

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 97, номер 9, 2020

---

---

Движение пары гравитирующих тел в присутствии темной энергии: малые отклонения от кеплеровского движения <i>А. И. Нейштадт, Г. С. Бисноватый-Коган</i>	707
Сравнение параметров некоторых типов пульсаров <i>И. Ф. Малов, А. П. Морозова</i>	714
Популяция двойных звезд с общим собственным движением в Gaia DR2 <i>С. А. Сапожников, Д. А. Ковалева, О. Ю. Малков, А. Ю. Сытов</i>	733
Движение в центральном поле при возмущающем ускорении, изменяющемся по закону обратных квадратов, в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором <i>Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников</i>	747
Увод астероида с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к орбите <i>К. В. Холшевников, Д. В. Миланов, К. И. Оськина, В. Б. Титов</i>	754
Разработка методов навигационной привязки окололунных космических аппаратов к селеноцентрической динамической системе координат <i>А. О. Андреев, Ю. А. Нефедьев, Н. Ю. Демина, Н. К. Петрова, А. А. Загидуллин</i>	765
Александр Николаевич Дейч – к 120-летию со дня рождения <i>М. А. Петрова, Н. А. Шахт</i>	776
Жизнь и научная деятельность профессора МГУ Владимира Владимировича Подобеда <i>Л. П. Грибко</i>	785

---

---



УДК 521.328/524.8

## ДВИЖЕНИЕ ПАРЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ПРИСУТСТВИИ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ: МАЛЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

© 2020 г. А. И. Нейштадт<sup>1,2,\*</sup>, Г. С. Бисноватый-Коган<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> Университет Лафборо, Лафборо, Великобритания

\*E-mail: aneishta@iki.rssi.ru

\*\*E-mail: gkogon@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.

После доработки 28.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

Исследована задача о движении двух гравитирующих тел при наличии темной энергии (ТЭ), рассматриваемой как возмущающий фактор. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в предыдущих работах, вычислена поправка к частоте орбитального движения и исследованы колебания большой полуоси и эксцентриситета орбиты, вызванные влиянием ТЭ.

DOI: 10.31857/S0004629920100060

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие темной энергии (ТЭ) в современной вселенной было сделано на основе наблюдения сверхновых типа Ia при красных смещениях  $z \leq 1$  [1, 2] и измерения спектра флуктуаций космического микроволнового фонового излучения (КМФ) [3, 4]. Эти наблюдения привели к определению величины космологической постоянной  $\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ , отождествленной с ТЭ. Влияние ТЭ на свойства космологического расширения в современную эпоху рассматривалось в обзорах [5–12].

В более раннюю эпоху наблюдательные ограничения на величину космологической постоянной  $\Lambda$  и плотности темной энергии  $\rho_{\text{DE}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$  были получены на основе прецизионных наблюдений тайминга двойных радиопульсаров и движения планет Солнечной системы. Анализ данных о прецессии перигелия Меркурия для получения ограничений на величину  $\Lambda$  проводился различными авторами [13–15], вычисленные ими значения этих ограничений сильно различаются. В работе [15] был получен верхний предел  $\Lambda < 4 \times 10^{-45} \text{ см}^{-2}$ , упомянутый в последующих работах [16–19]. Таким образом, измеренное значение  $\Lambda$  оказалось более чем на 10 порядков меньше этого верхнего предела.

Гравитомагнитный эффект хода часов при их движении по орбите вокруг вращающегося тела

состоит в разности скорости хода часов при их вращении по противоположно направленным орбитам [20, 21]. Влияние космологической постоянной на этот эффект, а также влияние  $\Lambda$  на релятивистскую прецессию перигелия, исследовались в работе [22]. Влияние космологической постоянной на прецессию перигелия Земли и Марса, исследованное в работах [15, 23], привело к ограничению на значение  $\Lambda$  в виде  $\Lambda < 1 \cdot 10^{-46} \text{ см}^{-2}$ . Различные релятивистские эффекты в Солнечной системе на основе метрики Шварцшильда-де Ситтера были рассмотрены в работе [24]. Влияние малой дополнительной центрально-симметричной силы и космологического расширения вселенной на движение по кеплеровским орбитам исследовалось в работах [25–28].

В работах [29–31] было показано, что влияние ТЭ на динамику во внешних областях скоплений галактик может быть достаточно сильным. При рассмотрении относительного движения двух богатых скоплений влияние космологической постоянной может быть определяющим [32]. Оценка влияния измеренной космологической постоянной  $\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$  на прецессию орбиты планет вокруг Солнца сделана в [22]. Было показано, что для Солнечной системы это влияние очень мало, и частота прецессии орбиты Земли составляет величину  $\sim 10^{-14}$  от эйнштейновского значения. В [22] показано, что отношение этих частот пропорционально 4-й степени размера большей по-

луоси орбиты,  $\sim a^4$ , т.е. зависимость от периода обращения  $\sim T^{8/3}$ . Таким образом для Меркурия эта величина меньше в  $(T_{\oplus}/T_{\text{Mercury}})^{8/3} \approx 365/88 \approx 44$  раза. Относительное влияние ТЭ на частоту прецессии уменьшается с приближением орбиты планеты к Солнцу, т.к. роль гравитации Солнца растет, а вклад ТЭ падает ввиду постоянной плотности ее энергии.

Гораздо сильнее влияние ТЭ на относительное движение галактик, когда роль ТЭ может стать сравнимой с притяжением между галактиками [29–31]. Временные масштабы при этом столь велики, что наблюдать можно только результаты длительного действия различных факторов.

Решение задачи Кеплера в присутствии ТЭ было получено в квазиньютоновском приближении в работе [33]. Общее аналитическое решение, справедливое для произвольных  $\Lambda$ , было записано через различные эллиптические интегралы с использованием табличных формул [34]. Это громоздкое решение не очень удобно для анализа различных физических эффектов в задаче Кеплера, связанных с наличием ТЭ. В настоящей работе, в задаче о движении двух гравитирующих тел, наличие ТЭ рассматривается как возмущающий фактор, аналогично [22]. При этом используется несколько отличающийся метод усреднения по траектории. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в [22], вычисляется поправка к частоте орбитального движения (или, эквивалентно, к интервалу времени между двумя прохождениями через перицентр) за счет ТЭ. Эта поправка имеет тот же порядок, что и частота вращения перицентра, и потребовала более точного рассмотрения по сравнению с [22]. На основе используемого метода можно получить следующие по порядку приближения и исследовать отличия от усредненного движения.

## 2. КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВАКУУМЕ

Движение двух гравитирующих тел с массами  $m_1, m_2$  относительно друг друга сводится к уравнению Кеплера, которое описывает движение тела с приведенной массой  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  вокруг неподвижного тела с массой  $M = m_1 + m_2$ . Система уравнений для компонент  $(r, \phi)$  вектора расстояния  $\mathbf{r}$  между гравитирующими телами  $m$  и  $M$  имеет интегралы энергии  $E$  и углового момента  $L$  [35]

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad L = mv_{\phi}r, \quad (1)$$

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad v_{\phi} = r \frac{d\phi}{dt}.$$

Решение этой системы при  $E < 0$  описывает замкнутые эллиптические траектории вида [35]

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\phi - g)}. \quad (2)$$

Большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $\epsilon$  эллипса равны

$$a = \frac{GM}{2|E|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3(GM)^2}}, \quad (3)$$

долгота перицентра  $g$  определяет направление линии апсид, истинная аномалия  $\phi - g$  определяет положение точки на орбите,  $\phi$  – долгота.

## 3. ПРЕЦЕССИЯ ОРБИТ В ПРИСУТСТВИИ ТЭ

Присутствие темной энергии в квазиньютоновском приближении учитывается дополнительной радиальной силой отталкивания, что приводит к изменению интеграла энергии, который принимает следующий вид

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda mc^2}{6} r^2. \quad (4)$$

Как и во всяком центральном поле, движение происходит в плоскости. Орбиты в этой плоскости становятся незамкнутыми. Если влияние темной энергии считать малым возмущающим фактором, то орбита может быть представлена в виде медленно прецессирующей кеплеровской орбиты. В [22] скорости изменения оскулирующих элементов в этой задаче усреднены по периоду кеплеровского движения. В результате получены следующие усредненные уравнения:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle = 0, \quad (5)$$

$$\left\langle \frac{dg}{dt} \right\rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\omega} \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Последнее соотношение в (5) дает частоту прецессии перицентра.

## 4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ

Движение происходит в плоскости и описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Будем использовать канонические переменные Делоне  $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$  [36]:

$$I_1 = \sqrt{\mu a}, \quad \phi_1 = l, \quad (6)$$

$$I_2 = \sqrt{\mu a(1 - \epsilon^2)}, \quad \phi_2 = g.$$

Здесь  $\mu = GM$ , а  $l$  – средняя аномалия в задаче Кеплера. Напомним, что в задаче Кеплера средняя аномалия – это угловая переменная, которая

равномерно изменяется при движении тел по орбите. Скорость ее изменения (среднее движение)  $\omega = \sqrt{GM/a^{3/2}}$ . Средняя аномалия выражается через эксцентрическую аномалию  $\xi$  с помощью уравнения Кеплера [35, 36]

$$l = \xi - \epsilon \sin \xi, \quad (7)$$

Гамильтониан задачи  $H$  пропорционален полной энергии,  $H = E/m$ . В переменных Делоне гамильтониан записывается в виде:

$$H = H_0(I_1) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \phi_1), \quad (8)$$

$$H_0 = -\frac{\mu^2}{2I_1^2}, \quad H_1 = -r^2.$$

Здесь  $r^2$  должно быть выражено через  $I_1, I_2, \phi_1$ . Величина  $\epsilon = \frac{\Delta c^2}{6}$  будет считаться малым параметром задачи, по которому проводятся разложения (это не безразмерная величина, но ее удобно использовать в разложениях, чтобы не вводить дополнительно безразмерный малый параметр). Этому гамильтониану соответствуют уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_1}, & \dot{\phi}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_1}, \\ \dot{I}_2 &= -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_2} = 0, & \dot{\phi}_2 &= \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

В этой записи учтено, что  $H_0$  зависит только от  $I_1$ , и поэтому частные производные  $H_0$  по остальным переменным обращаются в 0.

Величина  $I_2$  пропорциональна угловому моменту,  $I_2 = L/m$ , и является первым интегралом задачи,  $I_2 = \text{const}$ . В терминах уравнений (9) это связано с тем, что гамильтониан не зависит от угла  $\phi_2$ . Соответственно частная производная гамильтониана по  $\phi_2$  тождественно обращается в 0, а канонически сопряженная к  $\phi_2$  переменная  $I_2$  является первым интегралом.

Задача имеет также интеграл энергии  $H = H_0(I_1) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \phi_1) = h = \text{const}$ , так как гамильтониан не зависит явно от времени.

Рассматриваемая задача интегрируема: для  $I_1$  и  $\phi_1$  получается гамильтонова система с одной степенью свободы, зависящая от  $I_2$  как от параметра. По найденным решениям этой системы можно затем получить зависимость  $\phi_2$  от времени квадратурой [33].

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

### 5.1. Общее описание процедуры Делоне–Цейпеля

Мы будем строить приближенные решения при малых  $\epsilon$ . В рассматриваемой задаче одна быстро меняющаяся угловая переменная, угол  $\phi_1$ , и две медленно меняющиеся переменные,  $I_1$  и  $\phi_2$  (переменную  $I_2$  можно рассматривать как параметр задачи). Для описания динамики будем использовать процедуру канонической теории возмущений в форме<sup>1</sup> Делоне–Цейпеля [36]. Эта процедура применительно к рассматриваемой задаче состоит в том, что делается каноническая  $2\pi$ -периодическая по  $\phi_1, \phi_2$ , близкая к тождественной (отличающаяся от тождественной величинами порядка  $\epsilon$ ) замена переменных  $I_1, I_2, \phi_1, \phi_2 \mapsto J_1, J_2, \psi_1, \psi_2$  такая, что гамильтониан в новых переменных зависит от быстрой угловой переменной  $\psi_1$  лишь в членах выше заданного порядка. Если мы хотим исключить  $\psi_1$  из гамильтониана вплоть до членов порядка  $\epsilon^n$  включительно в разложении по малому параметру  $\epsilon$ , то производящая функция нужной замены переменных ищется в виде многочлена степени  $n$  по  $\epsilon$ . Отбрасывая в гамильтониане малый член порядка  $\epsilon^{n+1}$ , получаем гамильтониан, не зависящий от переменной  $\psi_1$ . В полученной гамильтоновой системе величина  $J_1$  является первым интегралом,  $J_1 = \text{const}$ , в соответствии с гамильтоновыми уравнениями движения. Для остальных переменных получается система с меньшим на единицу числом степеней свободы, зависящая от  $J_1$  как от параметра, причем все переменные в этой системе меняются медленно. После решения этой системы приближенное решение исходной системы получается с помощью обращения построенной замены переменных.

Для рассматриваемой задачи описанная процедура еще более упрощается из-за того, что гамильтониан не зависит от  $\phi_2$ . Тогда процедура организуется так, что новый гамильтониан не зависит от  $\psi_2$ , и  $J_2 = I_2 = \text{const}$ . Получается, что величины  $\psi_1, \psi_2$  постоянны. Это средние частоты изменения углов  $\phi_1, \phi_2$ .

Мы ограничимся первым приближением описанной процедуры: возьмем  $n = 1$ . Делаем кано-

<sup>1</sup> Эта процедура была предложена для неинтегрируемых задач, но она полезна и при построении приближенных решений в более простых случаях, когда рассматриваемая задача интегрируема и имеет точное решение. К тем же теоретическим результатам привело бы и использование более приспособленной для компьютерной реализации процедуры Хори–Депри [37]. В первом приближении процедуры Делоне–Цейпеля и Хори–Депри эквивалентны.

ническую замену переменных  $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \mapsto (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$  с производящей функцией

$$W = J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2 + \varepsilon S(J_1, J_2, \varphi_1),$$

где  $S$  — пока не определенная  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi_1$  функция (производящая функция зависит от старых координат  $\varphi_1, \varphi_2$  и новых импульсов  $J_1, J_2$ ).

Старые и новые переменные связаны соотношениями

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, & I_2 &= J_2 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = J_2, \\ \psi_1 &= \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial J_1}, & \psi_2 &= \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial J_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Замена переменных (10) близка к тождественной.

Подставляя в гамильтониан выражение для  $I_1$  через  $J_1, \varphi_1, I_2$  из (10), получаем

$$\begin{aligned} H &= H_0\left(J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right) + \varepsilon H_1\left(J_1 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, I_2, \varphi_1\right) = \\ &= H_0(J_1) + \varepsilon \left[ \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Обозначим  $\bar{H}_1$  среднее от  $H_1$  по  $\varphi_1$ . Хотим выбрать  $S$  так, чтобы было

$$\frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1) = \bar{H}_1(J_1, I_2).$$

Тогда  $S$  получается интегрированием по  $\varphi_1$  из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = -\frac{1}{\partial H_0(J_1)/\partial J_1} [H_1(J_1, I_2, \varphi_1) - \bar{H}_1(J_1, I_2)]. \quad (11)$$

Так как правая часть (11)  $2\pi$ -периодическая функция от  $\varphi_1$  со средним, равным 0, то  $S$  получается  $2\pi$ -периодической функцией от  $\varphi_1$ . Мы будем выбирать функцию  $S$  так, чтобы ее среднее по  $\varphi_1$  было равно 0. Гамильтониан в новых переменных

$$H = H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2) + O(\varepsilon^2).$$

Пренебрегая членом порядка  $\varepsilon^2$ , получаем гамильтониан  $\mathcal{H} = H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2)$  и уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= 0, & \dot{I}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial J_1}, \\ \dot{\psi}_2 &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{H}_1 = \bar{H}_1(J_1, I_2)$ .

## 5.2. Поправки к кеплеровскому движению

Проведем выкладки. Среднее от  $H_1$  по  $\varphi_1$  есть

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi_1, \quad (12)$$

т.е. с точностью до знака,  $\bar{H}_1$  — это нулевой член в известном разложении функции  $r^2$  в ряд Фурье по средней аномалии (см., напр., [36]):

$$\bar{H}_1 = -a^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} \right). \quad (13)$$

Поскольку

$$a^2 = I_1^4/\mu^2, \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}, \quad (14)$$

получаем

$$\bar{H}_1 = -\frac{I_1^4}{\mu^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) \right) = -\left( \frac{5I_1^4}{2\mu^2} - \frac{3I_1^2 I_2^2}{2\mu^2} \right). \quad (15)$$

Заменяя здесь  $I_1$  на  $J_1$ , как это предписывается изложенной процедурой, получаем гамильтониан первого приближения

$$\mathcal{H} = H_0(J_1) + \varepsilon \bar{H}_1(J_1, I_2), \quad H_0(J_1) = -\frac{\mu^2}{2J_1^2}, \quad (16)$$

$$\bar{H}_1(J_1, I_2) = -\left( \frac{5J_1^4}{2\mu^2} - \frac{3J_1^2 I_2^2}{2\mu^2} \right).$$

Для изменения угла  $\psi_2$  в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_2 = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial I_2} = 3\varepsilon J_1^2 I_2 / \mu^2. \quad (17)$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту вращения перицентра. Погрешность этой формулы  $\sim \varepsilon^2$ . Без увеличения погрешности можно считать, что  $J_1$  связано с величиной энергии  $h$  соотношением  $h = -\mu^2/(2J_1^2)$ . Определяя отсюда  $J_1$  и подставляя в (17), получаем для средней частоты вращения перицентра выражение

$$\dot{\psi}_2 = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{I_2}{|h|}. \quad (18)$$

Для изменения угла  $\psi_1$  в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial J_1}, \quad (19)$$

или, в явном виде

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\mu^2}{J_1^3} - \frac{\varepsilon}{\mu^2} (10J_1^3 - 3J_1 I_2^2). \quad (20)$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту изменения средней аномалии. Погрешность этой формулы  $\sim \epsilon^2$ . Без увеличения погрешности можно во втором члене этой формулы определять  $J_1$  из соотношения  $h = -\mu^2/(2J_1^2)$ , поскольку сам этот член уже порядка  $\epsilon$ . В первом члене этой формулы, поскольку он порядка 1, нужно действовать точнее: использовать для определения  $J_1$  соотношение  $\mathcal{H} = h$  и формулы (16), т.е.

$$-\frac{\mu^2}{2J_1^2} - \frac{\epsilon}{\mu^2} \left( \frac{5}{2} J_1^4 - \frac{3}{2} J_1^2 I_2^2 \right) = h. \quad (21)$$

Для  $J_1$  с погрешностью порядка  $\epsilon^2$  отсюда получаем

$$\frac{1}{J_1^3} = \left( \frac{-2h}{\mu^2} \right)^{3/2} - \frac{3\epsilon}{2\mu^4} \times \left[ \frac{5}{(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{3}{(-2h/\mu^2)^{1/2}} I_2^2 \right] + O(\epsilon^2). \quad (22)$$

Теперь в главном приближении из (20) получаем

$$\psi_1 = \mu^2 \left( \frac{-2h}{\mu^2} \right)^{3/2} - \frac{\epsilon}{\mu^2} \times \left[ \frac{35}{2(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{15}{2(-2h/\mu^2)^{1/2}} I_2^2 \right]. \quad (23)$$

Эта формула определяет среднюю частоту движения тел относительно положения перигея.

В обозначениях разделов 2, 3 формулы для средней частоты прецессии перигея  $\langle \dot{g} \rangle \equiv \dot{\psi}_1$ , и средней частоты изменения средней аномалии  $\langle \dot{i} \rangle \equiv \dot{\psi}_2$  принимают вид (мы выражаем результаты через сохраняющиеся величины: полную энергию  $E$  и угловой момент  $L$ ):

$$\langle \dot{g} \rangle = \frac{\Lambda c^2 L}{4 |E|}, \quad (24)$$

$$\langle \dot{i} \rangle = \frac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \frac{5\Lambda c^2}{12GM} \times \left[ \frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}} (L/m)^2 \right]. \quad (25)$$

Вид этих формул упрощается, если использовать в них усредненные значения большой полуоси и эксцентриситета  $\bar{a}$ ,  $\bar{\epsilon}$ , определяемые соотношениями  $J_1 = \sqrt{GM\bar{a}}$ ,  $I_2 = \sqrt{GM\bar{a}(1 - \bar{\epsilon}^2)}$ :

$$\langle \dot{g} \rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\bar{\omega}} \sqrt{1 - \bar{\epsilon}^2}, \quad (26)$$

$$\langle \dot{i} \rangle = \bar{\omega} - \frac{\Lambda c^2}{6\bar{\omega}} (7 + 3\bar{\epsilon}^2). \quad (27)$$

Здесь  $\bar{\omega} = \sqrt{GM/\bar{a}^3}$  – среднее движение для невозмущенной кеплеровской орбиты с большой полуосью  $\bar{a}$ . Первая из этих формул получена в [22], см. (5).

Величины  $\bar{a}$ ,  $\bar{\epsilon}$  выражаются через полную энергию  $E$  и угловой момент  $L$  с погрешностью  $O(\epsilon^2)$  по следующим формулам

$$\bar{a} = \frac{GM}{2|E|/m} + \frac{\Lambda c^2 GM}{48(|E|/m)^3} \left( 5 \frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2 \right),$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{(L/m)^2 (2|E|/m)}{(GM)^2} + \frac{\Lambda c^2 (L/m)^2}{24}} \times \quad (28)$$

$$\times \left( 5 \frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2 \right) \left( 1 - \frac{(L/m)^2 (2|E|/m)}{(GM)^2} \right)^{-1/2}.$$

Формула (25) позволяет найти время между прохождениями через перигей с учетом возмущения (период орбитального движения). В рассматриваемом приближении это время равно

$$T = \frac{2\pi}{\langle \dot{i} \rangle} = \frac{2\pi}{\frac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \frac{5\Lambda c^2}{12GM} \left[ \frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}} (L/m)^2 \right]} \approx \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^3} \frac{5\Lambda c^2}{12} \left[ \frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}} (L/m)^2 \right]. \quad (29)$$

Здесь период выражен через первые интегралы исходной задачи. Можно без изменения порядка погрешности выразить член пропорциональный  $\Lambda$  через  $\bar{a}$  и  $\bar{\epsilon}$ :

$$T = \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{5\pi \Lambda c^2}{6\bar{\omega}^3} (4 + 3\bar{\epsilon}^2). \quad (30)$$

Общая картина движения в рассматриваемой задаче такова. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровского эллипса испытывают малые периодические колебания около постоянных значений  $\bar{a}$ ,  $\bar{\epsilon}$ ; долгота перигея и средняя аномалия испытывают малые периодические колебания около равномерных вращений с частотами, зада-

ваемыми формулами (24), (25). Эти малые колебания определяются из соотношений замены переменных (10). Ввиду громоздкости формул мы ограничимся нахождением функции  $S$  и колебаний большой полуоси и эксцентриситета.

Согласно (11) и (7),

$$S = -\frac{1}{\bar{\omega}} \int (H_1 - \bar{H}_1)(1 - \epsilon \cos \xi) d\xi. \quad (31)$$

Здесь  $\bar{\omega} = \partial H_0(J_1)/\partial J_1$  — частота кеплеровского движения, вычисленная в главном приближении. Использование в записи для  $S$  неопределенного интеграла указывает, что  $S$  определена с точностью до произвольной функции от медленных переменных. В дальнейшем мы выберем эту произвольную функцию так, чтобы среднее от  $S$  по  $\varphi_1$  равнялось 0. Учитывая, что  $r = a(1 - \epsilon \cos \xi)$ , и используя (13), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\bar{\omega}} \left[ \left( \int a^2 (1 - \epsilon \cos \xi)^3 d\xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - a^2 \left( 1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) (\xi - \epsilon \sin \xi) \right] = \\ &= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[ \left( \int \left( 1 - 3\epsilon \cos \xi + 3\epsilon^2 \frac{1 + \cos 2\xi}{2} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \epsilon^3 \frac{\cos 3\xi + 3 \cos \xi}{4} \right) d\xi \right) - \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) (\xi - \epsilon \sin \xi) \right] = \\ &= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[ -3\epsilon \sin \xi + \frac{3}{4} \epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12} \epsilon^3 (\sin 3\xi + \right. \\ &\quad \left. + 9 \sin \xi) + \epsilon \left( 1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \sin \xi \right] + C = \\ &= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[ \epsilon \left( -2 + \frac{3}{4} \epsilon^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{4} \epsilon^2 \sin 2\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \epsilon^3 \sin 3\xi \right] + C. \end{aligned}$$

Здесь  $C$  — произвольная функция от  $a, \epsilon$ . Мы выберем  $C$  так, чтобы среднее от  $S$  по  $\varphi_1$  равнялось 0. Получаем

$$\begin{aligned} C &= -\frac{a^2}{\bar{\omega}} \int_0^{2\pi} \left( \epsilon \left( -2 + \frac{3}{4} \epsilon^2 \right) \sin \xi + \frac{3}{4} \epsilon^2 \sin 2\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \epsilon^3 \sin 3\xi \right) (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2}{\bar{\omega}} \left[ \epsilon \left( -2 + \frac{3}{4} \epsilon^2 \right) \sin \xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \epsilon^2 \sin 2\xi - \frac{1}{12} \epsilon^3 \sin 3\xi \right], \quad (32) \end{aligned}$$

где  $a, \epsilon$  должны быть заменены на  $\bar{a}, \bar{\epsilon}$  и выражены через  $J_1, I_2$  согласно (14), а эксцентрисическая аномалия  $\xi$  должна быть выражена через среднюю аномалию  $\varphi_1$  согласно (7).

Согласно (10) и (11), величины  $I_1$  и  $J_1$  связаны соотношением

$$I_1 = J_1 - \epsilon \frac{1}{\bar{\omega}} (H_1 - \bar{H}_1). \quad (33)$$

Используя (13), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 + \epsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left( (1 - \bar{\epsilon} \cos \xi)^2 - \left( 1 + \frac{3\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \right) = \\ &= J_1 + \epsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left( -\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right). \end{aligned}$$

Согласно (6)  $I_1 = \sqrt{GMa}$ ,  $J_1 = \sqrt{GM\bar{a}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{GMa} &= \sqrt{GM\bar{a}} + \\ &+ \epsilon \frac{\bar{a}^2}{\bar{\omega}} \left( -\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right), \end{aligned}$$

откуда в рассматриваемом приближении

$$a = \bar{a} + \epsilon \frac{2}{\sqrt{GM}} \frac{\bar{a}^{5/2}}{\bar{\omega}} \left( -\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right).$$

Учитывая, что  $\bar{\omega} = \sqrt{GM/\bar{a}^3}$ , а также что  $\epsilon = \Lambda c^2/6$ , получаем

$$a = \bar{a} + \frac{\Lambda c^2 \bar{a}}{3\bar{\omega}^2} \left( -\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon} \cos \xi + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^2 \cos 2\xi \right). \quad (34)$$

Условие сохранения углового момента позволяет определить колебания эксцентриситета по колебаниям большой полуоси. Из соотношения  $a(1 - \epsilon^2) = \bar{a}(1 - \bar{\epsilon}^2)$  получаем

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \frac{\Lambda c^2 (1 - \bar{\epsilon}^2)}{6\bar{\omega}^2} \left( -\bar{\epsilon} - 2 \cos \xi + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \cos 2\xi \right). \quad (35)$$

Введем углы  $\bar{T} = \psi_1$ ,  $\bar{g} = \psi_2$ . Эти углы изменяются равномерно с угловыми скоростями (27), (26). Средняя аномалия  $l = \varphi_1$  и долгота перицентра  $g = \varphi_2$  совершают малые колебания относительно этих углов в соответствии с двумя последними формулами в (10), которые без изменения погрешности представляются в виде

$$l = \bar{T} - \epsilon \frac{\partial S}{\partial I_1}, \quad g = \bar{g} - \epsilon \frac{\partial S}{\partial I_2}. \quad (36)$$

Здесь функция  $S = S(I_1, I_2, \bar{T})$  задается формулой (32), в которой большая полуось орбиты  $a$  и эксцентриситет  $\epsilon$  должны быть выражены через переменные Делоне  $I_1, I_2$  из соотношений (6), а эксцентрисическая аномалия  $\xi$  рассматривается как неявная функция от  $\bar{T}$  согласно уравнению Кеплера  $\bar{T} = \xi - \epsilon \sin \xi$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о движении двух гравитирующих тел при наличии ТЭ рассмотрена как возмущение задачи Кеплера. В рамках первого приближения в теории возмущений Делоне—Цейпеля описано поведение элементов кеплеровской орбиты под влиянием ТЭ. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровской орбиты испытывают малые периодические колебания около своих средних значений. Эти средние значения даются формулами (28), а колебания — формулами (34) и (35). Долгота перицентра испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой (26). Ранее формула для этой частоты была получена несколько иным методом в [22]. Средняя аномалия гравитирующих тел испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой, задаваемой формулой (27). Эта формула учитывает поправку к среднему движению за счет ТЭ. Колебания относительно этих равномерных вращений даются формулами (36) (мы не проводим в явном виде вычислений в (36) ввиду их громоздкости). Период орбитального движения, определяемый как время между прохождением через перицентр, отличается от кеплеровского периода малой поправкой. Эта поправка учтена в формуле для периода (30). Колебания элементов орбиты происходят с этим периодом.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа Г.С. Б.-К. частично поддержана грантами РФФИ 18-02-00619, 20-02-000455, 20-52-12053. Работа А.И.Н. частично поддержана грантом фонда Леверхульме № RPG-2018-143.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
2. *A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
3. *D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
4. *M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton, K. Abazajian, et al.*, *Phys. Rev. D* **69**(10), id. 103501 (2004).
5. *S. Weinberg*, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
6. *S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 499 (1992).
7. *S. M. Carroll*, *Liv. Rev. Relativity* **4**, 1 (2001).
8. *W. Rindler, Relativity: Special, General, and Cosmological* (Oxford, UK: Oxford University Press, 2001).
9. *C. O’Raifeartaigh, M. Ó Keffe, W. Nahm, and S. Mitton*, *European Phys. J. H* **43**(1), id. 73 (2018).
10. *B. Novosyadlyj*, *European Phys. J. H* **43**(3), id. 267 (2018).
11. *L. Iorio*, *Universe* **1**, 38 (2015).
12. *I. Debono and G. F. Smoot*, *Universe* **2**, 23 (2016).
13. *J. Islam*, *Phys. Letters A* **97**, 239 (1983).
14. *J. Cardona and J. Tejero*, *Astrophys. J.* **493**, 52 (1998).
15. *L. Iorio*, *Intern. J. Modern Physics D* **15**, 473 (2006).
16. *L. Iorio*, *Adv. Astron.* **2008**, id. 268647 (2008).
17. *H. Arakida*, *Intern. J. Theor. Phys.* **52**, 1408 (2013).
18. *S. S. Ovcherenko and Z. K. Silagadze*, *Ukraine J. Phys.* **61**, 342 (2016).
19. *L. Iorio*, *Universe* **4**, 59 (2018).
20. *J. M. Cohen and B. Mashhoon*, *Phys. Letters A* **181**, 353 (1993).
21. *E. Hackmann and C. Lammerzahl*, *Phys. Rev. D* **90**, id. 044059 (2014).
22. *A. Kerr, J. Hauck, and B. Mashhoon*, *Classical and Quantum Gravity* **20**(13), 2727 (2003).
23. *M. Sereno and P. Jetzer*, *Phys. Rev. D* **73**, id. 063004 (2006).
24. *V. Kagramanova, J. Kunz, and C. Lammerzahl*, *Phys. Letters B* **634**, 465 (2006).
25. *G. Adkins, J. McDonnell, and R. Fell*, *Phys. Rev. D* **75**, id. 064011 (2007).
26. *G. Adkins and J. McDonnell*, *Phys. Rev. D* **75**, id. 082001 (2007).
27. *M. Sereno and P. Jetzer*, *Phys. Rev. D* **75**, id. 064031 (2007).
28. *O. I. Chashchina and Z. K. Silagadze*, *Phys. Rev. D* **77**, id. 107502 (2008).
29. *A. D. Chernin*, *Physics Uspekhi* **44**, 1099 (2001).
30. *A. D. Chernin*, *Physics Uspekhi* **51**, 253 (2008).
31. *G. S. Bisnovaty-Kogan and A. D. Chernin*, *Astrophys. Space Sci.* **338**, 337 (2012).
32. *G. S. Bisnovaty-Kogan and M. Merafina*, *Intern. J. Theor. Phys. D* **28**, id. 1950155 (2019).
33. *N. V. Emelyanov and M. Y. Kovalyov*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **429**, 3477 (2013).
34. *I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik*, *Table of integrals, series and products*, 4th ed. (New York: Academic Press, 1965).
35. *L. Landau and E. Lifshitz*, *Mechanics. Course of theoretical physics* (Pergamon Press, 1969).
36. *Г. Н. Дубошин*, *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* (М.: Наука, 1976).
37. *Г. Е. О. Джакаля*, *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).

УДК 524.354.4

## СРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ПУЛЬСАРОВ

© 2020 г. И. Ф. Малов<sup>1,\*</sup>, А. П. Морозова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,

Пушчинская радиоастрономическая обсерватория АКЦ ФИАН, Пушчино, Россия

<sup>2</sup> Пушчинский государственный естественно-научный институт, Пушчино, Россия

\*E-mail: malov@prao.ru

Поступила в редакцию 22.11.2019 г.

После доработки 30.03.2020 г.

Принята к публикации 30.03.2020 г.

Проведен сравнительный анализ параметров двух выборок радиопульсаров. Одна из них характеризуется периодами  $P > 2$  с, вторая – магнитными полями на поверхности  $B_s > 4.4 \times 10^{13}$  Гс. Выбор этих значений связан с намерением понять причины отличия нормальных пульсаров от аномальных рентгеновских пульсаров (АХР) и гамма-репитеров (SGR) с аналогичными значениями периодов и магнитных полей. Показано, что зависимость производной периода от его значения  $P$  в долгопериодических пульсарах не согласуется с моделью магнитодипольного торможения и требует привлечения других механизмов или поиска специфических распределений их параметров. В пульсарах с большими магнитными полями и в АХР/SGR эта зависимость не противоречит магнитодипольной модели. Для пульсаров с  $P > 2$  с эффективность трансформации энергии вращения в наблюдаемое излучение оказывается в несколько раз выше, чем у объектов с более короткими периодами. Пульсары с большими периодами имеют, в среднем, возраст на два порядка выше, чем источники с  $B_s > 4.4 \times 10^{13}$  Гс и АХР/SGR, и находятся, в среднем, более высоко над плоскостью Галактики. Показано, что основные физические параметры пульсаров с большими магнитными полями на поверхности и их пространственное распределение близки к параметрам и распределению АХР/SGR. Проведенные сравнения свидетельствуют о том, что определяющим для пекулярности АХР/SGR является сильное магнитное поле на поверхности, а не период вращения.

DOI: 10.31857/S0004629920090029

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних двух десятков лет проводятся интенсивные исследования аномальных рентгеновских пульсаров (АХР) и источников с мягким повторяющимся гамма-излучением (SGR). Природа этих объектов до сих пор остается до конца невыясненной. Наиболее распространенной считается модель магнитара – нейтронной звезды с магнитным полем на поверхности порядка  $10^{14} - 10^{15}$  Гс, выдвинутая еще в 1992 г. [1]. Однако она не отвечает на целый ряд вопросов, связанных с объяснением их наблюдаемых особенностей (см., напр., [2, 3]). В качестве альтернативных предлагались модели белого карлика с большим магнитным полем [4, 5], аккреции из окружающего звездного диска [6, 7], дрейфовая модель, в которой предполагается существование на периферии магнитосферы нейтронной звезды дрейфовых волн, вызывающих периодическую модуляцию принимаемого излучения [2, 8]. Существует целый ряд работ, в которых рассматриваются процессы на поверхности кварковой

(“странной”) звезды [9–12]. И, наконец, предлагается все виды аномальных пульсаров, в том числе АХР/SGR, представить как эволюционную последовательность состояний вырожденного кеплеровского диска, образованного в результате взрыва кварк-новой звезды [13–15]. Все предложенные модели не лишены трудностей, и вопрос об адекватном теоретическом описании наблюдательных данных остается открытым.

Характерными для АХР и SGR признаками следует считать длинные периоды, т.е.  $P$  – интервалы между последовательными импульсами, и сильные магнитные поля, если их вычислять по формуле:

$$B_p = 6.4 \times 10^{19} (PdP/dt)^{1/2}, \quad (1)$$

полученной в предположении о магнитодипольном торможении нейтронной звезды:

$$-I\Omega d\Omega/dt = \frac{B_p R_*^6 \Omega^4 \sin^2 \beta}{6c^3}, \quad (2)$$

где  $I$  – момент инерции нейтронной звезды,  $\Omega = 2\pi/P$  – угловая скорость ее вращения,  $B_p$  – индукция магнитного поля на магнитных полюсах,  $R_*$  – радиус нейтронной звезды,  $\beta$  – угол между магнитным моментом звезды и осью ее вращения,  $c$  – скорость света. Здесь и далее магнитная индукция дана в Гауссах, а период в секундах. При оценках поля по формуле (1) в каталоге ATNF [16] предполагалось, что для всех радиопульсаров  $\sin \beta = 1$ . Поправки, связанные с реальными значениями  $\beta$  для конкретных объектов, рассмотрены в работе [17].

Как следует из пополняемого каталога AXP/SGR [18], для этих объектов  $P > 2$  с, а  $B_p \geq B_{sh} = 4.4 \times 10^{13}$  Гс. Здесь  $B_{sh}$  – швингеровское поле. В работе [19] было проведено сравнение распределений ряда параметров AXP/SGR с соответствующими распределениями для основной массы пульсаров из каталога ATNF. Мы здесь предлагаем проанализировать различие распределений параметров AXP/SGR и двух выделенных групп “нормальных” радиопульсаров, имеющих периоды  $P > 2$  с и магнитные поля на полюсе  $B_p > 4.4 \times 10^{13}$  Гс, чтобы понять, чем отличаются спокойные нейтронные звезды с этими параметрами от звезд с “магнитарной” активностью. Следует сделать два замечания.

1. Включенный в каталог [18] объект PSR J1846–0258 с  $P = 0.33$  с лишь однажды проявил некоторую вспышечную активность и пока должен рассматриваться как неподтвержденный кандидат в AXP, поэтому мы его исключили из дальнейшего анализа.

2. В каталоге [16] приведены значения индукции магнитного поля на магнитном экваторе нейтронной звезды, которые в 2 раза меньше, чем на полюсах. В то же время во всех известных моделях основополагающие процессы в магнитосфере пульсара связываются именно с магнитными полюсами и выходящими из них открытыми силовыми линиями. В связи с этим мы рассматриваем дальше пульсары с каталожными полями  $B > 2.2 \times 10^{13}$  Гс. Для этих объектов полярное поле должно быть выше швингеровского  $B_{sh} = 4.4 \times 10^{13}$  Гс.

## 2. ОСОБЕННОСТИ СПОКОЙНЫХ ПУЛЬСАРОВ С ДЛИННЫМИ ПЕРИОДАМИ

Прежде всего проанализируем, чем отличаются “нормальные” радиопульсары с периодами  $P > 2$  с и  $P < 2$  с. В соответствии с предсказаниями Стэррока [20] у долгопериодических пульсаров ( $P > 1$  с) должно быть подавлено каскадное рождение электрон-позитронной вторичной плазмы, и, как следствие, их характеристики

должны отличаться от параметров пульсаров с более короткими периодами. В этом разделе мы сравниваем характеристики двух выборок радиопульсаров, для первой из них  $0.1 \text{ с} < P < 2 \text{ с}$ , для второй  $P > 2 \text{ с}$ . В первую выборку не включены объекты с самыми короткими периодами ( $P < 0.1 \text{ с}$ ), которые отличаются по целому ряду параметров и к которым принадлежат все миллисекундные (“раскрученные”) пульсары (см. [21, 22]). Кроме того, исключены из рассмотрения пульсары, входящие в двойные системы и в шаровые скопления, поскольку их особенности могут быть связаны с влиянием компаньонов и окружающих звезд.

Рассмотрим распределение производных периода в указанных выборках.

На рис. 1 представлены гистограммы  $N(dP/dt)$  вместе с вписанными в них гауссианами, параметры которых могут быть описаны выражениями:

$$N = 352 \exp \left[ - \left( \frac{-\lg(dP/dt) - 14.94}{1.81} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$0.1 \text{ с} < P < 2 \text{ с},$

$$N = 41 \exp \left[ - \left( \frac{-\lg(dP/dt) - 14.38}{1.33} \right)^2 \right], \quad P > 2 \text{ с.} \quad (4)$$

Как следует из этого рисунка, пульсары с длинными периодами замедляются, в среднем, в несколько раз быстрее (медианные значения  $\lg(dP/dt)$  равны соответственно  $-14.0$  и  $-14.9$ ). Различие двух приведенных гистограмм по критерию Колмогорова–Смирнова достоверно с точностью выше 0.1%. Еще одной особенностью долгопериодических пульсаров следует считать их зависимость  $dP/dt$  от  $P$  (рис. 2), которая свидетельствует о неприменимости к этой популяции модели магнитодипольного торможения. Действительно, прямая, проведенная по методу наименьших квадратов, может быть описана уравнением

$$\lg(dP/dt) = (1.67 \pm 0.32) \lg P - 14.92 \pm 0.17 \quad (5)$$

при коэффициенте корреляции  $K = 0.40$  и вероятности случайности распределения  $p < 10^{-4}$ .

Такая зависимость кардинально отличается от предсказываемой соотношением (1) при постоянном магнитном поле ( $dP/dt \propto P^{-1}$ ). Следует заметить, что зависимость (5) является статистической, однако трудно представить, как она может быть получена в результате сложения индивидуальных путей магнитодипольного торможения для отдельных объектов. Для этого необходимы специфические распределения параметров пульсаров, существование которых еще предстоит обосновать.

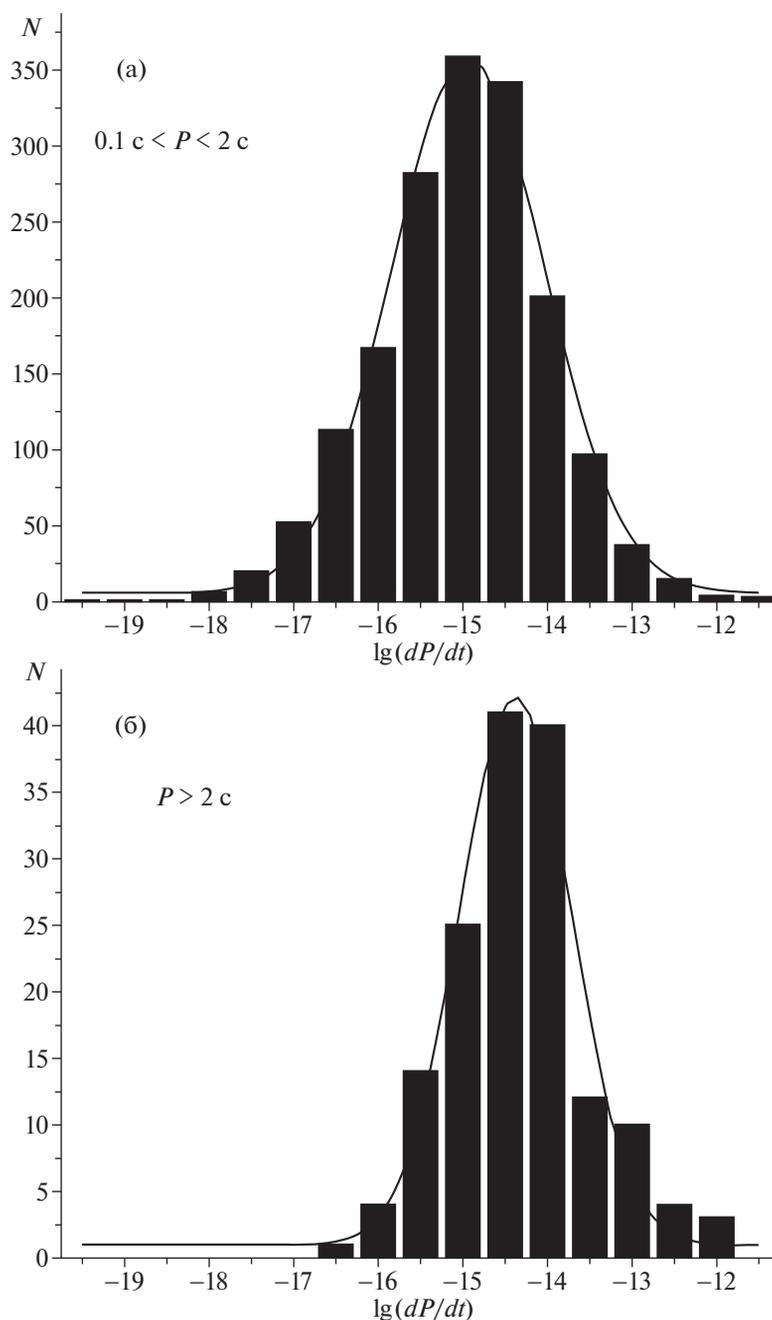


Рис. 1. Распределение производных периода для двух рассматриваемых выборок пульсаров.

