СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 5, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля с точкой δ'-взаимодействия
А. Р. Алиев, М. Дж. Манафов 583

Устойчивость линейных стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробными броуновскими движениями
И. В. Качан 590

Метод замороженных коэффициентов в условиях Гёльдера
А. И. Перов, И. Д. Коструб, В. К. Каверина 607

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Бикватернионные волновые уравнения и свойства их обобщённых решений
Л. А. Алексеева 614

Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей
Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров 625

Анализ некоторых краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции
Р. В. Бризицкий, В. С. Быстрова, Ж. Ю. Сарицкая 635

Устойчивость по энергетической мере нестационарного трёхосного растяжения–сжатия вязкого параллелепипеда
Д. В. Георгиевский 649

Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов
Д. П. Емельянов, И. С. Ломов 655

Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре
В. В. Карачик 673

О разрешимости задачи Коши для системы математической теории термоупругости в пространстве
О. И. Махмудов, И. Э. Ниёзов 687

Модели упругого сочленения пластины со стержнями, основанные на точечных условиях Соболева и самосопряжённых расширениях дифференциальных операторов
С. А. Назаров 700

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 583–589

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ТОЧКОЙ δ'-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2021 г. А. Р. Алиев, М. Дж. Манафов

Для оператора Штурма–Лиувилля с точкой δ'-взаимодействия получена формула регуляризованного следа первого порядка. При больших значениях спектрального параметра найдены асимптотические представления для решений уравнения Штурма–Лиувилля с условиями разрыва. Выведена асимптотика собственных значений исследуемого оператора. Показано, что в формуле регуляризованного следа появляется дополнительное слагаемое, учитывающее скачок функции распределения заряда в середине интервала. Отметим, что регуляризованные следы применяются для приближённого вычисления первых собственных значений рассматриваемого оператора. Они полезны и при решении обратных задач спектрального анализа для дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121050010

Посвящается светлой памяти академика
НАН Азербайджана М.Г. Гасымова

1. Введение. Теория регуляризованных следов обыкновенных дифференциальных операторов насчитывает более 65 лет. Впервые формула следа для двух регулярных операторов Штурма–Лиувилля получена И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном [1]. Впоследствии следы были вычислены для различных дифференциальных операторов (см. [2–6]) многими математиками, из которых особо отметим М.Г. Гасымова, в работе [3] которого для сингулярных операторов Штурма–Лиувилля с дискретными спектрами найден аналог формулы следа Гельфанда–Левитана. Весомый вклад в развитие теории регуляризованных следов внесли В.А. Садовничий и его ученики, с их результатами и с текущей ситуацией по данной тематике можно ознакомиться по обстоятельному обзору [7]. Значимый интерес представляют и работы [8, 9], в которых получены формулы следов для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (типа δ-функции).

В математической физике встречается достаточно много задач, когда коэффициенты дифференциального оператора являются обобщёнными функциями. Например, в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ дифференциальный оператор $P \equiv -d^2/dx^2$ с областью определения

$$D(P) = \{y(x) \in C[0,1] : y'(x_0+0) - y'(x_0-0) = \alpha y(x_0), \quad y(0) = y(1) = 0\}$$

описывает стационарные колебания однородной струны, лежащей на упругом основании. В точке x_0 струна связана с пружинкой, жёсткость которой $K(x)$ имеет плотность $K'(x) = \alpha\delta(x-x_0)$. Следует отметить, что в приложениях формулы следов имеют важное значение, например, при приближённом вычислении первых собственных значений соответствующих операторов (см. [2, 7]).

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi/2) \bigcup (\pi/2,\pi), \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \tag{1.2}$$

и в точке $x = \pi/2$ условиями разрыва

$$I(y) := \begin{cases} y'(\pi/2+0) = y'(\pi/2-0) \equiv y'(\pi/2), \\ y(\pi/2+0) - y(\pi/2-0) = \alpha y'(\pi/2), \end{cases} \tag{1.3}$$

где h и $\alpha \neq 0$ – заданные действительные числа, λ – спектральный параметр, $q(x)$ – вещественнозначная функция, причём $q(x) \in W_1^1(0,\pi)$.

Заметим, что уравнение (1.1) с условиями разрыва (1.3) сводится к уравнению

$$-y'' + (\alpha\delta'(x-\pi/2) + q(x))y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{1.4}$$

где $\delta'(x)$ – производная функции Дирака (см. [10]). Отметим, что различные обратные спектральные задачи для уравнения (1.4) исследованы в работе [11].

В настоящей работе для оператора Штурма–Лиувилля L в пространстве $L_2(0,\pi)$, порождённого дифференциальным выражением $-y''+q(x)y$, с плотной областью определения

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^2((0,\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi))\bigcap L_2(0,\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} y'(0)-hy(0)=0, \quad y(\pi)=0, \\ y'(\pi/2+0)=y'(\pi/2-0)\equiv y'(\pi/2), \\ y(\pi/2+0)-y(\pi/2-0)=\alpha y'(\pi/2) \end{array} \right\}$$

получена формула регуляризованного следа первого порядка.

2. Свойства спектральных характеристик. Пусть $y(x)$ и $z(x)$ – функции, непрерывно дифференцируемые на интервалах $(0,\pi/2)$ и $(\pi/2,\pi)$. Обозначим $\langle y,z\rangle := yz'-y'z$. Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют условиям (1.3), т.е. имеют место $I(y)$ и $I(z)$, то, как несложно убедиться,

$$\langle y,z\rangle|_{x=\pi/2+0} = \langle y,z\rangle|_{x=\pi/2-0}, \tag{2.1}$$

другими словами, функция $\langle y,z\rangle$ непрерывна на $(0,\pi)$.

