безмассового кванта с двумя, как и положено, ортогональными состояниями поляризации, то есть распространение гравитационной волны. Однако в общем случае пространства-времени это может быть неверным и могут возбуждаться дополнительные степени свободы. Проблема выбора калибровки в произвольном пространстве-времени рассмотрена в разд. 2.

Обычно эти возмущения рассматриваются либо над вакуумными решениями уравнения Эйнштейна, либо над фоновым пространством-временем ФЛРУ с метрикой

$$ds_F^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (8)$$

Далее для простоты предполагаем, что метрика ФЛРУ пространственно плоская. Переход от этой метрики к конформной (6) осуществляется с помощью линейного преобразования между временными компонентами координат,  $dt = a(\tau) d\tau$ .

Генерация и распространение гравитационных волн в космологии ФЛРУ было изучено в работах [7, 11–13]. Согласно теореме Паркера, см. работы [14, 15], генерация безмассовых частиц конформно-плоской пространственно-временной метрикой (какой, в частности, является метрика ФЛРУ) запрещена, если соответствующие полевые уравнения являются конформно инвариантными. Это верно для безмассовых фермионов, конформно-связанных скаляров и безмассовых векторных полей, вплоть до возможного нарушения конформной инвариантности аномалией следа [16]. В работе [7] было открыто, что гравитоны могут генерироваться в конформно-плоском пространстве-времени, так как их уравнение движения не является конформно-инвариантным. Гравитационные волны могли бы эффективно генерироваться в течение космологической инфляции [12, 13]. Их, вероятно, можно будет наблюдать с помощью космического интерферометра LISA, который предположительно даст информацию о механизмах первичной инфляции.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен выбору калибровки для мод четырехмерного тензора в произвольном пространстве-времени и сравнению его с распространенной калибровкой в метрике ФЛРУ. В разд. 3 выводятся уравнения, описывающие распространение гравитационных волн в произвольном пространстве-времени, при этом делается разложение точных уравнений Эйнштейна вплоть до первого порядка по возмущениям  $h_{\mu\nu}$  метрики. В разд. 4 обсуждаются вопросы, связанные с поправками первого порядка к тензору энергии-импульса. Далее, в разд. 5 выводится уравнение для распространения смешанных компонент,  $h_{\nu}^{\mu}$ . Раздел 6 посвящен доказательству того, что условие поперечности  $D_{\mu}(h_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu}h^{\alpha}/2) = 0$  согласуется с уравнением распространения ГВ, и поэтому это условие может быть введено для произвольной метрики. В разд. 7 представлено несколько примеров реалистичных метрик, отличающихся от метрики ФЛРУ. Наконец, в разд. 8 коротко обсуждаются возможные приложения полученных результатов для случая низкочастотных ГВ.

## 2. ВЫБОР КАЛИБРОВКИ

Во избежание путаницы, еще раз подчеркнем, что ниже мы рассматриваем произвольную пространственно-временную метрику, а не только метрику ФЛРУ. В последнем случае выбор калибровки в значительной степени обусловлен конкретными свойствами метрики ФЛРУ.

Обсудим выбор условий калибровки, которые могут быть введены для  $h_{\mu\nu}$ , следуя книге [1]. Осуществим преобразование координат  $\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{(1)\mu}$ , где  $\xi^{(1)\mu}$  — малый вектор. После таких преобразований возмущения первого порядка,  $h_{\mu\nu}$ , метрики (2) преобразуются как

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - D_{\mu}\xi_{\nu}^{(1)} - D_{\nu}\xi_{\mu}^{(1)}. \quad (9)$$

Пользуясь свободой выбора четырех функций  $\xi^{(1)\mu}$ , можно наложить следующие четыре условия:

$$D_{\mu}\psi_{\nu}^{\mu} = 0, \quad (10)$$

где  $\psi_{\nu}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu}h/2$  и  $h = h^{\alpha}_{\alpha}$ . В случае плоского пространства-времени условие (10) приводит к волновому уравнению в классической форме,  $D^2h_{\nu}^{\mu} = 0$ . Это же уравнение верно для предела высоких частот (эйконального предела).

Еще осталась свобода преобразований координат вида  $\tilde{h}_{\nu}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu} - D^{\mu}\xi_{\nu}^{(2)} - D_{\nu}\xi^{(2)\mu}$  с новыми параметрами  $\xi^{(2)\mu}$ , которые не нарушают условие (10). Соот-

ветственно, параметры  $\xi_{\mu}^{(2)}$  должны удовлетворять уравнению

$$D^2\xi_{\mu}^{(2)} + R^{\nu}_{\mu}\xi_{\nu}^{(2)} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, мы можем использовать четыре дополнительные функции  $\xi_{\mu}^{(2)}$  для того, чтобы зафиксировать калибровку.

В книге [1] эта свобода была использована для наложения ограничений  $h_{ti} = 0$  и  $h = 0$ , где  $i$  — пространственный индекс. Мы, однако, используем эту свободу для того, чтобы потребовать  $h_{t\alpha} = 0$  для любого  $\alpha$ . В таком случае условие  $h = 0$  может не удовлетворяться.

Все еще остается некоторая свобода координатных преобразований с параметром  $\xi^{(3)\mu}$ , который, вдобавок к (11), удовлетворяет условию

$$D_{\mu}\xi^{(3)\mu} = 0. \quad (12)$$

Очевидно, преобразование с функциями  $\xi^{(3)\mu}$  не меняет значение  $h$ .

Подробное обсуждение различных типов возмущений (скалярных, векторных и тензорных) можно найти, например, в книге [3]. Однако все это было проделано только для пространства-времени ФЛРУ.

## 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с точных уравнений Эйнштейна:

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \bar{T}_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Здесь и далее в статье  $\bar{T}_{\mu\nu}$  и  $T_{\mu\nu}$  связаны с физическим тензором энергии-импульса постоянным множителем:

$$T_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} T_{\mu\nu}^{(phys)}. \quad (14)$$

Верхнее подчеркивание означает, что соответствующие точные (полные) величины рассчитываются в терминах полной метрики  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , см. уравнения (2) и (3). Мы будем рассматривать возмущения первого порядка по  $h_{\mu\nu}$  над фоновой метрикой  $g_{\mu\nu}$  и разложим полный тензор Риччи и тензор энергии-импульса следующим образом:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)}, \quad \bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (15)$$

предполагая, что все фоновые величины взяты в фоновой метрике  $g_{\mu\nu}$ .

Наша цель — без каких-либо предположений о форме фоновой метрики вывести уравнение в первом порядке по возмущению, описывающее эволюцию  $h_{\mu\nu}$ .

Из условия

$$\bar{g}_{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (16)$$

следует, что

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (17)$$

Для скаляра Риччи имеем

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta} = (g^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})(R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^{(1)}) = \\ &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что поправка первого порядка к скалярной кривизне получается не просто сверткой индексов с помощью фоновой метрики, а содержит дополнительный член:

$$R^{(1)} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(1)} - h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Следуя книге [1], выразим возмущение тензора Риччи,  $R_{\mu\nu}^{(1)}$ , через возмущения метрики,  $h_{\mu\nu}$ , как

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2}(D_{\alpha}D_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} + D_{\alpha}D_{\mu}h_{\nu}^{\alpha}) - \\ &- \frac{1}{2}(D_{\alpha}D^{\alpha}h_{\mu\nu} + D_{\mu}D_{\nu}h), \end{aligned} \quad (20)$$

где ковариантная производная  $D_{\beta}$  взята по отношению к фоновой метрике  $g_{\mu\nu}$  и  $D^{\alpha} = g^{\alpha\beta}D_{\beta}$ . Здесь и ниже для поднятия и опускания индексов мы используем фоновую метрику,  $g^{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu}$ .

Согласно уравнению (10),  $h_{\nu}^{\mu}$  удовлетворяет условию

$$D_{\mu}h_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}\partial_{\nu}h. \quad (21)$$

Используя правила коммутации ковариантных производных приходим к результату

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= -\frac{1}{2}D_{\alpha}D^{\alpha}h_{\mu\nu} + h^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta} + \\ &+ \frac{1}{2}(h_{\alpha\mu}R_{\nu}^{\alpha} + h_{\alpha\nu}R_{\mu}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя уравнения (22) и (18) в уравнение (13) и сохраняя только величины первого порядка, получаем следующее уравнение для тензора возмущения метрики:

$$\begin{aligned} D_{\alpha}D^{\alpha}h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta} - (h_{\alpha\mu}R_{\nu}^{\alpha} + h_{\alpha\nu}R_{\mu}^{\alpha}) + \\ + h_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D^2h = -2T_{\mu\nu}^{(1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Взяв след, приходим к уравнению

$$D^2h + 4h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - hR = 2g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (24)$$

В общем случае  $h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \neq 0$ , так что можно заключить, что  $h \neq 0$ . С другой стороны, в пространстве-времени ФЛРУ выполняется условие  $h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0$ ,

поэтому уравнения движения (23) и (24) не противоречат условию  $h = 0$ , если источник  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  является бесследовым.

Уравнение (23) совпадает с общепринятым уравнением (1) в пустом пространстве, где  $R_{\mu\nu} = 0$ , но существенно отличается от (1) в заполненном пространстве даже в пространстве-времени ФЛРУ. Действительно, в пространстве ФЛРУ уравнение (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 - \frac{1}{a^2}\partial_k^2\right)h_{ij} - H\partial_t h_{ij} - 2\left(H^2 + 3\frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ij} = \\ = -2T_{ij}^{(1)}, \end{aligned} \quad (25)$$

в то время как общепринятое уравнение (1) с учетом обусловленного источником слагаемого, которое мы обозначили как  $T_{\mu\nu}^{(1c)}$ , становится

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{a^2}\partial_k^2\right)h_{ij} - H\partial_t h_{ij} - 2\frac{\ddot{a}}{a}h_{ij} = -2T_{ij}^{(1c)}. \quad (26)$$

На удивление оба уравнения верны, а разрешение кажущегося несоответствия спрятано в разнице между  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $T_{\mu\nu}^{(1c)}$ , которая, согласно уравнению (5), выражается как

$$T_{\mu\nu}^{(1c)} = h_{\alpha\nu}T_{\mu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha}T_{\nu}^{(1)\alpha} = h_{\alpha\nu}R_{\mu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha}T_{\nu}^{(1)\alpha}. \quad (27)$$

Помня о том, что распространение ГВ на фоне ФЛРУ описывается в предположении, что  $T_{\nu}^{(1)\mu} = 0$ , можно также проверить, что в этой фоновой метрике условие  $h_{\mu}^{\mu} = 0$  выполняется просто потому, что  $h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$ .

#### 4. ПОПРАВКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К ТЕНЗОРУ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Единственное возможное разрешение несоответствия между уравнениями (25) и (26) заключается в различии между  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $T_{\mu\nu}^{(1c)}$ . Стандартный вывод общепринятого уравнения (1) или (26) главным образом базируется на условии  $T_{\mu}^{(1c)\nu} = 0$ , несовместимом с условием  $T_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ , которое на первый взгляд кажется эквивалентным. Действительно, предположим, что поправки первого порядка к тензору момента-импульса со смешанными компонентами равны нулю,  $T_{\mu}^{(1)\nu} = 0$ , как это обычно делают для случая пространства-времени ФЛРУ, заполненного идеальной жидкостью. Тогда, если мы рассматриваем уравнение для  $h_{\mu\nu}$ , то нам следует опускать индексы, используя полный метрический тензор  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , тогда

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\alpha}\bar{T}_{\nu}^{\alpha} = T_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}T_{\nu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha}T_{\nu}^{(1)\alpha} = \\ &= T_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}T_{\nu}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (28)$$

Последнее равенство верно, если  $T_\mu^{(1)\nu} = 0$ .

Следовательно,

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha = \frac{1}{2} (h_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + h_{\nu\alpha} R_\mu^\alpha - h_{\mu\nu} R), \quad (29)$$

где использовано уравнение Эйнштейна для фоновой кривизны:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = T_{\mu\nu}. \quad (30)$$

Подставляя выражение (29) для  $T_{\mu\nu}^{(1)}$ , из уравнения (23) получаем

$$D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - g_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D^2 h = 0. \quad (31)$$

Поскольку последние два члена в уравнении для фона ФЛРУ исчезают, мы получим каноническое уравнение (1).

С другой стороны, каноническое уравнение (1) или (26), которое следует из уравнения (1) для метрики ФЛРУ, изначально получено из уравнения для  $h_\mu^\nu$  в смешанных компонентах. В этом случае индексы опущены с помощью фоновой метрики  $g_{\mu\nu}$ , поэтому из условия  $T_\mu^{\nu(1)} = 0$  мы получим  $T_{\mu\nu}^{(1c)} = 0$ , так что оба способа в конечном счете приводят к одному и тому же результату.

Заметим, что условие  $T_\mu^{\nu(1)} = 0$  не обязательно верно, и существует несколько реалистичных случаев, когда это условие не выполняется. Например,  $T_\mu^{\nu(1)} \neq 0$  в уравнении, описывающем переходы гравитонов в фотоны во внешнем магнитном поле, даже на фоне пространства Минковского, см., в частности, [17]. Другой известный пример — анизотропный тензор напряжений, который может быть индуцирован нейтрино и фотонами [18, 19]. Все эти случаи рассматриваются пертурбативно, так что фоновая метрика остается метрикой ФЛРУ.

Подчеркнем, что если фоновая метрика отличается от метрики Фрийдмана, то последние два слагаемых в уравнении (31) могут значительно изменить характер решений, особенно первое из этих слагаемых, поскольку оно не исчезает в пределе нулевой частоты.

## 5. УРАВНЕНИЕ

### В СМЕШАННЫХ КОМПОНЕНТАХ

Теперь выведем уравнение для смешанных компонент,  $h_\nu^\mu$ . Для этого начнем с уравнения

$$\bar{R}_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \bar{R}/2 = \bar{T}_\nu^\mu, \quad (32)$$

которое разложим до первого порядка по возмущению:

$$\bar{R}_\nu^\mu = R_\nu^\mu + R_\nu^{\mu(1)}. \quad (33)$$

Первая поправка к  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  рассчитывается в книге [1] и представлена здесь в уравнениях (20) и (22). Индексы поднимаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{R}_\nu^\mu &= \bar{g}^{\beta\mu} \bar{R}_{\nu\beta} = (g^{\beta\mu} - h^{\beta\mu})(R_{\nu\beta} + R_{\nu\beta}^{(1)}) = \\ &= R_\nu^\mu - h^{\mu\beta} R_{\nu\beta} + g^{\mu\beta} R_{\nu\beta}^{(1)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично,

$$\bar{R} = \delta_\beta^\alpha \bar{R}_\alpha^\beta = R - h^{\mu\beta} R_{\mu\beta} + g^{\mu\beta} R_{\mu\beta}^{(1)}. \quad (35)$$

Наконец, в первом порядке по возмущению получаем

$$\begin{aligned} g^{\mu\beta} R_{\nu\beta}^{(1)} - h^{\mu\beta} R_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где, согласно обсуждению в предыдущем разделе, мы приняли  $T_\nu^{\mu(1)} = 0$ .

Для фона ФЛРУ произведение  $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)}$  исчезает в силу условий  $D_\alpha h_\beta^\alpha = 0$  и  $h_\mu^\mu = 0$ , и  $h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 0$ , так как  $R_{tj} = 0$ ,  $R_{ij} \sim \delta_{ij}$ ,  $h^{t\mu} = 0$  и  $h_i^i = 0$ . В то же время, оба этих произведения в общем случае ненулевые, если фон отличается от фона ФЛРУ. Исходя из уравнения (22),  $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} = -D^2 h/2$ . При этом  $h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ , вообще говоря, не обращается в нуль для произвольно взятого тензора Риччи.

Взяв выражение (22) для  $R_{\nu\beta}^{(1)}$  и используя условие, что для фона ФЛРУ  $R_j^i \sim \delta_j^i$ , приходим к выводу, что последнее слагаемое в уравнении (22) равно  $h^{\mu\beta} R_{\nu\beta}$  и взаимно уничтожается со вторым слагаемым в левой части уравнения (36). В конечном счете, мы получаем общепринятое уравнение для смешанных компонент:

$$D_\alpha D^\alpha h_\nu^\mu - 2h_\alpha^\beta R^{\mu\alpha}{}_{\beta\nu} = 0, \quad (37)$$

где индексы подняты с помощью фоновой метрического тензора  $g^{\mu\nu}$ .

В случае фона ФЛРУ это уравнение в переходит в уравнение

$$\left( \partial_t^2 - \frac{\Delta}{a^2} + 3H \text{?} \text{partial}_t \right) h_\nu^\mu = 0. \quad (38)$$

Сделаем переход к  $h_{\mu\nu}$  согласно

$$h_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} = -h_{\alpha\nu} \delta^{\mu\alpha} / a^2 \quad (39)$$

получаем

$$\left(\partial_t^2 - \frac{\Delta}{a^2} - H\partial_t - \frac{2\ddot{a}}{a}\right)h_{\nu\mu} = 0. \quad (40)$$

Уравнение совпадает с общепринятым уравнением (26), но не с уравнением (25), если предположить, что правые части обоих уравнений исчезают. Однако, выше по тексту мы показали, что взятие  $T_\nu^{\mu(1)} = 0$  в метрике ФЛРУ для смешанных компонент приводит к  $T_{\mu\nu}^{(1)} \neq 0$  с нижними индексами.

Полезно было бы представить уравнения в терминах конформного времени, поскольку их часто анализируют таким образом. Но, если метрика не является конформно-плоской, то переход к конформному времени не имеет особого смысла.

### 6. ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ПОПЕРЕЧНОСТИ ДЛЯ НЕНУЛЕВОГО $h_\mu^\mu$

В этом разделе показано, что действие ковариантной производной  $D_\mu$  на обе части уравнения для  $h_\nu^\mu$  дает самосогласованные результаты. Для простоты чтения повторим здесь некоторые уравнения, уже приведенные выше.

Начнем с точных уравнений

$$\bar{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu \bar{R} = \bar{T}_\nu^\mu \quad (41)$$

и разложим  $\bar{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu + T_\nu^{(1)\mu}$  и  $\bar{R}_\nu^\mu = R_\nu^\mu + R_\nu^{(1)\mu}$ . Таким образом, как и ожидалось, для фоновой метрики получаем

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = T_\nu^\mu. \quad (42)$$

Однако здесь мы используем поправку первого порядка к  $R_{\mu\nu}$ , как представлено в книге [1]:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\nu}^{(1)} &= \\ &= \frac{1}{2}(D_\beta D_\nu h_\alpha^\beta + D_\beta D_\alpha h_\nu^\beta - D^2 h_{\alpha\nu} - D_\alpha D_\nu h). \end{aligned} \quad (43)$$

Чтобы поднять один нижний индекс, используем  $g^{\mu\alpha}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} D^2 h_\nu^\mu + 2R_{\nu\beta}^{\mu\alpha} h_\alpha^\beta + R_\nu^\alpha h_\alpha^\mu - R_\alpha^\mu h_\nu^\alpha - \\ - \delta_\nu^\mu \left( R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta + \frac{1}{2} D^2 h \right) = -2T_\nu^{(1)\mu}, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $D^2 = g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta$  и принято во внимание, что  $h = h_\alpha^\alpha \neq 0$  и  $D_\mu h_\nu^\mu = \partial_\nu h/2$ .

Действуя  $D_\mu$  на член первого порядка по возмущению и применяя правила коммутации для ковариантных производных, получаем

$$\begin{aligned} D_\mu D^2 h_\nu^\mu &= D_\mu (R_\sigma^\mu h_\nu^\sigma) - D_\mu (R_{\nu\alpha}^{\sigma\mu} h_\sigma^\alpha) - \\ &- R_{\nu\mu}^{\sigma\alpha} D_\alpha h_\sigma^\mu + \frac{1}{2} D^2 (D_\nu h). \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя уравнение (45) в дивергенцию от левой части уравнения (44), получаем

$$\begin{aligned} D_\mu (R_\sigma^\mu h_\nu^\sigma) - D_\mu (R_{\nu\alpha}^{\sigma\mu} h_\sigma^\alpha) - R_{\nu\mu}^{\sigma\alpha} D_\alpha h_\sigma^\mu + \\ + \frac{1}{2} D^2 (D_\nu h) + 2D_\mu (R_{\nu\alpha}^{\mu\sigma} h_\sigma^\alpha) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha + \\ + \frac{1}{2} R_\nu^\alpha D_\alpha h - D_\mu (h_\nu^\alpha R_\alpha^\mu) - D_\nu (R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) - \frac{1}{2} D_\nu D^2 h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \end{aligned} \quad (46)$$

Первое и восьмое слагаемые в левой части этого уравнения взаимно уничтожаются, второе и пятое — частично сокращаются до  $D_\mu (R_{\nu\alpha}^{\mu\sigma} h_\sigma^\alpha)$ , таким образом, получаем

$$\begin{aligned} D_\mu (R_{\nu\alpha}^{\mu\sigma} h_\sigma^\alpha) - R_{\nu\alpha}^{\sigma\mu} D_\mu h_\sigma^\alpha + \frac{1}{2} D^2 (D_\nu h) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha + \\ + \frac{1}{2} R_\nu^\alpha D_\alpha h - D_\nu (R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) - \frac{1}{2} D_\nu D^2 h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \end{aligned} \quad (47)$$

Используя соотношения для коммутатора ковариантных производных, находим

$$D^2 D_\nu h - D_\nu D^2 h = R_\nu^\alpha D_\alpha h. \quad (48)$$

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} h_\sigma^\alpha D_\mu R_{\nu\alpha}^{\mu\sigma} + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha - D_\nu (R_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) + R_\nu^\mu D_\mu h = \\ = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \end{aligned} \quad (49)$$

С помощью тождества Бьянки первый член здесь можно переписать в виде

$$h_\sigma^\alpha D_\mu R_{\nu\alpha}^{\mu\sigma} = h_\sigma^\alpha (D_\nu R_\alpha^\sigma - D_\alpha R_\nu^\sigma) \quad (50)$$

что приводит к

$$\begin{aligned} h_\sigma^\alpha (D_\nu R_\alpha^\sigma - D_\alpha R_\nu^\sigma) + h_\alpha^\mu D_\mu R_\nu^\alpha - h_\alpha^\beta D_\nu R_\beta^\alpha - \\ - R_\beta^\alpha D_\nu h_\alpha^\beta + R_\nu^\mu D_\mu h = -2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \end{aligned} \quad (51)$$

В этом уравнении все члены, содержащие производные от тензора Риччи, точно сокращаются, и в результате мы приходим к следующему уравнению, справедливость которого надо проверить:

$$R_\beta^\alpha D_\nu h_\alpha^\beta - R_\nu^\mu D_\mu h = 2D_\mu T_\nu^{(1)\mu}. \quad (52)$$

Теперь мы должны проверить, равны ли друг другу правая и левая части уравнения (52). Для этого применим следующие условия сохранения:

$$\overline{D}_\mu \overline{T}_\nu^\mu = 0 \quad \text{и} \quad D_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (53)$$

Таким образом, в первом порядке по возмущению получаем

$$\overline{D}_\mu \overline{T}_\nu^\mu = D_\mu T_\nu^\mu + D_\mu T_\nu^{(1)\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{(1)\mu} T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^{(1)\alpha} T_\alpha^\mu. \quad (54)$$

Третий член в правой части этого уравнения равен нулю, потому что поправки к символам Кристоффеля в первом порядке по возмущению имеют вид

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{(1)\mu} = \frac{1}{2} (D_\nu h_\alpha^\mu + D_\alpha h_\nu^\mu - D^\mu h_{\nu\alpha}) \quad (55)$$

и, следовательно,  $\Gamma_{\alpha\mu}^{(1)\mu} = D_\alpha h/2$ .

Из уравнений (54) и (55) получаем

$$\begin{aligned} D_\mu T_\nu^{(1)\mu} &= \Gamma_{\nu\mu}^{(1)\alpha} T_\alpha^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^{(1)\mu} T_\nu^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (D_\nu h_\mu^\alpha + D_\mu h_\nu^\alpha - D^\alpha h_{\nu\mu}) \left( R_\alpha^\mu - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu R \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (R_\nu^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\nu^\alpha R) D_\alpha h. \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь мы учли уравнения Эйнштейна для фоновой метрики (42).

После простых вычислений получаем

$$D_\mu T_\nu^{(1)\mu} = (R_\alpha^\mu D_\nu h_\mu^\alpha - R_\nu^\mu D_\mu h) / 2. \quad (57)$$

Таким образом, мы видим, что обе части в уравнении (52) равны. Это означает, что условие (10),  $D_\mu \psi_\nu^\mu = 0$ , совместимо с уравнением (44).

Вычислим след уравнения (44). Найдем

$$D^2 h + 2R_\nu^\mu h_\mu^\nu = 2T_\mu^{(1)\mu}. \quad (58)$$

Казалось бы, это уравнение противоречит уравнению (24). Но, если мы воспользуемся соотношением между  $T_\mu^{(1)\mu}$  и  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(1)}$ , которое можно получить из уравнения (28), то получим

$$T_\mu^{(1)\mu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(1)} - h_\mu^\nu \left( R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R \right), \quad (59)$$

чем и восстановим согласованность.

На фоне ФЛРУ  $R_\alpha^\mu D_\nu h_\mu^\alpha = R_\nu^\mu h_\mu^\nu = 0$  и обычное условие  $T_\nu^{(1)\mu} = 0$  позволяет наложить требование  $h = 0$ . Однако в случае произвольного фона наложить одновременно условия ковариантного сохранения источника и равенства нулю его следа, по-видимому, вообще невозможно.

## 7. РЕАЛИСТИЧНЫЕ МЕТРИКИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ МЕТРИКИ ФЛРУ

Интересные отклонения космологической метрики от метрики Фрийдмана индуцируются возмущениями плотности над классическим фоном ФЛРУ. Они детально рассмотрены в книгах [3, 5, 6, 20], см. также [21]. Предположим, что существует облако материи с плотностью энергии и давления, которые отличаются от средних космологических. Вообще говоря, облако может быть анизотропным, но влияние дополнительного члена  $h_\beta^\alpha R_\alpha^\beta$  (36) будет проявляться даже в случае изотропного распределения материи в облаке. Поэтому, для простоты, ограничимся этим случаем.

Выберем изотропные координаты подобные координатам Шварцшильда, в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = A dt^2 - B \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (60)$$

где функции  $A$  и  $B$  зависят от  $r$  и  $t$ . Соответствующие символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma_{jt}^t = \frac{\partial_j A}{2A}, \quad \Gamma_{tt}^j = \frac{\delta^{jk} \partial_k A}{2B}, \\ \Gamma_{jk}^t &= \frac{\delta_{jk} \dot{B}}{2A}, \quad \Gamma_{jt}^k = \frac{\delta_j^k \dot{B}}{2B}, \\ \Gamma_{lj}^k &= \frac{1}{2B} (\delta_l^k \partial_j B + \delta_j^k \partial_l B - \delta_{lj} \delta^{kn} \partial_n B). \end{aligned} \quad (61)$$

Соответствующий тензор Риччи дается формулами

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{\Delta A}{2B} - \frac{3\ddot{B}}{2B} + \frac{3\dot{B}^2}{4B^2} + \frac{3\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{\partial^j A \partial_j B}{4B^2} - \\ &\quad - \frac{\partial^j A \partial_j A}{4AB}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$R_{tj} = -\frac{\partial_j \dot{B}}{B} + \frac{\dot{B} \partial_j B}{B^2} + \frac{\dot{B} \partial_j A}{2AB}, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \delta_{ij} \left( \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{\Delta B}{2B} + \frac{\dot{B}^2}{4AB} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2} \right) - \\ &\quad - \delta_{ij} \left( \frac{\partial^k A \partial_k B}{4AB} + \frac{\partial^k B \partial_k B}{4B^2} \right) - \frac{\partial_i \partial_j A}{2A} - \frac{\partial_i \partial_j B}{2B} + \\ &\quad + \frac{\partial_i A \partial_j A}{4A^2} + \frac{3\partial_i B \partial_j B}{4B^2} + \frac{\partial_i A \partial_j B + \partial_j A \partial_i B}{4AB}. \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь и далее пространственные индексы подняты с помощью символа Кронекера,  $\partial^j A = \delta^{jk} \partial_k A$ .

Пространственные производные произвольной функции от  $r$  равны

$$\partial_i f = \frac{x_i}{r} f', \quad \partial_i \partial_i f = \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) f' + \frac{x_i x_j}{r^2} f'', \quad (65)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Так как  $R_{ij}$  содержит некоторые другие члены, помимо

тех, которые пропорциональны  $\delta_{ij}$ , следовательно, произведение  $h_{\beta}^{\alpha}R_{\alpha}^{\beta}$  в общем случае не исчезает.

Обычно возмущения малы, так что и  $A$ , и  $B$  слабо отклоняются от единицы, а в  $R_{ij}$  доминируют члены, линейные по  $A$  и  $B$ . Для частного случая возмущений  $(A - 1) \sim r^2$  и  $(B - 1) \sim r^2$ , см. работу [21], таким образом,  $R_{ij} \sim \delta_{ij}$  и  $h_{\beta}^{\alpha}R_{\alpha}^{\beta} = 0$ . Однако это не общий случай. Более того, известно, что в режиме доминирования материи возмущения растут как космологический масштабный фактор, поэтому поправка к тензору Риччи может становиться близкой по величине к значению фона или даже превышать его.

Есть еще несколько физически интересных метрик, для которых произведение  $h_{\beta}^{\alpha}R_{\alpha}^{\beta}$  не равно нулю. Одним из простых примеров является коллапс пылеобразной сферы, описанный в книге [1]. Это так называемое решение Толмана в отсутствие давления. Тем же свойством обладает и более общее решение Толмана с ненулевым давлением.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что для произвольного фона в общем случае невозможно удовлетворить сразу двум стандартным условиям,  $D_{\mu}h_{\nu}^{\mu} = 0$  и  $h_{\mu}^{\mu} = 0$ , на тензорные возмущения. Показано, что условие  $D_{\mu}\psi_{\nu}^{\mu} = 0$  (10) может быть введено в любом пространстве-времени. Конечно, тензорные моды могут распространяться на любом фоне, но они могут не быть чистыми тензорными, или поперечными, модами. Согласно уравнениям, выведенным в настоящей работе, тензорные и скалярные моды смешиваются и распространяются вместе.

В каком-то смысле это явление похоже на распространение электромагнитных волн в плазме, когда возбуждаются продольные моды. Более того, в неоднородной и анизотропной плазме режимы распространения мод могут быть еще более сложными. Однако в пределе высоких частот (эйкональном приближении) мы возвращаемся в «привычное русло».

Обнаруженный в настоящей работе дополнительный член в уравнении распространения гравитационных волн на фоне, который отличается от фона ФЛРУ, может значительно повлиять на форму низкочастотного хвоста в спектре ГВ, в частности на ГВ, которые были сгенерированы в течение инфляции, см. работы [12,13]. Их интенсивность на низких частотах может быть значительно подавлена. Из-за этого строгий предел на очень длинные

волны, полученный из анализа данных по поляризации СМВ [22], не обязательно означает, что традиционная инфляция, индуцируемая скалярным полем, инфлатоном, [23] исключена. Этот вопрос требует отдельного изучения.

**Благодарности.** Авторы благодарят В. А. Рубакова за очень важный комментарий и обсуждение.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-42-09010).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля*, Физматлит, Москва, (2020).
2. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
3. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, New York (2005).
4. M. Maggiore, *Gravitational Waves*, Oxford University Press (2008).
5. С. Вайнберг, *Космология*, URSS, Москва (2018).
6. Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория*, Изд-во Красанд/URSS, Москва (2010).
7. L. P. Grishchuk, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 825 (1974); Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975).
8. S. Deser and M. Henneaux, Class. Quant. Grav. **24**, 1683 (2007) [arXiv:gr-qc/0611157].
9. Е. М. Лифшиц, Zh. Eksp. Teor. Phys. **16**, 587 (1946).
10. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, **80**, 391 (1963).
11. А. В. Захаров, ЖЭТФ **77**, 434 (1979).
12. А. А. Старобинский, Письма в ЖЭТФ **30**, 719 (1979).
13. V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin, Phys. Lett. B **115**, 189 (1982).
14. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
15. L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).

16. А. Д. Долгов, Письма в ЖЭТФ **32**, 673 (1980).
17. A. D. Dolgov and D. Ejlli, JCAP **12**, 003 (2012) [arXiv:gr-qc/1211.0500].
18. S. Weinberg, Phys. Rev. D **69**, 023503 (2003) [arXiv:astro-ph/0306304].
19. S. Saga, K. Ichiki, and N. Sugiyama, Phys. Rev. D **91**, 024030 (2015) [arXiv:astro-ph.CO/1412.1081].
20. C. Bambi and A. D. Dolgov, *Introduction to Particle Cosmology*, Springer (2015).
21. E. V. Arbuzova, A. D. Dolgov, and L. Reverberi, Phys. Lett. B **739**, 279 (2014) [arXiv:gr-qc/1406.7104].
22. Planck Collaboration, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209].
23. A. D. Linde, Phys. Repts. **333**, 17 (2000).

# НАРУШЕНИЕ Т-СИММЕТРИИ В ОСЦИЛЛЯЦИЯХ НЕЙТРИНО

А. Е. Лобанов\*, А. В. Чухнова\*\*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет  
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 апреля 2022 г.,  
после переработки 26 мая 2022 г.  
Принята к публикации 27 мая 2022 г.

Исследуется нарушение Т-инвариантности для вероятностей флейворных переходов и переворота спина нейтрино в плотном веществе и электромагнитном поле. Поскольку электромагнитное поле и потенциалы взаимодействия со средой входят в волновое уравнение нейтрино, рассматриваемая модель является теорией с нарушением лоренц-инвариантности. Для таких моделей не выполняются условия СРТ-теоремы и нарушение Т-инвариантности не обязательно является следствием нарушения СР-инвариантности. Получено достаточное условие нарушения Т-инвариантности, из которого следует, что причиной Т-нарушения может быть не только наличие отличной от нуля СР-нарушающей фазы в матрице смешивания, но и одновременное влияние среды и электромагнитного поля. Получены вероятности спин-флейворных переходов нейтрино в модели трех флейворов с учетом наличия у нейтрино диагональных магнитных моментов и взаимодействия со средой только через нейтральные токи. На основе явного вида вероятностей сделан вывод, что вероятности переходов для правых антинейтрино в среде из античастиц отличаются от вероятностей переходов для левых нейтрино в среде из частиц только знаком Т-нарушающего слагаемого.

DOI: 10.31857/S0044451022090085

EDN: EKOCOG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, теории, лежащие в основе всех известных на данный момент физических явлений, являются лоренц-инвариантными [1]. В соответствии с СРТ-теоремой, после проведения зарядового сопряжения, пространственного отражения и обращения времени любая локальная лоренц-инвариантная теория с эрмитовым гамилтонианом принимает исходный вид [2, 3]. Инвариантность по отношению к этим же преобразованиям, проведенным по отдельности, зависит от типа рассматриваемого взаимодействия. Например, известно, что электромагнитное взаимодействие характеризуется наличием Р-симметрии. В слабом взаимодействии, как было предсказано теоретически [4] и вскоре подтверждено экспериментально [5], Р-инвариантность нарушается и сохраняется только СР-инвариантность. Впоследствии оказалось, что

не только Р-симметрия, но и СР-симметрия нарушаются в экспериментах с участием каонов [6] и В-мезонов [7, 8].

Исследование свойств дискретных симметрий может быть важно для понимания эволюции Вселенной, так как без нарушения СР-инвариантности невозможно объяснить асимметрию вещества и антивещества [9]. Как известно, нарушение СР-инвариантности имеет место в кварковом секторе и обусловлено наличием комплексных элементов в матрице смешивания Кабиббо–Кобаяши–Маскавы [10]. Матрицу смешивания дираковских фермионов удобно параметризовать тремя углами и одной СР-нарушающей фазой. При этом СР-нарушение определяется инвариантом Ярлског [11]. Тем не менее нарушения СР-инвариантности за счет мнимой части матрицы смешивания для кварков оказывается недостаточно для обеспечения существующей асимметрии вещества и антивещества во Вселенной (см., например, [12–14]).

В качестве дополнительного источника СР-нарушения можно рассматривать процессы с участием нейтрино. На данный момент не доказано наличие отличной от нуля СР-нарушающей фазы в матрице Понтекорво–Маки–Накагавы–

\* E-mail: lobanov@phys.msu.ru

\*\* E-mail: av.chukhnova@physics.msu.ru

Сакаты [15, 16], определяющей смешивание лептонов. Наличие такой фазы должно приводить к нарушению Т-инвариантности вероятностей осцилляций нейтрино в вакууме (см., например, [17]).

Однако такой механизм нарушения Т-инвариантности даже для нейтрино, описываемого в рамках Стандартной модели, оказывается не единственно возможным. В работе [18] мы показали, что в модели двух флейворов может возникать Т-нарушение за счет влияния внешних условий, если рассматривать взаимодействие нейтрино одновременно с движущейся или поляризованной средой и электромагнитным полем. При этом слабые, характеризующие Т-нарушение, возникают уже при рассмотрении достаточно простой модели, а именно, взаимодействия нейтрино со средой через нейтральные токи и с электромагнитным полем с учетом только диагональных магнитных моментов. Стоит отметить, что в модели двух флейворов, рассмотренной в работе [18], матрица смешивания является действительной, вследствие чего нарушение Т-инвариантности в формулах для вероятностей может быть обусловлено исключительно влиянием внешних условий.

Исходя из характера смешивания в веществе, авторы работ, в которых ранее исследовалась возможность Т-нарушения в модели двух флейворов (см., например, [19–21]), сделали заключение, что такое нарушение невозможно. Однако этот вывод справедлив, только если нейтрино распространяется в неподвижной среде. Принципиальное отличие исследуемого нами случая состоит в том, что учет движения или поляризации среды приводит к появлению корреляций между осцилляциями и поворотом спина нейтрино, вследствие чего нельзя рассматривать эти процессы независимо. Таким образом, недостаточно рассматривать флейворные осцилляции, не учитывая возможность поворота спина нейтрино. Рассматриваемый нами случай является более общим, чем исследованный в указанных выше работах. Поэтому противоречия между нашими результатами и выводами, сделанными для нейтрино в неподвижной среде, не возникает. В частности, известное утверждение о том, что наличие взаимодействия со средой только через нейтральные токи не меняет картину осцилляций, не выполняется для движущейся или поляризованной среды (см., например, [22]).

Результаты, полученные нами в работе [18] в модели двух флейворов, интересно обобщить для реалистичной модели трех флейворов. Как уже говорилось, элементы матрицы смешивания нейтрино

в модели трех флейворов могут содержать мнимую часть. Таким образом, Т-нарушение может возникнуть даже в случае осцилляций нейтрино в вакууме. Однако при наличии внешних полей и потенциалов взаимодействия с веществом в общем случае также возможны корреляции между двумя типами Т-нарушающих вкладов. В работе [18] был сделан вывод, что вероятности переходов нейтрино в среде из частиц отличаются от вероятностей переходов антинейтрино в среде из античастиц при том же электромагнитном поле только знаком Т-нарушающего слагаемого. Этот вывод следует из явного вида вероятностей переходов в модели двух флейворов. При этом исследуемая модель является теорией с нарушением лоренц-инвариантности и, следовательно, для нее не выполняются условия СРТ-теоремы. Таким образом, в модели трех флейворов свойства дискретных симметрий вероятностей требуют дополнительного исследования.

В настоящей работе получен явный вид вероятностей спин-флейворных переходов в модели трех флейворов. Для исследования свойств вероятностей переходов антинейтрино детально описана процедура получения этих вероятностей. В результате оказывается, что, как и в случае двух флейворов, вероятности переходов правых антинейтрино в среде из античастиц при наличии электромагнитного поля отличаются от вероятностей переходов левых нейтрино в среде из частиц только знаком собственного времени.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ НЕЙТРИНО

Взаимодействие с веществом обычно описывается с использованием эффективного потенциала, связанного с упругим рассеянием нейтрино вперед на фермионах среды [23] (см. также [24, 25]). Для того чтобы описать взаимодействие с электромагнитным полем, можно использовать метод, называемый картиной Фарри [26]. Поскольку нейтрино представляет собой нейтральную частицу, взаимодействие нейтрино с электромагнитным полем не является минимальным [27]. Более того, в общем случае следует рассматривать не только диагональные магнитные моменты, но и переходные магнитные и электрические моменты [28, 29].

Наиболее общий вид уравнения, описывающего как флейворные осцилляции, так и поворот спина нейтрино, взаимодействующего с веществом и электромагнитным полем, был найден в работе [30]. Как и в работе [18], мы будем предполагать, что взаи-

модействие со средой происходит через нейтральные токи, и будем учитывать только диагональные магнитные моменты нейтрино. Последнее приближение обусловлено тем, что в рамках Стандартной модели переходные моменты подавлены по сравнению с диагональными за счет GIM-механизма [31]. В этом случае модифицированное уравнение Дирака выглядит следующим образом:

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M} - \frac{1}{2} \gamma^\mu f_\mu^{(N)} (1 + \gamma^5) \mathbb{I} - \frac{i}{2} F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \mathbb{M}_d \right) \Psi(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbb{I}$  — единичная матрица размерности  $3 \times 3$ ,  $\mathbb{M}$  — массовая матрица нейтрино. Взаимодействие с веществом определяется эффективным потенциалом  $f_\mu^{(N)}$ , который может быть выражен через 4-векторы тока  $j_\mu^{(i)}$  и поляризации  $\lambda_\mu^{(i)}$  компоненты среды ( $i$ ) [32, 33]. В соответствии с принятой в русскоязычных монографиях традицией, мы используем определение  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  (см., например, [34, 35]). Взаимодействие с электромагнитным полем  $F^{\mu\nu}$  осуществляется за счет наличия у нейтрино аномального магнитного момента. Отметим, что в рамках Стандартной модели в первом приближении матрица диагональных магнитных моментов нейтрино  $\mathbb{M}_d$  пропорциональна массовой матрице нейтрино и может быть представлена в виде  $\mu_0 \mathbb{M}$ . Выражение для коэффициента  $\mu_0$  хорошо известно и было получено еще в работе [28].

Мы используем модель, допускающую квантово-полевое описание осцилляций нейтрино и поворота спина. Подробности построения модели в вакууме можно найти в работах [36, 37]. Из результатов этих работ следует, что вместо канонического импульса для описания нейтрино можно использовать кинетический импульс, связанный со скоростью частицы. При этом 4-скорость частицы  $u^\mu$  можно выбрать одинаковой для всех массовых состояний, что позволяет определить понятие собственного времени  $\tau$  нейтрино.

Для нейтрино ультрарелятивистских энергий вполне справедливо описание в рамках квазиклассического приближения. Рассматривая координату пространства событий  $x^\mu$  как координату нейтрино, мы можем использовать соотношение  $x^\mu = \tau u^\mu$ . Таким образом, эволюция нейтрино определяется только собственным временем, которое связано с длиной пробега  $L$  соотношением

$$\tau = L/|\mathbf{u}|. \quad (2)$$

Чтобы описать эволюцию нейтрино, введем квазиклассические волновые функции  $\Psi(\tau)$ , которые яв-

ляются 12-компонентными объектами, удовлетворяют условию  $\gamma^\mu u_\mu \Psi(\tau) = \Psi(\tau)$  и являются решениями квазиклассического уравнения эволюции, полученного из уравнения (1):

$$\left( i\mathbb{I} \frac{d}{d\tau} - \mathcal{F} \right) \Psi(\tau) = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3)

$$\mathcal{F} = \mathbb{M} + \frac{1}{2} (f^{(N)} u) \mathbb{I} + \frac{1}{2} R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu - \mathbb{M}_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^* F_{\mu\nu} u^\nu, \quad (4)$$

где  ${}^* F_{\mu\nu} = -e^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} / 2$  — тензор, дуальный тензору электромагнитного поля. Здесь мы используем следующие обозначения:

$$s_\sigma^{(N)} = \frac{u_\sigma (f^{(N)} u) - f_\sigma^{(N)}}{\sqrt{(f^{(N)} u)^2 - (f^{(N)})^2}}, \quad (5)$$

$$R_N = \sqrt{(f^{(N)} u)^2 - (f^{(N)})^2}.$$

С помощью оператора эволюции  $U(\tau)$  решение уравнения (3) в любой момент времени можно выразить через волновую функцию нейтрино в начальный момент времени  $\Psi_0$ :

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2u_0}} U(\tau) \Psi_0. \quad (6)$$

Тогда зависящие от времени матрицы плотности нейтрино определяются следующим образом:

$$\rho_\alpha(\tau) = \frac{1}{4u^0} U(\tau) (\gamma^\mu u_\mu + 1) (1 - \gamma^5 \gamma_\nu s_\nu^0) \mathbb{P}_0^\alpha \bar{U}(\tau) = \frac{1}{2u^0} U(\tau) (\gamma^\mu u_\mu + 1) \mathcal{P}_0^{(\alpha)} \bar{U}(\tau), \quad (7)$$

где  $\mathbb{P}_0^\alpha$  — проектор на состояние с флейвором нейтрино  $\alpha$ ,  $s_\nu^0$  — 4-вектор начальной поляризации нейтрино,  $\mathcal{P}_0^{(\alpha)}$  — проектор на начальное состояние нейтрино с флейвором  $\alpha$  и 4-вектором поляризации  $s_\nu^0$ . Вероятности спин-флейворных переходов нейтрино задаются известным выражением [38]

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \text{Tr} \{ \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta^\dagger(\tau = 0) \}. \quad (8)$$

Разумеется, явный вид матрицы  $U(\tau)$  удастся получить только в некоторых частных случаях. Для рассматриваемой нами задачи явный вид решения можно найти даже в модели трех флейворов.

### 3. НАРУШЕНИЕ Т-СИММЕТРИИ В ОСЦИЛЛЯЦИЯХ НЕЙТРИНО

Будем исследовать T-нарушение на основе формулы для вероятностей (8) в случае постоянных характеристик среды и электромагнитного поля. Если

нейтрино распространяется в переменном электромагнитном поле или неоднородной среде, то формальная симметрия по отношению к операции обращения времени очевидным образом нарушается (см., например, [39]), так как начальное и конечное состояния системы соответствуют разным внешним условиям. Поскольку в общем случае результат зависит от поведения плотности вещества и характеристик электромагнитного поля, достаточно сложно в этом случае разделить Т-нарушение вследствие симметрии взаимодействия и наличие нечетных по  $\tau$  вкладов, определяемых выбором конкретного профиля полей и потенциалов. Исходя из аналогичных соображений, начальное и конечное состояния нейтрино мы описываем в терминах квантовых чисел, соответствующих одним и тем же операторам наблюдаемых. В частности, для ультрарелятивистских нейтрино естественно рассматривать начальное и конечное состояния нейтрино, соответствующие собственным векторам оператора спиральности. Соответствующий 4-вектор поляризации нейтрино задается выражением

$$s_0^\mu = \left\{ |\mathbf{u}|, u_0 \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right\}. \quad (9)$$

Рассматривать задачу, в которой начальное и конечное состояния задаются разными операторами, также возможно, но, как и в случае неоднородных полей, возникающий в этом случае нечетный по времени вклад в вероятностях переходов уже не свидетельствует о Т-нарушении, связанном с симметрией взаимодействия.