Что касается пульсаров с короткими периодами, то для них нет ярко выраженной зависимости  $dP/dt$  от  $P$  (рис. 3). Тем не менее и здесь трудно найти свидетельство справедливости магнитодипольной модели. Можно сделать вывод, что эта модель как основная к рассматриваемым выборкам неприменима, и необходимо учитывать другие механизмы торможения. Возможные альтернативные процессы, приводящие к торможению пульсара, рассмотрены, например, в [23]. Из ска-

занного следует, что приведенные в каталоге [16] значения индукций магнитных полей нуждаются в коррекции. Однако в настоящий момент более точных массовых оценок таких значений не существует.

Мы будем в дальнейшем оперировать каталожными величинами полей, предполагая, что искажение их значений происходит подобным образом для различных пульсаров и, если абсолютные значения неточны, то их относительные

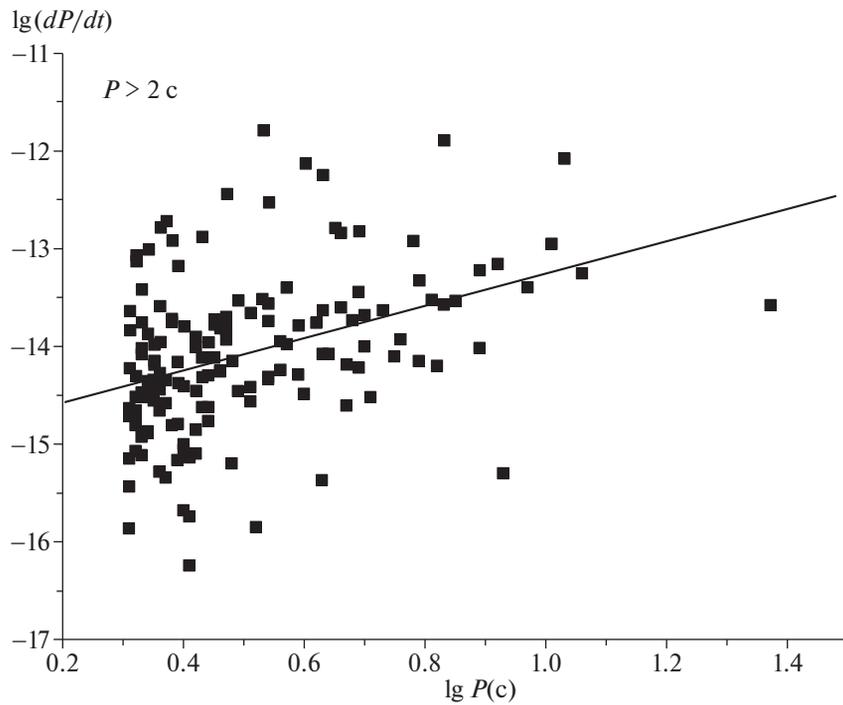


Рис. 2. Зависимость производной периода от периода для 150 радиопульсаров с  $P > 2 c$ .

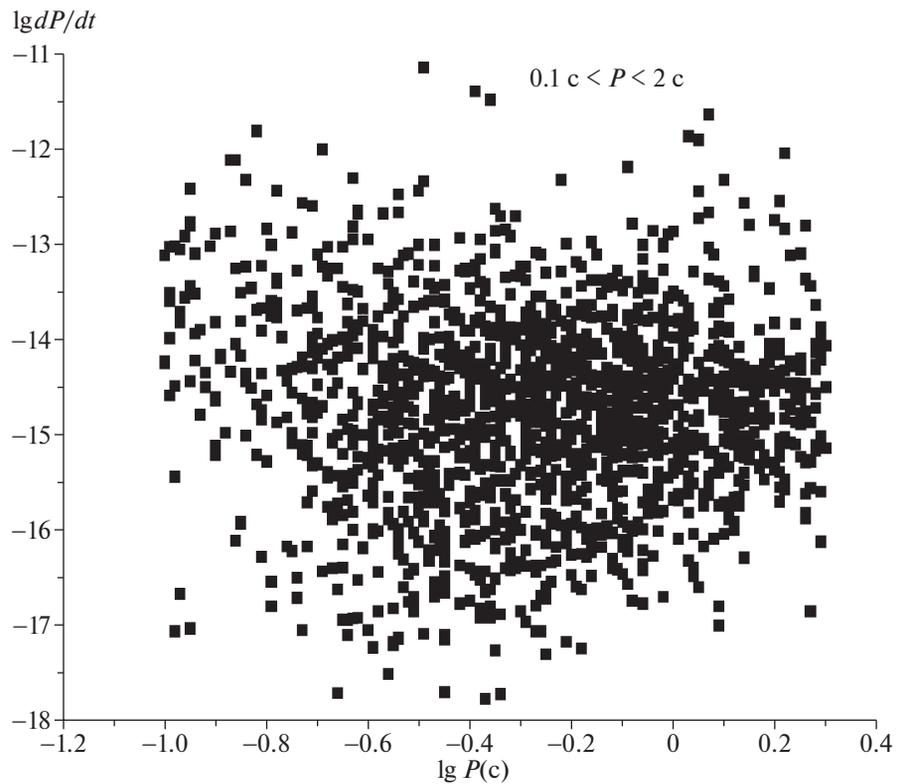
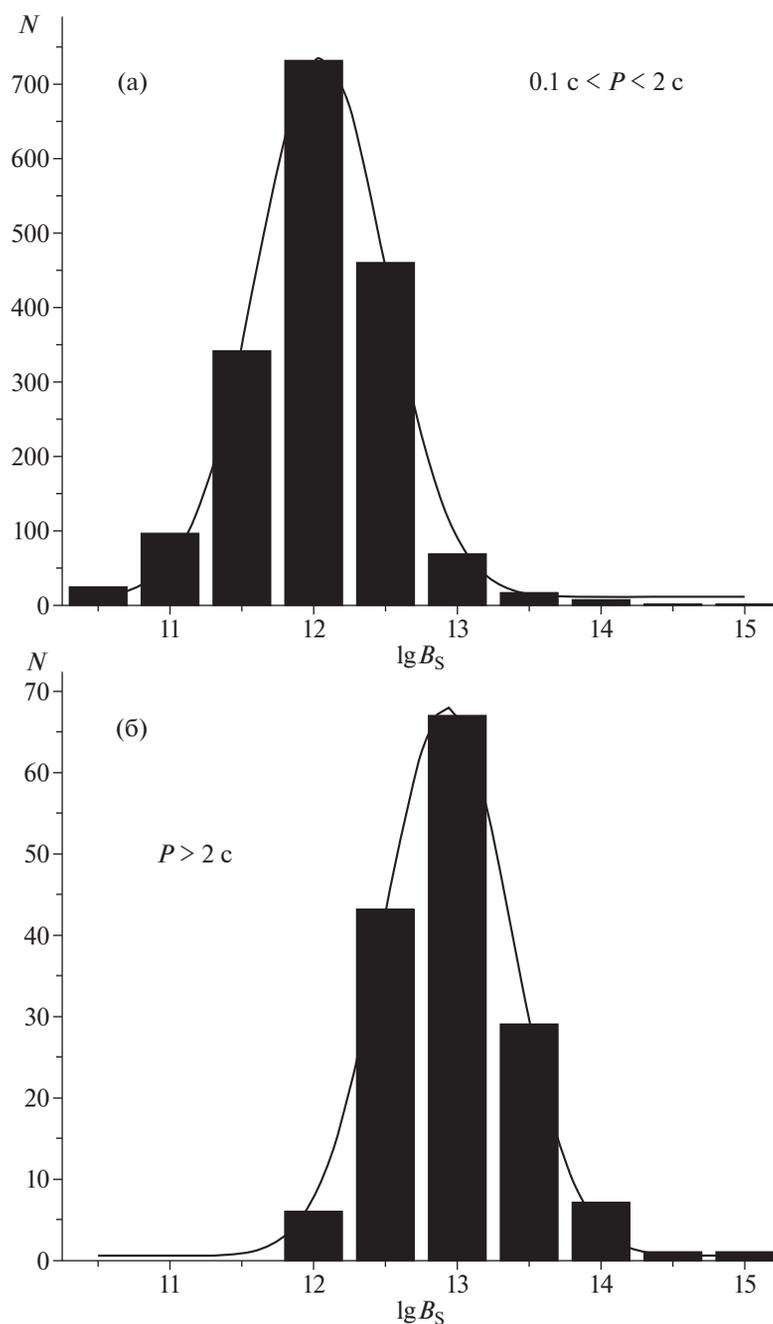


Рис. 3. Диаграмма  $dP/dt$  от  $P$  для радиопульсаров с периодами от 0.1 до 2 с.



**Рис. 4.** Распределение магнитных полей на поверхности пульсаров с периодами  $0.1 \text{ c} < P < 2 \text{ c}$  (а) и  $P > 2 \text{ c}$  (б).

величины могут быть использованы для сравнения рассматриваемых выборок. Магнитные поля из каталога ATNF [16] используются для анализа во всех известных нам работах, и необходимые коррекции полученных результатов могут быть осуществлены только после вычисления более точных значений их величин. На рис. 4 представлены распределения магнитных полей на поверхности пульсаров, отличающихся по измеряе-

мым периодам, вместе с вписанными в них гауссианами:

$$N = 724 \exp \left[ - \left( \frac{\lg B_s - 12.05}{0.90} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$0.1 \text{ c} < P < 2 \text{ c},$$

$$N = 67 \exp \left[ - \left( \frac{\lg B_s - 12.93}{0.88} \right)^2 \right], \quad P > 2 \text{ c}. \quad (7)$$

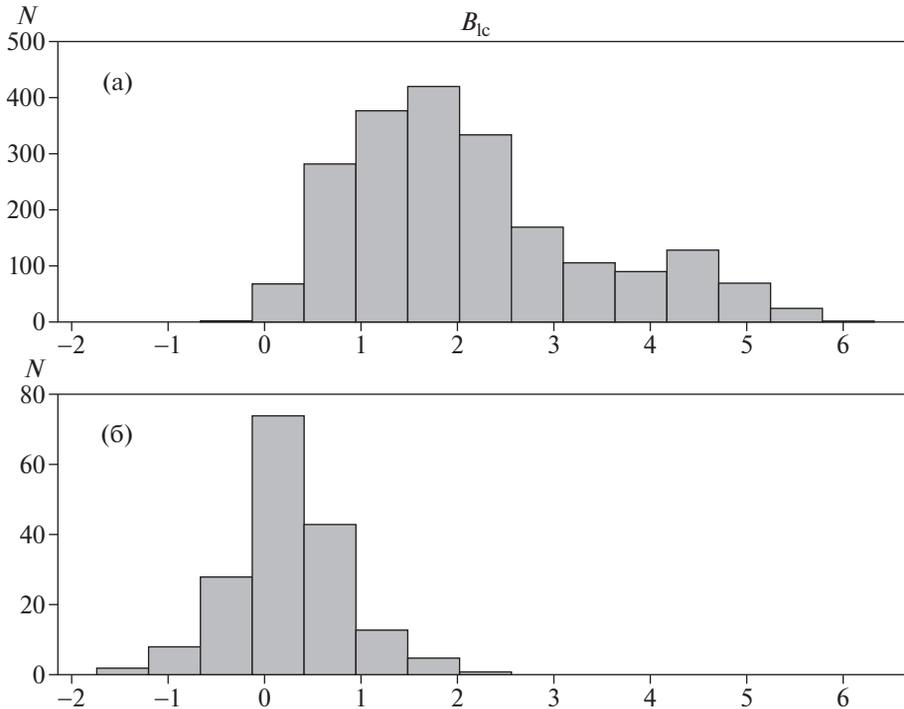


Рис. 5. Распределение магнитных полей на световом цилиндре в пульсарах с  $P < 2$  с (а) и  $P > 2$  с (б).

Как следует из этих распределений,  $B_s$  у пульсаров с более длинными периодами примерно на порядок выше (медианные значения их логарифмов равны соответственно 12.76 и 11.95). По критерию Колмогорова–Смирнова отличие значимо с вероятностью выше 0.999. Этот результат следовало ожидать, поскольку для больших значений  $P$  и  $dP/dt$  из выражения (1) должна быть выше и величина  $B$ . То же можно сказать и о распределениях  $N(B_{lc})$ ,  $N(dE/dt)$  и  $N(W_{10})$  (см. рис. 5–7), поскольку для дипольной структуры поле на световом цилиндре равно

$$B_{lc} = B_s \frac{R_*^3}{R_c^3} = \frac{8\pi^3 R_*^3}{c^3 P^3}, \quad (8)$$

где

$$R_c = \frac{c}{\Omega}, \quad (9)$$

$R_c$  – радиус светового цилиндра. Скорость потерь энергии вращения определяется выражением:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi^2 I dP}{P^3 dt}. \quad (10)$$

Квантили по критерию Колмогорова–Смирнова для распределений на рис. 5–7 превышают 3 и, следовательно, совпадение этих распределений имеет вероятность меньше  $10^{-4}$ .

Для “нормальных” пульсаров, в которых импульс формируется на умеренных, значительно меньших, чем радиус светового цилиндра, расстояниях от поверхности, ширину импульса на уровне 10% можно представить следующим выражением (см., напр., [24]):

$$W_{10} = \frac{P}{\pi} \left( \frac{r}{r_c} \right)^{1/2} = \left( \frac{2Pr}{\pi c} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Таким образом, и ширина импульса (во временной мере) должна увеличиваться с увеличением периода. Данные каталога ATNF действительно вполне согласуются с этой зависимостью (см. рис. 8),

$$\lg W_{10} = (0.61 \pm 0.21) \lg P + 1.68 \pm 0.10, \quad (12)$$

при коэффициенте корреляции  $K = 0.33$  и вероятности случайного распределения  $p = 0.004$ .

В градусной мере будет наблюдаться антикорреляция между  $P$  и  $W_{10}$ , поскольку  $W_{10}^\circ = 360^\circ W$  (мс)/ $P$  (мс)  $\propto P^{-1/2}$ .

Более интересным представляется оценка коэффициента переработки энергии вращения в наблюдаемую светимость. С этой целью из каталога ATNF взяты значения  $R_{lum}$ , которые вычислялись умножением плотности потока на частоте 400 МГц на квадрат расстояния и приведены в ка-

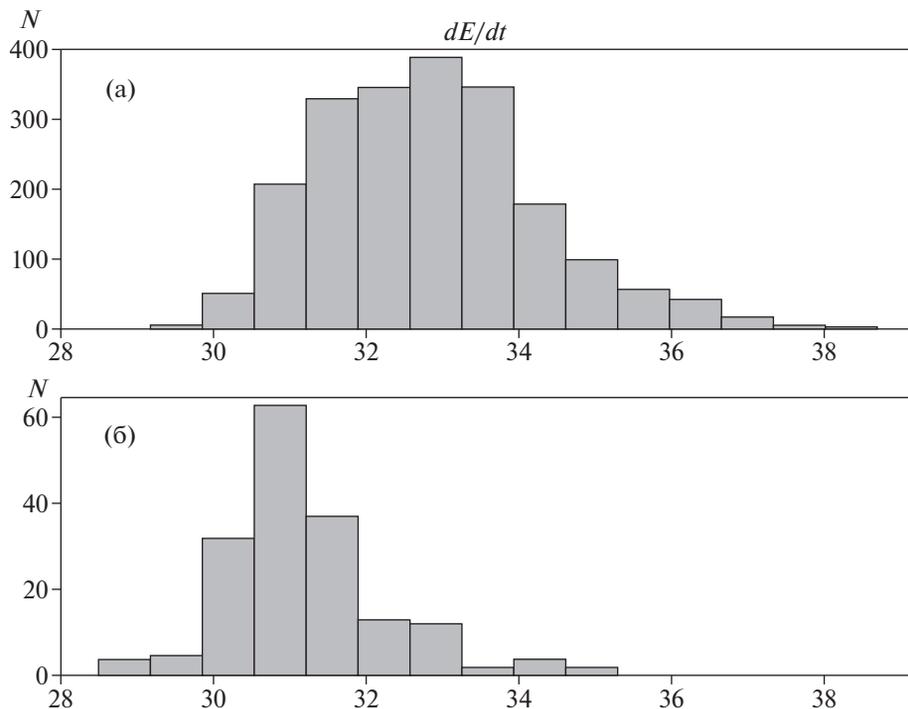


Рис. 6. Распределение скорости потери энергии вращения для пульсаров с  $P < 2$  с (а) и с  $P > 2$  с (б).

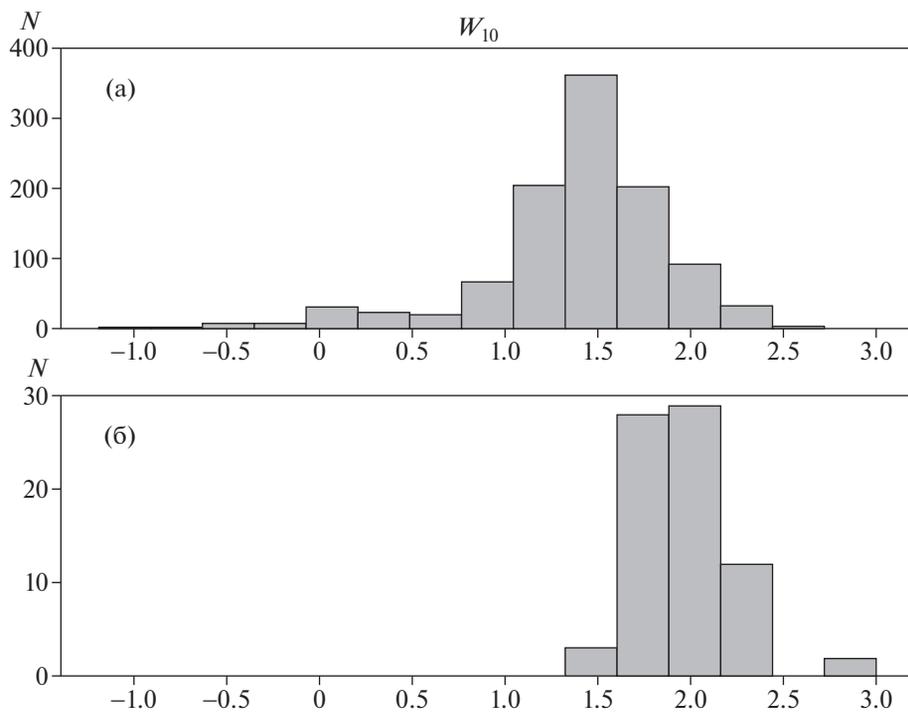


Рис. 7. Распределение ширины импульса в миллисекундах (в логарифмической шкале) для пульсаров с  $P < 2$  с (а) и  $P > 2$  с (б).

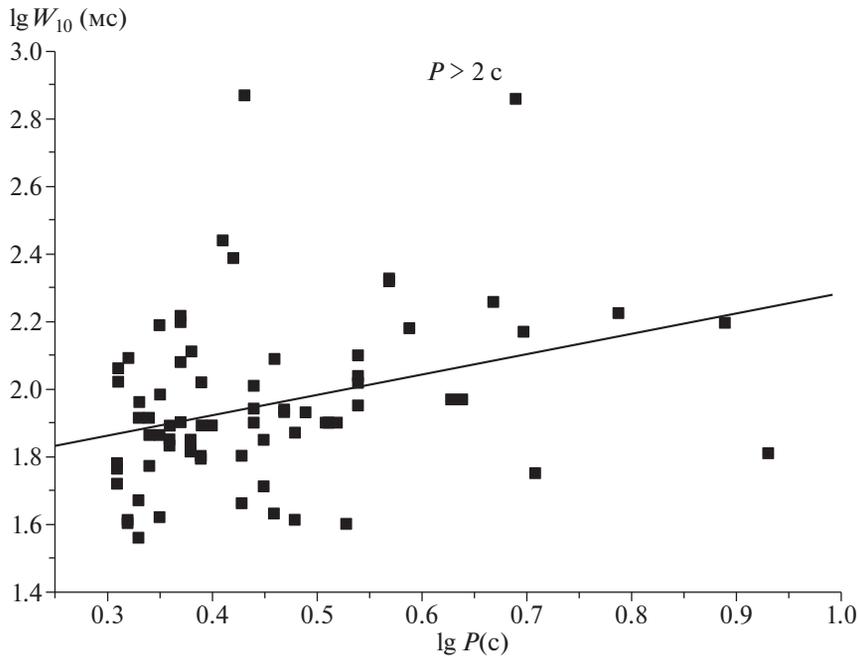


Рис. 8. Зависимость ширины импульса от периода.

талог в единицах мЯн · кпк<sup>2</sup>. В работе [25] получено уравнение для пересчета этой условной светимости в интегральную по спектру радиосветимость (в эрг/с):

$$\lg L = (1.03 \pm 0.03) \lg R_{lum} + (26.46 \pm 0.07). \quad (13)$$

Распределения вычисленных таким способом светимостей показаны на рис. 9. Среднее значение  $\langle \lg L \rangle = 28.42$  для пульсаров с  $0.1 \text{ с} < P < 2 \text{ с}$  оказывается в несколько раз выше, чем в пульсарах с более длинными периодами ( $\langle \lg L \rangle = 27.66$ ). Вписанные в эти распределения гауссианы могут быть описаны следующими уравнениями:

$$N = 128 \exp \left[ - \left( \frac{\lg L - 28.55}{1.73} \right)^2 \right], \quad (14)$$

$0.1 \text{ с} < P < 2 \text{ с},$

$$N = 10 \exp \left[ - \left( \frac{\lg L - 28.16}{1.32} \right)^2 \right], \quad P > 2 \text{ с}. \quad (15)$$

Однако по критерию Колмогорова–Смирнова эти распределения близки с вероятностью более 0.9.

На рис. 10 приведены распределения коэффициента трансформации  $\eta$  (к.п.д.),

$$\eta = \frac{L}{dE/dt}, \quad (16)$$

для двух исследуемых выборок. В пульсарах с более длинными периодами трансформация энергии вращения в радиоизлучение оказывается более эффективной: средние значения  $\lg \eta = -4.0$  и  $-3.2$  соответственно.

Таким образом, сравнение параметров двух рассматриваемых популяций приводит к выводу (1) о более быстром торможении пульсаров с  $P > 2 \text{ с}$  по сравнению с объектами с меньшими периодами, (2) о малой роли магнитодипольного торможения в долгопериодических пульсарах, у них, по-видимому, более низкие радиосветимости и более эффективная перекачка энергии вращения в наблюдаемое радиоизлучение.

### 3. ОСОБЕННОСТИ ПУЛЬСАРОВ С КАТАЛОЖНЫМИ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ БОЛЬШЕ $2.2 \times 10^{13} \text{ Гс}$

Проанализируем теперь отличие пульсаров с большими значениями дипольных магнитных полей на поверхности ( $B_s > 2.2 \times 10^{13} \text{ Гс}$ ) от остальной популяции радиопульсаров. Исключаем из анализа, как и прежде, пульсары в шаровых скоплениях и в двойных системах.

Полученная выборка более чем наполовину (на 60%) перекрывается с популяцией, рассмотренной в разделе 2 (с  $P > 2 \text{ с}$ ). Однако параметры для этой группы отличаются от параметров, обсуждавшихся в предыдущем разделе. На рис. 11 приведено распределение периодов пульсаров с

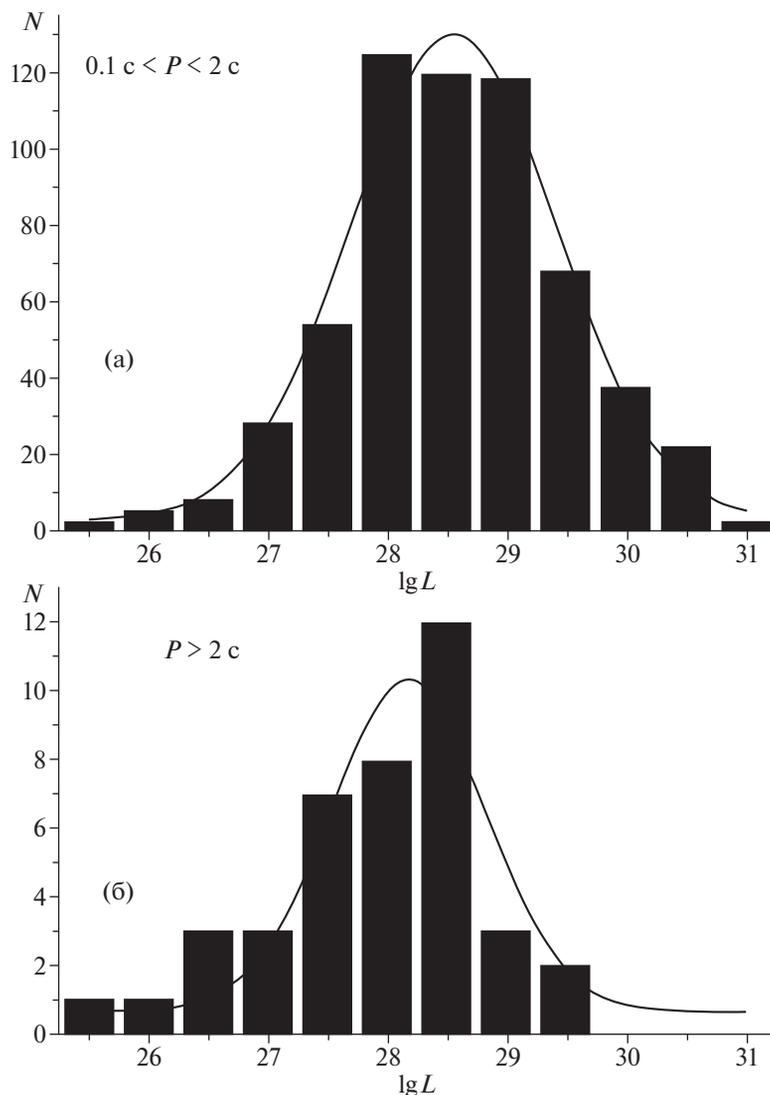


Рис. 9. Распределение светимостей для двух групп пульсаров.

магнитными полями выше  $2.2 \times 10^{13}$  Гс. Среднее значение периода для этой группы  $\langle P \rangle = 2.90$  с, что в несколько раз выше значения в максимуме распределения периодов для общей популяции нормальных пульсаров ( $\sim 0.6$  с) [22].

Рис. 12 показывает распределение производных периода для этой же выборки. Среднее значение ( $\langle \lg dP/dt \rangle = -12.29$ ) примерно на два-три порядка выше, чем у основной массы пульсаров, для которых (без учета миллисекундных пульсаров) характерное значение  $\sim 10^{-15}$ . Но самой интересной оказывается зависимость  $dP/dt$  от  $P$  (см. рис. 13). В отличие от соответствующей зависимости предыдущего раздела (уравнение (5)) здесь

наклон вписанной прямой вполне согласуется с предположением о магнитодипольном торможении ( $dP/dt \propto P^{-1}$ ),

$$\lg(dP/dt) = (-1.13 \pm 0.14) \lg P - 11.82 \pm 0.09, \quad (17)$$

при очень высоком значении коэффициента корреляции  $K = -0.87$  и вероятности случайного распределения менее  $10^{-4}$ . Для этих объектов оправдано получение оценок магнитной индукции с использованием выражения (1).

Сравнение магнитных полей на световом цилиндре (см. рис. 14) показывает, что, несмотря на большие поля на поверхности нейтронной звезды, распределение  $N(B_c)$  у этих объектов с веро-

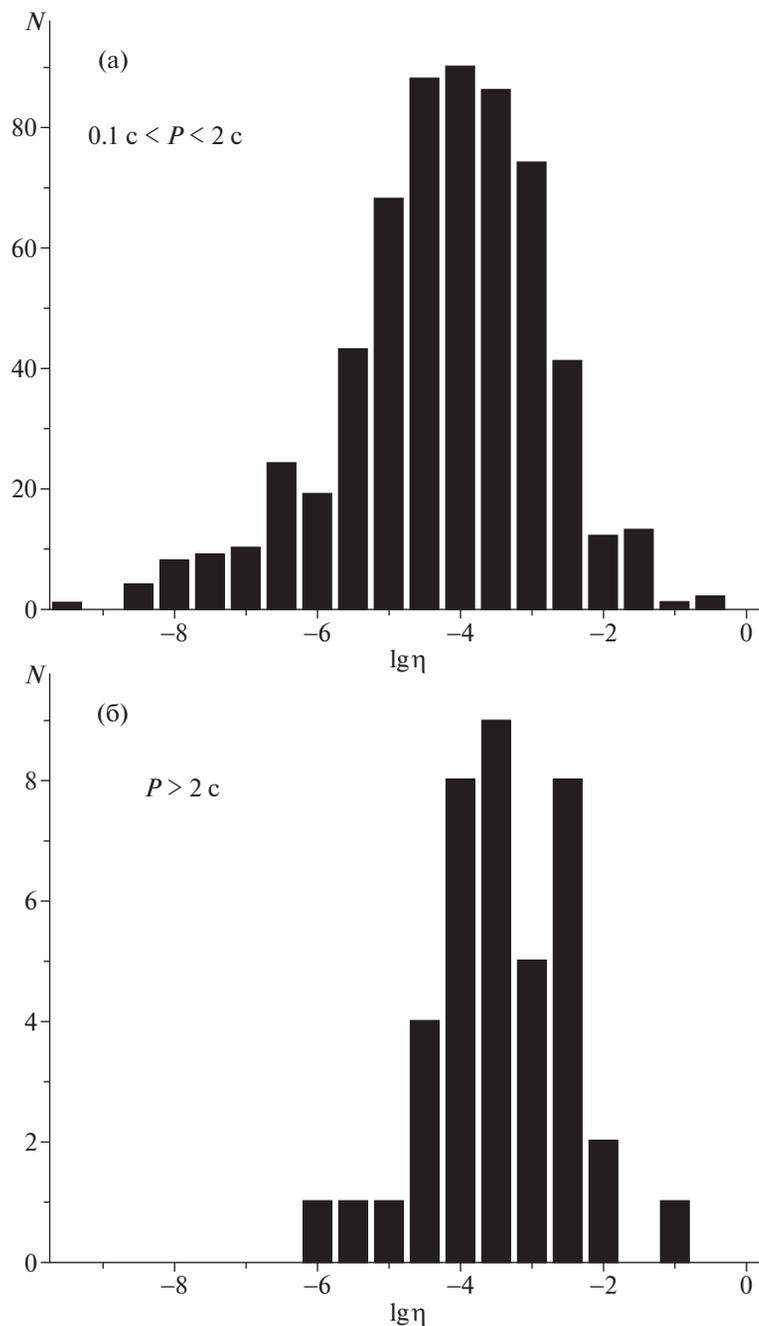


Рис. 10. Распределение коэффициента трансформации энергии вращения пульсара в его радиоизлучение.

ятностью 80% совпадает с распределением для основной популяции. В распределениях скорости потери энергии вращения (рис. 15) также нет заметного отличия.

Таким образом, для пульсаров с высокими значениями магнитных полей на поверхности характерно более быстрое торможение нейтронной звезды, причем это торможение может быть вызвано, в основном, потерей углового момента

вследствие магнитодипольного излучения. Кроме того, отметим малое значение магнитных полей на световом цилиндре, как и у выборки пульсаров с  $P > 2 \text{ c}$ .

Дополнительным и несколько неожиданным оказывается отличие пульсаров с большими магнитными полями от пульсаров с  $P > 2 \text{ c}$  при сравнении их возрастов (рис. 16) и распределений по  $Z$ -координате (т.е. по высоте над плоскостью Га-

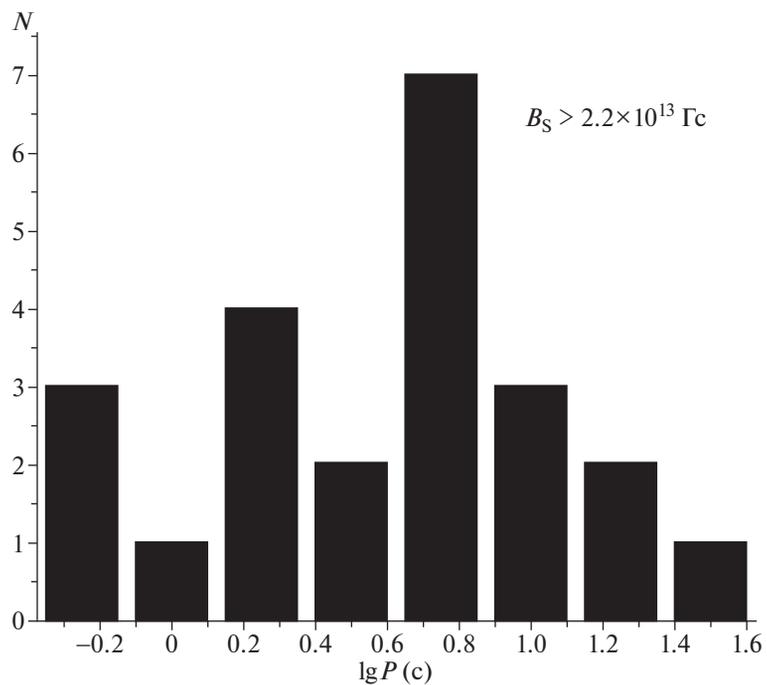


Рис. 11. Распределение периодов 23 пульсаров с большими магнитными полями на поверхности.

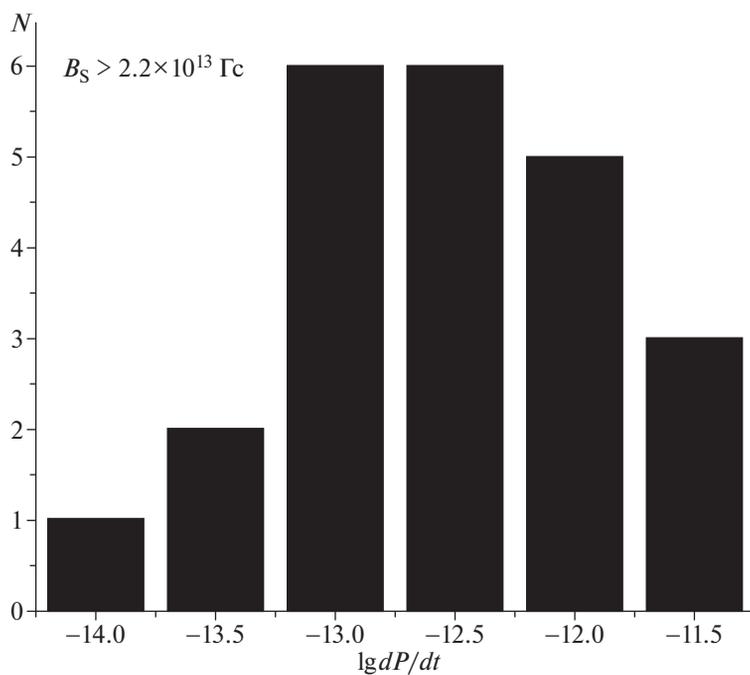


Рис. 12. Распределение производных периода 23 пульсаров с большими магнитными полями.

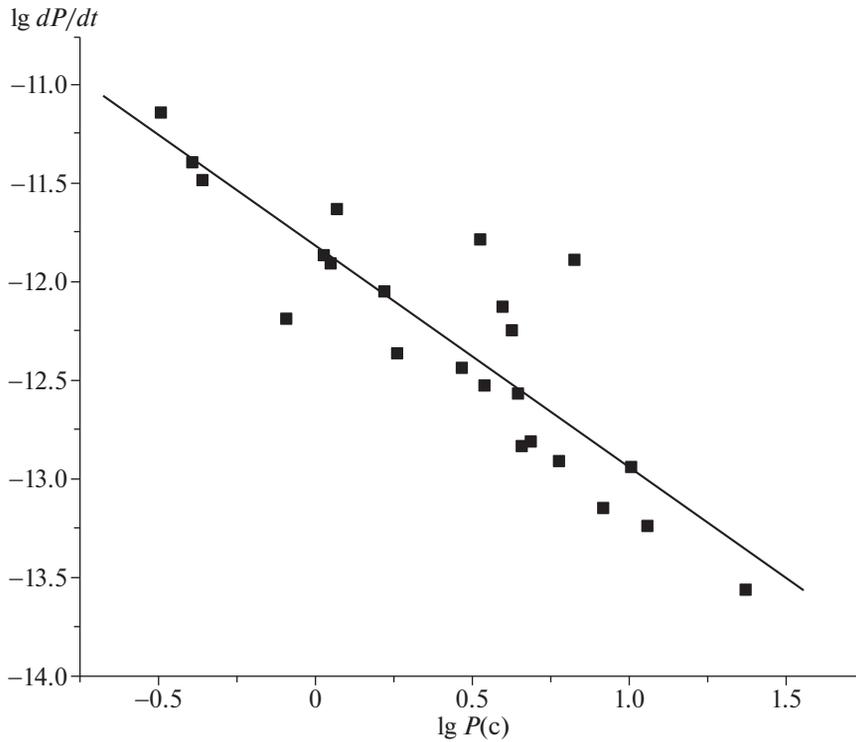


Рис. 13. Зависимость производной периода от периода для пульсаров с  $B_s > 2.2 \times 10^{13}$  Гс.

лактики). Средний возраст пульсаров, имеющих период длиннее 2 с, почти на два порядка больше, чем возраст пульсаров с большими магнитными полями. Для 155 пульсаров с  $P > 2$  с  $\langle \lg \tau \rangle = 6.80$ , а для 23 пульсаров с  $B_s > 2.2 \times 10^{13}$  Гс  $\langle \lg \tau \rangle = 4.97$ . Уравнение гауссианы для пульсаров с  $P > 2$  с может быть представлено в виде:

$$N = 47 \exp \left[ - \left( \frac{\lg \tau - 7.10}{1.13} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Свидетельством малого возраста объектов второй популяции служит также их положение в диске Галактики. За исключением одного источника с  $Z = 0.23$  кпк все остальные находятся не выше 100 пк (16 из 23 пульсаров вообще удалены не больше, чем на 20 пк). Другая картина наблюдается при анализе долгопериодических пульсаров (рис. 17). Средняя удаленность от плоскости Галактики пульсаров с  $P > 2$  с составляет 440 пк. При этом при построении рис. 17 и вычислении среднего были исключены пульсары с очень большими  $Z$ : J0011+08 ( $Z = -4.34$ ), J0928+06 ( $Z = 15.25$ ), J1846-7403 ( $Z = -10.82$ ), J2105+07

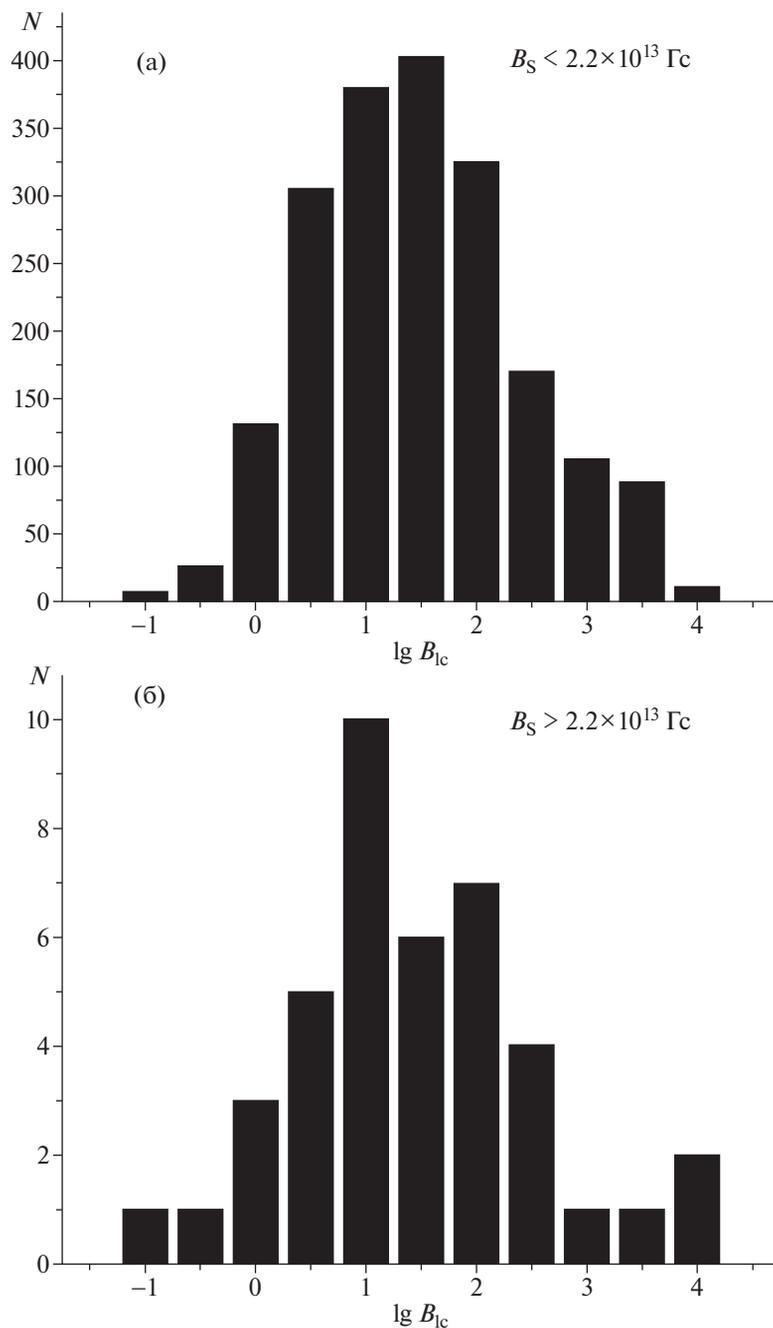
( $Z = -10.59$ ) и J2228-65 ( $Z = -17.92$ ). С учетом этих пульсаров  $\langle Z \rangle = 0.74$  кпк. Экспонента на рис. 17 описывается выражением

$$N = 252 \exp[-Z/0.27]. \quad (19)$$

#### 4. СРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАССМОТРЕННЫХ ПУЛЬСАРОВ С ПАРАМЕТРАМИ АХР/SGR

Сравним теперь особенности пульсаров, обсуждавшихся в двух предыдущих разделах, с характеристиками нейтронных звезд, проявляющих вспыхивающую активность в рентгеновском и гамма-диапазонах, а именно, аномальными рентгеновскими пульсарами (АХР) и гамма-репитерами (SGR).