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0,\lambda)=\varphi(0,\lambda)=s'(0,\lambda)=1, \quad c'(0,\lambda)=s(0,\lambda)=\psi(\pi,\lambda)=0, \quad \varphi'(0,\lambda)=h, \quad \psi'(\pi,\lambda)=1$$

и условиям разрыва (1.3). Для каждого фиксированного x функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Очевидно, что

$$U(\varphi) := \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \quad V(\psi) := \psi(\pi,\lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) := \langle \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda)\rangle. \tag{2.2}$$

В силу равенства (2.1) и теоремы Остроградского–Лиувилля [12, с. 83] $\Delta(\lambda)$ не зависит от x. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи (1.1)–(1.3). Подставляя $x=0$ и $x=\pi$ в (2.2), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = U(\psi). \tag{2.3}$$

Очевидно, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой и имеет не более чем счётное множество нулей $\{\lambda_n\}$.

Лемма 1. *Собственные значения λ_n, $n=1,2,\ldots$, действительные. Собственные функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ вещественнозначные. Все нули функции $\Delta(\lambda)$ простые, т.е.*

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda_n) \neq 0.$$

Мы опускаем доказательство этой леммы, поскольку оно аналогично тем доказательствам, которые приведены в работе [13] для классических операторов Штурма–Лиувилля и в работе [14] для обыкновенных дифференциальных операторов с обобщёнными потенциалами.

Пусть $c_0(x,\lambda)$ и $s_0(x,\lambda)$ – гладкие решения уравнения (1.1) на интервале $(0,\pi)$ при начальных условиях

$$c_0(0,\lambda) = s_0'(0,\lambda) = 1, \quad c_0'(0,\lambda) = s_0(0,\lambda) = 0.$$

Тогда

$$c(x,\lambda)=c_0(x,\lambda),\quad s(x,\lambda)=s_0(x,\lambda),\quad x<\pi/2, \tag{2.4}$$

$$c(x,\lambda)=A_1c_0(x,\lambda)+B_1s_0(x,\lambda),\quad s(x,\lambda)=A_2c_0(x,\lambda)+B_2s_0(x,\lambda),\quad x>\pi/2, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered}A_1=1+\alpha c_0'(\pi/2,\lambda)s_0'(\pi/2,\lambda),\quad B_1=-\alpha[c_0'(\pi/2,\lambda)]^2,\\ A_2=\alpha[s_0'(\pi/2,\lambda)]^2,\quad B_2=1-\alpha c_0'(\pi/2,\lambda)s_0'(\pi/2,\lambda).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Пусть $\lambda=k^2$. Нетрудно убедиться, что функция $c_0(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$c_0(x,\lambda)=\cos(kx)+\int\limits_0^x\frac{\sin(k(x-t))}{k}q(t)c_0(t,\lambda)\,dt. \tag{2.7}$$

Решая уравнение (2.7) методом последовательных приближений, находим, что

$$\begin{gathered}c_0(x,\lambda)=\cos(kx)+\frac{\sin(kx)}{2k}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\cos(kx)}{4k^2}\bigg\{q(x)-q(0)-\frac12\bigg[\int\limits_0^x q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+\\ +O\bigg(\frac{1}{k^3}\exp(|\operatorname{Im}k|x)\bigg),\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}c_0'(x,\lambda)=-k\sin(kx)+\frac{\cos(kx)}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\sin(kx)}{4k}\bigg\{q(x)+q(0)+\frac12\bigg[\int\limits_0^x q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+\\ +O\bigg(\frac{1}{k^3}\exp(|\operatorname{Im}k|x)\bigg).\end{gathered} \tag{2.9}$$

Аналогично, решая соответствующее уравнение для функции $s_0(x,\lambda)$, будем иметь

$$\begin{gathered}s_0(x,\lambda)=\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{\cos(kx)}{2k^2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\sin(kx)}{4k^3}\bigg\{q(x)+q(0)-\frac12\bigg[\int\limits_0^x q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+\\ +O\bigg(\frac{1}{k^4}\exp(|\operatorname{Im}k|x)\bigg),\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}s_0'(x,\lambda)=\cos(kx)+\frac{\sin(kx)}{2k}\int\limits_0^x q(t)\,dt-\frac{\cos(kx)}{4k^2}\bigg\{q(x)-q(0)+\frac12\bigg[\int\limits_0^x q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+\\ +O\bigg(\frac{1}{k^4}\exp(|\operatorname{Im}k|x)\bigg).\end{gathered} \tag{2.11}$$

В силу равенств (2.6) и соотношений (2.8)–(2.11) получаем:

$$A_1=-\frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi)+1+\frac{\alpha}{2}\cos(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+\frac{\alpha}{4}\frac{\sin(k\pi)}{k}\bigg\{q(\pi/2)+\bigg[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+O(1/k^2),$$

$$\begin{gathered}B_1=-\frac{\alpha}{2}k^2(1-\cos(k\pi))+\frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+\frac{\alpha}{4}[q(\pi/2)+q(0)]-\\ -\frac{\alpha}{4}\cos(k\pi)\bigg\{q(\pi/2)+q(0)+\bigg[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt\bigg]^2\bigg\}+O(1/k),\end{gathered}$$

$$A_2 = \frac{\alpha}{2}(1+\cos(k\pi)) + \frac{\alpha}{2}\frac{\sin(k\pi)}{k}\int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt + O(1/k^2),$$

$$B_2 = \frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi) + 1 - \cos(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt + O(1/k).$$

Принимая во внимание (2.4)–(2.11) и то, что $\varphi(x,\lambda) = c(x,\lambda) + hs(x,\lambda)$, имеем:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos(kx) + \left(h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)\frac{\sin(kx)}{k} +$$

$$+\left\{\frac{1}{4}[q(x)-q(0)] - \frac{h}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt - \frac{1}{8}\left[\int\limits_0^x q(t)\,dt\right]^2\right\}\frac{\cos(kx)}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\right),$$