В работе [30] было получено общее выражение для вероятностей спин-флейворных переходов нейтрино в постоянном электромагнитном поле и в веществе, характеризующемся постоянными скоростью и поляризацией. Эта формула является следствием разложения выражения (8) в ряд на основе формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [40] и имеет вид

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1}{2u_0} \text{Tr} \left\{ e^{-i\tau \mathcal{F}} \mathcal{P}_0^{(\alpha)} e^{i\tau \mathcal{F}} \mathcal{P}_0^{(\beta)} (\gamma^\mu u_\mu + 1) \gamma^0 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n}{n!} \text{Tr} \left\{ D_n \mathcal{P}_0^{(\beta)} (\gamma^\mu u_\mu + 1) \right\}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= \mathcal{P}_0^{(\alpha)}, \\ D_1 &= [\mathcal{F}, \mathcal{P}_0^{(\alpha)}], \\ D_2 &= [\mathcal{F}, [\mathcal{F}, \mathcal{P}_0^{(\alpha)}]], \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\mathcal{P}_0^{(\alpha)}$  и  $\mathcal{P}_0^{(\beta)}$  — проекторы на состояния с определенным флейвором и поляризацией, которые могут быть представлены как произведения флейворного проектора  $\mathbb{P}_0^\alpha$  и спинового проектора

$$\frac{1}{2} (1 - \zeta_{\alpha, \beta} \gamma^5 \gamma_\mu s_0^\mu), \quad \zeta_\alpha, \zeta_\beta = \pm 1, \quad (12)$$

где  $s_0^\mu$  — 4-вектор, определяющий поляризацию нейтрино.

Нарушение Т-симметрии возможно тогда и только тогда, когда какие-либо слагаемые нечетной по  $\tau$  степени в выражении (10) отличны от нуля. Поскольку линейный по  $\tau$  член тождественно равен нулю, достаточным условием нарушения Т-симметрии является отличие от нуля члена третьей степени по  $\tau$ . В вакуумном случае это условие может выполняться, только если матрица смешивания нейтрино содержит комплексные элементы. В общем случае взаимодействие со средой и электромагнитным полем может привести к наличию нетривиального коэффициента перед  $\tau^3$  даже тогда, когда CP-нарушающая фаза в матрице смешивания равна нулю.

#### 4. ЯВНЫЙ ВИД ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ФЛЕЙВОРОВ

В случае, если взаимодействие с веществом осуществляется только через нейтральные токи, а взаимодействие с электромагнитным полем определяется диагональными моментами нейтрино, матричную экспоненту

$$U(\tau) = e^{-i\tau \mathcal{F}} = \exp \left\{ -i\tau \left( \mathbb{M} + \frac{1}{2} (f^{(N)} u) \mathbb{I} + \frac{1}{2} R_N \mathbb{I} \gamma^5 \gamma^\sigma s_\sigma^{(N)} \gamma^\mu u_\mu - \mathbb{M}_d \gamma^5 \gamma^\mu {}^* F_{\mu\nu} u^\nu \right) \right\} \quad (13)$$

можно записать в явном виде

$$U(\tau) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\zeta_i = \pm 1} \exp \left\{ -i\tau \left( m_i + \frac{1}{2} (f^{(N)} u) - \frac{1}{2} \zeta_i R_i \right) \right\} \times \mathbb{P}^i (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu), \quad (14)$$

где  $\mathbb{P}^i$  — проектор на состояния с определенной массой  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В выражении (14) используются обозначения

$$s_i^\mu = \frac{u^\mu (f^{(N)}u) - f^{(N)\mu} - 2\mu_i {}^*F_{\nu}^{\mu} u^\nu}{R_i}, \tag{15}$$

$$R_i = \sqrt{(f^{(N)}u)^2 - (f^{(N)})^2 + 4\mu_i^2 (u_\alpha {}^*F^{\alpha\mu} {}^*F_{\mu\nu} u^\nu) - 4\mu_i (f^{(N)\mu} {}^*F_{\mu\nu} u^\nu)},$$

где  $\mu_i$  — диагональные магнитные моменты нейтрино. Запись оператора эволюции в виде (14) оказывается возможна, так как массовая матрица и спиновый проекционный оператор  $(1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu)/2$  коммутируют с оператором  $\mathcal{F}$ . Действительно, следствием определения (15) является тождество

$$\gamma^5 \left( \gamma_\mu \frac{1}{2} R_N s^{(N)\mu} - \mu_i \gamma_\mu {}^*F^{\mu\nu} u_\nu \right) (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\sigma s_i^\sigma) = -\frac{1}{2} \zeta_i R_i (1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu), \tag{16}$$

которое вместе с соотношениями  $\mathbb{M}P^i = m_i P^i$  и  $\mathbb{M}_d P^i = \mu_i P^i$  позволяет переписать матричную экспоненту в виде (14).

Таким образом, вероятности спин-флейворных переходов задаются соотношением

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{1}{8} \sum_{i,j} e^{-i\tau(m_i - m_j)} \times \sum_{\zeta_i, \zeta_j} e^{i\tau(\zeta_i R_i - \zeta_j R_j)/2} \text{Tr}\{P^i P^\alpha P^{j\dagger} P^{\beta\dagger}\} \times \frac{1}{4} \text{Tr}\{(1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu)(1 - \zeta_\alpha \gamma^5 \gamma_\sigma s_0^\sigma) \times (1 - \zeta_j \gamma^5 \gamma_\nu s_j^\nu)(1 - \zeta_\beta \gamma^5 \gamma_\rho s_0^\rho)(\gamma_\lambda u^\lambda + 1)\}, \tag{17}$$

где учтено, что след прямого произведения матриц вычисляется как произведение их следов:  $\text{Tr}\{A \otimes B\} = \text{Tr} A \text{Tr} B$ .

При вычислении следа матриц Дирака важно, что начальная и конечная поляризации нейтрино характеризуются одинаковыми (с точностью до знака) 4-векторами  $s_0^\mu$ :

$$\frac{1}{4} \text{Tr}\{(1 - \zeta_i \gamma^5 \gamma_\mu s_i^\mu)(1 - \zeta_\alpha \gamma^5 \gamma_\sigma s_0^\sigma) \times (1 - \zeta_j \gamma^5 \gamma_\nu s_j^\nu)(1 - \zeta_\beta \gamma^5 \gamma_\rho s_0^\rho)(\gamma_\lambda u^\lambda + 1)\} = (1 + \zeta_\alpha \zeta_\beta) \times (1 - \zeta_\alpha (\zeta_i (s_0 s_i) + \zeta_j (s_0 s_j)) + \zeta_i \zeta_j (s_i s_0)(s_j s_0) + (1 - \zeta_\alpha \zeta_\beta) \zeta_i \zeta_j \times (-(s_i s_0)(s_j s_0) - \zeta_\alpha i \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_0^\rho u^\lambda - (s_i s_j)). \tag{18}$$

Если начальное и конечное состояния характеризуются разными векторами поляризации, то выражение для следа матриц Дирака будет иметь более

сложную структуру, чем выражение (18). При этом в выражениях для вероятностей появятся дополнительные Т-нечетные слагаемые. Как уже указывалось, появление этих слагаемых обусловлено выбором начальных условий, но не отражает свойства симметрии взаимодействия.

Для записи итоговых формул введем обозначения для вещественной и мнимой части входящего в выражение (17) следа флейворных матриц:

$$\text{Tr}\{P^i P^\alpha P^{j\dagger} P^{\beta\dagger}\} = \text{Tr}\{P^i U^\dagger P_0^\alpha U P^j U^\dagger P_0^\beta U\} = \mathcal{U}_{\alpha i}^* \mathcal{U}_{\alpha j} \mathcal{U}_{\beta j}^* \mathcal{U}_{\beta i} = R_{ij\alpha\beta} + iI_{ij\alpha\beta}, \tag{19}$$

где  $R_{ij\alpha\beta}$  — вещественная часть следа,  $I_{ij\alpha\beta}$  — мнимая, причем  $R_{ij\alpha\beta} = R_{ji\alpha\beta}$ , а  $I_{ji\alpha\beta} = -I_{ij\alpha\beta}$  (см. [17]). В этом выражении  $P_0^\alpha$  и  $P_0^\beta$  — проекторы на флейворные состояния во флейворном представлении, которые связаны с использованными нами ранее проекторами в массовом представлении соотношениями

$$P^\alpha = U^\dagger P_0^\alpha U, \quad P^\beta = U^\dagger P_0^\beta U,$$

где  $U$  — матрица смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты, а  $\mathcal{U}_{\alpha i}$  — ее матричные элементы.

Таким образом, вероятность перехода без поворота спина задается выражением

$$W_+ = \sum_i |\mathcal{U}_{\alpha i}|^2 |\mathcal{U}_{\beta i}|^2 \left( \cos^2 \frac{R_i \tau}{2} + \sin^2 \frac{R_i \tau}{2} (s_0 s_i)^2 \right) + 2 \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i)\tau - I_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i)\tau) \times \left( \cos \frac{R_i \tau}{2} \cos \frac{R_j \tau}{2} + \sin \frac{R_i \tau}{2} \sin \frac{R_j \tau}{2} (s_0 s_i)(s_0 s_j) \right) + 2\zeta_\alpha \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i)\tau + I_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i)\tau) \times \left( \sin \frac{R_i \tau}{2} \cos \frac{R_j \tau}{2} (s_0 s_i) - \cos \frac{R_i \tau}{2} \sin \frac{R_j \tau}{2} (s_0 s_j) \right), \tag{20}$$

а вероятность перехода с переворотом спина — выражением

$$\begin{aligned}
 W_- = & \sum_i |\mathcal{U}_{i\alpha}|^2 |\mathcal{U}_{i\beta}|^2 (1 - (s_0 s_i)^2) \sin^2 \frac{R_i \tau}{2} + \\
 & + 2 \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau - I_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau) \times \\
 & \times \sin \frac{R_i}{2} \tau \sin \frac{R_j}{2} \tau (-(s_i s_j) - (s_i s_0)(s_j s_0)) + \\
 & + 2\zeta_\alpha \sum_{i < j} (R_{ij\alpha\beta} \sin(m_j - m_i) \tau + I_{ij\alpha\beta} \cos(m_j - m_i) \tau) \times \\
 & \times \sin \frac{R_i}{2} \tau \sin \frac{R_j}{2} \tau (e_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_0^\rho u^\lambda). \quad (21)
 \end{aligned}$$

В выражении для вероятностей переходов без переворота спина Т-нарушение определяется только мнимой частью следа (19), т.е. инвариантом Ярлског  $I_{ij\alpha\beta}$ . Однако в выражениях для переходов с изменением спиральности в Т-нарушение также вносят вклад слагаемые, пропорциональные вещественной части следа (19) и величине  $e_{\mu\nu\rho\lambda} s_i^\mu s_j^\nu s_0^\rho u^\lambda$ . Множители такого же типа определяли Т-нарушение в модели двух флейворов. Последнее выражение можно переписать, используя трехмерные величины, которые определены в лабораторной системе отсчета:

$$\begin{aligned}
 \zeta_\alpha e_{\mu\nu\rho\lambda} u^\mu s_0^\nu s_i^\rho s_j^\lambda = \\
 = 2\zeta_\alpha \frac{\mu_j - \mu_i}{R_i R_j} \frac{1}{|\mathbf{u}|} ((\mathbf{u} \times \mathbf{f})(u_0 \mathbf{B} - [\mathbf{u} \times \mathbf{E}])). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{f}$  — пространственная часть 4-потенциала взаимодействия со средой, которая определяется скоростью движения среды как целого и ее поляризацией. Как и в модели двух флейворов, соответствующее слагаемое не равно нулю, когда выделенные направления, характеризующие среду и поле, различны и отличаются от направления скорости нейтрино. При этом для покоящейся неполяризованной среды выражение (22) обращается в нуль.

Левая часть выражения (22) представляет собой лоренцевский скаляр. Поэтому для перехода в систему отсчета, где среда неподвижна, следует преобразовать 4-векторы  $u^\mu$ ,  $s_0^\nu$ ,  $s_i^\rho$  и  $s_j^\lambda$ . Поскольку нейтрино имеет массу, в указанной системе отсчета 4-вектор поляризации будет отличаться от  $s_0^\mu$ , определяемого выражением (9), а значит, не будет описывать спиральное состояние нейтрино. Таким образом, вероятности, полученные из выражений (20) и (21) переходом в систему покоя среды, будут от-

личаться от вероятностей переходов между состояниями нейтрино с определенной спиральностью.

Если положить значение потенциала взаимодействия и тензора электромагнитного поля равными нулю, то вероятности, определяемые формулами (20) и (21), в ультрарелятивистском приближении не противоречат общеизвестным выражениям (см., например, [17]). Вероятность переходов с поворотом спина нейтрино  $W_-$  в вакууме оказывается равной нулю для любых флейворов. Вид формулы для  $W_+$ , полученный из (20) при переходе к вакуумному случаю, отличается от стандартного из-за того, что для описания осцилляций мы используем не канонический импульс, а квантовое число  $u^\mu$ , имеющее в вакууме смысл 4-скорости. Как показано в работе [41], выбор такого квантового числа для описания распространения нейтрино возможен и в случае наличия взаимодействия со средой и электромагнитным полем. В эквивалентности формул, выраженных через указанные квантовые числа, наиболее легко убедиться в модели двух флейворов. Для этого достаточно провести замену  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{u}|(m_1 + m_2)/2$ .

Интересно отметить, что вклад, нарушающий Т-инвариантность вследствие влияния внешних условий, не содержит зависимости от мнимой части матрицы смешивания, а определяется только ее действительной частью. Именно этот факт является причиной того, что в модели двух флейворов Т-нарушение также присутствует.

В полученных нами вероятностях Т-нарушение за счет влияния внешних условий присутствует только в вероятностях переходов с переворотом спина. Тем не менее это является не общим свойством такого типа нарушения, а следствием выбора нами упрощенной модели взаимодействия со средой. Как показано в работе [22], при наличии взаимодействия со средой через нейтральные и заряженные токи присутствуют корреляции между флейворными осцилляциями и переворотом спина нейтрино. Таким образом, можно ожидать, что при учете взаимодействия нейтрино с электромагнитным полем и средой общего вида вероятности флейворных переходов с сохранением поляризации также будут содержать Т-нарушающие слагаемые, обусловленные влиянием внешних условий.

### 5. ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ

В квазиклассическом приближении операции Т-отражения соответствует изменение знака собственного времени  $\tau$ . Операция Р-отражения является хорошо определенной формальной операцией, проводимой над квантованной волновой функцией частицы. Однако более интересно исследовать свойства симметрии итоговых выражений для вероятностей, которые представляют собой наблюдаемые величины. Как хорошо известно, Р-отражение приводит к изменению знака поляризации частицы в выражениях для вероятностей процессов (см. [1]). Следовательно, в качестве процедуры Р-отражения можно рассматривать изменение знаков  $\zeta_0^{(\alpha)}$  и  $\zeta_0^{(\beta)}$ , определяющих начальную и конечную поляризацию нейтрино. Операцию зарядового сопряжения следует проводить для решений волнового уравнения, описывающего эволюцию нейтрино (1), обычным образом [42] (см. также [34]). Физический смысл этой операции прост: вместо нейтрино мы исследуем антинейтрино, а фоновое электромагнитное поле и характеристики среды остаются неизменными. При этом система, полученная в результате указанного выше преобразования, отличается от исходной. В уравнении (1) в результате С-сопряжения меняется киральный проектор, знаки потенциалов взаимодействия с веществом и знак магнитного момента. В модели трех флейворов в этом уравнении также необходимо сделать комплексное сопряжение флейворных матриц. В результате последней операции меняет знак мнимая часть следа (19), входящего в выражения для вероятностей. В выражениях для вероятностей переходов зарядовое сопряжение приводит к следующим изменениям. Во-первых, меняются все знаки магнитных моментов. Во-вторых, одновременная замена кирального проектора и знака потенциала приводит к следующему правилу: когда потенциал входит в вектор спина  $s_i^\mu$ , знак его не меняется, в противном случае необходимо изменить знак потенциала. В-третьих, меняют знак величины  $I_{ij\alpha\beta}$ .

Разумеется, полученные нами вероятности не являются инвариантными относительно СРТ-преобразования, проведенного только для волновой функции нейтрино при тех же внешних условиях. Как было сказано выше, исследуемая модель является теорией с нарушением лоренц-инвариантности [43–45]. Следовательно, СРТ-теорема не применима. Стоит отметить, что в квантовой теории поля С-, Р- и Т-операции определяются для операторов

рождения и уничтожения в волновых функциях квантованных полей (см., например, [34]), поэтому достаточно сложно обобщить их на классическое фоновое электромагнитное поле, определяемое тензором  $F^{\mu\nu}$ , а также на потенциал взаимодействия с веществом  $f_\mu^{(N)}$ . Соответствующие слагаемые в уравнении (1) являются результатом редукции радиационных поправок и, следовательно, взаимодействие с этими полями не является минимальным. Именно по этой причине не удастся обобщить дискретные преобразования на случай моделей с нарушенной лоренц-инвариантностью так же изящно, как удалось это сделать с понятием лоренц-инвариантности в блестящей работе [46], где рассматривалось минимальное взаимодействие электрона с внешним электромагнитным полем.

Однако поскольку природа конденсатов известна, мы вполне можем исследовать поведение нейтрино в среде, состоящей из античастиц, не обобщая понятия С- и Р-операций для внешних полей. Вид потенциалов взаимодействия с веществом известен (см., например, [17]). Детальный вывод этих выражений для случая движущейся и поляризованной среды дан в работе [47]. Аналогичным образом вывод потенциалов взаимодействия можно воспроизвести для среды, состоящей из античастиц. При этом эффективный потенциал взаимодействия нейтрино со средой, частицы которой характеризуются определенной поляризацией, только знаком отличается от потенциала взаимодействия нейтрино с античастицами противоположной поляризации.

Теперь рассмотрим взаимодействие антинейтрино со средой, состоящей из античастиц. Для того чтобы наши соображения были более прозрачными, сначала рассмотрим два частных случая. Получим вероятности переходов антинейтрино, распространяющегося в среде, состоящей из античастиц, в случае, если электромагнитное поле отсутствует. Для того чтобы записать вероятности для антинейтрино правой поляризации, необходимо изменить знаки начальной и конечной поляризаций частицы  $\zeta_0^{(\alpha)} \rightarrow -\zeta_0^{(\alpha)}$  и  $\zeta_0^{(\beta)} \rightarrow -\zeta_0^{(\beta)}$ , знаки всех множителей  $I_{ij\alpha\beta}$ , а также знаки  $f_\mu^{(N)}$  по правилу, указанному выше. Если при этом среда состоит из античастиц, нужно еще раз изменить знак потенциала  $f_\mu^{(N)}$  везде, где этот потенциал входит в вероятности. В результате этих действий мы получим исходные вероятности. Таким образом, в модели трех флейворов левые нейтрино распространяются в среде, состоящей из частиц, так же, как правые антинейтрино в среде, состоящей из античастиц.

Теперь рассмотрим взаимодействие антинейтрино только с электромагнитным полем. Для того чтобы описать движение антинейтрино, требуется изменить знаки всех множителей  $I_{ij\alpha\beta}$  и знаки магнитных моментов нейтрино. Из вида полученных таким образом выражений следует, что в электромагнитном поле левые нейтрино распространяются так же, как правые антинейтрино. Как и в модели двух флейворов, мы получили, что, для того чтобы вероятности переходов совпали с исходными, надо не только сделать С-сопряжение, но и изменить поляризацию частицы, т. е. сделать Р-отражение. Если для взаимодействия нейтрино с веществом аналогичный результат был вполне ожидаемым, так как слабое взаимодействие СР-четно, то для нейтрино, участвующих только в электромагнитном взаимодействии, такой результат возникает исключительно тогда, когда мы рассматриваем частицу, имеющую более одного флейвора.

В этой работе мы получили вероятности спин-флейворных переходов для нейтрино, распространяющегося в веществе и электромагнитном поле. Для наглядности мы учли только диагональные магнитные моменты и взаимодействие с веществом через нейтральные токи. В этом случае замена нейтрино на антинейтрино и фермионов среды на их античастицы сводится к операциям, описанным выше. При этом оказывается, что левые нейтрино и правые антинейтрино распространяются различным образом. Однако исходные выражения можно восстановить, если изменить знак  $\tau$ , что соответствует Т-отражению. Еще раз подчеркнем, что полученный результат не является следствием СРТ-теоремы, так как мы рассматриваем модель с нарушением лоренц-инвариантности.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано Т-нарушение для вероятностей спин-флейворных переходов нейтрино в среде и электромагнитном поле в модели трех флейворов. Показано, что такое нарушение может быть обусловлено не только наличием мнимой части в матрице смешивания, но и влиянием внешних полей и взаимодействием с веществом. При этом для простейшей модели, учитывающей взаимодействие со средой через нейтральные токи и взаимодействие электромагнитного поля с учетом только диагональных магнитных моментов, Т-нарушающие слагаемые за счет мнимой части матрицы смешивания определяются инвариантом Ярлског, а нару-

шение за счет влияния внешних условий определяется векторным произведением пространственной части потенциала взаимодействия со средой и напряженностей полей, умноженным на вещественные части четверных комбинаций элементов матрицы смешивания. Показано, что в модели трех флейворов, как и в модели двух флейворов, вероятности переходов для правого антинейтрино в среде, состоящей из античастиц, и для левого нейтрино в среде из частиц при наличии постоянного электромагнитного поля различаются только знаками Т-нарушающих слагаемых. Обнаруженный механизм нарушения Т-инвариантности за счет наличия постоянных внешних условий принципиально важен, так как приводит к появлению Т-нарушающих вкладов уже для достаточно простых систем, характеризующихся постоянными параметрами, но при этом не требует введения дополнительных частиц или новых типов взаимодействия, т. е. справедлив для частиц, описываемых в рамках Стандартной модели.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность А.В. Борисову, И.П. Волобуеву и В.Ч. Жуковскому за плодотворные обсуждения.

**Финансирование.** Работа А.В.Ч. выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (грант № 19-2-6-100-1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).
2. W. Pauli, in *Niels Bohr and the Development of Physics*, McGraw-Hill, New York (1955).
3. R. Jost, Helv. Phys. Acta **30**, 409 (1957).
4. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
5. C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
6. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
7. B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 131801 (2004); arXiv:hep-ex/0407057.
8. Y. Chao et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 191802 (2004); arXiv:hep-ex/0408100.
9. А. Д. Сахаров, Письма в ЖЭТФ **5**, 32 (1967).

10. M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
11. C. Jarlskog, *Z. Phys. C* **29**, 491 (1985).
12. M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **174**, 45 (1986).
13. M. Trodden, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1463 (1999); arXiv:hep-ph/9803479.
14. S. Davidson, E. Nardi, and Y. Nir, *Phys. Rep.* **466**, 105 (2008); arXiv:0802.2962 [hep-ph].
15. Б. М. Понтекорво, *ЖЭТФ* **33**, 549 (1957).
16. Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
17. C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford Univ. Press, New York (2007).
18. A. V. Chukhnova and A. E. Lobanov, *Phys. Rev. D* **105**, 073010 (2022); arXiv:2203.06426 [hep-ph].
19. V. A. Naumov, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 379 (1992).
20. E. Akhmedov, P. Huber, M. Lindner, and T. Ohlsson, *Nucl. Phys. B* **608**, 394 (2001); arXiv:hep-ph/0105029.
21. S. T. Petcov and Ye-Ling Zhou, *Phys. Lett. B* **785**, 95 (2018); arXiv:1806.09112 [hep-ph].
22. А. Е. Лобанов, А. В. Чухнова, *Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрон.* **58**(5), 22 (2017).
23. L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978).
24. P. B. Pal and T. N. Pham, *Phys. Rev. D* **40**, 259 (1989).
25. J. F. Nieves, *Phys. Rev. D* **40**, 866 (1989).
26. W. H. Furry, *Phys. Rev.* **81**, 115 (1951).
27. W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).
28. K. Fujikawa and R. E. Shrock, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 963 (1980).
29. R. E. Shrock, *Nucl. Phys. B* **206**, 359 (1982).
30. A. V. Chukhnova and A. E. Lobanov, *Phys. Rev. D* **101**, 013003 (2020); arXiv:1906.09351 [hep-ph].
31. S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev. D* **2**, 1285 (1970).
32. А. Е. Лобанов, *ДАН* **402**, 475 (2005).
33. A. Studenikin and A. Ternov, *Phys. Lett. B* **608**, 107 (2005); arXiv:hep-ph/0412408.
34. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, т. 4, Наука, Москва (1989).
35. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1973).
36. А. Е. Лобанов, *Ann. Phys.* **403**, 82 (2019); arXiv:1507.01256 [hep-ph].
37. А. Е. Лобанов, *ТМФ* **192**, 70 (2017).
38. J. von Neumann, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1927**, 245 (1927).
39. A. V. Chukhnova and A. E. Lobanov, *Eur. Phys. J. C* **81**, 821 (2021); arXiv:2005.04503 [hep-ph].
40. J. E. Campbell, *Proc. London Math. Soc.* s1-**28**, 381 (1896).
41. E. V. Arbuzova, A. E. Lobanov, and E. M. Murchikova, *Phys. Rev. D* **81**, 045001 (2010); arXiv:1507.01256.
42. H. A. Kramers, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **40**, 814 (1937).
43. S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
44. D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); arXiv:hep-ph/9703464.
45. S. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999); arXiv:hep-ph/9812418.
46. P. A. M. Dirac, R. Peierls, and M. H. L. Pryce, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **38**, 193 (1942).
47. А. Е. Лобанов, *Изв. вузов, Физика* **59** (11), 141 (2016).

# HOLOGRAPHIC DESCRIPTION OF THE DISSIPATIVE MODEL OF UNIVERSE WITH CURVATURE

*I. Brevik*<sup>a,\*</sup>, *A. V. Timoshkin*<sup>b,c,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Department of Energy and Process Engineering, Norwegian University of Science and Technology  
N-7491 Trondheim, Norway*

<sup>b</sup> *Institute of Scientific Research and Development, Tomsk State Pedagogical University (TSPU)  
634061, Tomsk, Russia*

<sup>c</sup> *International Centre of Gravity and Cosmos,  
Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR)  
634050, Tomsk, Russia*

Received April 21, 2022,  
revised version April 29, 2022

Accepted May 4, 2022

**DOI:** 10.31857/S0044451022090097

**EDN:** EKQOFH

A description of the accelerated expansion of the Universe [1, 2] is possible with the help of dark energy or through modified gravity [3, 4]. Dark energy can be represented within the framework of the cosmological model using a dark fluid with an unusual equation of a state [5, 6].

The most realistic cosmological picture of the evolution of the Universe is obtained taking into account the properties of the viscosity of the dark fluid. This is due to the fact that in the era of dark energy the occurrence of cosmological singularities with the final time of formation is possible. The influence from (bulk) viscosity affects the behavior of the universe near cosmological singularities [7, 8]; cf. the Big Rip phenomena in cosmologies of type II, III, and IV (what is called a Nojiri–Odintsov–Tsujikawa classification of singularities is given in [9]) and is important in connection with turbulence effects [10]. Thus, the assumption about no viscous (ideal) fluid is inaccurate.

We will consider the holographic description of the universe, which implies that all information about the system parameters can be described in the form of a hologram, associated with the surface area of cosmic space [11].

The generalized holographic dark energy (HDE) model was proposed by Nojiri and Odintsov [12, 13].

Furthermore all known models of HDE are a consequence of the Nojiri–Odintsov model [14–16]. The development of various approaches and generalizations of HDE is given in various reviews [17–19]. Holographic theory is shown to be in agreement with astronomical observations [17, 20–24].

The motivation of this study is that, despite the observations tell us that the universe is essentially flat [25], it is nevertheless impossible to exclude by 100% certainty that the universe has a finite curvature; cf., for instance, the discussion in Refs. [26, 27].

Further, we will consider the Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metric with a finite curvature of our Universe, and will investigate the consequences of this assumption for the Friedmann equation. We will obtain a holographic description of cosmological models associated with an inhomogeneous viscous dark fluid, and will discuss the singular behavior of the Universe determined by this model.

According to the holographic principle, all physical quantities in the universe including the dark energy can be described by specified values on the space-time boundary [28, 29]. The typical HDE density can be described via the Planck mass  $M_p$  and a characteristic length  $L_{IR}$  (infrared radius) [11]

$$\rho_{hol} = 3c^2 M_p^2 L_{IR}^{-2}, \quad (1)$$

where  $c$  is an arbitrary dimensionless positive parameter while the universe is expanding.

\* E-mail: iver.h.brevik@ntnu.no

\*\* E-mail: alex.timosh@rambler.ru

Let us consider the homogeneous and isotropic FRW universe in which the metric has the form

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \lambda r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2)$$

where  $a(t)$  is the scale factor and  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  is the metric of the space. The quantity  $\lambda$  characterizes the curvature of the three-dimensional space.

As is known, the metric (2) describes a homogeneous and isotropic expanding space. We may have  $\lambda = 0$  (spatially flat space),  $\lambda = +1$  (closed universe), or  $\lambda = -1$  (open universe). The open universe expands forever; the flat universe also expands forever but at  $t \rightarrow +\infty$  the expansion occurs at constant speed; the closed universe expands to a certain instant, after which the expansion is replaced by a compression leading to a collapse.

The Friedmann equation for a one-component fluid with nonzero curvature has the form

$$H^2 = \frac{k^2}{3} \rho - \frac{\lambda}{3}, \quad (3)$$

where  $\rho$  is the HDE density,  $k^2 = 8\pi G$  with  $G$  the Newtonian gravitational constant, and  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  is the Hubble function.

The infrared radius  $L_{IR}$  can be identified with size of the horizon of particles  $L_p$  or with size of the event horizon  $L_f$  [12]. However, not all ways of choosing infrared radius will lead to an accelerated expansion of the universe so that the choice of an infrared radius is not arbitrary.

The holographic energy density is known to be basically the same as the energy of the infrared (IR) radiation. If we identify the energy  $\rho$  in equation (3) with the HDE  $\rho_{hol}$  in equation (1), then we obtain the first Friedmann equation in another form:

$$H = \sqrt{\left( \frac{c}{L_{IR}} \right)^2 - \frac{\lambda}{a^2}}. \quad (4)$$

Further, we will suppose that the viscous dark fluid driving the evolution of the universe, has a holographic origin.

We will investigate the cosmological models of a viscous dark fluid, obeying the inhomogeneous equation of state (EoS) in a FRW universe [5, 30]. Dissipative processes are described by the bulk viscosity in the form [31].

Let us assume that the universe is filled with a one-component fluid, obeying the energy conservation law

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (5)$$

We apply the holographic principle for cosmological models with a constant value of the thermodynamic parameter  $\omega(\rho, t) = \omega_0$  and various values of the bulk viscosity  $\zeta(H, t)$ , and distinguish between two cases.

*Case 1. Fluid model with constant  $\omega(\rho, t) = \omega_0$  and constant viscosity  $\zeta(H, t) = \zeta_0$ .*

In this simple case the EoS will take the form

$$p = \omega_0 \rho - 3\zeta_0 H. \quad (6)$$

The solution of the energy conservation equation is

$$a(t) = \sqrt{C_1 + C_2 e^{\tilde{\zeta}_0 t} + \theta t}, \quad (7)$$

where  $\theta$  is a parameter associated with the spatial curvature,  $\tilde{\zeta}_0$  is a modified viscosity parameter, and  $C_1, C_2$  are arbitrary constants. The expression (7) for the scale factor contains the correction  $\theta t$ , which is associated with the spatial curvature.

For the Hubble function we will obtain

$$H(t) = \frac{1}{2} \frac{C_2 \tilde{\zeta}_0 e^{\tilde{\zeta}_0 t} + \theta}{C_1 + C_2 e^{\tilde{\zeta}_0 t} + \theta t}. \quad (8)$$

Let us analyze the Hubble function with respect to the singular behavior. If  $C_1$  and  $C_2$  are positive, then in a flat universe ( $\theta = 0$ ) there is no singularity. In an open universe ( $\theta < 0$ ) it is possible to form a singularity after a finite time span (type Big Rip [6]).

In the asymptotic limit  $t \rightarrow 0$  (inflationary epoch) the Hubble function tends to the constant value

$$H(t) = \frac{C_2 \tilde{\zeta}_0 + \theta}{C_2 \tilde{\zeta}_0 + C_1},$$

while in the other limit  $t \rightarrow \infty$  (dark energy epoch) it goes again to a constant  $H(t) \rightarrow \tilde{\zeta}_0$  regardless of the spatial curvature. In both cases, the universe is in a state of accelerated expansion.

The particle horizon  $L_p$  for nonzero spatial curvature is

$$L_p = \frac{1}{\theta} \int_{C_1}^{\theta t + C_1} \frac{dx}{\sqrt{\alpha e^{\beta x} + x}}, \quad (9)$$

where  $\alpha = C_2 e^{-C_1 \beta}$ ,  $\beta = \tilde{\zeta}_0 / \theta$ , and  $\theta \neq 0$ .

In the particular case when  $C_1 = 0, C_2 = 1$  ( $\alpha = 1$ ), we obtain in the initial stage inflation

$$L_p(t \rightarrow 0) = \frac{2}{\gamma} \sqrt{1 + \gamma t} (\sqrt{1 + \gamma t} - 1), \quad (10)$$

where  $\gamma = \theta + \tilde{\zeta}_0$ .

The Hubble function can be expressed in terms of the particle horizon and its derivatives as [13]

$$H = \frac{\dot{L}_p - 1}{L_p}, \quad \dot{H} = \frac{\ddot{L}_p}{L_p} - \frac{\dot{L}_p^2}{L_p^2} + \frac{\dot{L}_p}{L_p^2}. \quad (11)$$

As a result, the energy conservation law can be expressed in a holographic form as

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{L}_p}{L_p} - \frac{\dot{L}_p^2}{L_p^2} + \frac{\dot{L}_p}{L_p^2} + \tilde{\omega}_0 \left( \frac{\dot{L}_p - 1}{L_p} \right)^2 + \\ & + [2\lambda(\tilde{\omega}_0 + 1)(C_2 \tilde{\zeta}_0 e^{\tilde{\zeta}_0 t} + \theta) - \tilde{\zeta}_0] \frac{\dot{L}_p - 1}{L_p} = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

*Case 2. Fluid model with constant  $\omega(\rho, t) = \omega_0$  and viscosity proportional to the Hubble function,  $\zeta(H, t) = 3\tau H$ .*

In this case the EoS takes the form

$$p = \omega_0 \rho - 9\tau H^2, \quad (13)$$

where  $\tau$  is a positive dimensional constant.

The solution of the differential equation (5) becomes

$$a(t) = \sqrt{C_1 t + C_2 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{\tau} t^2}, \quad (14)$$

where  $\tilde{\tau}$  and  $\tilde{\lambda}$  are the modified viscosity and curvature parameters and  $C_1, C_2$  are arbitrary constants.

The Hubble function is

$$H(t) = \frac{1}{2} \frac{C_1 - \tilde{\lambda} \tilde{\tau} t}{C_1 t + C_2 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{\tau} t^2}. \quad (15)$$

We analyze again this result: if  $C_1 \neq 0$  and  $C_2 \neq 0$  in a space with nonzero curvature, there will be two singularities of the Big Rip type, while in the case of flat space, only one is formed. Thus, the curvature of space leads to additional singularities. In the asymptotic cases of early or late universe, the Hubble function tends to a constant, independent of the curvature.

Calculation of the particle horizon in the case of nonzero curvature, when  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , leads to the result

$$L_p = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda} \tilde{\tau}}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{\tau} t^2} \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{\tau} t} \right). \quad (16)$$

The energy conservation law in holographic form is

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{L}_p}{L_p} - \frac{\dot{L}_p^2}{L_p^2} + \frac{\dot{L}_p}{L_p^2} + \tilde{\tau} \left( \frac{\dot{L}_p - 1}{L_p} \right)^2 + \\ & + 2\tilde{\lambda}(C_1 - \tilde{\tau} \tilde{\lambda} t) \frac{\dot{L}_p - 1}{L_p} = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Summarizing the main results of this work, we have obtained, on the basis of the holographic principle, a description of two distinguished viscous dark fluid cosmological models, and we have discussed the singular behavior of the universe when determined by these models. We have shown that the inclusion of nonzero curvature in the Friedmann equation leads to additional singularities of type Big Rip in the Universe. The application of the holographic method has led to theoretical predictions in good agreement with astronomical observations [32].

**Funding.** This work was supported by Russian Fund for Fundamental Studies, Project No. 20-52-05009 (A. V. T.).

*The full text of this paper is published in the English version of JETP.*

## REFERENCES

1. A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
2. S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
3. K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342**, 155 (2012).
4. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rep.* **505**, 59144 (2011).
5. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **639**, 144 (2006).
6. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **72**, 144 (2005).
7. I. Brevik, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and D. Saez-Gomez, *Eur. Phys. J. C* **69**, 563 (2010).
8. I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84**, 103508 (2011).
9. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **71**, 063004 (2005).

10. I. Brevik, R. Myrzakulov, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **86**, 063007 (2012).
11. M. Li, *Phys. Lett. B* **603**, 1 (2004); arXiv: hep-th/0403127.
12. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Gen. Relativ. Gravit.* **38**, 1285 (2006); arXiv: hep-th/0506212.
13. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Eur. Phys. J. C* **77**, 528 (2017).
14. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and Tanmoy Paul, *Phys. Lett. B* **825**, 136844 (2022).
15. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and Tanmoy Paul, *Symmetry* **13**, 928 (2022).
16. S. Nojiri, S. D. Odintsov, V.K. Oikonomou, and Tanmoy Paul, *Phys. Rev. D* **102**, 023540 (2020).
17. K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space. Sci.* **342**, 155 (2012).
18. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, *Phys. Rep.* **692**, 1 (2017).
19. S. Wang, Y. Wang, and M. Li, *Phys. Rep.* **696**, 1 (2017); arXiv: 1612.00345 [astro-ph.CO]; S. Wang, Y. Wang, and M. Li, *Phys. Rep.* **696**, 198 (2017).
20. J. Lu, E. N. Saridakis, M. R. Setare, and L. Xu, *J. Cosmol. Astrophys.* **1003**, 031 (2010); arXiv: 0912.0923 [astro-ph.CO].
21. X. Zhang and F. Q. Wu, *Phys. Rev. D* **72**, 0435 (2005); arXiv: astro-ph/0506310.
22. M. Li, X. D. Li, S. Wang, and X. Zhang, *J. Cosmol. Astrophys.* **0906**, 036 (2009); arXiv: 0904.0928 [astro-ph.CO].
23. Q. G. Huang and Y. G. Gong, *J. Cosmol. Astrophys.* **0408**, 006 (2004); arXiv: astro-ph/0403590.
24. B. Wang, E. Abdalla, and R. K. Su, *Phys. Lett. B* **611**, 21 (2005); arXiv: hep-th/0404057.
25. Planck Collaboration 2019, *Astron. Astrophys.* **641**, A1 (2020); arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO].
26. E. Di Valentino, A. Melchiorri, and J. Silk, *Nature Astron.* **4**, 196 (2020).
27. W. Handley, *Phys. Rev. D* **103**, L041301 (2021).
28. J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
29. S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
30. S. Myrzakul, R. Myrzakulov, and L. Sebastiani, *Astrophys. Space Sci.* **350**, 845 (2014).
31. S. Capozziello, V. F. Cardone, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **73**, 043512 (2006).
32. A. V. Astashenok and A. S. Tepliakov, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**, 1950176 (2020); arXiv: 1911.01422v1 [gr-qc].

# CYLINDRICAL GRAVITATIONAL PULSE WAVEGUIDE EXCITATIONS

*J. J. Defo*<sup>a,b\*</sup>, *V. K. Kuetche*<sup>a,b,c\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I  
P. O. Box 812, Yaounde, Cameroon*

<sup>b</sup> *National Advanced School of Engineering, University of Yaounde I  
P. O. Box 8390, Yaounde, Cameroon*

<sup>c</sup> *Department of Physics, Faculty of Science, University of Dschang  
P. O. Box 67, Dschang, Cameroon*

Received April 28, 2022,  
revised version May 21, 2022  
Accepted May 21, 2022

**DOI:** 10.31857/S0044451022090103

**EDN:** ELHFWH

The foundations and principles of the theory of gravitation are based on the idea that space and time can be represented by a Riemannian (Lorentzian) variety, which consists in imposing purely geometrical requirements. Taking into account these constraints, Einstein's theory of relativity is recognized by relativists as the ideal in gravitation theory [1]. Although this theory predicts the existence of gravitational waves, many doubts arise on this subject where Einstein declares: "Together with a young collaborator I arrived at the interesting result that gravitational waves do not exist, though they had been assumed to be a certainty to the first approximation. This shows that nonlinear gravitational wave field equations tell us more or, rather, limit us more than we had believed up to now" [2]. The doubt emitted by Einstein concerning the theory of the gravitational waves was to know if the gravitational radiation has a real existence [3]. On this intriguing query, the numerical works of Piran and Stark [4] confirm the real existence of the gravitational radiation. This significant advance leads us to question about the exact solutions of the field equations and their physical interpretations concerning the relation between field and matter [1, 5]. Concerning the exact solutions of the field equations in relativity theory, the 1970's and late 1980's are considered as the legendary era with the appearance of the soliton gener-

ating transformation methods [5]. Among these various methods, we will make allegiance to the inverse scattering method (ISM) of Belinskii and Zakharov [6] which rests on the integrability of the Einstein field equations in dimension two whose construction gave rise to the "gravitational soliton." This new concept from ISM allows to put in evidence the phenomenon of temporal shift [7] and many other phenomena mentioned with success in this work [5]. We note that in this procedure emanating from the ISM, some solutions such as the gravitational cylindrical soliton offer the possibility to study the phenomenon of gravitational collapse [8]. In the same vein, this solution could serve as an interesting element in the application of quantum information theory [9]. The integrability in dimension five of the Einstein field equations allows the modification of the Belinskii and Zakharov ISM [6] above, the improved Pomeransky ISM [10] which is a fundamental tool in the generation of black holes. This approach allows the construction of new gravitational solitons and their direct applications [11–13]. It permits the clarification of the studies on the applications of gravitational solitons [11, 14]. The real observation of the gravitational waves by the LIGO-Virgo science team [15] in a recent investigation, showing the typical profile of the propagating waves and therefore the existence of non zero energy densities of these structures, would actually foster the set-up of underlying analytical orientations to unite, from the exact solutions of the field equations, the points of convergences and divergences [3, 4, 16] concerning the waves of impulses or waves of Einstein and Rosen (ER) [16]. For that, we account for the relevant

\* E-mail: defo.jeanjules@yahoo.fr

\*\* E-mail: vkuetche@yahoo.fr

remark of Alekseev [17] which shows that the soliton can provide complete information during its propagation in the spacetime of Kasner.

In this paper, motivated by the above, we propose some underlying approach using the solution of two cylindrical pole-conjugate solitons generated by the improved Pomeransky ISM [10] while associating the numerical method of Piran and Stark [4], to construct the ER waves. In this procedure, we construct the explosion and implosion waves as described by Weber and Wheeler [3]. Then, we show the existence of different energy densities relative to the ER waves [14, 16]. In this context, we discuss the ER-metric [18] within the viewpoint of investigation of the soliton dynamics.