Прежде всего отметим, что для этих объектов характерны большие периоды (среднее значение  $P$  по данным каталога [18] равно 6.73 с) (рис. 18) и высокие значения производных периода ( $\langle \lg dP/dt \rangle = -11.23$ ) (рис. 19). При этом средняя величина скорости потери энергии вращения  $dE/dt = 10^{33}$  эрг/с (рис. 20) не отличается от средних значений  $dE/dt$  для двух предыдущих выборок. Магнитные поля на световом цилиндре так-



**Рис. 14.** Магнитные поля на световом цилиндре для пульсаров с нормальными (а) и большими (б) магнитными полями.

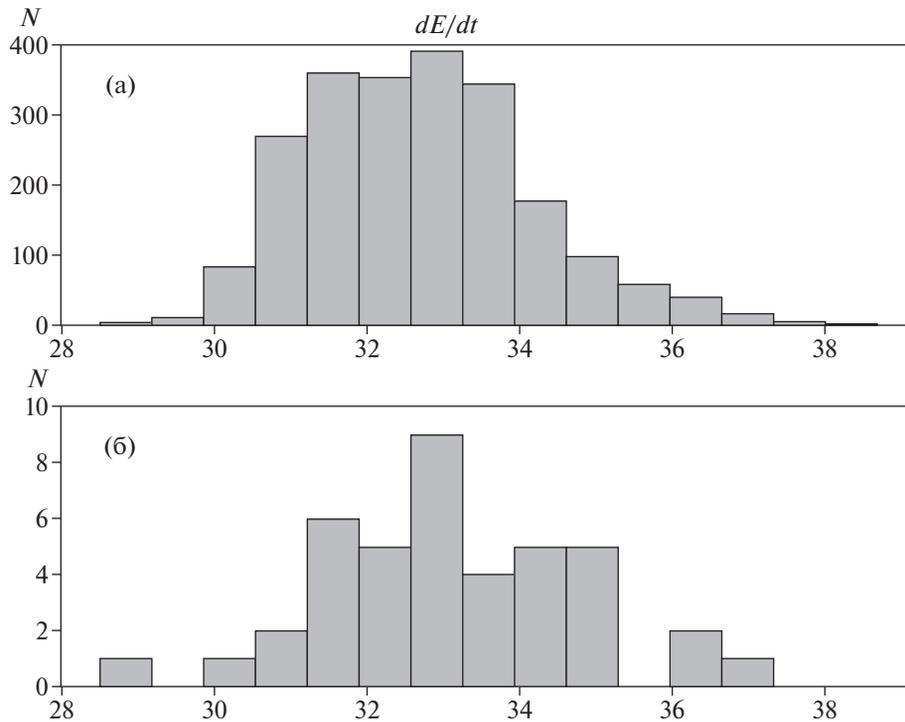
же оказываются, в среднем, того же порядка, что и для основной массы пульсаров (рис. 21).

Важно подчеркнуть, что зависимость  $dP/dt$  от  $P$  (рис. 22) согласуется с аналогичной зависимостью для пульсаров с большими значениями магнитного поля и противоположна зависимости для пульсаров с  $P > 2$  с:

$$\lg(dP/dt) = (-1.77 \pm 1.10) \lg P - 9.85 \pm 0.89. \quad (20)$$

В пределах ошибок это уравнение согласуется с предсказаниями магнитодипольной модели ( $dP/dt \propto P^{-1}$ ), но менее значимо, чем для нормальных пульсаров с  $B_S > 2.2 \times 10^{13}$  Гс. Вероятность случайного распределения равна 12%.

Близость AXP/SGR по свойствам к нормальным пульсарам с большими магнитными полями также наблюдается и в их расположении в диске



**Рис. 15.** Скорости потери энергии вращения для основной популяции (а) и пульсаров с большими магнитными полями на поверхности (б).

Галактики. Наиболее удален от плоскости (всего на 180 пк) SGR 0418+5729 [18]. Эти популяции также близки и по возрастам.

Как свидетельствует нахождение некоторых AXP/SGR в остатках сверхновых, для которых существуют оценки их возрастов, эти источники не старше десятков тысяч лет. Самый большой возраст ( $\sim 100$  тысяч лет) указан в каталоге [18] для источника Swift J1834.9–0846, который возможно связан с SNR W41.

Таким образом, среди нормальных пульсаров близки к AXP/SGR по своим характеристикам и зависимостям между ними пульсары с  $B_s > 2.2 \times 10^{13}$  Гс.

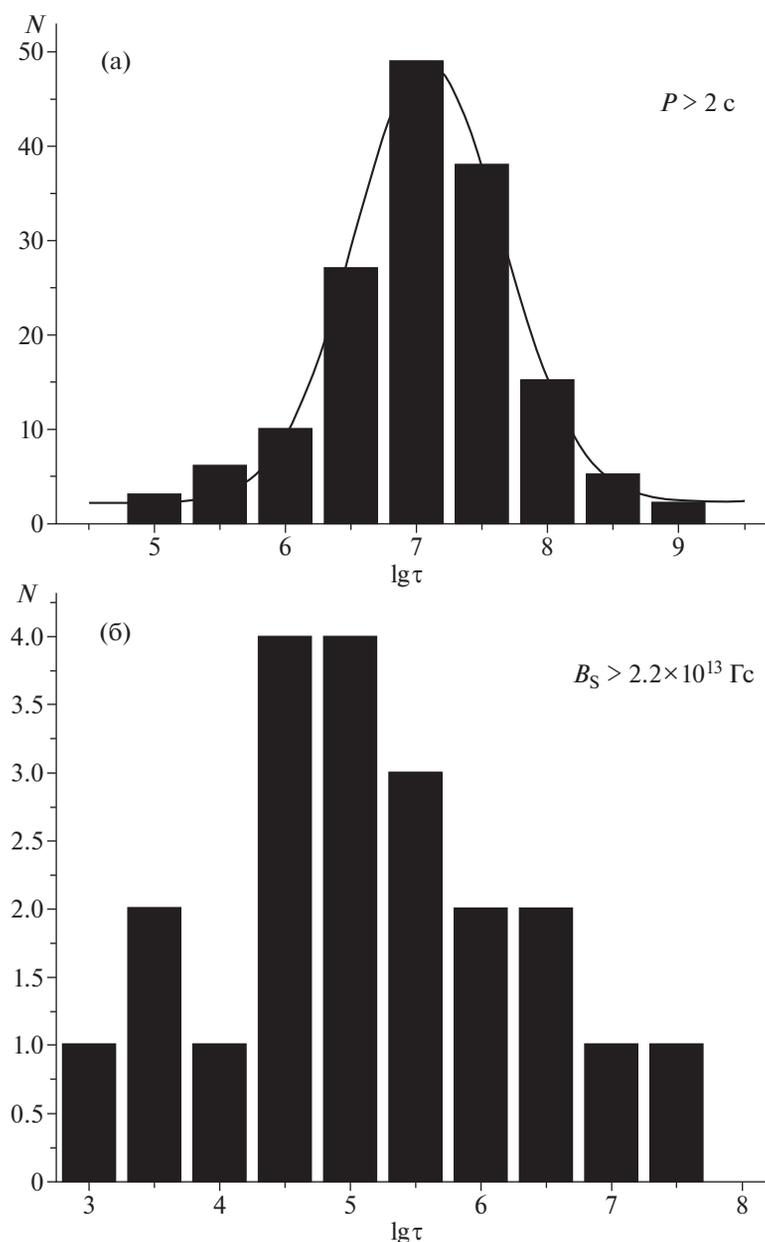
## 5. ДИСКУССИЯ. ВЫВОДЫ

В работе проведен сравнительный анализ параметров радиопульсаров с большими магнитными полями на поверхности нейтронной звезды ( $B_s > 2.2 \times 10^{13}$  Гс) и с длинными периодами ( $P > 2$  с). У этих двух популяций наблюдается принципиальное отличие в зависимости производной периода от самого периода, которое свидетельствует о том, что, если у пульсаров с большими магнитными полями может работать механизм магнитодипольного торможения, то в

долгопериодических пульсарах он неприменим, и необходимо привлечение других механизмов торможения или поиск специфических распределений параметров этих объектов и путей их эволюции. За время пульсарных исследований предпринималось много попыток объяснить расположение пульсаров на диаграмме  $dP/dt$  от  $P$  (см., напр. [26] и ссылки в ней). Все они, к сожалению, содержат результаты, сильно зависящие от выбранных моделей. Так, в [27] предполагались экспоненциальные уменьшения магнитного поля и угла между магнитным моментом и осью вращения. В [28], наоборот, затухание магнитного поля считалось несущественным, торможение вращения всех нейтронных звезд приписывалось магнитодипольному излучению, а реальный возраст пульсаров приравнивался их характеристическому возрасту.

Изменения параметров пульсаров со временем приводят, конечно, к искривлению их эволюционных треков на диаграмме  $dP/dt$  от  $P$ , но как начальные распределения параметров, так и их эволюция до сих пор остаются перспективой более тщательных исследований.

В наши задачи не входил анализ работ, касающихся положения пульсаров на диаграмме  $dP/dt(P)$  и их эволюционных треков. Мы ограни-



**Рис. 16.** Распределение характеристического возраста пульсаров с длинными периодами (а) и большими магнитными полями (б).

чились сравнением параметров только трех выбранных групп, которые расположены на этой диаграмме в верхнем правом углу, и для которых не было до сих пор проведено аналогичных исследований.

Одним из основных результатов нашей работы мы считаем отличие возрастов и пространственных распределений долгопериодических пульсаров и пульсаров с сильными магнитными полями на поверхности, включая AXP и SGR.

Пульсары с  $P > 2$  с оказываются, в среднем, приблизительно на два порядка старше и находятся на большей высоте над плоскостью Галактики. Полученные для этих объектов результаты свидетельствуют о справедливости основных представлений об эволюции радиопульсаров. Они рождаются в основном в диске Галактики, но, имея высокие скорости, со временем уходят из него. При этом их периоды увеличиваются вследствие потери энергии вращения, и на больших удалениях от диска должны накапли-

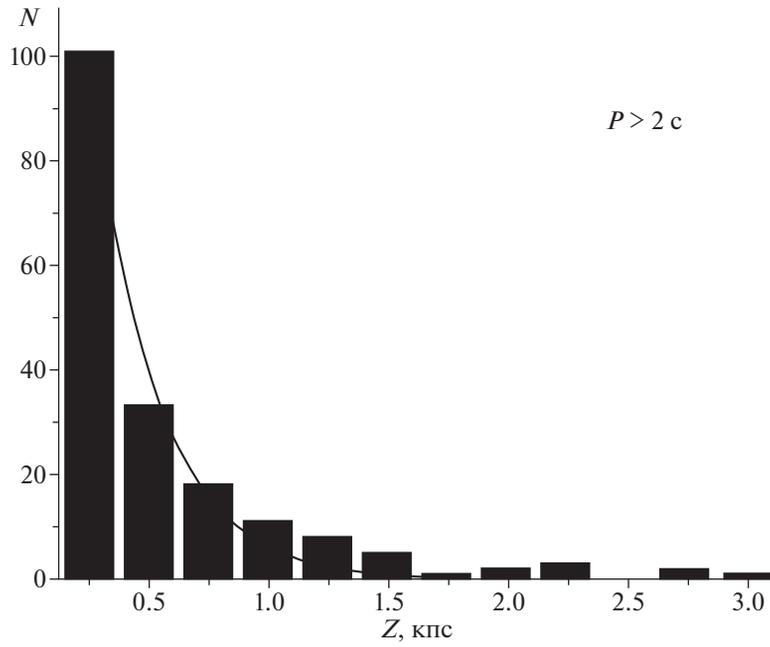


Рис. 17. Распределение долгопериодических пульсаров по высоте над плоскостью Галактики.

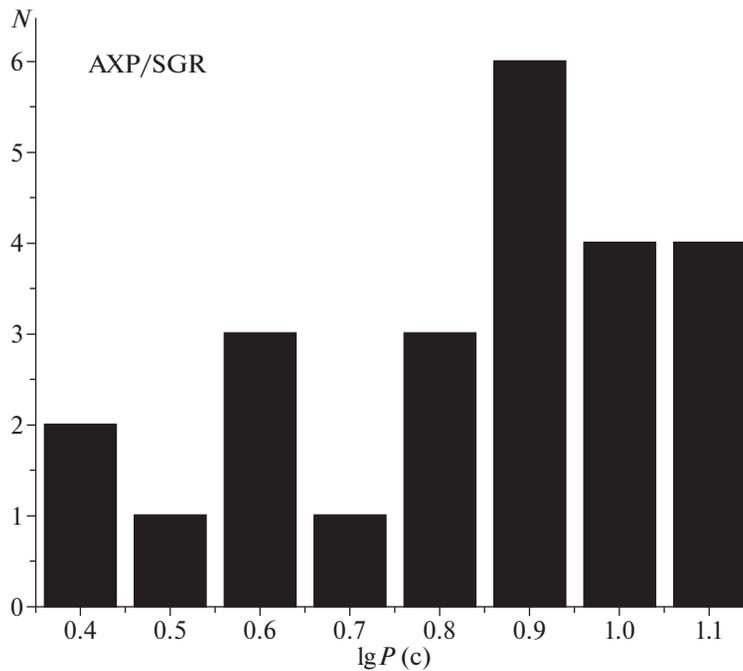


Рис. 18. Распределение периодов AXP/SGR.

ваться долгопериодические объекты. У долгопериодических пульсаров также меньше магнитные поля, что свидетельствует о затухании этих

полей. Характерные параметры AXP/SGR близки к параметрам пульсаров с  $B_s > 2.2 \times 10^{13}$  Гс. Это означает, что определяющим для их пеку-

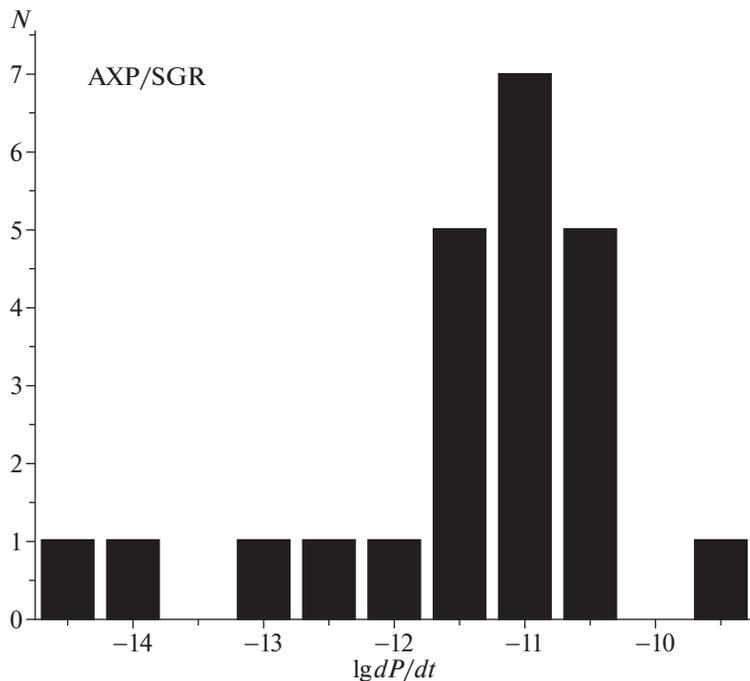


Рис. 19. Распределение производных периода, построенные по 23 объектам AXP/SGR.

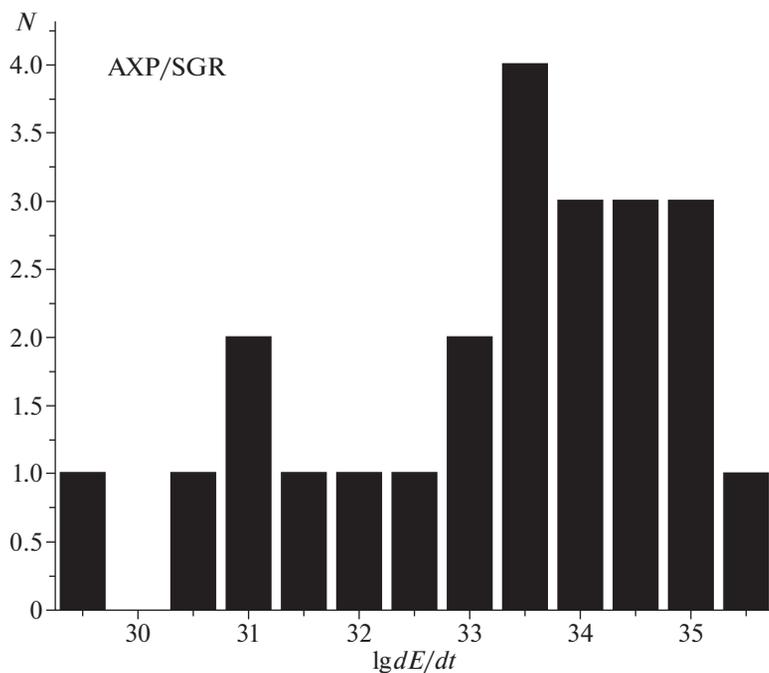


Рис. 20. Распределение скоростей потери энергии вращения для объектов AXP/SGR.

лярности является сильное магнитное поле на поверхности, а не период вращения. Детальный анализ возможных причин их отличий в наблю-

даемых проявлениях вспышечной активности мы планируем провести в следующей отдельной работе.

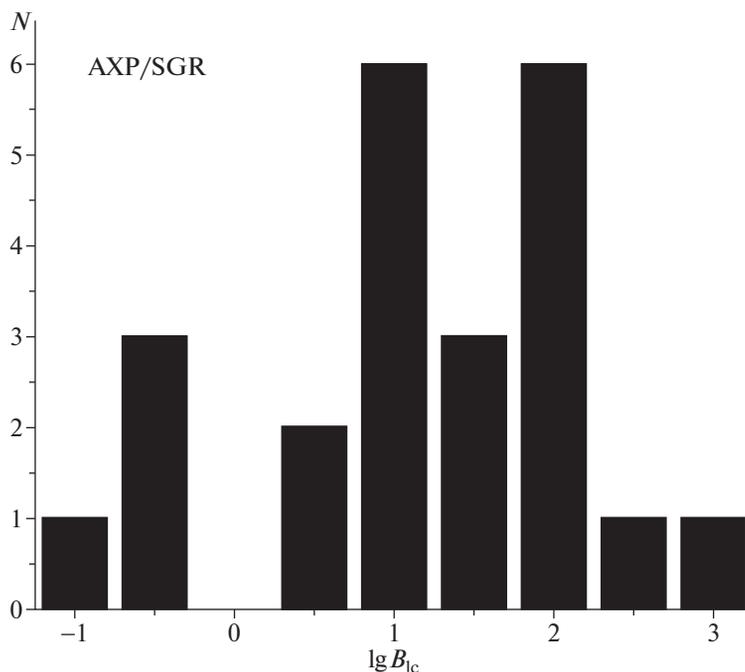


Рис. 21. Распределение магнитных полей на световом цилиндре AXP/SGR.

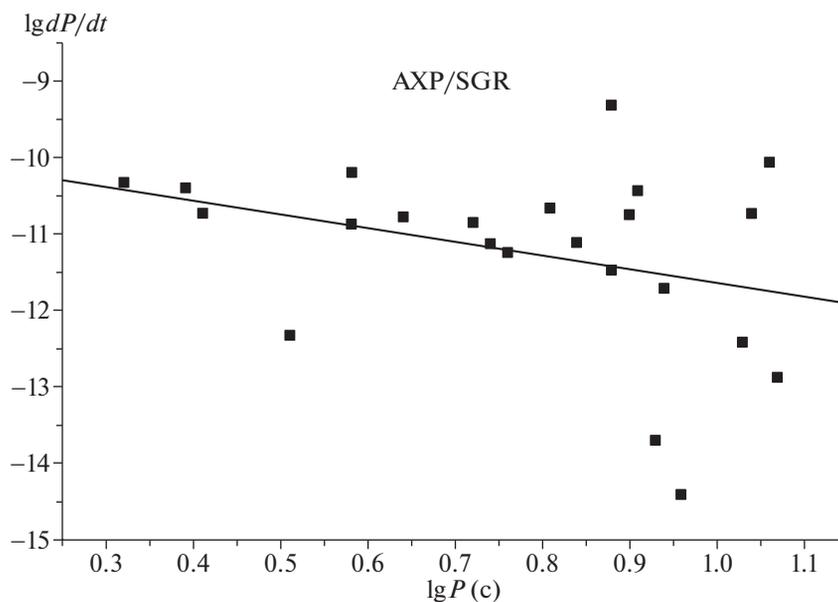


Рис. 22. Зависимость производной периода от периода для AXP/SGR.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

<p>1. R. C. Duncan and C. Thompson, <i>Astrophys. J.</i> <b>392</b>, L9 (1992).</p> <p>2. И. Ф. Малов, Г. З. Мачабели, <i>Аномальные пульсары</i> (М.: Наука, 2009).</p> <p>3. И. Ф. Малов, <i>Астрон. журн.</i> <b>89</b>, 32 (2012).</p> <p>4. B. Paczynski, <i>Astrophys. J.</i> <b>365</b>, L9 (1990).</p>	<p>5. V. V. Usov, <i>Astrophys. J.</i> <b>410</b>, 761 (1993).</p> <p>6. J. H. Trümper, J. E. K. Dennerl, N. D. Kylafis, U. Ertan, and A. Zezas, <i>Astrophys. J.</i> <b>764</b>, 49 (2013).</p> <p>7. Г. С. Бисноватый-Коган, Н. Р. Ихсанов, <i>Астрон. журн.</i> <b>91</b>, 275 (2014).</p> <p>8. И. Ф. Малов, <i>Астрон. журн.</i> <b>87</b>, 1004 (2010).</p>
--	---

9. *A. Dar and A. DeRujula*, arXiv:astro-ph/0002014 (2000).
10. *C. Alcock, E. Farhi, and A. Olimo*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2008 (1986).
11. *V. V. Usov*, Phys. Rev. Lett. **87**, 1001 (2001).
12. *R.-X. Xu, D. J. Tao, and Y. Yang*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **373**, L85 (2006).
13. *R. Ouyed, J. Dey, and M. Dey*, Astron. and Astrophys. **390**, L39 (2002).
14. *R. Ouyed, D. Leahy, and B. Niebergal*, Astron. and Astrophys. **473**, 357 (2007).
15. *R. Ouyed, D. Leahy, and B. Niebergal*, Astron. and Astrophys. **475**, 63 (2007).
16. *R. N. Manchester, G. B. Hobbs, A. Teoh, and M. Hobbs*, Astron. J. **129**, 1993 (2005).
17. *Е. Б. Никитина, И. Ф. Малов*, Астрон. журн. **94**, 598 (2017).
18. *McGill Online Magnetar Catalog* (<http://www.physics.mcgill.ca/pulsar/magnetar>).
19. *S. A. Olausen and V. M. Kaspi*, Astrophys. J. Suppl. **212**, id. 6 (2014).
20. *P. A. Sturrock*, Astrophys. J. **164**, 529 (1971).
21. *А. А. Логинов, И. Ф. Малов*, Астрон. журн. **91**, 57 (2014).
22. *А. А. Логинов, И. Ф. Малов*, Астрон. журн. **91**, 833 (2014).
23. *I. F. Malov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **468**, 2713 (2017).
24. *И. Ф. Малов, Радиопульсары* (М.: Наука, 2004).
25. *И. Ф. Малов, О. И. Малов*, Астрон. журн. **83**, 542 (2006).
26. *S. Johnston and A. Karastergiou*, arXiv:1902.03996 [astro-ph.HE] (2019).
27. *T. M. Tauris and S. Konar*, Astron. and Astrophys. **376**, 543 (2001).
28. *C.-A. Faucher-Giguère and V. M. Kaspi*, Astrophys. J. **643**, 332 (2006).

УДК 524.38/524.4

## ПОПУЛЯЦИЯ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД С ОБЩИМ СОБСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ В GAIA DR2

© 2020 г. С. А. Сапожников<sup>1,\*</sup>, Д. А. Ковалева<sup>1</sup>, О. Ю. Малков<sup>1</sup>, А. Ю. Сытов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт астрономии РАН, Москва, Россия

\*E-mail: thestriks@gmail.com

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.

После доработки 30.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

Описывается создание однородного каталога звезд с общим собственным движением на основании Gaia DR2. Был составлен предварительный список всех пар звезд в радиусе 100 пк от Солнца с разделением не более парсека, и в нем выделено подмножество содвижущихся пар — широких двойных звезд. Из рассмотрения исключены скопления и системы кратностью больше 2. Результирующий каталог насчитывает 10 358 пар звезд. Функция селективности каталога оценена с помощью сопоставления с набором случайно сопоставляемых звезд поля, и с модельной выборкой, полученной методом популяционного синтеза. Оценка масс звезд для пар каталога, оба компонента которых принадлежат главной последовательности, показывает избыток пар “близнецов” из звезд со сходными массами. Этот избыток уменьшается с увеличением разделения между компонентами. Показано, что подобный эффект не может быть следствием только функции селективности и не появляется в модели, не отдающей предпочтение формированию звезд схожих масс искусственно. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629920100096

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная доля звездного населения сосредоточена в двойных звездах. Согласно некоторым оценкам [1], половина всех звезд главной последовательности входят в состав двойных и кратных систем. Популяция двойных звезд — важная составляющая звездного населения Галактики, оказывающая влияние на эволюцию звездной системы в целом. Кроме того, параметры звездных пар могут дать нам важную информацию о процессах звездообразования.

Принято считать, что звезды рождаются большими группами, которые со временем распадаются на отдельные системы. Абсолютное большинство двойных и кратных звезд — остатки таких групп. Это означает, что, исследуя кратную систему, мы имеем основания предполагать, что эти две звезды сформировались одновременно, при одинаковых условиях [2]. Исследование звездных систем с различными характеристиками позволяет продвинуться в решении многих астрофизических вопросов (см., напр., обсуждение в работе [3]). Сама динамическая связь между компонентами пар дает возможность прямыми методами оценивать некоторые физические параметры этих компонентов. Взаимодействие же между тесными компонентами приводит к образованию

различных привлекательных для изучения астрономических объектов: новых, сверхновых типа Ia, пульсаров, симбиотических двойных звезд.

В настоящей работе мы рассматриваем популяцию широких двойных звезд. Под этим названием мы будем понимать пары, расстояние между компонентами которых достаточно велико, чтобы их эволюция протекала так же, как у одиночных звезд. Среди таких двойных есть как пары с наблюдаемым орбитальным движением, так и пары с общим собственным движением (содвижущиеся) с орбитальными периодами от нескольких тысяч до миллионов лет и с расстоянием между компонентами до многих тысяч астрономических единиц [4]. Широкие двойные связаны слабо, и могут быть легко разрушены неоднородностями потенциала Галактики, например, из-за близкого прохождения гигантских молекулярных облаков. Это делает такие системы ценными индикаторами динамического окружения Галактики. Распределение широких двойных звезд по массам компонентов и по расстоянию между ними позволяет выяснять особенности процессов звездообразования.

Настоящая работа посвящена исследованию свойств популяции широких двойных и содвижущихся звезд в пределах до 100 пк от Солнца, выде-

ленной при исследовании каталога кандидатов в пары с общим собственным движением [5], созданного на базе данных Gaia DR2.

В разделе 2 кратко изложены принципы создания каталога и его очистки, в разделе 3 мы исследуем и обсуждаем параметры выделенной популяции двойных звезд с общим собственным движением. В разделе 4 сформулированы выводы.

## 2. КАТАЛОГ ДВОЙНЫХ И СОДВИЖУЩИХСЯ ЗВЕЗД

Список кандидатов в двойные звезды был выбран из объектов каталога Gaia DR2, имеющих значение параллакса  $10 \leq \varpi \leq 100$  mas (mas – milli arc second, миллисекунда дуги), что соответствует, при оценке расстояния до звезды по параллаксу  $\frac{1000}{\varpi_{\text{мсд}}}$  [пк], звездам, расположенным в объеме шарового слоя с внутренним радиусом 10 пк и внешним радиусом 100 пк вокруг Солнца. Нижняя граница расстояния до Солнца обусловлена вычислительными ограничениями, связанными с тем, как происходит отбор компонентов в двойные (см. Приложение). Верхнее ограничение на расстояние (100 пк) выбрано по ряду следующих причин. В этом объеме характерная относительная ошибка параллакса не превышает 10%, что, собственно, и позволяет для оценки расстояний пользоваться значением параллакса как указано выше (см., напр., [6, 7]). Кроме того, каталог Gaia DR2 со стороны слабых звезд полон до  $G \approx 17^m$  [8], что означает, что в пределах 100 пк он включает все звезды нижней части главной последовательности, по крайней мере, до спектрального подкласса M4.5 (такие звезды, согласно данным Мамажека<sup>1</sup> имеют абсолютную звездную величину  $G \approx 12^m$ ), а в пределах видимости Gaia (до видимой величины  $G \approx 21^m$ ) находятся все карлики до спектрального подкласса M10.

В качестве потенциальных кандидатов в компоненты двойных рассматриваются не все источники Gaia в этой области, а только удовлетворяющие ограничениям на качество астрометрического и фотометрического решения (см. [9], а также Gaia DR2 Known Issues<sup>2</sup>, и статью по Gaia DR2 astrometry<sup>3</sup>).

Ограничения на качество астрометрического решения следующие: во-первых, параметр RUWE (Renormalized Unit Weight Error) не превышает

<sup>1</sup> [http://www.pas.rochester.edu/~emamajek/EEM\dwarf\\_UBVI\\_JHK\\_colors\\_Teff.txt](http://www.pas.rochester.edu/~emamajek/EEM\dwarf_UBVI_JHK_colors_Teff.txt)

<sup>2</sup> <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/dr2-known-issues>

<sup>3</sup> [https://www.cosmos.esa.int/documents/29201/1770596/Lindgren\\_GaiaDR2\\_Astrometry\\_extended.pdf/1ebddb25-f010-6437-cb14-0e360e2d9ff09](https://www.cosmos.esa.int/documents/29201/1770596/Lindgren_GaiaDR2_Astrometry_extended.pdf/1ebddb25-f010-6437-cb14-0e360e2d9ff09)

1.4, и, во-вторых, номинальная относительная ошибка параллакса не может быть более 10%. Качество фотометрического решения проверяется ограничением на т.н. “фактор избытка потока” (Flux Excess Factor [9]). Введение указанных ограничений отфильтровывает множество слабых источников, сосредоточенных, в основном, в направлении центра галактики с плотностью, сильно превышающей ожидаемую, исходя из представления о распределении звезд в Галактике. Мы предполагаем, что эти источники могут быть более далекими звездами, для которых из-за фона неба и большой плотности источников в плоскости галактики надежность определения параллакса низка.

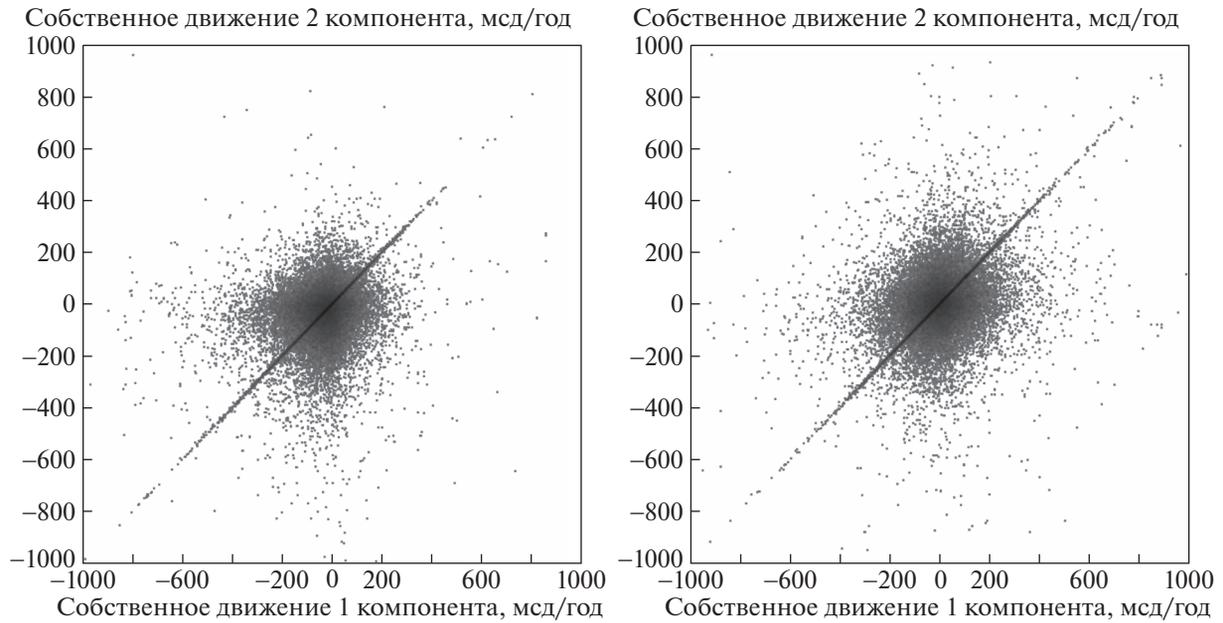
Описанным критериям удовлетворяют 40% источников Gaia в радиусе 100 пк. Эти 242 122 источника трактуются как те звезды, среди которых мы производим поиск двойных и содвигущихся звезд.

Чтобы рассмотреть вопрос о том, является ли каждая конкретная пара звезд двойной системой, нужно попарно сопоставить их параметры. Делать это для разных параметров для всех возможных пар в ансамбле крайне непрактично, поэтому составляется предварительный список возможных парных комбинаций звезд, расположенных друг к другу ближе 1 пк (в определении положения звезды в трехмерном пространстве фигурирует расстояние от Солнца, определенное как  $d[\text{пк}] = \frac{1000}{\varpi[\text{мсд}]}$ ). Для оптимизации составления

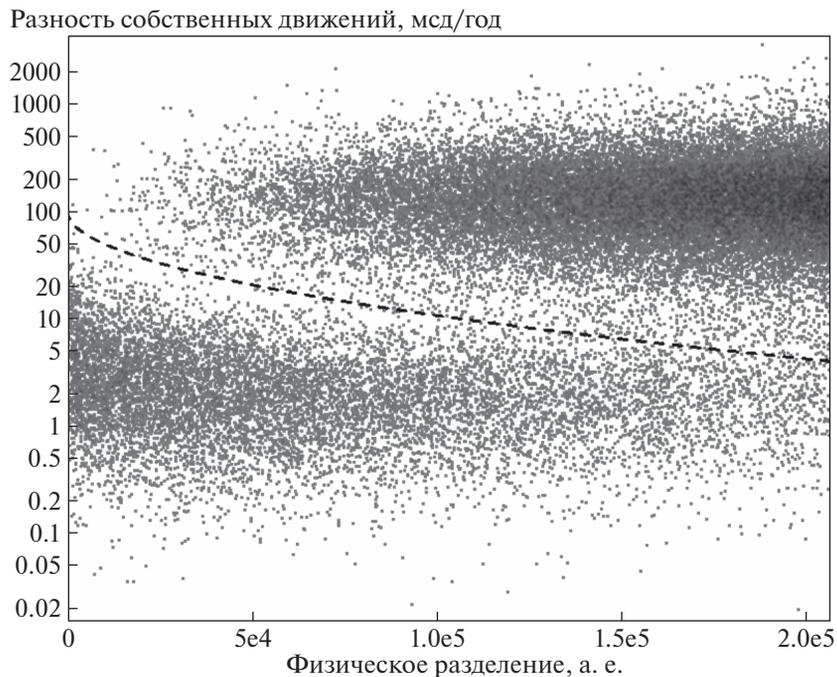
такого списка, слишком затратного по времени при простом решении задачи, реализуется алгоритм, подробно описанный в Приложении.

Мы полностью удаляем из нашего списка области неба, соответствующие известному рассеянному скоплению Гиады, а также движущейся группе (по другим сведениям, скоплению) Мамажек 1, поскольку в этих областях не представляется возможным разделить двойные звезды и содвигущиеся члены. Для пар из результирующего списка (39 445 пар) были рассчитаны параметры относительного движения – разность собственных движений  $\Delta\mu$ , проекция относительного движения (в единицах линейной скорости)  $dV = |d|\Delta\mu$ . На рис. 1 показано, как в ансамбле пар звезд, расстояние между которыми  $d \leq 1$  пк, выделяется подмножество звездных пар со сходным собственным движением компонентов. Более того, при учете расстояния между компонентами становится заметно, как ансамбль разделяется на два подмножества и по физическому разделению: пары с большой разностью собственных движений преимущественно более широки, а с малой – более тесны (см. рис. 2).

Мы трактуем это как разделение на “случайные совпадения” и содвигущиеся/двойные



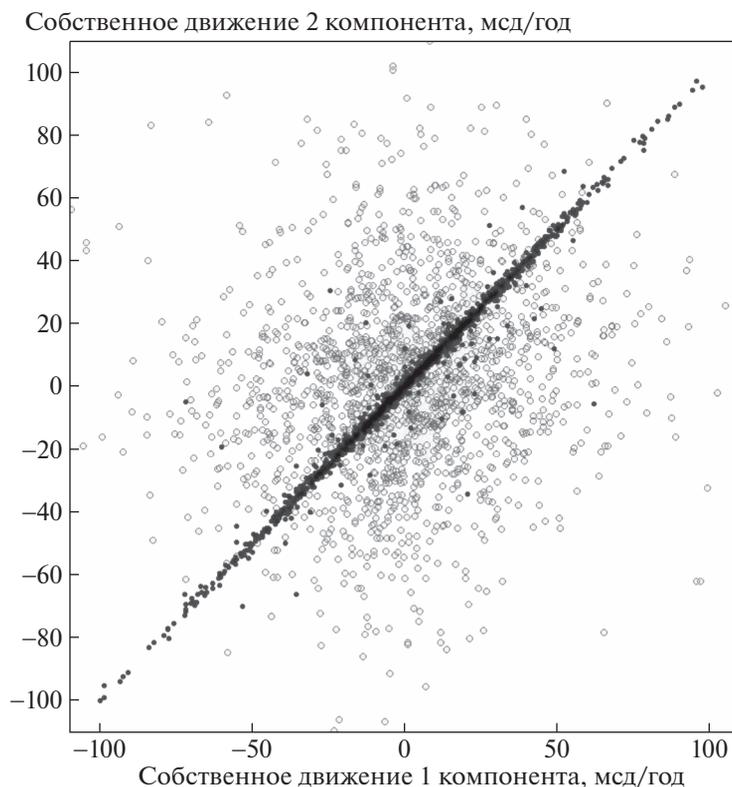
**Рис. 1.** Распределение компонентов пар по собственному движению по склонению (слева) и прямому восхождению (справа). Положение отдельных точек по двум осям показывает собственное движение двух компонентов. Видна значительно более населенная диагональ, соответствующая парам с общим собственным движением.



**Рис. 2.** Распределение звездных пар по диаграмме “физическое разделение–разность собственных движений”. Звездные пары разделяются на две группы, критерий для формального разделения между ними указан штриховой линией на рисунке.

звездные пары, и вводим эмпирический критерий, связывающий физическое разделение и разность собственных движений:  $\lg(\Delta\mu) < 2 - 1.4\sqrt{S}$ .

Здесь  $S$  – физическое разделение в парсеках. Пары, удовлетворяющие этому критерию, мы включаем в наш каталог и считаем кандидатами в



**Рис. 3.** Распределение по лучевой скорости компонентов звездных пар. Удовлетворяющие нашему условию на собственные движения и физическое разделение показаны жирными точками, а не удовлетворяющие – незаполненными.

двойные системы, имеющими связанную природу (либо гравитационно связанные широкие двойные звезды, либо члены содвигущихся групп). Независимым образом примененный критерий может быть оценен путем сравнения лучевых скоростей для пар звезд, в которых для обоих компонентов они известны. Таких пар всего в списке 3591 (9%); из них предложенному эмпирическому критерию удовлетворяют 1636.

Построим для лучевых скоростей диаграмму, аналогичную рис. 1 для собственных движений, она показана на рис. 3. Видно, что лучевые скорости компонентов пар, удовлетворяющих выбранному критерию, выделяются высокой степенью согласия. Среди 46 пар, удовлетворяющих принятому эмпирическому критерию, для которых разность лучевых скоростей компонентов превышает 10 км/с, в 32 случаях номинальные ошибки определения лучевой скорости достаточно велики, чтобы объяснять такое расхождение. Сопоставление данных об оставшихся 14 парах с базами данных SIMBAD и BDB [10] показывает, что в их состав входят вращательно-переменные (тип переменности *rotating variables* в Общем каталоге переменных звезд [11]) и спектрально-двойные звезды, в связи с чем определенная в рамках Gaia DR2 лучевая скорость может быть связана с ины-

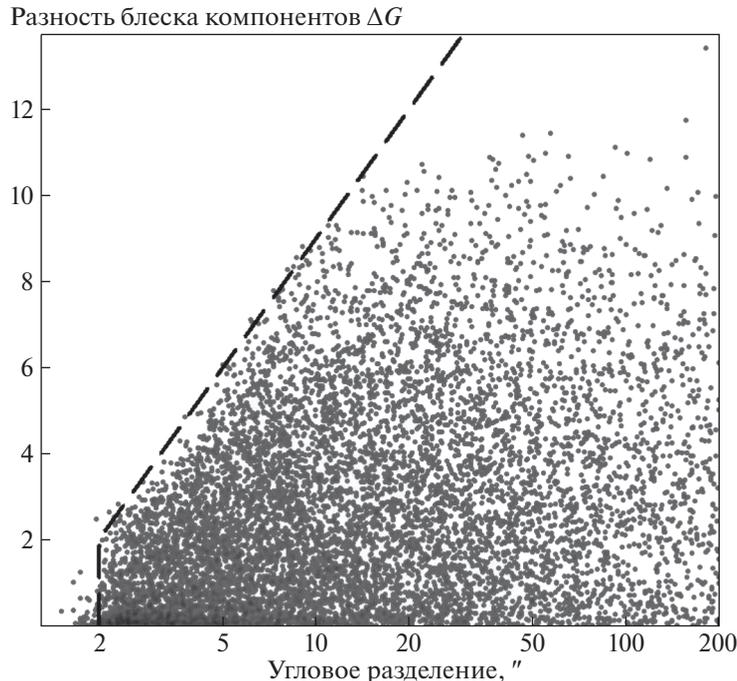
ми, чем пространственное движение, эффектами. Для двух пар, отождествленных с двойными звездами HD 53229 и HD 95123, лучевые скорости слабых компонентов определены равными соответственно +568 и -715 км/с, при лучевых скоростях главных компонентов 14 и 28 км/с. Это может быть проявлением эффекта некорректного определения лучевых скоростей в плотных звездных полях (см. Gaia DR2 Known Issues, а также [12]), поскольку угловое разделение между компонентами в этих парах составляет 4.6 и 4.5 mas соответственно.

10 358 пар звезд, удовлетворяющие описанному эмпирическому критерию, составляют каталог кандидатов в широкие двойные системы, компоненты которых обладают общим собственным движением. Далее в тексте в отношении этих систем используется термин “двойные звезды”.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

#### 3.1. Полнота каталога

Степень полноты созданного каталога широких двойных систем на расстоянии от 10 до 100 pc от Солнца определяется несколькими факторами. Во-первых, она ограничена степенью полноты Gaia DR2. Известно, что каталог Gaia DR2 су-



**Рис. 4.** Связь предельной разницы блеска компонентов с угловым разделением. Предельная разница блеска с определенным моментом пропорциональна логарифму углового разделения: штриховой линией для  $\rho \geq 2''$  проведен лимит  $\Delta G_{\text{lim}} < 10 \lg \rho$ .

щественно неполон для звезд ярче примерно  $G \approx 6^m$ , практически достигая полноты только для интервала звездных величин  $12 \leq G \leq 17$  [8]. Кроме того, неполнота каталога может проявляться для звезд с высоким собственным движением (в близкой окрестности Солнца таких звезд больше) и в плотных звездных полях.

Неоднородность покрытия источниками Gaia DR2 небесной сферы в микромасштабе, отражающая закон сканирования, равно как и полное удаление из созданного каталога источников, ассоциированных со скоплениями, не должны оказывать принципиального влияния на свойства полученной выборки.