если $x < \pi/2$,

$$\varphi(x,\lambda) = -\frac{\alpha}{2}k[\sin(k(\pi-x)) + \sin(kx)] + \frac{\alpha}{2}\left[\frac{2}{\alpha} + h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\right]\cos(kx) +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left\{h + \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt - \int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\right]\right\}\cos(k(\pi-x)) + \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{2h}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{h}{2}\right)\int\limits_0^x q(t)\,dt +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left[-q(x) + 2q(\pi/2) + q(0) - \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x q(t)\,dt\right]^2\right]\right\}\frac{\sin(kx)}{k} + \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{h}{2}\left[\int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt - \int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left[-q(x) + 2q(\pi/2) + q(0) + \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt - \int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\right]^2\right]\right\}\frac{\sin(k(\pi-x))}{k} +$$

$$+O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\right), \tag{2.12}$$

если $x > \pi/2$.

Из (2.3) и (2.12) следует, что

$$\Delta(\lambda) = -\frac{\alpha}{2}\left(k\sin(k\pi) - \omega_1\cos(k\pi) + \omega_2 - \omega_3\frac{\sin(k\pi)}{k}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\exp(|\mathrm{Im}\,k|\pi)\right), \tag{2.13}$$

где

$$\omega_1 = \frac{2}{\alpha} + h + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt, \quad \omega_2 = -h + \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\pi/2}^{\pi} q(t)\,dt - \int\limits_0^{\pi/2} q(t)\,dt\right],$$

$$\omega_3 = \frac{2}{\alpha}h + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{h}{2}\right)\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt + \frac{1}{4}[-q(\pi) + 2q(\pi/2) + q(0)] - \frac{1}{8}\left[\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt\right]^2. \tag{2.14}$$

Используя представление (2.13), общеизвестным методом (см., например, [15, гл. 12]) получаем, что при $n\to\infty$ выполняется соотношение

$$k_n = n + \frac{1}{\pi n}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2) + \frac{\xi_n}{n^2}, \quad \{\xi_n\}\in l_2.$$

Таким образом, доказана

Лемма 2. *Оператор L имеет счётное множество собственных значений λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ Для них при $n\to\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_n = n^2 + \frac{2}{\pi}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2) + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\}\in l_2. \tag{2.15}$$

3. Формула регуляризованного следа. В дальнейшем под *регуляризованным следом первого порядка* для краевой задачи (1.1)–(1.3), а следовательно, и для задачи (1.4), (1.2), будем понимать сумму ряда

$$S_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{2}{\pi}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2)\right). \tag{3.1}$$

Асимптотика (2.15) показывает, что ряд S_λ сходится.

Цель данной работы заключается в нахождении суммы ряда (3.1).

Теорема. *Пусть $q(x)\in W_1^1(0,\pi)$. Тогда ряд (3.1) сходится, а его сумма равна*

$$S_\lambda = \omega_3 - \frac{2\omega_1}{\pi} - \frac{\omega_1^2}{2},$$

где ω_1 и ω_3 определены равенствами (2.14).

Доказательство. Поскольку $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/2$, то из теоремы Адамара [16, раздел 4.2] в силу соотношения (2.13) вытекает представление

$$\Delta(\lambda) = A\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \tag{3.2}$$

где A – некоторая постоянная, которая будет определена ниже.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Сумму S_λ ряда (3.1) вычислим, сравнив асимптотические выражения из формул (2.13) и (3.2) при $\mu\to\infty$. Вследствие представления (3.2) имеем

$$\Delta(-\mu^2) = \frac{(\lambda_1+\mu^2)\operatorname{sh}(\mu\pi)}{\mu\pi}C\Phi(\mu), \tag{3.3}$$

где

$$C = \frac{A}{\lambda_1}\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}, \quad \Phi(\mu) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right).$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $\Phi(\mu)$ при больших положительных μ. Для этого нам понадобятся следующие формулы (см. [17]):

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n^2-\lambda_n|^j}{(\mu^2+n^2)^j} = O(1/\mu^3), \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+n^2} = \frac{\pi\coth(\pi\mu)}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2} = \frac{\pi}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2} + O(\exp(-2\pi\mu)), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-2\frac{\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2}{\pi}\right)\frac{n^2}{\mu^2+n^2}\leqslant\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+n^2}\right)^{1/2}=O(1/\mu^3)\quad(3.6)$$

при условии $\sup\limits_n|\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi|n^2<\infty$. Вследствие формул (3.4)–(3.6) имеем

$$\ln\Phi(\mu)=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)^j=\frac{2(\omega_1+\omega_2)}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+(2m+1)^2}+$$

$$+\frac{2(\omega_1-\omega_2)}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+(2m)^2}+\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi)-$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi)\frac{n^2}{\mu^2+n^2}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)^j=$$

$$=\frac{\omega_1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}\right)+O(1/\mu^3).$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi(\mu)=1+\frac{\omega_1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}+\frac{\omega_1^2}{2}\right)+O(1/\mu^3),$$

и тогда в силу тождества (3.3) будем иметь

$$\Delta(-\mu^2)=\frac{1}{2}Ce^{\mu\pi}\left\{\mu+\omega_1+\frac{1}{\mu}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}+\frac{\omega_1^2}{2}\right)\right\}+O(1/\mu^2).\quad(3.7)$$

Теперь же изучим асимптотическое поведение функции $\Delta(-\mu^2)=\varphi(\pi,-\mu^2)$ при больших отрицательных $\lambda=-\mu^2$. Тогда, согласно формуле (2.12), справедливо представление

$$\Delta(-\mu^2)=\frac{\alpha e^{\mu\pi}}{4}\left\{\mu+\omega_1+\frac{1}{\mu}\omega_3\right\}+O(1/\mu^2).\quad(3.8)$$

Из соотношений (3.3), (3.7), (3.8), сравнивая коэффициенты, находим, что

$$C=\frac{\alpha}{2},\quad S_\lambda=\omega_3-\frac{2\omega_1}{\pi}-\frac{\omega_1^2}{2}.$$

Теорема доказана.