The organization of the paper is set as follows: in Sec. 2, we present the ER-metric [18] as well as the field equations governing the behavior of the gravitational wave while introducing the soliton solutions from Pomeransky’s ISM [10]. We introduce the ER-metric [18] and the three Einstein field equations. Thus, we consider that a four-dimensional spacetime has a symmetry, then giving the existence of two fields of navigating Killing vectors, an axisymmetric Killing vector  $\partial/\partial\phi$  and a spatially translational Killing vector  $\partial/\partial z$ , where the coordinate of the polar angle  $\phi$  and the coordinates  $z$  have the ranges  $0 \leq \phi < 2\pi$  and  $-\infty < z < +\infty$ . Validating these different hypotheses of symmetry, we start from the general form of the Jordan and Ehlers metric [4, 13, 19]. We eliminate the nonlinear term  $\omega = 0$  and obtain the following expressions:

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 + e^{2\psi} dz^2, \quad (1)$$

$$\psi_{,tt} - \frac{\psi_{,\rho\rho}}{\rho} - \psi_{,\rho\rho} = 0, \quad (2)$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,t}^2 + \psi_{,\rho}^2), \quad (3)$$

$$\gamma_{,t} = 2\rho\psi_{,t}\psi_{,\rho}. \quad (4)$$

We note that  $(\rho, z, \phi)$  represents the cylindrical coordinates and  $t$  the time. We specify that the different functions  $\psi$  and  $\gamma$  depend on  $\rho$  and  $t$ . In this metric including the Einstein field equations,  $\psi$  represents a dynamic degree of freedom of the gravitational field and  $\gamma$  plays the role of the gravitational energy of the system. It is also noted that the previous observables written with comma as subscript denotes the partial derivatives with the associated variables. We introduce, the solutions of Piran and Stark [4] relative to the field equations in the following form:

$$A_+ = 2(\psi_{,t} + \psi_{,\rho}) \quad (5)$$

and

$$B_+ = 2(\psi_{,t} - \psi_{,\rho}). \quad (6)$$

In our investigations, the quantity  $A_+$  represents the amplitude of the explosion wave and  $B_+$  represents the amplitude of the implosion wave. We introduce the wave vectors of explosions and implosions as defined by Piran and Stark [4] in the following form:

$$u = \frac{1}{2}(t - \rho) \quad (7)$$

and

$$v = \frac{1}{2}(t + \rho). \quad (8)$$

Knowing the different expressions of vectors mentioned above, we simplify the expressions of the amplitudes of the explosive and implosive waves [13, 14] in the following form:

$$A_+ = 2\psi_{,v} \quad (9)$$

and

$$B_+ = 2\psi_{,u}. \quad (10)$$

We used these different expressions above to demonstrate the decomposition of the cylindrical gravitational pulse wave into explosion and implosion waves according to the radial  $\rho$  and temporal  $t$  coordinates, whose physical implications are represented in Figs. 1 and 3 followed with some descriptions in captions. Using the simplified expressions from the amplitudes of the explosion and implosion waves, we rewrite the field equations in the following form:

$$A_{+,u} = \frac{A_+ - B_+}{2\rho} \quad (11)$$

and

$$B_{+,v} = \frac{A_+ + B_+}{2\rho}. \quad (12)$$

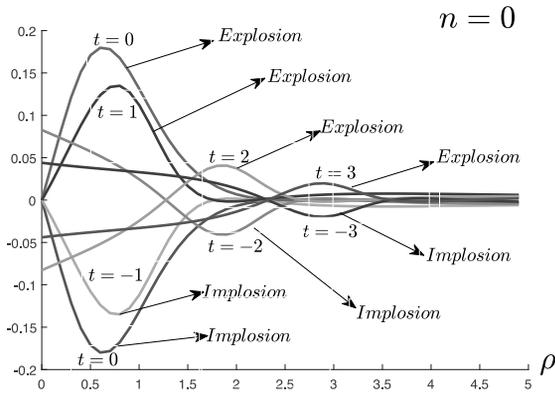
We introduce in the Einstein field equations for energy densities, the expression of the amplitudes of the explosion and implosion waves in the following form:

$$\gamma_{,t} = \frac{\rho}{8}(A_+^2 - B_+^2) \quad (13)$$

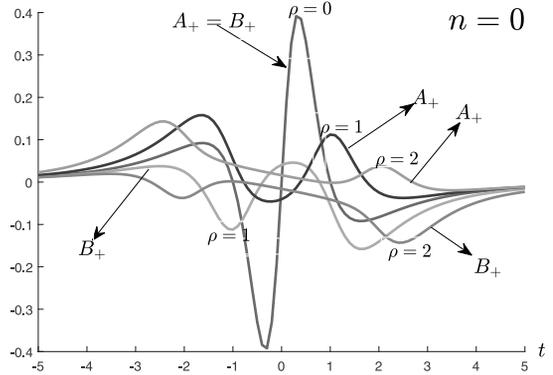
and

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho}{8}(A_+^2 + B_+^2). \quad (14)$$

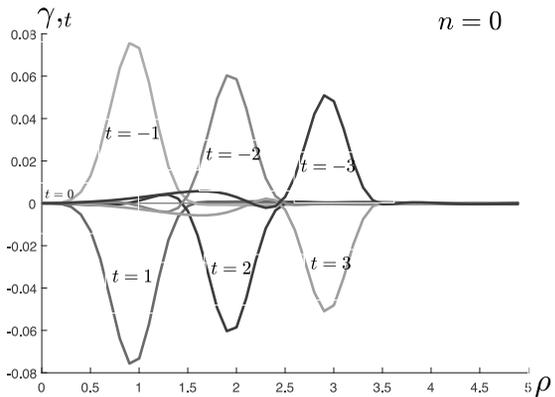
We specify that the field equations related to the energy density  $\gamma_{,t}$  represents the non-gravitational energy density of the wave and  $\gamma_{,\rho}$  the gravitational energy density. We note that the expressions of the different energy densities as functions of the different amplitudes  $A_+$  and  $B_+$  of the explosion and implosion waves show that the propagation of the cylindrical gravitational impulse wave is vector of energy, of which Figs. 2



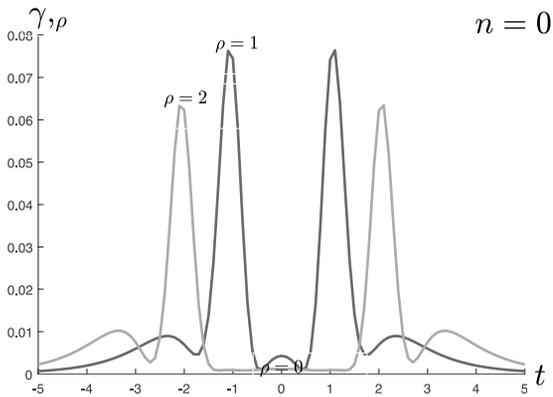
**Fig. 1.** We observe that the implosion wave  $B_+$  is focused near  $\rho = -t$  on the implosion course for negative values of  $t$ . While we observe that the explosion wave  $A_+$  is concentrated near  $\rho = +t$  when it reexpands out from the axis of symmetry. We use  $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  and  $(k, \theta, q) = (2, n\pi/4, 1)(n = 0)$



**Fig. 3.** We show the different behaviors of explosive and impulsive waves under the following conditions:  $(k, \theta, q) = (2, n\pi/4, 1)(n = 0)$  with  $\rho = 0, 1, 2$



**Fig. 2.** We have the representation of the energy density with the following conditions:  $(k, \theta, q) = (4, n\pi/4, 1)(n = 0)$  with  $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . This shows that the gravitational waves are well localized in the spacetime manifold



**Fig. 4.** We have the behavior of the gravitational energy density concerning the following values:  $(k, \theta, q) = (4, n\pi/4, 1)(n = 0)$  with  $\rho = 0, 1, 2$ . This shows the well-localized of the gravitational waves within the spacetime manifold

and 4 are tangible proof. All the equations obtained with Piran and Stark [4] have a major and fundamental interest in the comprehension of the phenomena as mentioned in introduction. We introduce in the expressions of the time  $t$  and the radial coordinates  $\rho$ , the cartesian coordinates in the following form [13]:

$$t = qxy, \tag{15}$$

$$\rho = q\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 - 1)}, \tag{16}$$

where  $q$  represents a constant. We calculate the following quantities:

$$dt^2 = q^2(y^2 dx^2 + x^2 dy^2 + 2xy dx dy) \tag{17}$$

and

$$d\rho^2 = \frac{q^2}{(x^2 + 1)(y^2 - 1)} (x^2(y^2 - 1)^2 dx^2 + y^2(x^2 + 1)^2 dy^2) + \frac{q^2}{(x^2 + 1)(y^2 - 1)} (2xy(x^2 + 1)(y^2 - 1) dx dy). \tag{18}$$

From the different quantities calculated previously, we modify the ER-metric [18] into the form below:

$$ds^2 = e^{2\psi} dz^2 + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 + q^2(x^2 + y^2)e^{2(\gamma - \psi)} \left( -\frac{dx^2}{x^2 + 1} + \frac{dy^2}{y^2 - 1} \right). \tag{19}$$

We determine the functions  $\psi$  and  $\gamma$  belonging to the Einstein field equations as well as to the ER-metric [18]. For this, we use the solutions of the cylindrical solitons [10, 13] to construct the different amplitudes of the explosion and implosion wave and we obtain the following relations:

$$e^{2\psi} = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}, \tag{20}$$

$$e^{2(\gamma-\psi)} = \frac{\chi}{4096q^6(x^2 + y^2)^6}, \tag{21}$$

where

$$\begin{aligned} \chi = & a_i^4(y-1)^2(y+1)^6 + 2a_i^2(y+1)^2(a_r^2(y-1)^2(y+1)^4 + \\ & + 64q^2(x^4(y(9y-8)+1) + 2x^2(y(y+4)-3)y^2 + y^6 + y^4)) - \\ & - 512a_i a_r q^2 x(y+1)^2(x^2 - (y-2)y)(x^2(2y-1) + y^2) + \\ & + a_r^4(y-1)^2(y+1)^6 + \\ & + 128a_r^2 q^2 (y+1)^2(2x^6 + x^4((8-3y)y-1) + \\ & + 2x^2 y^2(2(y-2)y+3) + y^6 - y^4) + \\ & + 4096q^2(x^2 + y^2)^4 \end{aligned} \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = & a_i^4(y^2 - 1)^2 + 2a_i^2(y^2 - 1)(a_r^2(y^2 - 1)^3 + \\ & + 64q^2(x^4(9y^2 - 1) + 2x^2(y^2 + 1)y^2 + y^6 - y^4)) - \\ & - 1024a_i a_r q^2 x(x^2 + 1)y(y^2 - 1)(x - y)(x + y) + \\ & + a_r^4(y^2 - 1)^4 + 128a_r^2 q^2 (y^2 - 1)(2x^6 + x^4 + \\ & + (4x^2 + 1)y^4 - 3(x^2 + 2)x^2 y^2 + y^6) + \\ & + 4096q^4(x^2 + y^2)^4. \end{aligned} \tag{23}$$

In the different expressions obtained,  $a_i$  and  $a_r$  are real-valued variables. We introduce a relation between the different cartesian and cylindrical variables, and we obtain the following two relations [20].

For  $\rho \ll |t|$ , we obtain

$$x = t - \frac{\rho^2 t}{2(1+t^2)} + \Theta(\rho^4) \tag{24}$$

and

$$y = 1 + \frac{\rho^2}{2(1+t^2)} + \Theta(\rho^4). \tag{25}$$

For  $\rho \gg |t|$ , we obtain

$$y = \rho + \frac{1-t^2}{2\rho} + \Theta(\rho^{-2}) \tag{26}$$

and

$$x = \frac{t}{\rho} + \frac{t(t^2 - 1)}{2\rho^3} + \Theta(\rho^{-4}). \tag{27}$$

Expressions (24)–(27) are used to highlight the different behaviors of the gravitational pulse wave mentioned above during its propagation in the ER-spacetime [18].

Next, in Sec. 3, we analyze the two soliton solution obtained by calculating the amplitudes of the incoming and outgoing waves. They are assimilated to the explosions and implosions waves from Weber and Wheeler [3], viewpoint taking into account the different energy densities. Following the previous expressions, we observe how gravitational pulse waves would propagate as exploding and imploding waves, as well as different densities of energy in spacetime through a multitude of viewpoints. For a clear understanding, we introduce the different parameters which are the modulus  $k$  and the angle  $\theta$  of the complex parameter  $k = |a_r + ia_i| = |a|$ ,  $\theta = \text{Arg}(a)$ . In the following analysis, we only consider the case  $q = 1$ , because the parameter  $q$  can be normalized by a scaling of the coordinates. For the investigation of the given orientations, we define the following spacetime:  $-5 \leq t \leq 5$ ,  $-5 \leq \rho \leq 5$ , and  $\theta = n\pi/4$  with  $n = 0, \dots, 3$ . In the following, we aim at investigating detailed behavior of waves propagating near the limits of spacetime, with a particular focus on waves of explosions and implosions as well as energy densities.

**1. Timelike infinity.** Next we consider the asymptotic behaviors of the waves at late time  $t \rightarrow \infty$ . At  $t \rightarrow \infty$ , the metric behaves as

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{a_r^2}{4t^2}\right) dz^2 + \rho^2 \left(1 + \frac{a_r^2}{4t^2}\right) d\phi^2 + \\ & + \left(1 + \frac{a_r^2}{4t^2}\right) (d\rho^2 - dt^2). \end{aligned} \tag{28}$$

This metric allows us to highlight the representation obtained by Weber and Wheeler [3], by associating the two numerical solutions while paying particular interests to the energy density.

**2. Spacelike infinity.** Let us study the behavior of these gravitational waves when  $\rho \rightarrow \infty$ . At the limit of  $\rho \rightarrow \infty$ , we get a new expression of the metric in the form

$$\begin{aligned} ds^2 \approx & \left(1 - \frac{4|a|^2 q}{(|a|^2 + 64q^2)\rho}\right) dz^2 + \\ & + \rho^2 \left(1 + \frac{4|a|^2 q}{(|a|^2 + 64q^2)\rho}\right) d\phi^2 + \\ & + \frac{(|a|^2 + 64q^2)^2}{4096q^2} (d\rho^2 - dt^2). \end{aligned} \tag{29}$$

**3. Axis.** Now we look at the behavior of the waves on the axis of symmetry  $\rho = 0$ . Near the axis, the metric behaves as follows:

$$ds^2 \approx \frac{4(q^2 + t^2)}{4(q^2 + t^2) + (ta_r - qa_i)^2} dz^2 + \rho^2 \frac{4(q^2 + t^2) + (ta_r - qa_i)^2}{4(q^2 + t^2)} d\phi^2 + \frac{4(q^2 + t^2) + (ta_r - qa_i)^2}{4(q^2 + t^2)} (d\rho^2 - dt^2). \quad (30)$$

This metric allows us to show that in the vicinity of the axis  $\rho = 0$ , the explosion and implosion waves during their propagation in this region of space are merged. In this case, we study the representation of gravitational waves as well as its gravitational density. We see that when  $\rho = 0$ ,  $B_+ = A_+$ .

Finally, Sec. 4 is devoted to conclusion and perspectives.

**Acknowledgements.** The authors would like to express their sincere thanks to the anonymous referees for their critical comments and appropriate suggestions which made this paper more precise and readable. They also appreciate the contributions of Mr. Joe Wabo and Ms. Zang Sedena Christine for the improvement of the English language in the text.

*The full text of this paper is published in the English version of JETP.*

## REFERENCES

1. H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoense-laers, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (2003).
2. A. Ashtekar, *Gen. Relativ. Grav.* **46**, 1706 (2014).
3. J. Weber and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 509 (1957).
4. T. Piran, P. N. Sarfier, and R. F. Stark, *Phys. Rev. D* **32**, 3101 (1985).
5. V. A. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational soliton*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
6. V. Belinsky and V. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **48**, 985 (1978).
7. A. D. Dagotto, R. J. Gleiser, and C. O. Nicasio, *Class. Quant. Grav.* **8**, 1185 (1991).
8. R. Penrose, *Gen. Relativ. Grav.* **34**, 7 (2002).
9. M. Lanzagorta, *Quantum Information in Gravitational Fields*, Morgan Claypool Publishers (2014).
10. A. A. Pomeransky, *Phys. Rev. D* **73**, 044004 (2006).
11. S. Tomizawa and T. Mishima, *Phys. Rev. D* **90**, 044036 (2014).
12. T. Igata and S. Tomizawa, *Phys. Rev. D* **91**, 124008 (2015).
13. S. Tomizawa and T. Mishima, *Phys. Rev. D* **91**, 124058 (2015).
14. A. Tomimatsu, *Gen. Relativ. Grav.* **21**, 613 (1989).
15. B. P. Abbott et al., LIGO–Virgo scientific collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
16. M. Halilsoy, *Nuovo Cim.* **102**, 6 (1988).
17. A. Alekseev, *Phys. Rev. D* **93**, 061501(R) (2016).
18. A. Einstein and N. Rosen, *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937).
19. P. Jordan, J. Ehlers, and W. Kundt, *Abh. Akad. Wiss. Mainz. Math. Naturwiss.* **KI**, 2 (1960); A. S. Kompaneets, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 953 (1958); *Sov. Phys. JETP* **7**, 659 (1958).
20. B. Xanthopoulos, *Phys. Rev. D* **34**, 12 (1986).

# ПОЛЯРИЗАЦИЯ И СКОРОСТЬ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ГИБРИДНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ-ПАЛАТИНИ $f(R)$ -ГРАВИТАЦИИ

П. И. Дядина<sup>a\*</sup>

<sup>a</sup> Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,  
119234, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 мая 2022 г.,  
после переработки 2 июня 2022 г.  
Принята к публикации 3 июня 2022 г.

Рассматривается вопрос о соответствии числа степеней свободы и числа поляризационных состояний в гибридной метрической-Палатини  $f(R)$ -гравитации. Показано, что скалярная мода является смесью скалярных поперечной и продольной мод. Также вычисляется скорость распространения гравитационной волны в гибридной метрической-Палатини  $f(R)$ -гравитации.

DOI: 10.31857/S0044451022090115  
EDN: ELJRSZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие гравитационно-волнового излучения — одно из важнейших событий последних десятилетий. Существование гравитационных волн (ГВ) и их прямое детектирование стали еще одним доказательством общей теории относительности (ОТО) [1]. Более того, данные, полученные ГВ-детекторами, могут служить для проверки модифицированных теорий гравитации. Одним из способов использования данных от ГВ-детекторов для проверки теорий гравитации является сравнение поляризационных состояний, предсказываемых теорией, с наблюдательными данными. Событие GW170814 дало возможность коллаборациям LIGO и VIRGO получить результат, согласно которому чисто тензорные поляризационные состояния предпочтительнее чисто векторных или чисто скалярных [2]. Данные, полученные в рамках этого события, могут быть использованы в дальнейшем для более точной количественной проверки теорий гравитации [3]. Однако, в первую очередь, стоит уделить внимание числу поляризационных мод, предсказываемых теорией.

В ОТО гравитационная волна имеет две тензорные поляризации, называемые «+» и «×». В альтернативных же теориях гравитации может присутствовать до шести поляризационных состояний. В работах [4, 5] было показано, что для плоских гравитационных волн шесть поляризаций могут быть классифицированы малой группой  $E(2)$  группы Лоренца. Согласно этой классификации, безмассовое скалярное поле распространяется посредством поперечной скалярной моды, в то время как вторая скалярная мода, продольная, проявляется только в присутствии всех остальных пяти поляризационных мод. Однако, как позднее было показано в работе [6], присутствие массивного скалярного поля приводит к появлению продольной скалярной моды, в дополнение к поперечной, в то время как векторные моды отсутствуют. И только недавно вопрос о несоответствии числа степеней свободы и числа поляризационных состояний в массивных скалярно-тензорных теориях начал активно исследоваться [7, 8]. Эта проблема была рассмотрена на примере теории гравитации Хорндески [9]. Модель Хорндески является наиболее общей скалярно-тензорной теорией, которая приводит к уравнениям поля второго порядка. Авторы показали, что поляризационное состояние, возбуждаемое скалярным полем, представляет собой смесь продольной и поперечной скалярной моды и как результат соответствует одной степени свободы [7].

\* E-mail: guldur.anwo@gmail.com

Настоящая работа посвящена изучению гибридной метрической-Палатини  $f(R)$ -гравитации [10, 11] в контексте поляризации гравитационных волн. Подход построения  $f(R)$ -теорий позволяет модифицировать ОТО наиболее простым способом. Семейство  $f(R)$ -моделей основывается на обобщении гравитационной части действия произвольной функцией от скаляра Риччи [12–14]. Такие модели получили широкое распространение после того, как  $f(R)$ -гравитация была успешно применена для описания инфляции [15]. Кроме того, подход  $f(R)$ -гравитации является привлекательным, так как ускоренное расширение Вселенной является естественным следствием теории. Кроме этого,  $f(R)$ -гравитация привлекательна в качестве альтернативы модели  $\Lambda$ CDM, поскольку она позволяет одновременно описывать инфляцию в ранней Вселенной и ускоренное расширение на поздних этапах эволюции [16–23]. Также  $f(R)$ -модели хорошо согласуются с наблюдательными космологическими данными и практически неотличимы от  $\Lambda$ CDM [24].

Семейство  $f(R)$ -теорий подразделяется на два класса: метрический и Палатини. В метрическом подходе действие варьируется только относительно метрики, тогда как в подходе Палатини аффинная связность не зависит от метрики и является дополнительной переменной. К сожалению, недостатки присутствуют в обоих подходах. Одной из главных проблем метрической  $f(R)$ -гравитации является сложность с прохождением тестов в Солнечной системе [25]. Тем не менее, существует ограниченный класс моделей, который является жизнеспособным [19, 22, 24]. Особенностью таких моделей является хамелеонный механизм [18, 26–28]. Все Палатини  $f(R)$ -модели приводят к неприемлемым особенностям в эволюции космологических возмущений [29].

Не так давно была предложена теория, которая совмещает в себе лагранжиан Эйнштейна–Гильберта и  $f(R)$ -член Палатини [10]. Модель получила название гибридной метрической-Палатини  $f(R)$ -гравитации. Она объединяет в себе достоинства метрического подхода и подхода Палатини, но лишена их недостатков. Гибридная  $f(R)$ -гравитация позволяет описывать крупномасштабную структуру Вселенной без влияния на динамику Солнечной системы. Привлекательной особенностью теории является то, что она представима в скалярно-тензорном виде в терминах динамического скалярного поля (в отличие от моделей Палатини). Причем данное скалярное поле не обязательно должно иметь большую массу для прохождения тестов в Солнечной системе (в отличие от метрических моделей). Таким обра-

зом, скалярное поле играет активную роль в космологии, оставаясь в полном согласии с локальными экспериментами [30].

Гибридная  $f(R)$ -гравитация была изучена на широком диапазоне масштабов: от звезд до скоплений галактик. Было показано, что различие вириальных и визуальных масс скоплений галактик может быть объяснено через геометрические члены в обобщенной теореме вириала [31]. Кроме того, гибридная  $f(R)$ -гравитация позволила объяснить скорости вращения пробных частиц, движущихся в гравитационном поле галактик [32]. Этот подход дал возможность избежать введения большого количества темной материи. Помимо этого, были получены решения типа «кротовая нора» [33] и «черная дыра» [34], а также были изучены физические свойства нейтронных и кварковых звезд [35]. Также проверка гибридной  $f(R)$ -гравитации в Солнечной системе была проведена посредством параметризованного постньютоновского формализма (ППН). Были получены аналитические выражения для ППН параметров  $\gamma$  и  $\beta$ , а также было доказано, что остальные восемь ППН параметров тождественно равны нулю. Было показано, что легкое скалярное поле в гибридной  $f(R)$ -гравитации не противоречит экспериментальным данным на основании полного набора постньютоновских параметров [36, 37]. Кроме того, гибридная  $f(R)$ -гравитация была проверена на наблюдательных данных двойных систем с пульсаром. Было вычислено изменение орбитального периода таких систем вследствие гравитационного излучения в квазикруговом приближении. В рамках решения этой задачи впервые было получено ограничение на массу скалярного поля в гибридной  $f(R)$ -гравитации [38]. Затем этот результат был обобщен на случай орбиты с эксцентриситетом. Для проверки теории был использован параметризованный посткеплеровский формализм. Основным результатом, полученным в ходе этого исследования, заключается в том, что гибридная  $f(R)$ -гравитация предсказывает более широкий диапазон масс компонентов двойных систем с пульсаром, чем ОТО [39].

Гибридная  $f(R)$ -гравитация может быть представлена как скалярно-тензорная теория с массивным скалярным полем. Ранее поляризионные состояния уже изучались в этой теории [40]. Было получено, что гибридная  $f(R)$ -гравитация содержит четыре поляризионные моды: «+», « $\times$ », скалярную продольную и поперечную моды. Однако в работе [41] было показано, что данная модель име-

ет три степени свободы. Таким образом, возникает то же самое несоответствие, что и ранее рассматривалось в теории Хорндески. Целью данной работы является разрешение этого противоречия.

Другим эффективным способом проверки теорий гравитации является определение скорости распространения гравитационных волн. Регистрация килоновой (событие GW170817/SHB170817A [42]) позволила получить скорость гравитационного излучения с высокой точностью, что привело к ограничению и даже закрытию большого числа модифицированных теорий гравитации [43]. Эта проверка была применена и к массивным скалярно-тензорным теориям. Было показано, что только теория Бранса–Дикке с массивным скалярным полем может полностью пройти этот тест. В настоящей работе мы вычисляем скорость распространения гравитационных волн в гибридной  $f(R)$ -гравитации и сравниваем полученный результат с наблюдательными данными.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 рассматриваются действие и уравнения поля гибридной  $f(R)$ -гравитации в общем виде и в скалярно-тензорном представлении. В разд. 3 определяются поляризационные состояния гравитационной волны, предсказываемые гибридной  $f(R)$ -гравитацией. Далее, в разд. 4 вычисляется скорость распространения гравитационных волн в гибридной  $f(R)$ -гравитации. В разд. 5 подводятся итоги и обсуждаются полученные результаты.

В работе греческие индексы  $(\mu, \nu, \dots)$  пробегают значения 0, 1, 2, 3 и используется сигнатура  $(-, +, +, +)$ . Все вычисления выполнены в системе единиц  $\hbar = c = k_B = 1$ . В работе используется представление Йордана.

## 2. ГИБРИДНАЯ $f(R)$ -ГРАВИТАЦИЯ

Действие гибридной метрической-Палатини  $f(R)$ -гравитации состоит из члена Эйнштейна–Гильберта и произвольной функции кривизны Палатини [10, 30]:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathfrak{R})] + S_m, \quad (1)$$

где  $k^2 = 8\pi G$ ,  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная,  $R$  и  $\mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu}$  — метрическая кривизна и кривизна Палатини, соответственно,  $g$  — определитель метрического тензора,  $S_m$  — действие материи. Здесь кривизна Палатини  $\mathfrak{R}$  определяется

как функция  $g_{\mu\nu}$  и независимо определяемых символов Кристоффеля  $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ :

$$\mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda}\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda}\hat{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu}). \quad (2)$$

Как и в случае чисто метрических и Палатини  $f(R)$ -теорий, действие (1) может быть представлено в терминах скалярного поля (более подробный вывод представлен в работах [10, 30]):

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ (1 + \phi)R + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right] + S_m, \quad (3)$$

где  $\phi$  — скалярное поле, а  $V(\phi)$  — скалярный потенциал. В действии (3) скалярное поле неминимально связано с материей, а кинетический член является неканоническим. Уравнения поля, получаемые из (3), имеют следующий вид [10, 30]:

$$(1 + \phi)R_{\mu\nu} = k^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}T \right) - \frac{3}{2\phi} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [V(\phi) + \nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi] + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi, \quad (4)$$

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2\phi} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\phi[2V(\phi) - (1 + \phi)V_\phi]}{3} = -\frac{k^2}{3} \phi T, \quad (5)$$

где  $T_{\mu\nu}$  и  $T$  — тензор энергии-импульса и его след, соответственно.

## 3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Гравитационное излучение распространяется посредством плоских волн в вакууме. Для получения линеаризованных уравнений поля в отсутствие среды ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) необходимо рассмотреть возмущения скалярного поля и метрического тензора:

$$\phi = \phi_0 + \varphi, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где  $\phi_0$  — асимптотическое фоновое значение скалярного поля вдали от источника,  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Минковского,  $h_{\mu\nu}$  и  $\varphi$  — малые возмущения тензорного и скалярного полей, соответственно. В общем случае  $\phi_0$  не является константой, а представляет из себя функцию, зависящую от времени  $\phi(t)$ . Однако этой зависимостью можно пренебречь, если характерная шкала времени велика по сравнению с динамической шкалой времени, связанной с локальной

системой. Таким образом,  $\phi_0$  предполагается постоянной величиной. Скалярный потенциал  $V(\phi)$  может быть разложен в ряд Тейлора около фонового значения скалярного поля  $\phi_0$ :

$$V(\phi) = V_0 + V'\phi + \frac{V''\phi^2}{2!} + \frac{V'''\phi^3}{3!} + \dots, \quad (7)$$

а значит производная скалярного потенциала по отношению к  $\phi$  будет иметь вид

$$V_\phi = V' + V''\phi + V'''\phi^2/2.$$

С учетом выражений (6) линеаризованное уравнение (5), описывающее скалярное поле, принимает вид

$$(\nabla^2 - m_\phi^2)\phi = 0, \quad (8)$$

где

$$m_\phi^2 = [2V_0 - V' - (1 + \phi_0)\phi_0 V'']/3$$

— масса скалярного поля.

Линеаризованный вид уравнений поля (4) будет следующим [40]:

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{1 + \phi_0} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \square \phi), \quad (9)$$

где  $\bar{G}_{\mu\nu}$  — линеаризованный тензор Эйнштейна:

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{R}, \quad (10)$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}), \quad (11)$$

$$\bar{R} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (12)$$

Далее можно перейти к

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - \frac{1}{1 + \phi_0} \eta_{\mu\nu} \phi, \\ \theta &= -h - 4 \frac{1}{1 + \phi_0} \phi. \end{aligned} \quad (13)$$

Выбор калибровки

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$$

приводит уравнения поля (4) к виду

$$\square \theta_{\mu\nu} = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) и (8) описывают гравитационную волну в гибридной  $f(R)$ -гравитации. Поле  $\theta_{\mu\nu}$  отвечает за безмассовый гравитон и имеет два поляризованных состояния: «+» и «×» моды. Скалярное поле  $\phi$  массивно и может быть рассмотрено отдельно от безмассового тензорного поля. Предположим,

что безмассовые и массивные моды распространяются в  $+z$  направлении с волновыми векторами

$$k^\mu = (\Omega, 0, 0, \Omega), \quad p^\mu = (p_t, 0, 0, p_z), \quad (15)$$

соответственно, причем дисперсионное соотношение для скалярного поля имеет вид

$$p_t^2 - p_z^2 = m^2.$$

Тогда скорость распространения массивного скалярного поля будет иметь вид

$$v = \sqrt{p_t^2 - m^2}/p_t.$$

Решения в виде плоских волн для уравнений (14) и (8) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= q_{\mu\nu} \exp^{-ik_\alpha x^\alpha}, \\ \phi &= \phi_0 \exp^{-ip_\alpha x^\alpha}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\phi_0$  и  $q_{\mu\nu}$  являются амплитудами волн, причем

$$k^\nu q_{\nu\mu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} q_{\mu\nu} = 0.$$

Главной целью настоящей работы является определение числа поляризационных состояний гравитационной волны в гибридной  $f(R)$ -гравитации. Все поляризационные состояния содержатся в тензоре  $h_{ij}$ . Для волны, путешествующей в  $z$ -направлении, тензор  $h_{ij}$  можно разложить следующим образом:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_b + h_+ & h_\times & h_x \\ h_\times & h_b - h_+ & h_y \\ h_x & h_y & h_L \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $h_+$  — «+» мода,  $h_\times$  — «×» мода,  $h_b$  — скалярная поперечная мода,  $h_L$  — скалярная продольная мода.

Гравитационные волны могут влиять на расстояние между свободно двигающимися пробными частицами. Это влияние описывается уравнением геодезической. Предполагая, что расстояние  $x^i \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — длина ГВ, а движение пробных частиц является медленным, уравнение геодезической можно записать в виде

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -R_{0i0j} x^j,$$

где  $R_{0i0j}$  — электрическая часть тензора Римана. Также поле  $h_{ij}$  определяет тензор Римана следующим образом:

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} = -2R_{0i0j}.$$

Для дальнейших вычислений будем использовать линеаризованную часть тензора Римана:

$$\overline{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\beta h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha}). \quad (18)$$

$$R_{0i0j} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(1+\phi_0)} p_t^2 \varphi + \frac{1}{2} \Omega^2 \theta_{xx} & \frac{1}{2} \Omega^2 \theta_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \Omega^2 \theta_{xy} & -\frac{1}{2(1+\phi_0)} p_t^2 \varphi - \frac{1}{2} \Omega^2 \theta_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2(1+\phi_0)} m^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для описания поляризационных мод, возбуждаемых скалярным полем, необходимо положить  $\theta_{\mu\nu} = 0$ . В безмассовом случае ( $m = 0$ ) компонента тензора Римана  $R_{tztz} = 0$ , продольная скалярная мода исчезает и остается только скалярная поперечная мода. В случае массивного скалярного поля можно выполнить преобразование  $p_z = 0$  и перейти в систему покоя скалярного поля. В этой системе покоя,  $p_t^2 = m^2$  и  $R_{ttxx} = R_{tyty} = R_{tztz} \neq 0$ . Более того, в этом случае продольная и поперечная скалярные моды становятся эквивалентными. Таким образом, в выбранной системе отсчета продольная скалярная мода не отличима от поперечной, а так как в теории нет привилегированной системы отсчета, то можно сделать вывод, что скалярная мода представляет из себя смесь продольной и поперечной скалярных мод и в других системах отсчета, а значит нет никакого противоречия между числом степеней свободы и числом поляризационных состояний в гибридной  $f(R)$ -гравитации.

Подведем итог. В данном разделе были получены поляризационные состояния, предсказываемые гибридной  $f(R)$ -гравитацией. Для этой цели в первую очередь были получены линеаризованные уравнения поля в вакууме и их решения. Все поляризационные состояния гравитационной волны содержатся в тензоре  $h_{ij}$ . Так как между тензорными возмущениями метрики и электрической частью тензора Римана существует связь

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} = -2R_{0i0j},$$

это позволило через определение тензора Римана найти вид поляризационных мод, используя решения уравнений поля. Зная, что в гибридной  $f(R)$ -гравитации все системы отсчета равноправны, мы перешли в систему отсчета, в которой массивное скалярное поле покоится. И в этой

Вычисление электрической части тензора Римана с учетом выражений (16), (13) дает

системе отсчета мы установили, что

$$p_t^2 = m^2,$$

а значит,

$$-\frac{1}{2(1+\phi_0)} m^2 \varphi = -\frac{1}{2(1+\phi_0)} p_t^2 \varphi.$$

Эти выражения в электрической части тензора Римана были ответственны за скалярные продольную и поперечную моды, соответственно. А раз эти моды равны, то они представляют собой проявления одной и той же скалярной моды. Тем самым мы получили, что две тензорные и одна скалярная степени свободы соответствуют двум тензорным и одному скалярному поляризационным состояниям, что снимает все противоречия.

#### 4. СКОРОСТЬ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Событие GW170817 дало возможность получить скорость распространения гравитационных волн с беспрецедентной точностью [42]. В результате многие теории были закрыты или серьезно ограничены, включая модель Хорндески [43]. В рамках теории Хорндески скорость распространения тензорных возмущений была получена в работах [44, 45]. Оказалось, что выражение для скорости может быть определено через функции скалярного поля, входящие в структуру теории Хорндески:

$$c_t^2 = \frac{2G_4 - (\dot{\phi})^2 G_{5,\phi} - (\dot{\phi})^2 \ddot{\phi} G_{5,X}}{2G_4 - 2(\dot{\phi})^2 G_{4,X} + (\dot{\phi})^2 G_{5,\phi} - H(\dot{\phi})^3 G_{5,X}}. \quad (20)$$

Данное выражение описывает скорость гравитационной волны  $c_t$ , распространяющейся на космологическом фоне, здесь

$$X = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi,$$

$H$  — постоянная Хаббла.

Гибридная  $f(R)$ -гравитация является частным случаем теории Хорндески. Функции перехода между двумя моделями имеют следующий вид [38]:

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{3X}{G\phi} - V(\phi), & G_3 &= 0, \\ G_4 &= \frac{1+\phi}{G}, & G_5 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя эти выражения, можно получить скорость распространения тензорных возмущений в гибридной  $f(R)$ -гравитации из (20):

$$c_t^2 = \frac{2\frac{1+\phi}{G}}{2\frac{1+\phi}{G}} = 1. \quad (22)$$

Таким образом, гравитационные волны в гибридной  $f(R)$ -гравитации распространяются со скоростью света. А значит, гибридная  $f(R)$ -гравитация находится в полном согласии с имеющимися экспериментальными данными.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена проблеме определения числа степеней свободы в гибридной  $f(R)$ -гравитации. Эта модель принадлежит к семейству  $f(R)$ -теорий и объединяет в себе метрический подход и подход Палатини. Гибридная  $f(R)$ -гравитация может быть представлена в виде скалярно-тензорной теории с массивным скалярным полем [10, 30]. Ранее вопрос о несоответствии числа степеней свободы и числа поляризованных состояний гравитационной волны уже поднимался в массивных скалярно-тензорных теориях [7]. Эта проблема была детально изучена на примере теории гравитации Хорндески [7]. Было показано, что теория Хорндески имеет две тензорные и одну скалярную степени свободы. В то же время скалярная степень свободы представляет собой смесь двух поляризованных состояний: поперечной и продольной скалярных мод. Кроме того, в работе [7] было доказано, что классификация Ирдли для поляризованных состояний не применима в случае скалярно-тензорных теорий с массивным скалярным полем.

В рамках гибридной  $f(R)$ -гравитации число поляризованных состояний ранее уже рассматривалось [40]. Авторы показали, что в теории помимо поляризованных состояний, предсказываемых ОТО, «+» и «×» моды, будут присутствовать также скалярные продольная и поперечная моды. Однако в другой работе было получено, что гибридная

$f(R)$ -гравитация содержит три степени свободы [41]. Поэтому главной целью настоящей работы является разрешение существующего противоречия.

Все поляризационные моды, предсказываемые теорией, содержатся в электрической части тензора Римана. После проведения соответствующих вычислений было обнаружено, что в гибридной  $f(R)$ -гравитации будут присутствовать и продольная, и поперечная скалярные моды. Однако в системе покоя массивного скалярного поля два скалярных поляризованных состояния становятся идентичными. Таким образом, можно сделать вывод, что обе скалярные моды являются проявлением одной и той же скалярной степени свободы и представляют собой смесь поляризованных состояний гравитационной волны. Следовательно, в гибридной  $f(R)$ -гравитации не существует противоречия между числом степеней свободы и числом поляризованных состояний.

В заключение можно провести сравнение результатов, полученных для гибридной  $f(R)$ -гравитации, с аналогичными результатами для метрической и Палатини  $f(R)$ -гравитаций. В рамках метрической  $f(R)$ -гравитации было показано, что существуют продольная и поперечная скалярная моды, помимо тензорных «+» и «×» мод, причем они являются тождественными во всех системах отсчета, так как существует связь между массой скалярного поля в скалярно-тензорном представлении этой модели и параметром теории  $\alpha$ :  $m^2 = -1/6\alpha$  [46]. Кроме того, в метрической  $f(R)$ -гравитации подробно рассматривался вопрос о распространении первичных гравитационных волн. Было показано, что для таких моделей энергетический спектр первичных гравитационных волн был несколько расширен по сравнению со спектром ОТО, однако предсказанный спектр оказывается намного ниже самых низких значений чувствительности будущих экспериментов по детектированию гравитационных волн на больших частотах [47]. А в формализме Палатини присутствуют только тензорные «+» и «×» моды, и такие модели неотличимы от ОТО [48].

Одним из наиболее эффективных способов проверки теорий гравитации является вычисление скорости распространения гравитационного излучения. Такая проверка позволила закрыть большое количество теорий гравитации, включая скалярно-тензорные. Более того, некоторые авторы делают вывод, что только теория Бранса–Дикке с массивным скалярным полем может пройти такой тест [43]. В настоящей работе была посчитана скорость распространения тензорных возмущений в гибридной

$f(R)$ -гравитации и показано, что гравитационные волны в этой теории распространяются со скоростью света. Таким образом, гибридная  $f(R)$ -гравитация находится в полном согласии с существующими экспериментальными данными по гравитационно-волновому излучению.

Настоящая работа является первым шагом в изучении гравитационно-волнового излучения в рамках гибридной  $f(R)$ -гравитации. Для более точного сравнения предсказаний теории с имеющимися гравитационно-волновыми данными необходимо построение гравитационно-волновых шаблонов. Такое исследование станет важным этапом в развитии нового мощного формализма для проверки теорий гравитации в сильном поле сливающихся двойных систем.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Н.А. Авдееву и Б.Н. Латошу за полезные обсуждения и комментарии по теме работы.

**Финансирование.** Работа была выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
2. B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 (2017).
3. T. Liu, W. Zhao, and Y. Wang, Phys. Rev. D **102**, 124035 (2020).
4. D. M. Eardley, D. L. Lee, and A. P. Lightman, Phys. Rev. D **8**, 3308 (1973).
5. D. M. Eardley, D. L. Lee, A. P. Lightman, R. V. Wagoner, and C. M. Will, Phys. Rev. Lett. **30**, 884 (1973).
6. M. Maggiore and A. Nicolis, Phys. Rev. D **62**, 024004 (2000).
7. S. Hou, Y. Gong, and Y. Liu, Eur. Phys. J. C **78**, 378 (2018).
8. Y.-Q. Dong and Y.-X. Liu, Phys. Rev. D **105**, 064035 (2022).
9. G.W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).
10. T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Phys. Rev. D **85**, 084016 (2012).
11. T. Harko and F.S. N. Lobo, Int. J. Mod. Phys. D **29**, 2030008 (2020).
12. P. G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968).
13. A. De Felice and S. Tsujikawa, Liv. Rev. Relativ. **13**, 3 (2010).
14. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, Phys. Rept. **692**, 1 (2017).
15. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).
16. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).
17. F. Briscese, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **646**, 105 (2007).
18. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **657**, 238 (2007).
19. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **77**, 026007 (2008).
20. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and D. Saez-Gomez, Phys. Lett. B **681**, 74 (2009).
21. G. Cognola, E. Elizalde, S. D. Odintsov, P. Tretyakov, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **79**, 044001 (2009).
22. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **77**, 046009 (2008).
23. D. Saez-Gomez, Gen. Rel. Grav. **41**, 1527 (2009).
24. S. D. Odintsov, D. Saez-Gomez, and G. S. Sharov, Eur. Phys. J. C **77**, 862 (2017).
25. T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003).
26. J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004).
27. J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D **69**, 044026 (2004).
28. W. Hu and I. Sawicki, Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007).
29. T. Koivisto and H. Kurki-Suonio, Class. Quantum Grav. **23**, 2355 (2005).
30. S. Capozziello et al., Hybrid Metric-Palatini Gravity, Universe **1**, 199 (2015).
31. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, JCAP **07**, 024 (2013).
32. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Astropart. Phys. C **50-52**, 65 (2013).

33. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **86**, 127504 (2012).
34. K. A. Bronnikov, S. V. Bolokhov, and M. V. Skvortsova, *Grav. Cosmol.* **26**, 212 (2020).
35. B. Danila, T. Harko, F. S. N. Lobo, and M. K. Mak, *Phys. Rev. D* **95**, 044031 (2017).
36. P. I. Dyadina, S. P. Labazova, and S. O. Alexeyev, *JETP* **156**, 905 (2019).
37. P. I. Dyadina and S. P. Labazova, *JCAP* **01**, 029 (2022).
38. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, *MNRAS* **483**, 947 (2019).
39. N. Avdeev, P. Dyadina, and S. Labazova, *JETP* **158**, 6135 (2020).
40. H. R. Kausar, *Astrophys. Space Sci.* **363**, 11 (2018).
41. T. S. Koivisto and N. Tamanini, *Phys. Rev. D* **87**, 104030 (2013).
42. B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **119**, 161101 (2017).
43. J. M. Ezquiaga and M. Zumalacarregui, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 251304 (2017).
44. R. Kase and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **28**, 1942005 (2019).
45. B. Latosh, *Eur. Phys. J. C* **80**, 845 (2020).
46. D. Liang, Y. Gong, S. Hou, and Y. Liu, *Phys. Rev. D* **95**, 104034 (2017).
47. S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, and F. P. Fronimos, *Physics of the Dark Universe* **35**, 100950 (2022).
48. M. E. S. Alves, O. D. Miranda, and J. C.N. de Araujo, *Phys. Lett. B* **679**, 4 (2009).

# К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ В $\text{CuV}_2\text{O}_4$

А. Р. Нурмухаметов\*, М. В. Еремин\*\*

Институт физики Казанского (Приволжского) федерального университета  
420111, Казань, Россия

Поступила в редакцию 28 декабря 2021 г.,  
после переработки 10 мая 2022 г.  
Принята к публикации 14 мая 2022 г.

Предложена микроскопическая теория динамической магнитоэлектрической связи в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$ . Рассчитаны уровни энергии, волновые функции  $\text{Cu}^{2+}(3d^9)$  в антиферромагнитно упорядоченной подрешетке ионов меди и вероятности магнитных и электрических дипольных переходов, определены инвариантные компоненты тензора магнитоэлектрической связи при различных направлениях магнитного поля. Результаты микроскопического и теоретико-группового расчетов сопоставляются с имеющимися экспериментальными данными по спектрам поглощения и фотолюминесценции. Рассчитаны диаграммы интенсивности фотолюминесценции при различных направлениях волнового вектора излучения.

DOI: 10.31857/S0044451022090127

EDN: ELK0XR

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитоэлектрические эффекты обусловлены наличием в термодинамическом потенциале членов, линейных как по электрическому, так и по магнитному полю [1]. Можно выделить два подхода в развитии теории магнитоэлектрических эффектов: феноменологический и микроскопический. Феноменологический подход сформулирован в работе Дзялошинского [2]. Этот подход успешно использовался для анализа ряда материалов. Его применение описано во многих обзорах и оригинальных статьях [3–5]. Микроскопический подход развит слабее и предполагает предварительный анализ энергетических схем уровней и взаимодействий магнитных ионов с обменными и электрическими полями. Как это подчеркивается в обзорах [6–9], микроскопические механизмы магнитоэлектрической связи еще не вполне выяснены.

Соединение  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  имеет пьезоэлектрическую тетрагональную структуру с пространственной группой симметрии  $\bar{1}42d$  (№ 122), ионы меди занимают позиции двух типов (подрешеток) —  $4b$  и  $8d$  [10]. При  $9 \text{ K} < T < 21 \text{ K}$  спины меди в подрешетке  $4b$  упорядочиваются антиферромагнитно,

а в подрешетке  $8d$  остаются в парамагнитном состоянии [11]. При  $T < 9 \text{ K}$  формируется сложная неколлинеарная спиновая структура. В нулевом магнитном поле спины преимущественно лежат вдоль направления  $[110]$ , слегка отклоняясь в направлении  $[001]$  [11]. Однако при включении уже довольно слабого магнитного поля (около 500 Э) вдоль направления  $[110]$  спины меди в антиферромагнитных подрешетках  $4b$  ориентируются перпендикулярно ему — вдоль направления  $[1\bar{1}0]$  [12]. Кристаллическая структура не имеет центра инверсии, а при  $T < 21 \text{ K}$  в подрешетке ионов меди  $4b$  нарушается и симметрия по отношению к обращению знака времени, поэтому логично заключить, что магнитоэлектрический эффект возможен. Однако попытка его обнаружения, предпринятая в работе [13], не увенчалась успехом. Никаких заметных изменений диэлектрической проницаемости при фазовых переходах  $T_{N2} = 21 \text{ K}$  и  $T_{N1} = 9 \text{ K}$  не обнаружено. С позиции микроскопического подхода эта проблема обсуждалась в работе [14]. Было найдено, что магнитоэлектрическая связь в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  появляется при включении внешнего магнитного поля в плоскости  $ab$  кристалла. Было также пояснено, каким образом магнитоэлектрическая связь усиливается в  $\text{Cu}_{1-x}\text{Ni}_x\text{V}_2\text{O}_4$ .

В работе [15] в рамках феноменологического (теоретико-группового) подхода исследовался вопрос о том, каковы должны быть дополнительные

\* E-mail: alrnurmuhametov@gmail.com

\*\* E-mail: meremin@kpfu.ru

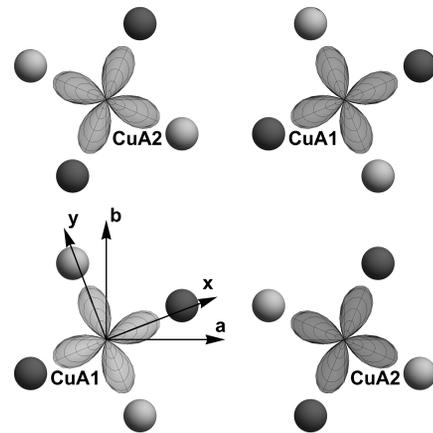
члены в тензоре диэлектрической проницаемости для того, чтобы магнитоэлектрический эффект был возможен. Применительно к  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  авторы работы [15] заключили, что требуются члены, учитывающие пространственную дисперсию, т. е. зависящие от волнового вектора и индукции магнитного поля (так называемые  $kB$ -члены). Вопрос количественной оценки этих поправок к диэлектрической проницаемости требует дополнительных исследований.

Внимание к соединению  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  сильно возросло в связи с обнаружением удивительных явлений в оптических спектрах этого материала во внешних магнитных полях [2, 16–19]. Коэффициент прохождения света через пластинку исследуемого образца меняется при переключении направления внешнего магнитного поля, а также при изменении направления волнового вектора электромагнитной волны в постоянном магнитном поле (явление невязимости). Для описания оптических свойств  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  использованы такие новые термины, как one-way transparency [18], nonreciprocal directional dichroism [18], directional asymmetry of luminescence [20], оптический диод и др. В работах [18, 20] предположено, что эти удивительные явления могут быть объяснены интерференцией электрических и магнитных дипольных переходов между состояниями  $3d^9$  оболочки меди. Очевидно, что для подтверждения этого сценария необходимы микроскопические расчеты. Если вероятности магнитных и электрических дипольных переходов будут действительно примерно одного порядка величины, то тогда можно будет ожидать возникновение интерференции. Однако микроскопические расчеты с одновременным учетом магнитных и электрических дипольных переходов до сих пор не проводились. В настоящей работе на примере  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  мы решили эту задачу. Основной вывод нашей работы — явление интерференции магнитных и электрических дипольных переходов действительно реализуется и объясняет известные нам экспериментальные данные по невязимости как в оптическом спектре поглощения в сильных магнитных полях, так и в спектре фотолуминесценции  $\text{CuV}_2\text{O}_4$ .