Кроме того, на полноту результирующего каталога двойных звезд влияет способ отбора источников из данных Gaia DR2: (а) нами были отобраны только те, для которых в каталоге представлены параллаксы; (б) мы применили фильтры для отбора “астрометрически чистых” решений. При этом фильтр по относительной ошибке параллакса отсеивает преимущественно более далекие звезды. Вероятность пройти эти фильтры (т.е. иметь достаточно высокое качество астрометрического и фотометрического решения), в частности, ниже среднего для неразрешенных двойных звезд и компонентов двойных с выраженным орбитальным движением, и равна нулю для пар, угловое расстояние между компонентами которых

меньше или равно 2 mas. Для угловых расстояний между компонентами, больших 2 mas, связь предельного углового разрешения с разностью блеска между компонентами выражается соотношением  $\Delta G_{\text{lim}} \propto \lg \rho$  for  $\rho \geq 2$  мсд (см. также обсуждение в [13]). Этот эффект селекции, очевидно, преимущественно выделяет на малых угловых расстояниях пары с малой разностью блеска (см. рис. 4).

Даже после исключения из рассмотрения областей пространства, в которых расположены звезды скоплений Гиады и Мамајек 1, каталог содержит заметное количество пар, один или оба компонента которых входят в более чем одну пару. Как показывает отношение расстояний между компонентами в группах звезд, состоящих из более чем одной пары, среди них могут быть иерархические кратные звездные системы; однако скорее всего, в основном, это звезды движущихся групп. Обнаружено около 400 пар, имеющих общий компонент с другой парой. Они были удалены из каталога, чтобы избежать искажений при анализе характеристик ансамбля двойных звезд. После отсева кратных звезд в выборке остается 9977 пар.

Из общих соображений можно было бы ожидать, что часть компонентов пар из каталога (10–13%, основываясь на статистике кратности [14, 3]) может быть представлена неразрешенными

двойными звездами (см. также обсуждение пар с различающимися лучевыми скоростями компонентов в разделе 2). С другой стороны, принятый при составлении каталога порядок фильтрации источников по качеству астрометрического и фотометрического решения должен снизить эту долю. Проведенное авторами исследование показателей качества решения DR2 (RUWE, Flux Excess Factor) для известных тесных двойных звезд ( $\rho \leq 2$  mas), взятых из каталога идентификаторов двойных и кратных звезд ILB [15] показало следующее. 3537 тесных пар отождествлены как неразрешенная двойная звезда с источниками Gaia DR2, для которых определены значения параллакса  $\varpi \geq 10$  mas. Из этих источников Gaia DR2 принятый фильтр по качеству решения не проходят 2180, или 62%. Для сравнения, из отождествлений источников Gaia DR2 со звездами Hipparcos тот же фильтр не проходят лишь 8% объектов. Это позволяет предположить, что использование рекомендованных фильтров привело, в частности, к существенному снижению числа компонентов, являющихся неразрешенными двойными звездами.

### 3.2. Анализ свойств выборки

Рассмотрим распределение пар выборки по угловому разделению между компонентами (рис. 5а), по расстоянию между компонентами в проекции на небесную сферу (рис. 5б) и в линейном пространстве (рис. 5в). Распределение по угловому разделению между компонентами (рис. 5а) в логарифмической шкале оказывается плоским в диапазоне  $3 \leq \rho \leq 20''$ , и убывающим при больших значениях  $\rho$ . Отметим, что, хотя значение параллакса участвует в вычислении обоих линейных расстояний, точность его определения более существенна для расстояния в трехмерном пространстве. Это отражается на распределениях: распределение по проекции расстояния между компонентами (рис. 5б) имеет сходный характер с распределением на рис. 5а, убывая линейно в логарифмической шкале после 300–400 а. е. (что согласуется с оценкой  $10^{2.5}$  а. е. [13]). Распределение же по расстоянию между компонентами в трехмерном пространстве в логарифмической шкале возрастает до  $\approx 0.5$  пк, т.е. до  $10^5$  а. е.

Несмотря на принятое ограничение на относительную ошибку параллакса, равную 10%, при расстояниях между компонентами, характерных для двойных звезд, малые относительные ошибки параллакса могут привести к большим относительным ошибкам определения расстояния между звездами. Чтобы отдельно рассмотреть распределение по параметрам более чистой, хоть и менее полной выборки, мы вводим подвыборку двойных звезд, в которых оценка номинальной ошибки

определения расстояния по параллаксу составляет не более 0.1 пк:  $\delta_d < 0.1$ ,  $\delta_d = \frac{1000}{\varpi - \delta_\varpi} - \frac{1000}{\varpi}$  (назовем ее выборку I). На рис. 5 распределения для выборки I представлены серой гистограммой с заливкой. Видно, что введение ограничения на ошибку расстояния значительно уменьшает долю двойных с крайне большими разделениями (более 50 000 а. е.), и приводит к смещению максимума распределения в логарифмической шкале в сторону меньших значений.

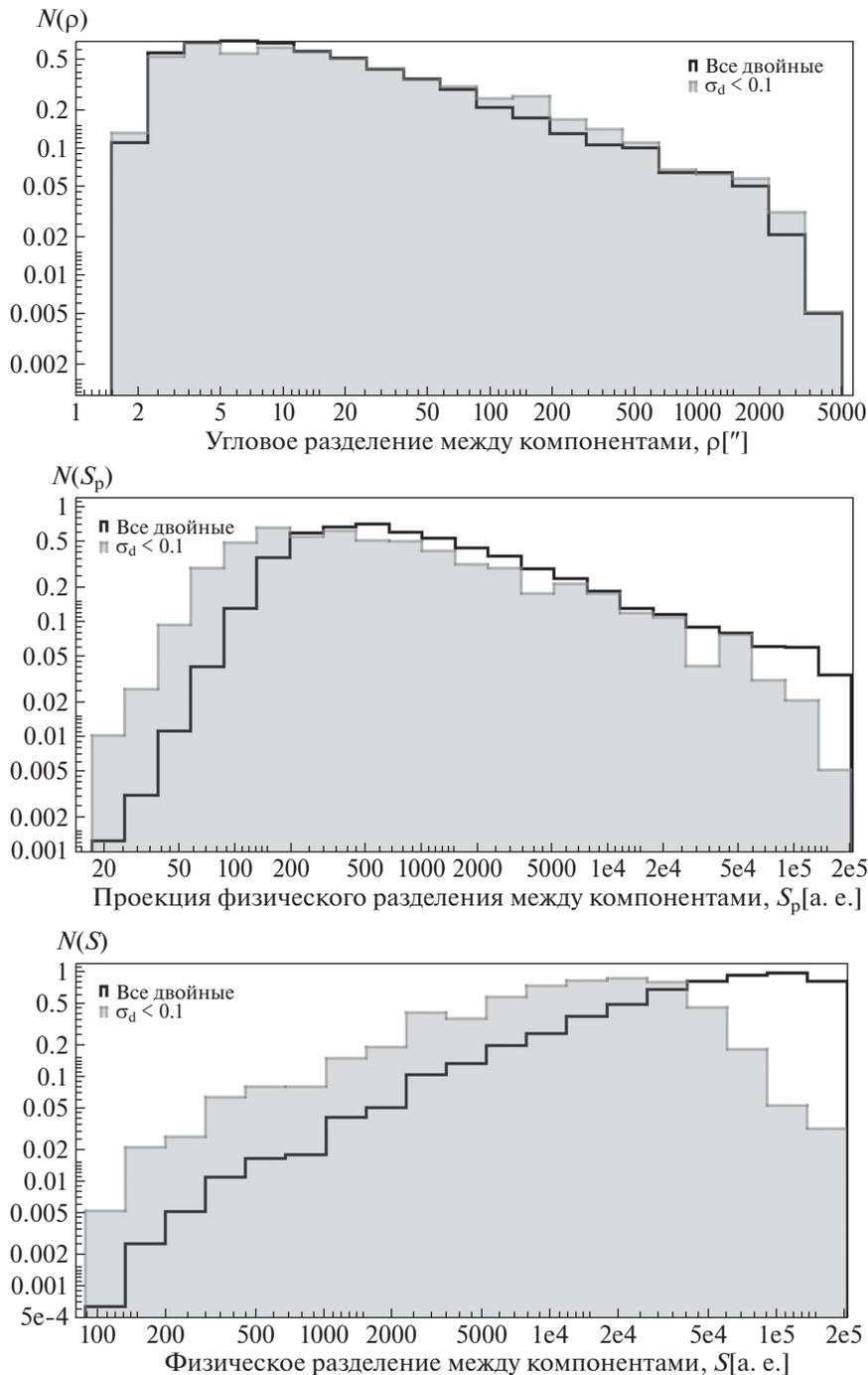
Мы используем абсолютные звездные величины в фотометрической полосе  $G$  и цвет, полученный из разности звездных величин в полосах BP и RP Gaia, чтобы построить диаграмму Герцшпрунга–Расселла (рис. 6). По положению на диаграмме можно выделить компоненты, принадлежащие к главной последовательности, для которых оцениваем массы с использованием таблиц Мамажека<sup>4</sup> по абсолютной звездной величине в полосе  $G$ . При этом мы пренебрегаем вероятностью нахождения в каталоге неразрешенных двойных звезд и звезд на стадии эволюции до главной последовательности, хотя такие объекты могут присутствовать в выборке.

Это позволяет перейти к распределению по отношению масс  $q = \frac{M_B}{M_A}$  для пар, в которых оба компонента предположительно находятся на главной последовательности (см. рис. 7). В области  $0.3 \leq q \leq 0.9$  распределение выглядит близким к плоскому, тогда как в области  $q \geq 0.95$  обнаруживается избыток двойных звезд (т.н. звезды-близнецы, с компонентами близких масс). Важно выяснить, отражает ли такая особенность природу широких двойных звезд, или связана с эффектами селекции выборки.

### 3.3. Функция селективности каталога

Как обсуждалось выше, эффекты селекции, которым подвержена выборка, представляют собой комбинацию функции селективности Gaia DR2 с заданными фильтрами качества решения для одиночных звезд, и функции селективности пар. Создадим выборку случайных пар звезд из Gaia DR2 с  $\varpi < 15$  мас (для ограничения объема выборки), отобранных с выполнением тех же требований к качеству решения, что предъявлялись к компонентам пар в разделе 2. Выберем из этих пар с помощью диаграммы Герцшпрунга–Расселла те, где оба компонента принадлежат главной последовательности, оценим для них массы компонентов и построим распределение по отношению массы более слабого (“вторичного”) ком-

<sup>4</sup> [http://www.pas.rochester.edu/~emamajek/EEM\\_dwarf\\_UBVI-JHK\\_colors\\_Teff.txt](http://www.pas.rochester.edu/~emamajek/EEM_dwarf_UBVI-JHK_colors_Teff.txt)



**Рис. 5.** Нормализованные распределения (сверху вниз): по угловому разделению между компонентами (а), по проекции физического разделения между компонентами (б), и по физическому разделению между компонентами в трехмерном пространстве (в). Черной линией показаны все двойные, серой заливкой – только удовлетворяющие требованию по ошибке определения расстояния не более 0.1 пк для обоих компонентов.

понента к массе более яркого (“главного”). На рис. 7 представлено распределение по отношению масс для выборки широких двойных звезд в сравнении с аналогичным распределением для синтезированной случайной выборки. Видно, что функция селективности Gaia DR2 в комбинации

с использованными фильтрами качества решения для компонентов не может быть причиной возникновения “пика близнецов”.

Для того, чтобы исследовать, как функция селективности пар, связанная с неодинаковой видимостью звезд с разным контрастом на одном и

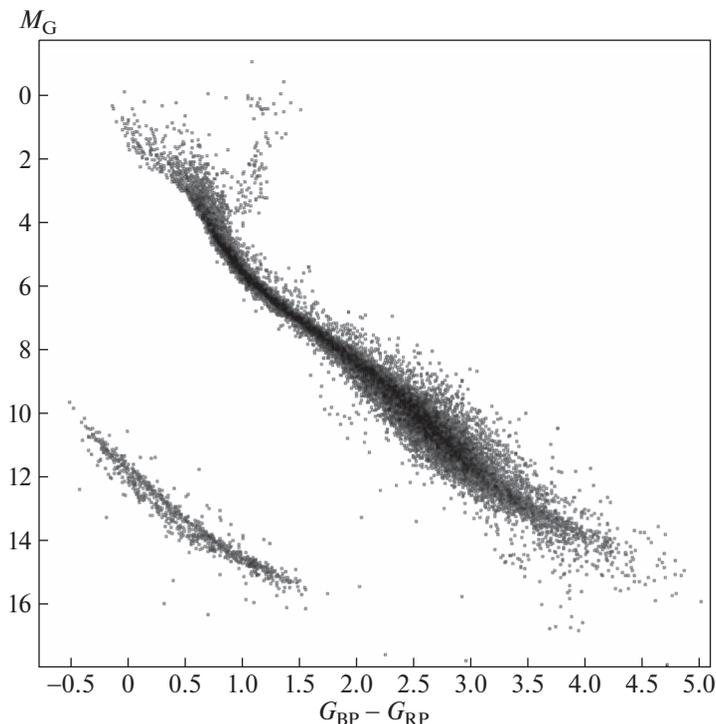


Рис. 6. Диаграмма “цвет–абсолютная звездная величина” для всех компонентов двойных звезд каталога.

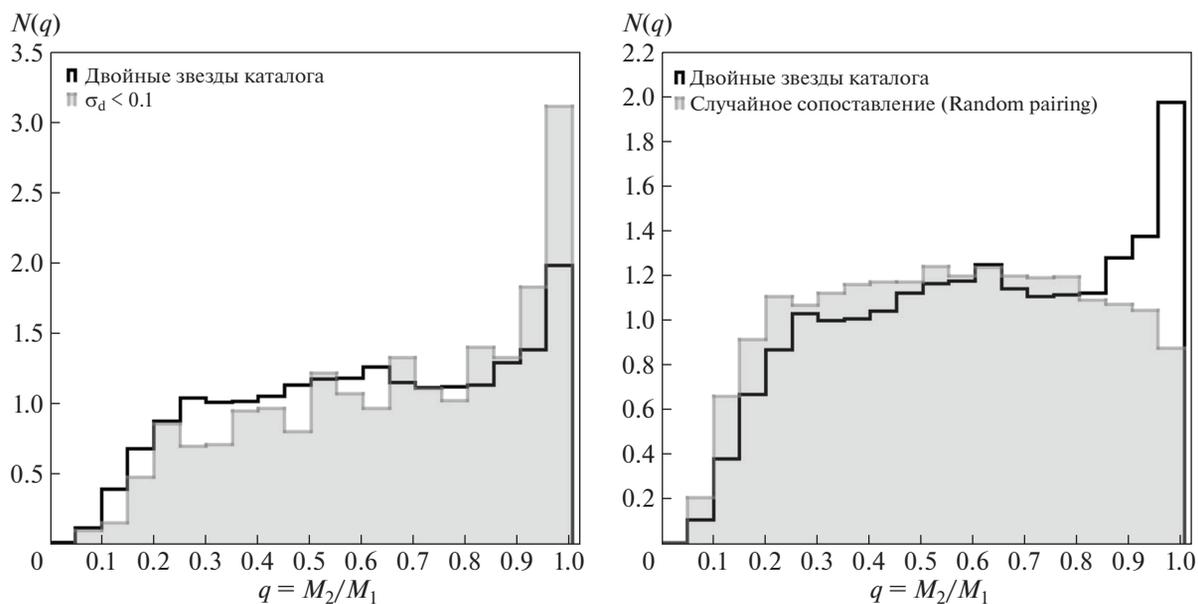
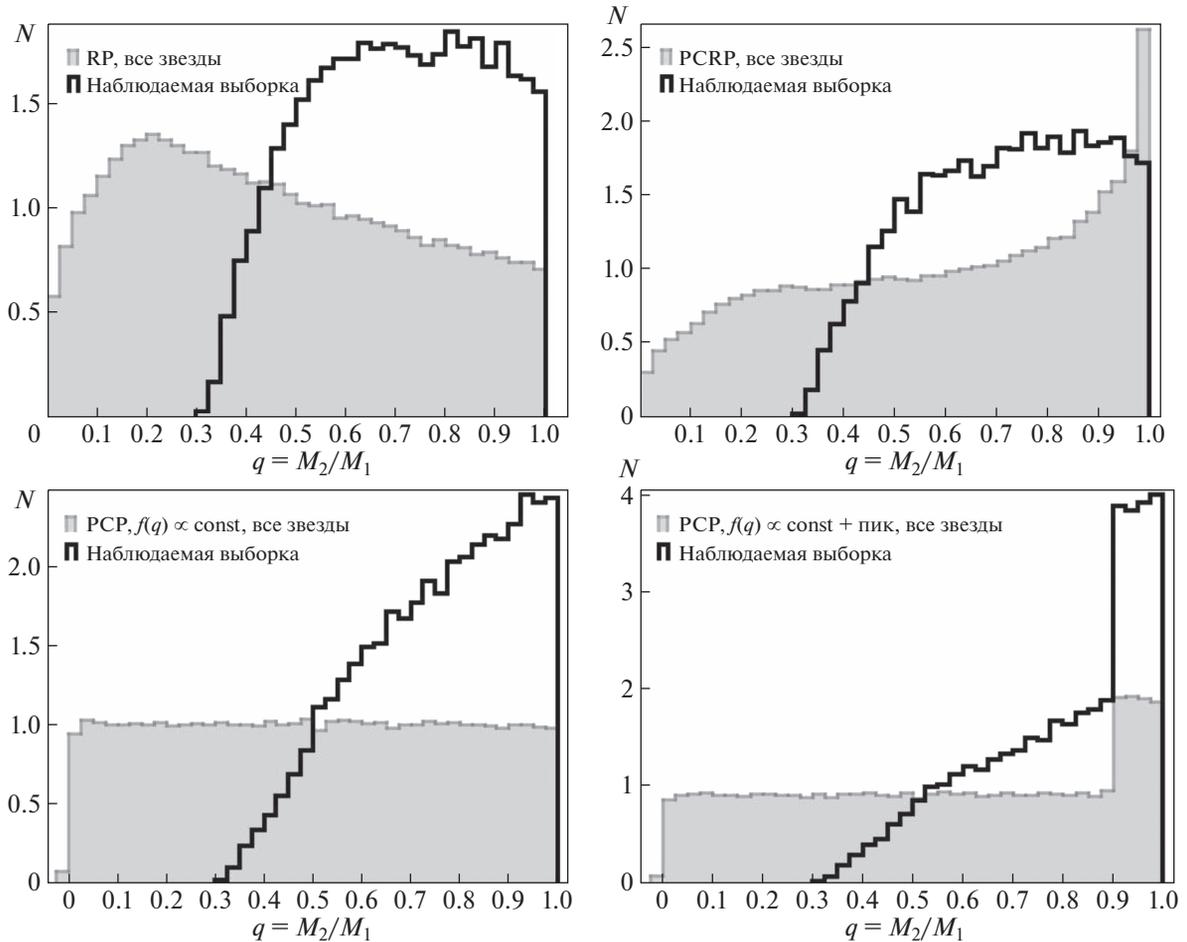


Рис. 7. Нормализованные распределения по отношению масс  $qM_2/M_1$ . Слева – для всего каталога (сплошная линия) и для подвыборки с ограничением на максимальную ошибку определения расстояния (линия с заливкой). Справа – сравнение распределения для нашего каталога (сплошная линия) с распределением для “random pairing” – выборке двойных звезд, полученной случайным сопоставлением попарно звезд из Gaia (линия с заливкой).

том же угловом расстоянии, может исказить наблюдаемое распределение двойных по отношению масс, мы смоделируем этот эффект с исполь-

зованием программы популяционного синтеза двойных систем [16] при различных предположениях о механизмах (“сценариях”) формирования

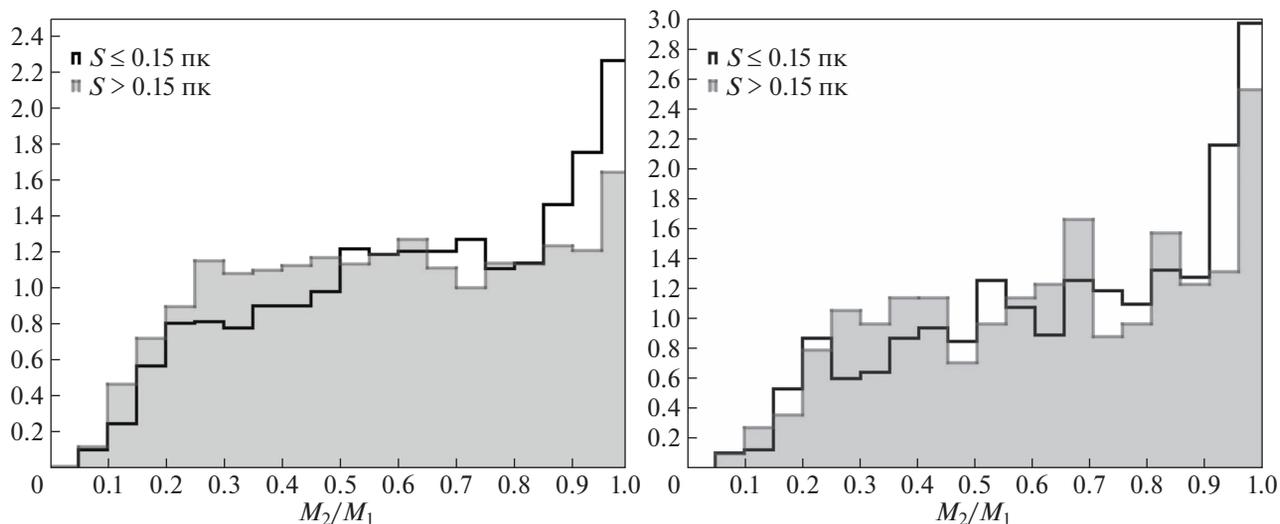


**Рис. 8.** Нормализованное распределение по отношению масс компонентов  $q$  для смоделированного в различных предположениях о сценариях образования пар звезд ансамбля двойных звезд в окрестности 100 пк от Солнца (серая гистограмма с заливкой) и его наблюдаемой, с имитацией функции селективности каталога, часть (черная контурная гистограмма) (подробности в тексте).

двойных систем [17]. Использовалась начальная функция масс (НФМ) Кроупы [18], при этом исследовались различные сценарии комбинирования масс компонентов, предполагающие распределение масс компонентов по отдельности, и/или суммы масс компонентов, в соответствии с НФМ. Для сценариев, предполагающих, что распределение по отношению масс компонентов есть свободный параметр, рассматривались различные варианты  $f(q)$ , в том числе  $f(q) \propto C$ . Распределение по величине большой полуоси орбиты выбиралось показательным вида  $f(a) \propto a^\beta$ , причем, поскольку было обнаружено, что значение показателя не влияет на вид распределения по отношению масс компонентов, было принято значение  $\beta = -1$ . Распределение пар по эксцентриситету считалось плоским. Для каждой из таких комбинаций начальных условий была смоделирована окрестность Солнца в пределах 100 пк. Скорость звездообразования на протяжении

14 млрд. лет принималась равной  $15e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = 7$  млрд. лет [19].

Эволюция звезд описывалась приближенными формулами Харли и др. [20]. Затем смоделированная выборка сопоставлялась с той ее частью, которая оказалась бы “видимой” при заданных условиях, включающих требование принадлежности обоих компонентов звездам главной последовательности, ограничения по видимой звездной величине  $6^m \leq G \leq 17^m$ , соответствующие ограничениям Gaia DR2, и функцию селективности пар (раздел 3.1). Было обнаружено, что ни в одном из исследованных сценариев функция селективности каталога в отношении двойных систем не приводит к образованию выраженного пика в области звезд с компонентами близких масс. Более того, если (в сценариях образования пар, позволяющих независимое распределение по отношению масс компонентов) ввести подоб-



**Рис. 9.** Нормализованные распределения по отношению масс  $q = M_2/M_1$  для двойных звезд с разделением в трехмерном пространстве не более 0.15 пк (сплошная линия) и более 0.15 пк (линия с заливкой). Слева — для всего каталога, справа — для подвыборки с ограничением на ошибку определения расстояния в 0.1 пк.

ный пик искусственно, принятые “наблюдательные” фильтры не оказывают заметного воздействия на наличие и форму этого пика. На рис. 8 приведены нормализованные распределения модельной выборки по отношению масс компонентов для пар, “существующих” в модели, в сравнении с “наблюдаемыми” при заданных ограничениях, для некоторых комбинаций начальных условий. Здесь приведены сценарии: RP — “random pairing” (оба компонента независимо друг от друга образуются с массами, которые выбираются из НФМ) (верхняя панель, слева), РСРР — “primary constrained random pairing” (главный компонент образуется как в RP, вторичный — с массой из НФМ при условии, что она не больше массы главного компонента) (верхняя панель, справа), сценарий РСР — “primary constrained pairing” (главный компонент образуется как в RP, масса вторичного определяется независимо заданным распределением по отношению масс компонентов) представлен на нижней панели для случая плоского распределения по массам компонентов (слева), и плоского распределения с пиком (ступенькой) для  $q \geq 0.9$  (справа). Ни в одном из сценариев применение функции селективности каталога по ограничению видимости пар с близкими компонентами с большой разностью блеска не приводит к образованию “пика близнецов” на распределении по отношению масс, если его не было в начальной выборке. Пик в начальном распределении по сценарию РСРР исчезает при имитации наблюдений из-за того, что он образован наименее массивными звездами, обрезаясь ограничением видимой звездной величины. Пик близнецов в начальном распределении по

сценарию РСР с плоским распределением с пиком сохраняется в наблюдаемом распределении.

### 3.4. Звезды-близнецы

Таким образом, наличие избытка звезд-близнецов среди широких двойных следует признать действительно существующим. Этот результат был получен независимо от подробного исследования [21] и поддерживает сделанные выводы.

Избыток близнецов становится менее выраженным с увеличением разделения между компонентами: на рис. 9 можно увидеть, как на больших физических разделениях распределение по соотношению масс становится более плоским. Справа на том же рисунке показано распределение для выборки I с ограничением по ошибке расстояния. Заметно, что в выборке с более жестким ограничением на ошибку расстояния между компонентами пик близнецов более узкий и выраженный. Этому может быть несколько причин, и не исключено, что результирующий эффект достигается их совместным воздействием. Во-первых, среднее расстояние между компонентами в выборке I меньше (а на более близких расстояниях доля систем с компонентами-близнецами выше). Это может быть связано с тем, что механизм преимущественного формирования звезд-близнецов не эффективен для самых широких пар. С другой стороны, можно ожидать, что введение ограничения на ошибку определения расстояния для каталога приведет к уменьшению загрязнения выборки оптическими парами, расстояние между которыми занижено из-за ошибок параллакса. Примесь оптических пар, для которых

распределение по отношению масс падает в диапазоне  $0.4 \leq q \leq 1$  (рис. 7), должна приводить к уменьшению доли звезд с большими  $q$ , поэтому, чем она меньше, тем более выражен должен быть “пик близнецов”.

Подробный обзор и обсуждение возможных каналов образования избытка широких двойных звезд с близкими массами компонентов, со ссылками, приведены в [21]. Отметим, что наиболее вероятный механизм — это конкурентный механизм аккреции на образующиеся компоненты пары в общем протозвездном диске, при которой компонент с изначально меньшей массой, обращаясь по орбите с большим радиусом, имеет возможность сравняться с изначально более массивным. Текущее затруднение состоит в том, что наибольшие наблюдаемые протозвездные диски вокруг образующихся двойных имеют радиус порядка нескольких сотен а. е. (напр., [22]), тогда как избыток звезд-близнецов, уменьшаясь с ростом расстояния между компонентами, продолжает быть значимым до расстояний дальше  $3 \times 10^4$  а. е.

При дальнейшем увеличении расстояния между компонентами избыток звезд с близкими массами продолжает снижаться, и, насколько можно судить, совершенно исчезает для пар с вычисленным расстоянием между компонентами больше  $8 \times 10^4$  а. е., для которых распределение по отношению масс компонентов становится плоским на всем диапазоне  $0.3 \leq q \leq 1$ . Такое распределение по отношению масс может быть результатом комбинации ряда факторов (присутствия изначально двойных звезд, орбита которых подверглась динамическому уширению [23]; доли пар, образованных при распаде скопления [24]; примеси оптических пар). Наконец, при анализе зависимости распределения по отношению масс от расстояния между компонентами следует принимать во внимание, что точность оценки самого этого расстояния сильно зависит от точности определения параллакса.

#### 4. ВЫВОДЫ

С использованием данных каталога Gaia DR2 был создан каталог содвижущихся пар в окрестности 100 пк от Солнца. Предварительно отобранные по разделению между компонентами в трехмерном пространстве кандидаты в пары были отфильтрованы на основании выбранного эмпирического критерия, учитывающего собственные движения и физические разделения между компонентами пар, образовав каталог, включающий около 10 000 двойных и содвижущихся звезд. Степень неполноты результирующего каталога в основном определяется комбинацией функции селективности каталога Gaia DR2 для одиночных звезд, функции селективности Gaia DR2 для пар

звезд, и принятой при отборе источников Gaia DR2 системой фильтров качества астрометрического и фотометрического решения. В частности, показано, что существует зависимость между предельной разностью блеска для пары звезд и углового расстояния, на котором они могут быть обнаружены, до углового расстояния 10 mas, предложен вид этой зависимости. Показано, что использование фильтров качества решения приводит к тому, что минимальное угловое расстояние между компонентами в каталоге составляет 2 mas, а доля неразрешенных двойных среди компонентов пар каталога существенно (возможно, на величину до 60%) ниже, чем в среднем для звезд поля.

Проведена очистка каталога от содвижущихся групп с числом членов больше 2.

Показано, что распределение пар каталога по разделению в трехмерном пространстве демонстрирует распределение, отличающееся от распределения по проекции разделения на небесную сферу, из-за ошибок определения параллакса. Для уменьшения этого эффекта выделена подвыборка двойных с сильными ограничениями на ошибку определения расстояния.

По диаграмме Герцшпрунга–Расселла выбраны пары звезд, оба компонента которых предположительно принадлежат главной последовательности. Для таких пар оценены значения масс компонентов. Независимо от работы [21] получен результат, подтверждающий наличие избытка двойных систем — “близнецов” — с близкими массами компонентов. Показано, что обнаружение пика в выборке каталога не является следствием его функции селективности. Показано, что выраженность этого “пика близнецов” уменьшается с увеличением расстояния между компонентами, однако, полностью исчезая только

на вычисленных расстояниях больше  $8 \times 10^4$  а. е. Как и оценка, сделанная в работе [21], это существенно превышает величину наблюдающихся протозвездных дисков, где образуются двойные. Вместе с тем наличие избытка звезд-близнецов предполагает, что они образованы в ходе процесса, в котором массы компонентов зависимы друг от друга. Это требует исследования возможных механизмов значительного увеличения расстояния между компонентами пар, в том числе, при распаде звездных скоплений.

*Приложение*

#### АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СПИСКА ЗВЕЗДНЫХ ПАР

В настоящем разделе описан алгоритм, разработанный для создания списка пар источников Gaia DR2, достаточно близко расположенных друг к другу в трехмерном пространстве  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\varpi$ .

Создание списка двойных подразумевает попарные операции над звездами, что для множества из  $N$  звезд будет занимать  $CN^2$  машинного времени. Это делает подобные расчеты слишком длительными для сколько-нибудь большой выборки звезд. Разумеется, имеет смысл сравнивать параметры лишь тех звезд, что имеют хотя бы какие-то шансы находиться в связанной паре, нет нужды тратить время расчетов на то, чтобы убедиться, что две звезды, расположенные на расстоянии 50 пк от Солнца в противоположных частях небесной сферы, не являются физической парой. Возможно ввести критерий, который будет отвечать на вопрос о том, имеет ли смысл для данной пары звезд проводить детальные расчеты (скажем, таким критерием может быть большое видимое угловое разделение) и определять сначала выполнение этого критерия, пропуская дальнейшие расчеты в случае неудовлетворения ему. Однако сам расчет такого критерия, проводимый попарно для всех звезд в выборке, все равно является задачей сложности  $CN^2$ : отказываясь от дальнейших расчетов в случае неудовлетворения этому критерию, мы просто уменьшили  $C$ .

Более эффективным представляется создание алгоритма, который бы составлял список потенциальных пар в первом приближении. Этот алгоритм можно максимально оптимизировать, чтобы уменьшить выборку, над которой проводятся вычисления сложности  $CN^2$ . Имея список кандидатов в пары вместо списка звезд, можно производить вычисления уже не попарно над всеми звездами, а подряд по имеющемуся списку, что существенно быстрее. Именно создание такого алгоритма и было первой (и значительной) частью этой работы.

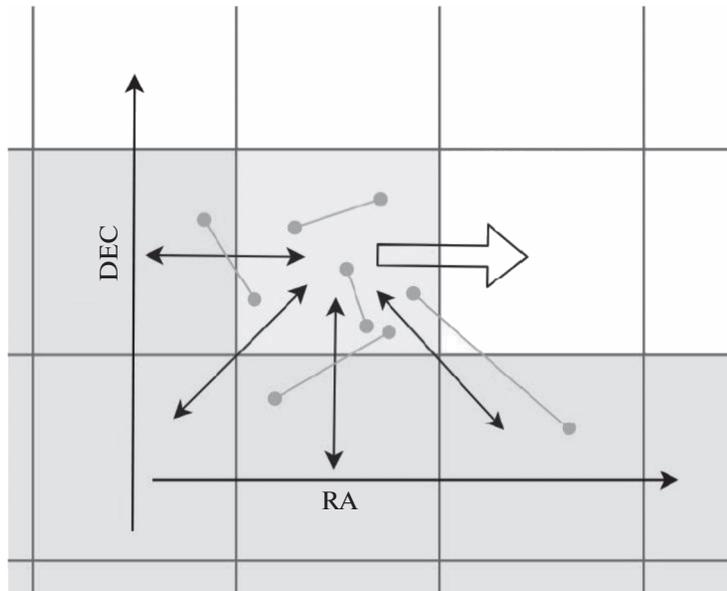
Таким образом, на первом этапе работы ставится цель перевести задачу  $CN^2$  в задачу  $CN$ . В список кандидатов было принято решение отбирать попарно все звезды, расположенные в трехмерном пространстве на расстоянии ближе 1 пк друг к другу. Расстояние рассчитывалось на основании небесных координат компонентов  $\alpha_i$ ,  $\delta_i$  и оценок расстояний до них, вычисленных как величина, обратная значению параллакса  $\varpi$ . Использование таких оценок допустимо в силу того, что в исследуемом ансамбле достаточно близких звезд характерная ошибка определения параллакса Gaia DR2  $\frac{\epsilon_{\varpi}}{\varpi} < 10\%$ .

Следующая проблема — определить, какие звезды подлежат попарному сравнению для проверки удовлетворения критерию близости. Пусть мы ищем пары из звезд, расстояние до которых от Солнца не менее некоторого фиксированного  $d$ . Очевидно, что начиная с какого-то углового раз-

деления  $\theta$  между двумя звездами их физическое разделение не сможет быть меньше выбранного максимально допустимого. Решив простую геометрическую задачу, получим, что это угловое разделение равно  $\theta = 2 \arcsin(p/2d)$ , где  $p$  — максимальное физическое разделение, в нашем случае 1 пк. Пользуясь этим, мы можем выделить на небе прямоугольные в координатах  $(\alpha, \delta)$  области  $(\alpha_1, \alpha_2; \delta_1, \delta_2)$  (далее будем называть их “участками”), ширина которых по обеим осям будет равна этому максимальному разделению. Таким образом, нам известно, что звезда с одной стороны от такого участка (например,  $\alpha > \alpha_2$ ) не может быть парой со звездой с противоположной стороны ( $\alpha < \alpha_1$ ). Важно заметить: далее в разделе о построении списка двойных выражение “не может быть парой” для удобства используется в значении “не может находиться на расстоянии ближе 1 пк друг от друга”. Разбиение на подобные участки дает нам возможность исключить из рассмотрения пары между звездами, лежащими через участок друг от друга. Стоит отметить, что размер такого прямоугольного участка по  $\alpha$  будет больше, чем по  $\delta$ : на больших склонениях тому же угловому разделению соответствует большее расстояние по прямому восхождению:  $|\alpha_2 - \alpha_1| = \theta / \cos(\delta)$ .

Разбиение по участкам делается в рамках больших областей размером в 1/4 полного круга по прямому восхождению и примерно двадцати градусов по склонению. В рамках одной большой области поправка ( $|\alpha_2 - \alpha_1| = \theta / \cos(\delta)$ ) принимается наибольшей из возможных (т.е. выбирается для наибольшего в рамках данной области значения склонения). Таким образом, у каждой большой области имеется своя прямоугольная сетка разбиения на участки.

Проведя описанное разбиение, в рамках одной большой области мы проверяем все возможные пары и получаем выигрыш во времени вычислений. Исходя из сказанного выше, мы знаем, что для любой звезды пара может найтись только либо в этом же участке, либо в соседнем. Таким образом, мы оперируем двумя действиями: во-первых, проверкой расстояний между всеми звездами попарно в рамках одного участка, и, во-вторых, проверкой расстояний между всеми звездами в соседствующих участках (т.е. только связи между участками). Алгоритм выполнения этих двух действий реализован следующим образом, чтобы повторений не происходило. Последовательность выполнения графически изображена на рис. 10 на примере одного из шагов в середине прохода по большой области. Проход совершается в направлении увеличения прямого восхождения и смещается на следующий по склонению массив участков, когда проход по прямому вос-



**Рис. 10.** Демонстрация последовательного прохождения по участкам с целью поиска двойных. Квадрат в центре, из которого расходятся стрелки, — проверяемый на данном шаге алгоритма участок. Другие затененные области показывают уже пройденные по алгоритму участки. 4 стрелки вниз и влево связывают те участки, наличие пар между звездами которых будет проверено на этом шаге. Серые кружки, соединенные линиями, представляют примеры пар, которые могут быть обнаружены на этом шаге: как внутри участка, так и “соседствующие”. Стрелка направо показывает, какой участок будет следующим, с большим прямым восхождением. Пары между текущим участком и участками с большим склонением или большим прямым восхождением будут проверены на более поздних шагах алгоритма.

хождению для данного склонения оказывается завершен. На каждом шаге выбирается участок, проверяется наличие пар между звездами внутри участка и наличие пар между звездами этого участка и четырех из восьми соседствующих участков. Остальные четыре “соседства” будут проверены на последующих шагах (см. рис. 10).

В рамках одной большой области алгоритм обеспечивает добавление в список потенциальных пар всех звезд ближе 1 пк друг к другу, после чего отдельно проверяются потенциальные пары, образованные звездами, лежащими по разные стороны границ между большими областями. Здесь снова проверку проходят только те из звезд, что лежат не далее, чем максимальное разделение  $\theta$  от границы областей. После соединения всех этих областей для разных склонений непроверенными остаются только полярные области, для которых в силу стремления к бесконечности множителя  $1/\cos(\delta)$  описанный выше алгоритм не подходит. Проверка пар в приполярных областях реализована для всего участка с радиусом по склонению, выбранному так, чтобы он был больше  $\theta$ . Конечным результатом является список пар для всех участков небесной сферы.

Вся описанная выше процедура производится для “слоя”, ограниченного двумя значениями расстояния от проверяемых звезд до Солнца (вычисляемого по параллаксам Gaia):  $d_1 < d < d_2$ .

Максимальное угловое разделение  $\theta$  соответственно определяется наименьшим из возможных расстояний  $d_1$ . Для этого выборка  $10 \leq d \leq 100$  пк была разбита на четыре слоя: от 10 до 25 пк, от 25 до 50 пк, от 50 до 75 пк и от 75 до 100 пк. Для каждого слоя отдельно определены значения  $\theta$  и разбиение на участки. Таким образом, несмотря на большее количество звезд во внешних слоях, мы частично компенсируем возрастание времени вычислений уменьшением размера участков. Отдельно проверяются пары, образованные звездами, лежащими по разную сторону границ этих сферических слоев: это достигается взятием этих слоев с перекрытием, равным максимальному выбранному физическому разделению (в нашем случае 1 пк), и удалением пар, оба компонента которых лежат в перекрывающейся области из одного из этих наборов. Таким образом, мы избегаем включения их в список пар более одного раза, а за счет перекрытия учитываются те пары, которые лежат по разные стороны границы слоев.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа частично поддержана грантом РФФИ 19-07-01198.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В статье использованы данные миссии Европейского космического Агентства (ESA) *Gaia*<sup>5</sup>. Используются данные базы данных SIMBAD, поддерживаемой CDS, Страсбург, Франция. При отборе выборки звездных пар использовался программный пакет *astropy* [25, 26]. Обработка и анализ данных выполнены с использованием инструмента *Торкат*<sup>6</sup> [27]. Авторы благодарят А.В. Тутукова и Д.А. Чулкова за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *D. Godoy-Rivera and J. Chanamé*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **479**, 4440 (2018).
2. *S. P. Goodwin and P. Kroupa*, Astron. and Astrophys. **439**, 565 (2005).
3. *G. Duchêne and A. Kraus*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **51**, 269 (2013).
4. *F. M. Jiménez-Esteban, E. Solano, and C. Rodrigo*, Astron. J. **157**, id. 78 (2019).
5. *С. А. Сапожников, Д. А. Ковалева, О. Ю. Малков*, Научные труды ИНАСАН **3**, 366 (2019).
6. *C. A. L. Bailer-Jones*, Publ. Astron. Soc. Pacific **127**, 994 (2015).
7. *A. S. Rastorguev, N. D. Utkin, M. V. Zabolotskikh, A. K. Dambis, A. T. Bajkova, and V. V. Bobylev*, Astrophys. Bull. **72**, 122 (2017).
8. *A. G. A. Brown, A. Vallenari, T. Prusti, J. H. J. de Bruijne, et al.*, Astron. and Astrophys. **616**, id. A1 (2018).
9. *L. Lindgren, J. Hernández, A. Bombrun, S. Klioner, et al.*, Astron. and Astrophys. **616**, id. A2 (2018).
10. *D. Kovaleva, P. Kaygorodov, O. Malkov, B. Debray, and E. Oblak*, Astron. and Comput. **11**, 119 (2015).
11. *N. N. Samus', E. V. Kazarovets, O. V. Durlevich, N. N. Kireeva, and E. N. Pastukhova*, Astron. Rep. **61**, 80 (2017).
12. *D. Boubert, J. Strader, D. Aguado, G. Seabroke, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **486**(2), 2618 (2019).
13. *K. El-Badry and H.-W. Rix*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **480**, 4884 (2018).
14. *A. Tokovinin*, Astron. J. **147**(4), id. 87 (2014).
15. *O. Malkov, A. Karchevsky, P. Kaygorodov, and D. Kovaleva*, Baltic Astronomy **25**, 49 (2016).
16. *Y. M. Gebrehiwot, S. B. Tessema, O. Y. Malkov, D. A. Kovaleva, A. Y. Sytov, and A. V. Tutukov*, New Astronomy **61**, 24 (2018).
17. *M. B. N. Kouwenhoven, A. G. A. Brown, S. P. Goodwin, S. F. Portegies Zwart, and L. Kaper*, Astron. and Astrophys. **493**, 979 (2009).
18. *P. Kroupa*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **322**, 231 (2001).
19. *G. Nelemans, L. R. Yungelson, S. F. Portegies Zwart, and F. Verbunt*, Astron. and Astrophys. **365**, 491 (2001).
20. *J. R. Hurley, O. R. Pols, and C. A. Tout*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **315**, 543 (2000).
21. *K. El-Badry, H.-W. Rix, H. Tian, G. Duchêne, and M. Moe*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **489**, 5822 (2019).
22. *J. J. Tobin, K. M. Kratter, M. V. Persson, L. W. Looney, et al.*, Nature **538**, 483 (2016).
23. *P. Kroupa and A. Burkert*, **555**, 945 (2001).
24. *M. B. N. Kouwenhoven, S. P. Goodwin, R. J. Parker, M. B. Davies, D. Malmberg, and P. Kroupa*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **404**, 1835 (2010).
25. *T. P. Robitaille, E. J. Tollerud, P. Greenfield, M. Droettboom, et al.*, Astron. and Astrophys. **558**, id. A33 (2013).
26. *A. M. Price-Whelan, B. M. Sipőcz, H. M. Günther, P. L. Lim, et al.*, Astron. J. **156**, id. 123 (2018).
27. *M. B. Taylor*, *Astronomical Data Analysis Software and Systems XIV*, Proc. of the Conference held 24–27 October, 2004 in Pasadena, California, USA, edited by P. Shopbell, M. Britton, and R. Ebert (San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2005), ASP Conf. Ser. **347**, 29 (2005).