4. Пример. Краевая задача

$$-y''=\lambda y,\quad x\in(0,\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi),\quad(4.1)$$

с граничными условиями

$$y'(0)=y(\pi)=0\quad(4.2)$$

и в точке $x=\pi/2$ условиями разрыва

$$y'(\pi/2+0)=y'(\pi/2-0)\equiv y'(\pi/2),\quad y(\pi/2+0)-y(\pi/2-0)=\alpha y'(\pi/2)\quad(4.3)$$

является частным случаем краевой задачи (1.1)–(1.3), когда $q(x)=0$, $h=0$, где $\alpha\neq0$ – действительное число. Отметим, что уравнение (4.1) с условиями разрыва (4.3) сводится также к уравнению

$$-y''+\alpha\delta'(x-\pi/2)y=\lambda y,\quad x\in(0,\pi).\quad(4.4)$$

Для этого случая формула (2.15) примет вид

$$\lambda_n = n^2 + \frac{4}{\pi\alpha} + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\} \in l_2.$$

Согласно теореме формула регуляризованного следа первого порядка для краевой задачи (4.1)–(4.3), а следовательно, и для задачи (4.4), (4.2) запишется в виде

$$S_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{4}{\pi\alpha}\right) = -\frac{4}{\pi\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}.$$

Отметим, что регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом вычислен в работе [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
2. *Дикий Л.А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 3 (81). С. 111–143.
3. *Гасымов М.Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 6. С. 1202–1205.
4. *Gesztesy F., Holden H., Simon B., Zhao Z.* A trace formula for multidimensional Schrödinger operators // J. Funct. Anal. 1996. V. 141. № 2. P. 449–465.
5. *Гусейнов Г.Ш., Левитан Б.М.* О формулах следов для операторов Штурма–Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1978. № 1. С. 40–49.
6. *Lax P.D.* Trace formulas for the Schroedinger operator // Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 503–512.
7. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 5 (371). С. 89–156.
8. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 427–442.
9. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735–751.
10. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics. Providence, 2005.
11. *Manafov M.Dzh.* Inverse spectral and inverse nodal problems for Sturm–Liouville equations with point δ'-interaction // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2017. V. 37. № 4. P. 111–119.
12. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York, 1955.
13. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970.
14. *Манафов М.Дж.* Описание области определения обыкновенного дифференциального оператора с обобщенными потенциалами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 706–707.
15. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
16. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
17. *Левитан Б.М.* Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 1 (115). С. 161–165.
18. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 6 (336). С. 155–156.

Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности, г. Баку,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку,
Университет Адыямана,
г. Адыяман, Турция

Поступила в редакцию 20.08.2019 г.
После доработки 05.02.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 590–606

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

© 2021 г. И. В. Качан

Для линейных одномерных однородных стохастических дифференциальных уравнений с независимыми стандартным и дробным броуновскими движениями получены как достаточные, так и необходимые и достаточные условия наличия у них некоторых типов устойчивости.

DOI: 10.31857/S0374064121050022

Введение. В дальнейшем считаем, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы стандартное броуновское движение $W(t)$ и дробное броуновское движение $B^H(t)$ с показателем Хёрста $H \in (1/2, 1)$, определённые при $t \geqslant 0$ и являющиеся независимыми.

Под *одномерным стохастическим дифференциальным уравнением смешанного типа* понимается следующее уравнение:

$$dx(t) = f(t, x(t))\, dt + g(t, x(t))\, dW(t) + \sigma(t, x(t))\, dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – детерминированные функции. Далее будем предполагать, что $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$, $\sigma(t, 0) = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Для того чтобы определить решение уравнения (1), это уравнение рассматривают как интегральное. При этом существует несколько способов определения интегралов по dW и по dB^H [1, гл. 2–5; 2, гл. 1, 2]. В настоящей работе интеграл по dW – стохастический интеграл Ито, а интеграл по dB^H – потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса, введённый в работе [3] и часто называемый потраекторным интегралом Янга. Различная природа этих интегралов обуславливает определённые сложности в исследовании уравнений (1): к примеру, потраекторный интеграл Янга, вообще говоря, не обладает нулевым средним и не является семимартингалом. Теоремы, дающие достаточные условия существования и единственности решений уравнений (1), впервые получены в работе [4] для уравнений без сноса и в работе [5] для уравнений (1) общего вида. В дальнейшем условия существования решений уравнений (1) были значительно ослаблены, и была доказана непрерывная зависимость решений от начальных данных при тех же условиях, которые обеспечивают существование решений [6–11]. Более того, как показывают работы [12–15], привлечение теории грубых траекторий и теории интегрирования Губинелли позволяет исследовать свойства решений уравнений (1) из более широкого класса, чем указано выше, а именно, уравнений, содержащих дробные броуновские движения с показателями Хёрста $H \in (1/3, 1)$.

Устойчивость уравнений Ито (1) и систем таких уравнений (т.е. уравнений, не содержащих дробное броуновское движение, $\sigma \equiv 0$) достаточно хорошо изучена – ей посвящена обширная литература (см., например, [16–18]). В частности, в монографии [17] описан метод исследования устойчивости с помощью функций Ляпунова, опирающийся на свойство марковости решений $x(t)$ уравнений Ито. В свою очередь, для линейных уравнений Ито (1) и систем таких уравнений в монографии [17] получены достаточные условия устойчивости их нулевых решений.