## 2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ

В элементарной ячейке в антиферромагнитно упорядоченной подрешетке  $4b$  имеются четыре позиции ионов меди [10]. Картина распределения элект-

тронной плотности, расчет которой поясняется ниже, приведена на рис. 1.



**Рис. 1.** Ортографическая проекция позиций элементарной ячейки подрешетки  $\text{Cu}$  ( $4b$ ). Светло- и темно-желтым цветом изображены ионы кислорода, находящиеся соответственно выше и ниже по оси  $c$  относительно иона меди. Лепестки — рассчитанные нами распределения электронной плотности основных состояний ионов меди. Насыщенность красного цвета в распределении электронной плотности меди соответствует увеличению координаты  $z$  вдоль оси  $c$ , т. е. значениям  $z = 0, 0.25, 0.5$  и  $0.75$  в единицах постоянных решетки в порядке увеличения яркости

Электронные плотности на позициях  $\text{CuA1}$  и  $\text{CuA2}$  развернуты друг относительно друга. Описание энергетической схемы уровней удобно пояснить методом последовательных приближений. На первом этапе расчета проводится диагонализация оператора энергии в базисе всех десяти возможных состояний  $3d^9$  ( ${}^2D$ ):

$$\hat{H} = \sum_{k,q} B_q^k \hat{C}_q^k + \lambda \hat{s}. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое — оператор кристаллического поля, второе — оператор спин-орбитального взаимодействия ( $\lambda \simeq -830 \text{ см}^{-1}$ ). В результате получаются пять крамеровских дублетов. На втором этапе как возмущение рассчитываются расщепления из-за действия обменного (молекулярного) и внешнего магнитного полей. Параметры кристаллического поля  $B_q^{(k)}$  определялись в работе [14] по экспериментальным данным о спектре поглощения [21]. В локальных системах координат они равны (в  $\text{см}^{-1}$ ):

$$B_0^{(2)} = -17720, \quad B_0^{(4)} = 9940, \quad B_4^{(4)} = 14030. \quad (2)$$

Оператор обменного взаимодействия между основными состояниями меди записывался в виде

$$J_{gg} \sum_{i=1}^4 \langle \mathbf{s}_i \rangle \hat{\mathbf{s}}.$$

Величина параметра  $J_{gg} \simeq 29 \text{ см}^{-1}$  известна по данным о рассеянии нейтронов и по спектрам фотолюминесценции [20, 22]. Обменное поле, действующее на возбужденное состояние  $|\zeta\rangle$ , в экспериментальных работах [18, 20] не проявилось из-за сравнительно большой ширины линий и поэтому ниже не учитывается. Для пояснений картины распределения электронной плотности удобно использовать локальные системы координат с реальным базисом орбитальных волновых функций в дырочном представлении:

$$\begin{aligned} |\epsilon\rangle &= |x^2 - y^2\rangle, & |\zeta\rangle &= |xy\rangle, \\ |\theta\rangle &= |3z^2 - r^2\rangle, & |\eta\rangle &= |xz\rangle, & |\xi\rangle &= |yz\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Основным состояниям ионов меди, главным образом, соответствуют состояния типа  $|\epsilon\rangle$ , а состояниям с энергией 1.4 эВ —  $|\zeta\rangle$ . Максимумы электронной плотностей для позиций CuA1 отклонены от направления кристаллографической оси  $\mathbf{a}$  на угол  $\phi = 20.9^\circ$ , а для позиции CuA2 на угол  $-20.9^\circ$ . Эти углы не совпадают с углами проекций связей ионов меди с ближайшими ионами кислорода (для CuA1 он равен  $24^\circ$ ) из-за влияния электростатических полей от ионов второй и более удаленных координационных сфер. При учете спин-орбитального взаимодействия волновые функции основного  $|g, \pm\rangle$  и возбужденного  $|e, \pm\rangle$  дублетов в локальных системах координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} |g, \pm\rangle &= 0.997 \cdot |\epsilon, \pm\rangle \pm 0.069i \cdot |\zeta, \pm\rangle \\ &\quad \pm 0.025 \cdot |\eta, \mp\rangle - 0.025i \cdot |\xi, \mp\rangle \\ |e, \pm\rangle &= 0.985 \cdot |\zeta, \pm\rangle + 0.112i \cdot |\eta, \mp\rangle \\ &\quad \pm 0.112 \cdot |\xi, \mp\rangle \pm 0.062i \cdot |\epsilon, \pm\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что в работе [18] (см. приложение к работе [18]) примешивание состояний  $|\zeta\rangle, |\eta\rangle, |\xi\rangle$  к волновым функциям основного состояния  $|\epsilon\rangle$  не учитывалось. Между тем, оно существенно влияет на результаты расчета как расщеплений основного и возбужденного состояний магнитным полем, так и на вероятности электрических дипольных переходов.

Для расчета суммарной интенсивности поглощения требуются волновые функции обеих позиций меди в единой системе координат. Операторы кристаллического поля  $B_q^{(k)}$  в кристаллографической систе-

ме координат  $a, b$  и  $c$  связаны с их значениями в локальной системе соотношением

$$B_q^{(k)} = B_q^{(k)} \exp(-iq\phi). \quad (5)$$

Это соотношение подставляется в (1), и затем оператор энергии диагонализуется для позиций CuA1 и CuA2.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛЕМ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Основное затруднение современной микроскопической теории динамической магнитоэлектрической связи связано с проблемой расчета электрических дипольных переходов. В этой связи в ранних работах [17, 23–25] ограничивались симметричным анализом ненулевых компонент динамического магнитоэлектрического тензора. Известно, что в пределах состояний  $3d$ -оболочки электрические дипольные переходы запрещены законом сохранения четности. Уже давно в процессе исследований оптических спектров кристаллов было понято, что в позициях ионов без центра инверсии электрические дипольные переходы возникают из-за смешивания состояний основных электронных конфигураций  $3d^n$  с возбужденными конфигурациями противоположной четности  $3d^{n-1}4p$  [26].

В случае редкоземельных соединений Джадд [27] и Офельт [28], используя схему расчета во втором порядке теории возмущений, вывели удобные аналитические выражения для учета смешивания основных электронных  $4f^n$ -конфигураций с возбужденными  $3f^{n-1}5d$  из-за нечетного кристаллического поля. Имеется большое число работ по применению результатов Джадда и Офельта, в которых отмечены достоинства и недостатки этой теории. В работах Корниенко с соавторами [29–31] формулы работ [27, 28] дополнены членами высших порядков теории возмущений, которые позволили устранить принципиальные трудности теории Джадда—Офельта.

В случае соединений с незаполненными  $3d^n$ -оболочками теория разработана сравнительно хуже. Проблема в том, что в области энергий возбужденных конфигураций  $3d^{n-1}4p$  у элементов группы железа находятся также состояния с переносом электронов из  $2p$ - и  $2s$ -оболочек соседних ионов кислорода в незаполненную  $3d$ -оболочку и поэтому они могут влиять на взаимодействие электронов с электрическим полем, как это отмечалось в [32]. Расчеты, проведенные для  $\text{LiCu}_2\text{O}_2$  [33]

и  $\text{FeV}_2\text{O}_4$  [34], с использованием накопленных данных магнитного резонанса о параметрах ковалентных связей, показали, что вклады в параметры эффективного электрического дипольного момента у ионов  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$ , обусловленные виртуальными возбуждениями в состояния конфигурации  $3d^84p$  и в состояния с переносом заряда  $\text{Cu}(3d^{10})\text{O}(2p^5)$ , — одного порядка величины. Эффективный оператор связи с электрическим полем световой волны, учитывающий примешивание обеих возбужденных конфигураций к основной  $3d^n$ , имеет вид [33, 34]

$$H_E = \sum_{k,p,t} \{E^{(1)}\widehat{U}^{(k)}\}_t^{(p)} D_t^{(1k)p}, \quad (6)$$

где фигурные скобки обозначают прямое произведение сферических компонент вектора электрического поля и единичного неприводимого тензорного оператора  $\widehat{U}^{(k)}$ :

$$\{E^{(1)}\widehat{U}^{(k)}\}_t^{(p)} = \sqrt{2p+1} \sum_{q,q'} (-1)^{1-k+t} \begin{pmatrix} 1 & k & p \\ q & q' & -t \end{pmatrix} E_q^{(1)} \widehat{U}_{q'}^{(k)}, \quad (7)$$

$$E_0^{(1)} = E_z; \quad E_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x \pm i \cdot E_y). \quad (8)$$

Индекс  $p$ , в общем случае принимает нечетные значения 1, 3 и 5, а индекс  $k$  — только четные 2 и 4. Дополнительные правила отбора накладывает точечная группа симметрии  $S_4$  позиций меди. В итоге нетрудно установить, что отличны от нуля следующие величины:  $D_{\pm 2}^{(12)3}$ ,  $D_{\pm 2}^{(14)3}$  и  $D_{\pm 2}^{(14)5}$ , которые имеют размерность электрического дипольного момента. Матричные элементы оператора  $U^{(k)}$  рассчитываются через 3- $j$  символы:

$$\langle dm_l | \widehat{U}_{q'}^{(k)} | dm_l' \rangle = (-1)^{2-m_l} \begin{pmatrix} 2 & k & 2 \\ -m_l & q' & m_l' \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Явный вид формул для оценки величин параметров  $D_t^{(1k)p}$  приведен в работах [32, 33]. Проведя расчет, мы убедились, что матричные элементы от оператора  $H_E$  и от оператора магнитных дипольных переходов в области 1.4 эВ в ряде случаев действительно оказываются одного порядка величины, т. е. интерференция магнитных и электрических переходов возможна.

Оператор взаимодействия с магнитным полем световой волны записывался в виде

$$\widehat{H}_M = \mu_B (\widehat{\mathbf{L}} + 2\widehat{\mathbf{S}}) \mathbf{B}^\omega. \quad (10)$$

При этом учитывалось, что магнитная компонента световой волны связана с электрической соотношением

$$\mathbf{B}^\omega = \frac{1}{k} \sqrt{\epsilon\mu} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}^\omega].$$

Согласно экспериментальным данным [21]  $\sqrt{\epsilon\mu} \approx 1.75$ . Вместе с тем наши расчеты показали, что соединение  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  имеет специфическую особенность, затрудняющую точный микроскопический расчет параметров  $D_t^{(1k)p}$ . При расчете параметров нечетного кристаллического поля вклады от ионов из первой, второй и третьей координационных сфер оказываются примерно одинаковой величины, но разных знаков. В итоге возникает большая погрешность в теоретической оценке величин  $D_t^{(1k)p}$ . В этой связи возникает необходимость определить минимальный набор подстраиваемых параметров, определяющих электрические дипольные переходы в интересующем нас интервале частот спектра поглощения. Рассчитывая матричные элементы оператора (6) на волновых функциях (4), получаем матричные элементы, которые удобно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon | \widehat{H}_E | \eta \rangle &= D_1 E_x - D_3 E_y, \\ \langle \epsilon | \widehat{H}_E | \xi \rangle &= D_3 E_x + D_1 E_y, \\ \langle \zeta | \widehat{H}_E | \eta \rangle &= -D_2 E_x - D_4 E_y, \\ \langle \zeta | \widehat{H}_E | \xi \rangle &= D_4 E_x - D_2 E_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Величины  $D_i$  связаны с  $D_t^{(1k)p}$  соотношениями

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \text{Re} \left[ \sqrt{\frac{1}{5}} D_2^{(12)3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} D_2^{(14)3} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{3 \cdot 5}} D_2^{(14)5} \right], \\ D_2 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \text{Im} \left[ \sqrt{\frac{1}{5}} D_2^{(12)3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} D_2^{(14)3} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{3 \cdot 5}} D_2^{(14)5} \right], \\ D_3 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \text{Im} \left[ \sqrt{\frac{1}{5}} D_2^{(12)3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} D_2^{(14)3} \right], \\ D_4 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \text{Re} \left[ \sqrt{\frac{1}{5}} D_2^{(12)3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} D_2^{(14)3} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Параметры  $D_t^{(1k)p}$ , как и параметры кристаллического поля, пропорциональны соответствующим компонентам сферического тензора  $C_{-t}^{(p)}$ , поэтому при переходе от локальной системы координат

в кристаллографическую мы можем использовать соотношение, аналогичное (5):

$$D_t^{(1k)p} = D_t^{(1k)p} \exp(-it\phi). \quad (13)$$

Это соотношение совместно с (5) позволяет использовать одинаковые наборы  $B_q^{(k)}$  и  $D_t^{(1k)p}$  для обеих позиций CuA1 и CuA2.

#### 4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ПО СПЕКТРУ ПОГЛОЩЕНИЯ

Интенсивность поглощения при переходе с основного  $|g\rangle$  на возбужденное состояние  $|e\rangle$ , вырожденное по спиновым переменным, пропорциональна сумме квадратов модулей матричных элементов по четырем позициям ионов меди в элементарной ячейке:

$$I_{ge} \sim \sum_{\sigma,i} |\langle g | \hat{H}_E + \hat{H}_M | e, \sigma \rangle|^2. \quad (14)$$

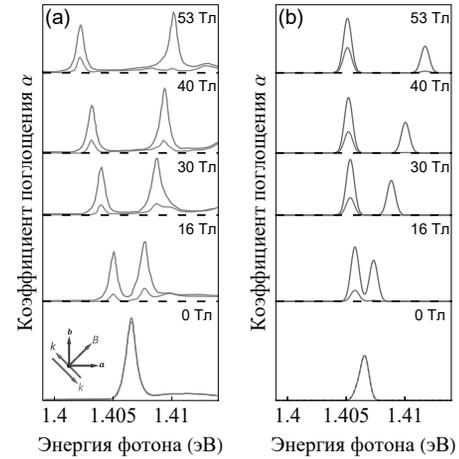
Из (14) следует, что результат сложения матричных элементов операторов  $\hat{H}_E$  и  $\hat{H}_M$  меняется при обращении направления волнового вектора падающего света. В этой связи можно говорить об интерференции электрических и магнитных дипольных переходов.

На рис. 2a приведен спектр поглощения из работы [18]. На рис. 2b приведен результат нашего расчета по формуле (14). Параметры электрических дипольных переходов приняты равными (в дебаях)

$$D_1 = D_3 = 0.081, \quad D_2 = D_4 = 0.085. \quad (15)$$

Отметим, что по порядку величины они соответствуют тем, что были получены нами в процессе микроскопического расчета в работе [14], в которой мы обсуждали происхождение статической магнитоэлектрической связи в кристаллах  $\text{Cu}_{1-x}\text{Ni}_x\text{V}_2\text{O}_4$ , обусловленной спиновым упорядочением.

Обратим внимание на то, что по результатам нашего расчета (рис. 2b) расщепление линий поглощения не симметрично относительно положения линии в нулевом магнитном поле. Имеется линейный по приложенному магнитному полю сдвиг «центра тяжести» в сторону высоких частот. Он обусловлен сдвигом зеемановской компоненты основного состояния вниз по энергии под действием магнитного поля. Этот сдвиг не виден на рис. 2a. Однако его прекрасно видно на графиках работы [35], в которой



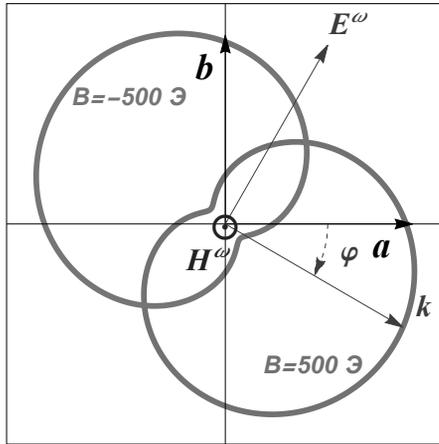
**Рис. 2.** Спектр поглощения света при прохождении через пластинку  $\text{CuB}_2\text{O}_4$ . Внешнее магнитное поле  $\mathbf{B} \parallel [110]$ . Компоненты линейно-поляризованной световой волны  $\mathbf{E}^\omega \parallel [110]$  и  $\mathbf{H}^\omega \parallel [001]$ . Зеленым и желтым цветом изображены линии оптического поглощения при направлении волнового вектора света соответственно  $\mathbf{k}^\omega \parallel [\bar{1}10]$  и  $\mathbf{k}^\omega \parallel [1\bar{1}0]$ . На панели a представлены экспериментальные данные из работы [18], на панели b — результаты нашего моделирования без учета неясного происхождения «подставки» в высокочастотной части спектра

получены спектры поглощения с большим разрешением по сравнению с работой [18]. Для поляризации света и направления магнитного поля, использованных в [35], явление невязимности запрещено по симметрии магнитной группы. В данной работе нас, главным образом, интересует происхождение явления невязимности, поэтому мы ограничиваемся сопоставлением расчета с данными из работы [18]. Как видно на рис. 2, в отношении эффекта невязимности наши расчеты вполне удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.

Далее перейдем к анализу результатов экспериментов, проведенных в работе [36]. Из данных, приведенных на рис. 3d, следует, что при  $\mathbf{B} \parallel [110]$ ,  $\mathbf{k}^\omega \parallel [\bar{1}10]$ ,  $\mathbf{E}^\omega \parallel [110]$ ,  $\mathbf{H}^\omega \parallel [00\bar{1}]$  эффект невязимности наблюдается, а при  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}^\omega \parallel [\bar{1}10]$ ,  $\mathbf{E}^\omega \parallel [110]$ ,  $\mathbf{H}^\omega \parallel [00\bar{1}]$  он отсутствует. Из формулы (14) следует, что вклад в вероятность перехода, связанный с произведением электрической  $E_\alpha^\omega$  и магнитной  $H_\beta^\omega$  компонент света, пропорционален компоненте тензора динамической магнитоэлектрической связи:

$$\chi_{\alpha\beta}^{em} + \chi_{\beta\alpha}^{me} \sim \sum_i \langle g | d_\alpha | e_i \rangle \langle e_i | m_\beta | g \rangle + \langle g | m_\beta | e_i \rangle \langle e_i | d_\alpha | g \rangle, \quad (16)$$

где  $d_\alpha$  и  $m_\beta$  — эффективные операторы компонент соответственно электрического и магнитного



**Рис. 3.** Рассчитанная диаграмма относительной интенсивности фотолюминесценции в плоскости  $ab$  монокристалла  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  при переключении направления внешнего магнитного поля  $B = \pm 500 \text{ Э}$  вдоль направления  $[110]$ . Длина полярного вектора (вдоль волнового вектора излучения  $k^\omega$ ) считается пропорциональной вероятности суммарного электрического и дипольного переходов из возбужденных состояний  $|e, \pm\rangle$  в основное  $|g, -\rangle$ , т.е. сумме  $\sum_\sigma |\langle g | \hat{H}_E + \hat{H}_M | e, \sigma \rangle|^2$ . Предполагается, что вектор антиферромагнетизма  $L \parallel [\bar{1}\bar{1}0]$ . Компонента световой волны  $H^\omega$  осциллирует вдоль оси  $c$

дипольных моментов. Дипольный момент меняет знак при пространственной инверсии, а магнитный момент — при операции обращения знака времени. Таким образом, динамическая магнитоэлектрическая связь возможна, если одновременно нарушаются симметрии и пространственной, и временной инверсии. Кроме того, правая часть (16) должна быть инвариантна и относительно других операций симметрии (плоскостей отражения, поворотных осей и других) магнитной группы. Магнитная группа определяется пересечением точечной группы симметрии магнитно-упорядоченного кристалла и группы приложенного магнитного поля.

При  $B \parallel [110]$  пересечение кристаллографической точечной группы  $D_{2d}$  и магнитной группы дает группу симметрии  $m_x' m_y' 2_c'$ . Здесь и далее, как и в работе [17], оси  $x'$  и  $y'$  считаются направленными соответственно вдоль  $[110]$  и  $[\bar{1}\bar{1}0]$ . Действуя элементами симметрии  $m_x'$ ,  $m_y'$  и  $2_c'$  на компоненту магнитоэлектрического тензора  $\chi_{x'c}^{em} + \chi_{cx'}^{me}$ , нетрудно убедиться, что она является инвариантом этой группы, т.е. при  $E^\omega \parallel [110]$ ,  $H^\omega \parallel [001]$  невзаимность возможна.

При  $B \parallel [\bar{1}\bar{1}0]$  мы имеем магнитную группу симметрии  $m_x' m_y' 2_c'$ . Действуя, например, элементом симметрии  $m_x'$  на компоненту  $\chi_{x'c}^{em}$ , находим, что она изменяет знак, и, следовательно, равна нулю.

Таким образом, отсутствие эффекта невзаимности в этом случае легко объясняется.

На рис. 3с работы [36] приведены результаты экспериментов при  $B \parallel k^\omega \parallel [010]$ ,  $E^\omega \parallel [100]$ ,  $H^\omega \parallel [00\bar{1}]$  и при  $B \parallel k^\omega \parallel [100]$ ,  $E^\omega \parallel [010]$ ,  $H^\omega \parallel [001]$ . В первом случае невзаимность зарегистрирована, а во втором случае не обнаружена (отсутствует?). Конфигурация направления спинов и поля в первом случае соответствует магнитной группе  $2_a 2_b' 2_c'$ , а во втором случае —  $2_a' 2_b 2_c'$ . Действуя элементами симметрии этих групп на компоненту магнитоэлектрического тензора  $\chi_{ac}^{em}$  можно установить, что она инвариантна относительно всех операций симметрии группы  $2_a 2_b' 2_c'$ , но не является инвариантом группы  $2_a' 2_b 2_c'$ . Таким образом, и в этом случае сценарий интерференции магнитных и электрических дипольных переходов объясняет экспериментальные данные.

Выше мы привели примеры применения микроскопического и теоретико-группового подхода к анализу явления невзаимности в спектре поглощения, которые взаимно дополняют друг друга. Вместе с тем важно отметить, что имеется много вариантов направлений волнового вектора и магнитного поля, при которых соображения симметрии оказываются малоэффективными. Сильная сторона микроскопического подхода состоит в том, что он позволяет рассчитывать эффект невзаимности при произвольных направлениях световой волны и внешнего магнитного поля, в том числе и тогда, когда магнитная симметрия достаточно низкая и теоретико-групповой подход оказывается неэффективным. В частности, микроскопический подход позволяет рассчитать эффект невзаимности при отклонении направлений магнитного поля и волнового вектора света от осей симметрии кристалла. Так, допустив небольшие отклонения направления волнового вектора света от оси  $c$  кристалла, мы нашли, что «запрещенный» по симметрии эффект невзаимности в геометрии Фарадея  $B \parallel k^\omega \parallel [001]$  довольно быстро появляется, и при отклонениях порядка  $3^\circ$  уже вполне может быть зарегистрирован экспериментально. Кстати сказать, это обстоятельство можно использовать для контроля ориентации образцов.

### 5. УГЛОВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИНТЕНСИВНОСТИ ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Явление асимметрии в направлении фотолюминесценции (directional asymmetry of luminescence)

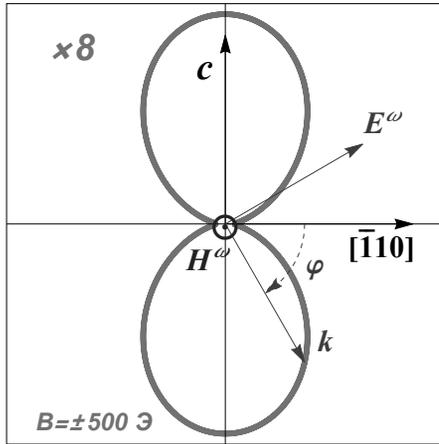


Рис. 4. Рассчитанная диаграмма изменения относительной интенсивности фотолюминесценции для однодоменного образца при изменении направления внешнего магнитного поля  $B = \pm 500$  Э перпендикулярно плоскости рисунка. Предполагается, что вектор антиферромагнетизма  $L \parallel [1\bar{1}0]$ . Компонента световой волны  $H^\omega \parallel [110]$ . Полярный угол вектора излучения  $\phi$  отсчитывается от направления  $[\bar{1}10]$ . Максимальное значение интенсивности примерно в 8 раз меньше ее значения на рис. 3

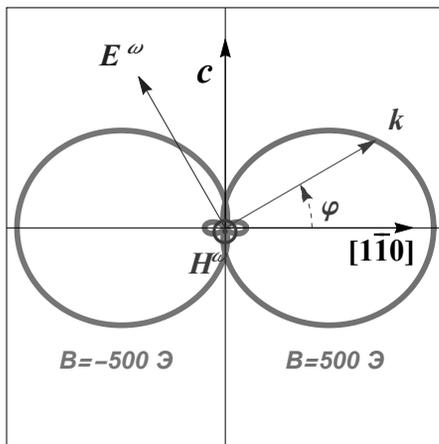


Рис. 5. Рассчитанная диаграмма изменения относительной интенсивности фотолюминесценции для однодоменного образца при изменении направления внешнего магнитного поля  $B = \pm 500$  Э перпендикулярно плоскости рисунка. Предполагается, что вектор антиферромагнетизма  $L \parallel [1\bar{1}0]$ . Компонента световой волны  $E^\omega \parallel [110]$ . Полярный угол вектора излучения  $\phi$  отсчитывается от направления  $[\bar{1}10]$

кристалла  $CuV_2O_4$  обнаружено в работе [20]. Оно зарегистрировано при изменении направления внешнего магнитного поля  $B$  вдоль  $[110]$  на противоположное. Компоненты волны поляризованы следующим образом:  $E^\omega \parallel [110]$ ,  $H^\omega \parallel [001]$ . Согласно общей теории излучения, естественно считать,

что предпочтительным направлением люминесценции является такое, при котором вероятность перехода между исходным и конечным состояниями имеет наибольшее значение. В этом плане явления асимметрии люминесценции и невзаимности в спектре поглощения — это два разных оптических явления, имеющих общее происхождение. Однако для практических приложений наибольший интерес представляют диаграммы излучения для различных произвольных направлений волнового вектора. Результаты наших расчетов приведены на рис. 3–5.

Отметим, что диаграмма асимметрии фотолюминесценции на рис. 4 ( $B \parallel [110]$ , вектор антиферромагнетизма  $L = S_{A1} - S_{A2} \parallel [1\bar{1}0]$ ,  $E^\omega \parallel [110]$ ,  $H^\omega \parallel [001]$ ) соответствует экспериментальным данным, приведенным на рис. 2 в работе [20]. Тот факт, что асимметрия люминесценции в геометрии Фарадея, т.е.  $B \parallel k^\omega \parallel [110]$ , отсутствует, можно легко понять на основе соображений симметрии, как это пояснялось при описании невзаимности в спектрах поглощения.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассчитанное изменение коэффициента поглощения света антиферромагнетиком  $CuV_2O_4$  во внешнем постоянном магнитном поле соответствует имеющимся экспериментальным данным [18]. Наши микроскопические и теоретико-групповые расчеты поддерживают идею о том, что явление невзаимности в  $CuV_2O_4$  может быть объяснено интерференцией магнитных и электрических дипольных переходов. При этом объясняется также явление асимметрии в спектре фотолюминесценции [20]. Развитая микроскопическая теория необратимости (невзаимности) позволяет рассчитать относительную интенсивность фотолюминесценции при различных направлениях волнового вектора излучения относительно кристаллографических осей  $CuV_2O_4$ , а также при различных поляризациях световой волны. В этом плане интересно продолжить исследование фотолюминесценции с большим разрешением спектральных линий, принципиальная возможность чего была недавно продемонстрирована в работе [37]. При этом, конечно, надо выбрать такие конфигурации полей, при которых эффект динамической магнитоэлектрической связи будет разрешен по симметрии, и принять во внимание асимметрию диаграмм излучения. Можно также надеяться, что значения параметров электрических

дипольных переходов окажутся полезными при анализе явления невзаимности на других частотах.

**Благодарности.** Авторы благодарны Р. В. Писареву и М. Н. Поповой за обсуждения экспериментальных данных по оптическим свойствам  $\text{CuV}_2\text{O}_4$ .

**Финансирование.** Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982) с. 250.
2. И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **37**, 881 (1959).
3. А. К. Звездин, А. А. Мухин, *Письма в ЖЭТФ* **88** 581 (2008)
4. А. П. Пятаков, А. К. Звездин, *УФН* **182**, 593 (2012).
5. F. Popkov, M. D. Davydova, K. A. Zvezdin, S. V. Solov'ov and A. K. Zvezdin, *Phys. Rev. B* **93**, 094435 (2016).
6. D. Khomskii, *Physics* **2**, 20 (2009).
7. A. S. Moskvina and S. L. Drechsler, *Eur. Phys. J. B* **71**, 331 (2009).
8. Y. Tokura, S. Seki and N. Nagaosa, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 076501 (2014).
9. Shuai Dong, Jun-Ming Liu, Sang-Wook Cheong and Zhifeng Ren, *Adv. Phys.* **64**, 519 (2015).
10. M. Martínez-Ripoll, S. Martínez-Carrera and S. García-Blanco, *Acta Crystallographica Section B* **27**, 677 (1971).
11. M. Boehm, B. Roessli, J. Schefer, A. S. Wills, B. Ouladdiaf, E. Lelièvre-Berna, U. Staub and G. A. Petrakovskii, *Phys. Rev. B* **68**, 024405 (2003).
12. S. Toyoda, N. Abe and T. Arima, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 077401 (2019).
13. G. Nénert, L. N. Bezmaternykh, A. N. Vasiliev and T. T. M. Palstra, *Phys. Rev. B* **76**, 144401 (2007).
14. М. В. Еремин, А. Р. Нурмухаметов, *Письма в ЖЭТФ* **114** 31 (2021).
15. A. I. Nikitchenko and R. V. Pisarev, *Phys. Rev. B* **104**, 184108 (2021).
16. M. Saito, K. Taniguchi and T. Arima, *J. Phys. Soc. Jpn.* **77**, 013705 (2008).
17. S. W. Lovesey, U. Staub, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 142201 (2009).
18. S. Toyoda, N. Abe, S. Kimura, Y. H. Matsuda, T. Nomura, A. Ikeda, S. Takeyama and T. Arima, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 267207 (2015).
19. K. N. Boldyrev, R. V. Pisarev, L. N. Bezmaternykh and M. N. Popova, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 247210 (2015).
20. S. Toyoda, N. Abe and T. Arima, *Phys. Rev. B* **93**, 201109 (2016).
21. R. V. Pisarev, A. M. Kalashnikova, O. Schops and L. N. Bezmaternykh, *Phys. Rev. B* **84**, 075160 (2011).
22. M. Boehm, S. Martynov, B. Roessli, G. Petrakovskii, J. Kulda, *J. Magn. Magn. Mater.* **250**, 313 (2002).
23. S. Miyahara and N. Furukawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 023712 (2012).
24. S. Miyahara, N. Furukawa, *Phys. Rev. B* **89**, 195145 (2014).
25. I. Kézsmárki, D. Szaller, S. Bordacs, V. Kocsis, Y. Tokunaga, Y. Taguchi, H. Murakawa, Y. Tokura, H. Engelkamp, T. Room and U. Nagel, *Nat. Commun.* **5**, 3203 (2014).
26. W. Low, M. Weger, *Phys. Rev.* **118**, 1119 (1960).
27. B. R. Judd, *Phys. Rev.* **127**, 750 (1962).
28. G. S. Ofelt, *J. Chem. Phys.* **37**, 511 (1962).
29. A. Kornienko, A. A. Kaminskii, E. B. Dunina, *Phys. Stat. Sol. (b)* **157**, 267 (1990).
30. E. B. Dunina, A. A. Kornienko, L. A. Fomicheva, *Cent. Eur. J. Phys.* **6**, 407 (2008).
31. Е. Б. Дунина, А. А. Корниенко, *Оптика и спектроскопия* **116**, 763 (2014).
32. А. А. Корниенко, М. В. Еремин, *ФТТ* **19**, 52 (1977).
33. М. В. Еремин, *ЖЭТФ* **156**, 1084 (2019).
34. M. V. Eremin, *Phys. Rev. B* **100**, 140404(R) (2019).
35. N. E. Kopteva, D. Kudlacik, D. R. Yakovlev, M. V. Eremin, A. R. Nurmukhametov, M. Bayer and R. V. Pisarev, *Phys. Rev. B* **105**, 024421 (2022).
36. M. Saito, K. Ishikawa, K. Taniguchi and T. Arima, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 117402 (2008).
37. D. Kudlacik, V. Yu. Ivanov, D. R. Yakovlev, V. F. Sapega, J. J. Schindler, J. Debus, M. Bayer, and R. V. Pisarev *Phys. Rev. B* **102**, 035128 (2020).

# ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

А. К. Муртазаев<sup>а</sup>, А. Б. Бабаев<sup>а,б\*</sup>, Г. Я. Атаева<sup>а</sup>, М. А. Магомедов<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Институт физики им. Х. И. Амирханова Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, 367003, Махачкала, Россия

<sup>б</sup> Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, 367000, Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 15 марта 2022 г., апреля 2022 г.\*

Принята к публикации 06 мая 2022 г.

Методом компьютерного моделирования проведено исследование фазовых переходов и критического поведения в двумерной разбавленной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на квадратной решетке. Рассмотрены системы с линейными размерами  $L \times L = N$ ,  $L = 10 \div 160$  при концентрации спинов  $p = 1.00, 0.95, 0.80$ . Показано, что внесение немагнитных примесей оказывает стабилизирующую роль при реализации фазового перехода второго рода в исследуемой модели Поттса. На основе теории конечно-размерного скейлинга рассчитаны статические критические индексы теплоемкости  $\alpha$ , восприимчивости  $\gamma$ , намагнитченности  $\beta$  и индекса радиуса корреляции  $\nu$  в рассмотренном интервале концентраций  $p$ .

DOI: 10.31857/S0044451022090139

EDN: ELKZUY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие компьютерных технологий и вычислительных методов исследования, привело к их превалированию над теоретическими и экспериментальными методами при изучении неупорядоченных магнитных систем. Обусловлено это тем, что в реальных системах всегда присутствуют усложняющие факторы, затрудняющие использование теоретических и экспериментальных методик [1–5]. Вмороженный беспорядок, содержащийся в реальных системах приводит к определенным трудностям при изучении их термодинамических и критических свойств на основе экспериментальных методов исследования. Имеющиеся на сегодняшний день экспериментальные результаты не позволяют сформировать цельной и непротиворечивой картины критического поведения примесных систем. Дело не только в том, что результаты экспериментальных исследований сильно зависят от метода и конкретного образца, но и от способа приготовления образ-

ца. Кроме того, практически нет экспериментальных исследований, выполненных на основе единого методического подхода на сериях однотипных образцов при строго контролируемом содержании количества примесей. Практически во всех экспериментальных исследованиях серьезной и до сих пор не решенной проблемой остается проблема достижения асимптотического критического режима [2, 4]. На этом фоне обнадеживающими представляются результаты и возможности исследования примесных систем методами Монте-Карло (МК).

К настоящему времени известно, что дефекты структуры, реализованные в виде немагнитных примесей, оказывают влияние на тепловые и магнитные характеристики спиновых систем для которых выполняется так называемый критерий Харриса [6]. Справедливость этого критерия достаточно хорошо проверена для трехмерных спиновых систем, описываемых моделью Изинга [7, 8]. В тоже время в случае двумерной модели Изинга критерий Харриса не применим в силу того, что  $\alpha = 0$ . Детальное рассмотрение этого случая [9] позволило прийти к выводу, что влияние примеси затрагивает только поведение теплоемкости, в то время как остальные термодинамические и корреляционные функции не изменяют своего критического поведения.

\* E-mail: b\_albert78@mail.ru

Примеси также могут влиять на род фазового перехода (ФП), в случае спиновых систем, испытывающих в однородном состоянии ФП первого рода [10]. На стабилизирующую роль немагнитных примесей при реализации ФП второго рода с применением теоретических методов было указано и в недавней работе [11]. Для изучения этого случая хорошо подходит модель Поттса. С одной стороны, это связано с тем, что в модели Поттса наблюдается ФП первого рода при  $q > 4$ , и ФП второго рода при  $q \leq 4$ . С другой стороны модель Поттса является теоретическим инструментом, применяемым для изучения широкого класса явлений в физике конденсированных сред [12]. Очевидно, что решеточная структура данной модели изоморфна многим таким системам как: слоистый магнетик, аэрогели, пленки жидкого гелия, сверхпроводящие пленки и т.д. [13]. Кроме того, следует отметить, что фазовые переходы в сверхструктурах с адсорбированными водородными слоями  $(2 \times 2) - 2\text{H}/\text{Ni} (111)$  на поверхности никеля Ni (111) описываются классом универсальности чистой модели Поттса с  $q = 4$  [14].

Таким образом на моделях Поттса можно проверить особенности влияния примесей на ФП и определить их роль при реализации конкретного рода фазового перехода. В соответствии с критерием Харриса [6] в случае двумерных моделей Поттса с  $q = 3$  или  $q = 4$  примеси должны повлиять и на их критическое поведение, так как для этих моделей  $\alpha = 1/3$  и  $\alpha = 2/3$  соответственно. В работе [15] для четырехкомпонентной ( $q = 4$ ) стандартной, а в [16] для вершинной модели Поттса при концентрации примесей  $c = 0.1$  ( $c = 1 - p$ ) было показано, что критическое поведение этой модели подвергается незначительному влиянию слабого беспорядка, реализованного в виде немагнитных примесей. В тоже время для модели Поттса с  $q = 4$  в литературе практически не имеются сведения о том, как влияет замороженный беспорядок на фазовые переходы, и его критическое поведение, универсальны ли новые критические индексы. Не определены значения критических температур и не выявлены особенности влияния беспорядка на термодинамические параметры такие как намагниченность  $m$ , восприимчивость  $\chi$ , энергия  $E$ , теплоемкость  $C$  и кумулянты Биндера  $U_L$  и  $V_L$ .

В связи с этим основной целью настоящей работы является изучение влияния немагнитных примесей на фазовые переходы и критическое поведение в стандартной двумерной четырехкомпонентной модели Поттса на квадратной решетке.

## 2. ДВУМЕРНАЯ ПРИМЕСНАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА С $Q = 4$

Приведем здесь формулировку двумерной стандартной примесной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  используемую для описания широкого ряда объектов и явлений в физике конденсированных сред. В рассматриваемой нами модели примеси распределены каноническим способом [4]. При построении такой модели необходимо иметь в виду следующие особенности:

1. В узлах квадратной решётки расположены спины  $S_i$ , которые могут ориентироваться в 4-х симметричных направлениях гипертетраэдра в пространстве размерности  $q - 1$ , так что углы между любыми двумя направлениями спинов равны (см. рис. 1). Немагнитные примеси распределены случайно и фиксированы на различных узлах решетки (*quenched disorder*).

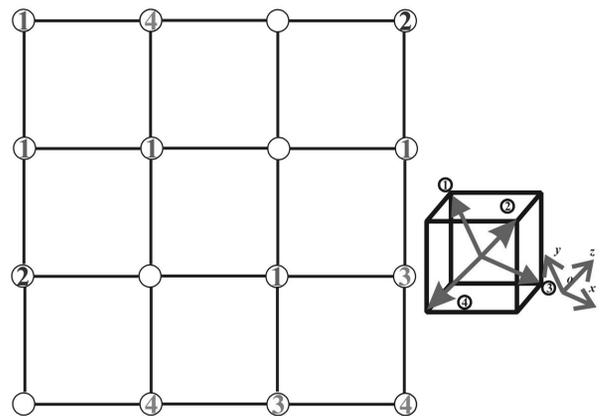


Рис. 1. Двумерная стандартная примесная модель Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на квадратной решетке

2. Энергия связи между двумя узлами равна нулю, если они находятся в разных состояниях (безразлично, в каких именно) или же, если хотя бы в одном узле находится немагнитный атом, и равна  $J$ , если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях (опять же, все равно, в каких именно).

С учетом этих особенностей микроскопический гамильтониан такой системы может быть, представлен в виде [13]

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i,j} \rho_i \rho_j \delta(S_i, S_j), \quad S_i = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где

$$\delta(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j; \\ 0, & \text{если } S_i \neq S_j, \end{cases}$$

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если в узле расположен спин;} \\ 0, & \text{если в узле расположена немагнитная примесь.} \end{cases}$$

Концентрация магнитных спинов определяется выражением:

$$p = \frac{1}{L^2} \sum_i \rho_i \delta(S_i, q). \quad (2)$$

Тогда значение  $p = 1$  соответствует чистой модели Поттса, а  $p = 0$  — пустой, чисто примесной решетке.

### 3. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Алгоритм Вольфа один из наиболее эффективных кластерных алгоритмов метода Монте-Карло на сегодняшний день [17]. Методика ее реализация подробно рассмотрена в работах [8, 18]. В данной работе этот алгоритм был использован нами в следующем виде.

1. Два случайных числа задают координаты  $i, j$  узла на решетке. Если в этом узле находится немагнитная примесь, то генерируются новые случайные числа до тех пор, пока не будут сгенерированы координаты магнитного спина  $S_i$ .

2. Рассматриваются все ближайшие соседи  $S_j$  данного спина  $S_i$ . Если соседний узел занят магнитным спином, то с вероятностью

$$p = 1 - \exp(-K), \quad (3)$$

где  $K = J/k_B T$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура, активируется связь между  $S_i$  и  $S_j$ , если  $S_i$  и  $S_j$  имеют одинаковые значения при  $J > 0$ . Заметим, что в случае модели Поттса для выражения вероятности включения спина в кластер (3) показатель 2 в экспоненте характерный для соответствующей вероятности модели Изинга исчезает. Таким образом, можно утверждать, что модель Поттса с состоянием спина  $q = 2$  эквивалентна модели Изинга с точностью численного фактора 2 в обменной константе  $J$ .

3. Если связь между спинами  $S_i$  и  $S_j$  активируется, то спин в узле  $j$  включается в кластер. Следует отметить, что также, как и для модели Изинга с примесями один и тот же спин может быть включен в кластер только один раз, тогда как проверен на включение в кластер несколько раз.

4. После проверки всех ближайших соседей выбранного спина  $i$ , первый включенный в кластер спин становится «центральным», и начинается процесс активации связей этого спина с ближайшими соседями. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут проверены все ближайшие соседи всех вошедших в кластер спинов или достигнуты границы системы.

5. Все спины, между которыми установлена связь, образуют «кластер».

6. Полученный кластер переворачивается с вероятностью равной 1. Переворот кластера в случае модели Поттса означает присвоение всем спинам вошедших в кластер новое значение спина  $S'_i$ , с равной вероятностью среди всех его состояний  $q$  которое отлично от старого значения  $S_i$ . Затем переходим к пункту 2.

Об эффективности однокластерного алгоритма Вольфа применительно к модели Поттса можно судить по критическому индексу  $z$  характеризующему эффективность используемого алгоритма. В частности исследование чистой двумерной модели Поттса с  $q = 4$  на основе однокластерного алгоритма Вольфа показало, что критический индекс  $z = 0.60 \pm 0.02$ , в то время как использование классического алгоритма Метрополиса дает значение  $z \approx 2$  [19]. По описанному выше алгоритму Вольфа [17] реализовался марковский процесс, для систем с периодическими граничными условиями. Расчеты проводились для систем с линейными размерами  $L = 10 \div 160$  и числом спинов  $p \times L \times L = N$ . Изначально конфигурации задавались таким образом, чтобы все спины были упорядочены вдоль одной из осей  $x, y$  или  $z$ . Для вывода системы в равновесное состояние отсекался неравновесный участок длиной  $\tau_0$  для системы с линейным размером  $L$ . Этот неравновесный участок отбрасывали. В каждой цепи усреднение проводилось по участку марковской цепи длиной  $\tau = 150\tau_0$ . Для самой большой системы  $L = 160$ ,  $\tau_0 = 1.8 \times 10^3$  МК-шагов/спин. Кроме того, проводилось конфигурационное усреднение по 1000 различным примесным конфигурациям.

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При проведении компьютерного моделирования вычислялись термодинамические характеристики отдельно взятого образца по следующим формулам [12, 20]:

$$U = \frac{1}{N} [\langle H \rangle], \quad (4)$$

$$m_F = \frac{(q(\frac{N_{\max}}{N}) - 1)}{q - 1}, \quad (5)$$

$$C = (NK^2)[\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2], \quad (6)$$

$$\chi = (NK)[\langle m_F^2 \rangle - \langle m_F \rangle^2], \quad (7)$$

где  $K = |J|/k_B T$ ,  $N_{\max} = \max[N_1, N_2, N_3, N_4]$ ,  $N_i$  — число спинов в состоянии с  $q = i$ ,  $N = p * L^2$  — число магнитных узлов, угловые скобки обозначают термодинамическое усреднение, квадратные скобки означают усреднение по примесным конфигурациям.

На рис. 2 и 3 представлены характерные зависимости намагниченности для чистой ( $p = 1.00$ ) и разбавленной ( $p = 0.80$ ) моделей Поттса от температуры соответственно. Здесь и далее на всех рисунках погрешность данных не превышает размеров символов, используемых для построения графиков. Как видно из этих рисунков, для всех рассмотренных систем наблюдается поведение характерное для фазового перехода второго рода.