<sup>5</sup> <https://www.cosmos.esa.int/gaia>

<sup>6</sup> <http://www.starlink.ac.uk/topcat/> [27]

УДК 521.1

## ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С РАДИУСОМ-ВЕКТОРОМ

© 2020 г. Т. Н. Санникова<sup>1,\*</sup>, К. В. Холшевников<sup>2,3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: tnsannikova@gmail.com

\*\*E-mail: kvk@astro.spbu.ru

Поступила в редакцию 06.05.2020 г.

После доработки 30.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

Рассмотрено движение точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу  $\mathcal{S}$  и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , обратно пропорционального квадрату расстояния до  $\mathcal{S}$ . Модуль  $\mathbf{P}'$  считаем малым по сравнению с основным ускорением, вызванным притяжением центрального тела, а компоненты вектора  $\mathbf{P}$  — постоянными в обычной для астрономии системе отсчета с началом в центральном теле и осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в оскулирующей плоскости в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Ранее нами было выполнено осредняющее преобразование уравнений движения типа Эйлера в оскулирующих элементах, и получены эволюционные дифференциальные уравнения движения в средних элементах в первом приближении по малому параметру. Настоящая статья посвящена решению осредненных уравнений. Они проинтегрированы полностью. Более того, квадратуры удалось выразить через элементарные функции. Найденное решение имеет особенности при нулевом эксцентриситете и при отсутствии трансверсального ускорения. Эти и некоторые другие частные случаи рассмотрены отдельно. Можно указать по меньшей мере два приложения рассматриваемой задачи. Это движение астероида с учетом эффекта Ярковского-Радзиевского и движение космического аппарата с солнечным парусом. В обоих случаях возмущающее воздействие обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца.

DOI: 10.31857/S0004629920100084

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим движение точки нулевой массы  $\mathcal{A}$  (например, астероида) под действием притяжения к центральному телу  $\mathcal{S}$  (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ . Введем обычную в астрономии неинерциальную систему отсчета  $\mathcal{O}$  с началом  $\mathcal{S}$  и ортами осей  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей).

Пусть возмущающее ускорение подчиняется закону обратных квадратов  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где компоненты  $S$ ,  $T$ ,  $W$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе  $\mathcal{O}$ ,

и мало по сравнению с основным ускорением  $\kappa^2/r^2$ :

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\kappa^2 r^{-2}} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\kappa^2} = \mu \ll 1. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\kappa^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $\mathcal{S}$ . Рассматриваемая модель может найти применение при исследовании движения небесного тела с учетом давления солнечного света и эффекта Ярковского-Радзиевского [1, 2], а также при движении КА с солнечным парусом [3].

В [4] мы получили уравнения движения типа Эйлера в оскулирующих элементах, явный вид осредняющей замены переменных и уравнения

движения в средних элементах. В этой статье мы займемся интегрированием последних уравнений.

Задачи при  $\mathbf{P}' = \text{const}$  и  $\mathbf{P} = \text{const}$  во многом схожи, что позволяет иногда ограничиваться ссылками на [5], где интегрировались осредненные уравнения движения при  $\mathbf{P}' = \text{const}$ .

В первом порядке малости уравнения движения в средних элементах выведены в [4]:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\frac{3\omega^2}{\kappa^2\eta^2}T, \\ \dot{e} &= \frac{\omega e}{\kappa^2(1+\eta)}T, \\ \dot{i} &= -\frac{\omega e}{\kappa^2\eta(1+\eta)}\cos gW, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{\omega e}{\kappa^2\eta(1+\eta)}\sin gW, \\ \dot{g} &= -\cos i\dot{\Omega} = \frac{\omega e \operatorname{ctg} i}{\kappa^2\eta(1+\eta)}\sin gW, \\ \dot{M} &= \omega - \frac{2\omega}{\kappa^2}S.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь в качестве шести независимых элементов приняты среднее движение  $\omega$ , эксцентриситет  $e$ , наклон  $i$ , долгота восходящего узла  $\Omega$ , аргумент перигелла  $g$ , средняя аномалия  $M$ . Используются также зависимые элементы  $a = \kappa^{2/3}\omega^{-2/3}$  – большая полуось,  $\eta = \sqrt{1-e^2}$ . Производная по времени  $t$  обозначена точкой (для  $i$  – жирной точкой).

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ КРУГОВЫХ ОРБИТ

Пусть  $e_0 = 0$ , где индекс 0 указывает на значения переменных в начальную эпоху  $t = 0$ . Очевидно, в этом случае уравнения (2) допускают решение

$$e = 0, \quad i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad g = g_0.$$

Оставшиеся уравнения (2) упрощаются:

$$\dot{\omega} = -\frac{3\omega^2}{\kappa^2}T, \quad \dot{\lambda} = \omega - \frac{2\omega}{\kappa^2}S.\quad (3)$$

При  $e = 0$  средняя аномалия и аргумент перигелла теряют смысл. Угловое положение определяется единственной переменной – средней долгой  $\lambda = \Omega + g + M$ .

Если  $T = 0$ , то

$$\omega = \omega_0, \quad a = a_0, \quad \lambda = \lambda_0 + \omega_0\left(1 - \frac{2S}{\kappa^2}\right)t.\quad (4)$$

Решение определено на всей оси времени  $-\infty < t < \infty$ .

Пусть  $T \neq 0$ . В первом уравнении (3) переменные разделяются, и его решение элементарно. Подстановка решения во второе уравнение (3) позволяет легко найти  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0\left(1 + \frac{t}{t_1}\right)^{-1}, \quad a = a_0\left(1 + \frac{t}{t_1}\right)^{2/3}, \\ \lambda &= \lambda_0 + \omega_0 t_1\left(1 - \frac{2S}{\kappa^2}\right)\ln\left(1 + \frac{t}{t_1}\right),\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$t_1 = \frac{\kappa^2}{3T\omega_0}.\quad (6)$$

Согласно (1) коэффициент  $1 - 2S\kappa^{-2}$  положителен.

Заметим, что при  $T \rightarrow 0$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$  решение (5) переходит в (4).

Определим интервал задания непродолжаемого решения [6, 7], т.е. область определения  $t \in (t_*, t^*)$  решения (5).

Пусть  $T > 0$ ,  $t_1 > 0$ . Очевидно,  $t_* = -t_1$ ,  $t^* = \infty$ . При убывании  $t$ , т.е. при движении в прошлое,  $\omega$  возрастает до бесконечности,  $a$  убывает до нуля,  $\lambda$  убывает до минус бесконечности за *конечное время*. Точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали, делая бесконечное число оборотов. При возрастании  $t$  величина  $\omega$  убывает до нуля,  $a$  возрастает до бесконечности,  $\lambda$  возрастает до бесконечности за *бесконечное время*. Точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали, делая бесконечное число оборотов.

Пусть  $T < 0$ ,  $t_1 < 0$ . Очевидно,  $t_* = -\infty$ ,  $t^* = -t_1$ . При убывании  $t$  величина  $\omega$  убывает до нуля,  $a$  возрастает до бесконечности,  $\lambda$  убывает до минус бесконечности за *бесконечное время*. Точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали, делая бесконечное число оборотов. При возрастании  $t$  величина  $\omega$  возрастает до бесконечности, величина  $a$  убывает до нуля,  $\lambda$  возрастает до бесконечности за *конечное время*. Точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали, делая бесконечное число оборотов.

Перейдем к некруговым орбитам. Осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты. Поэтому в дальнейшем полагаем, что  $0 < e_0 < 1$ ,  $0 < \eta_0 < 1$ .

## 3. ЭВОЛЮЦИЯ $\omega$ И $e$

Первые два уравнения (2) не зависят от остальных и легко решаются.

Пусть  $T = 0$ . Тогда  $\omega$ ,  $e = \text{const}$ .

Пусть  $T \neq 0$ . Переходя от  $e$  к  $\eta$ , придадим первым двум уравнениям (2) вид

$$\dot{\omega} = -\frac{3\omega^2}{\kappa^2 \eta^2} T, \quad \dot{\eta} = -\frac{\omega(1-\eta)}{\kappa^2 \eta} T. \quad (7)$$

Отсюда выводим линейное однородное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{3}{\eta(1-\eta)} \omega.$$

Вот его решение:

$$\omega = \omega_0 \left[ \frac{\eta(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\eta)} \right]^3. \quad (8)$$

С ростом  $\eta$  от 0 до 1 правая часть возрастает от нуля до бесконечности.

Подставим (8) во второе уравнение (7) и разделим переменные:

$$\frac{(1-\eta)^2 d\eta}{\eta^2} = -\frac{\omega_0}{\kappa^2} \left( \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)^3 T dt. \quad (9)$$

Интегрируя (9), выразим время в виде явной функции  $\eta$ :

$$\frac{\omega_0}{\kappa^2} \left( \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)^3 T t = f(\eta) - f(\eta_0) \quad (10)$$

при

$$f(\eta) = 2 \ln \eta + \frac{1}{\eta} - \eta. \quad (11)$$

С ростом  $\eta$  от 0 до 1 функция  $f$  убывает от бесконечности до нуля, а правая часть (10) убывает от бесконечности до  $-f(\eta_0) < 0$ . Обозначим

$$t_2 = \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left( \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \right)^3 f(\eta_0). \quad (12)$$

Пусть  $T > 0$ ,  $t_2 > 0$ . Тогда  $t_* = -t_2$ ,  $t^* = \infty$ . По доказанному выше каждому  $t \in (t_*, t^*)$  отвечает единственное значение  $\eta$ . При  $t \rightarrow t_*$  справедливо  $\eta \rightarrow 1$ ,  $e \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ . При  $t \rightarrow t^*$  справедливо  $\eta \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow 1$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ .

Пусть  $T < 0$ ,  $t_2 < 0$ . Теперь  $t_* = -\infty$ ,  $t^* = -t_2$ . По-прежнему каждому  $t \in (t_*, t^*)$  отвечает единственное значение  $\eta$ . При  $t \rightarrow t_*$  справедливо  $\eta \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow 1$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ . При  $t \rightarrow t^*$  справедливо  $\eta \rightarrow 1$ ,  $e \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ .

При  $e \sim 0$ ,  $\eta \sim 1$  вычисления  $f(\eta)$  по формуле (11) содержат разности почти одинаковых чисел, что приводит к потере точности. При  $e_0 \sim 0$ ,  $\eta_0 \sim 1$  правая часть (12) содержит неопределен-

ность вида  $0 : 0$ . Поэтому при малых эксцентриситетах следует пользоваться рядом

$$f(\eta) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2n}, \quad c_n = \frac{(2n+3)!!}{(2n+4)!!} - \frac{1}{n+3}, \quad (13)$$

легко выводимым из стандартных биномиально- и логарифмического разложений. По индукции легко доказать положительность  $c_n$ , а из формулы Стирлинга получить асимптотику

$$c_n \sim \sqrt{\frac{1}{\pi(n+2)}} - \frac{1}{n+3}.$$

Вывести общий член аналогичного ряда по степеням  $e_0$  для  $t_2$  не удалось. Однако представить нужные нам величины простой комбинацией рядов по степеням  $e$  и  $e_0$  несложно. Действительно,

$$\frac{1-\eta}{\eta} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e^{2n}.$$

Отсюда получаем представление для  $t_2$  и для кинематического уравнения (10)

$$t_2 = \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_0^{2n}, \quad (14)$$

$$t = \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \frac{e^6}{e_0^6} e^{2n} - e_0^{2n} \right). \quad (15)$$

Как и следовало ожидать, при  $e_0 \rightarrow 0$  формула (14) переходит в (6); предел  $t_2$  при  $e_0 \rightarrow 1$  выводим из (12):

$$\lim_{e_0 \rightarrow 0} t_2 = t_1, \quad \lim_{e_0 \rightarrow 1} t_2 = 0.$$

Ряды по степеням  $e$  и  $e_0$  сходятся при  $e < 1$  и  $e_0 < 1$  и расходятся к бесконечности при  $e = 1$  и  $e_0 = 1$ .

#### 4. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $S \neq 0$ , $T = W = 0$

Если  $T = W = 0$ , то  $\omega$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g = \text{const}$ , а правая часть последнего уравнения (2) постоянна. Поэтому

$$M = M_0 + \omega_0 \left( 1 - \frac{2S}{\kappa^2} \right) t,$$

причем  $t_* = -\infty$ ,  $t^* = \infty$ .

В рассмотренном случае дополнительное возмущение не приводит к изменению конфигурации орбиты, а влияет только на положение тела на орбите, вызывая в зависимости от знака  $S$  постепенное отставание или опережение от невозмущенного положения.

5. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $T \neq 0, S = W = 0$ 

В рассматриваемом случае  $i, \Omega, g = \text{const}$ . С учетом результатов § 3 осталось решить лишь последнее уравнение (2). Используя (8), (9), представим его в форме

$$dM = \omega dt = -\frac{\kappa^2 \eta d\eta}{T(1-\eta)},$$

что легко интегрируется:

$$M = M_0 + \frac{\kappa^2}{T} \left( \eta + \ln \frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0 \right).$$

Пусть  $T > 0, t_2 > 0, t_* = -t_2 < 0, t^* = \infty$ . При  $t \rightarrow t_*$  справедливо  $M \rightarrow -\infty$ . Точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали за конечное время, делая бесконечное число оборотов. При  $t \rightarrow t^*$  справедливо

$$\lim_{t \rightarrow t^*} M = M_0 - \frac{\kappa^2}{T} [\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] > M_0. \quad (16)$$

Точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали за бесконечное время, делая конечное число оборотов.

Пусть  $T < 0, t_2 < 0, t_* = -\infty, t^* = -t_2 > 0$ . Формула (16) слегка меняется

$$\lim_{t \rightarrow t_*} M = M_0 - \frac{\kappa^2}{T} [\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] < M_0.$$

При движении в прошлое точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали за бесконечное время, делая конечное число оборотов. При  $t \rightarrow t^*$  справедливо  $M \rightarrow \infty$ . Точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали за конечное время, делая бесконечное число оборотов.

6. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $W \neq 0, S = T = 0$ 

Если  $S = T = 0$ , то  $\omega, a, e = \text{const}, M = M_0 + \omega_0 t$ . Правые части нетривиальных уравнений (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -A \cos g, & \dot{\Omega} &= -A \frac{\sin g}{\sin i}, \\ \dot{g} &= A \operatorname{ctg} i \sin g, & A &= \frac{\omega e}{\kappa^2 \eta (1+\eta)} W. \end{aligned} \quad (17)$$

Первое и третье уравнения (17) не зависят от второго. Перепишем их в форме уравнений Лагранжа [8]:

$$\dot{i} = -\frac{A}{\sin i} \frac{\partial V}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{A}{\sin i} \frac{\partial V}{\partial i} \quad (18)$$

при

$$V = \sin i \sin g. \quad (19)$$

Очевидно, функция (19) является интегралом системы, т.е.  $V = \text{const}$ . Постоянная  $V$  может принимать значения из отрезка  $[-1, 1]$ .

Соотношения (17)–(19) совпадают с приведенными в [5] с точностью до значения постоянной  $A$ . В этой статье уравнения (17) проинтегрированы в элементарных функциях и приведен фазовый портрет динамической системы. За подробностями отсылаем читателя к указанной статье. Здесь приведем лишь окончательные формулы.

Движение определено на всей оси времени:  $t_* = -\infty, t^* = \infty$ .

Введем вспомогательный угол  $\varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = A, \quad \varphi = \varphi_0 + At.$$

Переменные  $i, g$  зависят от  $\varphi$  периодически с периодом  $2\pi$ :

$$\cos i = \sqrt{1-V^2} \sin \varphi, \quad (20)$$

$$\sin i = \sqrt{1-(1-V^2) \sin^2 \varphi},$$

$$\cos g = \frac{\sqrt{1-V^2} \cos \varphi}{\sin i}, \quad (21)$$

$$\sin g = \frac{V}{\sin i}.$$

Начальные данные для  $\varphi, i, g$  связаны условиями

$$\cos \varphi_0 = \frac{\sin i_0}{\sqrt{1-V^2}} \cos g_0, \quad (22)$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{\cos i_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Долгота узла имеет вековой ход плюс периодические по  $\varphi$  колебания с периодом  $\pi$ :

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_1 + \varphi - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi}{V_1 + \cos 2\varphi}, & \text{если } V < 0, \\ \Omega_2 - \varphi + \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi}{V_2 + \cos 2\varphi}, & \text{если } V > 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$V_1 = \frac{1-V}{1+V}, \quad V_2 = \frac{1+V}{1-V}, \quad |V_s| > 1.$$

Постоянные  $\Omega_1, \Omega_2$  определяются условием обращения правой и левой части (23) в  $\Omega_0$  при  $\varphi = \varphi_0$ .

При  $V = 1$  формулы (23) принимают вид  $\Omega = \Omega_1 - \varphi$ , при  $V = -1$  они принимают вид  $\Omega = \Omega_2 + \varphi$ , а при  $V = 0$  – вид  $\Omega = \Omega_0$ .

Общий период по времени колебаний  $i, g$  зависит от начальных данных  $\omega_0, e_0$ , но не от начальных данных  $i_0, g_0$ .

7. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $TW \neq 0, S = 0$

В этом случае упрощается только последнее уравнение системы (2), его решение рассмотрено в § 5, а для первых двух уравнений по-прежнему справедливо решение, приведенное в § 3.

Соотношения (17)–(19) остаются справедливыми, но величина  $A$  теперь переменна. Введем угол  $\varphi$  соотношением

$$\frac{d\varphi}{dt} = A, \quad \frac{d\varphi}{de} = \frac{W}{T\eta},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{W}{T}(\arcsin e - \arcsin e_0). \quad (24)$$

Зависимость элементов  $i, g, \Omega$  от  $\varphi$  остается такой же, как и в § 6, и определяется формулами (20)–(23). Однако теперь  $\varphi$  – ограниченная функция времени. Формула (24) задает ее зависимость от эксцентриситета, а неявная зависимость эксцентриситета от времени выражена формулами (10), (11), (15).

Напомним, что одна из двух концевых точек  $t_*, t^*$  промежутка определения непродолжаемого решения конечна, а другая бесконечна, см. § 3. Угол же  $\varphi$  изменяется в конечных пределах

$$\sup \varphi - \inf \varphi = \left| \frac{\pi W}{2T} \right|.$$

8. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $WS \neq 0, T = 0$

Так как  $T = 0$ , то  $\omega, e, A = \text{const}$ . Уравнение для  $M$  решено в § 4. Решение уравнений для элементов  $i, \Omega, g$  приведено в § 6.

Область определения:  $t_* = -\infty, t^* = \infty$ .

9. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $ST \neq 0, W = 0$

В рассматриваемом случае  $i, \Omega, g = \text{const}$ . Первые два уравнения решены в § 3. Последнее отличается от решенного в § 5 только постоянным множителем. Поэтому

$$M = M_0 + \frac{\kappa^2 - 2S}{T} \left( \eta + \ln \frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0 \right).$$

Решение определено на временах от  $t_* = -t_2 < 0$  до  $t^* = \infty$  при  $T > 0$  и от  $t_* = -\infty$  до  $t^* = -t_2 > 0$  при  $T < 0$ .

10. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ  $STW \neq 0$

Переходим к случаю общего положения  $S \neq 0, T \neq 0, W \neq 0$ .

Первые два уравнения (2) решены в § 3, третье, четвертое и пятое – в § 7, последнее – в § 9. Точнее, переменные  $\omega, i, \Omega, g, M$  представлены эле-

ментарными функциями эксцентриситета. Кинематическое уравнение выражает время как строго монотонную функцию эксцентриситета. Найдем область существования непродолжаемого решения  $t_* < t < t^*$ .

Выпишем соответствующие формулы.

1. Величины, связанные со временем:

$$t_2 = \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left( \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \right)^3 f(\eta_0) =$$

$$= \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_0^{2n},$$

$$t = \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left( \frac{\eta}{1-\eta} \right)^3 [f(\eta) - f(\eta_0)] =$$

$$= \frac{\kappa^2}{\omega_0 T} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \frac{e}{e_0} e^{2n} - e_0^{2n} \right),$$

где  $f, c_n$  даются формулами (11, 13).

Если  $T > 0$ , то  $t_2 > 0, t_* = -t_2 < 0, t^* = \infty$ , каждому  $t \in (t_*, t^*)$  отвечает единственное значение  $\eta$  и соответственно  $e$ . При  $t \rightarrow t_*$  справедливо  $\eta \rightarrow 1, e \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty, a \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0 - \frac{W}{T} \arcsin e_0, M \rightarrow -\infty$ . При движении в прошлое точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали за конечное время, делая бесконечное число оборотов. При  $t \rightarrow t^*$  справедливо  $\eta \rightarrow 0, e \rightarrow 1, \omega \rightarrow 0, a \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow \varphi_0 + \frac{W}{T} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin e_0 \right)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} M = M_0 - \frac{\kappa^2 - 2S}{T} [\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] > M_0.$$

Точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали за бесконечное время, делая конечное число оборотов.

Если  $T < 0$ , то  $t_2 < 0, t_* = -\infty, t^* = -t_2 > 0$ , каждому  $t \in (t_*, t^*)$  отвечает единственное значение  $\eta$  и соответственно  $e$ . При  $t \rightarrow t_*$  справедливо  $\eta \rightarrow 0, e \rightarrow 1, \omega \rightarrow 0, a \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow \varphi_0 + \frac{W}{T} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin e_0 \right)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_*} M = M_0 - \frac{\kappa^2 - 2S}{T} [\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] < M_0.$$

При движении в прошлое точка  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали за бесконечное время, делая конечное число оборотов. При  $t \rightarrow t^*$  справедливо  $\eta \rightarrow 1, e \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty, a \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0 - \frac{W}{T} \arcsin e_0, M \rightarrow \infty$ . Точка  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали за конечное время, делая бесконечное число оборотов.

2. Вспомогательный угол  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{W}{T} (\arcsin e - \arcsin e_0).$$

Его начальное значение однозначно определяется по  $i_0$  и  $g_0$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 &= \frac{\sin i_0}{\sqrt{1-V^2}} \cos g_0, & \sin \varphi_0 &= \frac{\cos i_0}{\sqrt{1-V^2}}, \\ V &= \sin i_0 \sin g_0. \end{aligned}$$

3. Элементы  $\omega$ ,  $a$ ,  $M$  как функции эксцентриситета:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \left[ \frac{\eta(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\eta)} \right]^3 = \\ &= \omega_0 \left( \frac{e_0}{e} \right)^6 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^3 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e^{2n} \right]^{-3}, \\ a &= a_0 \left[ \frac{\eta_0(1-\eta)}{\eta(1-\eta_0)} \right]^2 = \\ &= a_0 \left( \frac{e}{e_0} \right)^4 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e_0^{2n} \right]^{-2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} e^{2n} \right]^2, \\ M &= M_0 + \frac{\kappa^2 - 2S}{T} \left( \eta + \ln \frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0 \right). \end{aligned}$$

4. Элементы  $i$ ,  $g$ ,  $\Omega$  как функции вспомогательной переменной  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \cos i &= \sqrt{1-V^2} \sin \varphi, \\ \sin i &= \sqrt{1-(1-V^2)\sin^2 \varphi}, \\ \cos g &= \frac{\sqrt{1-V^2} \cos \varphi}{\sqrt{1-(1-V^2)\sin^2 \varphi}}, \\ \sin g &= \frac{V}{\sqrt{1-(1-V^2)\sin^2 \varphi}}, \\ \Omega &= \begin{cases} \Omega_1 + \varphi - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi}{V_1 + \cos 2\varphi}, & \text{если } -1 < V < 0, \\ \Omega_2 - \varphi + \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi}{V_2 + \cos 2\varphi}, & \text{если } 0 < V < 1, \\ \Omega_3 + \varphi, & \text{если } V = -1, \\ \Omega_4 - \varphi, & \text{если } V = 1, \\ \Omega_0, & \text{если } V = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь

$$V_1 = \frac{1-V}{1+V}, \quad V_2 = \frac{1+V}{1-V}, \quad V_s > 1.$$

Постоянные  $\Omega_s$  определяются начальными данными  $\varphi_0$ ,  $\Omega_0$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 - \varphi_0 + \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi_0}{V_1 + \cos 2\varphi_0}, \\ \Omega_2 &= \Omega_0 + \varphi_0 - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi_0}{V_2 + \cos 2\varphi_0}, \\ \Omega_3 &= \Omega_0 - \varphi_0, \\ \Omega_4 &= \Omega_0 + \varphi_0. \end{aligned}$$

### 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что уравнения (2) поставленной во введении задачи интегрируются в квадратурах, причем квадратуры оказались элементарными.

В случае  $T = 0$  непродолжаемое решение определено на всей оси времени  $-\infty < t < \infty$ . В остальных случаях одна из двух конечных точек определения непродолжаемого решения  $t_* < t < t^*$  конечна, а другая бесконечна. Именно, при  $T > 0$  конечна  $t_*$ , а  $t^* = \infty$ ; при  $T < 0$  конечна  $t^*$ , а  $t_* = -\infty$ . При стремлении к конечной предельной точке тело  $\mathcal{A}$  падает на  $\mathcal{S}$  по спирали за *конечное время*, делая *бесконечное* число оборотов. При стремлении к бесконечной предельной точке тело  $\mathcal{A}$  удаляется на бесконечность по спирали за *бесконечное время*, делая *конечное* число оборотов.

При  $T = 0$  или  $e_0 = 0$  все 6 элементов орбиты представлены элементарными функциями времени.

Если  $T \neq 0$  и  $e_0 \neq 0$ , ситуация несколько сложнее. Как известно, в интегрируемых задачах механики материальной точки (например, в задаче двух неподвижных центров) фазовые переменные  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$  представляются неявными функциями времени, а время является явной строго монотонной функцией каждой из фазовых координат. В относительно простых интегрируемых задачах (например, в задаче двух тел) фазовые координаты  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$  выражаются явно через шестую переменную  $\epsilon_6$ . Последняя связана со временем так называемым *кинематическим уравнением*  $t = \Phi(\epsilon_6)$ , в котором время — строго монотонная функция указанной фазовой координаты. В задаче двух тел за  $\epsilon_6$  выбирают обычно эксцентрическую аномалию, а кинематическим уравнением служит уравнение Кеплера. В рассмотренной нами задаче пять элементов орбиты  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$ ,  $M$  представлены явными элементарными функциями эксцентриситета. В кинематическом уравнении  $t = \Phi(e)$  функция  $\Phi$  также элементарна. Доказана ее строгая монотонность, так что каждому  $t$  отвечает единственное значение  $e$ .

Сравним задачи, поставленные здесь (возмущающее ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца) и в [5] (возмущающее ускорение постоянно). Дифференциальные уравнения в средних элементах очень похожи. Есть лишь одно существенное различие. Скорость изменения аргумента перицентра согласно (2) пропорциональна одному компоненту возмущающего ускорения,  $W$ . В то же время в задаче из [5] эта скорость является линейной комбинацией уже двух компонентов,  $S$  и  $W$ . Различие привело к тому, что рассмотренная в настоящей статье задача оказалась полностью интегрируемой, тогда как задача из [5] интегрируется лишь в том случае, если хотя бы один из компонентов возмущающего ускорения равен нулю.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *W. F. Bottke, D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and D. Nesvorný*, *Annu. Rev. Earth and Planet. Sci.* **34**, 157 (2006).
2. *S. R. Chesley, S. J. Ostro, D. Vokrouhlický, D. Čapek, et al.*, *Science* **302**, 1739 (2003).
3. *Е. Н. Поляхова*, *Космический полет с солнечным парусом* (М.: URSS, 2018).
4. *Т. Н. Санникова, К. В. Холиевников*, *Астрон. журн.* **96**, 418 (2019).
5. *Т. Н. Санникова, К. В. Холиевников*, *Астрон. журн.* **92**, 681 (2015).
6. *В. И. Арнольд*, *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: Наука, 1984).
7. *Ю. Н. Бибииков*, *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений* (Л.: Изд. ЛГУ, 1981).
8. *М. Ф. Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).

УДК 521.1

## УВОД АСТЕРОИДА С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЯ МАЛОЙ ТЯГИ, НАПРАВЛЕННОЙ ПО КАСАТЕЛЬНОЙ К ОРБИТЕ

© 2020 г. К. В. Холшевников<sup>1,2,\*</sup>, Д. В. Миланов<sup>1,\*\*</sup>, К. И. Оськина<sup>1,\*\*\*</sup>, В. Б. Титов<sup>1,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: kvk@astro.spbu.ru

\*\*E-mail: danila.milanov@gmail.com

\*\*\*E-mail: zezgithsa@gmail.com

\*\*\*\*E-mail: tit@astro.spbu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.

После доработки 30.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

Рассмотрена задача увода опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к траектории. Двигатель может быть смонтирован на астероиде, или на “гравитационном тягаче”. Целью статьи является установление принципиальной возможности увода астероида на безопасное расстояние за время порядка месяца и года. Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Мы ограничились модельной постановкой задачи: двигатель обеспечивает постоянное касательное ускорение. Соответствующие уравнения типа Эйлера были нами преобразованы методом осреднения ранее. Здесь мы решили их методом рядов по степеням “медленного времени” и показали адекватность решения на временах в десятки лет. Оказалось, что астероиды до 55 м в диаметре можно увести за год при тяге двигателя в 1 Н. При тяге в 20 Н астероиды до 50 м в диаметре можно увести за месяц, а с диаметром до 150 м — за год. Увод более крупных астероидов требует больше времени или более мощных двигателей. Результаты сравнены с полученными ранее аналогичными данными для случая, когда возмущающее ускорение направлено по трансверсали. Во всех случаях касательная тяга приводит к лучшим результатам. Однако для орбит с эксцентриситетами до 0.4 оба варианта практически совпадают. Различие становится значимым при  $e > 0.5$ .

DOI: 10.31857/S0004629920100035

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] сформулирована задача о движении точки  $\mathcal{A}$  нулевой массы под действием притяжения к центральному телу  $\mathcal{S}$  и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}$ , постоянного в одной из привилегированных системах отсчета. Здесь мы рассматриваем орбитальную систему  $\mathcal{O}_2$  с ортами  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{j}_2$ ,  $\mathbf{k}_2$ . Орты направлены по касательной, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно. Отношение модулей возмущающего ускорения  $P$  и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения  $\kappa^2/r^2$  считается малым, квадратом этой величины пренебрегается. Здесь  $\kappa^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $\mathcal{S}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $r = \mathcal{S}\mathcal{A}$ . К уравнениям движения применено осредняющее преобразование. Найдены уравнения движения в средних

элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним.

В статье [3] осредненные уравнения проинтегрированы в квадратурах, если хотя бы один из трех компонентов  $\mathfrak{Z} = P\mathbf{i}_2$ ,  $\mathfrak{Y} = P\mathbf{j}_2$ ,  $\mathfrak{W} = P\mathbf{k}_2$  вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{P}$  равен нулю. Здесь мы применим эти результаты к задаче об уводе опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги. Последний может быть установлен на астероиде, или на “гравитационном тягаче” [4]. Малая тяга позволяет сдвинуть астероид на приемлемое расстояние лишь за длительное время (годы, в лучшем случае месяцы). Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Заметим, что, к счастью, маловероятно само столкновение с Землей. Частота оценивается в одно событие за 200 лет [5–7]. Вероятность же столкновения сразу после открытия опасного объекта еще существен-

но ниже<sup>1</sup>. В общем случае он несколько раз пролетает мимо Земли на близком расстоянии (и тогда обнаруживается), прежде чем столкнуться с ней [8].

Направим тягу двигателя коллинеарно вектору скорости. Такой выбор направления локально оптимален для разгона или торможения объекта [9, 10]. В предыдущей статье [11] мы рассмотрели математически более простой случай возмущающего ускорения, направленного вдоль трансверсали. Для круговых орбит оба варианта совпадают. Для эллиптических первый случай предпочтительнее, как будет показано ниже.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через  $\omega$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$ ,  $M$ ,  $a$  угловую скорость (среднее движение по астрономической терминологии), эксцентриситет, наклон к основной неподвижной плоскости с ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , долготу восходящего узла, аргумент перицентра, среднюю аномалию и большую полуось. Независимы первые 6 элементов, параметр

$$a = \kappa^{2/3} \omega^{-2/3} \quad (1)$$

считается функцией от  $\omega$ . Выбор угловой скорости вместо большой полуоси в качестве независимой переменной упрощает операции осреднения, поскольку скорость изменения  $M$  в невозмущенном движении линейно зависит от  $\omega$ , но существенно нелинейно от  $a$ .

Пусть компоненты возмущающего ускорения  $\mathbf{P}$  в системе  $\mathcal{O}_2$  равны  $(\mathfrak{Z}, 0, 0)$ ,  $\mathfrak{Z} = \text{const}$ . В статье [2] выполнено осредняющее преобразование [12–14] уравнений Эйлера [13, 15] для изменения оскулирующих элементов с точностью до первого порядка относительно отношения  $|\mathbf{P}|$  к основному ускорению  $\kappa^2/r^2$ . Переход от оскулирующих элементов к средним выполняется по формулам

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n. \quad (2)$$

Здесь  $\epsilon_n$  – семь оскулирующих элементов, взятых в указанном выше порядке;  $\bar{\epsilon}_n$  – семь средних элементов. Величины  $u_n$  считаются функциями средних элементов  $\bar{\epsilon}_k$ . Впрочем, в первом приближении безразлично, считать ли аргументы  $u_n$  средними или оскулирующими.

Замкнутые выражения  $u_n$  содержат неполные эллиптические интегралы [2]. Предпочтительнее

пользоваться приведенными там же рядами по степеням эксцентриситета:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3}{\omega a} \left[ \left( e - \frac{1}{4} e^3 - \frac{3}{64} e^5 \right) \sin E - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \sin 2E - \frac{1}{256} e^4 \sin 4E \right] \mathfrak{Z}, \\ u_2 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[ \left( 2 - \frac{9}{4} e^2 + \frac{11}{32} e^4 \right) \sin E + \right. \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{4} e^3 + \frac{19}{256} e^5 \right) \sin 2E + \\ &\quad + \left( \frac{1}{12} e^2 - \frac{1}{192} e^4 \right) \sin 3E - \\ &\quad - \left( \frac{1}{32} e^3 + \frac{1}{256} e^5 \right) \sin 4E + \\ &\quad \left. + \frac{3}{320} e^5 \sin 5E - \frac{1}{256} e^5 \sin 6E \right] \mathfrak{Z}, \\ u_3 &= u_4 = 0, \\ u_5 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[ \left( -1 + \frac{3}{8} e^2 + \frac{9}{64} e^4 \right) + \left( -\frac{2}{e} + \frac{3}{4} e + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{32} e^3 + \frac{79}{512} e^5 \right) \cos E + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} e^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{17}{256} e^4 \right) \cos 2E + \left( -\frac{1}{12} e - \frac{1}{192} e^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{1536} e^5 \right) \cos 3E + \left( \frac{1}{32} e^2 + \frac{1}{128} e^4 \right) \cos 4E - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{3}{320} e^3 + \frac{13}{2560} e^5 \right) \cos 5E + \frac{1}{256} e^4 \cos 6E - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{3584} e^5 \cos 7E \right] \mathfrak{Z}, \\ u_6 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[ \left( 1 + \frac{13}{8} e^2 + \frac{1}{64} e^4 \right) + \left( 2 + \frac{13}{4} e + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{32} e^3 + \frac{41}{512} e^5 \right) \cos E - \left( \frac{1}{2} + \frac{25}{16} e^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{11}{256} e^4 \right) \cos 2E + \left( \frac{1}{12} e + \frac{53}{192} e^3 + \frac{7}{64} e^5 \right) \cos 3E - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{32} e^2 + \frac{59}{1024} e^4 \right) \cos 4E + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3}{320} e^3 + \frac{3}{128} e^5 \right) \cos 5E - \frac{1}{256} e^4 \cos 6E + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3584} e^5 \cos 7E \right] \mathfrak{Z}, \\ u_7 &= \frac{2}{\omega^2} \left[ \left( e - \frac{1}{4} e^3 - \frac{3}{64} e^5 \right) \sin E - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \sin 2E - \frac{1}{256} e^4 \sin 4E \right] \mathfrak{Z}. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Это не так для тел метрового и декаметрового размера, открываемых только в непосредственной близости от Земли. Но столь малые тела отклонять не нужно. Достаточно оповещения населения.

Здесь  $E$  – эксцентрисическая аномалия. Ряды сходятся при  $e < 1$ . Мы сохраняем члены до  $e^5$  включительно. Важно, что соотношения (3) не содержат малых знаменателей, поскольку имеется лишь одна быстрая переменная  $M$  и резонанс невозможен.

*Замечание 1.* В статье [2] содержится досадная опечатка. В формулах (9) и (11) следует поменять знак в выражениях для  $u_1$ ,  $\mathcal{F}u_1$ . В формуле (11) выражение для  $\nu$  ошибочно. Однако все коэффициенты при компонентах  $\mathcal{N}$  и  $W$  в [2] верны. В приведенных формулах выше (в которых  $u_6$  соответствует  $\nu$  из [2]) погрешность устранена.

*Замечание 2.* Метод осреднения определяет  $u_n$  с точностью до слагаемого, не зависящего от быстрой переменной. В (3) оно выбрано из условия нулевого среднего  $u_n$  по переменной  $M$ .

*Замечание 3.* Мы считаем разложения типа (3) рядами по степеням эксцентриситета, но для удобства группируем слагаемые при косинусах и синусах одинаковой кратности.

*Замечание 4.* В статье [2] аналогичные (3) выражения представляли собой многочлены невысокой степени от  $e$ . Переход к средней аномалии от эксцентрисической превращал бы их в бесконечные ряды. Переход же к средней аномалии в рядах (3) кажется на первый взгляд разумным. Это не так, поскольку радиус сходимости в этом случае понизился бы от единицы до предела Лапласа  $e_L = 0.6627$ .

Дифференциальные уравнения для средних элементов просты [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{3}{a} F_1(x) \mathfrak{T}, & \dot{e} &= -\frac{e}{\omega a} F_2(x) \mathfrak{T}, \\ \dot{M} &= \omega, & \dot{i} &= \dot{\Omega} = \dot{g} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и ниже  $\mathfrak{T}$  – отличная от нуля постоянная,  $x = e^2$ ,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{64}x^2 + \dots, \\ F_2(x) &= 1 - \frac{5}{8}x - \frac{9}{64}x^2 + \dots, \\ F_3(x) &:= \frac{F_1(x) - F_2(x)}{x} = \frac{3}{8} + \frac{3}{32}x + \dots; \end{aligned}$$

точка (жирная точка для  $i$ ) отмечает дифференцирование по времени  $t$ .

Мы опустили черту над средними элементами, поскольку это не приводит к недоразумениям.

Найдем решение уравнений (4) и оценим вклад периодических возмущений (3).

### 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Описывающие ориентацию эллипса элементы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$  постоянны. Уравнения (4) автономны, поэтому за начальную эпоху удобно принять  $t = 0$ . Начальные значения переменных будем снабжать индексом 0. Далее следует рассмотреть два случая в зависимости от начального значения эксцентриситета.

#### 3.1. Круговая начальная орбита

Пусть  $e_0 = 0$ . В этом случае касательное ускорение  $\mathfrak{T}$  совпадает с трансверсальным  $T$  и мы можем воспользоваться точным решением, полученным в статье [3]:

$$\begin{aligned} e = 0, \quad \omega &= \omega_0(1 - \tau)^3, \quad a = \frac{a_0}{(1 - \tau)^2}, \\ M &= M_0 + \frac{\omega_0 t^*}{4} [1 - (1 - \tau)^4] = \\ &= M_0 + \omega_0 t \left( 1 - \frac{3}{2}\tau + \tau^2 - \frac{1}{4}\tau^3 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения

$$t^* = \frac{a_0 \omega_0}{\mathfrak{T}} = \frac{\varkappa^{2/3} \omega_0^{1/3}}{\mathfrak{T}}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}. \quad (6)$$

Величина  $t^*$  имеет размерность времени,  $\tau$  – безразмерное “медленное время”.

Пусть  $\mathfrak{T} > 0 \Rightarrow t^* > 0$ . Решение (5) существует при  $-\infty < \tau < 1$ ,  $-\infty < t < t^*$ . Поведение решения на концах интервала тривиально:  $a \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow +\infty$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ;  $a \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow t^*$ . Что касается средней аномалии, то  $M \rightarrow -\infty$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ;  $M \rightarrow M_0 + \omega_0 t^*/4$  при  $\tau \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow t^*$ . При нулевом эксцентриситете истинная аномалия совпадает со средней. Поэтому орбита  $\mathcal{A}$  представляет собой спираль, делающую бесконечное число витков в прошлом (намащивается на притягивающий центр), и конечное число витков в будущем (уходя на бесконечность за конечное время).

Пусть  $\mathfrak{T} < 0 \Rightarrow t^* < 0$ . Критическое значение  $\tau = 1$ ,  $t = t^*$  теперь в прошлом, с ростом  $\tau$  время уменьшается. Решение существует при  $-\infty < \tau < 1$ ,  $t^* < t < +\infty$ , и его поведение аналогично описанному выше при перестановке прошлого и будущего.

*Замечание 1.* Уход на бесконечность за конечное время не имеет физического смысла. Такое поведение решения говорит лишь о том, что метод осреднения применим только при  $\tau$ , не слиш-

ком близком к единице: например, при  $\tau < 1/2$ , т.е.  $t < t^*/2$ . Действительно, метод предполагает малость величин  $u_n$ . Между тем при  $e_0 = 0$  согласно (3)

$$u_2 = \frac{2\mathfrak{I}}{\omega^2 a} \sin E = \frac{2\mathfrak{I}}{\omega_0^2 a_0 (1 - \tau)^4} \sin E, \quad (7)$$

что не ограничено при  $\tau \rightarrow 1$ .

*Замечание 2.* Согласно (7) на половине каждого оборота  $\pi(2k - 1) < E < 2\pi k$  оскулирующий эксцентриситет отрицателен. Это нормально, т.к. отрицательность эксцентриситета меняет местами перигентр и апоцентр.

### 3.2. Некруговая начальная орбита

Уравнения (4) при  $0 < e_0 < 1$  проинтегрированы в [3] в квадратурах, приводящих к неполным эллиптическим интегралам. Здесь мы рассматриваем случай малого  $\mathfrak{I}$  (оценки см. ниже), так что гораздо проще использовать ряды по степеням медленного времени. Получим решение методом рядов Ли [16–19]. Первые два уравнения (4) не зависят от остальных. Запишем их решение в виде ряда Ли

$$\epsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k \epsilon_n, \quad n = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь  $D$  – оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (4):

$$D = -3\mathfrak{I} \chi^{-2/3} \omega^{2/3} F_1(x) \frac{\partial}{\partial \omega} - \mathfrak{I} \chi^{-2/3} \omega^{-1/3} e F_2(x) \frac{\partial}{\partial e}.$$

В правые части (8) после дифференцирования следует подставить начальные значения элементов.

Легко доказать, что

$$D^k \omega = \left( \frac{\mathfrak{I}}{\chi^{2/3}} \right)^k \omega^{(3-k)/3} A_k(x). \quad (9)$$

Здесь  $A_k$  определяются индуктивно:

$$A_0 = 1, \quad A_{k+1} = (k - 3)F_1 A_k - 2xF_2 A_k'. \quad (10)$$

Ряды для  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  мы привели с точностью до  $x^\sigma$  при  $\sigma = 2$ . Из (10) вытекает, что все  $A_k(x)$  также точны до  $x^\sigma$ .