Исследование устойчивости уравнений (1) общего вида представляется крайне сложной задачей. При попытке расширения области применимости метода функций Ляпунова на класс уравнений (1) с коэффициентом $\sigma \not\equiv 0$ возникают существенные трудности: интеграл Янга не обладает нулевым средним и для него не существует оценок, аналогичных оценкам для стохастического интеграла Ито. Кроме того, процесс $B^H(t)$ обладает высокой дисперсией, равной t^{2H}, $2H > 1$, что влечёт за собой определённые ограничения на коэффициент σ и усложняет исследование свойств устойчивости. Вопросам устойчивости достаточно общего класса уравнений (1) посвящены работы [19, 20]. В работе [19] получены условия, обеспечивающие локальную (т.е. на конечном отрезке $[0, T]$) почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения автономного уравнения (1), не содержащего $W(t)$ $(g \equiv 0)$, а также глобальную почти наверное экспоненциальную устойчивость в случае, когда коэффициент при dB^H линеен: $\sigma(x) = \gamma x$, $\gamma \in \mathbb{R}$. В работе [20] найдены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений уравнений (1) с выделенной линейной частью: $f(t, x) = A(t)x + F(t, x)$.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением *линейных однородных* уравнений смешанного типа
$$dx(t) = a(t)x(t)\,dt + b(t)x(t)\,dW(t) + c(t)x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$
где $a\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $c\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ – детерминированные функции. Отдельное внимание будет уделено уравнениям (2), являющимся *стационарными*:
$$dx(t) = ax(t)\,dt + bx(t)\,dW(t) + cx(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$
где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности, p-устойчивости и экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения (2), обобщающие результаты для соответствующих уравнений Ито [17, гл. 6]. Кроме того, получена явная формула, выражающая момент порядка $p > 0$ решения уравнения (2). Результаты данной статьи могут быть использованы в дальнейшем, к примеру, при исследовании устойчивости уравнений, сводящихся к линейным (например, уравнений бернуллиевского типа [21]), а также при исследовании устойчивости нулевого решения уравнения (1) по линейному приближению.

1. Предварительные сведения и обозначения. Символом $\mathbb{E}$ будем обозначать математическое ожидание случайных величин, определённых на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Сокращение "п.н." будем использовать для словосочетания "почти наверное", означающего, что то или иное утверждение справедливо на множестве $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ вероятностной меры 1, т.е. $\mathsf{P}\{\tilde{\Omega}\} = 1$.

Дробным броуновским движением с показателем Хёрста $H \in (0, 1)$ называют центрированный непрерывный гауссовский процесс $B^H(t)$, $t \geqslant 0$, с ковариационной функцией
$$R_H(t, s) := \mathbb{E}B^H(t)B^H(s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geqslant 0.$$

При $H = 1/2$ дробное броуновское движение $B^{1/2}(t)$ является винеровским процессом. Другими словами, процесс $W(t)$ является частным процессом из семейства $B^H(t)$ при $H = 1/2$.

Введём в рассмотрение функцию
$$\phi(t, s) := H(2H - 1)|t - s|^{2H-2}, \quad t, s \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее представление [1, с. 24]:
$$R_H(t, s) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s \phi(u, v)\,dv\,du. \tag{4}$$

Через $L^2_\phi[0, T]$ будем обозначать линейное пространство измеримых функций $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ таких, что конечен интеграл Лебега $\int_0^T \int_0^T f(s)f(u)\phi(s, u)\,ds\,du$. В работе [22] доказано, что на линейном пространстве классов эквивалентности функций из $L^2_\phi[0,T]$ можно определить скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_{L^2_\phi;T} := \int_0^T\int_0^T f(s)g(u)\phi(s,u)\,ds\,du, \quad f,g\in L^2_\phi[0,T],$$

и, соответственно, норму

$$\|f\|_{L^2_\phi;T} := \sqrt{\langle f,f\rangle_{L^2_\phi;T}} = \biggl(\int_0^T\int_0^T f(s)f(u)\phi(s,u)\,ds\,du\biggr)^{1/2}, \quad f\in L^2_\phi[0,T];$$

это линейное пространство с заданным скалярным произведением $\langle\,,\,\rangle_{L^2_\phi;T}$ является предгильбертовым (не обладает свойством полноты).

Через $C^\lambda(0,T)$ обозначим линейное нормированное пространство функций $f\colon[0,T]\to\mathbb{R}$, непрерывных по Гёльдеру с показателем $\lambda\in(0,1]$, норма в котором задаётся равенством

$$\|f\|_{C^\lambda;T} := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)| + \sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^\lambda}.$$

Пространство $C^\lambda(0,T)$ является банаховым.

Важнейшим свойством дробного броуновского движения $B^H(t)$, используемым при построении потраекторных интегралов, является свойство гёльдеровости его траекторий: для любого $\varepsilon\in(0,H)$ траектории процесса $B^H(t)$, $t\in[0,T]$, п.н. принадлежат классу $C^{H-\varepsilon}(0,T)$.

Пусть $\alpha\in(0,1/2)$. Через $W_0^{\alpha,1}(0,T)$ будем обозначать пространство измеримых функций $f\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\alpha,1;T} := \int_0^T\frac{|f(s)|}{s^\alpha}\,ds + \int_0^T\int_0^s\frac{|f(s)-f(u)|}{(s-u)^{\alpha+1}}\,du\,ds < \infty.$$

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\|f\|_{\alpha,T} := \|f\|_{\alpha,1;T}$.