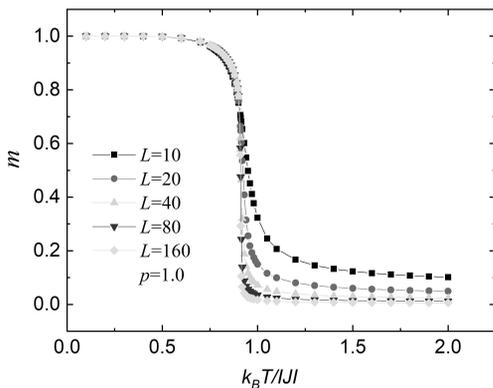


Рис. 2. Температурная зависимость намагниченности  $m_F$  для чистой модели Поттса при концентрации спинов  $p = 1.00$

Для анализа характера ФП наиболее эффективным методом зарекомендовал себя метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [21]:

$$V_L(T, p) = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle}{3\langle E^2 \rangle_L}, \quad (8)$$

$$U_L(T, p) = 1 - \frac{\langle m_F^4 \rangle}{3\langle m_F^2 \rangle_L}, \quad (9)$$

где  $E$  — энергия, и  $m_F$  — намагниченность системы с линейным размером  $L$ . Выражения (8) и (9) позволяют определить температуру фазового перехода  $T_i(p)$  с большой точностью в фазовых переходах

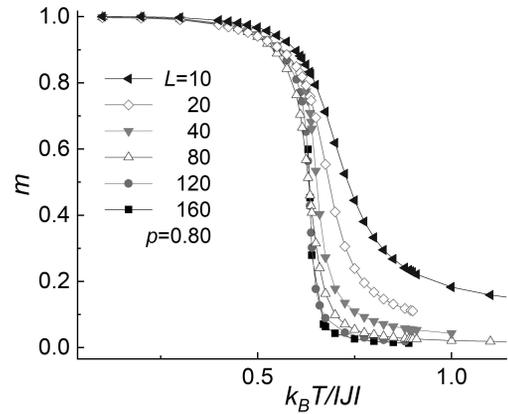


Рис. 3. Температурная зависимость намагниченности  $m_F$  для разбавленной модели Поттса при концентрации спинов  $p = 0.80$

первого и второго рода соответственно. Следует отметить, что применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо определить род фазового перехода в системе. Фазовые переходы второго рода характеризуются следующими отличительными особенностями [22]: усредненная величина  $V_L(T, p)$  стремится к тривиальному значению  $V^*$  согласно выражению

$$V_L(T, p) = V^* + bL^{-d}, \quad (10)$$

при  $L \rightarrow \infty$  и  $T = T_i(L)$ , где  $V^* = 2/3$ , а кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера  $U_L(T, p)$  в критической области имеют четко выраженную точку пересечения. Указанные особенности для кумулянтов Биндера четвертого порядка  $V_L(T, p)$  и  $U_L(T, p)$  продемонстрированы на рис. 4 и 5 соответственно для ФМ модели Поттса с  $q = 4$  на квадратной решетке при отсутствии структурного беспорядка  $p = 1.00$ . Аналогичная картина наблюдается и при внесении немагнитного беспорядка концентрацией  $s = 0.2$ ,  $s = 1 - p$  (см. рис. 6 и 7). Методика определения рода фазового перехода этим методом подробно описана в работах [23–25]. Следует отметить, что температура ФП  $T_i = 0.912(2)$  полученная для чистой спиновой системы при  $p = 1.0$  достаточно хорошо согласуется с аналитическим значением полученным Бакстером [12] по формуле  $\frac{k_B T_i}{J} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{4})} = 0.9102\dots$

Для всех рассмотренных систем, в которых наблюдается ФП второго рода, нами на основе теории конечно-размерного скейлинга (КРС) рассчитывались статические критические индексы (КИ) намагниченности  $\beta$ , восприимчивости  $\gamma$  и теплоемкости  $\alpha$ .

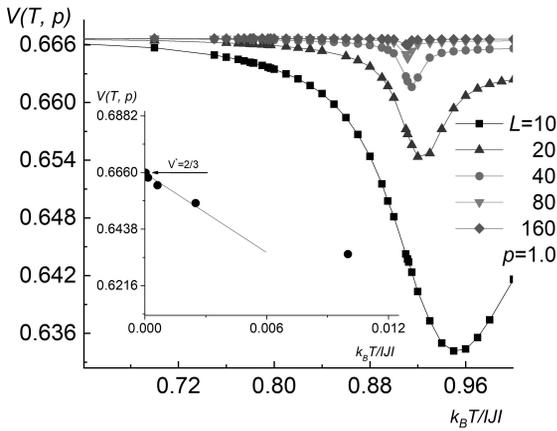


Рис. 4. Температурная зависимость кумулянтов Биндера  $V_L(T)$  для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$

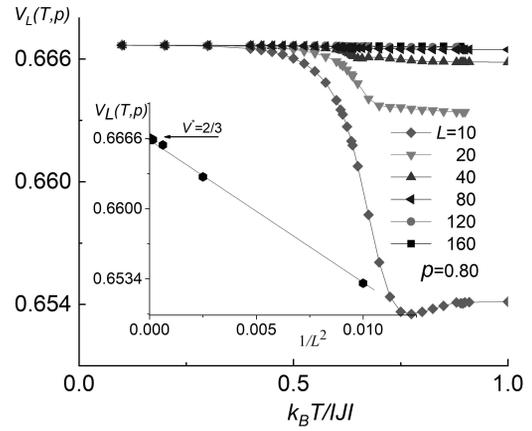


Рис. 6. Температурная зависимость кумулянтов Биндера  $V_L(T)$  для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  при  $\rho = 0.80$

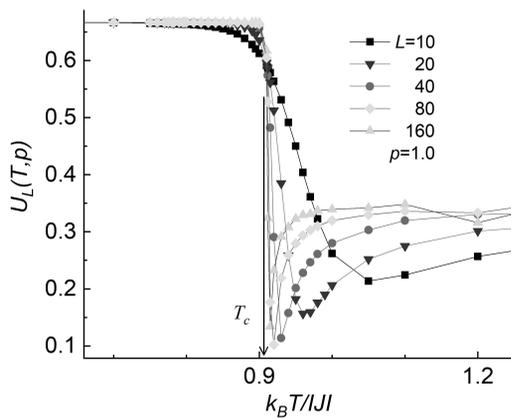


Рис. 5. Температурная зависимость кумулянтов Биндера  $U_L(T)$  для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$

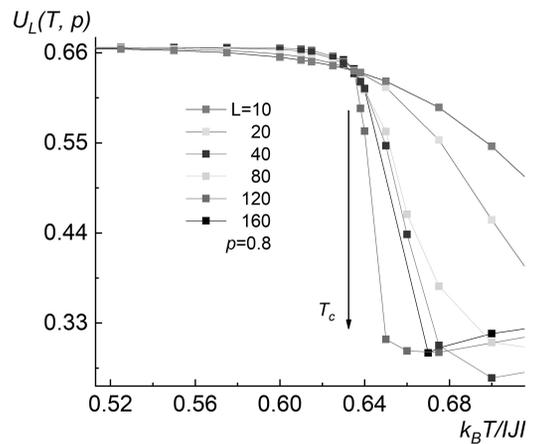


Рис. 7. Температурная зависимость кумулянтов Биндера  $U_L(T)$  для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  при  $\rho = 0.80$

Из соотношений этой теории следует, что для достаточно большой системы с ПГУ при температуре  $T = T_c$  намагниченность  $m$ , восприимчивость  $\chi$  удовлетворяют следующим аналитическим выражениям [26, 27]

$$m \sim L^{-\beta/\nu}, \tag{11}$$

$$\chi \sim L^{-\gamma/\nu}. \tag{12}$$

Для аппроксимации температурной зависимости теплоемкости от  $L$  как правило используются другие выражения [20], например,

$$C_{\max}(L) = C_{\max}(L = \infty) - AL^{\alpha/\nu}, \tag{13}$$

где  $A$  — некоторый коэффициент.

В соответствии с теорией КРС в точке ФП для критического индекса радиуса корреляции  $\nu$ , выполняется соотношение [27]

$$V_n = L^{1/\nu} g_{V_n}, \tag{14}$$

где  $g_{V_n}$  — некоторая постоянная, а в качестве  $V_n$  могут выступать:

$$V_i = \frac{\langle m^i E \rangle}{\langle m^i \rangle} - \langle E \rangle, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Случаи магнитных систем, критическое поведение которых может описываться двумерными моделями Изинга или Поттса с  $q = 4$  относятся к мар-

гинальным. Теория критических явлений для маргинальных случаев предсказывает появление логарифмических поправок для всех выражений (11)–(14) описывающих асимптотическое поведение термодинамических функций сохраняя значения критических индексов чистой системы [9, 28]. В работах [29, 30] было показано, что выражения, приведенные выше для намагниченности, восприимчивости и теплоемкости в случае модели Поттса с  $q = 4$  (маргинальный случай) вблизи критической точки должны приобрести следующий вид:

$$m \sim \frac{L^{-\beta/\nu}}{(\ln L)^{1/16}} \left[ 1 - u \frac{\ln \ln L}{\ln L} + O\left(\frac{1}{\ln L}\right) \right], \quad (16)$$

$$\chi \sim \frac{L^{\gamma/\nu}}{(\ln L)^{1/8}} \left[ 1 - 2u \frac{\ln \ln L}{\ln L} + O\left(\frac{1}{\ln L}\right) \right], \quad (17)$$

$$C \sim \frac{L^{\alpha/\nu}}{(\ln L)^{3/2}} \left[ 1 - 24u \frac{\ln \ln L}{\ln L} + O\left(\frac{1}{\ln L}\right) \right], \quad (18)$$

где  $\beta/\nu = 1/8$ ,  $\gamma/\nu = 7/4$ , и  $\alpha/\nu = 1$ .

Выражения (16)–(18) позволяют учесть возможные вклады логарифмических поправок в асимптотическом поведении намагниченности, восприимчивости и теплоемкости. Однако в численных исследованиях не всегда удается различить поправки более высоких порядков  $\ln(\ln L)/\ln L$  и  $O(1/\ln L)$  на фоне ведущей поправки  $1/(\ln L)^n$  в выражениях (16)–(18) при  $T = T_c$  [30]. Поэтому при обработке данных выражениями КРС мы ограничились только ведущей логарифмической поправкой  $1/(\ln L)^n$ . При этом для расчета КИ  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\nu$  строились зависимости  $m(\ln L)^{1/16}$ ,  $\chi(\ln L)^{1/8}$ ,  $C(\ln L)^{3/2}$ , и  $V_i(\ln L)$  от  $L$ . На рис. 8, *a–d* в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости этих параметров от линейных размеров решетки  $L$  для двумерной модели Поттса с  $q = 4$  на квадратной решетке при концентрации спинов  $p = 0.80$  и  $T = T_c$ .

Следует отметить, что точность критических индексов определяемые согласно выражениям теории КРС (16)–(18) в большей степени зависит от правильности учета данных для разных  $L$ . В наших расчетах строго контролировались данные для всех рассмотренных систем и при их незначительном отклонении от аппроксимирующей прямой процедура фитирования проводилась заново с отсеканием данных для  $L < L_{\min}$ . Такой отбор данных для разных  $L$  позволяет заметно уменьшить погрешность в значениях КИ, а включение в процедуру фитирования логарифмической поправки заметно их приближает к известным теоретическим значениям. Это особенно хорошо прослеживается для значений

КИ полученные при  $p = 1.00$  и  $p = 0.95$  (см. таблицу). Такая же картина наблюдалась и для вершинной модели Поттса при концентрации спинов  $p = 0.90$  в работе [16]. Как видно из таблицы внесение 20% немагнитных примесей приводит к заметному отклонению КИ от значений, полученных при  $p = 1.0$  и  $0.95$  значений. Следует отметить, что мы при аппроксимации данных выражениями теории КРС ограничивались значениями КИ с точностью до второго знака после запятой (см. таблицу). Как видно из рис. 8 численные данные для всех рассмотренных линейных размеров  $L$  достаточно хорошо укладываются на прямую. Очевидно, что использованное нами для усреднения количество различных начальных конфигураций, линейные размеры  $L > 10$  и учет логарифмической поправки в выражениях КРС позволяет достичь асимптотического критического режима.

Очень важным моментом является и то, что индекс  $\nu$  вычислялся непосредственно из результатов численного эксперимента в рамках данного исследования, тогда как во многих других работах этот индекс обычно определяется из различных скейлинговых соотношений. Анализ данных, выполненный с использованием нелинейного метода наименьших квадратов, позволил определить значения всех КИ с учетом их погрешностей. Полученные критические индексы с тщательным контролем за процедурой подгонки в пределах погрешности численного эксперимента хорошо удовлетворяют соотношениям теории КРС при учете логарифмической поправки (см. таблицу). В таблице также приведены результаты КИ, полученные на основе экспериментальных исследований [14] для сверхструктуры  $(2 \times 2) - 2\text{H}/\text{Ni}$  (111) в монослоях которого случайно внесены атомы кислорода. Отметим, что в таких структурах атом кислорода можно рассматривать как замороженную примесь, и эти экспериментальные данные вполне можно сравнивать с результатами компьютерного моделирования. Как видно критические индексы, полученные на основе метода Монте-Карло для разбавленной модели Поттса при концентрации спинов  $p = 0.80$  прекрасно согласуются с результатами экспериментальных исследований, приведенных в работе [14].

Таким образом, внесение беспорядка в виде немагнитных примесей в спиновую решеточную систему, описываемую четырехкомпонентной моделью Поттса, приводит к заметному изменению критических индексов в соответствии с критерием Харриса [6]. Тем не менее для более достоверного ответа на вопрос о смене класса универсальности в двумер-

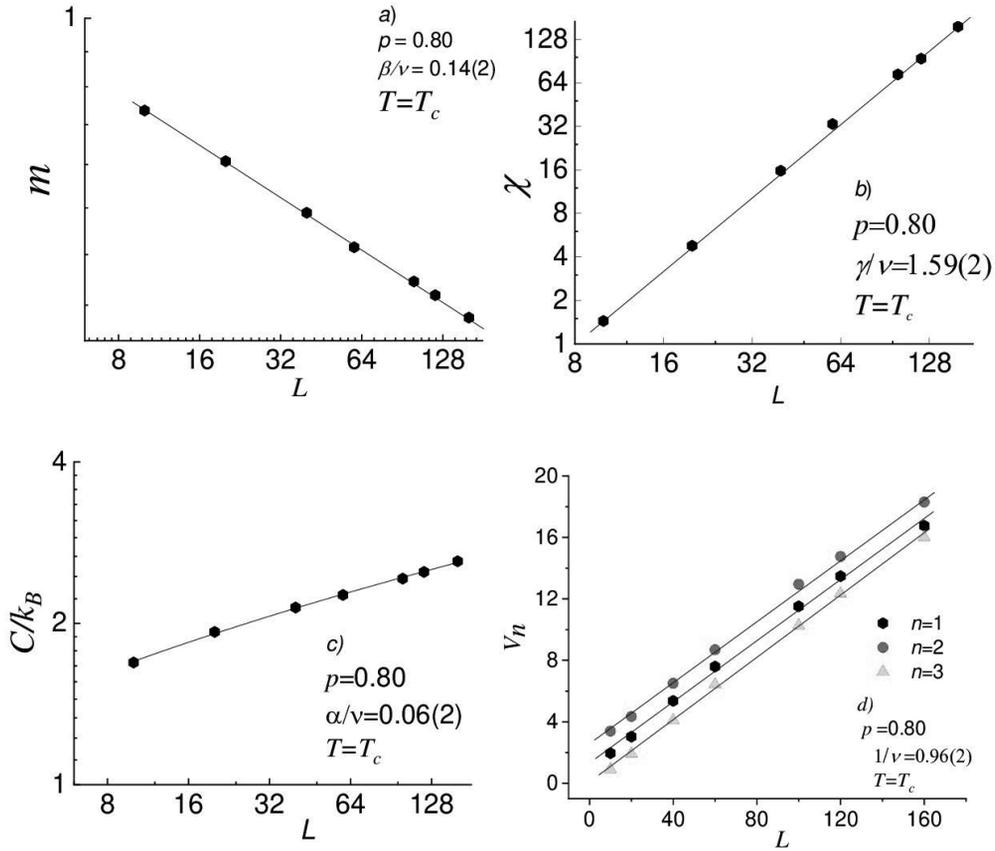


Рис. 8. Зависимость намагниченности  $m$  (а), восприимчивости  $\chi$  (б), теплоемкости  $C$  (с) и параметра  $V_n$  (д) для двумерной разбавленной модели Поттса с  $q = 4$  от линейных размеров системы  $L$  при  $T = T_c$

Таблица. Критические индексы чистой и примесной четырехкомпонентной модели Поттса

Метод	$p$	$k_B T_c / J$	$\nu$	$1/\nu$	$\alpha$	$\gamma$	$\gamma/\nu$	$\beta$	$\beta/\nu$	$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
Теория, [13]	1.00	$\frac{1}{\ln(1 + \sqrt{4})} = 0.9102$	2/3	3/2	2/3	7/6	7/4	1/12	1/8	1.999
Монте-Карло (наши данные)	1.00*	0.912(2)	0.65(1)	1.54(1)	0.64(1)	1.02(1)	1.50(1)	0.05(1)	0.07(1)	1.760
	1.00	0.912(2)	0.66(1)	1.52(1)	0.66(1)	1.16(1)	1.75(1)	0.08(1)	0.13(1)	1.980
	0.95	0.78(1)	0.67(1)	1.49(1)	0.67(1)	1.17(1)	1.74(1)	0.09(1)	0.13(1)	2.020
	0.80	0.63(2)	1.04(2)	0.96(2)	0.06(2)	1.65(2)	1.59(2)	0.15(2)	0.14(2)	2.010
Эксперимент, [14]			1.03(8)			1.68(15)		0.13(2)		

Примечание. Звездочкой отмечены данные без учета логарифмической поправки.

ных разбавленных структурах требуется численное исследование критического поведения в непосредственной близости к точке перколяции рассматриваемой решетки, что будет являться предметом отдельного рассмотрения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на основе метода Монте-Карло исследованы фазовые переходы и критическое поведение с учетом логарифмических поправок в двумерной четырехкомпонентной ферромагнитной модели Поттса в чистом и слабо разбавленном режиме. Полученные данные в результате наших исследований свидетельствуют о том, что в рассматриваемой модели Поттса на квадратной решетке наблюдается фазовый переход второго рода в соответствии с предсказаниями аналитических теорий [10]. Показано, что значения критических индексов для чистой двумерной четырехкомпонентной модели Поттса при учете логарифмических поправок лучше согласуются с теоретическими данными, чем без них. Внесение немагнитных примесей в пределах 20% приводит к заметному изменению критических индексов от соответствующих значений для чистой модели Поттса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Щур, УФН **182**, 787 (2012).
2. O. Vasilyev, B. Berche, M. Dudka and Yu. Holovatch, Phys. Rev. E **92**, 042118 (2015).
3. D. P. Landau, K. Binder, *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*, Cambridge university press, (2014).
4. Р. Фольк, Ю. Головач, Т. Яворский, УФН **173**, 175 (2003).
5. В. С. Доценко, УФН **165**, 481 (1995).
6. А. В. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
7. А. Н. Вакилов, В. В. Прудников., Письма в ЖЭТФ **55**, 709 (1992).
8. А. В. Babaev, A. K. Murtazaev, Mathematical Models and Computer Simulations **11**, 575 (2019).
9. Vik. Dotsenko, Vl. Dotsenko, Adv. Phys. **32**, 129 (1983).
10. M. Aizenman, J. Wehr, Phys. Rev. Lett. **62**, 2503 (1989).
11. В. В. Дубс, В. В. Прудников, П. В. Прудников, Теоретическая и математическая физика **190**, 419 (2017).
12. Р. Бекстер, Точно решаемые модели в статистической механике, Мир, Москва (1985).
13. F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
14. L. Schwenger, K. Budde, C. Voges, H. Pfneur., Phys. Rev. Lett. **73**, 296,(1994).
15. А. Б. Бабаев, А. К. Муртазаев, ФТТ **62**, 5, 757 (2020).
16. А. В. Babaev, A. K. Murtazaev, Journal of Physics: Conference Series **1389**,1,(2019).
17. U. Wolff, Phys. Lett.**62**,,361,(1989).
18. А. Б. Бабаев, А. К. Муртазаев, Вестник Омского университета **25**,, 7,(2020).
19. G. T. Barkema, M.E. J. Newman, preprint condmat/9703179.
20. P. Peczac, A. M. Ferrenberg, D. P. Landau, Phys.Rev. B **43**, 6087 (1991).
21. K. Eichhorn, K. Binder, J. Phys.: Condens. Matter **8**, 5209 (1996).
22. D. Loison, K. D. Schotte, The European Physical Journal B **5**, 735 (1998).
23. А. К. Муртазаев, А. В. Babaev, Materials Letters **258**, 126771 (2020).
24. А. К. Муртазаев, А. В. Babaev,G. Y. Ataeva,J. Magn. Magn. Mater. **440**,101 (2017).
25. А. К. Муртазаев, А. Б. Бабаев, Письма в ЖЭТФ **99**, 618 (2014).
26. M. E. Fisher, M. N. Barber,Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972).
27. D. Loison,Phys. Lett.**257**,83 (1999).
28. B. N. Shalaev,Phys. Rep.**237**,129 (1994).
29. J. L. Cardy, M. Nauenberg, D. J. Scalpino, Phys. Rev. **22**, 2560 (1980).
30. J. S. Salas, A. D. Sokal, Journal of Statistical Physics **88**, 567 (1996).

# ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВКОГО ФЕРРИМАГНЕТИКА С ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

О. А. Космачев, Я. Ю. Матюнина, Ю. А. Фридман\*

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского 295007, Симферополь, Россия

Поступила в редакцию 24 марта 2022 г.,

после переработки 26 апреля 2022 г.

Принята к публикации 29 апреля 2022 г.

Исследовано влияние одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» на фазовые состояния и спектры элементарных возбуждений ферримагнетика с подрешетками  $S = 1$  и  $\sigma = 1/2$  и негейзенберговским (билинейным и биквадратичным по спином) обменным взаимодействием для подрешетки с  $S = 1$ . Показано, что при различных соотношениях материальных параметров системы возможна реализация фазы с векторными параметрами порядка (ферримагнитная фаза) и фазы, характеризуемой как векторным, так и тензорными параметрами порядка (квадрупольно-ферримагнитная). Показано, что учет одноионной анизотропии меняет тип фазового перехода по сравнению с изотропным негейзенберговским ферримагнетиком. Построена фазовая диаграмма, определено условие компенсации спинов подрешеток, а также поведение спектров элементарных возбуждений как в окрестности линии фазовых переходов, так и вблизи линии компенсации спинов. В окрестности линии компенсации спинов спектры магнонов «антиферромагнитно подобны».

DOI: 10.31857/S0044451022090140

EDN: ELMSDW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возникли новые и активно развивающиеся области физики прикладного магнетизма, спинтроника и магноника, которые основаны на использовании магнитных степеней свободы магнитоупорядоченных кристаллов. Спиновые колебания и волны, а также спиновые токи активно используются для создания различных приборов записи и обработки информации, которые в принципе могут заменить соответствующие приборы стандартной электроники [1–4]. Характерные частоты работы таких устройств порядка частот магнитного резонанса, т. е. для ферромагнетиков они находятся в диапазоне от единиц до десятков гигагерц [1–4]. Для повышения быстродействия предложено использование скомпенсированных магнетиков, прежде всего, антиферромагнетиков, см. [5–7], для которых более высокие значения динамических парамет-

ров, таких как частоты магнитного резонанса, предельные скорости доменных стенок [8] и магнитных вихрей [9, 10] и ряд других, определяются эффектами обменного усиления. Существенно также, что спиновый ток активно влияет на поведение систем с нулевым интегральным магнитным моментом, что дает возможность использовать антиферромагнетики в спинтронных устройствах [11]. Таким образом, использование этих материалов, в принципе, позволяет повысить как скорость работы систем записи и считывания информации [12–15], так и существенно (до величин порядка терагерц) повысить рабочую частоту генераторов с накачкой спиновым током [16–18].

Однако антиферромагнетики обладают высокой чувствительностью магнитного порядка к наличию дефектов, нарушающих подрешеточную структуру кристаллического образца. Это обстоятельство затрудняет их применение в спинтронике. Однако хорошо известно, что эффекты обменного усиления, аналогичные тем, что известны для антиферромагнетиков, имеют место для ферримагнетиков, находящихся в окрестности точки компенсации подрешеток [19]. Следовательно, можно использо-

\* E-mail: yuriiifridman@gmail.com

вать ферримагнетики, находящиеся вблизи точки компенсации, для различных устройств сверхбыстрой спинтроники. В недавних работах экспериментально и теоретически исследована сверхбыстрая (со скоростями порядка км/с) динамика доменных стенок [20, 21] и высокочастотная динамика ферримагнитных вихрей [22, 23]. Предложена схема магнитного наногенератора на основе ферримагнетиков с накачкой спиновым током, работающего в диапазоне терагерц [24]. Для сплава редкоземельных и переходных металлов GdFeCo был обнаружен сверхбыстрый (за время порядка нескольких пикосекунд) переверт намагниченностей подрешеток под действием лазерного импульса с длительностью меньше 100 фемтосекунд [25, 26]. Как показали исследования, этот эффект связан с наличием двух подрешеток, и в формировании эффекта существенную роль играет обусловленное обменным взаимодействием изменение модулей магнитных моментов подрешеток [27, 28]. Таким образом, для описания эффекта существенно чисто продольная эволюция магнитных моментов подрешеток. Всё это свидетельствует о том, что детальное исследование различных аспектов спиновой динамики ферримагнетиков является важными и актуальными (см. обзор [29]).

Необходимо отметить, что ряд вопросов физики ферримагнетиков изучен сравнительно слабо. Так, отмеченный эффект переориентации наблюдался для ферримагнетика, содержащего как слабоанизотропные ионы, так и редкоземельные ионы, обладающие немалой одноионной анизотропией. Наличие немалой одноионной анизотропии приводит к существенно квантовым эффектам, которые не удастся описать в рамках стандартной феноменологической теории [30]. Описание подобных эффектов выходит за рамки уравнения Ландау–Лифшица и требует учета динамики тензорных переменных, представляющих собой квантовые средние от операторов, билинейных по компонентам спина [31, 32–37]. Можно предположить, что эффект сокращения спина может быть предложен для описания сверхбыстрого продольного «переключения» спинов [36, 37].

Необходимо также отметить, что данный эффект реализуется не только в сильно анизотропных магнетиках, но и в так называемых негејзенберговских магнетиках. Под термином «негејзенберговские магнетики» мы подразумеваем магнитоупорядоченные системы, в которых высшие спиновые инварианты вида  $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^{2S}$ , где  $S$  — величина спина магнитного иона, играют важную роль как в формировании статических, так и динамических

свойств [38–41]. Так, гамильтониан для изотропного обменного взаимодействия магнетика с  $S = 1$  содержит как билинейное  $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)$ , так и биквадратичное слагаемое  $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^2$  [32, 38–44]. В работах [38, 39] было показано, что в ферримагнетиках с подрешетками  $S = 1$  и  $\sigma = 1/2$  при учете биквадратичного обменного взаимодействия в подрешетке со спином 1, в зависимости от соотношения материальных параметров возможна реализация как ферримагнитной фазы, характеризуемой дипольными параметрами порядка, так и фазы, состояние которой описывается как дипольными, так и тензорными параметрами порядка (квадрупольно-ферримагнитной). При этом в этом «смешанном» состоянии возможна компенсация магнитных моментов подрешеток, т. е. существует линия компенсации.

Таким образом, вопрос о свойствах негејзенберговских ферримагнетиков с учетом влияния одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» представляет не только академический интерес, но и важное прикладное значение.

## 2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим двухподрешеточный анизотропный магнетик со спином магнитного иона первой подрешетки  $S = 1$  и второй —  $\sigma = 1/2$  и негејзенберговским обменным взаимодействием для подрешетки с  $S = 1$ . При этом в первой подрешетке учитывается как билинейное, так и биквадратичное обменные взаимодействия, а также одноионная анизотропия типа «легкая плоскость». Гамильтониан такой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \\
 = & -\frac{1}{2} \sum_{n,n'} [J^{(2)}(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + K(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^2] - \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{m,m'} J^{(1)}(m-m')(\boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\sigma}_{m'}) - \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{n,m} A(n-m)(\boldsymbol{\sigma}_m \mathbf{S}_n) + \frac{\beta}{2} \sum_n (S_n^x)^2, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $J^{(1)} > 0$  — константа обменного взаимодействия для подрешетки со спином  $\sigma = 1/2$ ;  $J^{(2)} > 0$ ,  $K > 0$  — константы билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий для  $S = 1$ ;  $A < 0$  — константа межподрешеточного взаимодействия,  $\beta > 0$  — константа одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» (базисная плоскость  $zy$ ). Дальнейшее рассмотрение будем прово-

дить для случая низких температур ( $T \ll T_N, T_N$  — температура Нееля).

Реализация различных фазовых состояний в исследуемой системе связана с изменением соотношения между материальными параметрами [31, 39, 43, 45–48]. Вариация параметров системы может быть связана, например, с изменением концентрации магнитных ионов, или приложением внешних механических напряжений, приводящих к деформации кристаллической решетки. В контексте данной работы не принципиально, каким образом происходит изменение материальных констант в рассматриваемой модели.

В качестве оси квантования выберем ось  $z$ . Тогда среднее значение спина для первой подрешетки будет параллельно этой оси, а второй подрешетки — антипараллельно. Такая ориентация магнитных моментов подрешеток связана с тем, что константа межподрешеточного обменного взаимодей-

ствия  $A < 0$ , что определяет антипараллельную ориентацию магнитных моментов подрешеток. Для удобства вычислений подвернем вторую подрешетку так, чтобы направления осей квантования обеих подрешеток совпадали. Унитарный поворот

$$U(\varphi) = \prod_i \exp(i\varphi\sigma_i^x)$$

на угол  $\varphi = \pi$  приводит к следующим преобразованиям компонент оператора спина второй подрешетки:

$$\sigma_m^x \rightarrow \sigma_m^x, \quad \sigma_m^y \rightarrow -\sigma_m^y, \quad \sigma_m^z \rightarrow -\sigma_m^z.$$

Необходимо отметить, что при таких преобразованиях сохраняются стандартные коммутационные соотношения для компонент спиновых операторов. Гамильтониан исследуемой системы принимает вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{m,m'} J^{(1)}(m-m')(\sigma_m^x \sigma_{m'}^x + \sigma_m^y \sigma_{m'}^y + \sigma_m^z \sigma_{m'}^z) - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \left[ J^{(2)}(n-n') - \frac{K(n-n')}{2} \right] (S_n^x S_{n'}^x + S_n^y S_{n'}^y + S_n^z S_{n'}^z) - \frac{1}{4} \sum_{n,n'} K(n-n') \left( \frac{1}{3} O_{2n}^0 O_{2n'}^0 + O_{2n}^1 O_{2n'}^1 + \tilde{O}_{2n}^1 \tilde{O}_{2n'}^1 + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 + \tilde{O}_{2n}^2 \tilde{O}_{2n'}^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{m,n} A(m-n)(\sigma_m^x S_n^x - \sigma_m^y S_n^y - \sigma_m^z S_n^z) + \frac{\beta}{4} \sum_n O_{2n}^2 + \frac{\beta}{8} \sum_n (S_n^+ S_n^- + S_n^- S_n^+), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} S^\pm &= S^x \pm iS^y, \\ O_2^0 &= 3(S^z)^2 - S(S+1), \\ O_2^1 &= \frac{1}{2} [S^z, (S^+ + S^-)]_+, \\ \tilde{O}_2^1 &= \frac{1}{2i} [S^z, (S^+ - S^-)]_+, \\ O_2^2 &= \frac{1}{2} [(S^+)^2 + (S^-)^2], \\ \tilde{O}_2^2 &= \frac{1}{2i} [(S^+)^2 - (S^-)^2] \end{aligned}$$

— операторы Стивенса [49].

Выделяя в гамильтониане (2) средние поля, связанные как с дипольными параметрами порядка  $\langle S^z \rangle$ , так и с квадрупольными ( $q_2^t = \langle O_2^t \rangle$ ), получим одноузельный гамильтониан

$$H_0 = -\bar{H}_\sigma \sigma_n^z - \bar{H}_S S_n^z - B_2^0 O_{2n}^0 - B_2^2 O_{2n}^2 + \frac{\beta}{8} (S^+ S^- + S^- S^+) + \Delta, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}_S &= \left( J_0^{(2)} - \frac{K_0}{2} \right) \langle S^z \rangle - \frac{1}{2} A_0 \langle \sigma^z \rangle, \\ \bar{H}_\sigma &= J_0^{(1)} \langle \sigma^z \rangle - \frac{1}{2} A_0 \langle S^z \rangle, \\ B_2^0 &= \frac{K_0}{6} q_2^0, \\ B_2^2 &= \frac{K_0}{2} q_2^2 - \frac{\beta}{4}, \\ \Delta &= \frac{1}{2} J_0^{(1)} \langle \sigma^z \rangle^2 + \frac{1}{2} \left( J_0^{(2)} - \frac{K_0}{2} \right) \langle S^z \rangle^2 + \frac{K_0}{4} \left( \frac{(q_2^0)^2}{3} + (q_2^2)^2 \right) - \frac{1}{2} A_0 \langle S^z \rangle \langle \sigma^z \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $J_0^{(1)}$ ,  $J_0^{(2)}$ ,  $K_0$ ,  $A_0$  — нулевые фурье-компоненты соответствующих обменных интегралов.

Корректный учет как одноионной анизотропии, так и биквадратичного обменного взаимодействия удается провести в рамках диаграммной техники для операторов Хаббарда [50–53]. Эти операторы строятся на базисах собственных функций операторов  $S^z(|M\rangle, M = -1, 0, 1)$  и  $\sigma^z(|m\rangle, m = -1/2, 1/2)$

соответственно, для первой  $X^{M'M} = |M'\rangle\langle M|$  и второй  $Y^{m'm} = |m'\rangle\langle m|$  подрешеток, и описывают переходы магнитного иона из состояния  $M'$  в состояние  $M$  и из состояния  $m'$  в состояние  $m$ . Связь спиновых операторов и операторов Стивенса с операторами Хаббарда имеет вид

$$\begin{aligned} S^z &= X^{11} - X^{-1-1}, & O_2^z &= X^{1-1} + X^{-11}, \\ O_2^0 &= X^{11} - 2X^{00} + X^{-1-1}, \\ \sigma^z &= \frac{1}{2}(Y^{1/2\ 1/2} - Y^{-1/2-1/2}), \\ \sigma^+ &= Y^{1/2-1/2}, & \sigma^- &= (\sigma^+)^+. \end{aligned}$$

Тогда в терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_0 &= \\ &= -\frac{1}{2}\bar{H}_\sigma(Y^{1/2\ 1/2} - Y^{-1/2-1/2}) - \bar{H}_S(X^{11} - X^{-1-1}) - \\ &- B_2^0(X^{1-1} + X^{-11}) - B_2^0(X^{11} - 2X^{00} + X^{-1-1}) + \\ &+ \frac{\beta}{4}(X^{11} + 2X^{00} + X^{-1-1}) + \Delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, гамильтониан (5) является недиагональным, и для его диагонализации используем унитарное преобразование [51]

$$\tilde{H}_0 = U(\alpha)H_0U^+(\alpha),$$

явный вид которого:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \\ &= 1 + (\cos \alpha - 1)(X^{11} + X^{-1-1}) + \sin \alpha(X^{1-1} - X^{-11}). \end{aligned}$$

В результате чего получим гамильтониан (5) в диагональном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= E_1X^{11} + E_0X^{00} + E_{-1}X^{-1-1} + \\ &+ \varepsilon_{1/2}Y^{1/2\ 1/2} + \varepsilon_{-1/2}Y^{-1/2-1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= -B_2^0 + \frac{\beta}{4} - \bar{H}_S \cos 2\alpha - B_2^2 \sin 2\alpha + \Delta, \\ E_0 &= -2B_2^0 + \frac{\beta}{2} + \Delta, \\ E_{-1} &= -B_2^0 + \frac{\beta}{4} + \bar{H}_S \cos 2\alpha + B_2^2 \sin 2\alpha + \Delta, \\ \varepsilon_{1/2, -1/2} &= \mp \bar{H}_\sigma \langle \sigma^z \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

— энергетические уровни магнитных ионов первой и второй подрешеток.

Волновые функции подрешеток имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle, & \psi(0) &= |0\rangle, \\ \psi(-1) &= -\sin \alpha |1\rangle + \cos \alpha |-1\rangle, \\ \Phi\left(\frac{1}{2}\right) &= \left|\frac{1}{2}\right\rangle, & \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left|-\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Связь спиновых операторов, построенных на базе собственных функций гамильтониана (8) с операторами Хаббарда, теперь имеет вид

$$\begin{aligned} S_n^z &= \cos 2\alpha(X_n^{11} - X_n^{-1-1}) - \sin 2\alpha(X_n^{1-1} + X_n^{-11}); \\ S_n^+ &= \sqrt{2}[\sin \alpha(X_n^{01} - X_n^{-10}) + \cos \alpha(X_n^{0-1} + X_n^{10})], \\ S_n^- &= (S_n^+)^+, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — параметр унитарного  $u$ - $v$ -преобразования, определяемый соотношением

$$\bar{H}_S \sin 2\alpha = B_2^2 \cos 2\alpha.$$

Из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда можно определить параметры порядка первой подрешетки как функцию  $\alpha$ :

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha, \quad q_2^z = \sin 2\alpha, \quad q_2^0 = 1.$$

Вторая подрешетка описывается лишь дипольным параметром порядка  $\langle \sigma^z \rangle$  и выполняет роль «подмагничивающего» поля.

### 3. АНАЛИЗ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Поскольку мы рассматриваем систему при низких температурах, то плотность свободной энергии практически совпадает с энергетическими уровнями магнитного иона основного состояния. Как следует из соотношений (7), низшими уровнями первой и второй подрешеток являются соответственно уровни  $E_1$  и  $\varepsilon_{1/2}$ . Следовательно, плотность свободной энергии рассматриваемого ферримагнетика можно представить в виде

$$F = E_1 + \varepsilon_{1/2},$$

Учитывая соотношения (4) и (7), для плотности свободной энергии получим

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{12}K_0 - \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{2}J_0^{(1)}\langle \sigma^z \rangle^2 - \frac{1}{2}[J_0^{(2)} - K_0]\langle S^z \rangle^2 + \\ &+ \frac{1}{2}A_0\langle \sigma^z \rangle\langle S^z \rangle + \frac{\beta}{4}\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ ,  $\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha$ , а также то, что константа междоузельного взаимодействия  $A < 0$ , получим следующее выражение:

$$F = -\frac{1}{4} \left[ \beta + \frac{4}{3} K_0 + \frac{1}{2} J_0^{(1)} \right] - \frac{1}{4} |A_0| \cos 2\alpha + \frac{\beta}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} [J_0^{(2)} - K_0] \cos^2 2\alpha. \quad (9)$$

Анализ плотности свободной энергии (9) позволяет определить параметр  $\alpha$   $u$ - $v$ -преобразования при различных соотношениях материальных параметров системы.

В общем случае уравнение для параметра  $\alpha$  в общем случае имеет вид

$$\frac{|A_0|}{2} \sin 2\alpha + \frac{\beta}{2} \cos 2\alpha + 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos 2\alpha \sin 2\alpha = 0. \quad (10)$$

Как следует из уравнения (10), намагниченность подрешетки с  $S = 1$  существенно зависит от соотношения материальных параметров, причем намагниченность подрешетки со спином  $1/2$  остается постоянной и играет роль «подмагничивающего» поля. Необходимо отметить, что условие  $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$  возникает естественным образом из связи  $z$ -й компоненты оператора  $\sigma$  с операторами Хаббарда  $Y^{m'm}$  и является точным в рассматриваемом нами случае  $T = 0$ .

Рассмотрим подробнее решения уравнения (10) при различных соотношениях материальных параметров и низких температурах.

Так, если константа одноионной анизотропии много меньше билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий, а билинейный обмен, в свою очередь, превышает биквадратичный ( $J_0 > K_0 \gg \beta$ ), то при таком соотношении материальных параметров решение уравнения (10) можно представить в виде

$$\sin 2\alpha = -\frac{\beta}{4(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|}.$$

Поскольку мы предполагаем, что константа одноионной анизотропии является самым малым параметром системы, а  $J_0 > K_0$ , то  $\sin 2\alpha \sim 0$ , и, следовательно,  $\cos 2\alpha \sim 1$ , т. е. намагниченность первой подрешетки практически достигает своего максимально возможного значения  $\langle S^z \rangle \approx 1$ , таким образом состояние системы близко к ферримагнитному. Это означает, что в системе реализуется ферримагнит-

ное упорядочение (FiM) с векторами состояния подрешеток

$$|\Psi(1)\rangle = |1\rangle, \quad |\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\rangle = \left|\frac{1}{2}\right\rangle,$$

и параметрами порядка

$$|\langle \sigma^z \rangle| = \frac{1}{2}, \quad \langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 \approx 0.$$

Как видно, в этом состоянии первая и вторая подрешетки близки к насыщению, но векторы намагниченности подрешеток антиколлинеарны. Необходимо отметить, что подрешетка  $S = 1$  достигает насыщения асимптотически, т. е. при достаточно больших значениях константы билинейного обменного взаимодействия.

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда преобладающим параметром первой подрешетки является биквадратичное обменное взаимодействие. В этом случае решение уравнения (10) имеет вид

$$\cos 2\alpha = \frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta}. \quad (11)$$

Поскольку  $\cos 2\alpha$  определяет средний магнитный момент (на узле) первой подрешетки, эта величина должна быть положительной, т. е.

$$\frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} > 0.$$

Кроме того, функция  $\cos 2\alpha$  ограничена. Таким образом, при  $K(0) > J(0) \gg \beta$  в системе реализуется состояние с намагниченностью первой подрешетки существенно меньше максимально возможного, а вторая подрешетка сохраняет насыщенное значение намагниченности ( $|\langle \sigma^z \rangle| = 1/2$ ). Квадрупольные параметры порядка первой подрешетки в этом случае имеют вид

$$q_2^2 = \sin 2\alpha < 1, \quad q_2^0 = 1.$$

Таким образом, в системе реализуется фаза, в которой как векторный параметр порядка первой подрешетки ( $\langle S^z \rangle$ ), так и компоненты тензора квадрупольных моментов ( $q_2^2$ ) первой подрешетки принимают промежуточные значения, лежащие в интервале между нулем и единицей, а вторая подрешетка играет роль постоянного «подмагничивающего поля». Таким образом, при больших значениях константы биквадратичного обменного взаимодействия и немалой одноионной анизотропии в первой подрешетке возникает эффект квантового сокращения спина [30, 36, 41]. Такое состояние назовем квадрупольно-ферримагнитным (QFiM).

Векторы основного состояния подрешеток в QFiM-фазе имеют вид

$$|\Psi(1)\rangle = \cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle,$$

$$|\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\rangle = \left|\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Векторы намагниченности первой и второй подрешеток антиколлинеарны, и, следовательно, в этой фазе с учетом квантового сокращения спина первой подрешетки [30, 36, 41] возможна компенсация спинов подрешеток. Из условия  $\langle S^z \rangle = -\langle \sigma^z \rangle$  и с учетом того, что  $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ , получим

$$\frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} = -1/2.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$|A_0| = -2(K_0 - J_0^{(2)}) - \beta/2. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (12) описывает поверхность в переменных  $(J, K, A, \beta)$  на которой суммарный средний спин подрешеток равен нулю ( $\langle S^z + \sigma^z \rangle = 0$ ). Необходимо подчеркнуть, что в данном случае речь идет именно о компенсации спинов подрешеток, а не о компенсации магнитных моментов подрешеток. Дело в том, что магнитный момент связан со спиновым моментом подрешеток соотношением  $M = -g\mu_B S$ , где  $g$  — коэффициент Ланде ( $g$ -фактор). Поскольку в рассматриваемой нами модели подрешетки являются не эквивалентными, то логично считать, что и  $g$ -факторы подрешеток не равны, а следовательно, не равны и магнитные моменты подрешеток на плоскости компенсации [29]. Таким образом, хотя спиновые моменты и компенсируют друг друга при определенных нами соотношениях материальных параметров, но интегральный магнитный момент при этом может быть не равен нулю и достигать достаточно большого значения, большего, например, чем для слабых ферромагнетиков (AFM с взаимодействием Дзялошинского—Мория). Причем этот результирующий магнитный момент параллелен вектору антиферромагнетизма, и динамику ферримагнетика в точке компенсации можно рассматривать как «антиферромагнитную» [29].

Уравнение (12) удобнее переписать в приведенных переменных  $y = |A|/K$ ,  $x = J/K$ ,  $z = \beta/K$ . Тогда

$$y = 2(x - 1) - z/2. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что в отсутствие межподрешеточного обменного взаимодействия ( $A = 0$ )

$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha = 0$ , т.е. параметр  $\alpha = \pi/4$ . Это означает, что при  $A = 0$  в первой подрешетке реализуется нематическое состояние [42–44, 47, 48], параметры порядка которого имеют вид

$$\langle S^z \rangle = 0, \quad q_2^2 = \langle O_2^2 \rangle = 1, \quad q_2^0 = \langle O_2^0 \rangle = 1.$$

При этом «подмагничивающее поле», т.е. вторая подрешетка не оказывает никакого влияния на первую.

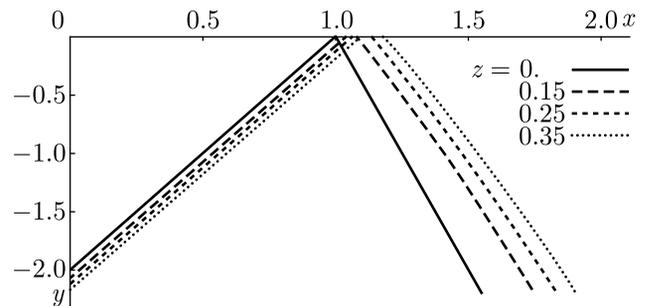
Из равенства плотности свободной энергии в FiM- и QFiM-фазах получим поверхность фазового перехода между этими фазами:

$$[|A_0| - 4(K_0 - J_0^{(2)}) - \beta]^2 + \beta[4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta] = 0,$$

или в приведенных переменных  $x, y, z$

$$[y - 4(1 - x) - z]^2 + z[4(1 - x) + z] = 0. \quad (14)$$

Полученные результаты позволяют построить фазовую диаграмму исследуемой системы, причем ее удобнее изобразить в приведенных переменных на плоскости  $xy$  при различных значениях  $z$ , т.е. при различных значениях константы одноионной анизотропии  $\beta$ . Схематично эта диаграмма приведена на рисунке.



Сечение фазовой диаграммы легкплоскостного негейзенберговского ферримагнетика при различных значениях константы одноионной анизотропии

Из этой фазовой диаграммы и соотношений (13) и (14) следует, что при  $z = 0$  ( $\beta = 0$ ) полученные нами результаты в точности переходят в результаты работы [38, 39], в которой исследованы фазовые состояния изотропного и обменно-анизотропного негейзенберговских ферримагнетиков. Анализ полученных в данной работе результатов свидетельствует о том, что одноионная анизотропия существенно увеличивает область существования QFiM-фазы и сдвигает как линии фазового перехода, так и линии компенсации в область больших значений билинейного обменного взаимодействия подрешетки  $S = 1$ . Этот результат легко

понять, если обратить внимание на выражение (11), из которого следует, что даже при  $J_0^{(2)} \sim K_0$  среднее значение магнитного момента подрешетки с  $S = 1$  будет меньше номинального за счет учета одноионной анизотропии.