Аналогично для эксцентриситета

$$D^k e = \left( \frac{\mathfrak{I}}{\chi^{2/3}} \right)^k \omega^{-k/3} e B_k(x), \quad (11)$$

$$B_0 = 1, \quad B_{k+1} = (kF_1 - F_2)B_k - 2xF_2 B_k'. \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что  $B_k(x)$  точны до  $x^\sigma$ .

Таким образом, потери точности не происходит: все  $D^k \omega$  точны до  $e^{2\sigma}$ , а все  $D^k e$  точны до  $e^{2\sigma+1}$ .

*Замечание.* Множитель  $(k - 3)$  в (10) приводит к тому, что  $A_k(x)$  при  $k \geq 4$  содержат  $x$  множителем. Множитель  $(kF_1 - F_2)$  в (12) при  $k = 1$  равен  $xF_3$ . Это приводит к тому, что  $B_k(x)$  при  $k \geq 2$  содержат  $x$  множителем.

Согласно (6)

$$\frac{\mathfrak{I} t}{\chi^{2/3} \omega^{1/3}} = \tau.$$

Поэтому ряды (8) с учетом (9, 11) становятся рядами по степеням  $\tau$ :

$$\omega = \omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} \tau^k, \quad e = e_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \tau^k. \quad (13)$$

С точностью до второй степени медленного времени

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \left[ 1 - 3 \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \tau + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \tau^2 + \dots \right], \\ e &= e_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{9}{64} e^4 \right) \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{16} e^2 \left( 1 + \frac{19}{104} e^2 \right) \tau^2 + \dots \right], \\ a &= a_0 \left[ 1 + 2 \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \tau + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left( 1 - \frac{1}{3} e^2 - \frac{7}{96} e^4 \right) \tau^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Первые два равенства (14) получены из (13), последнее выведено из первого в силу (1). Интегрируя первое соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} \delta M &= \omega_0 t^* \tau^2 \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \tau + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь введено обозначение

$$\delta M = M - M_0 - \omega_0 t.$$

Напомним, что в квадратных скобках удерживаются члены до четвертой степени эксцентриситета, и что под  $e$  справа в (14), (15) следует понимать  $e_0$ . Как и должно быть, вековые возмущения позиционных элементов пропорциональны времени. Вековые возмущения средней аномалии пропорциональны квадрату времени, ибо в третьем уравнении (4) отсутствует слагаемое, пропорциональное  $\mathfrak{I}$ .

*Замечание.* При  $e_0 = 0$  решение (14), (15) совпадает с (5) с принятой точностью рядов по степеням  $\tau$ .

3.3. Сходимость рядов

1. Пусть  $e_0 = 0$ .

Элементы  $\omega, M$  являются согласно (5) многочленами по времени, и вопрос о сходимости не стоит.

Для большой полуоси имеется замкнутое выражение, см. (5). Его можно разложить в ряд

$$a = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\tau^n,$$

радиус сходимости  $\tau^*$  которого равен единице.

2. Пусть  $0 < e_0 < 1$ .

Воспользуемся точными выражениями для первых двух уравнений (4) [2], переходя к медленному времени в качестве независимой переменной:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= -\frac{6\omega_0^{1/3}}{\pi} \mathbf{E}(e)\omega^{2/3}, \\ \frac{de}{d\tau} &= -\frac{4\omega_0^{1/3}}{\pi} e(1-e^2)\mathbf{D}(e)\omega^{-1/3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $\mathbf{E}(e), \mathbf{D}(e)$  – эллиптические интегралы в форме Лежандра.

Оценим радиус сходимости  $\tau^*$  решений (16) с помощью теоремы Коши [19, теорема 8.2.2]):

$$\tau^* \geq \frac{1}{3\mathfrak{M}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \max \left\{ \frac{\mathfrak{M}_1}{r_\omega}, \frac{\mathfrak{M}_2}{r_e} \right\}, \\ \mathfrak{M}_1 &= \max |f_1|, \quad \mathfrak{M}_2 = \max |f_2|, \end{aligned} \tag{17}$$

функции  $f_1$  и  $f_2$  – правые части уравнений (16), а величины  $r_\omega$  и  $r_e$  задают их область определения:

$$|\omega - \omega_0| < r_\omega, \quad |e - e_0| < r_e.$$

Положим  $r_e = 1 - e_0, r_\omega = \gamma\omega_0, 0 < \gamma < 1$ . Выбор  $\gamma$ , разумеется, не влияет на значение радиуса сходимости, но определяет величину оценки  $\tau^*$  снизу, которую дает теорема Коши. Мы подберем  $\gamma$  так, чтобы оценка  $\tau_*(\gamma, e_0)$  была бы максимальной.

По принципу максимума модуля, для вычисления  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  достаточно рассмотреть лишь точки граничных окружностей:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0(1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi), \quad e = e_0 + (1 - e_0) \operatorname{Exp} \psi, \\ 0 &\leq \xi, \psi < 2\pi. \end{aligned}$$

Здесь  $\operatorname{Exp} x := \exp ix, i$  – мнимая единица. Очевидно,

$$|f_1| \leq \frac{6\omega_0^{1/3}}{\pi} L_1 \omega_0^{2/3} |1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi|^{2/3} \leq \frac{6\omega_0 L_1}{\pi} (1 + \gamma)^{2/3}, \tag{18}$$

Таблица 1. Значения  $\gamma$  и  $\tau_*$  в зависимости от  $e_0$

$e_0$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\gamma$	0.9619	0.9556	0.9468	0.9342	0.9155	0.8867	0.8405
$\tau_*$	0.0561	0.0558	0.0555	0.0550	0.0542	0.0531	0.0511
$e_0$	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	0.9999
$\gamma$	0.7627	0.6385	0.4512	0.3131	0.1344	0.0413	0.0130
$\tau_*$	0.0478	0.042	0.0322	0.0239	0.0113	0.0037	0.0012

$$|f_2| \leq \frac{4\omega_0^{1/3}}{\pi} L_2 \omega_0^{-1/3} |1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi|^{-1/3} \leq \frac{4L_2}{\pi} (1 - \gamma)^{-1/3}. \tag{19}$$

За  $L_1, L_2$  можно взять числа, большие или равные  $\max_e |\mathbf{E}(e)|, \max_e |e(1 - e^2)\mathbf{D}(e)|$  соответственно.

Поскольку  $\max_e |\mathbf{E}(e)| \leq \mathbf{E}(i)$ , можно положить

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbf{E}(i) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \\ &= \sqrt{2} \mathbf{E} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1.910099. \end{aligned}$$

За  $L_2$  примем зависящую от  $e_0$  правую часть формулы (41) из Приложения:  $L_2(e_0) = \pi \sqrt{g_4(e_0)}/8$ . Теперь формулы (18), (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}_1}{r_\omega} &\leq \frac{6L_1}{\pi} \frac{(1 + \gamma)^{2/3}}{\gamma}, \\ \frac{\mathfrak{M}_2}{r_e} &\leq \frac{4L_2(e_0)}{\pi(1 - e_0)(1 - \gamma)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Наилучшая нижняя оценка  $\tau_*(e_0)$  величины  $\tau^*$  получится при совпадении правых частей соотношений (20):

$$\frac{(1 - \gamma)^{1/3}(1 + \gamma)^{2/3}}{\gamma} = L_3(e_0). \tag{21}$$

Здесь

$$L_3 = \frac{2L_2}{3L_1(1 - e_0)}.$$

Производная от левой части (21),

$$\frac{\gamma - 3}{3\gamma^2(1 - \gamma)^{2/3}(1 + \gamma)^{1/3}},$$

отрицательна. Поэтому левая часть (21) убывает от  $\infty$  до 0 с ростом  $\gamma$  от 0 до 1, и каждому  $e_0$  отвечает единственное значение  $\gamma \in (0, 1)$ .

Решая уравнение (21) численно, представим  $\gamma$  и  $\tau_*$  в табл. 1 и на рис. 1. Заметим, что полученные по теореме Коши оценки существенно занижают

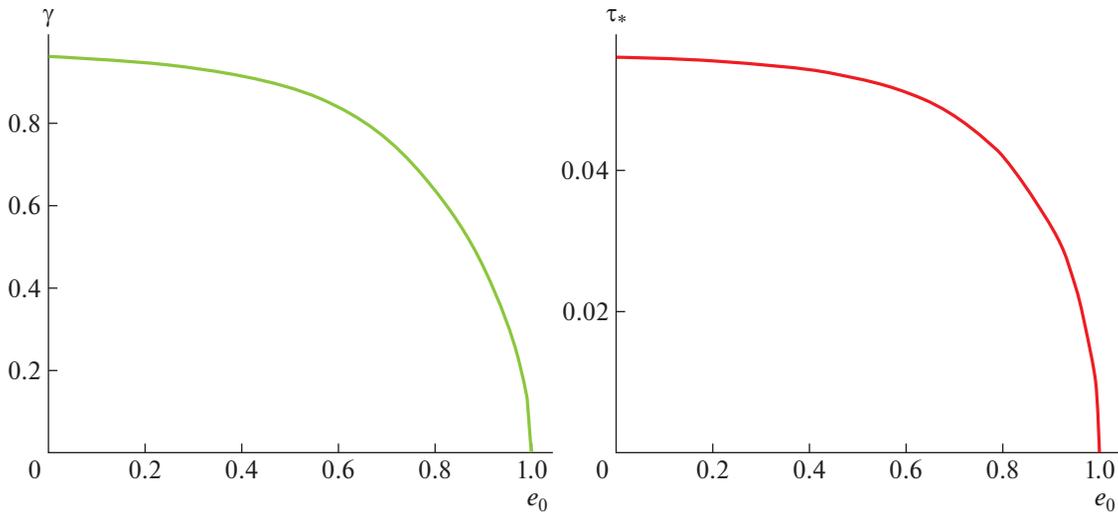


Рис. 1. Графики  $\gamma$  и  $\tau_*$  в зависимости от  $e_0$ .

область сходимости. Так,  $\tau_*(0) = 0.056$ , тогда как  $\tau^*(0) = 1$ .

Смещения  $\Delta \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{r}_2$  вызваны отличием оскулирующих элементов от средних. Смещение  $\Delta \mathbf{r}_3$  вызвано дрейфом средних элементов.

#### 4. НОРМА СМЕЩЕНИЯ

Пусть  $\epsilon_n, n = 1, \dots, 5$  – первые пять оскулирующих элементов, постоянных в невозмущенном движении (медленные переменные);  $\epsilon_6 = M$  – средняя аномалия (быстрая переменная). Восстановим черту над средними элементами. Нас интересует смещение  $\Delta \mathbf{r}$  положения  $\mathcal{A}$  за время  $t$ , вызванное возмущающим ускорением  $\mathfrak{Z}$ . По определению

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\epsilon_n, M) - \mathbf{r}(\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t). \quad (22)$$

Напомним, что разности оскулирующих и средних элементов  $u_n$  обладают нулевым средним по средней аномалии. Полезно наряду с  $u_n$  ввести величины  $\tilde{u}_n = u_n - v_n$  при  $v_n = u_n(0)$ .

Заменим (2) соотношением

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + \tilde{u}_n. \quad (23)$$

Теперь в начальную эпоху  $\tilde{u}_n(0) = 0, \epsilon_n(0) = \bar{\epsilon}_n(0)$ .

Соотношение (22) представим в форме

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r}_3, \quad (24)$$

где

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + \tilde{u}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + \tilde{u}_6) - \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + u_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + u_6), \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + u_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + u_6) - \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M), \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M) - \mathbf{r}(\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t). \quad (27)$$

##### 4.1. Влияние отличия оскулирующих элементов от средних

Оценим смещения  $\Delta \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{r}_2$ . Поскольку  $\tilde{u}_n, u_n$  малы и периодически зависят от  $M$ , разности (25), (26) также малы и периодичны, так что вековой тренд отсутствует. Для оценки достаточно вычислить среднеквадратические нормы

$$\varrho_k := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta \mathbf{r}_k)^2 dM}, \quad k = 1, 2. \quad (28)$$

Норма  $\varrho_2$  приведена в [20, формулы (9), (13)]:

$$\varrho_2 = \frac{4|\mathfrak{Z}|}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{39}{128} e^2 + \frac{52505}{73728} e^4}. \quad (29)$$

Замечательно, что  $\varrho_2$  зависит только от двух элементов орбиты  $\omega$  и  $e$  (или, что то же самое, от  $a$  и  $e$ ).

Заметим, что при  $e = 0$  и замене  $\mathfrak{Z}$  на  $T$  формула (29) совпадает с формулой (16) из [11], как и должно быть.

Величина  $\Delta \mathbf{r}_2^2$  является квадратичной формой от  $u_n$ . Величина  $\Delta \mathbf{r}_1^2$  отличается от  $\Delta \mathbf{r}_2^2$  заменой  $u_n$  на  $\tilde{u}_n - u_n$ , или, что то же самое, на  $v_n$ . Она неудобна тем, что зависит от всех начальных данных. Для оценки примем, что интегралы (28) от них равны, так что  $\varrho_1 = \varrho_2$ .

#### 4.2. Влияние дрейфа средних элементов

В этом разделе все элементы считаются средними. При  $\mathfrak{L} = 0$  пять из них  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$  постоянны, а шестой  $\epsilon_6 = M$  линейно зависит от времени. Поскольку  $\delta i = \delta \Omega = \delta g = 0$ , с точностью до второго порядка малости смещение (27) согласно [21] равно

$$(\Delta \mathbf{r}_3)^2 = \delta r^2 + r^2 \delta u^2,$$

где  $u$  – аргумент широты. Вычислим среднеквадратичную норму:

$$\varrho_3^2 := \|\Delta \mathbf{r}_3\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta \mathbf{r}_3)^2 dM. \quad (30)$$

Приращения  $\delta r$  и  $\delta u$  – линейные функции от  $\delta a$ ,  $\delta e$ ,  $\delta M$ . Последние согласно (14), (15) зависят лишь от начальных данных  $a_0$ ,  $e_0$  и времени, но не зависят от положения на орбите  $M$ . Условимся в интеграле (30) считать  $t$  независимым от  $M$ . Тогда при интегрировании приращения  $\delta a$ ,  $\delta e$ ,  $\delta M$  ведут себя как постоянные, и мы можем воспользоваться результатами статьи [21]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2} \varrho_3^2 = & \frac{2 + 3e^2}{a^2} \delta a^2 + \frac{5 - 4e^2}{\eta^2} \delta e^2 + \\ & + 2\delta M^2 + 6 \frac{e}{a} \delta a \delta e. \end{aligned} \quad (31)$$

Значения коэффициентов при приращениях вычисляются на начальную эпоху  $t = 0$ . Подставляя (14), (15) в (31), получим

$$\frac{2}{a^2} \varrho_3^2(\tau) = Q_1(\tau) + Q_2(\tau) \quad (32)$$

при

$$\begin{aligned} Q_1(\tau) &= \frac{2 + 3e^2}{a^2} \delta a^2 + \frac{5 - 4e^2}{\eta^2} \delta e^2 + 6 \frac{e}{a} \delta a \delta e = \\ &= (8 + e^2 - e^4) \tau^2 + \left(24 + 4e^2 - \frac{25}{4} e^4\right) \tau^3 + \dots, \\ Q_2(\tau) &= 2\delta M^2 = \frac{9}{2} (\omega_0 t^*)^2 \tau^4 \left[ \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{32} e^4\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \left(1 - e^2 + \frac{11}{64} e^4\right) \tau + \dots \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $Q_1$  отвечает смещению поперек орбиты, а  $Q_2$  – вдоль орбиты.

Обратим внимание, что  $Q_2 \ll Q_1$ , если  $t$  отвечает дуге в несколько градусов;  $Q_2$  и  $Q_1$  сопоставимы по величине на дуге порядка полуоборота;  $Q_2 \gg Q_1$  на дуге в один и более оборотов. Действительно,

$$\frac{Q_2(\tau)}{Q_1(\tau)} \sim \frac{9}{16} (\omega_0 t^*)^2 \left(1 - \frac{5}{8} e^2 + \frac{11}{64} e^4\right) \quad (34)$$

согласуется со сказанным в начале параграфа: одному обороту отвечает  $\omega t = 2\pi$ .

*Замечание 1.* Правая часть (29) инвариантна относительно замены  $T \mapsto -T$ ,  $\tau \mapsto -\tau$ . Это не так для правой части (32). Однако она становится инвариантной, если пренебречь нечетными (поправочными) степенями  $\tau$ .

*Замечание 2.* Формулы (29), (32) оценивают периодическое и вековое смещения  $\mathcal{A}$  в системе отсчета  $\mathbb{O}_2$ . По инвариантности расстояний относительно сдвигов и вращений оба соотношения остаются справедливыми в любой декартовой системе отсчета.

#### 4.3. Сравнение со случаем возмущающего ускорения, направленного вдоль трансверсали

Сравним полученные результаты с приведенными в [11], где рассматривался случай постоянства возмущающего ускорения в системе отсчета  $\mathbb{O}_1$ , орты которой  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  направлены по радиус-вектору, трансверсали (перпендикуляр к радиус-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Считалось  $\mathbf{P} = (0, T, 0)$ ,  $T = \text{const}$ .

Пусть  $\mathfrak{L} = T$ .

При  $e_0 = 0$  результаты совпадают, как и должно быть: трансверсаль в этом случае служит касательной.

Считаем далее  $e_0 > 0$ . Величины, описывающие случай постоянства  $\mathbf{P}$  в системе  $\mathbb{O}_2$ , снабдим символом (\*).

Опираясь на (33) и аналогичные формулы из [11], образуем отношения

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^*}{Q_1} &\sim 1 + \frac{15}{32} e^2 + \frac{421}{1024} e^4, \\ \frac{Q_2^*}{Q_2} &\sim 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{15}{32} e^4, \end{aligned} \quad (35)$$

где мы пренебрегли величинами порядка  $\tau$  и, как всегда, величинами порядка  $e^6$ .

Формулы (35) показывают, что как смещение поперек орбиты, так и смещение вдоль орбиты больше в системе отсчета  $\mathbb{O}_2$ . Различие увеличивается с ростом эксцентриситета. При малых  $e$  различие незначительно. При  $e = 0.3$  различие достигает 5%, а при  $e = 0.8$  достигает 50%.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

А. Выберем то же подсемейство  $\mathcal{F}$  семейства потенциально опасных астероидов с известными элементами и диаметром  $d$ , использованное в

**Таблица 2.** Параметры 14 астероидов в верхней части списка и 4 – в нижней

Объект	$d$	$m$ $\times 10^{-7}$	$a$ , au	$e$	$\omega^2$ $\times 10^{14}$	$\mathfrak{D}$ $\times 10^8$	$t^*$ $\times 10^{-12}$	$\tau_1$ $\times 10^6$	$\tau_2$ $\times 10^5$	$\rho_2$ $\times 10^{-6}$	$\rho_3(\tau_1)$ $\times 10^{-5}$	$\rho_3(\tau_2)$ $\times 10^{-6}$
2010 YD	26	2.30	2.04	0.538	0.466	4.35	0.480	5.40	6.58	36.8	33.7	74.5
2002 JR100	28	2.87	0.924	0.299	5.03	3.48	0.890	2.91	3.54	2.74	8.78	52.3
1998 KY26	30	3.53	1.23	0.202	2.12	2.83	0.948	2.73	3.33	5.32	10.5	43.8
2010 FX9	30	3.53	1.13	0.367	2.74	2.83	0.990	2.62	3.19	4.08	9.35	42.9
2010 HA	32	4.29	0.960	0.196	4.48	2.33	1.30	1.99	2.42	2.07	6.18	35.3
2010 JJ3	32	4.29	2.23	0.578	0.356	2.33	0.855	3.03	3.69	25.9	20.7	41.6
2010 CO44	34	5.14	1.07	0.231	3.23	1.94	1.48	1.75	2.13	2.39	5.95	29.6
2010 JO71	37	6.63	1.17	0.387	2.46	1.51	1.82	1.42	1.73	2.41	5.23	22.9
2010 QG2	38	7.18	1.67	0.517	0.846	1.39	1.65	1.57	1.91	6.48	8.05	22.3
2010 JH3	39	7.76	1.76	0.470	0.731	1.29	1.74	1.49	1.81	6.93	7.99	21.0
2010 JW39	39	7.76	1.64	0.390	0.903	1.29	1.81	1.43	1.75	5.62	7.19	20.7
2010 EX11	40	8.38	0.956	0.110	4.54	1.19	2.55	1.02	1.24	1.05	3.15	18.2
2010 MY1	43	10.4	1.21	0.211	2.21	0.961	2.81	0.921	1.12	1.73	3.49	14.8
2010 UC7	43	10.4	1.88	0.567	0.593	0.961	2.26	1.15	1.40	6.40	6.62	15.9
2004 KH17	197	1000	0.712	0.499	11.0	0.00999	353	0.00734	0.00893	0.00358	0.0184	0.146
2010 CB55	198	1020	1.13	0.148	2.72	0.00984	284	0.00912	0.0111	0.0144	0.0325	0.151
2010 FH81	200	1050	1.23	0.210	2.15	0.00955	282	0.00920	0.0112	0.0176	0.0351	0.148
Aphophis	325	4490	0.922	0.191	5.06	0.00223	1390	0.00186	0.00226	0.00175	0.0056	0.0337

Примечание. Объект 2004 KH17 ≡ 468468; Объект 2010 FH81 ≡ 510055; Aphophis ≡ 99942.

статье [11]. Считаем, что на каждый из этих 66 астероидов действует возмущающая сила<sup>2</sup> в 1 Н, вызывающая возмущающее ускорение  $\mathfrak{D} = 1/m$ .

В табл. 2 представлены следующие сведения: номер (предварительное обозначение) астероида; диаметр  $d$ ; масса  $m$ ; элементы  $a$ ,  $e$ ,  $\omega^2$ ; ускорение  $\mathfrak{D}$ ; критическое время  $t^*$ ; безразмерные времена  $\tau_1 = t_1/t^*$  и  $\tau_2 = t_2/t^*$ , отвечающие  $t_1 = 30^d$ ,  $t_2 = 1$  тропический год; норма периодического смещения  $\rho_2$ ; вековые смещения  $\rho_3(\tau_1)$ ,  $\rho_3(\tau_2)$ . Данные упорядочены по возрастанию  $d$ . Приведены значения для первых 14 и последних 4 астероидов.

Масса  $m$  известна с точностью, на несколько порядков худшей по сравнению с точностью остальных исходных данных. Но наша задача на данном этапе – оценить возможности метода, а для этого имеющейся точности вполне хватает.

Вычисленные характеристики 66 астероидов из семейства  $\mathcal{F}$  показали следующее.

<sup>2</sup> Все значения приводим в системе СИ, если не указано противное.

1. Для всех астероидов

$$\tau_1 < \tau_2 < 6.6 \times 10^{-5},$$

так что  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  лежат глубоко внутри круга сходимости. Более того, квадратичного по  $\tau$  приближения в (14) и кубичного в (15) более чем достаточно. С принятой точностью в формуле (33) можно считать

$$\begin{aligned} Q_1(\tau) &= (8 + e^2 - e^4 + \dots)\tau^2, \\ Q_2(\tau) &= \frac{9}{2}(\omega_0 t^*)^2 \tau^4 \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{32}e^4 + \dots\right). \end{aligned} \quad (36)$$

2. На месячном интервале  $Q_2(\tau)$  в несколько раз меньше  $Q_1(\tau)$ : сдвиг вдоль орбиты меньше сдвига поперек орбиты. Противоположная ситуация на годичном интервале за одним исключением для 130-м астероида 2002 CX58. На обоих интервалах различия доходят до двух–трех порядков.

3. На месячном интервале  $\rho_2 > \rho_3(\tau_1)$ : периодические возмущения превосходят вековые. Противоположная ситуация на годичном интервале  $\rho_2 < \rho_3(\tau_2)$  за одним исключением для того же 130-м астероида 2002 CX58.

4. Величина  $\varrho_2$  для большинства астероидов оказалась меньше радиуса Земли  $R_\oplus$ . Лишь для четырех астероидов  $\varrho_2 > R_\oplus$ . Мы приняли  $R_\oplus = 6.5 \times 10^6$  с учетом атмосферы.

5. Величина  $\varrho_3(\tau_1)$  для всех астероидов оказалась меньше радиуса Земли. Увод астероидов за месяц невозможен. Правда, возможно тонкое маневрирование с привлечением периодических возмущений для упомянутых четырех астероидов. Но это слишком опасно.

6. Для всех 19 астероидов с диаметром до 55 м включительно  $\varrho_3(\tau_2)$  превысило радиус Земли. Для таких опасных астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений необходим.

7. Увод астероидов крупнее 55 м за год невозможен.

Б. Увеличим возмущающую силу в  $N$  раз, сохраняя остальные предположения п. А. При расчетах положим  $N = 20$ .

1. Значения  $\mathfrak{D}$ ,  $1/t^*$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\varrho_2$  увеличиваются в  $N$  раз. В частности, при  $N = 20$

$$\tau_1 < \tau_2 < 1.3 \times 10^{-3}.$$

По-прежнему  $\tau_1$  и  $\tau_2$  находятся глубоко внутри круга сходимости; квадратичного по  $\tau$  приближения в (13) и кубичного в (14) достаточно, и можно пользоваться формулой (36). Поэтому значения  $Q_s(\tau_k)$  увеличиваются в  $N^2$  раз, а  $\varrho_3(\tau_k)$  — в  $N$  раз.

2. Соотношения между  $Q_2(\tau)$  и  $Q_1(\tau)$  не изменяются.

3. Соотношения между  $\varrho_2$  и  $\varrho_3(\tau)$  не изменяются.

4. Для всех 18 астероидов с диаметром, меньшим 54 м, и еще для 11 астероидов с диаметром до 130 м  $\varrho_2$  превысило радиус Земли. Учет периодических возмущений для таких астероидов обязателен.

5. Для всех 11 астероидов с диаметром, меньшим 40 м, и еще для 5 астероидов с диаметром до 53 м  $\varrho_3(\tau_1)$  превысило радиус Земли. Таким образом, для небольших опасных астероидов увод возможен за время около месяца. Учет периодических возмущений обязателен.

6. Для всех 55 астероидов с диаметром до 152 м включительно  $\varrho_3(\tau_2)$  превысило радиус Земли. Для таких астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений также необходим.

7. Увод астероидов крупнее 150 м, в частности, увод Апофиса, за год невозможен.

В. При каких условиях становится возможным увод более крупных астероидов? Очевидно, следует либо увеличить тягу двигателя, либо время

**Таблица 3.** Сравнение эффективности касательного и трансверсального ускорений

Объект	$e$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
2009 UY19	0.03	1.00	1.00	1.00
2010 FK	0.10	1.00	1.00	1.00
1998 KY26	0.20	1.00	1.01	1.01
2002 JR100	0.30	1.00	1.02	1.04
2010 JO71	0.39	1.01	1.04	1.06
2002 LT24	0.50	1.03	1.07	1.11
2010 EC43	0.60	1.09	1.12	1.16
2004 FG11	0.72	1.22	1.20	1.31
2010 DO	0.75	1.26	1.22	1.35
2010 LK34	0.81	1.41	1.29	1.46

Примечание. Объект 2002 LT24  $\equiv$  469 445; Объект 2004 FG11  $\equiv$  363 599.

маневра, либо и то, и другое. Для Апофиса нужно увеличить отвечающее  $N = 1$  значение  $\varrho_3(\tau_2)$  примерно в 200 раз, чтобы оно превысило  $R_\oplus$ .

1. Добьемся этого за счет тяги. Полагая  $N = 200$ , получим  $\tau_2 = 4.53 \times 10^{-6}$ , что по-прежнему позволяет пользоваться упрощенной формулой (36). Норма уклонения возрастет в те же 200 раз. Более точный расчет показывает, что Апофис можно увести с орбиты соударения за 0.98 года при тяге в 200 Н.

2. Добьемся этого за счет продолжительности маневра. Величина  $Q_2(\tau_2)$  в 28 раз превышает  $Q_1(\tau_2)$ . Поэтому  $\varrho_3(\tau)$  в этом диапазоне приблизительно пропорциональна  $\tau^2$ . Таким образом, Апофис можно увести с орбиты соударения за  $\sqrt{10}$  лет при тяге в 20 Н. Более точный расчет дает для этого 3.14 года.

Столь большая тяга, или столь большое время не позволяют сейчас передвинуть Апофис на безопасную орбиту. Но в не очень далекой перспективе это представляется вполне реальным.

Г. Сравним данные табл. 2 с данными аналогичной таблицы из [11]. Результат соберем в табл. 3. В ней представлены следующие сведения для 10 астероидов: номер (предварительное обозначение); эксцентриситет  $e$ ; отношения  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , где

$$\beta_1 = \frac{\varrho_2^*}{\varrho_2}, \quad \beta_2 = \frac{\varrho_3^*(\tau_1)}{\varrho_3(\tau_1)}, \quad \beta_3 = \frac{\varrho_3^*(\tau_2)}{\varrho_3(\tau_2)}.$$

Данные упорядочены по возрастанию  $e$ . Как и в разделе 4.3, символ (\*) указывает на касательное ускорение  $\mathfrak{L}$ , а его отсутствие – на трансверсальное  $T$  при  $\mathfrak{L} = T = 1$  Н.

Теоретические выводы раздела 4.3 подтверждаются полностью. Во всех случаях тяга по касательной дает лучшие результаты по сравнению с тягой по трансверсали. Различие пренебрежимо мало при малых и даже умеренных эксцентриситетах и возрастает вместе с  $e$ . Различие становится заметным, начиная с  $e = 0.5$ , достигая 45% при  $e = 0.8$ .

**ФИНАНСИРОВАНИЕ**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

*Приложение*

**ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Пусть  $0 < e_0 < 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} e(\psi) &= e_0 + (1 - e_0) \text{Exp } \psi, \\ g_1(\alpha, z) &= \frac{1 - z}{1 - \alpha z}, \\ g_2(e) &= e(1 - e^2) \mathbf{D}(e). \end{aligned} \tag{37}$$

Оценим модули функций (37). Очевидно,  $|e(\psi)| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} 1 - e^2(\psi) &= (1 - e_0) \{1 + e_0 - 2e_0 \cos \psi - \\ &- (1 - e_0) \cos 2\psi - i[2e_0 \sin \psi + (1 - e_0) \sin 2\psi]\}, \\ |1 - e^2|^2 &= 2(1 - e_0)^2 g_3(e_0, \psi), \\ g_3 &= 1 + 3e_0^2 - 4e_0^2 \cos \psi - (1 - e_0^2) \cos 2\psi. \end{aligned}$$

Производная

$$\frac{\partial g_3}{\partial \psi} = 4 \sin \psi [e_0^2 + (1 - e_0^2) \cos \psi]$$

обращается в нуль при

$$\psi = 0, \quad \psi = \pi,$$

а при  $e_0 < 1/\sqrt{2}$  также при

$$\cos \psi = -\frac{e_0^2}{1 - e_0^2}, \quad \cos 2\psi = -\frac{1 - 2e_0^2 - e_0^4}{(1 - e_0^2)^2}.$$

Отсюда без труда выводим

$$\max_{\psi} |1 - e^2(\psi)| = g_4(e_0), \tag{38}$$

где

$$g_4(e_0) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1 - e_0}{1 + e_0}}, & \text{если } e_0 \leq 1/\sqrt{2}, \\ 4e_0(1 - e_0), & \text{если } e_0 \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Аксиома треугольника для точек  $1, z, \alpha z$  комплексной плоскости дает

$$|1 - z| \leq |1 - \alpha z| + |z - \alpha z|. \tag{39}$$

Далее,

$$|z - \alpha z|^2 \leq |1 - \alpha z|^2. \tag{40}$$

Действительно, (40) вытекает из очевидного неравенства

$$1 - 2\alpha \leq 1 - \alpha(z + \bar{z}).$$

Соотношения (39, 40) влекут неравенство

$$|g_1(\alpha, z)| \leq 2.$$

Отсюда получаем оценку  $g_2(e)$ :

$$\begin{aligned} |g_2(e)| &\leq \left| e\sqrt{1 - e^2} \int_0^{\pi/2} \left| \sqrt{g_1(\sin^2 x, e^2)} \right| \sin^2 x dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{2g_4(e_0)} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \sqrt{g_4(e_0)}. \end{aligned} \tag{41}$$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия, Вып. 4. 134 (2013).
2. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **91**(12), 1060 (2014).
3. Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **95**(4), 307 (2018).
4. E. T. Lu and S. G. Love, Nature **438**(11), 177 (2005).
5. Ю. Д. Медведев, М. Л. Свешников, А. Г. Сокольский, Е. И. Тимошкова, Ю. А. Чернетенко, Н. С. Черных, В. А. Шор, Астероидно-кометная опасность, под ред. А. Г. Сокольского (СПб: ИПА РАН, 1996).
6. А. М. Микиша, М. А. Смирнов, в Угроза с неба: рок или случайность?, под ред. А. А. Боярчука (М.: Космоинформ, 1999).
7. Н. Н. Горькавый, А. Е. Дудоров (ред.), Челябинский суперболид (Челябинск: Челябинский ГУ, 2016).
8. А. В. Елькин, Л. Л. Соколов, в Астероидная опасность-95. 23–25 мая 1995 г. С.-Петербург. Тезисы докладов (СПб.: Изд-во МИПАО и ИТА РАН, 1995) **2**, 41.
9. Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев, Механика космического полета (проблемы оптимизации) (М.: Наука, 1975).
10. В. Н. Лебедев, Расчет движения космического аппарата с малой тягой (М.: ВЦ АН СССР, 1968).

11. *Н. Батмунх, К. И. Оськина, Т. Н. Санникова, В. Б. Титов, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**(11), 961 (2019).
12. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (М.: ФМ, 1963).
13. *Д. Брауер, Дж. Клеменс*, Методы небесной механики (М.: Мир, 1964).
14. *А. Пуанкаре*, Лекции по небесной механике (М.: Наука, 1965).
15. *М. Ф. Субботин*, Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
16. *W. Gröbner*, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen* (Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967).
17. *Г. Е. О. Джакаля*, Методы теории возмущений для нелинейных систем (М.: Наука, 1979).
18. *А. Х. Найфе*, Методы возмущений (М.: Наука, 1976).
19. *К. В. Холшевников*, Асимптотические методы небесной механики (Л.: Изд-во ЛГУ, 1985).
20. *К. В. Холшевников, Н. Батмунх, К. И. Оськина, В. Б. Титов*, Астрон. журн. **97**(4), 348 (2020).
21. *Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, В. Ш. Шайдулин*, Астрон. журн. **93**(3), 331 (2016).

УДК 521.1

## РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ НАВИГАЦИОННОЙ ПРИВЯЗКИ ОКОЛОЛУННЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ К СЕЛЕНОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

© 2020 г. А. О. Андреев<sup>1,2,3</sup>, Ю. А. Нефедьев<sup>1,\*</sup>, Н. Ю. Демина<sup>1</sup>,  
Н. К. Петрова<sup>1</sup>, А. А. Загидуллин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия

<sup>3</sup> Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

\*E-mail: star1955@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.

После доработки 24.01.2020 г.

Принята к публикации 24.01.2020 г.

Современные космические оптические наблюдения в исходном виде содержат значительные геометрические и яркостные искажения. Данная проблема может быть решена на основе геометрической коррекции и преобразования координат опорных объектов в принятые картографические проекции. В настоящей работе рассматривается метод координатной трансформации к опорной селеноцентрической динамической системе с применением электронных карт, в качестве которых выступает база опорных селенографических объектов. Процесс трансформации предполагает формирование фотограмметрически скорректированного изображения, идентификацию наблюдаемых и включенных в электронные карты объектов. Зная наблюдаемые селенографические координаты искомой точки, программными средствами определяются ее высотные данные на поверхности Луны по отношению к опорным объектам. Предварительные селенографические координаты искомой точки могут быть определены с использованием как наземных позиционных наблюдений, так и с помощью бортовых угломерных устройств, таких как лазерный интерферометр. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629920100011

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В направлении выполнения системного анализа селенофизических данных современных лунных миссий и развития метода приведения разнородных селенофизических наблюдений в единую селеноцентрическую систему и создания цифрового каталога селеноцентрических референтных точек необходимо отметить следующее [1]. Несмотря на достижения при определении селенофизических параметров на основе данных измерений космических аппаратов, задача создания точного координатно-временного ориентирования на поверхности Луны в настоящее время остается в достаточной степени не решенной. Согласно работе [2], существует вывод о том, что орбитальные параметры космических лунных миссий “GRAIL” и “LRO” были определены и привязаны к небесной системе координат с точностью 1 м на всем маршруте полета спутника.

Такое заключение основывается на той информации, что снимки, полученные с борта “LRO”, были привязаны друг к другу с такой точностью для селенографических координат, когда каждый пиксель соответствует 0.5 м на поверхности Луны. Также считается, что модель гравитационного поля, построенная по измерениям “GRAIL”, повсеместно уравнена и согласована с орбитальными элементами миссии “LRO”. Однако, согласно статье [3], в которой проведен анализ наблюдений, полученных космическим аппаратом “LRO”, практически все данные по сканированию лунного спутника для определения его положения в фазовом пространстве относятся к результатам доплеровского наземного слежения, в основном, выполненные с использованием системы DSN (Сеть дальней космической связи NASA Deep Space Network). Привязка к системе DSN не является достаточно точной ни по отно-

шению к небесной, ни к земной системам координат. Приведенные авторами работы [3] результаты лазерной альтиметрии лунной поверхности и структурные элементы селеноида Луны также не привязаны к какой-либо конкретной системе координат, а лишь определенным образом сориентированы по отношению к положению Луны. Каждый оборот космического аппарата вокруг небесного тела соответствует определенной орбите. Для окололунного спутника на основе разности элементов таких орбит в точках, в которых орбиты пересекаются, оценивается точность координатно-временной привязки. В данном случае можно говорить об определении адекватной “внутренней” точности орбитального передвижения. Использование современных альтиметрических космических измерений и учета гравитационных возмущений улучшает согласование орбитальных параметров и увеличивает “внутреннюю” точность. Тем не менее все сказанное выше не позволяет произвести оценку “внешней” точности координатно-временной привязки. Поэтому описанная методика может быть использована только в случае привязки спутниковых орбит друг к другу, не являясь исключением и миссия “LRO”.

Для оценки “внешней” точности требуется другой вид наблюдательных данных, имеющих точность не ниже “внутренней”. Такими наблюдениями может быть привязка космического аппарата к звездам и объектам на лунной поверхности [4]. В настоящей работе предложен метод регрессионного моделирования для приведения разнородных селенофизических измерений к единой селеноцентрической системе и построения цифрового селеноцентрического каталога (DSC) опорных лунных объектов на основе прямой привязки их к звездам и трансформации в систему DSC данных современных лунных миссий. Описанные результаты с учетом новых теорий физической либрации Луны позволяют создать динамическую селеноцентрическую опорную систему, оси координат которой совпадают с лунными осями инерции Луны, а начало координат — с центром масс Луны. Следует отметить, что впервые в мировой практике попытка навигационной привязки к цифровому селенографическому каталогу была выполнена измерительными системами миссии “LRO”. На платформе данного космического аппарата был установлен измерительный комплекс “LALT”. “LALT” включал главную оптическую камеру “LROC”, позволяющую получать снимки лунной поверхности с разрешением 0.5 м, и альтиметр “LOLA” для создания точной карты высотных данных. Цель использования комплекса “LALT” заключалась в определении наиболее подходящих мест для прилунения модулей будущих лунных миссий. Особое внимание при осуществлении проекта “LRO” было направ-

лено на увеличение точности нахождения элементов орбиты спутника.

Снимки высокого разрешения покрытия заданных лунных территорий были получены с использованием специальной панорамной камеры. При этом на основе фотограмметрических методов и специального программного обеспечения была осуществлена попытка привязать спутниковую орбиту к цифровому опорному каталогу лунных объектов. Перспективным направлением координатно-временного обеспечения является привязка к системе световых лазерных маяков (СЛМ). Такая система аналогична системе опорных лунных кратеров, но последние являются практически точечными объектами, к которым в принципе с помощью разработанного в настоящей работе метода можно осуществить координатную привязку с точностью, равной нескольким сантиметрам. Установка таких маяков планируется при осуществлении российских лунных миссий “Луна-25” (26, 27, 28). Использование СЛМ позволит осуществить высокоточное прилунение и выполнить высокодетальное сканирование Луны. Наш метод позволяет при навигационной привязке космических спутников к лунной системе координат использовать как непосредственно объекты с известными координатами на поверхности Луны, так и квантово-оптические системы, аналогом которых являются СЛМ с определенными точными координатными положениями.

## 2. СИСТЕМА СЕЛЕНОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

При создании опорного каталога лунных объектов видимой и обратной сторон Луны (КЛО) необходимо точно определить системы координат, в которых будут проведены все построения, так как в специальной литературе имеются определенные несогласия в данной области. Прямоугольные селенографические координаты отсчитываются в долях радиуса Луны  $R = 1738.1$  км.

Направление осей (см. рис. 1):

$\zeta$  — направлена к Земле ( $x$  в декартовой системе координат);

$\xi$  — совпадает с проекцией лунного экватора и направлена на восток ( $y$  в декартовой системе координат);

$\eta$  — совпадает с проекцией нулевого меридиана и направлена к северному полюсу ( $z$  в декартовой системе координат).

Меридиан, проходящий через первый лунный радиус, т.е. через ось инерции  $X$ , имеет долготу  $0^\circ$ .

Долгота отсчитывается в градусах. Согласно классикам селенографии [5, 6], селенографическая долгота пункта равна двугранному углу меж-

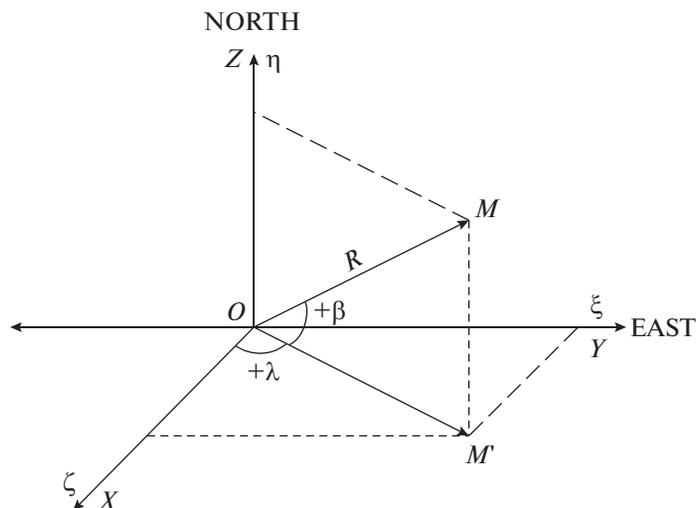


Рис. 1. Системы селенографических координат.

ду нулевым меридианом и меридианом кратера. Она положительна в восточном и отрицательна в западном полушариях Луны. В ту и другую сторону долготы возрастают до  $180^\circ$  в первом случае и уменьшаются до  $-180^\circ$  во втором. Меридиан  $180^\circ$  проходит через центр обратной стороны Луны, пересекая Море Мечты. Однако согласно [7], определение дается неправильно – положительные долготы отсчитываются к западу от нулевого меридиана, отрицательные – к востоку. Таким образом, нужно внимательно относиться к публикациям и определениям, которые даются в различных источниках, так как на их основании было впоследствии опубликовано большое количество научных работ.

Широта отсчитывается в градусах. Дуга, отсчитываемая от экватора по меридиану, проходящему через кратер до кратера, называется широтой. Измеряется от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  к северному полюсу Луны и от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$  к южному.

Формулы связи сферических координат с прямоугольными имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi &= R \sin \lambda \cos \beta, & \eta &= R \sin \beta, \\ \zeta &= R \cos \lambda \cos \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda, \beta$  – селенографические долгота и широта, а  $R$  – радиус-вектор лунного объекта.