Через $f|_Y$ обозначаем сужение функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ на множество Y, $Y\subset X\subset\mathbb{R}$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) (*в сильном смысле*) будем называть процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порождённым процессами $W(t)$ и $B^H(t)$, и обладающий свойствами:

1) существует $\alpha>1-H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гёльдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t\geqslant 0$ п.н. выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))\,ds + \int_0^t g(s,x(s))\,dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))\,dB^H(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B^H(t)$ – потраекторный интеграл Янга [5].

Замечание 1. Зачастую интеграл по процессу $B^H(t)$ определяется как обобщённый интеграл Стилтьеса с использованием дробных производных подынтегральных процессов [23]. Однако, согласно замечанию 4.1 из [23], обобщённый интеграл Стилтьеса $\int_0^T f(t)\,dg(t)$ совпадает с обычным интегралом Римана–Стилтьеса (интегралом Янга) в случае, если $f\in C^\lambda(0,T)$, $g\in C^\mu(0,T)$ и $\lambda+\mu>1$.

Далее введём определения устойчивости, используемые в работе.

Определение 2. Нулевое решение уравнения (1) называется *устойчивым по вероятности,* если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любого $t > 0$ и любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо неравенство
$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2.$$

Определение 3. Нулевое решение уравнения (1) называют *асимптотически устойчивым по вероятности,* если оно устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо соотношение
$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Определение 4. Нулевое решение уравнения (1) называется *p-устойчивым* $(p > 0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $t > 0$ и любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо неравенство
$$\mathbb{E}|x(t)|^p < \varepsilon.$$

Определение 5. Нулевое решение уравнения (1) называют *асимптотически p-устойчивым* $(p > 0)$, если оно p-устойчиво и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо соотношение
$$\mathbb{E}|x(t)|^p \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Определение 6. Нулевое решение уравнения (1) называют *экспоненциально p-устойчивым* $(p > 0)$, если существуют постоянные $A = A(p) > 0$ и $\alpha = \alpha(p) > 0$ такие, что для всех $t > 0$
$$\mathbb{E}|x(t)|^p \leqslant A\mathbb{E}|x(0)|e^{-\alpha t}.$$

Как показано в работе [21], решение линейного уравнения (2) выражается формулой
$$x(t) = x(0)\exp\biggl(\int\limits_0^t \biggl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\biggr)\,ds + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\biggr), \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$
которая, впрочем, может быть получена применением формулы Ито для процессов со стандартным и дробным броуновским движением [2, с. 184] к процессу
$$y(t) = y(0) + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)$$
и функции
$$F(t,y) = \exp\biggl(\int\limits_0^t \biggl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\biggr)\,ds + y\biggr).$$

Для удобства введём отдельное обозначение для процесса, стоящего в показателе экспоненты в формуле (5):
$$\nu(t) := \int\limits_0^t \biggl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\biggr)\,ds + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s), \quad t \geqslant 0.$$
Тогда формула решения (5) примет вид $x(t) = x(0)e^{\nu(t)}$.

2. Предположения. Далее всюду будем предполагать выполнение следующих условий.

П1. Процессы $W(t)$ и $B^{(H)}(t)$, $t \geqslant 0$, независимы.

П2. Случайная величина $x(0)$ $\mathcal{F}_0$-измерима и не зависит от $W(t)$ и $B^{(H)}(t)$.

П3. Функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$.

П4. Существует $\lambda > 1 - H$ такое, что функция $c(t)|_{[0,T]}$ принадлежит классу $C^{\lambda}(0,T)$ для любого $T > 0$.

Отметим, что условия П2–П4 гарантируют существование решения уравнения (5) и его представление в виде (5).

3. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем будут полезны несколько вспомогательных утверждений.

В следующих двух леммах нам потребуется рассматривать произвольную последовательность

$$\mathcal{P}_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N_n} \in [0,t] : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_n} = t\} \tag{6}$$

разбиений отрезка $[0,t]$ с диаметрами

$$|\mathcal{P}_n| = \max\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, N_n - 1}\},$$

стремящимися к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 1. *Если процессы $W(t)$ и $B^H(t)$ независимы, то стохастический интеграл Ито $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ и потраекторный интеграл Янга $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ также независимы.*

Доказательство. Рассмотрим интегральные суммы

$$I_n^{(W)} = \sum_{i=0}^{N_n-1} b(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad \text{и} \quad I_n^{(B)} = \sum_{i=0}^{N_n-1} c(t_i)(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i))$$

для интегралов Ито $I^{(W)} = \int_0^t b(s)\,dW(s)$ и Янга $I^{(B)} = \int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ соответственно вдоль разбиений (6). Как известно, $I_n^{(W)}$ стремится к $I^{(W)}$ по вероятности, а $I_n^{(B)}$ стремится к $I^{(B)}$ п.н. при $n \to \infty$.

Очевидно, что суммы $I_n^{(W)}$ и $I_n^{(B)}$ являются линейными комбинациями компонент векторов $W_{\mathcal{P}_n} = (W(t_0), \ldots, W(t_{N_n}))$ и $B_{\mathcal{P}_n} = (B^H(t_0), \ldots, B^H(t_{N_n}))$. Из независимости процессов $W(t)$ и $B^H(t)$ следует независимость векторов $W_{\mathcal{P}_n}$ и $B_{\mathcal{P}_n}$, откуда следует независимость интегральных сумм $I_n^{(W)}$ и $I_n^{(B)}$. Значит, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$F_{(I_n^{(W)}, I_n^{(B)})}(x_1, x_2) = F_{I_n^{(W)}}(x_1) F_{I_n^{(B)}}(x_2),$$