Представляет также интерес определить тип фазового перехода QFiM–FiM. Для этого рассмотрим плотность свободной энергии (9) в окрестности фазового перехода QFiM–FiM, т.е. в окрестности линии, определяемой соотношением (14). Поскольку вторая подрешетка выполняет роль «подмагничивающего поля» и намагниченность ее в обеих фазах одинакова и постоянна ( $|\langle \sigma^z \rangle| = 1/2$ ), сосредоточим свое внимание на первой подрешетке. Поскольку средний магнитный момент первой подрешетки равен  $\cos 2\alpha$ , то параметр  $\alpha$  фактически определяет параметр порядка системы. Это утверждение требует некоторого комментария. Как уже отмечалось ранее при анализе FiM-фазы, намагниченность подрешетки с  $S = 1$  достигает насыщения асимптотически. Это означает, что параметр  $\alpha$  не точно равен нулю в FiM-фазе, а стремится к нулю также асимптотически при больших значениях билинейного обменного взаимодействия и достигает точного значения  $\alpha = 0$  в изотропном случае при  $\beta = 0$ . Поэтому минимум плотности свободной энергии в анизотропном случае не достигается в точке  $\alpha = 0$ , а несколько сдвинут (в силу малости  $\alpha$ ) вблизи линии фазового перехода. Раскладывая плотность свободной энергии (9) в ряд по этому параметру в QFiM-фазе, в окрестности линии фазового перехода ( $\alpha \rightarrow 0$ ) получим

$$F = F_0 + A\alpha + \Lambda\alpha^2 + B\alpha^3 + \Theta\alpha^4 + \dots, \quad (15)$$

где  $A = \frac{\beta}{6}$ ,  $\Lambda = 2J_0^{(2)} - 2K_0 + \frac{1}{2}|A_0|$ ,  $B = -\frac{\beta}{9}$ ,  $\Theta = -\frac{1}{6}|A(0)| - \frac{8}{3}J_2(0) + \frac{8}{3}K(0)$ , или в переменных  $x, y, z$

$$A = \frac{z}{6}K_0, \quad B = -\frac{z}{9}K_0,$$

$$\Lambda = \frac{K(0)}{2}(4x - 4 + y), \quad \Theta = \frac{K(0)}{6}(-y - 16x + 16).$$

Наличие линейного по  $\alpha$  слагаемого в выражении (15) свидетельствует о том, что подрешетка  $S = 1$  является ненасыщенной в FiM-фазе. Такое поведение параметра  $\alpha$  связано с наличием квадрупольных средних вида  $\langle S^i S^j + S^j S^i \rangle$ , которое в рассматриваемом случае есть

$$q_2^2 = \langle (S^x)^2 - (S^y)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (S^+)^2 + (S^-)^2 \rangle = \sin 2\alpha.$$

Анализ плотности свободной энергии (15) позволяет трактовать фазовый переход QFiM–FiM как

фазовый переход первого рода. Поскольку коэффициент  $\Theta > 0$  в QFiM-фазе, то кубическая парабола, определяемая уравнением

$$A + 2\Lambda\alpha + 3B\alpha^2 + 4\Theta\alpha^3 = 0,$$

имеет два минимума, ни один из которых не совпадает с точкой  $\alpha = 0$ .

В случае изотропного ферримагнетика плотность свободной энергии в окрестности линии фазового перехода QFiM–FiM имеет вид

$$F = F_0 + \Lambda\alpha^2 + \Theta\alpha^4 + \dots,$$

а величины  $\Lambda$  и  $\Theta$  имеют вид, приведенный выше. Следовательно, в случае изотропного негейзенберговского ферримагнетика рассматриваемый фазовый переход является переходом второго рода.

#### 4. АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Представляет интерес поведение спектров элементарных возбуждений исследуемой системы как в FiM-фазе, так и в QFiM. Особый интерес представляет поведение спектров в окрестности линии компенсации спинов подрешеток. Кроме того, эти исследования позволяют более адекватно описать фазовые переходы, реализующиеся в системе. Как известно, спектры элементарных возбуждений определяются полюсами функции Грина [54], которую в рамках техники операторов Хаббарда определим следующим образом [50, 53–55]:

$$G^{\lambda\lambda'}(n, \tau, n', \tau') = -\langle \hat{T} \tilde{X}_n^\lambda(\tau) \tilde{X}_{n'}^{\lambda'}(\tau') \rangle,$$

где  $\tilde{X}_n^\lambda(\tau) = \exp(H\tau)X_n^\lambda \exp(-H\tau)$  — оператор Хаббарда в представлении Гейзенберга;  $\hat{T}$  — оператор Вика;  $\lambda$  — корневые векторы, определяющиеся алгеброй операторов Хаббарда [51, 54, 55]. Вывод дисперсионного уравнения подробно изложен в работах [50, 52, 55]. Дисперсионное уравнение, определяющее спектры магнонов, справедливо при произвольном соотношении материальных констант, т.е. в различных фазовых состояниях и температурном интервале существования магнитного упорядочения. В рассматриваемом нами случае  $T \rightarrow 0$ . Решения его определяют спектры возбуждений в различных фазах.

Очевидно, что в рассматриваемой нами системе реализуются три ветви элементарных возбуждений: две «поперечные» ветви возбуждений, связанные с прецессией магнитных моментов подрешеток,

и одна «продольная», связанная с изменением модуля магнитного момента подрешетки с  $S = 1$ .

Рассмотрим вначале продольную ветвь возбуждений. Спектр этой ветви в общем случае (для произвольной фазы) имеет вид

$$\varepsilon_1^2(k) = (E_{1-1} + K_k) \times (E_{1-1} + K_k + 2(J_k^{(2)} - K_k) \sin^2 2\alpha), \quad (16)$$

где

$$E_{1-1} = E_1 - E_{-1} = -K_0 - 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha + \frac{\beta}{2} \sin 2\alpha.$$

Рассмотрим продольную ветвь возбуждений в FiM-фазе, т.е. при  $J_0 > K_0 \gg \beta$ . Как было показано выше, в этой фазе

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx 1, \quad \sin 2\alpha \approx -\frac{\beta}{4(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|} \approx 0,$$

и с учетом этого выражение (16) примет вид

$$\varepsilon_1^2(k) = \left( (K_0 - K_k) + 2(J_0^{(2)} - K_0) + \frac{|A_0|}{2} \right)^2. \quad (17)$$

Как следует из этого выражения, дисперсия продольных магнонов определяется биквадратичным

обменным взаимодействием, а энергетическая щель в спектре (17) равна

$$\varepsilon_1(0) = 2(J_0^{(2)} - K_0) + \frac{|A_0|}{2}.$$

Это выражение определяет линию потери устойчивости продольной ветви элементарных возбуждений  $2(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|/2 = 0$  при фазовом переходе из FiM-фазы в QFiM, и в переменных  $x, y, z$  эта линия имеет вид  $y = 4(1 - x)$ . Очевидно, что эта линия лежит ниже линии фазового перехода и совпадает с линией фазового перехода в изотропном негейзенберговском ферримагнетике (см. [45, 46]). Такое поведение линии потери устойчивости подтверждает то, что фазовый переход FiM-QFiM является переходом первого рода.

Рассмотрим теперь поведение спектра  $\varepsilon_1$  в противоположном случае, когда преобладающим параметром первой подрешетки является биквадратичное обменное взаимодействие, т.е.  $K_0 > J_0 \gg \beta$  и система находится в QFiM-фазе. В этой фазе намагниченность первой подрешетки  $\langle S^z \rangle$  меньше максимально возможного:

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx \frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} < 1.$$

Учитывая это, спектр продольных магнонов можно представить в виде

$$\varepsilon_1^2(k) \approx \left( (K_0 - K_k) - \frac{\beta}{2} \right) \left( (K_0 - K_k) - \frac{((2(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta/2)^2 - |A_0/2|^2)(\beta/2 - 2(K_0 - J_0^{(2)}))}{(2(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta/2)^2} \right). \quad (18)$$

Из равенства нулю энергетической щели спектра (18) можно определить линию потери устойчивости продольной ветви возбуждений при фазовом переходе QFiM-FiM:

$$\varepsilon_1^2(0) \approx \frac{\beta}{2} \left[ \left( (2(K_0 - J_0^{(2)}) + \frac{\beta}{2})^2 - \left| \frac{A_0}{2} \right|^2 \right) \times \left( \frac{\beta}{2} - 2(K_0 - J_0^{(2)}) \right) \right] = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что спектр (18) теряет устойчивость на линии

$$2(K_0 - J_0^{(2)}) + \frac{\beta}{2} - \frac{|A|}{2} = 0,$$

или в переменных  $x, y, z$

$$y = 4(1 - x) + z.$$

Также представляет интерес исследовать спектр продольных возбуждений в окрестности линии компенсации спиновых моментов подрешёток. Учитывая, что в этой области QFiM-фазы на линии компенсации спинов подрешёток  $|\langle S^z \rangle| = |\langle \sigma_z \rangle| = 1/2$ , спектр (16) существенно упрощается и принимает вид

$$\varepsilon_1^2(k) = \left( -\frac{1}{2}(J_0^{(2)} - K_0) - \frac{|A_0|}{4} - \frac{\sqrt{3}\beta}{4} - (K_0 - K_k) \right) \times \left( -\frac{|A_0|}{4} - \frac{\sqrt{3}\beta}{4} - (K_0 - K_k) + (J_k^{(2)} - K_k) \right).$$

Здесь учтено, что  $\cos 2\alpha = 1/2$ ,  $\sin 2\alpha = -\sqrt{3}/2$ . Кроме того, используя (12), получим, что на линии компенсации спинов спектр продольных магнонов при-

нимает «антиферромагнитный» вид

$$\varepsilon_1(k) \approx \sqrt{\frac{3}{2}(K_0 - K_k)(K_0 - J_0)}.$$

Как уже отмечалось, кроме «продольной» ветви возбуждений в системе существуют две «поперечные» ветви элементарных возбуждений, которые связаны с прецессионным движением спинов подрешеток соответственно с  $S = 1$  и  $\sigma = 1/2$ . Энергии этих возбуждений определяются решением уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4(k) + \varepsilon^2(k) & \left[ \left( \frac{A_k}{2} \right)^2 \cos 2\alpha - \left( E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right)^2 - \right. \\ & - \left( E_{10} + J_k^{(2)} \right)^2 + (J_k^{(2)} - K_k)^2 \sin^2 2\alpha \left. \right] + \\ & + \left( E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right)^2 \times \\ & \times \left[ (E_{10} + J_k^{(2)})^2 - (J_k^{(2)} - K_k)^2 \sin^2 2\alpha \right] + \\ & + \left( \frac{A_k}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{A_k}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha - \right. \\ & - \left. \left( E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right) \times \right. \\ & \left. \times (E_{10} + J_k^{(2)} - (J_k^{(2)} - K_k) \sin^2 2\alpha) \right] = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_{1-1} & = -K_0 - 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \\ & + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha + \frac{\beta}{2} \sin 2\alpha; \\ E_{10} & = -K_0 - (J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \\ & + \frac{A_0}{4} \cos 2\alpha - \frac{\beta}{4} (1 - \sin 2\alpha); \\ E_{1/2-1/2} & = -\frac{J_0^{(1)}}{2} + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Как видно из структуры уравнения (19) «поперечные» ветви возбуждений являются «гибридизированными», т.е. их нельзя разделить на независимые возбуждения подрешеток, поскольку подрешетки связаны межподрешеточным обменным взаимодействием.

Конечно же уравнение (19) является биквадратным, и его решения можно записать в явном виде. Однако эти решения настолько громоздки, что они становятся затруднительными с учетом малости константы одноионной анизотропии. Поэтому можно предложить следующий анализ решения этого уравнения. Прежде всего необходимо отметить, что свободный член уравнения (19) при  $k \rightarrow 0$  равен нулю. Это означает, что одна из ветвей поперечных возбуждений является безщелевой, т.е.

голдстоуновской модой. Учитывая это, представим уравнение (19) в виде

$$\varepsilon^4(k) + b(k)\varepsilon^2(k) + c(k) = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} c(0) & = 0, \\ b(0) & = -\frac{|A_0|}{4} \left\{ \frac{\beta(1 - \sin 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha} + \frac{|A_0|}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $b(0) < 0$ .

Тогда решения уравнения (20) можно представить в виде

$$\varepsilon_{2,3}^2(k) = \frac{|b(k)|}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{b(k)}{2} \right)^2 - c(k)}.$$

Выделяя в этих решениях явную зависимость от волнового вектора (в длинноволновом пределе), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,3}^2(k) & = \frac{|b(0)|}{2} \pm \frac{|b(0)|}{2} \sqrt{1 - \alpha k^2} \approx \\ & \approx \frac{|b(0)|}{2} \pm \frac{|b(0)|}{2} \left( 1 - \frac{\alpha k^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, одна из ветвей «поперечных» возбуждений является безщелевой и пропорциональна  $k$  ( $\varepsilon_2(k) \sim k$ ), а во второй ветви появляется энергетическая щель, пропорциональная модулю  $b(0)$  ( $\varepsilon_3(0) \sim |b(0)|$ ).

Необходимо отметить, что  $\cos 2\alpha = \langle S^Z \rangle \neq 0$  ни в FiM-, ни в QFiM-фазах, т.е., как уже отмечалось, немагнитическая фаза в рассматриваемой системе не реализуется.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные исследования показали, что учет даже малой одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» в негейзенберговском ферримагнетике с подрешетками  $S = 1$  и  $\sigma = 1/2$  приводит к координальным изменениям как статических, так и динамических свойств системы по сравнению со случаем изотропного негейзенберговского ферримагнетика [45, 46]. В анизотропном негейзенберговском ферримагнетике, как и в изотропном, в зависимости от соотношений обменных интегралов возможна реализация как фазы, характеризующейся дипольным параметром порядка (FiM-фаза), так и фаза, характеризующаяся как векторным, так и тензорными параметрами порядка (QFiM-фаза). Однако в отличие от изотропного случая область существования

QFiM-фазы возрастает, что связано с влиянием одноионной анизотропии, которая, как и биквадратичное обменное взаимодействие, стремится установить квадрупольный (или нематический) порядок.

Кроме того, как показал термодинамический анализ свободной энергии и анализ спектров элементарных возбуждений, учет одноионной анизотропии приводит к тому, что фазовый переход QFiM–FiM является переходом первого рода в отличие от случая изотропного ферримагнетика, в котором аналогичный фазовый переход является переходом второго рода. Также нами показано, что в окрестности линии компенсации спинов подрешеток спектр продольных возбуждений имеет антиферромагнитное поведение.

Необходимо отметить, что полученные нами результаты согласуются с результатам работ [45, 46], в которых исследовались свойства изотропного и обменно-анизотропного негејзенберговских ферримагнетиков с подрешетками  $S = 1$ ,  $\sigma = 1/2$ . Как уже отмечалось ранее, учет легкоплоскостной одноионной анизотропии в подрешетке с  $S = 1$  существенно расширяет область устойчивости QFiM-фазы по сравнению с изотропным ферримагнетиком и, что наиболее интересно, делает переход QFiM–FiM фазовым переходом первого рода. Такое поведение рассматриваемой системы требует подробного исследования динамики системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Slavin and V. Tiberkevich, IEEE Trans. Magn. **45**, 1875 (2009). <https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.2009935>
2. S. D. Bader and S. S. P. Parkin, J. S. Langer (ed.), Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **1**, 71 (2010). <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104123>
3. V. V. Kruglyak, S. Demokritov, D. Grundler. J. Phys. D **43**, 264001 (2010). <https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/26/260301>
4. A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga, B. Hillebrands. Nat. Phys. **11**, 453 (2015). <https://doi.org/10.1038/nphys3347>
5. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Low Temp Phys **40**, 17 (2014). <https://doi.org/10.1063/1.4862467>
6. V. Baltz, A. Manchon, M. Tsoi, T. Moriyama, T. Ono, and Y. Tserkovnyak, Rev. Mod Phys. **90**, 015005 (2018). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.015005>
7. M. B. Jungfleisch, W. Zhang, and A. Hoffmann, Phys. Lett. A **382**, 865 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.01.008>
8. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, М. В. Четкин. УФН **146**, 417 (1985).
9. A. Ivanov and D. D. Sheka. Phys. Rev. Lett. **72**, 404 (1994).
10. Е. А. Галкина, Б. А. Иванов. Письма в ЖЭТФ. **61**, 511 (1995).
11. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Phys. Rev. B **81**, 144427 (2010). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.144427>
12. O. A. Tretiakov, D. Clarke, G. -W. Chern, Y. B. Bazaliy, and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. Lett. **100**, 127204 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.127204>
13. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, S. Savel'ev, and F. Nori, Phys. Rev. B **77**, 134425 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.134425>
14. O. Gomonay, T. Jungwirth, and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **117**, 017202 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.017202>
15. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **44**, 618 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5041427>
16. R. Cheng, D. Xiao, and A. Brataas, Phys. Rev. Lett. **116**, 207603 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.207603>
17. R. Khymyn, I. Lisenkov, V. Tyberkevych, B. A. Ivanov and A. Slavin, Sci. Rep. **7**, 43705 (2017). <https://doi.org/10.1038/srep43705>
18. O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko, V. S. Tiberkevich, A. N. Slavin, B. A. Ivanov, and R. Khymyn, Phys. Rev. Applied **8**, 064007 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.8.064007>
19. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanski, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **84**, 370 (1983).
20. K. J. Kim, S. K. Kim, Y. Hirata, Se-Hyeok Oh, T. Tono, D. H. Kim, T. Okuno, W. S. Ham, S. Kim, G. Go, Y. Tserkovnyak, A. Tsukamoto, T. Moriyama, K. -J. Lee, and T. Ono, Nature Mater. **16**, 1187 (2017). <https://doi.org/10.1038/nmat4990>
21. Е. Г. Галкина, К. Э. Заспел, Б. А. Иванов, Н. Е. Кулагин, Л. М. Лерман. Письма в ЖЭТФ **110**, 474 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0370274X1919007X>

22. S. K. Kim and Y. Tserkovnyak, *Appl. Phys. Lett.* **111**, 032401 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.4985577>
23. C. E. Zaspel, E. G. Galkina, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. Appl.* **12**, 044019 (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.12.044019>
24. Lisenkov, R. Khymin, J. Åkerman, N. X. Sun, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **100**, 100409(R) (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.100409>
25. Radu, K. Vahaplar, C. Stamm, T. Kachel, N. Pontius, H. A. Dürr, T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. W. Chantrell, A. Tsukamoto, A. Itoh, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, *Nature London* **472**, 205 (2011). <https://doi.org/10.1038/nature09901>
26. T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. Chantrell, U. Atxitia, O. Chubykalo-Fesenko, S. El Moussaoui, L. Le Guyader, E. Mengotti, L. J. Heyderman, F. Nolting, A. Tsukamoto, A. Itoh, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. M. Kalashnikova, K. Vahaplar, J. Mentink, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, *Nature Commun.* **3**, 666 (2012). <https://doi.org/10.1038/ncomms1666>
27. J. H. Mentink, J. Hellsvik, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. Kirilyuk, A. V. Kimel, O. Eriksson, M. I. Katsnelson, and Th. Rasing, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 057202 (2012). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.057202>
28. В. Г. Барьяхтара, В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **98**, 327 (2013). <https://doi.org/10.1134/S00213640131800>
29. B. A. Ivanov, *Low Temp. Phys.* **45**, 935 (2019). <https://doi.org/10.1063/1.5121265>
30. Yu. A. Fridman and O. A. Kosmachev, *Phys. Solid State* **51** (6), 1167 (2009). DOI: 10.1134/S1063783409060146
31. Э. Л. Нагаев, *УФН* **136**, 61 (1982).
32. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, *Low Temp. Phys.* **20**, 775 (1994).
33. T. Moriya, *Phys. Rev.* **117**, 635 (1960).
34. Yu. N. Mitsay, Yu. A. Fridman, D. V. Spirin, M. S. Kochmanski. *Acta Phys. Pol.* **97**, 355 (2000). <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.97.355>
35. Yu. A. Fridman, and O. A. Kosmachev. *J. Magn. Magn. Mater.* **236**, 272 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0304-8853\(01\)00464" 4](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(01)00464)
36. E. G. Galkina, V. I. Butrim, Yu. A. Fridman, B. A. Ivanov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **88**, 144420 (2013). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.144420>
37. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, and V. I. Butrim, *Low Temp. Phys.* **40**, 635 (2014). <https://doi.org/10.1063/1.4890989>
38. A. F. Andreev and I. A. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **60**, 267 (1984).
39. Е. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
40. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.052401>
41. V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
42. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, O. A. Kosmachev and Yu. A. Fridman. *Low Temp. Phys.* **41**, 382 (2015). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4921470>
43. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, *J. Magn. Magn. Mater.* **325**, 125 (2013). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2012.08.027>
44. A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, *Phys. Rev. B* **74**, 144426 (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.144426>
45. A. V. Krivtsova, Ya. Yu. Matyunina, E. A. Polyanskaya, O. A. Kosmachev, and Yu. A. Fridman, *J. Magn. Magn. Mater.* **513**, 167178 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2020.167178>
46. А. В. Кривцова, Я. Ю. Матюнина, Ю. А. Фридман, *ЖЭТФ* **158**, 334 (2020). DOI: 10.1134/S1063776120060059
47. N. Papanikolaou, *Nucl. Phys. B* **305**, 367 (1988).
48. A. V. Chubukov, *J. Phys. Condens. Matter* **2**, 1593 (1990).
49. K. Stevens, *Proc. Phys. Soc. A* **65**, 209, (1952)
50. R. O. Zaitsev, *Sov. Phys. JETP* **41**(1), 100 (1975).
51. В. В. Вальков, *ТМФ* **76:1**, 143 (1988).
52. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 435 (2008). DOI:10.1016/j.jmmm.2007.07.001
53. Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман, *ТМФ* **81:2**, 263 (1989).
54. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильно коррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
55. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, С. Г. Овчинников. *ЖЭТФ* **88**, 550 (1985).

# ТЕОРИЯ ВИХРЕПОДОБНЫХ СТРУКТУР В ПЕРФОРИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ С УЧЕТОМ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ

*Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов\*, Р. Р. Канбеков*

*Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия*

Поступила в редакцию 22 апреля 2022 г.,

после переработки 25 мая 2022 г.

Принята к публикации 26 мая 2022 г.

Исследуются вихреподобные неоднородности, которые могут возникать в ферромагнитных пленках с сильной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость» при наличии в них антидотов, представляющих собой искусственно созданные наноразмерные отверстия или немагнитные включения. Рассмотрены особенности структуры нанобъектов такого типа в зависимости от геометрии отверстий, а также изучено влияние размагничивающих полей на вихреподобные неоднородности, локализующиеся в окрестности одного, двух или четырех отверстий. Показано, что приведенные аналитические оценки во всех случаях находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0044451022090152

EDN: ELNJAY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно исследуются и активно обсуждаются особенности топологии и разнообразные (в том числе и уникальные) свойства вихреподобных магнитных неоднородностей, к которым относятся магнитные вихри, цилиндрические магнитные домены, магнитные скирмионы, бимероны и т. е. [1–7]. Такое внимание к ним обусловлено перспективами их использования в магнитной памяти, нейроморфных вычислительных системах и других устройствах спинтроники [5, 6, 8]. В то же время в работах [9, 10] на примере некоторых простейших моделей показана возможность существования еще одного типа вихреподобных неоднородностей, которые образуются в тонких магнитных пленках с искусственно созданными отверстиями (в литературе также встречается термин «антидот» [11]) или немагнитными включениями и могут управляться внешними токами, протекающими через них. Ранее пленки такой геометрии неоднократно рассматривались при изучении устойчивых состояний магнитных вихрей и скирмионов. Такой интерес был обусловлен наличием в реальных пленках различного рода дефектов, которые существенно влияют

на свойства вихреподобных магнитных неоднородностей [12–14], причем к дефектам можно отнести и полости цилиндрической формы, т. е. отверстия. Согласно исследованиям они могут, с одной стороны, влиять на устойчивость наблюдаемых магнитных структур [15], в частности, способствовать увеличению плотности образующихся скирмионов [16], а с другой — индуцировать зарождение магнитных скирмионов в некиральных магнетиках [11]. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать отверстия как своего рода источник зарождения вихреподобных неоднородностей, в том числе и в пленках с сильной легкоплоскостной анизотропией, которые изучаются в данной работе. Очевидно, однако, что применение нанобъектов указанного типа на практике требует предварительного анализа влияния на их структуру ряда факторов, присущих реальным магнитным пленкам, таких как геометрические размеры отверстий и воздействие размагничивающих полей, чему и посвящено приведенное исследование.

## 2. СТРУКТУРА ПРОСТЕЙШЕЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Пусть материал тонкой пленки, содержащей отверстия (осуществимость таких наноразмерных перфораций на практике подтверждается аналогичны-

\* E-mail: vakhitovrm@yahoo.com

ми экспериментами с графеном [17] и магнитными пленками [18–20]), представляет собой ферромагнетик с сильной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость», благодаря чему вектор намагниченности почти не выходит из плоскости пленки. Тогда энергия магнетика может быть приближенно представлена в следующем виде [9, 10]:

$$E = \int A(\nabla\theta)^2 h dS, \quad (1)$$

где угол  $\theta$  задает ориентацию вектора намагниченности на плоскости,  $A$  — обменный параметр,  $h$  — толщина пленки. Здесь предполагается, что вклад размагничивающих полей в рассматриваемом материале значительно меньше вклада обменного взаимодействия; их влияние — это предмет подробного рассмотрения.

В случае пленки без топологических особенностей функционал (1) имеет единственный минимум  $E = 0$ , достигаемый при  $\theta = \text{const}$ , что соответствует однородному распределению намагниченности. Однако при наличии отверстий в пленке уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала (1), представляющее собой уравнение Лапласа  $\Delta\theta = 0$ , может иметь нетривиальные решения. В частности, при числе отверстий  $N = 1$  такие решения имеют вид  $\theta(r, \phi) = k\phi + \text{const}$ , где полярная система координат  $(r, \phi)$  связана с центром отверстия, а  $k$  — произвольное целое число, которое будем называть топологическим зарядом по аналогии с терминологией, принятой, например, в теории скирмионов (при этом величина  $k$ , разумеется, представляет собой топологический инвариант принципиально иного рода, нежели топологический заряд скирмиона). В континуальном приближении все такие состояния являются одинаково стабильными, независимо от значения  $k$ , тем не менее, соответствующая магнитная неоднородность не является уединенной, и ее энергия при  $k \neq 0$  неограниченно растет при увеличении размеров образца [10]. При  $N = 2$  данное утверждение уже не всегда верно. Действительно, пусть пленка содержит два цилиндрических отверстия радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , центры которых отстоят друг от друга на расстояние  $a \gg R_1, R_2$  (рис. 1). Тогда в силу линейности уравнения  $\Delta\theta = 0$  оно имеет решение следующего вида:

$$\theta = k(\phi_1 - \phi_2), \quad (2)$$

где  $\phi_1, \phi_2$  — полярные углы в системах координатах, связанных с центрами отверстий. Из рис. 1 следует, что разность углов, входящая в соотношение (2), равна углу, под которым из данной точки

виден отрезок, соединяющий центры отверстий, так что  $\theta \sim r^{-1}$ , а значит,  $(\nabla\theta)^2 \sim r^{-4}$ . Это обеспечивает сходимость интеграла (1) в области больших  $r$ , следовательно, энергия магнетика в рассматриваемом состоянии является конечной. Детальный расчет (см. Приложение А) показывает, что она равна

$$E = 4\pi k^2 Ah \ln(a/\sqrt{R_1 R_2}). \quad (3)$$

Распределение намагниченности в окрестности отверстий, задаваемое выражением (2) при  $k = 1$ , схематически показано на рис. 1; при этом состояние с  $k = -1$  получается из него симметричным отражением, так что эти состояния физически эквивалентны.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Соотношение (2) представляет собой приближенное аналитическое выражение, справедливое в пределе бесконечно малых размеров отверстий, тем не менее, оно на качественном уровне правильно описывает структуру неоднородностей, образующихся в окрестности парных отверстий произвольной формы. В этом несложно убедиться путем численного моделирования с использованием программного комплекса ООММФ [21]. На рис. 2 показан пример уединенной неоднородности, структура которой была получена в результате расчетов на модели образца в виде прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры 200 нм × 200 нм × 20 нм (на рисунке изображена небольшая область пленки, представляющая интерес). При этом антидоты были выбраны в виде отверстий радиусом 10 нм, т. е. при размере ячейки 2.5 нм они фактически имели крестообразную форму (см. рис. 2). Как видим, что приведенное распределение намагниченности в точности воспроизводит состояние с  $k = 1$ , предсказанное соотношением (2).

Следует остановиться на том обстоятельстве, что поскольку глобальный минимум энергии (1)  $E = 0$  достигается при однородном распределении намагниченности, расчет неоднородной структуры численными методами требует привлечения стохастического подхода (в работе [10] он был развит в применении к численной оптимизации без использования программного комплекса ООММФ). В рамках такого подхода расчет равновесного распределения намагниченности повторяется многократно, начинаясь из различных стартовых точек оптимизации, выбираемых случайно. Далее все найденные мини-

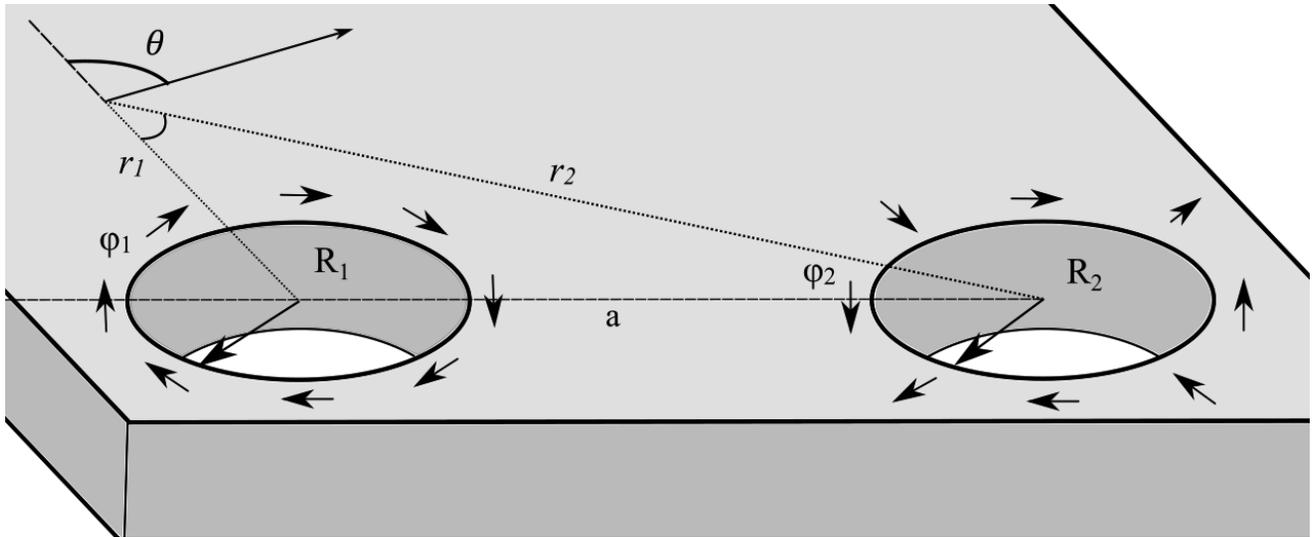


Рис. 1. Схема пленки с двумя отверстиями

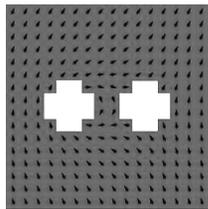


Рис. 2. Уединенная неоднородность, локализованная на двух отверстиях

мумы ранжируются по значениям энергии, и для каждого значения выбирается по одному решению (предполагается, что существование неэквивалентных минимумов, равных по величине, крайне маловероятно), что и позволяет исследовать состояния с  $E \neq 0$ . В частности, состояние, показанное на рис. 2, характеризуется энергией  $E = 14.4 Ah$ .

Несложно видеть, что при  $N > 2$  соотношение, аналогичное (2), будет иметь вид

$$\theta = k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \dots + k_N\phi_N.$$

При этом условие конечности энергии системы выражается равенством  $k_1 + k_2 + \dots + k_N = 0$ . Для примера рассмотрим случай  $N = 4$ , поместив четыре одинаковых отверстия радиусом  $R = 10$  нм в вершины квадрата со стороной  $a = 40$  нм. Расчеты с использованием численного моделирования позволяют получить распределения намагниченности, показанные на рис. 3 (знаками отмечены отверстия, с которыми связаны заряды  $\pm 1$ ). Энергии этих состояний равны  $E_1 = 14.1 Ah$  (связаны два отверстия по горизонтали или вертикали),  $E_2 = 17.1 Ah$  (свя-

заны два отверстия по диагонали) и  $E_3 = 22.6 Ah$  (связаны между собой все четыре отверстия).

С точки зрения континуальной модели, первые два из состояний на рис. 3 описываются соотношением (2) при  $k = 1$ , а значит, их энергии могут быть вычислены по формуле (3). Учитывая, что расстояние между центрами отверстий для второго состояния равно  $a\sqrt{2}$ , получаем

$$E_1 = 4\pi Ah \ln(a/R), \quad E_2 = 4\pi Ah \ln(a\sqrt{2}/R).$$

Для третьего состояния из Приложения B имеем

$$E_3 = 8\pi Ah \ln(a/R\sqrt{2}).$$

Несложно видеть, что эта энергия может быть выражена через первые две следующим образом:

$$E_3 = 4E_1 - 2E_2.$$

Данное соотношение можно использовать в качестве контрольного для проверки соответствия между результатами аналитических оценок и численного моделирования. Подставляя в него ранее найденные величины  $E_1$  и  $E_2$ , получаем  $E_3 = 22.2 Ah$ , что менее чем на 2% отличается от расчетного значения  $E_3 = 22.6 Ah$ .

Несмотря на то, что из приведенных на рис. 3 неоднородностей третья обладает наибольшей энергией, именно ею будет ограничен дальнейший анализ вихреподобных объектов, локализующихся в области четырех отверстий. Дело в том, что эта структура, фактически, представляет собой связанное состояние двух неоднородностей первого типа, что подтверждается наличием энергии связи

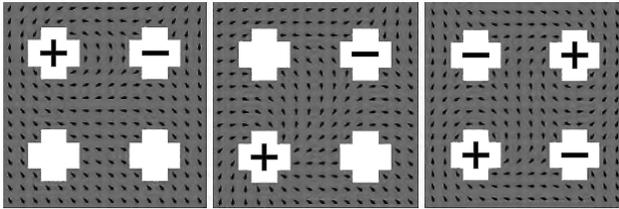


Рис. 3. Уединенные неоднородности, локализованные на четырех отверстиях

$E_3 - 2E_1 = -4\pi Ah \ln 2 < 0$ , а значит, она обладает повышенной стабильностью. Это обуславливает ее особую привлекательность для применения на практике.

#### 4. СЛУЧАЙ ДВУХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Представим себе, что вещество, заполняющее отверстия, является ферромагнитным, однако характеризуется более слабым обменным взаимодействием, чем материал самой пленки. Тогда обменный параметр  $A$  в выражении (1) становится функцией координат, и соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид  $\text{div}(A \text{grad} \theta) = 0$ . Отсюда ясно, что при переходе через границу отверстия, где  $A$  испытывает скачок, непрерывно меняются как сама функция  $\theta$ , так и проекция вектора  $A \text{grad} \theta$  на нормаль к границе. Следовательно, в пределе, когда внутри отверстия  $A = 0$ , на внешней границе отверстия должно выполняться соотношение  $(\text{grad} \theta)_n = 0$ , где индексом  $n$  обозначена нормальная компонента. Дополняя этим граничным условием уравнение Лапласа  $\Delta \theta = 0$ , мы получаем краевую задачу для распределения намагниченности  $\theta$  внутри образца при наличии отверстий произвольной формы, размер которых не мал в сравнении с расстоянием между ними. Покажем, что в случае двух цилиндрических отверстий такая задача может быть решена аналитически.

Рассмотрим распределение вида (2) и введем обозначения  $C_1$  и  $C_2$  для центров полярных систем координат, в которых заданы углы  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Несложно убедиться, что условие  $(\text{grad} \theta)_n = 0$  оказывается выполнено для любой окружности, центр  $O$  которой лежит на продолжении отрезка  $C_1C_2$ , а радиус равен  $\sqrt{OC_1 \cdot OC_2}$  (эта ситуация является аналогом метода зеркальных изображений, хорошо известным в электростатике; см. рис. 4). Следовательно, если пленка имеет два круглых отверстия с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  и радиусами  $R_1$

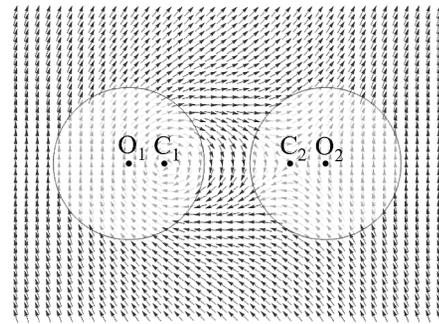


Рис. 4. Распределение намагниченности при конечных размерах отверстий

и  $R_2$ , то распределение намагниченности в образце по-прежнему задается соотношением (2) при выполнении условий

$$R_1^2 = b_1(a - b_2), \quad R_2^2 = b_2(a - b_1), \quad (4)$$

где принято во внимание, что  $|O_1O_2| = a$ , а также введены обозначения  $|O_1C_1| = b_1$ ,  $|O_2C_2| = b_2$ . Равенства (4) следует рассматривать как систему уравнений относительно смещений  $b_1$  и  $b_2$ , причем с учетом очевидных требований  $b_1 < R_1$ ,  $b_2 < R_2$  эти величины определяются однозначно. В частном случае  $R_1 = R_2 = R$  имеем

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} (a - \sqrt{a^2 - 4R^2}).$$

Заметим, что при небольших зазорах между отверстиями, когда  $a \rightarrow R_1 + R_2$ , решение системы (4) оказывается близко к  $b_1 = R_1$ ,  $b_2 = R_2$ , так что  $|C_1C_2| \rightarrow 0$ . Это значит, что при увеличении относительных размеров отверстий масштабы неоднородности становятся все меньше. Более того, существенная часть неоднородности оказывается «вырезана» самими отверстиями (см. рис. 4), будучи ярко выраженной лишь в небольшой области между ними. Этот вывод находится в хорошем соответствии с результатами численного моделирования (см., например, рис. 2) и означает, что при наличии нескольких пар отверстий в одной пленке локализующиеся на них вихреподобные объекты практически не будут искажать структуру друг друга. Данное обстоятельство обеспечивает неплохие перспективы использования изучаемых перфорированных пленок на практике в качестве основы для создания надежных носителей информации.

**5. ВЛИЯНИЕ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ОТВЕРСТИЯ**

Для того чтобы ввести в рассмотрение размагничивающие поля, добавим к энергии (1) магнитной пленки член следующего вида [22]:

$$E_s = \int \Phi_s h dS, \quad \Phi_s = -\frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности в данной точке, а  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля, которая удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div}(\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = 0.$$

Следовательно, мы можем ввести вспомогательную функцию  $\psi$ , такую что

$$\mathbf{H} = -4\pi M_s \nabla \psi, \quad \Delta \psi = \text{div } \mathbf{m}, \quad \Phi_s = 2\pi M_s^2 \mathbf{m} \nabla \psi, \tag{5}$$

где  $M_s$  — намагниченность насыщения, а  $\mathbf{m}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{M}$  (при этом внутри отверстий мы полагаем  $\mathbf{m} = 0$ ).

Пусть пленка содержит одно цилиндрическое отверстие радиусом  $R$  с центром в начале полярной системы координат  $(r, \phi)$ . По-прежнему полагая, что влияние размагничивающих полей невелико в сравнении с обменным взаимодействием, будем считать, что распределение намагниченности внутри образца описывается тем же соотношением  $\theta = k\phi + \alpha$ ,  $\alpha = \text{const}$ , что и в случае энергии, выбранной в виде (1). Тогда с учетом выражения

$$\mathbf{m} = [-\sin(\theta - \phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_\phi] \sigma(r - R),$$

где  $\sigma(r)$  — функция Хевисайда, второе соотношение (5) принимает следующий вид:

$$\Delta \psi = -\sin(\theta - \phi) \left[ \frac{k}{r} \sigma(r - R) + \delta(r - R) \right],$$

где  $\delta(r)$  — дельта-функция Дирака. Отсюда видно, что

$$\psi = \sin(\theta - \phi) \begin{cases} f_i(r), & r \leq R, \\ f_e(r), & r > R, \end{cases}$$

причем неизвестные функции могут быть найдены из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_i}{\partial r} \right) - \frac{(k-1)^2}{r^2} f_i &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_e}{\partial r} \right) - \frac{(k-1)^2}{r^2} f_e &= -\frac{k}{r}, \\ f_e(R) = f_i(R), \quad f'_e(R) - f'_i(R) &= -1. \end{aligned}$$

**Таблица.** Поведение размагничивающих полей в случае одного отверстия

	$f_i(r)$	$f_e(r)$	$\langle \Phi_s \rangle$
$k < 0$	0	$\frac{1}{k-2} \left( r - \frac{R^{2-k}}{r^{1-k}} \right)$	$\pi M_s^2$
$k = 0$	$r/2$	$R^2/(2r)$	0
$k = 1$	$-R$	$-r$	$2\pi M_s^2 \sin^2 \alpha$
$k = 2$	0	$-r \ln(r/R)$	$\pi M_s^2$
$k > 2$	$\frac{1}{k-2} \frac{r^{k-1}}{R^{k-2}}$	$\frac{1}{k-2} r$	$\pi M_s^2$

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы значение  $f_i(0)$  было конечным, а функция  $f_e(r)$  возрастала при  $r \rightarrow \infty$  как можно медленней. Решив полученные уравнения, мы далее можем найти плотность энергии внутри образца из третьего соотношения (5), а именно

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \\ &= 2\pi M_s^2 \left[ -\sin^2(\theta - \phi) f'_e(r) + \cos^2(\theta - \phi) (k-1) \frac{f_e(r)}{r} \right]. \end{aligned}$$

При  $k = 1$  значение этого выражения не зависит от угла  $\phi$ ; при других значениях  $k$  его можно усреднить по значениям  $\phi$  от 0 до  $2\pi$ , так что

$$\langle \Phi_s \rangle = \pi M_s^2 \left[ -f'_e(r) + (k-1) \frac{f_e(r)}{r} \right].$$

Конкретный вид функций  $f_i(r)$  и  $f_e(r)$ , а также значения средней плотности энергии  $\langle \Phi_s \rangle$  для всевозможных топологических зарядов  $k$  приведены в таблице. Несложно заметить, что ни в одном из случаев плотность энергии не зависит от расстояния  $r$ . Более того, если при  $k = 1$  использовать значение  $\langle \Phi_s \rangle$ , усредненное по углу  $\alpha$ , или, что то же самое, значение при  $\alpha = \pi/4$  (на рис. 2 и 3 видно, что это направление является вполне типичным), то можно считать, что соотношение  $\langle \Phi_s \rangle = \pi M_s^2$  выполняется при любых ненулевых значениях топологического заряда. По этой причине в случае системы нескольких отверстий плотность энергии размагничивающих полей в области самой системы также является приблизительно постоянной и равной  $\pi M_s^2$ , если распределение намагниченности неоднородно.

**6. ВЛИЯНИЕ РАЗМАГНИЧИВАЮЩИХ ПОЛЕЙ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЙ**

Изучим поведение размагничивающих полей в случаях  $N = 2$  (рис. 2) и  $N = 4$  (третья неоднород-

ность на рис. 3) на большом удалении от системы. При  $r \gg a$  соотношения типа (2) приближенно дают

$$\theta = \frac{ka^n \sin n\phi}{r^n}, \quad (6)$$

где  $n = 1$  для двух отверстий и  $n = 2$  для четырех. Заметим, что эта формула справедлива для отверстий произвольного размера, однако значение величины  $a$  в ней может несколько отличаться от расстояния между центрами отверстий при  $N = 2$  и стороны квадрата при  $N = 4$ : в частности, для двух отверстий, размеры которых сопоставимы с расстоянием между ними, параметру  $a$  в (6) соответствует расстояние  $|C_1C_2|$  на рис. 4, а не  $|O_1O_2|$ , что можно учесть количественно посредством условий (4). Как и следовало ожидать, решения (6) удовлетворяют уравнению Лапласа. Подставляя их во второе соотношение (5), имеем

$$\Delta\psi = \frac{nka^n \sin((n+1)\phi - \theta)}{r^{n+1}}.$$

Пренебрегая в этом соотношении величиной  $\theta$  и решая полученное уравнение, находим

$$\psi = -\frac{ka^n \sin(n+1)\phi}{4r^{n-1}}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в третье соотношение (5) и усредняя результат по углу  $\phi$ , мы получаем следующее выражение для средней плотности энергии:

$$\langle \Phi_s \rangle = \frac{1}{4} \pi M_s^2 \frac{k^2 a^{2n}}{r^{2n}}. \quad (8)$$

Чтобы вычислить полную энергию  $E_s$  размагничивающих полей при  $k = \pm 1$ , необходимо проинтегрировать  $\Phi_s$  по всему объему образца. Для этого будем считать, что плотность энергии определяется формулой (8) при  $r > r_0$  и соотношением  $\langle \Phi_s \rangle = \pi M_s^2$  при  $r < r_0$ , где значение параметра  $r_0$  можно найти из соображений непрерывности  $\langle \Phi_s \rangle$ . Тогда для случая четырех отверстий имеем  $r_0 = a/\sqrt{2}$  и  $E_s = \pi^2 M_s^2 a^2 h$ . В случае двух отверстий, однако, выражение (8) убывает при  $r \rightarrow \infty$  недостаточно быстро и интеграл по объему образца расходится. Этого можно избежать, ограничив область интегрирования условием  $r < R_{ex}$ , где  $R_{ex}$  имеет смысл характерного размера магнитной неоднородности с учетом факторов, выходящих за пределы рассматриваемой модели; тогда с учетом  $r_0 = a/2$  получаем

$$E_s = \pi^2 M_s^2 a^2 h \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{2R_{ex}}{a} \right).$$

Выражение в скобках имеет порядок 1 при всех практически реализуемых соотношениях  $R_{ex}/a$  (в частности, оно близко к 2 при значениях  $R_{ex}/a$  в диапазоне от 15 до 20), поэтому для обоих рассматриваемых значений  $N$  можно принять

$$E_s \sim \pi^2 M_s^2 a^2 h. \quad (9)$$

Сравнивая это выражение, например, с (3), приходим к выводу, что условием малости влияния размагничивающих полей на структуру изучаемых неоднородностей является соотношение  $a \ll L$ , где введено обозначение  $L = \sqrt{A/2\pi M_s^2}$ .

Используя выражение (7), можно также оценить изменение распределения намагниченности (6), непосредственно обусловленное влиянием размагничивающих полей. Для этого заметим, что эффективное магнитное поле, соответствующее энергии  $E + E_s$ , имеет вид

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{2A}{M_s} \Delta \mathbf{m} + \mathbf{H},$$

вследствие чего уравнение Ландау—Лифшица [23] в статическом случае  $[\mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}] = 0$  с учетом первого соотношения (5) может быть записано следующим образом:

$$\Delta\theta = -\frac{1}{L^2} \left[ \sin(\theta - \phi) \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \cos(\theta - \phi) \frac{\partial\psi}{\partial r} \right]. \quad (10)$$

Пользуясь теорией возмущений, будем искать решение уравнения (10) в виде  $\theta = \theta_0 + \theta_1$ , где невозмущенное распределение  $\theta_0$  задается формулой (6), а  $\theta_1$  представляет собой малую поправку первого порядка, обусловленную влиянием поля  $\mathbf{H}$ . Тогда, пренебрегая  $\theta$  в правой части (10) и подставляя (7), имеем

$$\Delta\theta_1 = \frac{ka^n}{4r^n L^2} [\sin n\phi - n \sin(n+2)\phi],$$

откуда  $\theta_1 = \theta_{1m} + W\theta_0 + \theta_{1r}$ , где

$$\theta_{1m} = \begin{cases} \frac{kar}{32L^2} [\sin 3\phi + 4 \ln r \sin \phi], & n = 1, \\ \frac{ka^2}{32L^2} [\sin 4\phi - 2 \sin 2\phi], & n = 2, \end{cases} \quad (11)$$

$W \ll 1$  — постоянная величина, а  $\theta_{1r}$  — некое решение уравнения Лапласа, не содержащее слагаемых, пропорциональных  $\theta_0$ . Сравнивая (11) с выражением (6), можно заключить, что полученное решение имеет смысл только при условии  $r \ll L$ , когда  $\theta_{1m} \ll \theta_0$ ; ясно, что это условие выполняется во всем объеме образца, если  $R_{ex} \ll L$  (при этом соотношение  $a \ll L$  также выполняется автоматически).