### 3. МЕТОД СОЗДАНИЯ ОПОРНОГО КАТАЛОГА ЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ ВИДИМОЙ И ОБРАТНОЙ СТОРОНЫ ЛУНЫ

С целью построения селеноцентрической динамической опорной системы координат необходимо использовать методы абсолютной привязки лунных точечных объектов к звездам. Для увеличения количества опорных координатных точек,

входящих в DSC, осуществляется трансформация в нее других объектов, полученных из разнородных наблюдений. Метод создания опорного каталога лунных объектов видимой и обратной сторон Луны основан на алгоритме робастного моделирования. Так как трансформация селенографических положений требует объемных перевычислений, возникает необходимость предварительного анализа и оценки целесообразности таких вычислений. Для решения этой задачи и используются методы регрессионного моделирования:

1. Метод полного перебора элементов регрессионной модели. Основой данного метода служит полиномиальное разложение координатных данных. Разложение может содержать полиномы второй и третьей степеней. С помощью полного перебора членов регрессионной модели при выполнении трансформации каждой стандартной координаты находится оптимальная структура регрессионной модели с минимальной среднеквадратической ошибкой (СКО). Использование метода “плавающей” регрессионной модели позволяет увеличить точность трансформации селеноцентрических координат более чем на 10%.

2. Метод аффинных преобразований. Данный подход применяется для преобразования селеноцентрических координат из одной декартовой системы  $\vec{X}$  в другую  $\vec{Y}$ .

Эффективность применяемых процедур при преобразовании селеноцентрических координат определяется с помощью точного сравнительного анализа. К таким процедурам относятся:

- 1) оптимизация полиномиальных аппроксимаций;
- 2) аффинные трансформации;

3) ортогональные трансформации с перебором систематических ошибок;

4) решение систем линейных уравнений.

Для приведения разнородных наблюдений координатных положений в единую селеноцентрическую систему был использован следующий метод. Строилась регрессионная модель, позволяющая производить робастную оценку разнородных наблюдаемых данных [8]:

$$X = AY + X_0 + \varepsilon, \quad (2)$$

где  $X$  – результирующая матрица приведенных в единую систему разнородных наблюдательных данных,  $Y$  – матрица разнородных наблюдательных данных,  $A$  – матрица поворота,  $X_0$  – вектор смещения систем координат и  $\varepsilon$  – матрица ошибок. Решение системы (2) было осуществлено с использованием метода адапционного регрессионного моделирования. Для этого были выполнены следующие действия:

1) диагностика качественных составляющих регрессионной модели разнородных данных;

2) анализ соблюдения основных условий использования метода наименьших квадратов (МНК) (например, условия Гаусса-Маркова);

3) применение численной адаптации в случае нарушения стандартных условий МНК.

Робастное оценивание искомым параметров предполагает следующие необходимые процедуры:

1) анализ критериев трансформаций систем;

2) создание спектра конкурирующих регрессионных моделей приведения разнородных данных в единую систему;

3) построение достаточного количества структурированных параметрических методов идентификации моделей;

4) применение разнородных сценариев обработки наблюдений, дающих возможность проводить прогнозные оценки качественных свойств моделей, позволяющих определять возникающие нарушения условий алгоритма МНК и проводить адаптацию к оптимальным параметрам робастных оценок, если существует несоответствие с постулируемыми свойствами модели.

Стужение и расширение каталога лунных объектов производится с применением следующей регрессионной модели:

$$A \times \Theta + \bar{\varepsilon} = Z, \quad (3)$$

где  $A(A_{ij})$  – матрица поворота,  $\Theta(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$  – вектор смещения системы отсчета  $Z(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  по отношению к  $\bar{\varepsilon}$ .

При адаптивном регрессионном моделировании (ARM-подход) необходимо учитывать, что структура трансформации искомым параметров

для каждой пары систем остается неизвестной при решении регрессионной модели (3), и ее необходимо определить согласно заданным конкурентным данным [9]. В общем случае выражение (3) можно записать как уравнение матрицы регрессии [1]:

$$Y = X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}, \quad (4)$$

здесь  $\bar{\varepsilon}$  – вектор ошибок, вектор  $\bar{\beta}$  представляет собой первую строку в матрице поворота  $A$ . Очевидно, что члены вектора  $Y$  для простого события (4) одновременно определяются по структурному идентификатору.

Матрица поворота  $A$  иногда не соответствует условиям преобразования ортогональности из системы  $Y$  в систему  $X$  из-за присутствия мультиколлинеарности и имеющихся ошибок при вычислении координат объектов, входящих в эти две системы. При этом необходимо соблюдение условия:

$$A^T A = E, \quad \det A = 1. \quad (5)$$

Уравнение (4) совместно с условием (5) можно интерпретировать как совместное детерминированное преобразование. Такая задача решается с помощью метода численной оптимизации, который характеризуется точностью в пределах отличия  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  систем.

Нахождение искомым параметров  $\Theta(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$  производится согласно выражению:

$$\Theta = (A^T P A)^{-1} (A^T P Z), \quad (6)$$

ошибки для поправок к координатам  $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$  определяются согласно ковариационной матрице:

$$D(\Theta) = \frac{V^T P V}{2n - 3} (A^T P A)^{-1}, \quad (7)$$

где  $V$  – вектор остаточных отклонений.

В процессе построения селеноцентрического каталога опорных точек используются разные методы преобразования координат при детерминированных и аппроксимированных трансформациях. При этом применяются математические подходы, разработанные для производства прямой привязки лунных объектов к небесной системе координат. Для решения описанной выше задачи необходима модификация МНК с учетом метода регрессионного моделирования. Данная процедура требует использования алгоритма аффинной трансформации данных из одной системы в другую [8].

Для создания селеноцентрической опорной системы координат использовались данные наземных наблюдений и космических миссий, авторских программных пакетов, позволяющих анализировать регрессионные модели и выпол-

нять робастные оценки искомым параметрам. Алгоритм исследований включал следующие процедуры:

1. Исследование случайных и систематических ошибок селеноцентрической опорной системы координат.

2. Многопараметрический гармонический и фрактальный анализ селеноцентрических координат объектов на видимой и обратной сторонах и в либрационной зоне Луны.

При построении каталога опорных объектов использовались программные алгоритмы, разработанные для привязки объектов на лунной поверхности.

Для создания опорной селеноцентрической системы использовались алгоритмы, разработанные для абсолютной привязки лунных объектов к звездам. При этом, по крайней мере, две из решаемых при этом задач с помощью МНК могут быть в настоящее время решены более точно. Также, учитывая тот факт, что переобработка базовых наблюдений требует объемных вычислений, необходимо определить и численно оценить целесообразность таких процедур.

Одним из самых важных этапов вычислительного процесса при редукции наблюдений является процедура нахождения (оценивания) параметров регрессионных моделей, которые с успехом применяются в астрономии, геодезии и астрофизике. Однако классический подход к оцениванию искомым величин в данных научных направлениях, постулирующий устойчивую фиксированную модель и использование метода наименьших квадратов, не соответствует современным практическим требованиям и развитию алгоритмов, основанных на регрессионном моделировании. Предпринимаемые действия для выхода за стандартные рамки МНК преследуют локальные проблемы и не создают условий для системного решения данной задачи. Стандартными ограничениями при редукции космических данных и наземных наблюдений является присутствие незначимых, неинформативных, дублирующих и коррелирующих полиномиальных членов, нарушение условий МНК в части нормальной схемы Гаусса–Маркова. Как альтернатива классическому методу, в настоящей работе применяется подход регрессионного моделирования, предусматривающий при оценивании искомым параметров робастный анализ, проверку допущений и адаптацию при их нарушениях, а также требующий разработки специализированного программного обеспечения для целей автоматизированной обработки наблюдений, сокращающей время процесса вычислений и анализа данных. Регрессионное моделирование представляет собой системный метод, при котором корректность использования любого системного элемента (метод оценивания

структур, метод оценивания параметров, модель, выборка, набор постулированных, мер качества) может быть подвергнута проверке и адаптирована при нарушении основных условий. Аналоги используемого в работе системного подхода регрессионного моделирования и разработанного для этой цели программного обеспечения отсутствуют в мировой научной практике. В настоящее время создан комплекс специализированных программ, позволяющих осуществить в первом приближении точную редукцию наблюдений как для динамических, так и для многофакторных регрессий. Эти программные пакеты следующие:

1. ПКРА (программный комплекс регрессионного анализа); предназначен в первую очередь для анализа оптимальной модели обработки данных, используемой для прогноза. ПКРА имеет достаточно рациональную структуру, включающую в себя: I) контролирующий программный узел; II) программный узел создания запроса; III) набор программных функциональных процедур; IV) программный узел сценария; V) интерактивный модуль настроек системы; VI) модуль редактора информации; VII) модуль создания интерактивных таблиц; VIII) интерактивный справочник.

2. ППМГА (программный пакет многопараметрического гармонического анализа); разработанный программный пакет является автоматизированным специализированным продуктом для реализации метода регрессионного (робастного) моделирования для выполнения задач математической интерпретации структурных параметров и аномалий гравитационного поля. Основное назначение ППМГА заключается в регрессионном моделировании явлений и процессов с последующим их применением для прогнозирования итоговых значений искомым параметров (откликов).

3. ПСПОГС (программная система параметрического оценивания генетических связей); разработанная программная система представляет собой специализированный комплекс, предназначенный для задач регрессионного (робастного) моделирования при выполнении процедуры оценивания искомым величин. Главное назначение ПСПОГС заключается в построении многопараметрических регрессионных моделей (МРМ). Функциональность МРМ не ориентирована на моделирование прогнозных значений, основная цель ПСПОГС направлена на описание причинно-следственных связей исследуемых процессов.

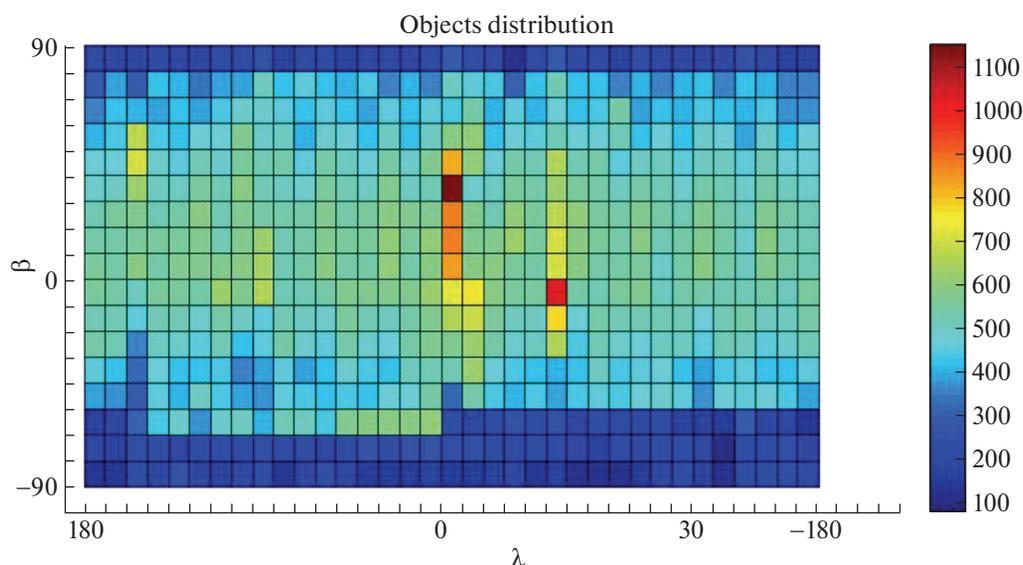


Рис. 2. Распределение объектов ЦСДК в виде 2D-модели.

#### 4. ЦИФРОВОЙ КАТАЛОГ ЛУННЫХ ОБЪЕКТОВ ВИДИМОЙ И ОБРАТНОЙ СТОРОНЫ ЛУНЫ

Цифровой селеноцентрический динамический каталог (ЦСДК) лунных объектов видимой и обратной стороны Луны построен по данным наземных наблюдений лунных кратеров при привязке к звездам и спутниковых миссий “Clementine”, “Kaguya”, “LRO” и “Apollo”. Структуру ЦСДК составляют значения селенографических прямоугольных координат, селенографических долгот и широт и радиус-векторы кратеров на лунной поверхности, полученные из разносортных спутниковых наблюдений и приведенные робастным моделированием в единую селеноцентрическую динамическую систему отсчета. В зависимости от вида содержащейся информации данные в базе условно можно разделить на восемь структурных разделов, которые можно представить как октанты. При этом отношение цифровой информации к определенному структурному разделу характеризуется знаком представленных значений координат. Всего ЦСДК содержит 274093 опорных объектов. Прямоугольные координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  связаны с главными осями инерции Луны и даны в долях среднего радиуса Луны 1738.1 км. Средняя расчетная точность координат в базе не превышает по модулю для  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  значений 0.0001, 0.0001 и 0.0002 среднего лунного радиуса соответственно. Сопоставление объектов между разными базами данных лунных объектов может быть выполнено с использованием сравнительного анализа близости представленных координатных положений.

Доступ к ЦСДК реализован в виде программы “HeightsComparison”, входящей в пакет имитационного моделирования, составленной в системе MATLAB. Данная программа предоставляет возможность доступа к интерактивному поисковому механизму, позволяющему по различным критериям, задаваемым пользователями, осуществлять выборку цифровых данных, создавать имитационную модель картографического обеспечения ЛНСС и проводить сравнительный анализ высотных данных модели с селенографической цифровой картой лунной поверхности. Программа позволяет осуществлять тестирование базы и выборку наблюдаемых объектов селенографических прямоугольных координат лунных объектов по значениям вводимых сферических селенографических координат, характеризующих положение объекта на поверхности Луны. Можно выбрать и/или задать требуемые опции: значения селенографической широты и долготы, тип выборки: куб или сфера, радиус выборки в долях среднего радиуса Луны. Итоговую информацию можно получить в виде пакета данных базы, в который входят все объекты, попадающие в куб или сферу выборки. Данный подход планируется в дальнейшем использовать при решении задач фотограмметрической привязки космического аппарата к электронным лунным картам и других навигационных задач.

На рис. 2 и рис. 3 приводится распределение объектов ЦСДК в виде 2D и 3D моделей.

На рис. 2 по оси ординат отложены селенографические широты в градусах, по оси абсцисс долготы в градусах. Цветовая диаграмма характеризует количество объектов.

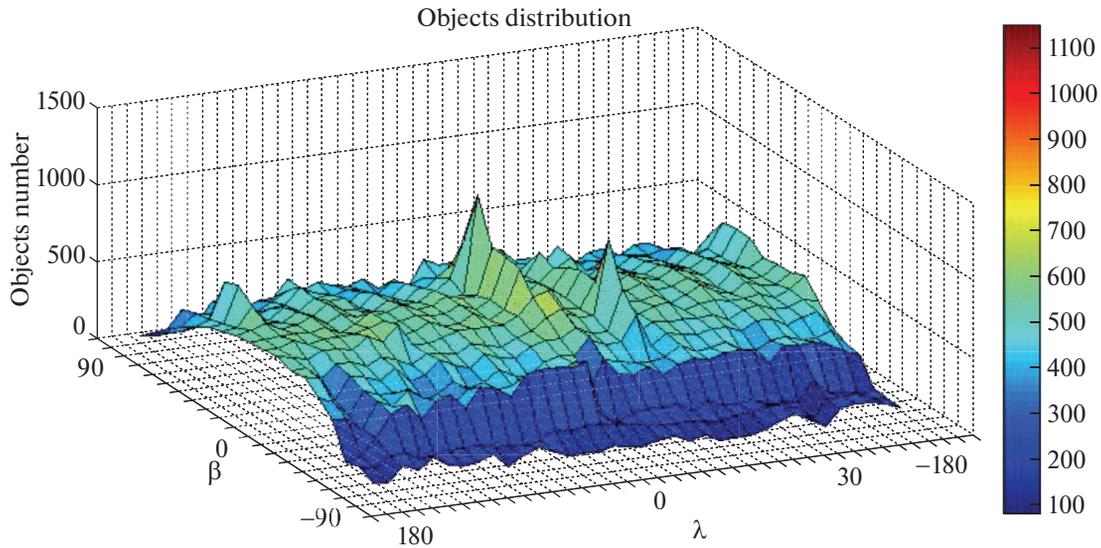


Рис. 3. Распределения объектов КЛО в виде 3D-модели.

На рис. 3 по оси  $\beta$  отложены селенографические широты в градусах, по оси  $\lambda$  — долготы в градусах. Вертикальная ось и цветовая диаграмма характеризует количество объектов.

Как видно из рис. 2 и 3, наименьшее количество объектов содержат полярные области. По селенографическим широтам распределение достаточно равномерное как для видимой, так и обратной сторон Луны.

### 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НУЛЬ-ПУНКТА СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ЦСДК

С целью анализа координатной системы проведено определение положения центра отсчета координат (ЦОК) системы ЦСДК. С этой целью определено положение центра отсчета координатной системы ЦСДК относительно центра масс (ЦМЛ) и центра фигуры (ЦФЛ) Луны и затем из сравнения этого положения со значениями, полученными для моделей современных миссий, оценивается близость с ЦМЛ, так как считается, что системы координат спутниковых миссий квазидинамические, т.е. ЦОК совпадает с ЦМЛ, а оси не совпадают с осями инерции Луны.

Моделирование положения ЦОК систем координат ЦСДК относительно ЦМЛ выполняется в три этапа: 1) создание многопараметрической гармонической модели разложением по сферическим функциям данных ЦСДК; 2) разработка алгоритма оценивания гармонических амплитуд; 3) определение положения ЦОК модели макрофигуры системы ЦСДК относительно ЦМЛ и сопоставление полученных результатов с данными

спутниковых наблюдений по нахождению положений ЦМЛ относительно ЦФЛ.

С целью разложения по сферическим функциям данных каталога ЦСДК использовалась следующая регрессионная модель:

$$h(\lambda, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm} \cos \varphi + \varepsilon, \quad (8)$$

где  $\lambda, \varphi$  — селеноцентрические долгота и широта кратера, входящего в систему КЛО;  $C_{nm}, S_{nm}$  — нормированные коэффициенты;  $P_{nm}$  — нормированные присоединенные функции Лежандра;  $\varepsilon$  — случайные погрешности регрессии. На основе (8) была создана математическая модель физической лунной поверхности.

Смещение ЦФЛ относительно ЦМЛ определяется гармониками первого порядка:

$$\Delta\xi = \sqrt{3} \bar{C}_{11}, \quad \Delta\eta = \sqrt{3} \bar{S}_{11}, \quad \Delta\zeta = \sqrt{3} \bar{C}_{10}, \quad (9)$$

где  $\Delta\zeta$  — поправка к ЦФЛ по оси, совпадающей с направлением на Землю,  $\Delta\xi$  — поправка к ЦФЛ по оси, направленной перпендикулярно к  $\zeta$ , и лежащая в плоскости лунного экватора,  $\Delta\eta$  — поправка к ЦФЛ по оси, совпадающей с лунной осью вращения;  $\bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}, \bar{C}_{10}$  — гармонические амплитуды первого порядка в разложении регрессионной модели.

На основе данных космических миссий “Clementine”, “Kaguya” и каталога ЦСДК получены значения нормированных коэффициентов разложения первого порядка регрессионной модели (8). В результате были определены значения положения ЦОК моделей макрофигуры систем

**Таблица 1.** Координаты ЦФЛ [км] относительно ЦМЛ для трех источников гипсометрической информации

	Clementine	Kaguya	ЦСДК
$\Delta\xi$	-1.82	-1.78	-1.59
$\Delta\eta$	-0.72	-0.76	-0.79
$\Delta\zeta$	-0.62	+0.25	+0.43

миссий “Clementine”, “Kaguya” и каталога КЛО относительно ЦМЛ.

Как видно из табл. 1, каталог ЦСДК показывает хорошее согласие с данными положения ЦФЛ относительно ЦМЛ космических миссий “Clementine” и “Kaguya”. Таким образом, можно сделать вывод, что координатная система ЦСДК относится к динамической селеноцентрической системе координат и может полноценно использоваться для выполнения навигационных задач как на поверхности Луны, так и в окололунном пространстве.

## 6. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЦСДК “HEIGHTS COMPARISON”

Метод навигационной привязки окололунных космических аппаратов к селеноцентрической динамической системе координат с использованием ЦСДК был практически реализован в виде программной имитационной модели. Имитационная модель картографического обеспечения ЛНСС ИМКО предназначена для эффективного определения координат объектов на лунной поверхности и тестирования полученных результатов. ИМКО построена в виде программного модуля “Heights Comparison” и предоставляет возможность доступа к интерактивному поисковому механизму, позволяющему по различным критериям, задаваемым пользователем, создавать имитационные модели картографического обеспечения ЛНСС, осуществлять выборку цифровых данных и проводить сравнительный анализ высотных данных модели с селенографической цифровой картой лунной поверхности.

Используемый в настоящей работе метод по определению селеноцентрической высоты искомого объекта на лунной поверхности основан на постулировании факта, что объекты, находящиеся на близких расстояниях друг от друга, имеют и схожие значения высотных данных, что в меньшей степени присуще объектам, расположенным на значительных расстояниях друг от друга. Для определения высотных параметров искомого объекта применяется метод взвешенных высотных параметров (WAP). Суть метода заключается в привязке отождествляемой точки к опорным объектам с известными координатами, расположенным в окрестностях отождествляемого объекта. В случае равномерного распределения высотных

выборки и стабильных поверхностных характеристик для разных областей ландшафта возникает возможность точной интерполяции высотных значений лунной поверхности на основе известных высот близлежащих объектов. При этом для учета различной удаленности опорных объектов от отождествляемой точки используется подход назначаемых весов: более близким к отождествляемой точке опорным объектам присваивается и большее значение веса. При реализации метода WAP считается, что каждый опорный лунный объект производит локальное воздействие на значение высотного параметра отождествляемого объекта в зависимости от величины расстояния между этими объектами. Поэтому опорным объектам, близким к искомому, придаются более высокие значения, чем находящимся на больших расстояниях. Исходя из этих предпосылок можно записать основное выражение метода в виде:

$$\hat{H}(O_0) = \sum_{i=1}^N P_i H(O_i), \quad (10)$$

где  $\hat{H}(O_0)$  представляет собой отождествляемую (неизвестную) величину высотного параметра для объекта  $O_0$ ;  $P_i$  – задаваемые значения веса для каждого опорного объекта, который будет использоваться в исследованиях. Величина веса изменяется в зависимости от расстояния;  $H(O_i)$  – измеренное (известное) значение высотного параметра для объекта  $O_i$ ;  $N$  – число опорных объектов, найденных вблизи отождествляемого объекта, которые планируется использовать при интерполяционных процедурах.

Величины весов вычисляются согласно следующему выражению:

$$P_i = \frac{D_{i0}^{-p}}{\sum_{i=1}^N D_{i0}^{-p}}, \quad (11)$$

где  $D_{i0}$  – представляет собой расстояние между  $i$ -м опорным объектом  $O_i$  и отождествляемым объектом  $O_0$ .

В выражении (11) величина веса изменяется в зависимости от величины параметра  $p$ . Степенной коэффициент  $p$  влияет на то, какие веса будут приданы опорным объектам. Из этого следует, что в зависимости от увеличения расстояния между отождествляемым и опорными объектами величина веса, придаваемого опорным объектам, будет уменьшаться, и соответственно высотный параметр отождествляемого объекта также экспоненциально уменьшится. Если сложить веса для

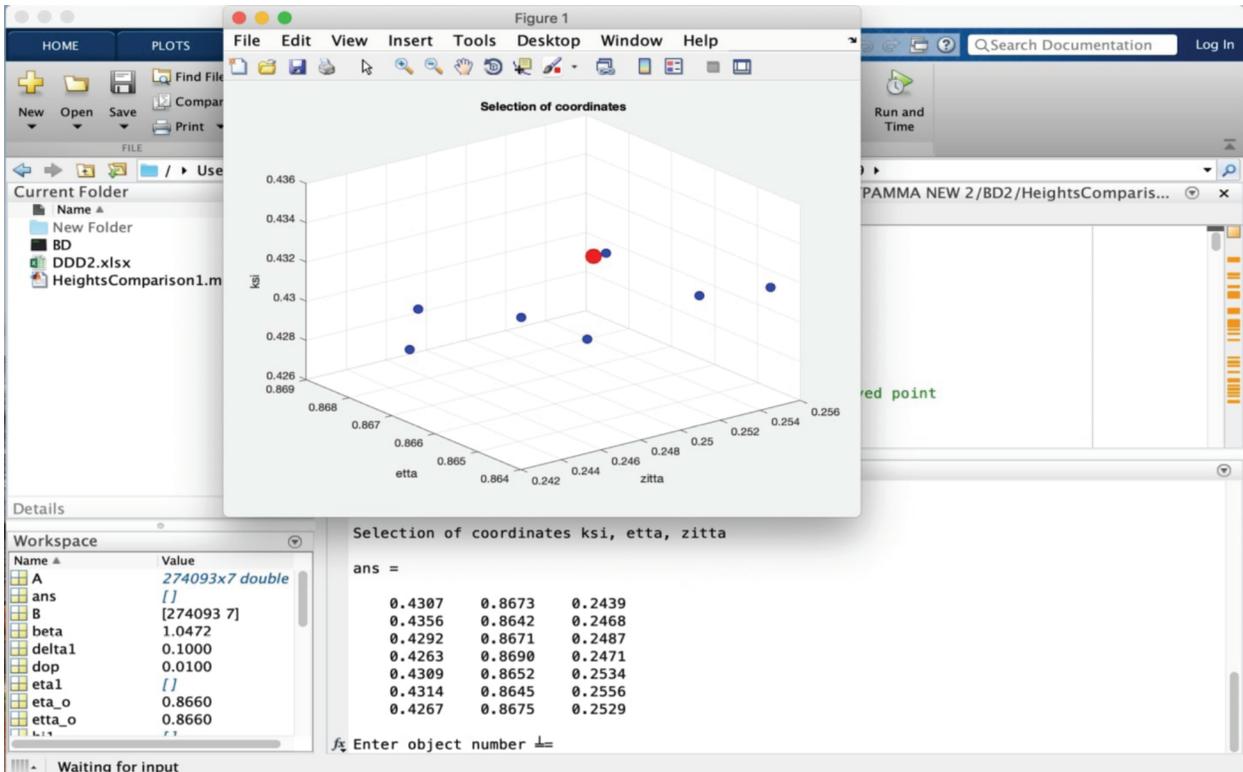


Рис. 4. Распределение объектов в 3D-пространстве в системе  $\xi, \eta, \zeta$ .

всех опорных объектов, включенных в процесс интерполяции, то сумма будет равна 1:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1. \quad (12)$$

В процессе вычислений, добиваясь минимальной величины среднеквадратичной ошибки, можно определить оптимальную величину параметра  $p$ .

ИМКО позволяет находить по значениям долготы  $\lambda$  и широты  $\beta$  исследуемого объекта в заданной области на лунной поверхности на основе наблюдений с борта космического аппарата при использовании цифровой камеры и лазерного интерферометра ее селеноцентрические параметры. Зная приближенные наблюдаемые координаты искомого объекта, получаем взаимное положение искомого объекта (рис. 4, красная точка) и объектов ЦСДК (рис. 4, синие точки) в пространстве. В приведенном примере найдено 7 объектов ЦСДК.

В автоматическом режиме определяются значения  $\xi, \eta, \zeta$  заданной точки и объектов, входящих в ЦСДК. Дополнительно формируется кривая ошибок. Это дополнительная информация, не влияющая на дальнейшие исследования, которая дает информацию о равномерности распре-

деления объектов в исследуемой области. Далее определяется значение высоты искомой точки  $H_n$  в километрах и вычисляется значение интерполированной модельной высоты  $H_0$  области, окружающей эту точку, над средним радиусом Луны в километрах. При этом определяются весовые коэффициенты и расстояния  $d_i$  от тестируемой точки на цифровых картах до центров окружающих исследуемую точку пикселей цифровых карт. В результате получаем среднеквадратичную ошибку определения высоты по ЦСДК и разницу между высотой искомого кратера и интерполированной высотой из цифровой карты Луны. Следует учитывать, что для поверхности Луны координаты  $(\lambda, \beta)$  меняются в пределах  $\pm 180^\circ$  и  $\pm 90^\circ$  соответственно. Однако для того, чтобы сопоставить высоты из ЦБК и полученной из электронной карты высот миссии "Кагуя", необходимо ограничиться пределами  $\pm 174^\circ$  и  $\pm 84^\circ$  при использовании алгоритма для получения значения высоты  $H$  заданной точки с координатами  $(\lambda, \beta)$  методом IDW. С целью тестирования были получены значения для различных октантов. Анализ табл. 2 показывает, что для видимой стороны Луны (Октант № 1) получаются более точные значения, чем для обратной (Октант № 3).

**Таблица 2.** Сравнение результатов определения высоты искомой точки для двух разных октантов

Октант № 1		Октант № 3	
<b>P</b>	1	<b>P</b>	1
<b>RMS</b>	0	<b>RMS</b>	16.6
<b>H<sub>N</sub></b>	-2.11	<b>H<sub>N</sub></b>	3.05
<b>H</b>	-2.07	<b>H</b>	-0.82
<b>Δ</b>	0.04	<b>Δ</b>	-3.87
<b>σ</b>	0.007	<b>σ</b>	-2.8

В табл. 2 приведены: **P** – вес, **RMS** – средняя квадратичная ошибка, **H<sub>N</sub>** – высота искомой точки в системе опорного каталога, **H** – высота для этого же объекта, полученная из электронной карты высот миссии “Kaguya”,  $\Delta = H - H_N$ ,  $\sigma$  – СКО определения высоты. Все параметры даны в километрах. Таким образом, наибольшие ошибки наблюдаются для областей на обратной стороне Луны. Это еще раз подтверждает тот факт, что для видимой стороны Луны координатно-временное обеспечение более точное, чем для обратной. Этим объясняется и тот факт, что для прилунения космических аппаратов на лунную поверхность в настоящее время требуется корректировка их траектории оператором в онлайн-режиме. В качестве примера можно привести данные китайской лунной миссии “Chang’e-4”. Прилунение модуля миссии “Chang’e-4” стало возможным только после установления прямой связи с космическим аппаратом через спутник-ретранслятор, помещенный в точку Лагранжа.

В дальнейшем программную имитационную модель картографического обеспечения ЛНСС (ИМКО) планируется использовать при решении задач фотограмметрической привязки космического аппарата к электронным лунным картам и решения других навигационных задач.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При анализе методов создания ЛНСС было определено, что современные селенографические системы неравноточны и их данные относятся к различным координатным системам [10]. Поэтому, во-первых, необходимо использовать методы космической фотограмметрии, и, во-вторых, необходимо при редукции космических наблюдений использовать и наземные абсолютные наблюдения, и точную теорию физической либрации Луны [11].

Программная имитационная модель картографического обеспечения ЛНСС (ИМКО), описанная в настоящей работе, позволяет осуществлять имитацию определения наблюдаемых селеногра-

фических прямоугольных координат лунных объектов по значениям вводимых сферических селенографических координат, характеризующих положение объекта на поверхности Луны. Данную систему можно использовать непосредственно в режиме реального времени как на стационарных наблюдательных станциях, так и на борту навигационного спутника.

В результате сравнительного анализа полученных данных с гипсометрическими моделями, построенными на основе современных космических миссий, выполнено исследование точности определения координат избранной точки на лунной поверхности. Было определено, что КВНО для видимой стороны Луны является более точным, чем для обратной стороны, что подтвердило ранее сделанные выводы в других работах [12]. Разработанные подходы могут быть использованы при определении координат искомой точки на лунной поверхности с помощью различных навигационных угломерных устройств, наземных средств позиционирования, лазерных световых маяков [13], высокоточных бортовых звездных датчиков [14] и других измерительных методов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Настоящая работа частично поддержана Российским научным фондом, гранты 20-12-00105 (согласно гранту разработан метод анализа данных) и 19-72-00033 (согласно гранту проведены численные расчеты). Работа выполнена в соответствии с Программой Правительства Российской Федерации по конкурентному росту Казанского федерального университета. Работа частично поддержана стипендией Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам SP-3225.2018.3, грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-32-90024 Аспиранты и Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Y. A. Nefedyev, A. Andreev, N. Petrova, N. Y. Demina, and A. Zagidullin*, *Astron. Rep.* **62**, 1016 (2018).
2. *J. G. Williams, A. S. Konopliv, D. H. Boggs, R. S. Park, et al.*, *J. Geophys. Res. Planets* **119**, 1546 (2014).
3. *A. S. Konopliv, R. S. Park, D.-N. Yuan, S. W. Asmar, et al.*, *J. Geophys. Res. Planets* **118**, 1415 (2013).
4. *Y. Nefedyev, S. Valeev, R. Mikeev, A. Andreev, and N. Varaksina*, *Adv. Space Res.* **50**, 1564 (2012).
5. *К. А. Куликов, В. Б. Гуревич*, *Основы лунной астрометрии* (М.: Наука, 1972).
6. *В. Шевченко*, *Современная селенография* (М.: Наука, 1980).
7. *Ш. Хабибуллин*, *Астрон. журн.* **45**, 663 (1968).

8. *N. Varaksina, Y. Nefedyev, K. Churkin, R. Zabbarova, and S. Demin*, J. Physics: Conference Series **661**, 012014 (2015).
9. *S. Demin, A. Andreev, N. Demina, and Y. Nefedyev*, J. Physics: Conference Series **1038**, 012020 (2018).
10. *N. Demina, N. Petrova, A. Zagidullin, A. Andreev, Y. Nefedyev, and S. Demin*, J. Physics: Conference Series **1135**, 012001 (2018).
11. *N. Petrova, A. Zagidullin, Y. Nefedyev, V. Kosulin, and A. Andreev*, Adv. Space Res. **60**, 2303 (2017).
12. *A. Andreev, N. Demina, Y. Nefedyev, S. Demin, and A. Zagidullin*, J. Physics: Conference Series **1038**, 012003 (2018).
13. *A. V. Bagrov, V. A. Leonov, A. S. Mitkin, A. F. Nasyrov, A. D. Ponomarenko, K. M. Pichkhadze, and V. K. Sysoev*, Acta Astronautica **117**, 332 (2015).
14. *A. Andreev, N. Demina, A. Zagidullin, N. Petrova, Y. Nefedyev, and S. Demin*, J. Physics: Conference Series **1135**, 012002 (2018).

УДК 52(0.92)520.1(0.9)

## АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ ДЕЙЧ – К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

© 2020 г. М. А. Петрова<sup>1,\*</sup>, Н. А. Шахт<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: shakht@gaoran.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

После доработки 22.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

В 2019 г. исполняется 120 лет со дня рождения пулковского астронома, доктора физико-математических наук, профессора Александра Николаевича Дейча (1899–1986), который в течение многих лет был заведующим отделом фотографической астрометрии и звездной астрономии ГАО РАН, руководителем и учителем нескольких поколений пулковских астрономов и сотрудников других обсерваторий. В статье представлена научная и общественная деятельность А.Н. Дейча. Приведены архивные данные, свидетельствующие о его участии вместе с другими пулковскими сотрудниками в спасении имущества и научного фонда Пулковской обсерватории во время Великой Отечественной войны, а также в работе по восстановлению обсерватории. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629920100072

### 1. КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ А.Н. ДЕЙЧА. РАННИЕ ГОДЫ

Александр Николаевич Дейч (рис. 1) родился 31 декабря 1899 г. в семье военного в г. Рени (ныне Одесская область Украины). В этом же городе, который в наше время благодаря Александру Николаевичу получил космический статус, он провел ранние годы своего детства.

Отец будущего астронома, Николай Осипович Дейч, происходивший из семьи поволжских немцев, служил в 30-м пехотном Полтавском полку. Он был кадровым военным, закончил Рязанское пехотное училище, затем Интендантские курсы, был участником Первой мировой войны, добровольно перешел на службу в Красную армию. С 1922 по 1925 г. был начальником Военно-хозяйственной академии РККА и Флота и впоследствии занимался преподавательской деятельностью. Мать Александра Николаевича, Лукреция Анастасовна Димитриади, имевшая в своем роду греческие и румынские корни, была дочерью городского главы города Рени Анастаса Ивановича Димитриади. Она получила хорошее образование, закончив гимназию в г. Галаце (Румыния).

В связи со службой Николая Осиповича вся его семья в начале 1900-х годов переезжает в Саратов. Там же, в Саратове, заканчивает гимназию Александр Николаевич Дейч и поступает на физико-математический факультет Саратовского университета. В мае 1919 г. Александр Николаевич был мобилизован в Красную армию, где слу-

жил писарем в отделе снабжения 4-й армии Урал-фронта, а затем письмоводителем и делопроизво-

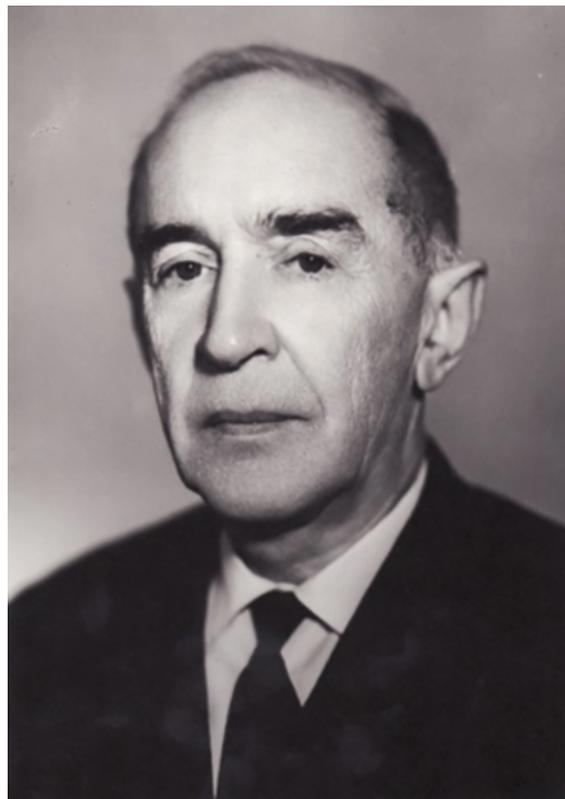


Рис. 1. А.Н. Дейч (1899–1986).



Рис. 2. А.Н. Дейч и С.К. Костинский, 1930 г.

директором в саратовском губвоенкомате. В октябре 1920 г. Александр Николаевич приехал в Петроград и поступил лаборантом в Военно-хозяйственную академию РККАФ. Одновременно он преподавал элементарную математику на подготовительном отделении этой академии. Окончательно он был демобилизован в январе 1923 г. В 1924 г. Александр Николаевич заканчивает Петроградский университет, и дальнейшая его деятельность на многие годы оказывается тесно связанной с Пулковской обсерваторией.

## 2. РАБОТА В ПУЛКОВЕ, ДОВОЕННЫЙ ПЕРИОД (1923–1941)

В 1923 г. Александр Николаевич Дейч был принят в Петроградское (затем Ленинградское) отделение Пулковского вычислительного отдела (бюро). Там под руководством профессора Наума Ильича Идельсона он проработал до 1925 г., в частности, принимая участие в большой работе по вычислению положений спутников Сатурна, а затем перешел в Пулковскую обсерваторию на должность вычислителя. Здесь его руководителем стал Сергей Константинович Костинский (рис. 2), один из основателей отечественной астрофотографии, профессор и впоследствии член-корреспондент АН СССР. Александр Николаевич часто вспоминал с благодарностью своих учителей, среди которых он особенно выделял Н.И. Идельсона и С.К. Костинского. Сергей Кон-

стантинович передал А.Н. Дейчу лучшие традиции отечественной астрофотографической школы. Сохранилась магнитофонная запись выступления А.Н. Дейча на семинаре ГАО с воспоминаниями о начале его научной деятельности в Пулкове в 1920-х годах и о той научной среде, которая его окружала [1]. А.Н. Дейч застал А.А. Белопольского, Г.А. Тихова, директора обсерватории А.А. Иванова. Там же он рассказывает о работе в Пулкове молодых талантливых ученых – Н.А. Ко-зырева и В.А. Амбарцумяна.

С самого начала работы в обсерватории А.Н. Дейч участвовал в наблюдениях на нормальном астрографе, а также выполнял измерения полученного фотографического материала на приборе Репсольда и блинк-компараторе и занимался дальнейшей обработкой. К своей работе он относился творчески, внося предложения в процесс наблюдений и методику обработки. Он впервые в Пулкове предложил применять для обработки каталоги “Карты неба” и метод Шлезингера. Работы А.Н. Дейча относились к области определения точных положений малых планет и их фотометрических характеристик.

Одной из первых статей А.Н. Дейча была опубликованная им в 1926 г. работа о результатах наблюдений малой планеты Цереры [2].

Александр Николаевич был активным наблюдателем не только на пулковском нормальном астрографе, но и на других инструментах. В 1929 г.,

будучи в Симеизском отделении Пулковской обсерватории, по снимкам на крымском двойном астрографе, он открыл астероид № 1148 Rarahu [3]. В то же время по наблюдениям в Крыму он обнаружил несколько новых переменных звезд.

А.Н. Дейч участвовал в ряде экспедиций по наблюдениям полных солнечных затмений: в 1927 г. (Швеция), 1936 г. (Омск), 1945 г. (Сортавала). Он также принимал участие в работах по определению географических координат и в начале 1930-х годов получил точные долготы нескольких пунктов на территории СССР, среди них долготы Тбилиси и Свердловска, которые он определил, участвуя в экспедиции, возглавляемой пулковским астрономом М.М. Мусселиусом [4].

В соавторстве с Е.Я. Перепелкиным в 1931–1932 гг. А.Н. Дейч получил собственные движения 3184 звезд на площадках Каптейна от  $+75^\circ$  до  $+60^\circ$  склонения [5].

В 1935 г. за совокупность работ Александру Николаевичу Дейчу была присуждена степень кандидата физико-математических наук.

В 1936 г. после смерти С.К. Костинского А.Н. Дейч возглавил группу фотографической астрометрии при астрофизическом отделе в Пулкове.

В дальнейшем Александр Николаевич продолжил работу по определению собственных движений в площадках Каптейна, и основная часть ее завершилась в 1940 г. созданием каталога собственных движений 18 тысяч звезд [6]. Первые эпохи каталога были получены еще С.К. Костинским, вторые эпохи отснял А.Н. Дейч. В процессе работы с данными каталога ему удалось показать, что апекс слабых звезд значительно отличается от стандартного. На основании этого А.Н. Дейч сделал ряд выводов о пространственном распределении звезд в Галактике, подтвердив, в частности, гипотезу о существовании Местной системы звезд. Им был обнаружен белый карлик, а также новая ветвь слабых карликов, лежащая на диаграмме Рассела на две величины ниже главной последовательности. Кроме того, он получил вековые параллаксы слабых звезд, что имело огромное значение для определения расстояния для этих объектов. Эта работа была успешно защищена им в качестве докторской диссертации на заседании Ученого совета в Ленинградском университете 24 июня 1941 г., на третий день после начала Великой Отечественной войны.

### 3. ВОЙНА И РАЗРУШЕНИЕ ОБСЕРВАТОРИИ

Летом 1941 г. А.Н. Дейч вместе с другими пулковскими сотрудниками организовал демонтаж и эвакуацию в Ленинград части астрономических инструментов и богатого архива фотографических пластинок, в октябре — участвовал в спасе-

нии сохранившихся книг библиотеки из разрушенной обсерватории. Пулковским астрономам пришлось уже в июле прекратить наблюдения и готовиться к эвакуации. Сотрудники обсерватории покинули ее в августе и переселились в Ленинград.

С первых дней войны А.Н. Дейч вошел в инициативную группу из 15 человек, которые под руководством Петра Павловича Добронравина оказывали помощь нашей авиации вычислениями времени восходов и заходов Солнца и Луны, начала и конца сумерек. В своей статье «Пулковская обсерватория для фронта в первые дни войны» [7] П.П. Добронравин пишет о том, что в связи с его командировкой на солнечное затмение в Среднюю Азию ему пришлось передать свое бригадирство А.Н. Дейчу. Петр Павлович пишет также, что работа продолжалась в блокированном Ленинграде еще несколько месяцев и «была прекращена где-то уже зимой, когда люди просто изголодались, иззябши, уже не могли как следует работать». Из этого документа видно, что люди работали буквально до последнего часа. Мы также, к сожалению, сейчас знаем, что как раз в начале зимы 1941–1942 гг. некоторые сотрудники обсерватории уже погибли от голода и блокадных лишений.