в котором $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ. Так как вектор $(I_n^{(W)}, I_n^{(B)})$ стремится к вектору $(I^{(W)}, I^{(B)})$ по вероятности при $n \to \infty$ и сходимость по вероятности влечёт за собой сходимость по распределению, то, переходя к пределу в последнем равенстве, будем иметь

$$F_{(I^{(W)}, I^{(B)})}(x_1, x_2) = F_{I^{(W)}}(x_1) F_{I^{(B)}}(x_2),$$

откуда следует независимость интегралов $I^{(W)}$ и $I^{(B)}$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть $c(s) \not\equiv 0$ – непрерывная при $s \geqslant 0$ функция и $c|_{[0,t]} \in L_\phi^2[0,t]$ для некоторого фиксированного $t > 0$. Тогда интеграл Янга $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ – нормально распределённая случайная величина с нулевым средним $\mu(t) = 0$ и дисперсией*

$$\sigma^2(t) = \|c\|^2_{L^2_\phi;t} = \int_0^t \int_0^t c(s)c(u)\phi(s,u)\,ds\,du.$$

Доказательство. Обозначим $S := \|c\|^2_{L^2_\phi;t} > 0$. Рассмотрим интегральные суммы вдоль разбиений (6) с промежуточными точками $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N_n - 1}$, возникающими при применении к интегралам

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi(u,v)\,du\,dv = \phi(\tau_i,\tau_j)(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)$$

теоремы о среднем:

$$I_n := \sum_{i=0}^{N_n-1} c(\tau_i)(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t c(s)\,dB^H(s) \quad (\text{п.н.}).$$

Так как I_n есть линейная комбинация значений $B^H(t)$, $B^H(\tau_i)$, $i = \overline{0, N_n - 1}$, гауссовского процесса $B^H(t)$, то $I_n = I_n(\omega)$ – нормально распределённая случайная величина для любого n. Её среднее равно нулю:

$$\mu_n = \mathbb{E}I_n(t) = \sum_{i=0}^{N_n-1} c(\tau_i)(\mathbb{E}B^H(t_{i+1}) - \mathbb{E}B^H(t_i)) = 0,$$

а дисперсия вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}I_n^2(t) = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\mathbb{E}(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i))(B^H(t_{j+1}) - B^H(t_j)) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\big(R_H(t_{i+1},t_{j+1}) - R_H(t_{i+1},t_j) - R_H(t_i,t_{j+1}) + R_H(t_i,t_j)\big),$$

где $R_H(u,v)$ – ковариационная функция дробного броуновского движения $B^H(t)$. Применяя представление (4) и теорему о среднем, получаем

$$\sigma_n^2 = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi(u,v)\,dv\,du = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\phi(\tau_i,\tau_j)(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j).$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2 = S$.

Осталось доказать, что предел п.н. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ – нормально распределённая случайная величина. Сходимость п. н. влечёт за собой сходимость по распределению, поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$F_I(x) = \lim_{n\to\infty} F_{I_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2\sigma_n^2)}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2\sigma_n^2)}\,dy,$$

где $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ. Рассмотрим функцию $f(y,\tau) = e^{-y^2/(2\tau)}$, $y \in (-\infty, x)$, $\tau \in [S/2, 3S/2]$. Очевидно, $f(y,\tau) \leqslant f(y, 3S/2)$ для любого y и

$$\int_{-\infty}^{x} f(y, 3S/2)\,dy \leqslant \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{3S}{2}},$$

поэтому интеграл $\int_{-\infty}^{x} f(y,\tau)\,dy$ сходится равномерно по $\tau \in [S/2, 3S/2]$ при любом фиксированном x. С другой стороны, для любого y выполняется неравенство

$$f'_\tau(y,\tau) = \frac{y^2}{2\tau^2} e^{-y^2/(2\tau)} \leqslant \frac{2}{Se},$$

поскольку $\max\limits_{z\in\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2} = 1/e$. Значит, из формулы конечных приращений следует неравенство

$$|f(y,\tau) - f(y,S)| \leqslant 2|\tau - S|/(Se)$$

для любого y и $\tau \in [S/2, 3S/2]$, откуда вытекает, что $f(y,\sigma_n^2) \to f(y,S)$ равномерно относительно y при $n \to \infty$. Таким образом, переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$F_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2S)}\,dy,$$

т.е. случайная величина I подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $(\mu, \sigma^2) = (0, S)$, что и требовалось доказать.

Следующая лемма доказана в монографии [17, лемма 6.1].

Лемма 2. *Стохастический интеграл Ито* $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ *п.н. представим в виде*

$$\int\limits_0^t b(s)\,dW(s) = \widetilde{W}(\tau(t))$$

для всех $t \geqslant 0$, *где* $\widetilde{W}(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, *– некоторое другое стандартное броуновское движение (винеровский процесс), а* $\tau(t) = \int_0^t b^2(s)\,ds$.

Лемма 3. *Пусть для некоторых* $t > 0$ *и* $\alpha \in (1-H, 1/2)$ *имеет место включение* $c|_{[0,t]} \in \in W_0^{\alpha,1}(0,t)$. *Тогда при любом* $\varepsilon \in \big(0, \alpha - (1-H)\big)$ *справедливы следующие утверждения.*

1) Существует константа $K = K_{H,\varepsilon,\alpha}$, *зависящая лишь от* ε, α *и* H, *такая, что п.н. выполняется оценка*

$$\left| \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) \right| \leqslant K\eta_{H,\varepsilon,t}(\omega)\|c\|_{\alpha,t} t^{H-\varepsilon+\alpha-1} =: C^H_{\varepsilon,\alpha}(t,\omega), \tag{7}$$

где $\eta_{H,\varepsilon,t}(\omega)$ *при фиксированном* t *– случайная величина, для которой п.н. имеет место неравенство* $|B^H(s) - B^H(u)| \leqslant \eta_{H,\varepsilon,t}|s-u|^{H-\varepsilon}$ *для всех* $s, u \in [0,t]$ *и которая задаётся равенством*

$$\eta_{H,\varepsilon,t} := \gamma_{H,\varepsilon}\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{|B^H(s) - B^H(u)|^{2\varepsilon}}{|s-u|^{2H/\varepsilon}}\,ds\,du\Bigg)^{2/\varepsilon}$$

с некоторой константой $\gamma_{H,\varepsilon}$, *зависящей лишь от* H *и* ε.