Довольно любопытным представляется вопрос о перераспределении обменной энергии в пространстве в связи с появлением поправки  $\theta_1$ . Локальное изменение плотности энергии равно  $\Phi_{es} = A(\nabla\theta)^2 - A(\nabla\theta_0)^2 \approx 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_1$ , откуда  $\Phi_{es} = \Phi_{esm} + \Phi_{es0} + \Phi_{esr}$ , где

$$\begin{aligned}\Phi_{esm} &= 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_{1m}, \\ \Phi_{es0} &= 2AW(\nabla\theta_0)^2, \\ \Phi_{esr} &= 2A\nabla\theta_0\nabla\theta_{1r}.\end{aligned}$$

Несложно заметить, что в области  $a \ll r \ll L$  основной вклад в величину  $\Phi_{es}$  дает первое слагаемое; усредняя его по углу  $\phi$ , из (6) и (11) получаем

$$\langle\Phi_{esm}\rangle = -\frac{1}{4}n\pi M_s^2 \frac{k^2 a^{2n}}{r^{2n}} = -n\langle\Phi_s\rangle.$$

Таким образом, воздействие размагничивающих полей приводит к снижению плотности обменной энергии (а при  $n = 2$  — и плотности энергии в целом) на удалении от системы отверстий. В то же время функция  $\theta_0$  минимизирует функционал (1), а значит, интеграл  $\Phi_{es}$  по всему объему образца должен быть равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что обменная энергия неоднородности перераспределяется в направлении ее центра, т. е. неоднородность становится еще более локализованной. Поскольку, как несложно убедиться,  $\langle\Phi_{esr}\rangle = 0$ , то отрицательный вклад  $\Phi_{esm}$  может быть скомпенсирован только за счет члена  $\Phi_{es0}$ , порядок и знак которого во всех точках пространства определяются коэффициентом  $W$ . Следовательно,  $W \sim (a/L)^2$ , причем  $W > 0$ , поэтому  $\theta_0$  входит в выражение для  $\theta$  с коэффициентом  $1 + W > 1$ , что эквивалентно замене расстояния  $a$  в формуле (6) на несколько большее эффективное значение.

Приведенные выше рассуждения основывались на предположении, что  $a \ll L$ , т. е. влияние размагничивающих полей считалось относительно малым. В случаях, когда это соотношение не выполняется, расчет  $E_s$  можно осуществить посредством численного моделирования с использованием ООММФ. Вводя в рассмотрение размагничивающие поля и варьируя намагниченность насыщения  $M_s$  в диапазоне от  $10^5$  А/м до  $2 \cdot 10^6$  А/м, получаем зависимость энергии  $E_s$  (рассчитанной как изменение полной энергии системы по сравнению с результатом соответствующего расчета энергии  $E$  без учета размагничивания) от отношения  $a/L$ , показанные на рис. 5 (синяя и зеленая линии). Для сравнения на том же рисунке приведены графики, отвечающие применению приближенной формулы (9), в которой выбран

множитель 2 для случая  $N = 2$  и множитель 1 для случая  $N = 4$  (красная и желтая линии). Несложно видеть, таким образом, что рассмотренное приближение позволяет получить неплохие количественные оценки в довольно широком диапазоне значений намагниченности насыщения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа следует, что вихреподобные неоднородности изучаемого типа обладают хорошей локализованностью в пространстве, которая становится еще более ярко выраженной при размерах отверстий, сопоставимых с расстоянием между ними, а также под влиянием размагничивающих полей. Тем самым эти факторы, которые могли бы существенно снизить надежность предсказаний, полученных в рамках простейших моделей, в действительности не только не препятствуют, но, напротив, способствуют возможности использования рассмотренных нанообъектов на практике. При этом учет влияния обозначенных факторов сводится, по сути, к внесению ряда поправок, которые не искажают наблюдаемую картину на качественном уровне. Так, в случае отверстий конечного размера область локализации и кривизна магнитной неоднородности не обязательно совпадают с областью локализации и кривизной самих отверстий, что и приводит к необходимости соответствующих корректировок. В случае же заметного влияния размагничивающих полей следует иметь в виду, что «кажущиеся» размеры системы отверстий, которые непосредственно обуславливают структуру и поведение магнитной неоднородности, в действительности немного превышают истинные геометрические размеры этой системы.

Таким образом, единственным существенным условием наблюдения вихреподобных неоднородностей в перфорированных ферромагнитных пленках является наличие в них сильной одноосной анизотропии типа «легкая плоскость». Такая универсальность открывает значительные перспективы использования изучаемых объектов в наноэлектронике: несложно видеть, что структуры, локализованные в области двух или четырех близкорасположенных отверстий пленки, могут находиться, по меньшей мере, в одном из трех неэквивалентных состояний (одном однородном и двух неоднородных различающихся знаками топологических зарядов). Следовательно, на их основе могут быть созданы ячейки памяти, позволяющие кодировать информацию

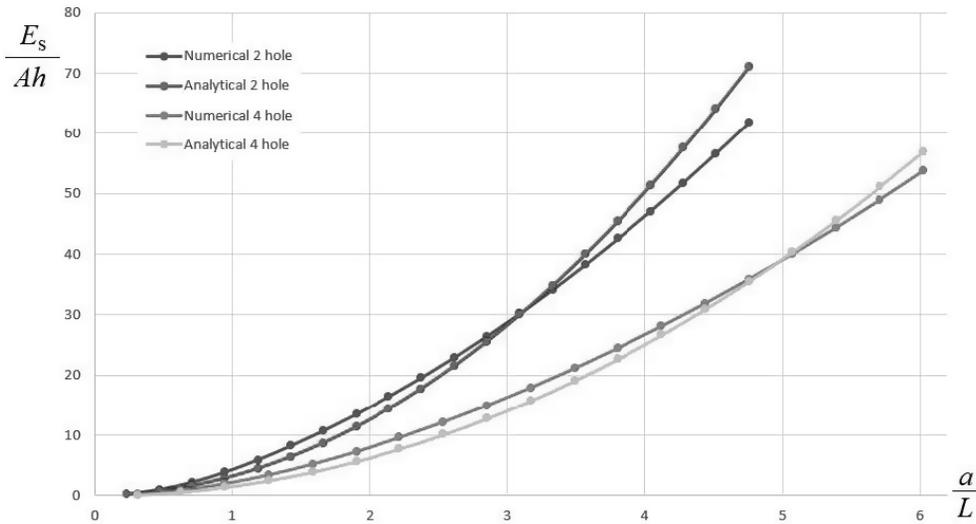


Рис. 5. График зависимости вклада  $E_s$  размагничивающих полей в энергию образца от характерного расстояния  $a$  для систем с двумя и четырьмя отверстиями

в троичной системе исчисления, что обеспечивает значительное увеличение плотности записи данных на носителях.

**Финансирование.** Работа проведена в рамках государственного задания на выполнение научных исследований лабораториями (приказ MN-8/1356 от 20.09.2021).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А. РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННОГО НА ДВУХ ОТВЕРСТИЯХ

Для начала заметим, что в полярной системе координат  $(r, \phi)$  вектор  $\nabla\phi$  равен по абсолютной величине вектору  $\mathbf{r}/r^2$  и составляет с ним постоянный угол  $\pi/2$ . Учитывая это обстоятельство и подставляя (2) в (1), получаем

$$E = k^2 Ah \int \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right)^2 dS = k^2 Ah \int \frac{a^2}{r_1^2 r_2^2} dS = k^2 Ah (G_1 + G_2),$$

где

$$G_1 = \int \frac{a^2}{r_1^2 (r_1^2 + r_2^2)} dS, \quad G_2 = \int \frac{a^2}{r_2^2 (r_1^2 + r_2^2)} dS.$$

Областью интегрирования  $G_1$  является вся плоскость за исключением кругов  $r_1 < R_1$  и  $r_2 < R_2$ . Однако подынтегральное выражение  $G_1$  в области  $r_2 < R_2$  близко к  $a^{-2}$ , а значит, круг  $r_2 < R_2$  может

быть включен в область интегрирования без потери точности результата. Тогда

$$G_1 = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{\infty} \frac{a^2}{r_1^2 (r_1^2 + r_2^2)} r_1 dr_1 d\phi_1.$$

Рассчитывая этот интеграл с учетом того, что  $r_2^2 = r_1^2 + a^2 + 2r_1 a \cos \phi_1$ , и пренебрегая членами порядка  $(R_1/a)^4$ , получаем  $G_1 = 2\pi \ln(a/R_1)$ . Аналогично  $G_2 = 2\pi \ln(a/R_2)$ , откуда и следует выражение (3).

### ПРИЛОЖЕНИЕ В. РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННОГО НА ЧЕТЫРЕХ ОТВЕРСТИЯХ

Распределение намагниченности, соответствующее третьей неоднородности на рис. 3, описывается следующим соотношением, аналогичным (2):

$$\theta = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4,$$

где отверстия занумерованы по часовой стрелке. Отсюда, по аналогии с Приложением А, получаем

$$E = Ah \int \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^2} - \frac{\mathbf{r}_4}{r_4^2} \right)^2 dS.$$

Применяя тождество

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2$$

и учитывая симметрию системы, имеем  $E = Ah(4M_1 - 2M_2)$ , где

$$M_1 = \int \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right)^2 dS, \quad M_2 = \int \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^2} \right)^2 dS.$$

Пренебрегая тем, что круги, соответствующие отверстиям 3 и 4, не входят в область интегрирования  $M_1$ , и повторяя рассуждения, приведенные в Приложении А, получаем  $M_1 = 4\pi \ln(a/R)$ . Интеграл  $M_2$  отличается от  $M_1$  только расстоянием между центрами кругов, которое в случае отверстий 1 и 3 равно  $a\sqrt{2}$ . Следовательно,  $M_2 = 4\pi \ln(a\sqrt{2}/R)$ , откуда окончательно имеем  $E = 8\pi Ah \ln(a/R\sqrt{2})$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf et al., *Science* **289**, 930 (2000).
2. S. Muhlbauer, F. Jonietz, C. Pfeleiderer et al., *Science* **323**, 915 (2009).
3. M. Lee W. Kang, Y. Onose et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 186601 (2009).
4. T. Schulz, R. Ritz, A. Bauer et al., *Nature Phys.* **8**, 301 (2012).
5. K. Everschor-Sitte J. Masell, R. M. Reeve et al., *J. Appl. Phys.* **124**, 240901 (2018).
6. М. В. Сапожников, О. В. Ермолаева, Е. В. Скороходов и др., *Письма в ЖЭТФ* **107**, 378 (2018).
7. J. Zang, M. Mostovoy, I. H. Han et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 136804 (2011).
8. G. Srinivasan, A. Sengupta, K. Roy, *Sci. Rep.* **6**, 29545 (2016).
9. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, *Изв. РАН. Сер. физ.* **77**, 1493 (2013).
10. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 123 (2022).
11. D. Navas, R. V. Verba, A. Hierro-Rodriguez et al., *APL Matter.* **7**, 0811114 (2019).
12. A. R. Pereira, *J. Appl. Phys.* **97**, 094303 (2005).
13. F. A. Apolonio, W. A. Moria-Melo, F. P. Crisafuli et al., *J. Appl. Phys.* **106**, 084320 (2009).
14. D. Toscano, S. A. Leonel, P. Z. Coura et al., *Appl. Phys. Lett.* **101**, 252402 (2012).
15. J. Muller, A. Rosch, *Phys. Rev. B* **91**, 054410 (2015).
16. M. Xu, J. Zhang, D. Meng et al., *Phys. Lett. A* **433**, 128034 (2022).
17. Ю. И. Латышев, А. П. Орлов, А. В. Фролов и др., *Письма в ЖЭТФ* **98**, 242 (2013).
18. U. Welp, V. K. Vlasko-Vlasov, G. W. Cratree et al., *Appl. Phys. Lett.* **79**, 1315 (2001).
19. M. V. Sapozhnikov, S. N. Vdovichev, O. L. Ermolaeva et al., *Appl. Phys. Lett.* **109**, 042406 (2016).
20. E. Valdes-Bango, M. Velez, L. M. Alvarez-Prado et al., *AIP Advancez* **7**, 056303 (2017).
21. M. J. Donahue, D. G. Porter, *OOMMF User's Guide*, version 2.0a3. National Institute of Standard and Technology: Gaithersburg, MD, USA (2021).
22. A. Hubert, R. Shafer, *Magnetic domains*. Springer-Verlag, Berlin (2007).
23. Y. Nakatani, K. Yamada, A. Hirohata, *Sci. Rep.* **9**, 13475 (2019).

# ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРОВ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА МЕТАЛЛ-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАНОГРАНУЛЯРНЫХ КОМПОЗИТОВ С ПАРАМАГНИТНЫМИ ИОНАМИ В ИЗОЛИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЕ

А. Б. Дровосеков <sup>a\*</sup>, Н. М. Крейнес <sup>a</sup>, О. А. Ковалев <sup>a,b</sup>, А. В. Ситников <sup>c,d</sup>,  
С. Н. Николаев <sup>d</sup>, В. В. Рыльков <sup>d,e</sup>

<sup>a</sup> *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
101000, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Воронежский государственный технический университет  
394026, Воронеж, Россия*

<sup>d</sup> *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

<sup>e</sup> *Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова  
Российской академии наук  
141190, Фрязино, Московская область, Россия*

Поступила в редакцию 30 мая 2022 г.,  
после переработки 30 мая 2022 г.  
Принята к публикации 31 мая 2022 г.

Пленки металл-диэлектрических наногранулярных композитов  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  и  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  с различным содержанием ферромагнитной (ФМ) металлической фазы  $x$  исследованы методом магнитного резонанса в широком диапазоне температур 4.2–360 К. Особенностью изучаемых систем является высокая концентрация парамагнитных ионов Fe и Co, диспергированных в диэлектрической среде между ФМ-гранулами CoFeB. Экспериментальные спектры исследуемых структур содержат линию ферромагнитного резонанса от массива ФМ-гранул, а также дополнительный более слабый пик поглощения, связанный с электронным парамагнитным резонансом ионов  $\text{Fe}^{3+}$ , присутствующих в матрице изолятора. Обнаружено, что положение и интенсивность этого пика зависят от состава нанокompозита и температуры. Наблюдаемое поведение объясняется наличием обменного взаимодействия магнитных ионов и ФМ-гранул.

DOI: 10.31857/S0044451022090164  
EDN: ELPNRY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные металл-диэлектрические нанокompозиты (НК)  $M_xD_{100-x}$  представляют собой массив ферромагнитных (ФМ) наногранул, хаотически расположенных в диэлектрической матрице. В настоящей работе изучаются пленочные НК на основе

металлического ФМ-сплава  $\text{Co}_{40}\text{Fe}_{40}\text{B}_{20}$  (далее для краткости CoFeB) и диэлектриков  $\text{LiNbO}_3$  и  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , характеризующиеся высокой концентрацией парамагнитных (ПМ) ионов Fe и Co, диспергированных в изолирующей матрице [1]. Ранее было показано, что наличие таких ионов в диэлектрических зазорах между ФМ-гранулами способствует проявлению необычных электрических, магнитных и магниторезонансных свойств НК, что обусловлено усилением межгранулярного электронного туннелирования и обменного взаимодействия [2–8].

\* E-mail: drovosekov@kapitza.ras.ru

В нашей предыдущей работе [8] пленочные НК  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  и  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  исследовались методом магнитного резонанса при комнатной температуре. Было обнаружено, что экспериментальные спектры, помимо обычного сигнала ферромагнитного резонанса (ФМР), содержат дополнительный более слабый пик поглощения. Этот пик наиболее ярко проявляется при продольном возбуждении резонанса в магнитном поле, ориентированном в плоскости пленки. Наблюдаемая особенность была связана нами с проявлением электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) ионов  $\text{Fe}^{3+}$ , присутствующих в диэлектрической матрице. Частотно-полевая зависимость  $f(H)$  для дополнительного пика описывается линейной функцией

$$f(H) = \gamma H + f_0, \quad (1)$$

где гиромагнитное отношение  $\gamma \approx 6.0$  ГГц/кЭ соответствует эффективному  $g$ -фактору  $g \approx 4.3$ , характерному для ЭПР ионов  $\text{Fe}^{3+}$  в аморфных твердых телах [9–11]. При этом спектральная щель в нулевом поле  $f_0$  зависит от состава НК и объясняется наличием обменного взаимодействия ПМ-ионов с ФМ-гранулами. Согласно [8], величина  $f_0$  определяется формулой

$$f_0 = \gamma JM, \quad (2)$$

где  $M$  — средняя намагниченность массива ФМ-гранул, а  $J$  — обменная константа в безразмерных единицах (величина  $JM$  представляет собой эффективное обменное поле, действующее на ПМ-ионы со стороны ФМ-гранул). Положительные значения  $f_0$ , наблюдаемые в [8], соответствуют ФМ-знаку обменного взаимодействия.

В настоящей работе спектры магнитного резонанса пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  и  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  исследуются в широком диапазоне температур с целью установления особенностей температурного поведения обмена между ФМ-гранулами и ПМ-ионами, диспергированными в диэлектрической среде.

## 2. ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Пленки НК  $M_xD_{100-x}$  толщиной  $\sim 1$  мкм синтезированы методом ионно-лучевого распыления на ситалловых подложках с использованием составных мишеней из литой пластины сплава  $\text{Co}_{40}\text{Fe}_{40}\text{V}_{20}$  с навесками из оксидов  $\text{Al}_2\text{O}_3$  либо  $\text{LiNbO}_3$  (подробности см. в работах [1, 2]).

Структурные исследования пленок, выполненные методами электронной микроскопии, показали, что НК представляет собой ансамбль кристаллических наногранул сплава  $\text{CoFe}$  с ОЦК-структурой, находящихся в аморфной оксидной матрице [3, 4]. В случае НК  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  гранулы имеют округлую форму диаметром 2–4 нм, тогда как в НК  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  гранулы оказываются вытянутыми в направлении роста НК до 10–15 нм при поперечных размерах 2–4 нм.

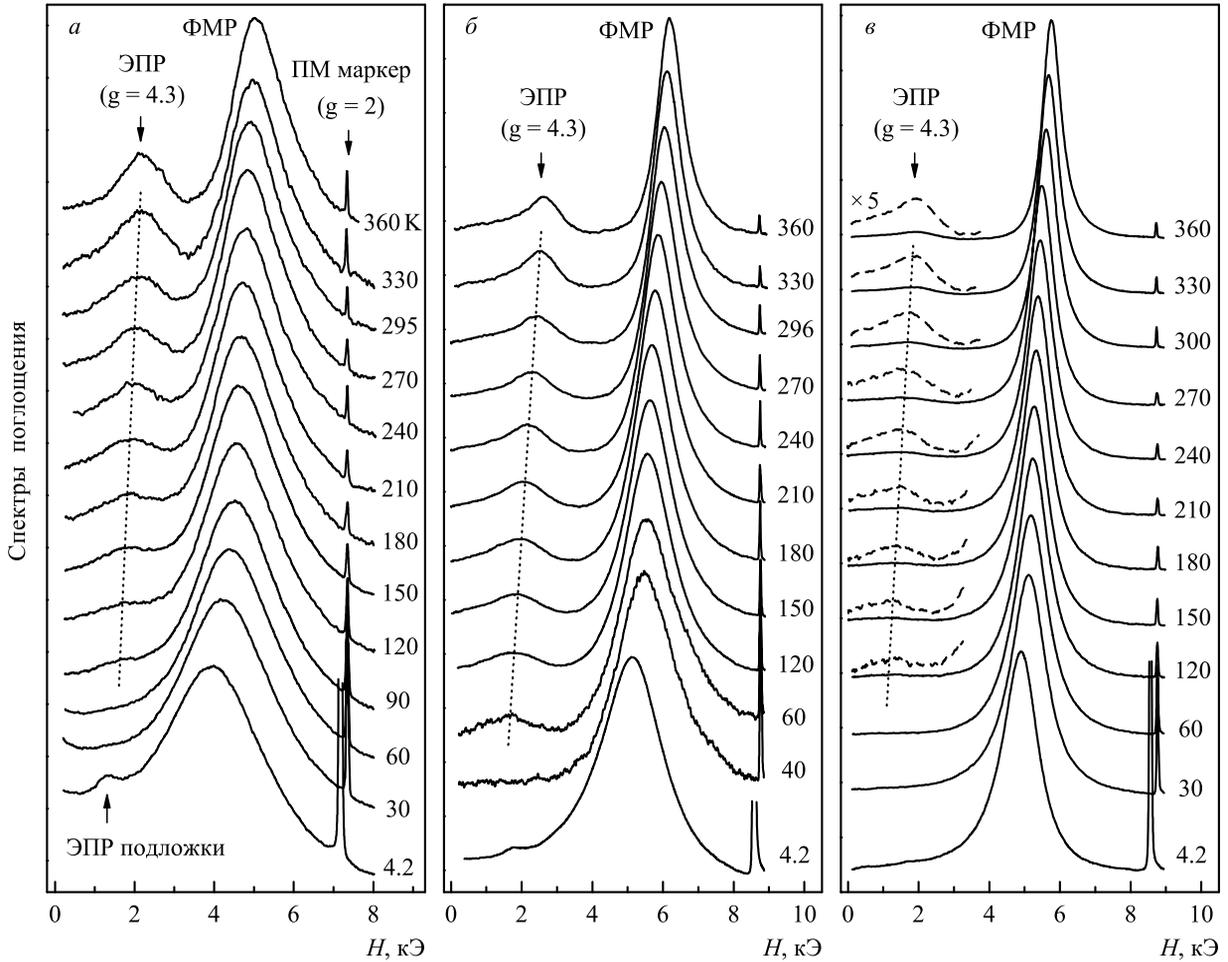
Отметим, что согласно результатам [3, 4] значительная часть  $\text{Co}$ ,  $\text{Fe}$  и  $\text{V}$  присутствует в диэлектрической матрице в виде отдельных атомов. В этой ситуации используемое значение  $x$  для концентрации ФМ-фазы  $\text{CoFeB}$  лишь отражает номинальный атомарный состав НК [2, 3]. При этом количество изолированных магнитных ионов, находящихся вне ФМ-гранул, сопоставимо с числом таких ионов в самих гранулах.

Магнитный резонанс НК  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  ( $x \approx 32$  и 41 ат.%) и  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  ( $x \approx 47$  и 51 ат.%) исследовался в диапазоне температур 4.2–360 К на частотах 20–25 ГГц в магнитных полях до 10 кЭ на лабораторном спектрометре проходного типа [8].

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 показаны экспериментальные спектры при различных температурах для трех из четырех исследуемых образцов (результаты для пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  с  $x \approx 32$  и 41 ат.% очень близки между собой, поэтому приведены данные только для случая  $x \approx 32$  ат.%). Спектры демонстрируют интенсивную линию ФМР, а также более слабый пик поглощения, связанный с ЭПР ионов  $\text{Fe}^{3+}$  ( $g \approx 4.3$ ). Для всех пленок температурное поведение резонансных пиков на качественном уровне выглядит одинаково. С понижением температуры пик ЭПР ( $g \approx 4.3$ ) постепенно уширяется и сдвигается в слабые поля. При этом его интенсивность уменьшается, и ниже  $T \lesssim 60$  К он перестает наблюдаться (маленький пик, возникающий в слабом поле при низкой температуре  $T = 4.2$  К, связан с ЭПР-сигналом от подложки).

Согласно формулам (1), (2) сдвиг пика ЭПР ( $g \approx 4.3$ ) в слабые поля при понижении температуры означает усиление обмена между ПМ-ионами и ФМ-гранулами. Разброс величин этого обмена из-за различных положений ионов относительно



**Рис. 1.** Температурная эволюция спектров магнитного резонанса для образцов  $(\text{CoFeB})_{32}(\text{LiNbO}_3)_{68}$  (а),  $(\text{CoFeB})_{47}(\text{Al}_2\text{O}_3)_{53}$  (б) и  $(\text{CoFeB})_{51}(\text{Al}_2\text{O}_3)_{49}$  (в). Спектры получены в поле, приложенном в плоскости пленки при продольном возбуждении резонанса на частотах 20.6 ГГц (а) и 24.5 ГГц (б, в). При температуре жидкого гелия  $T = 4.2$  К частоты возбуждения резонанса чуть ниже — 20.1 ГГц (а) и 24.0 ГГц (б, в)

гранул также увеличивается, что объясняет уширение пика. Кроме того, рост магнитной восприимчивости ПМ-ионов при понижении температуры должен приводить к усилению беспорядочных магнитодипольных взаимодействий между ними. Этот эффект также может объяснить уширение линии ЭПР и ее исчезновение в области низких температур (см., например, [12]).

Заметим, что по данным [2–4] существенный рост ПМ-восприимчивости исследуемых образцов начинается ниже  $T \lesssim 50$  К, т.е. именно в той области температур, где пик ЭПР перестает наблюдаться. Как показано в работе [5] для пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ , ниже  $T \lesssim 50$  К возникает эффект блокировки ФМ-гранул, который, по видимому, сопровождается формированием коллективного связанного состояния в системе ФМ-гранул

и примыкающих к ним ПМ-ионов. Можно предположить, что в этой ситуации происходит подавление сигнала ЭПР индивидуальных ионов  $\text{Fe}^{3+}$ .

Подобно пику ЭПР, линия ФМР при понижении температуры также смещается в слабые поля. Это смещение в основном обусловлено ростом величины размагничивающего фактора  $4\pi M$  пленок в соответствии с формулой Киттеля для частотно-полевой зависимости ФМР:

$$f_{\text{FMR}}(H) = \gamma_{\text{FMR}} \sqrt{H(H + 4\pi M)}, \quad (3)$$

где гиромагнитное отношение  $\gamma_{\text{FMR}} \approx 2.95$  ГГц/кЭ ( $g \approx 2.1$ ) [6–8]. Заметим, что для образцов НК  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  в области низких температур  $T \lesssim 50$  К возникает дополнительный динамический сдвиг пика ФМР  $\delta H$ , связанный с так называемым «эффектом медленной ионной релаксации» [7].

Этот эффект приводит к поправке в формуле (3), которая сводится к замене  $H \rightarrow H + \delta H$ . Влияние медленной ионной релаксации на поведение линии ФМР детально обсуждается в нашей предыдущей работе [7]. Здесь мы опускаем подробности. Заметим только, что для пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  этот эффект оказался пренебрежимо мал.

Результирующие температурные зависимости величины  $4\pi M$  и спектральной щели  $f_0$ , определенные по положению пиков ФМР и ЭПР соответственно, показаны на рис. 2. Для всех образцов величина  $f_0$  имеет положительный знак, что соответствует ФМ-обменному взаимодействию ПМ-ионов и ФМ-гранул. Интересно отметить некоторое сходство между рис. 2а и 2б. Подобие этих рисунков, очевидно, является следствием формулы (2), согласно которой  $f_0 \propto M$ . При этом константа обмена  $J$ , по-видимому, относительно слабо зависит от температуры и мало изменяется от образца к образцу.

На рис. 3 приведены зависимости  $J(T)$  исследуемых пленок, полученные с помощью формулы (2) из экспериментальных данных по  $4\pi M(T)$  и  $f_0(T)$ . Как видим, действительно, обменная константа  $J$  достаточно слабо изменяется в изученном температурном интервале и не очень сильно отличается для разных образцов, независимо от используемой диэлектрической матрицы. Все изменения константы  $J$  укладываются в диапазон  $\approx 30\%$ , в то время как  $f_0$  может отличаться приблизительно в 2.5 раза в зависимости от исследуемой пленки и температуры (ср. рис. 2б и рис. 3).

Экспериментальные значения  $f_0$  находятся в пределах 7.5–18.5 ГГц, что соответствует обменной энергии 0.03–0.08 мэВ на один ПМ-ион  $\text{Fe}^{3+}$ . По порядку величины эта энергия согласуется с теоретическими оценками, полученными в работе [13] для обменного взаимодействия магнитных центров, разделенных туннельными барьерами с характерной высотой  $\sim 1$  эВ и толщиной  $\sim 1$  нм. Количество экспериментальных работ, посвященных обмену через диэлектрические прослойки, невелико. Достаточно систематически изучен обмен через туннельные прослойки MgO в эпитаксиальных слоистых структурах Fe/MgO/Fe [14, 15]. В таких структурах энергия взаимодействия слоев железа на единицу площади достигает значений  $\sim 0.01$ – $0.1$  эрг/см<sup>2</sup> при толщинах прослойки  $\approx 0.5$ – $0.7$  нм. В пересчете на один атом Fe на границе MgO/Fe эта энергия соответствует  $\sim 0.01$ – $0.1$  мэВ, что совпадает по порядку величины с полученными нами значениями. Заметим однако, что

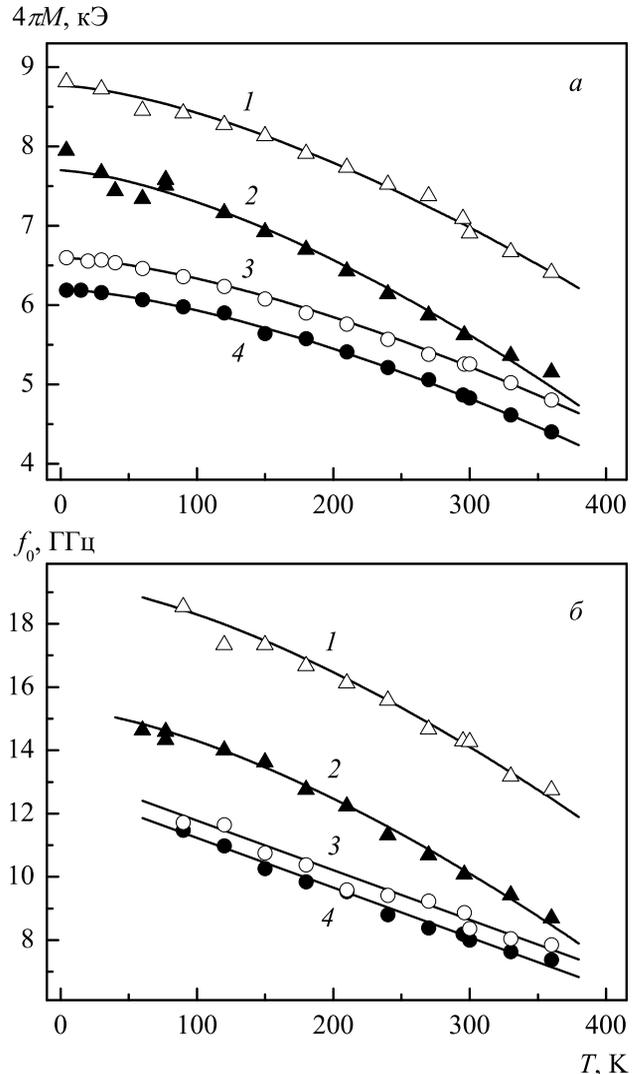


Рис. 2. Температурные зависимости поля размагничивания  $4\pi M$  (а) и спектральной щели  $f_0$  (б) для пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  с  $x \approx 51$  ат. % (1), 47 ат. % (2) и  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  с  $x \approx 41$  ат. % (3), 32 ат. % (4). Точки — эксперимент, линии проведены для наглядности

в структурах Fe/MgO/Fe при указанных толщинах прослойки реализуется антиферромагнитное упорядочение слоев Fe, в то время как в нашем случае наблюдается ФМ-знак взаимодействия ПМ-ионов с гранулами.

Как видно из рис. 2б и рис. 3, увеличение содержания ФМ-фазы в пленках приводит к усилению обмена ПМ-ионов с ФМ-гранулами. Такое поведение вполне ожидаемо. Оно обусловлено ростом размеров и намагниченности ФМ-гранул, сужением диэлектрических зазоров между ними и уменьшением расстояний между ПМ-примесями и гранулами.

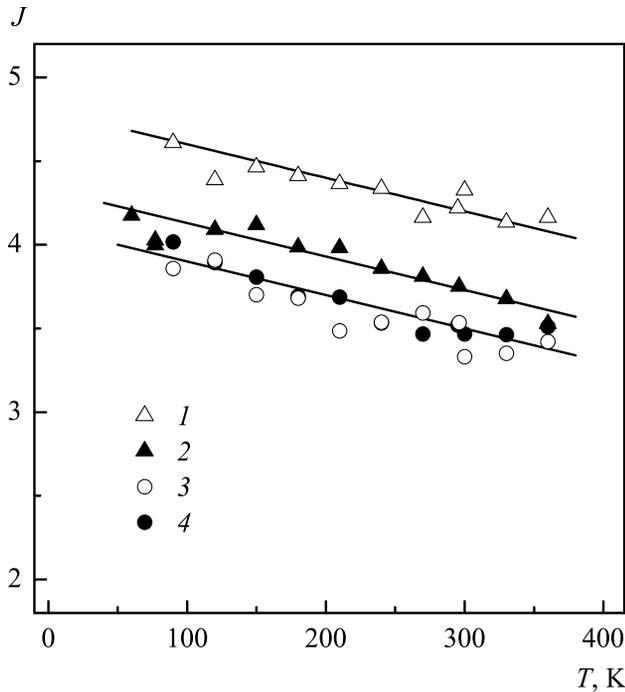


Рис. 3. Температурные зависимости обменной константы  $J$  для пленок  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$  с  $x \approx 51$  ат. % (1), 47 ат. % (2) и  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  с  $x \approx 41$  ат. % (3), 32 ат. % (4). Точки — эксперимент, линии проведены для наглядности

С повышением температуры обменное взаимодействие ПМ-ионов и ФМ-гранул ослабевает. При этом наблюдаемое уменьшение константы  $J$  в интервале 60–360 К составляет всего  $\approx 10\%$ . Величина этого эффекта приблизительно одинакова для всех исследуемых образцов (рис. 3). Слабость экспериментальной зависимости  $J(T)$  объясняется в рамках теоретических моделей обменного взаимодействия в магнитных туннельных контактах [16, 17]. Согласно этим моделям характерный масштаб температур  $T^*$ , при которых происходит существенное изменение обмена, определяется параметрами туннельного барьера между взаимодействующими ФМ-моментами. Для типичных значений высоты таких барьеров  $\sim 0.1\text{--}1$  эВ при толщинах  $\sim 1$  нм характерная температура  $T^*$  составляет  $\sim 10^3\text{--}10^4$  К, что находится далеко за пределами экспериментального диапазона. Это объясняет слабость наблюдаемой зависимости  $J(T)$ .

Вместе с тем простые теории, рассматривающие обменное взаимодействие через идеализированные сплошные туннельные прослойки, предсказывают возрастающую зависимость  $J(T)$  [16, 17]. Это противоречит экспериментально наблюдаемому умень-

шению  $J$  с увеличением температуры. Такое поведение может быть объяснено аморфной структурой диэлектрических матриц в исследуемых НК и, как следствие, высоким содержанием в межгранульных прослойках электронных дефектов [18]. Действительно, как показано в работе [19], учет дефектов прослойки в магнитных туннельных контактах может приводить к убывающей зависимости  $J(T)$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В широком диапазоне температур 4.2–360 К исследованы спектры магнитного резонанса пленок металл-диэлектрических наногранулярных композитов  $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  и  $(\text{CoFeB})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{100-x}$ . Помимо обычной линии ФМР, экспериментальные спектры демонстрируют дополнительный более слабый пик поглощения, связанный с ЭПР ионов  $\text{Fe}^{3+}$ , присутствующих в диэлектрической матрице. Линия ЭПР характеризуется эффективным  $g$ -фактором  $g = 4.3$  и наличием спектральной щели в нулевом поле, обусловленной ФМ-обменным взаимодействием ПМ-ионов с ФМ-гранулами.

Исследования спектров резонанса при различных температурах позволили получить данные о температурных зависимостях этого взаимодействия для пленок различного состава. Оказалось, что обменная константа  $J$  несильно зависит от содержания ФМ-фазы  $x$  нанокompозита. Рост концентрации  $x$  в интервале  $\approx 32\text{--}51$  ат. % приводит к усилению обменного взаимодействия приблизительно на 20%. Кроме того, выяснилось, что изменение температуры также слабо влияет на величину константы  $J$ . Для всех исследуемых пленок повышение температуры в диапазоне 60–360 К приводит к уменьшению  $J$  приблизительно на 10%. Наблюдаемое поведение  $J(T)$  в целом укладывается в рамки существующих представлений об обменном взаимодействии через туннельные прослойки. Вместе с тем достаточно неожиданным результатом является слабая зависимость величины  $J$  от типа используемой диэлектрической матрицы.

Отметим еще один обнаруженный необычный эффект, который заключается в наблюдаемом ослаблении интенсивности пика ЭПР с понижением температуры, вплоть до его полного исчезновения при  $T \lesssim 60$  К. Предположительно такое поведение может быть обусловлено ростом магнитной восприимчивости ПМ-ионов и блокировкой намагниченности ФМ-гранул в области низких тем-

ператур, что сопровождается усилением обменных и магнитодипольных взаимодействий в системе и формированием сильно связанного коллективного магнитного состояния. В этих условиях можно ожидать подавления ЭПР индивидуальных ионов  $\text{Fe}^{3+}$  и вместе с тем проявления дополнительных аномалий в поведении линии ФМР, связанных с эффектом медленной ионной релаксации [7].

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке государственного задания и Российского научного фонда (проект № 22–29–00392) в части исследования магниторезонансных и электрофизических свойств НК-образцов, а также Российского фонда фундаментальных исследований в части синтеза НК-пленок (проект № 19–29–03022).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Рыльков, А. В. Емельянов, С. Н. Николаев, К. Э. Никируй, А. В. Ситников, Е. А. Фадеев, В. А. Демин, А. Б. Грановский, ЖЭТФ **158**, 164 (2020).
2. В. В. Рыльков, С. Н. Николаев, В. А. Демин, А. В. Емельянов, А. В. Ситников, К. Э. Никируй, В. А. Леванов, М. Ю. Пресняков, А. Н. Талденков, А. Л. Васильев, К. Ю. Черноглазов, А. С. Веденев, Ю. Е. Калинин, А. Б. Грановский, В. В. Тугушев, А. С. Бугаев, ЖЭТФ **153**, 424 (2018).
3. V. V. Rylkov, S. N. Nikolaev, K. Yu. Chernoglazov, V. A. Demin, A. V. Sitnikov, M. Yu. Presnyakov, A. L. Vasiliev, N. S. Perov, A. S. Vedeneev, Yu. E. Kalinin, V. V. Tugushev, and A. B. Granovsky, Phys. Rev. B **95**, 144202 (2017).
4. V. V. Rylkov, A. V. Sitnikov, S. N. Nikolaev, V. A. Demin, A. N. Taldenkov, M. Yu. Presnyakov, A. V. Emelyanov, A. L. Vasiliev, Yu. E. Kalinin, A. S. Bugaev, V. V. Tugushev, and A. B. Granovsky, J. Magn. Magn. Mater. **459**, 197 (2018).
5. В. В. Рыльков, А. Б. Дровосеков, А. Н. Талденков, С. Н. Николаев, О. Г. Удалов, А. В. Емельянов, А. В. Ситников, К. Ю. Черноглазов, В. А. Демин, О. А. Новодворский, А. С. Веденев, А. С. Бугаев, ЖЭТФ **155**, 127 (2019).
6. A. B. Drovosekov, N. M. Kreines, A. S. Barkalova, S. N. Nikolaev, V. V. Rylkov, and A. V. Sitnikov, J. Magn. Magn. Mater. **495**, 165875 (2020).
7. А. Б. Дровосеков, Н. М. Крейнес, А. С. Баркалова, С. Н. Николаев, А. В. Ситников, В. В. Рыльков, Письма в ЖЭТФ **112**, 88 (2020).
8. А. Б. Дровосеков, Н. М. Крейнес, О. А. Ковалев, А. В. Ситников, С. Н. Николаев, В. В. Рыльков, ЖЭТФ **161**, 853 (2022).
9. T. Castner, Jr., G. S. Newell, W. C. Holton, and C. P. Slichter, J. Chem. Phys. **32**, 668 (1960).
10. H. H. Wickman, M. P. Klein, and D. A. Shirley, J. Chem. Phys. **42**, 2113 (1965).
11. Я. Г. Клява, ЭПР-спектроскопия неупорядоченных твердых тел, Зинатне, Рига (1988).
12. I. Ardelean, M. Peteanu, V. Simon, S. Filip, F. Ciordas, and I. Todor, J. Magn. Magn. Mater. **196–197**, 257 (1999).
13. V. N. Kondratyev and H. O. Lutz, Phys. Rev. Lett. **81**, 4508 (1998).
14. J. Faure-Vincent, C. Tiusan, C. Bellouard, E. Popova, M. Hehn, F. Montaigne, and A. Schuhl, Phys. Rev. Lett. **89**, 107206 (2002).
15. T. Katayama, S. Yuasa, J. Velev, M. Ye. Zhuravlev, S. S. Jaswal, and E. Y. Tsybal, Appl. Phys. Lett. **89**, 112503 (2006).
16. P. Bruno, Phys. Rev. B **52**, 411 (1995).
17. J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **150**, 13 (1995).
18. Ю. Е. Калинин, А. Н. Ремизов, А. В. Ситников, ФТТ **46**, 2076 (2004).
19. M. Ye. Zhuravlev, E. Y. Tsybal, and A. V. Vedyayev, Phys. Rev. Lett. **94**, 026806 (2005).

# ВЛИЯНИЕ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА МДП-СТРУКТУРЫ Fe/SiO<sub>2</sub>/n-Si НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Д. А. Смоляков<sup>а</sup>, М. В. Рауцкий<sup>а</sup>, И. А. Бондарев<sup>а\*</sup>, И. А. Яковлев<sup>а</sup>,

С. Г. Овчинников<sup>а,б</sup>, Н. В. Волков<sup>а</sup>, А. С. Тарасов<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Институт физики имени Л. В. Киренского, Красноярский научный центр, Сибирское отделение Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия

<sup>б</sup> Институт инженерной физики и радиоэлектроники, Сибирский федеральный университет  
660041, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 28 апреля 2022 г.,  
после переработки 23 мая 2022 г.  
Принята к публикации 23 мая 2022 г.

Были проведены исследования транспортных свойств МДП-структуры Fe/SiO<sub>2</sub>/n-Si в виде диода Шоттки на переменном токе в магнитных полях до 9 Тл. Обнаруженный сдвиг максимумов на температурных зависимостях действительной части импеданса в магнитном поле, сопровождаемый эффектом магнитоимпеданса (МИ), происходит только при определенной ориентации поля относительно плоскости образца. Выявлено, что МИ связан с перезарядкой примесных состояний. Были рассчитаны энергии  $E_S$  примесных состояний в магнитном поле, а также в его отсутствии. Энергия примесных уровней нелинейно зависит от магнитного поля и может быть качественно описана в рамках теории гигантского эффекта Зеемана в разбавленных магнитных полупроводниках. Нельзя также исключать вклад других механизмов воздействия магнитного поля на транспорт в МДП-структурах на переменном токе и, в частности, на перезарядку примесных состояний, что требует дальнейшего исследования. Полученные результаты могут обеспечить более глубокое понимание природы магниторезистивных эффектов в полупроводниковых материалах и использоваться при разработке и создании новых устройств магнитоэлектроники.

DOI: 10.31857/S0044451022090176

EDN: ELVNVZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Структуры металл—диэлектрик—полупроводник (МДП) являются важным компонентом современной электроники. Они широко используются в полупроводниковой технологии и находят многочисленные применения в электронике [1], оптоэлектронике [2] и биоэлектронике [3]. МДП-структуры лежат в основе диодов [4], которые в настоящее время получили дальнейшее развитие в новый тип туннельных диодов, обладающих меньшим током обратного смещения и более высоким переходным током [5]. Изготовление полевых тран-

зисторов также связано с МДП-структурами [6]. На современном этапе развития технологии производства предлагаются различные решения для улучшения характеристик устройств на основе МДП, например, транзисторы с высокой подвижностью электронов с двойными изоляторами для уменьшения тока утечки на затворе, улучшения выходных и силовых характеристик [7]. Создание наноструктур расширило прикладной потенциал полупроводниковых приборов. Появилась возможность использовать нанопроволочные устройства для реализации квантовых и спин-зависимых транспортных эффектов в полупроводниковых приборах [8] и при изготовлении биосенсоров [9].

Гибридные структуры продолжают привлекать внимание исследователей в связи с широким спектром их применения для решения современных задач, в том числе энергетики [10]. Важным

\* E-mail: bia@iph.krasn.ru

направлением в этой области является изучение транспорта электронов и индуцированных магнитным полем эффектов, например, магнито-сопротивления (МС) [11, 12] и магнитоимпеданса (МИ) [13]. Системы с гигантским магнитоимпедансом (ГМИ) представляют значительный научный интерес, обусловленный существенным потенциалом для применения в магнитных сенсорах и других устройствах [14]. Кремний в настоящее время является наиболее широко используемым материалом для аналоговых и информационных схем и систем на кристалле. В МДП-структурах на основе кремния наблюдаются различные эффекты МС, например, 35-процентный отрицательный эффект МС в диоде Шоттки (Co<sub>2</sub>FeAl)/p-Si, обусловленный спин-зависимым транспортом в режиме обратного смещения [15] или связанный с кремнием эффект МС, описываемый слабой локализацией и другими механизмами квантового транспорта в Si, легированном Sb и облученном Xe<sup>+</sup> [16], и поликристаллическом кремнии-на-изоляторе (КНИ) [17].