12 сентября Пулково впервые подверглось вражеской бомбежке. 18 сентября 1941 г. фашистские танки и мотопехота были остановлены в полутора километрах к югу от Пулковской обсерватории.

Вспоминает Татьяна Васильевна Крат [8]: «В блокированном Ленинграде оказались астрометристы, так как астрофизики уехали на солнечное затмение 21 сентября 1941 г. в Ташкент и Алма-Ату». И далее она пишет, что в связи с отсутствием директора «его функции стал выполнять старший научный сотрудник Александр Николаевич Дейч. Многие пулковчане переселились в академическое общежитие на Петроградской стороне. Началась блокада».

А.Н. Дейч исполнял обязанности директора Пулковской обсерватории с 19 сентября 1941 г. по 1 апреля 1942 г., о чем говорится в соответствующем приказе директора обсерватории С.И. Белявского: № 155 за 1941 г. — о назначении А.Н. Дейча и.о. директора и № 20 за 1942 г. — о переводе А.Н. Дейча на прежнюю должность старшего научного сотрудника (см. архив ГАО [9, 10]).

Благодаря усилиям сотрудников обсерватории и работников библиотеки (В.Р. Берга, А.Н. Дейча, Н.Н. Павлова, Е.И. Винтергальтер и добровольных помощников) были спасены стеклянная и научная библиотеки, а также ряд измерительных приборов. О самоотверженной работе зав. Пулковской библиотекой Е.И. Винтергальтер см. статью В.Э. Бубневич [11].

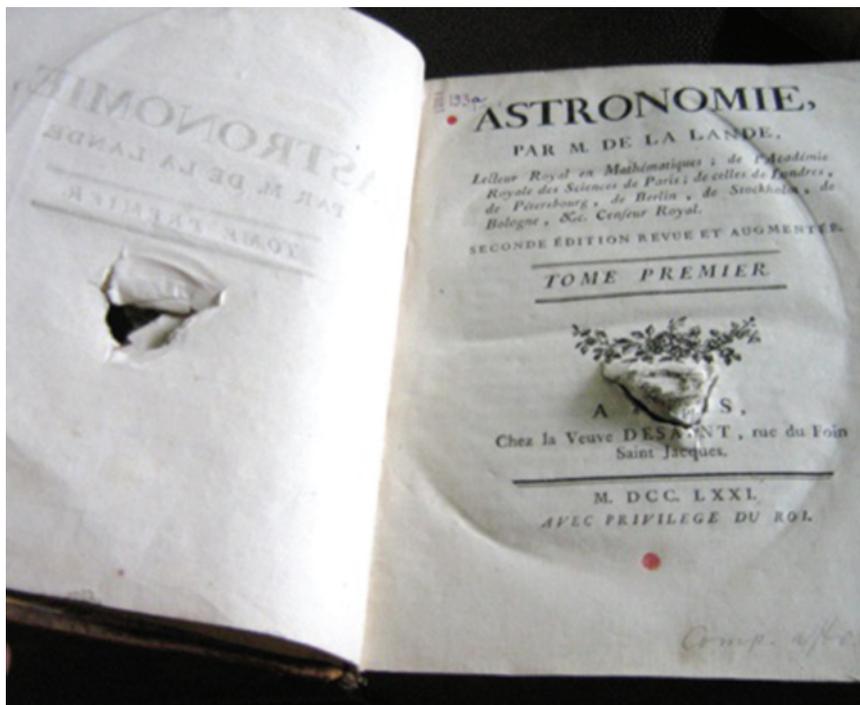


Рис. 3. “Астрономия” Лаланда — пробитая осколком книга из пулковской библиотеки.

Из воспоминаний А.Н. Дейча [12]: “Октябрь 1941 года. Военное командование уведомило Академию наук в Ленинграде о гибели обсерватории и просило принять меры к спасению уцелевших в подвалах главного здания книг богатейшей в мире астрономической библиотеки”. Далее он пишет о трагическом состоянии обсерватории и о мерах, принятых к спасению библиотеки. “Мы спустились в часовую подвал, где на глубине 5 метров под землей были уложены книги пулковской библиотеки... С трудом отыскали мы ящик с редкими книгами и инкунабулами. Бойцы на руках снесли его в грузовую машину к подножью горы” (рис. 3).

Известно, что в последующие дни по распоряжению начальника Политуправления и уполномоченного президиума Академии наук академика Леона Абгаровича Орбели был предоставлен транспорт для перевозки ценного оборудования, инкунабул и других библиотечных книг.

Сохранились краткие дневниковые записи Виктора Рудольфовича Берга, озаглавленные им “Последние дни Пулкова” [13]. Там имеется следующая запись об одной из ночей, проведенной на территории уже разрушенной обсерватории: “Я, Дейч, Курилев были в Пулкове, привезли ящик инкунабул, приняли меры к охране остатков библиотеки (ночь с 13/X на 14/X) [13].

Во время блокады скончались Н.В. Циммерман, Ф.Ф. Ренц, В.Р. Берг, В.А. Елистратов, аспирант А.А. Илинич, механик В.А. Мессер, оптик Н.Г. Пономарев.

В блокадном городе А.Н. Дейч с семьей пробыл до 20 февраля 1942 г. В конце января 1942 г. А.Н. Дейча, находящегося в тяжелом состоянии, положили в стационар в гостинице «Астория». Впоследствии была организована эвакуация сотрудников и их семей. В ночь с 19 на 20.02.1942 г. во главе группы из 16 человек сотрудников ГАО А.Н. Дейч с семьей выехал из Ленинграда в эвакуацию в Ташкент (рис. 4).

Александр Николаевич и другие пулковчане на всю жизнь сохранили чувство благодарности к сотрудникам Ташкентской обсерватории, которые помогли им и их семьям перенести тяготы военной жизни. В Ташкенте А.Н. Дейч приступил к наблюдениям на нормальном астрографе и к чтению лекций по математике и астрономии в Ташкентском университете и в Педагогическом институте. В 1942 г. А.Н. Дейч завершил и в 1947 г. опубликовал материалы каталога собственных движений 18 тысяч звезд и полученных на их основе вековых параллаксов слабых звезд [14].

Следует также упомянуть работу А.Н. Дейча, посвященную определению места корабля по наблюдениям Солнца, разделенным небольшим промежутком времени, теоретическую часть которой он начал выполнять в Ташкенте в 1942 г.

Еще до войны, начиная с 1932 г., пулковские астрономы В.Р. Берг, А.Н. Дейч и М.М. Мусселиус преподавали основы мореходной астрономии курсантам Военно-морского училища им. Фрунзе. А.Н. Дейч, помимо чтения лекций, проводил

практические занятия, участвуя во время своего отпуска в учебных плаваниях по Балтийскому морю. Известно, что в разное время, помимо А.Н. Дейча, разработкой наблюдений такого рода занимались также В.Р. Берг, В.В. Каврайский, Б.П. Хлюстин, Б.А. Орлов. Сложность состояла в том, что наблюдения светила через короткий промежуток времени приводили к двум сомнеровым линиям, пересекающимся под острым углом, при этом понижалась точность определения положения судна. Однако во время войны, когда не всегда возможно соблюсти длительные интервалы между наблюдениями, один из этих способов мог оказаться единственно возможным, и было важно исследовать его с разных точек зрения. Способ А.Н. Дейча с рекомендацией В.В. Каврайского был испытан на практике на Каспийском море. Ошибка положения корабля не превысила  $\pm 3$  мили, что в то время давало удовлетворительную точность. Соответствующая статья была опубликована А.Н. Дейчем в 1945 г. в журнале «Записки по гидрографии» [15].

#### 4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОБСЕРВАТОРИИ И ПРОДОЛЖЕНИЕ РАБОТЫ

Планы по восстановлению обсерватории обсуждались еще во время войны. Академия наук привлекла к ним сотрудников обсерватории. Согласно приказу начальника «Академпроекта» академика А.В. Щусева от 30.08.1944 г. А.Н. Дейч был приглашен к участию в проектировании восстановления ГАО [16].

Работы по восстановлению обсерватории начались в 1947 г. Их возглавило Ленинградское отделение проектного управления Академии наук под руководством члена-корреспондента Академии архитектуры СССР профессора В.Л. Гофмана. В 1949 г. генеральный план детально проработал и уточнил архитектор-художник В.И. Яковлев. Все эти годы А.Н. Дейч участвовал в этой работе в качестве научного консультанта.

Под руководством А.Н. Дейча уже в 1948 г. был восстановлен нормальный астрограф со старым объективом братьев Анри, и были возобновлены регулярные наблюдения. Были также установлены астрономическая двойная камера (АКД) в Пулкове и зонный астрограф в Николаеве. А.Н. Дейч совместно с пулковскими коллегами приложил много усилий для установки в 1950 г. 26-дюймового рефрактора, на котором уже почти 60 лет в Пулковке ведутся наблюдения двойных звезд, больших планет и их спутников и других объектов. Накоплены однородные и высокоточные ряды и получено более 20 000 астронегативов. С помощью наблюдений на этом инструменте получены точные положения около 400 двойных звезд и для 60 из них вычислены их орбиты.



Рис. 4. А.Н. Дейч в Ташкенте, 1942 г.

Александр Николаевич всегда был в курсе новейших достижений науки. В конце 1950-х годов, после запуска первого искусственного спутника Земли, он разработал метод определения координат ИСЗ [17] и участвовал в работе организованных в Пулковке курсов для наблюдателей ИСЗ.

Работа А.Н. Дейча «Ядра галактик», опубликованная еще в 1966 г., дала возможность сделать предварительные выводы относительно физической природы этих объектов [18]. Э.А. Дибай в своей статье «Нестационарные явления в галактиках» [19] подчеркивает приоритет А.Н. Дейча в обнаружении (одновременно с польским астрономом Пахольчиком, работавшим в США) изменения блеска сейфертовских галактик. В статье [18] А.Н. Дейч приводит пример такого явления у наблюдавшейся несколько лет на нормальном астрографе галактики NGC 5548.

Существенным вкладом в создание инерциальной системы координат стала воплощенная А.Н. Дейчем в жизнь идея Б.П. Герасимовича и Н.И. Днепровского об определении абсолютных собственных движений звезд относительно галактик, выдвинутая еще в начале 1930-х годов.

На 8-й Генеральной ассамблее Международного астрономического союза, состоявшейся в Риме в 1952 г., А.Н. Дейч представил доклад [20] относительно необходимости проведения наблюдений избранных внегалактических туманностей

с целью определения абсолютных собственных движений звезд фотографическим способом. Он предложил использовать телескопы типа нормального астрографа в обоих полушариях Земли для фотографирования избранных площадок с галактиками. В течение многих лет Александр Николаевич был руководителем этой работы, выполнявшейся на четырех советских и семи зарубежных обсерваториях. В соответствии с планом Дейча были созданы каталоги абсолютных собственных движений звезд в Голосееве, Москве, Ташкенте, Пулковке и Шанхае. На основе этих каталогов в Киеве была выполнена работа по объединению и исследованию сводного фотографического каталога GPM [21].

В Пулковке первым каталогом, содержащим абсолютные собственные движения 14 600 звезд в 85 площадках северного неба по наблюдениям на пулковском нормальном астрографе, был каталог Pul-1, составленный Н.В. Фатчихиным (1974) [22].

В дальнейшем был получен пулковский “Каталог 59766 абсолютных собственных движений в 149 площадках неба” – Pul-2 (Бобылев, Бронникова и Шахт, 2004, [23]), содержащий средние координаты звезд в системе ICRS на эпоху J2000.0 и оригинальные абсолютные собственные движения звезд. Наблюдения были выполнены на пулковском нормальном астрографе. Для абсолютизации использованы 700 галактик из составленного ранее А.Н. Дейчем, В.В. Лавдовским и Н.В. Фатчихиным списка внегалактических туманностей. Данные каталога Pul-2 были применены для контроля привязки собственных движений звезд HIPPARCOS к инерциальной системе координат. Это исследование послужило основой для диссертации В.В. Бобылева [24]. На основе сравнения каталогов Pul-2 и HIPPARCOS им были определены компоненты вектора остаточного вращения  $\omega$  каталога HIPPARCOS относительно системы внегалактических координат:  $\omega_x, \omega_y, \omega_z = (-0.98, -0.03, -1.66) \pm (0.47, 0.38, 0.42)$  мсд/год. Также был получен Pul-3 – первый большой звездный каталог, содержащий точные экваториальные координаты 58 483 звезд, также созданный на основе фотографических наблюдений на нормальном астрографе Пулковской обсерватории. Этот каталог вошел в диссертацию М.Ю. Ховричева (2003) [25]. Для большинства звезд каталога Pul-3, слабее 12<sup>m</sup>, впервые получены экваториальные координаты в системе ICRS, пригодные для высокоточных астрометрических работ. Также по разностям собственных движений слабых звезд до 16.5<sup>m</sup> получены значения компонентов вектора угловой скорости вращения системы (каталог Pul-3 ICRS) относительно инерциальной системы (каталог Pul-2).

По инициативе А.Н. Дейча на Ленинградском оптико-механическом объединении был изготовлен менисковый телескоп системы Д.Д. Максудова, который был установлен советскими астрономами для наблюдений в Чили. На этом инструменте были получены первые эпохи 150 площадок с галактиками для южного неба, по 3 пластинки для каждой площадки. Эта работа была прервана в 1973 г. из-за сложившейся политической обстановки. В настоящее время прилагаются усилия российской и чилийской стороны для возобновления совместной работы на этом телескопе.

Широко известны работы А.Н. Дейча по исследованию двойной звезды 61 Лебеда и его гипотеза относительно невидимых спутников этой звезды [26, 27]. Эти работы положили начало наблюдениям в Пулковке звезд с невидимыми спутниками. В настоящее время 61 Лебеда остается одним из самых перспективных объектов для наблюдений из космоса с целью обнаружения маломассивных спутников у компонентов этой двойной системы, см. недавно опубликованную статью Кервела и др. [28]. В статье Арни [29] подчеркивается, что благодаря особенностям спектрального класса (K5V, K7V) компонентов этой звезды, у наблюдателей возрастает возможность получения “биосигнала”, а именно, свидетельства наличия соответствующих органических составляющих в атмосфере экзопланеты.

## 5. ОБЩЕСТВЕННАЯ РАБОТА И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ А.Н. ДЕЙЧА

Международное астрономическое сообщество высоко оценило научную и организаторскую деятельность А.Н. Дейча. В течение двух сроков 1961–1964 и 1964–1967 гг. он был президентом комиссии Международного астрономического союза № 24 “Фотографическая астрометрия”, и в дальнейшем в течение ряда лет, практически до конца своей научной деятельности, от которой он отошел вследствие болезни, А.Н. Дейч был постоянным членом оргкомитета комиссии и активным членом МАС (рис. 5 и 6).

Всего Александр Николаевич опубликовал свыше 130 научных статей. Широко известны написанные им главы “Фотографическая астрометрия” и “Двойные звезды” для пулковского “Курса астротризики и звездной астрономии”. Соответствующие спецкурсы, а также курс “Приближенные вычисления” А.Н. Дейч читал студентам – астрономам в Ленинградском университете, где он преподавал с 1936 по 1981 г. Всю свою жизнь Александр Николаевич щедро передавал молодежи знания и опыт в проведении научных исследований (рис. 7). Двадцать два его аспиранта успешно защитили кандидатские диссертации. Следует отметить, что несмотря на



**Рис. 5.** Генеральная Ассамблея МАС, 1958 г., слева К.Н. Тавастшерна, в центре А.Н. Дейч, правее Андре Данжон (президент МАС, 1955–1958 гг.).



**Рис. 6.** Профессор А.Н. Дейч и академик А.А. Михайлов (директор ГАО с 1947 по 1964 г.).

свою занятость Александр Николаевич считал своим долгом участвовать в трудоемкой работе по обработке наблюдений и измерению фотопластинок.

За свой самоотверженный труд на благо науки А.Н. Дейч был награжден орденом Ленина, орде-

ном Трудового Красного Знамени, двумя орденами “Знак почета” и многими медалями. Александр Николаевич был очень отзывчивым человеком. Будучи депутатом Московского районного Совета депутатов трудящихся, он помог многим людям. Его всегда волновали вопросы, связанные с судь-



**Рис. 7.** Отдел фотографической астрометрии ГАО, 1976 г. Слева направо, I ряд: Х.И. Поттер, И.И. Брейдо, Л.С. Королева, В.В. Лавдовский, А.Н. Дейч, З.И. Кадла. II ряд: А.А. Киселев, Л.В. Жуков, Н.Н. Ключник, Н.Ф. Быстров, Т.П. Киселева, А.М. Еремина, Г.Д. Колосова. III ряд: О.Н. Орлова, Н.А. Шахт, Н.М. Бронникова, О.А. Калининченко, Г.В. Панова, О.М. Михайлова, В.Н. Фролов, Б.А. Фираго.

бой обсерватории, в том числе с экологией, с состоянием пулковского парка, о чем свидетельствует его работа на посту председателя Пулковского общества охраны природы.

Александр Николаевич находил время для ответов на письма любителей астрономии. Он общался со школьниками и учителями своего родного города Рени. Весной в 1986 г., в последний год его жизни, во время школьных каникул дети с педагогами приехали его навестить. Несмотря на свое нездоровье Александр Николаевич тепло их принял и организовал экскурсию по обсерватории.

О своей жизни в большой и дружной семье в городе его детства Рени, в доме деда по материнской линии, Александр Николаевич рассказал в написанных им в последние годы жизни автобиографических заметках. Там же он вспоминает о своем двоюродном брате, известном историке и филологе, Аристиде Ивановиче Доватуре. Аристид Иванович занимался научной и преподавательской деятельностью в Ленинграде, но в 1935 г. «в порядке очистки города от социально чуждых элементов» А.И. Доватур был выслан в Саратов на пять лет. Во все трудные для Аристида Ивановича годы А.И. Дейч оказывал ему поддержку и помощь.

«Теперь Рени перенесен на небо, — пишет Александр Николаевич о своем родном городе. —

*В 1968 г. была открыта новая малая планета в Крымской астрофизической обсерватории астрономом Л.И. Черных, которая по моей просьбе дала ей имя Рени — Rени — под № 1792.*

*Я получил почетное свидетельство в 1972 году. Этот почет одинаковым образом относится и к Аристиду — крупнейшему знатоку классической филологии в нашей стране. При других обстоятельствах он был бы, по крайней мере, членом-корреспондентом Академии наук».*

Земляки Александра Николаевича и Аристида Ивановича с благодарностью отнеслись к их памяти. В 1989 г. на стене их родного дома была установлена посвященная им мемориальная доска. Сейчас на карте г. Рени, недалеко от улиц Маяковского, Пушкина, космонавтов Гагарина и Леонова, маршала Тимошенко и других, названных в честь известных людей, появились улица Дейча и улица Доватура.

Александр Николаевич часто вспоминал свои годы работы в Пулкове и рассказывал молодым сотрудникам о своих старших коллегах, а также о пулковских астрономах, пострадавших в годы репрессий и во время войны. Он хотел, чтобы о них помнили.

В рамках представленной здесь статьи мы не смогли полностью осветить всю многогранную научную и общественную деятельность А.Н. Дейча. Также у нас, к сожалению, не хватило возмож-

ности подробно остановиться на окружении Александра Николаевича, но мы постарались вспомнить тех, с кем вместе он трудился на благо астрономической науки и с кем пережил трагические и героические моменты в истории Пулковской обсерватории.

В заключение мы хотим выразить благодарность сотрудникам библиотеки ГАО РАН: Е.Е. Козловой и Д.В. Марковой, а также сотрудникам архива ГАО РАН: Т.В. Соболевой и М.В. Соболевой за помощь в работе над настоящей статьёй.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. Н. Дейч*. Аудиозапись. Архив лаб. фотогр. астром и зв. астр. ГАО РАН (1978).
2. *А. N. Deutsch*, *Astron. Nachr.* **228**, 347 (1926).
3. IAU Minor Planet Center (1148) Rarahu = 1924 OA = 1929 NA.
4. *А. Н. Дейч и М. М. Мусселиус*, Отчет по ГГУ (1930).
5. *А. Н. Дейч и Е. Я. Перепелкин*, Труды ГАО **45**, 80 (1934).
6. *А. Н. Дейч*, Труды ГАО **55**, 167 (1940).
7. *П. П. Добронравин*, в сб. “Астрономия на крутых поворотах XX века” (Изд. “Феникс” Дубна, 1997), с. 178.
8. *Т. В. Крам*, Истор.-астр. исслед. **21**, 369 (1989).
9. Архив ГАО РАН, (далее АГАО), Ф.1. Оп.2. Д.31. Л.15. Приказ № 155 (1941).
10. АГАО, Ф.1. Оп.2. Д.32. Л.41. Приказ № 20 (1942).
11. *В. Э. Бубневич*, в сб.: *150 лет Пулковской обсерватории* (Ленинград “Наука”, 1989), с. 293.
12. *А. Н. Дейч*, Астрон. календарь ВАГО **LVI**, 179 (1953).
13. *В. Р. Берг*, “Последние дни Пулкова”, рукопись, АГАО. Ф.19. (1941).
14. *А. Н. Дейч*, Изв. ГАО **138**, 2 (1947).
15. *А. Н. Дейч*, Записки по гидрографии, 2, вып. **125**, 115 (1945).
16. АГАО, Ф.10. Оп.1. Д.106. Л.42. Выписка из приказа № 46 от 30.08.1944 по проектной конторе Академии Наук СССР “Академпроект”.
17. *А. Н. Дейч*, Астрон. журн **35**, 810 (1958).
18. *А. Н. Дейч*, Изв. ГАО **179**, 95 (1966).
19. *Э. А. Либай*, “Нестационарные явления в галактиках” Знание, М., 1977, **6**, 64 с.
20. *А. Н. Дейч*, *Использование внегалактических объектов для построения абсолютной системы собственных движений звезд*, Изд. АН СССР (1952).
21. *С. П. Рыбка и А. И. Яценко*, Кинем. и физ. небесн. тел **13**, 5, 70 (1997).
22. *Н. В. Фатчихин*, Труды ГАО **81**, 207 (1974).
23. *В. В. Бобылев, Н. М. Бронникова, Н. А. Шахт*, Письма в Астрон. журн. **30** 519 (2004).
24. *В. В. Бобылев*, “Кинематический анализ местной системы звезд”. Дисс. на соискание уч. степени доктора наук (2004).
25. *М. Ю. Ховричев*, “Экваториальные координаты и собственные движения 58 483 звезд до 16.5m в пулковских площадках с галактиками в системе ICRS и их исследование.” Дисс. на соискание уч. степени канд. наук (2003).
26. *А. Н. Дейч*, Известия ГАО **166**, 138 (1960).
27. *А. Н. Дейч и О. Н. Орлова*, Астрон. журн. **54**, 327 (1977).
28. *P. Kervela, F. Arenou, F. Mignard, and F. Thévenin*, *Astron. and Astrophys.* **623**, A72 (2019).
29. *G. Arney*, *Astrophys. J. Lett.* **873**, L7 (2019).

УДК 521.9

## ЖИЗНЬ И НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПРОФЕССОРА МГУ ВЛАДИМИРА ВЛАДИМИРОВИЧА ПОДОБЕДА

© 2020 г. Л. П. Грибко<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия

\*e-mail: lyudmila-gribko@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

После доработки 22.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

В статье кратко описаны жизнь и научная деятельность В.В. Подобед – выдающегося астронома и астрометриста, доктора физико-математических наук, профессора МГУ, столетие которого отмечалось в 2018 г. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629920100023

В.В. Подобед (рис. 1) родился в Москве, 6 ноября 1918 г., в эпоху революции и тяжелой гражданской войны. Его отец, Владимир Илларионович Подобед (1878–1919), был врачом (рис. 2). Родители отца, т.е. дед и бабушка В.В., были мелкопоместными дворянами: Илларион Матвеевич Подобед – надворный советник в г. Могилеве, а его жена Мария Николаевна Подобед (в дев. Гионицкая) – уроженка Могилевской губернии. Отец В.В. умер довольно рано, в 1919 г., когда ему было всего 41 год, при исполнении служебных обязанностей, заразившись сыпным тифом. Эпидемия тогда свирепствовала по всей России.

Мать В.В. – Софья Васильевна Иванова-Подобед (1887–1953) – закончила медицинский факультет Московского университета и стала врачом (рис. 3). В то время она одной из первых русских освоила профессию рентгенолога. Позднее Софья Васильевна заведовала рентгенологическим отделением в НИИ скорой помощи им. Н.В. Склифосовского, была заслуженным врачом РСФСР. Дед В.В. со стороны матери, Василий Иванович Иванов, был владельцем типографии в Москве, хотя и являлся выходцем из крестьян Калужской губернии. Он был мастером печатного дела и позже смог открыть собственную типографию, где печатал такие книги, как “Гербы России” или книгу “Памяти Пушкина”, изданную в 1880 г. Бабушка – Мария Алексеевна Иванова (в дев. Романова) – происходила из купеческой семьи.

В СССР в 1920-е годы в общеобразовательные школы принимали детей с восьми лет. В.В. поступил в школу в Москве в 1926 г. и окончил ее в

1936 г. Вот тут-то он оказался на распутье. Видимо, по примеру Софьи Васильевны поступил в 1-й Медицинский институт, но быстро пришло разочарование. Тогда В.В. перевелся в Московский электромеханический институт инженеров транспорта (МЭМИИТ) на факультет паровозостроения, ибо тяга к работе с механизмами, к конструированию и математике у него была еще в

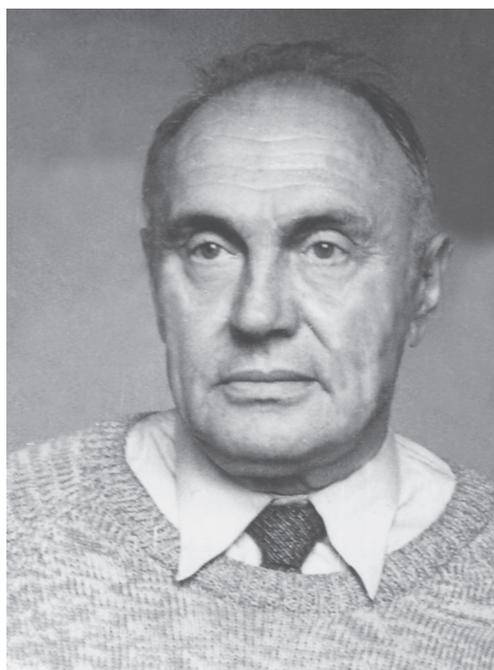


Рис. 1. Владимир Владимирович Подобед (06.11.1918.–01.10.1992)



Рис. 2. Владимир Илларионович Подобед (1878–1919).

школе. Однако к концу 1-го курса В.В. ушел из МЭМИИТ по собственному желанию и решил поступать в Московский университет. В 1937 г. осуществилась его мечта, и В.В. стал студентом механико-математического факультета МГУ. Вследствие тяжелой болезни, как писал В.В. в автобиографии, ему пришлось пропустить 1939–1940 учебный год.

В 1941 г. разразилась Великая Отечественная война (ВОВ), в июне Германия напала на Советский Союз. В.В. участия в ВОВ не принимал, так как по состоянию здоровья (врожденный порок сердца) от службы в действующей армии был полностью освобожден. Трехгодичный перерыв в занятиях в университете тоже был, однако В.В. трудился в тылу: с июля 1941-го по март 1944-го работал рентгенотехником в военном госпитале. Позднее занятия в университете возобновились, и в 1946 г. В.В. успешно закончил МГУ. Кроме того, В.В. последний учебный год совмещал с работой старшим лаборантом в ГАИШ (август 1945–октябрь 1946). Тогда же В.В. принимают в аспирантуру МГУ по специальности “астрометрия” (рис. 4), и он заканчивает ее в 1949 г. защитой кандидатской диссертации на тему “Исследование прибора для измерения астротреографий”. Учителями В.В. были зав. кафедрой астрометрии, профессор, чл.-корр. АН СССР Сергей Николаевич Блажко и профессор, чл.-корр. АН СССР Митрофан Степанович Зверев.



Рис. 3. Софья Васильевна Иванова-Подобед (1887–1953).

Интерес В.В. к приборам и их исследованиям хорошо виден по заголовкам его научных статей: “Обработка фотографических наблюдений П.К. Штернберга двойной звезды  $\zeta$  (дзета) Большой Медведицы за 1903–1907 гг.” [1]; “Об исследовании ходовых ошибок микрометра” [2]; “Определение точных положений малых планет при помощи широкоугольного астрографа” [3]; “Исследование небольших участков разделенного круга” [4]; “К вопросу об исследовании цапф астрометрических инструментов с помощью индикатора” [5]; “Определение поправок наклонности и азимута горизонтальной оси за неправомерность фигуры цапф” [6]; “Задачи фундаментальной астрометрии и новый меридианный круг Московской обсерватории” [7]; “О непосредственной привязке звезд КСЗ к внегалактическим туманностям” [8] и т.д. В.В. в течение многих лет своей научной работы разрабатывал проблемы фундаментальной и фотографической астрометрии, ввел ряд новых понятий в теориях астрометрических наблюдений и обработок, предложил новые методы исследования инструментов, названные позже “методами Подобед” (оригинальные способы исследования цапф и разделенного круга). У В.В. было много научно-популярных статей в БСЭ, МСЭ и других изданиях (рис. 5).

С октября 1949 г. по февраль 1953 г. В.В. работал ассистентом механико-математического факультета МГУ. Начиная с 1950 г., он читал ряд общих и специальных курсов по астрометрии: “Фундаментальная астрометрия”, “Общая астрометрия”, “Фундаментальные каталоги звезд”, “Астрономические постоянные”. В.В. Подобед был молодым преподавателем (рис. 6) и перенимал опыт преподавания и работы у профессоров старшего поколения, например, у Сергея Владимировича Орлова, который с 1943 по 1952 г. был директором ГАИШ. В феврале 1953 г. В.В. вступил в ряды членов КПСС и в феврале же был утвержден в ученое звание доцента по кафедре “Астрометрия”, затем до января 1954 г. продолжал работать доцентом механико-математического факультета МГУ.

С 1954 по 1959 г. В.В. работал в ГАИШ в должности заместителя директора по научной части при двух директорах: Борисе Васильевиче Кукаркине и Дмитрие Яковлевиче Мартынове (рис. 7). С 1949 г. коллектив ГАИШ занимался реализацией Постановления Совета министров СССР о реконструкции Московского университета. В то время началось строительство высотного здания МГУ. В ГАИШ была создана специальная комиссия, которую возглавил В.В. Подобед. Он много сил и энергии вложил в разработку технических заданий для большого количества уникальных астрономических инструментов и специальных павильонов для них, а также в проект нового здания института (в частности, настоял на том, чтобы здание имело три этажа в виде дополнительного цокольного этажа, вместо предлагавшегося архитекторами двухэтажного здания). Уже в 1954–1955 гг. сотрудники ГАИШ стали переезжать на новое место (на Ленинские горы, теперь Воробьевы горы). Много внимания В.В. уделил размещению и установке астрометрических инструментов: меридианного круга ГОМЗ, рефлектора АФР-1, фотографической зенитной трубы (ФЗТ), зенит-телескопа (ЗТЛ-180). Автор статьи поступила работать в ГАИШ в 1959 г., поэтому я помню, как большая комната в новом здании, вернее, аудитория для практических занятий студентов на некоторое время превратилась в большую лабораторию по монтажке нового меридианного круга: приезжали инженеры из Ленинграда с завода ГОМЗ и вместе с В.В. обсуждали установку тех или иных деталей на новый инструмент, который находился уже в построенном павильоне рядом, под окнами отдела астрометрии ГАИШ (рис. 8).

Несмотря на обязанности заместителя директора ГАИШ, В.В. проводил научные семинары по астрометрии с сотрудниками отдела. Он был одним из исполнителей и продолжателем большой коллективной работы советской астрометрии — фундаментального каталога слабых звезд



Рис. 4. В.В. Подобед, 1949 г. Фотография сделана В.Н. Коржевным во дворе Краснопресненской обсерватории.

(ФКСЗ), под его руководством и при личном участии были завершены наблюдения ФКСЗ (1953–1958) на меридианном круге Репсольда в Москве, на Краснопресненской обсерватории МГУ. В.В. Подобед как заместитель директора по научной части посещал и курировал работы по расширению наших наблюдательных баз: например, в Кучино (Подмосковье), на Южной станции (в Крыму) (рис. 9) и позже, в связи с хозяйственными работами, на Майданаке (Узбекистан). В.В. занимал целый ряд общественных должностей: был председателем секции “Астрономия и геодезия” в Научно-методическом совете Минвуза СССР, заместителем председателя бюро секции “Астрометрия” Астросовета АН СССР, членом Совета по подготовке астрономических кадров при Астросовете; уже позднее был членом двух комиссий МАС (№ 8 и № 24). В служебных характеристиках всегда отмечалось, что В.В. много раз избирался членом и секретарем партбюро ГАИШ.

В 1957–1959 гг. проводился Международный геофизический год. В.В. принимал в нем активное участие. Приказом Министра высшего образования от 30.01.1958 г. “За большую и плодотворную работу по подготовке аппаратуры для фотографических наблюдений искусственных спутников Земли и организацию таких наблюде-



Рис. 5. В.В. Подобед за работой, 1949 г.



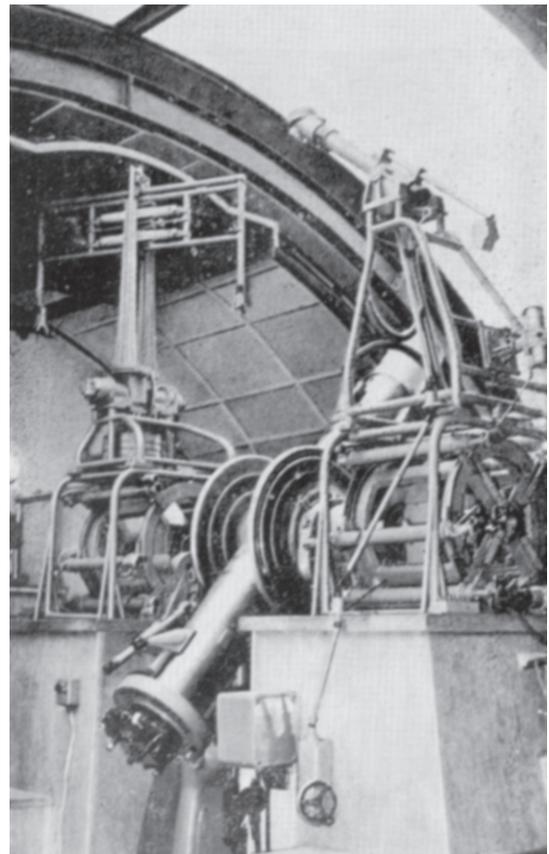
Рис. 6. Красная Пресня, 1950 г. Юбилей Сергея Владимировича Орлова (70 лет). В.В. Подобед стоит первым слева в третьем ряду (в шляпе).



**Рис. 7.** В.В. Подобед – зам. директора по научной части (1954–1959), ГАИШ, 1950 г., стоит слева от П.С. Солюянова и Д.Я. Мартынова.

ний” объявлялась благодарность: 1) директору Астрономической обсерватории Одесского университета проф. В.П. Цесевичу и 2) заместителю директора Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга при Московском университете доц. В.В. Подобеду, далее была подпись министра В. Елютина.

С 1960 г. В.В. снова доцент кафедры астрометрии, а с 1964 (после объединения двух кафедр) по 1972 г. – доцент кафедры звездной астрономии и астрометрии физического факультета МГУ. В 1962 г. выходит из печати учебник В.В. Подобеда для университетов “Фундаментальная астрометрия. Определение координат звезд”. Этот же учебник издается в США: Podobed V.V. *Fundamental Astrometry. Determination of Stellar coordinates.* // The University of Chicago Press, Chicago and London, 1965. В “Астрономическом журнале” печатается статья В.В. “Астрометрия” [9] и в “Вестнике МГУ” другая статья “Проблема определения инерциальной системы в астрономии” [10], обе в соавторстве с В.В. Нестеровым. В сборнике “Системы координат в астрономии” издается статья В.В. “Инерциальная система координат и некоторые задачи астрометрии” [11] и ряд других научных статей по проблемам астрометрии, т.е. проблемам определения и построения основной инерциальной системы координат. Вышеупомянутый учебник и статьи явились подготовкой к защите докторской диссертации, которая состоялась 18 июня 1970 г. и где В.В. сделал доклад под названием “Фундаментальная астромет-



**Рис. 8.** Меридианный круг ГОМЗ на обсерватории ГАИШ МГУ на Ленинских горах, 1960 г.



Рис. 9. Группа сотрудников ГАИШ на Южной станции, 1960 г., В.В.Подобед – третий слева.

рия”, включивший в себя совокупность работ на эту тему. 13 ноября 1970 г. В.В. была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

С 1972 по 1988 г. В.В. руководил отделом астрометрии ГАИШ (в отделе трудились более 20 человек), продолжая одновременно и преподавательскую деятельность: чтение лекций, руководство курсовыми и дипломными работами студентов. В отделе под руководством В.В. было защищено 17 кандидатских диссертаций, и двое из этих кандидатов стали докторами наук. 21 мая 1976 г. В.В. Подобеду было присвоено ученое звание профессора по специальностям астрономия, астрометрия, небесная механика. В 1975 г. выходит из печати учебное пособие для студентов вузов “Общая астрометрия”, в 1982 г. печатается 2-е издание (переработанное и дополненное), уже как учебник для студентов университетов. Обе книги были написаны в соавторстве с В.В. Нестеровым. В.В. Подобед был непременно активным участником Всесоюзных астрометрических конференций (рис. 10 и 11).

В 1970-е годы В.В. Подобед – крупный советский ученый, широко известный специалист в области астрометрии. В это время он много внимания уделяет научному руководству хозяйственными работами по решению директивных органов. Появилась возможность построить для ГАИШ Среднеазиатскую высокогорную обсерваторию в окрестностях г. Самарканд, на горном плато,

вблизи горы Майданак. В.В. возглавлял комиссию от ГАИШ по выбору подходящего места для будущей обсерватории. Он вместе с сотрудниками нашего института неоднократно ездил в эти южные места. Через 10 лет обсерватория была построена. Среди прочих инструментов там был установлен отечественный рефлектор с полутора-метровым зеркалом, изготовленный в Ленинграде на ЛОМО (Ленинградское оптико-механическое объединение, как теперь стал называться ГОМЗ). Но после распада СССР обсерватория отошла к независимому государству Узбекистан, поскольку расположена на его территории. Хоздоговорные работы по составлению каталогов с координатами и другими характеристиками звезд были выполнены сотрудниками отдела астрометрии и частично другими отделами ГАИШ. В 1975, 1980, 1985, 1987 г. эти работы отмечались правительственными наградами. В.В. был награжден орденом “Трудового Красного Знамени” (1975) и орденом “Знак почета” (1987). У В.В. были награды и прошлых лет, например, медали: “За оборону Москвы”, “За доблестный труд в ВОВ”, “В память 800-летия Москвы”, “В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина” и др.

В.В. в 1988 г. отошел от руководящей должности зав. отдела и стал главным научным сотрудником отдела астрометрии ГАИШ. У В.В. к этому времени было опубликовано более 70 печатных научных трудов. В период своего руководства отделом В.В. всегда занимал активную жизненную



**Рис. 10.** Участники XX Астрометрической конференции (Пулково, 20–23 мая 1975 г.) на экскурсии в Павловске, В.В. Подобед – второй справа.

позицию, стремился к справедливости в решении тех или иных проблем, всегда старался помочь своим младшим товарищам – сотрудникам по работе. В.В. был самым старшим среди нас (кроме профессора Константина Алексеевича Куликова), все относились к В.В. с искренним уважением. Я вспоминаю, какой подарок мы приготовили Подобеду, когда ему исполнилось 50 лет – ему подарили большую (В.В. сам был большого роста, под 190 см, наверное, поэтому любил тоже все большое) памятную медаль, 10–12 см в диаметре, на ней был изображен рельеф головы В.В. в профиль, как на монетах. Наши же сотрудники, Альберт Петрович Гуляев и Юрий Иванович Продан, отливали эту медаль в мастерских ГАИШ. К сожалению, В.В. недолго проработал в должности главного научного сотрудника ГАИШ, травма (падение на скользком тротуаре 15 марта 1988 г.) помешала ему трудиться с прежней энергией. В.В. перенес две операции в 1988 и 1992 г., после второй он умер 10 января 1992 г. Похоронили В.В. в могилу его родителей, в Москве, на Новодевичьем кладбище (рис. 12).

Надо отметить, что В.В. любил путешествовать во время отпусков по России и иногда за рубежом. Были у В.В. и зарубежные командировки, но все – по порядку. В.В. впервые ездил в зарубежную командировку во Францию на Конгресс по хронометрии в 1954 г., затем в 1967 г. на научную

конференцию в Чехословакию и в 1970 г. – в научную экспедицию на Кубу (32 дня). В.В. в 1967 г. по туристической путевке путешествовал по Дунаю; в 1969 г. как турист побывал в Индии и на Цейлоне. А путешествия по СССР начались с Карпат, где В.В. побывал в конце 1950 г. В 1965 г. В.В. путешествовал по Карелии со старшей дочерью Ольгой (на байдарках), а в 1968 г. летал на Байкал и привез оттуда большой корень какого-то дерева. Средняя Азия: Ташкент, Самарканд, Китаб, Майданак – все было в 1970-е–1980-е годы. На Дальнем Востоке и Камчатке В.В. побывал в конце 1970-х. В 1960-е годы на экскурсии по ближним городам мы ездили с В.В. в Суздаль, Переславль-Залесский и другие места.

Вспоминаю, что в 1980-х годах в ГАИШ состоялась выставка из двух коллекций минералов, собранных двумя нашими сотрудниками: В.В. Подобедом и Владимиром Николаевичем Коржевым (1925–2016). Каждый из них привез в ГАИШ кусочки различных геологических пород совершенно необыкновенной красоты. Трудно даже было сказать, чья коллекция лучше, обе были хороши. Жизнь и дела Владимира Владимировича сверкают как его “драгоценные камни из коллекции” в памяти более молодых поколений. В 1991 г. имя В.В. Подобеда было присвоено малой планете № 3311. Хочется добавить, что на конференции присутствовала внучка В.В., Наталья Евгеньевна



Рис. 11. XXII Астрометрическая конференция в ГАИШ МГУ (Москва, 1981 г.), В.В. Подобед – четвертый слева в первом ряду.



Рис. 12. Памятник на могиле на Новодевичьем кладбище, где похоронен В.В. Подобед.

Когутовская (дочь старшей дочери В.В., Ольги Владимировны Подобед, обе они закончили МГУ, только разные факультеты). Наташа была со своими детьми: сыном Мишей (12 лет) и дочерью Юлей (8 лет). Правнуков поприветствовали, особенно Мишу (он интересуется астрономией) и подарили им детские книги по астрономии от АстроО.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Подобед, Астрон. журн. **24**, № 6, (1947).
2. В. В. Подобед, Астрон. журн. **28**, 54 (1951).
3. В. В. Подобед, Сообщения ГАИШ, № 82, (1952).
4. В. В. Подобед, Астрон. журн. **30**, № 3, (1953).
5. В. В. Подобед, Труды 11-й астрометрической конференции (1955).
6. В. В. Подобед, Сообщения ГАИШ, № 94, (1953).
7. В. В. Подобед, Сборник статей дискуссии по инструментам комиссии № 8 МАС (1959).
8. В. В. Подобед, Труды 11-й астрометрической конференции (1955).
9. В. В. Подобед и В. В. Нестеров, Астрон. журн. **42**, № 5, (1965).
10. В. В. Подобед и В. В. Нестеров, Вестник МГУ, № 5, (1967).
11. В. В. Подобед, В сборнике "Системы координат в астрономии" (Ташкент, 1971).