Ранее мы сообщали об интригующих транспортных и магнитотранспортных свойствах структур металл/SiO<sub>2</sub>/Si [18]. Мы обнаружили влияние магнитного поля на структуры подобного типа и продемонстрировали возможность управления их сопротивлением с помощью напряжения смещения. Исследования показали, что возникновение МИ-эффекта нельзя объяснить ферромагнитным состоянием металлической пленки [19] и что эффект возникает независимо от типа и толщины изолятора в конструкции диодов Шоттки. Также мы наблюдали аналогичный эффект в структурах (КНИ) и установили, что величина эффекта в этих образцах выше [20]. На основании полученных результатов мы предположили, что это явление возникает из-за воздействия магнитного поля на зонную структуру диодов Шоттки [21]. На данный момент вопрос об изменении эффекта МИ при изменении величины и направления магнитного поля остается без ответа. Поскольку комплексные исследования в этой области отсутствуют, наши исследования могут помочь расширить понимание природы данного явления.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения эксперимента были изготовлены МДП-структуры Fe/SiO<sub>2</sub>/n-Si и устройство в виде диода Шоттки на их основе. Поликристал-

лическая пленка Fe была нанесена на верхнюю часть легированной фосфором кремниевой пластины (100) с удельным сопротивлением 7.5 Ом·см ( $n \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ) с использованием термического испарения. Подложки были очищены химическим методом, а затем помещены в ростовую камеру [22]. После этого подложки отжигались в условиях сверхвысокого вакуума (остаточное давление  $10^{-8}$  Па) при температуре 400 °С в течение 30 мин для удаления органических загрязнений с поверхности кремния. Подготовленная структура представляла собой подложку n-Si толщиной 350 мкм, слой оксида (SiO<sub>2</sub>) толщиной 2 нм и пленку железа толщиной 12 нм. На рис. 1 показано поперечное сечение просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) синтезированной структуры. Видно, что все структурные слои достаточно ровные, с четкими границами, без взаимной диффузии.

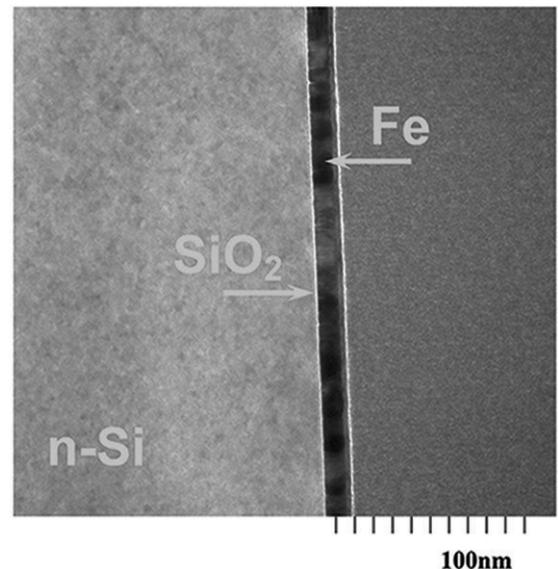


Рис. 1. ПЭМ изображение поперечного сечения интерфейсов структуры Fe/SiO<sub>2</sub>/n-Si

На основе полученной структуры был изготовлен диод Шоттки размером 3 × 3 мм<sup>2</sup>. Измерения импеданса структуры осуществлялись двухзондовым методом. На пленке Fe и подложке n-Si были сформированы омические контакты с использованием эпоксидного клея на основе серебра. Площадь контактных площадок составляла 1 мм<sup>2</sup>. Схема устройства представлена на вставке к рис. 2.

Для измерения транспортных свойств на постоянном токе использовался двухканальный источник-коммер Keithley 2634b. ВАХ МДП-структуры (рис. 2) имеют выпрямляющий характер, что свиде-

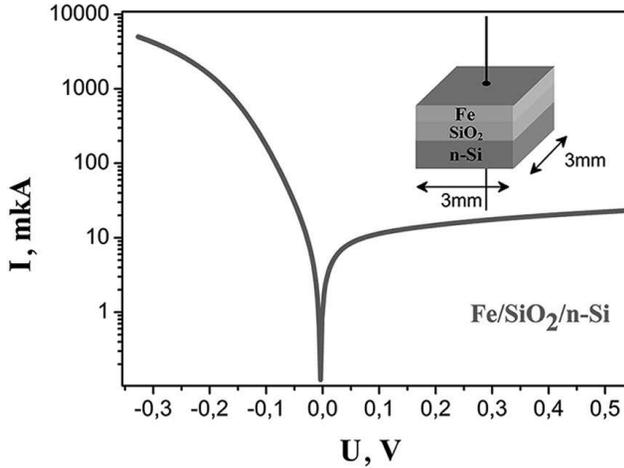


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики МДП-структуры. Вставка: схематичное изображение устройства

тельствует о формировании в кремнии области пространственного заряда и наличии барьера Шоттки на границе раздела. Транспортные и магнитотранспортные свойства образцов исследовались с помощью установки для измерения физических свойств Quantum Design (PPMS-9). Измерения проводились в диапазоне температур от 5 до 300 К во внешних магнитных полях до 9 Тл. Направление магнитного поля  $H$  менялось относительно плоскости образца и направления переменного тока. Измерения действительной и мнимой частей импеданса одновременно проводились на LCR-метре Agilent E4980. Частота переменного тока варьировалась в пределах 20 Гц–2 МГц.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

При исследовании температурных зависимостей действительной части импеданса  $Z = R + iX$  на переменном токе был обнаружен пик на кривой  $R(T)$  ниже 50 К (рис. 3). Под действием магнитного поля  $H$  данный пик сдвигается в область более высоких температур. Сдвигка составляет около 2 К при магнитном поле 1 Тл. Подобные особенности импеданса хорошо известны из спектроскопии адмиттанса, основанной на измерениях действительной части адмиттанса на частотах и температурах, обеспечивающих скорость эмиссии носителей с ловушек сравнимую с частотой измерений [23].

Пики на кривой  $R(T)$  можно объяснить наличием примесных состояний и их участием в эмиссии/захвате носителей. Когда при определенной температуре уровень Ферми  $E_F$  начинает пересе-

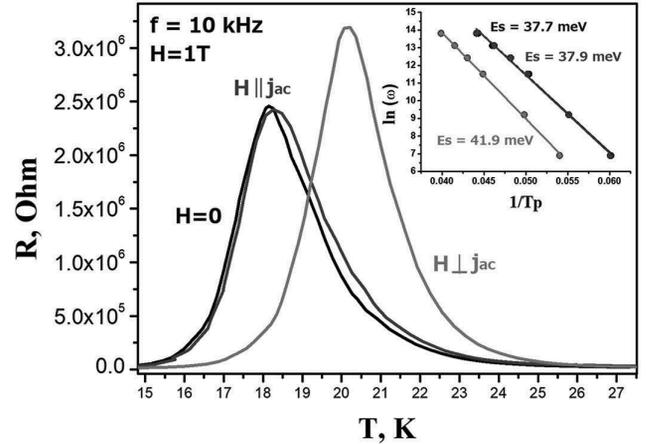


Рис. 3. Температурная зависимость действительной части импеданса  $R(T)$  без поля и в поле  $H = 1$  Тл в двух направлениях. Вставка: зависимость  $\ln(\omega)$  от обратной пиковой температуры для определения энергетических уровней примесных состояний

кать уровни энергии поверхностных состояний  $E_S$ , переменное смещение  $V_{ac}$  модулирует положение  $E_S$  относительно  $E_F$ , инициируя захват/эмиссию электронов с поверхностных центров в зону проводимости (рис. 4).

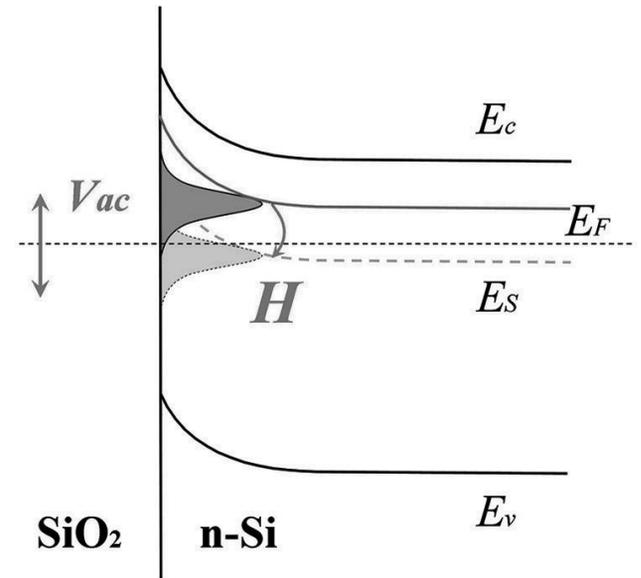


Рис. 4. Схема зонной диаграммы образца.  $E_F$  — уровень Ферми,  $E_S$  — примесные уровни,  $H$  — магнитное поле,  $V_{ac}$  — приложенное переменное напряжение

Максимум на  $R(T)$  должен соответствовать  $\omega\langle\tau_0\rangle = 1$ , где  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота  $V_{ac}$ , а  $\langle\tau_0\rangle$  — среднее время релаксации, определяющее зарядку/разрядку интерфейсного состояния.

Изменение положения пика в магнитном поле возникает только тогда, когда поле направлено параллельно плоскости слоев образца и перпендикулярно направлению переменного тока ( $H \perp j_{ac}$ ). В противном случае данный эффект не возникает.

Для оценки энергии примесных центров в нулевом и ненулевом магнитном поле, использовалось выражение [24]

$$\ln(\omega) = \ln\left(\frac{1}{\langle\tau_0\rangle}\right) - \frac{E_s}{k_B T_p}, \quad (1)$$

где  $T_p$  — положение максимума на  $R(T)$  при постоянной  $\omega$ ,  $\langle\tau_0\rangle$  — среднее время релаксации,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Величина энергии оценивалась с помощью линейной аппроксимации экспериментальной зависимости  $\ln(\omega)$  от  $1/T_p$  и извлечения наклона линии аппроксимации (вставка на рис. 3).

Полученные энергии примесных центров составляют  $E_S(0) = 37.7$  мэВ для нулевого магнитного поля и  $E_S(H) = 41.9$  мэВ для  $H = 1$  Тл. Эти значения хорошо согласуются с энергией примеси фосфора для n-подложки Si [25]. Энергетические уровни примесных состояний смещаются на 4 мэВ под действием магнитного поля. Для сравнения зеемановское расщепление этих уровней составляет не более 0.06 мэВ при  $S = 1/2$  и  $H = 1$  Тл. Энергия Зеемана оценивалась по формуле

$$\Delta E_Z = g\mu_B H J, \quad (2)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $g$  —  $g$ -фактор Ланде,  $H$  — магнитное поле,  $J$  — полный угловой момент электрона.

Для выяснения природы этого явления магнитное поле в эксперименте было увеличено до 9 Тл. Как видно на рис. 5, смещение пика на  $R(T)$  в поле, ориентированном перпендикулярно току  $j_{ac}$ , составляет уже 5 К. Однако можно заметить, что и при другой ориентации поля пик также смещается на 1 К, чего не наблюдалось в более слабых магнитных полях.

Оценивая энергии примесных центров, получаем  $E_S(0) = 39.5$  мэВ в нулевом магнитном поле и  $E_S(H) = 45.6$  мэВ в магнитном поле 9 Тл. Изменение энергии составляет около 6 мэВ. Однако и в этом случае в поле, параллельном току, также имеет место сдвиг на 5 мэВ до энергии  $E_S(H) = 44.3$  мэВ (рис. 6). В то же время следует отметить, что значения  $\langle\tau_0\rangle$ , характеризующие зарядку/разрядку примесного состояния на переменном токе, также различаются для этих двух направлений: разница между  $\langle\tau_0\rangle_{par}$  и  $\langle\tau_0\rangle_{perp}$  составляет около 10%. Другими

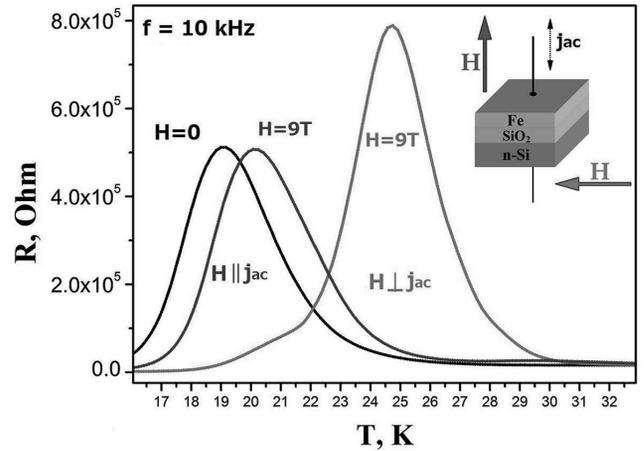


Рис. 5. Температурная зависимость действительной части импеданса  $R(T)$  без поля и в поле  $H = 9$  Тл в двух направлениях. Вставка: схематичное изображение устройства с указанием направлений магнитного поля

словами, хотя магнитное поле смещает энергетический уровень почти одинаково, эффект, очевидно, анизотропный, независимо от ориентации магнитного поля относительно  $j_{ac}$ .

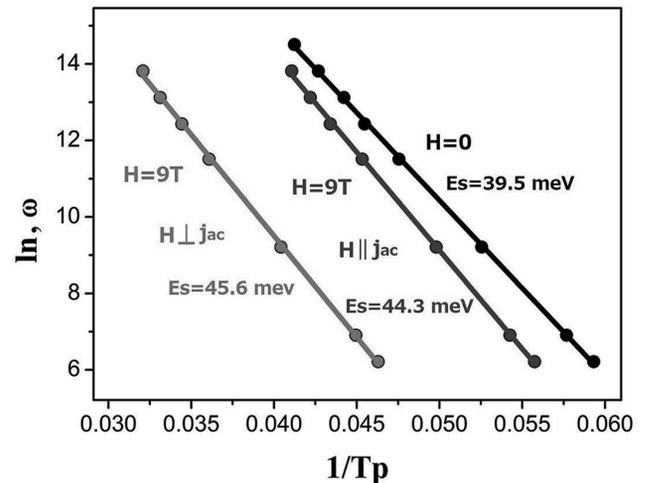


Рис. 6. Зависимость  $\ln(\omega)$  от обратной температуры пика  $1/T_p$  для определения энергетических уровней примесных состояний в отсутствие поля и в поле  $H = 9$  Тл в двух направлениях

Для ориентации поля  $H \perp j_{ac}$  при температуре около 20 К наблюдается небольшой перегиб, свидетельствующий о наличии другого пика. Моделируя эту особенность разложением на составляющие, мы видим, что наиболее точной является модель трех пиков, скрытых в одном (рис. 7). Энергии полученных особенностей достаточно близки по значениям ( $E_{S1} = 45.8$  мэВ,  $E_{S2} = 46$  мэВ, и  $E_{S3} = 46.8$  мэВ).

Это можно объяснить тем, что в интерфейсе могут существовать различные локализованные состояния с различной энергией и концентрацией. Небольшая разница между энергиями уровней может свидетельствовать о том, что они имеют одинаковую природу, но немного различаются локальным окружением. Наиболее интенсивный пик соответствует состояниям с максимальной концентрацией. Эти состояния, вероятно, наиболее чувствительны к магнитному полю. Поэтому в магнитном поле 9 Т мы можем обнаружить два дополнительных энергетических состояния в запрещенной зоне. Другой интерпретацией возникновения нескольких уровней в магнитном поле является зеемановское расщепление и/или расщепление на нижнюю и верхнюю хаббардовские подзоны [26–29].

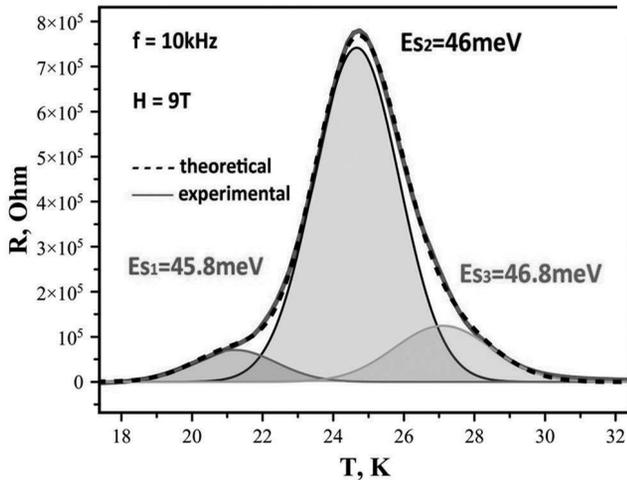


Рис. 7. Моделирование пиков  $R(T)$  в магнитном поле 9 Тл при частоте переменного тока 10 кГц

Из представленных выше результатов явно следует, что зависимость  $E_S(H)$  является нелинейной, поэтому для определения её функциональной зависимости были выполнены измерения  $R(T)$  в промежуточных магнитных полях в диапазоне от 1 до 9 Тл. Рассчитанные по формуле (1) энергии примесных центров в зависимости от магнитного поля представлены на рис. 8. Если оценить зеемановское расщепление уровней для  $S = 1/2$ , то в поле 9 Тл оно составит всего 0.54 мэВ, что на порядок меньше наблюдаемых 6 мэВ. Кроме того, эффект Зеемана линейно зависит от поля (2) и, следовательно, не может объяснить полученный результат. Другой возможный механизм — увеличение энергии примесного уровня в полупроводнике за счет сжатия волновых функций в магнитном поле [30]. Это предпола-

гает пропорциональность  $E_S$  к  $\sqrt{H}$ , что также не соответствует экспериментальной кривой (рис. 8).

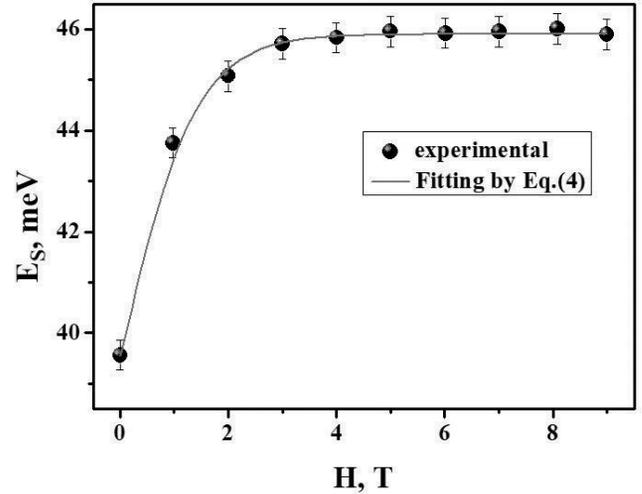


Рис. 8. Полевая зависимость энергии примесных уровней  $E_S(H)$  в диапазоне от нуля до 9 Тл и рассчитанная по формуле (4)

Чтобы объяснить влияние магнитного поля на  $E_S$  обратимся к теории разбавленных магнитных полупроводников (РМП) [31]. В нашем случае при понижении температуры электроны проводимости «вымерзают» и образуют парамагнитные центры с  $S = 1/2$ , локализуясь на атомах фтора. Тогда в нашем случае действительно можно представить кремний как РМП. В РМП имеются две спиновые системы: электронов проводимости и магнитных примесей, и эти подсистемы взаимодействуют друг с другом. Природа обменного взаимодействия в РМП может быть различной, и её детальное обсуждение выходит за рамки данной статьи. Мы можем лишь предположить, что из-за низкой концентрации магнитных примесей, которая меньше или равна концентрации атомов фосфора (порядка  $10^{15}$  см<sup>-3</sup>), обмен наиболее вероятно осуществляется через электроны проводимости [32]. Тогда обменную энергию в магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ , можно представить в виде  $E_{exch} \sim \langle S_z \rangle s_z$ , где  $s_z$  — проекция спина электрона проводимости на ось  $z$ , а  $\langle S_z \rangle$  — средняя проекция спина для вымерзших донорных уровней, которая определяется уравнением

$$\langle S_z \rangle = -SB_S \frac{g\mu_B SH}{k_B T}. \quad (3)$$

Здесь  $B_S$  — функция Бриллюэна, которая описывает статистику заполнения уровней иона фосфора

в магнитном поле. Несмотря на то, что природа обменного взаимодействия остается неясной, мы можем предложить качественное описание  $E_S(H)$  как сумму энергий в отсутствие внешнего магнитного поля и обменной энергии, которая будет иметь вид

$$E_S(H) = E_S^0 + E_S^H B_S A H, \quad (4)$$

где  $A = g^* \mu_B S / (k_B T)$ ,  $g^*$  — эффективный  $g$ -фактор,  $H$  — магнитное поле,  $T$  — абсолютная температура,  $E_S^0$  — энергия примесного уровня в нулевом магнитном поле, а  $E_S^H$  — подгоночный параметр, имеющий размерность энергии. На рис. 8 представлена теоретическая зависимость  $E_S(H)$ , полученная с использованием уравнения (4) со следующими параметрами:  $S = 1/2$ ,  $E_S^0 = 39.5$  мэВ,  $E_S^H = 6.4$  мэВ,  $A = 0.72$ . Воспользовавшись выражением для параметра  $A$ , мы можем определить эффективный  $g$ -фактор, который при  $T = 20$  К составил около 10. В целом полученный результат напоминает эффект гигантского зеемановского расщепления в РМП, с той лишь разницей, что у нас в роли магнитной примеси выступает «вымерзший» донор с  $S = 1/2$ , в то время как в литературе, как правило, обсуждаются ионы с валентными  $d$ -электронами, которые позволяют реализовать  $sp-d$ -обмен, чаще всего Mn [31]. В принципе, расщепление уровней в следствие гигантского эффекта Зеемана может достигать 100 мэВ [33, 34], а эффективный  $g$ -фактор может превышать 100 [35, 36], однако такие рекордные значения достигаются в материалах с высокой концентрацией магнитных примесей (более 0.1 %) и обусловлены  $sp-d$ -обменным взаимодействием. И несмотря на то, что уравнение (4) хорошо описывает экспериментальную зависимость (рис. 8), остается открытым вопрос, с чем связано столь большое расщепление.

Следует учитывать, что в нашей структуре магнитные примесные центры располагаются в области пространственного заряда в узкой приграничной полосе, где уровень ферми пересекает  $E_S^0$ . Это может приводить к квантовым размерным эффектам, оказывающим существенное влияние на электронные состояния. Например, в работе [37] показано, что в полупроводниковых квантовых ямах при точном учете нескольких близко лежащих уровней или подзон возможна нелинейная зависимость расщепления Зеемана от магнитного поля. Кроме того, барьер Шоттки играет немаловажную роль. Например, его наличие может приводить к анизотропии эффективного  $g$ -фактора, обусловленного электрическим полем на интерфейсе Si/SiO<sub>2</sub> [38], что может объяснять анизотропию наблюдаемого нами эффекта.

Таким образом, учитывая отсутствие явной зависимости эффекта от магнитного состояния металла контакта [19], можно считать электрическое поле в ОПЗ одной из причин наблюдаемых особенностей влияния магнитного поля на импеданс в МДП-структурах. Тем не менее, нельзя исключить существование других механизмов влияния магнитного поля на транспорт в МДП-структурах и, в частности, на перезарядку примесных состояний. Этот вопрос требует дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

#### 4. ВЫВОДЫ

Исследован транспорт в МДП-структурах на переменном токе в сильных магнитных полях. Обнаружено влияние магнитного поля на энергию примесных состояний  $E_S$ . Было выявлено, что пики зависимости действительной части импеданса от температуры смещаются во внешнем магнитном поле. Однако этот сдвиг наблюдается только при определенном направлении магнитного поля. Под действием сильных магнитных полей сдвиг происходит уже при обеих ориентациях поля, хотя его величины существенно различаются. Эта анизотропия наблюдаемого эффекта может быть связана с наличием градиентного электрического поля барьера Шоттки на границе кремния. Пик имеет несколько особенностей, связанных с существованием различных локализованных состояний с различной энергией и концентрацией. Рассчитаны энергии примесных состояний в нулевом и ненулевом магнитных полях. При увеличении напряженности магнитного поля энергия возрастает. Как оказалось, энергия примесных уровней меняется нелинейно при увеличении магнитного поля, а зависимость  $E_S(H)$  может быть качественно описана в рамках теории гигантского эффекта Зеемана в разбавленных магнитных полупроводниках. Однако остается открытым вопрос, с чем связано столь большое расщепление уровней энергии, составляющее 6.4 мэВ в поле 9 Тл. Более того, наличие электрического поля в ОПЗ МДП-структуры Fe/SiO<sub>2</sub>/n-Si может предполагать реализацию гигантского анизотропного зеемановского расщепления. Тем не менее на данном этапе исследований трудно делать окончательные выводы и исключать другие механизмы влияния магнитного поля на перезарядку примесных состояний в МДП-структурах. Полученные результаты могут расширить понимание транспорта носителей заряда в полупроводниковых структурах в магнит-

ном поле и будут способствовать созданию перспективных магнитоэлектронных устройств.

**Благодарности.** Авторы благодарят центр коллективного пользования Красноярского научного центра СО РАН за проведение электронно-микроскопических экспериментов и возможность использования системы измерения физических свойств PRMS. Авторы выражают благодарность Д. А. Балаеву за полезное обсуждение экспериментальных результатов, а также М. Н. Волочаеву за предоставление ПЭМ-изображений.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности (проект № 20-42-243007).

## ЛИТЕРАТУРА

- G. Zhou, B. Wu, X. Liu et al., *Phys. Chem. Chem. Phys.* **18**, 6509 (2016).
- A. Liu, R. Jones, L. Liao et al., *Nature* **427**, 615 (2004).
- R. Chand, D. Han, S. Neethirajan et al., *Sens. Actuators B Chem.* **248**, 973 (2017).
- T. Manago and H. Akinaga, *Appl. Phys. Lett.* **81**, 694 (2002).
- J. Y. Lin and J. G. Hwu, *IEEE Transactions on Electron Devices* **68**, 4189 (2021).
- S. Sasa, M. Ozaki, K. Koike et al., *Appl. Phys. Lett.* **89**, 53502 (2006).
- Z. Zhen, Q. Wang, Y. Qin et al., *Phys. Status Sol. (a)* **219**, 2200010 (2022).
- R. Yan, D. Gargas, P. Yang and P., *Nat. Photonics* **3**, 569–576 (2009).
- Y. D. Ivanov, T. O. Pleshakova, K. A. Malsagova et al., *Sens. Actuators B Chem.* **261**, 566 (2018).
- M. Benhaliba, *Phys. B* **578**, 411782 (2020).
- H. C. Card and E. H. Rhoderick, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **4**, 1589 (1971).
- A. Wittmann, C. H. Möller, O. Kronenwerth et al., *J. Phys. Condens. Matter* **16**, 5645 (2004).
- S. S. Wang, Y. Zhang, J. Y. Jiao et al., *J. Phys. D: Appl. Phys.* **51**, 455001 (2018).
- M. H. Phan and H. X. Peng, *Prog. Mater. Sci* **53**, 323 (2008).
- A. Kumar and P. C. Srivastava, *J. Electron. Mater.* **43**, 381–388 (2014).
- A. K. Fedotov, U. E. Gumiennik, V. A. Skuratov et al., *Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostructures* **138**, 115047 (2022).
- A. Druzhinin, I. Ostrovskii, I. Kogut, et al., *Mater. Sci. Semicond. Process.* **31**, 2619 (2015).
- N. V. Volkov, A. S. Tarasov, D. A. Smolyakov et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **383**, 69 (2015).
- D. A. Smolyakov, A. S. Tarasov, I. A. Yakovlev et al., *Thin Solid Films* **671**, 18 (2019).
- D. A. Smolyakov, A. S. Tarasov, I. A. Yakovlev et al., *Semiconductors* **53**, 1964 (2019).
- D. A. Smolyakov, A. S. Tarasov, M. A. Bondarev et al., *Mater. Sci. Semicond.* **126**, 105663 (2021).
- A. Ishizaka and Y. Shiraki, *J. Electrochem. Soc.* **133**, 666 (1986).
- A. R. Peaker, V. P. Markevich and J. Coutinho, *J. Appl. Phys.* **123**, 161559 (2018).
- D. L. Losee, *J. Appl. Phys.* **46**, 2204 (1975).
- S. M. Sze and K. Ng. Kwok, *Physics of Semiconductor Devices*, John Wiley & Sons (2021).
- E. Prati, K. Kumagai and M. Hori, *Sci. Rep.* **6**, 19704 (2016).
- T. Ferrus, R. George, C. H. Barnes et al., *Phys. B: Condens. Matter* **400**, 218 (2007).
- F. F. Fang and A. B. Fowler, *Phys. Rev.* **169**, 619 (1967).
- A. Hartstein and A. B. Fowler, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1435 (1975).
- B. I. Shklovskii and A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg GmbH (2013).
- T. Dietl, and H. Ohno, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 187 (2014).
- T. Dietl, A. Haury, and Y. M. d'Aubigné, *Phys. Rev. B* **55**, 3347 (1997).
- C. Benoît à la Guillaume, D. Scalbert, T. Dietl, *Phys. Rev. B* **46**, 9853 (1992).
- R. L. Aggarwal, S. N. Jasperson, P. Becla et al., *Phys. Rev. B* **34**, 5894 (1986).

- 35.** C. Li, S. C. Hsu, J. X. Lin, et al., *J. Am. Chem. Soc.* **142**, 20616 (2020).
- 36.** J. Jiang, L. A. T. Nguyen, T. D. Nguyen, et al. *Phys. Rev. B* **103**, 014441 (2021).
- 37.** M. V. Durnev, M. M. Glazov, and E. L. Ivchenko, *Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostructures* **44**, 797 (2012).
- 38.** R. Ruskov, M. Veldhorst, A. S. Dzurak et al., *Phys. Rev. B* **427**, 245424 (2018).

# ИНВЕРСНАЯ ЗАСЕЛЕННОСТЬ УРОВНЕЙ Ar VIII В ПЛАЗМЕ БЫСТРОГО КОНИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

*П. С. Анциферов\**, *Л. А. Дорохин*, *К. Н. Кошелев*

*Институт спектроскопии Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 марта 2022 г.,  
после переработки 29 марта 2022 г.  
Принята к публикации 5 мая 2022 г.

Быстрый разряд (скорость нарастания тока  $\sim 10^{12}$  А/с) через диэлектрическую полость, заполненную рабочим газом, приводит к образованию ударной волны, которая сходится от внутренней стенки разрядной полости к оси разряда. Специфика кумуляции такой ударной волны в конической полости обеспечивает пространственный контакт горячей плазмы и холодного рабочего газа (аргона в настоящей работе), что приводит к эффективной перезарядке ионов Ar IX, возникающих в горячей области, на нейтральных атомах аргона. В работе демонстрируется наличие стимулированного излучения на переходах  $3p-9d$  в Ar VIII (длина волны 10.78 нм). Такой вывод делается на основе изучения зависимости интенсивности линии от числа последовательно соединенных конических разрядных полостей. Результат может представлять интерес для разработки новых источников EUV-излучения.

DOI: 10.31857/S0044451022090188

EDN: EMDOTT

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Быстрые разряды в цилиндрической полости (капиллярные разряды) привлекли к себе внимание в связи с задачей создания лазеров в мягком рентгеновском диапазоне [1–4]. В условиях нарастания разрядного тока со скоростью порядка  $10^{12}$  А/с происходит скинирование разрядного тока на внутренней стенке цилиндрической разрядной полости и образование сходящейся к оси разряда ударной волне [5]. В возникающей в результате кумуляции неравновесной плазме появляется инверсная заселенность перехода  $3s-3p$  в неоподобном аргоне за счет столкновительных переходов из основного состояния. В процессе движения фронта ударной волны разрядный ток «отстает» от нее и в течение некоторого времени остается сконцентрированным у внутренней стенки капилляра вследствие скин-эффекта [5]. Это приводит к отсутствию магнитогидродинамических неустойчивостей в возникающей горячей плазме, что дает возможность получить практически идеальный столбик плазмы диа-

метром 0.2 мм и длиной до 200 мм [3, 4]. Пространственное распределение горячей плазмы, возникающей в момент кумуляции сходящейся к оси разряда ударной волне, определяется геометрией внутренней стенки разрядной полости. Так, используя периодически профилированную внутреннюю стенку цилиндрической поверхности, можно получить плазму с пространственной модуляцией плотности вдоль оси разряда [6], а в случае быстрого разряда в полости, имеющей форму сферического сегмента, можно получить сферическую плазму [7].

Особенностью генерации плазмы в конической разрядной полости является видимое движение вдоль оси разряда точки кумуляции ударной волны, см. рис. 1. В работах [8, 9] это явление было исследовано с использованием аргона при давлении 80 Па в качестве рабочего газа. В EUV-спектрах (Extreme Ultra Violet) излучения такой плазмы наблюдается линия с длиной волны 10.78 нм, интенсивность которой сравнима с полной интенсивностью спектра в EUV-области, см. рис. 2 (спектрограмма рис. 2 получена в представляемых экспериментах, см. ниже). Линия 10.78 нм возникает в промежутке времени  $\sim 20-70$  нс от момента начала разряда. С помощью пространственно разрешенных спектров было показано, что эта спектральная линия излучается компактной

\* E-mail: ants@isan.troitsk.ru

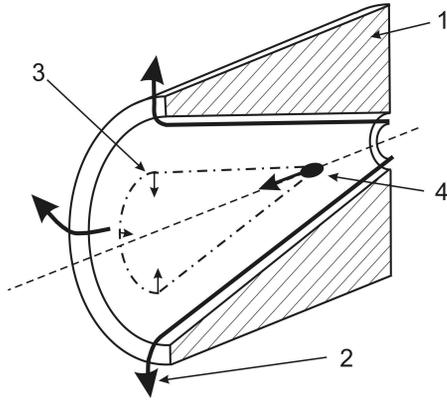


Рис. 1. Быстрый конический разряд: 1 — коническая разрядная полость, 2 — разрядный ток, 3 — фронт ударной волны, 4 — горячая плазма в точке кумуляции ударной волны

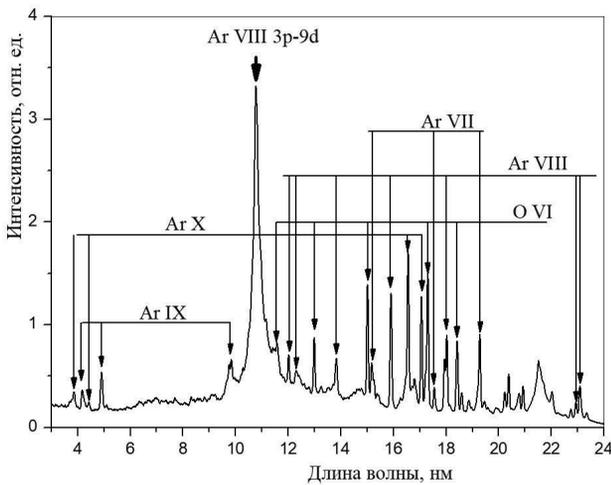


Рис. 2. EUV-спектрограмма быстрого конического разряда

областью горячей плазмы [9]. Наблюдаемая длина волны близка к длине волны перехода  $3p-9d$  в ионе Ar VIII. В качестве механизма заселения

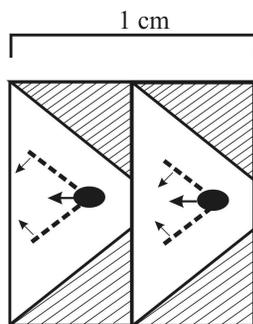


Рис. 3. Чертеж разрядной полости с двумя коническими элементами

верхнего уровня была предложена перезарядка неоподобных ионов Ar IX, возникающих в горячей области, на нейтральных возбужденных атомах аргона [8, 9]. Непрерывное во времени перемещение горячей области вдоль оси разряда может создать условия постоянного контакта горячей плазмы с холодным рабочим газом, что вызовет эффективную перезарядку. В возникающей таким образом неравновесной плазме может возникнуть инверсная заселенность уровня  $9d$  иона Ar VIII относительно уровня  $3p$ . В настоящей работе делается попытка обнаружения такой инверсной заселенности. Основная идея описываемых экспериментов заключается в создании разрядной полости в виде нескольких последовательно соединенных конических элементов и в изучении зависимости энергии в линии 10.78 нм от их количества. На рис. 3 приведен чертеж такой разрядной полости, состоящей из двух последовательно соединенных элементов. В случае наличия инверсной заселенности можно надеяться увидеть нелинейность зависимости энергии линии от числа конических элементов.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Разрядный контур построен на основе индуктивного накопителя с полупроводниковым размыкателем [10]. Разрядная полость заполнялась аргоном при давлении 80 Па. Для устойчивой генерации ударной волны требуется кондиционирование разрядной полости посредством нескольких десятков разрядов с ксеноном в качестве рабочего газа при том же давлении. Такая процедура очищает внутреннюю стенку разрядной полости от адсорбированного из атмосферы вещества. Разрядная полость отделена от диагностического объема электромеханическим затвором с временем открытия 3–10 мс. Типичная кривая разрядного тока приведена на рис. 4. Скорость нарастания разрядного тока составляла величину приблизительно  $0.5 \cdot 10^{12}$  А/с.

Для получения EUV-спектров использовался QFF (quasi flat field) спектрометр скользящего падения [11]. Эффект плоского поля (поверхность фокусировки нормальна к лучу зрения) здесь достигается на обычной сферической дифракционной решетке с эквидистантными штрихами путем смещения спектральной щели внутрь окружности Роуланда. Геометрические параметры спектрометра: радиус кривизны решетки  $R = 1$  м, плотность штрихов  $1/d = 1200$  штр./мм, входной угол скольжения  $4^\circ$ , расстояние между входной щелью и цен-

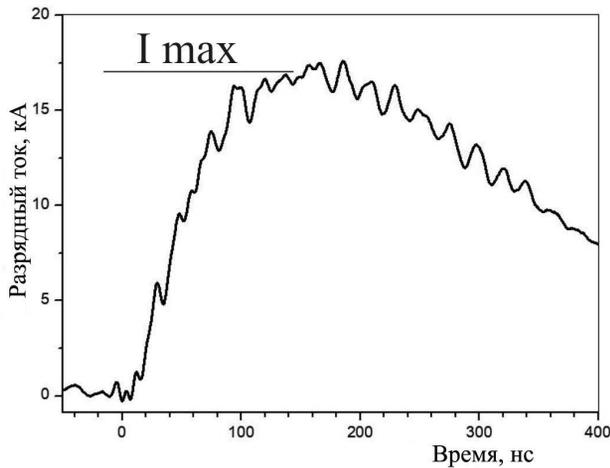


Рис. 4. Пример кривой разрядного тока

тром решетки 33 мм, расстояние от центра решетки до плоскости регистрации 320 мм. Спектрограмма, приведенная на рис. 2, получена с шириной входной щели 15 мкм. В качестве детектора излучения использовался регистратор на основе микроканальной пластины (МКП). Спектрограмма получена с экспозицией 20 нс в момент времени 50 нс после начала разрядного тока. Спектральные линии идентифицированы согласно данным [12]. Самая интенсивная линия на спектрограмме интерпретируется как результат перезарядки иона  $Ag IX$ , приводящей к заселению уровня  $9d$  в ионе  $Ag VIII$ . Временной масштаб свечения линии  $3p-9d$   $Ag VIII$  составляет величину порядка нескольких десятков наносекунд, что совпадает со временем существования горячей области при кумуляции конической ударной волны [8, 9].

Энергия излучения перезарядочной спектральной линии измерялась с помощью фотодиода SXUV 100 в режиме интегрирования сигнала по времени. Перед чувствительной площадкой фотодиода была установлена выходная щелевая диафрагма для выделения излучения изучаемой линии. Эффективная ширина диафрагмы, пересчитанная в длины волн, составляла 0.15 нм. Входная щель спектрометра была увеличена с 15 мкм до 50 мкм для увеличения уровня сигнала.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 5 показаны зависимости измеренного сигнала с фотодиода SXUV 100 от числа конических элементов разрядной полости (на рис. 3 показан вариант двух конических элементов). Два графика со-

ответствуют значениям максимального разрядного тока  $I_{max} = 20$  кА (график *a*) и  $I_{max} = 16$  кА (график *b*). Максимум разрядного тока  $I_{max}$  (см. рис. 4) достигается уже после того, как произошло излучение линии 10.78 нм. Значение интервала ошибки на рис. 5 соответствует уровню  $3\sigma$  статистического разброса измерений. Видно примерно 30-процентное увеличение измеренного сигнала для случая шестиэлементной рабочей полости по сравнению с экстраполированным линейным ростом сигнала, построенным на основании данных для двухэлементной разрядной полости. Эффект зависит от максимального разрядного тока, снижение  $I_{max}$  от 20 кА до 16 кА приводит к исчезновению нелинейного поведения интенсивности линии  $Ag VIII 3p-9d$ .

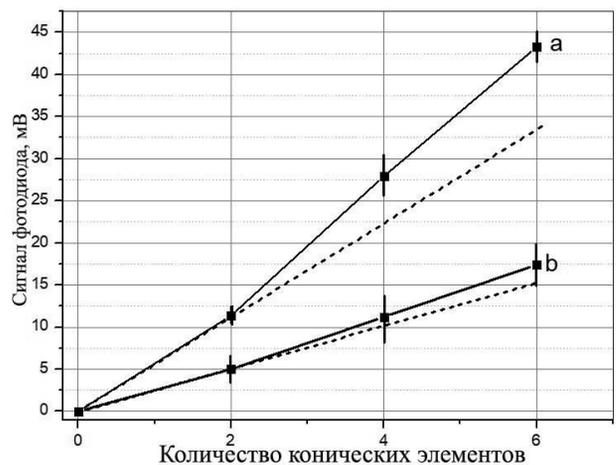


Рис. 5. Зависимости измеренной энергии излучения перехода  $3p-9d$   $Ag VIII$  от числа конических элементов разрядной полости:  $I_{max} = 20$  кА (*a*), 16 кА (*b*)

Можно сделать оценку полной энергии, излученной в рассматриваемой спектральной линии. Используя технические данные фотодиода SXUV 100, получаем, что уровень сигнала в 40 мВ (максимальная точка кривой *a* на рис. 5) соответствует энергии  $2.4 \cdot 10^{-9}$  Дж. Эффективный телесный угол регистрируемого излучения определяется спектральной щелью спектрометра и составляет величину  $1.2 \cdot 10^{-6}$  ср. Имея в виду, что нелинейная часть полной интенсивности невелика и составляет величину порядка 30 %, можно пренебречь угловой анизотропией излучения и получить оценку полной энергии линии  $Ag VIII 3p-9d$ , излученной в  $4\pi$  ср, как  $W = 2 \cdot 10^{-3}$  Дж. Реальное значение может быть в 2–3 раза больше, так как в приведенной оценке не учитывается эффективность решетки.

Для оценки величины коэффициента усиления необходима информация об эффективной длине среды. EUV-обскурограммы разрядной плазмы, полученные с временным разрешением 10 нс с использованием МКП-детектора [8, 9], дают верхнюю оценку размера горячей области вдоль оси разряда  $l \approx 2$  мм. В нашем случае разрядная полость содержала шесть конических сегментов и произведение  $kl$  оценивается как  $kl \approx 0.3$ . Отсюда вытекает оценка  $k \approx 0.3 \text{ см}^{-1}$ . Существенное влияние на величину  $k$  должна оказывать ширина линии, которая в нашем случае довольно большая и составляет величину  $\lambda/\delta\lambda \approx 50$ . Возможным механизмом уширения может быть перезарядка с переносом двух электронов [13]. При этом наблюдаемый профиль является результатом переналожения массива линий вида  $3pnl-9dnl$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложены результаты изучения горячей плазмы, возникающей в результате кумуляции конической ударной волны в быстром разряде. Благодаря эффективному движению точки кумуляции вдоль оси разряда, возникают условия для существования нестационарной заселенности уровней Ar VIII в плазме в течение нескольких десятков наносекунд. Пространственный контакт горячей плазмы в точке кумуляции и холодного рабочего газа (аргон 80 Па) приводит к перезарядке ионов Ar IX и возникновению инверсной заселенности между уровнями  $3p$  и  $9d$  иона Ar VIII. Такой вывод делается из наличия усиления на переходе  $3p-9d$  иона Ar VIII с коэффициентом  $k \approx 0.3 \text{ см}^{-1}$ . Возможное использование описываемого разряда в качестве источника EUV-излучения предполагает оптимизацию по величине разрядного тока, давлению рабочего газа и геометрическим параметрам разрядной полости (угол конуса, диаметр и длина).

**Благодарности.** Авторы благодарны В. М. Кривцуно за техническую помощь.

**Финансирование.** Работа была выполнена в рамках общего бюджета Института спектроскопии Российской академии наук.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B. R. Benware, C. H. Moreno, D. J. Burd, and J. J. Rocca, *Opt. Lett.* **22**, 796 (1997).
2. B. R. Benware, C. D. Macchietto, C. H. Moreno, and J. J. Rocca, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5804 (1998).
3. J. J. Rocca, *Rev. Sci. Instr.* **70**, 3788 (1999).
4. C. D. Macchietto, B. R. Benware, and J. J. Rocca, *Opt. Lett.* **24**, 1115 (1999).
5. Н. А. Боброва, С. В. Буланов, Т. Л. Разинкова, П. В. Сасоров, *Физика плазмы* **22**, 387 (1996).
6. P. S. Antsiferov, L. A. Dorokhin, K. N. Koshelev, and A. V. Nazarenko, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **37**, 2527 (2004).
7. P. S. Antsiferov and L. A. Dorokhin, *Phys. Plasmas* **21**, 042119 (2014).
8. P. S. Antsiferov, L. A. Dorokhin, and K. N. Koshelev, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **51**, 165601 (2018).
9. P. S. Antsiferov, L. A. Dorokhin, and K. N. Koshelev, *Phys. Rev. E* **100**, 023204 (2019).
10. P. S. Antsiferov, L. A. Dorokhin, Yu. V. Sidelnikov, and K. N. Koshelev, *J. Appl. Phys.* **105**, 103305 (2009).
11. P. S. Antsiferov, L. A. Dorokhin, and P. V. Krainov, *Rev. Sci. Instr.* **87**, 053106 (2016).
12. A. Kramida, Yu. Ralchenko, J. Reader, and NIST ASD Team (2013). *NIST Atomic Spectra Database* (ver. 5.1), online. Available: <http://physics.nist.gov/asd> [2013, October 24]. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD.
13. F. B. Rosmej, A. Ya. Faenov, T. A. Pikuz, A. I. Magunov, I. Yu. Skobelev, T. Auguste, P. D'Oliveira, S. Hulin, P. Monot, N. E. Andreev, M. V. Chegotov, and M. E. Veisman, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **32**, L107 (1999).

Главный редактор *А. И. СМЕРНОВ*

**Редколлегия:**

канд. физ.-мат. наук Ю. С. БАРАШ, д-р физ.-мат. наук И. Г. ЗУБАРЕВ,  
д-р физ.-мат. наук Е. И. КАЦ (зам. гл. редактора, представительство ЖЭТФ во Франции),  
д-р физ.-мат. наук В. П. КРАЙНОВ, акад. М. В. САДОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук С. С. СОСИН,  
член-корр. РАН С. В. ТРОИЦКИЙ (зам. гл. редактора), д-р физ.-мат. наук А. В. ФИЛИППОВ,  
член-корр. РАН И. А. ФОМИН (зам. гл. редактора),  
д-р физ.-мат. наук Д. Е. ХМЕЛЬНИЦКИЙ (зам. гл. редактора, представительство ЖЭТФ  
в Великобритании),  
д-р физ.-мат. наук А. А. ЦЕЙТЛИН, акад. А. М. ЧЕРЕПАЩУК

**Редакционный совет:**

акад. А. Ф. АНДРЕЕВ (председатель),  
член-корр. РАН В. В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук В. С. ПОПОВ

Зав. редакцией Н. Г. Церевитинова  
Редакторы: Л. Б. Кульчицкая, Т. Г. Орехова, Т. Н. Смирнова