2) Для случайного процесса $C^H_{\varepsilon,\alpha}(t,\omega)$, *определённого правой частью неравенства (7), существует константа* $L = L_{H,\varepsilon,\alpha}$, *зависящая лишь от* ε, α *и* H, *такая, что для любого числа* $M > 0$ *справедлива оценка*

$$\mathsf{P}\{C^H_{\varepsilon,\alpha}(t) \leqslant M\} \geqslant 1 - L\bigg(\frac{\|c\|_{\alpha,t} t^{H+\alpha-1}}{M}\bigg)^{2/\varepsilon}. \tag{8}$$

Доказательство. Оценка (7) непосредственно следует из результатов работы [23]. В самом деле, во-первых, согласно [23, с. 74] п.н. справедливо неравенство

$$\Bigl|\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\Bigr| \leqslant G_{\alpha,t}(\omega)\|c\|_{\alpha,t},$$

в котором

$$G_{\alpha,t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{0<s<u<t}|D_{u^-}^{1-\alpha}B_{u^-}^H(s)|,$$

здесь Γ – гамма-функция, $D_{u^-}^{1-\alpha}$ – оператор левосторонней дробной производной Вейля порядка $1-\alpha$ [23, с. 59–60], а $B_{u^-}^H(s) = (B^H(s) - B^H(u-))1_{(0,u)}(s)$, где $1_{(0,u)}(s)$ – индикаторная функция интервала $(0,u)$. Во-вторых, из оценки, полученной в [23, лемма 7.5], следует неравенство

$$G_{\alpha,t} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\biggl(1+\frac{1}{H-\varepsilon+\alpha-1}\biggr)\eta_{H,\varepsilon,t}t^{H-\varepsilon+\alpha-1},$$

из которого вытекает оценка (7).

Оценка (8) получается применением оценки из [23, лемма 7.4] и неравенства Маркова. Из доказательства леммы 7.4 в [23, с. 77] следует справедливость неравенства $\mathbb{E}(\eta_{H,\varepsilon,t})^q \leqslant \gamma_{H,\varepsilon}^q\tilde{c}_{\varepsilon,q}t^{q\varepsilon}$ для любого $q \geqslant 2/\varepsilon$ и некоторой константы $\tilde{c}_{\varepsilon,q}$, зависящей от ε и q. Полагая $q = 2/\varepsilon$, получаем оценку $\mathbb{E}(\eta_{H,\varepsilon,t})^{2/\varepsilon} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2$ для некоторой константы $L_{H,\varepsilon}$, зависящей от ε и H. Применяя неравенство Маркова, для любого $M>0$ приходим к неравенству

$$\mathsf{P}\{(\eta_{H,\varepsilon,t})^{2/\varepsilon} > M\} \leqslant \frac{L_{H,\varepsilon}t^2}{M},$$

равносильному неравенству $\mathsf{P}\{\eta_{H,\varepsilon,t} > M\} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2/M^{2/\varepsilon}$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\mathsf{P}\{C_{\varepsilon,\alpha}^H(t) > M\} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2\biggl(\frac{K\|c\|_{\alpha,t}t^{H-\varepsilon+\alpha-1}}{M}\biggr)^{2/\varepsilon} = L\biggl(\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{M}\biggr)^{2/\varepsilon},$$

где $L = L_{H,\varepsilon}K^{2/\varepsilon}$ – константа, зависящая от ε, α и H. Лемма доказана.

4. Устойчивость линейных уравнений. Обозначим

$$A(t) := \int\limits_0^t a(s)\,ds, \quad \tau(t) := \int\limits_0^t b^2(s)\,ds, \quad A_\tau(t) := A(t) - \frac{1}{2}\tau(t), \quad \varkappa(t) := \sqrt{2\tau(t)\ln\ln\tau(t)}. \tag{9}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2) даёт

Теорема 1. *Пусть существует $\alpha \in (1-H, 1/2)$ такое, что $c|_{[0,T]} \in W_0^{\alpha,1}(0,T)$ для любого $T>0$, и $A(t)$, $\tau(t)$, $A_\tau(t)$ и $\varkappa(t)$ – функции, определённые равенствами (9). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\tau(\infty) < \infty$ и выполнены условия

$$A(\infty) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t) = 0,$$

то уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение;

2) если $\tau(\infty) = \infty$ и выполнены условия

$$\varlimsup_{t\to\infty} A_\tau(t)/\varkappa(t) < -1, \quad \lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/\varkappa(t) = 0,$$

то уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и решение $x(t) = x(0)e^{\nu(t)}$ уравнения (2) с начальным значением $x(0)$, п.н. удовлетворяющим неравенству $|x(0)| < \delta < \varepsilon_1$. Рассмотрим вероятность

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathsf{P}\{\nu(t) > \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\} = 1 - \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\}.$$

Достаточно доказать, что в условиях теоремы $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} = 0$. Действительно, с одной стороны, в таком случае будет доказано, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} = 0$, так как

$$\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\} \geqslant \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\}.$$

С другой стороны, на любом отрезке $t \in [0,T]$ справедливо неравенство $\mathbb{E}|\nu(t)| \leqslant C_T < \infty$ с некоторой константой C_T, зависящей от T, поскольку для любого $t \in [0,T]$ выполнены неравенства

$$|A(t)| \leqslant \int\limits_0^T |a(s)|\,ds, \quad \mathbb{E}\biggl|\int\limits_0^t b(s)\,dW(s)\biggr| \leqslant (\tau(T))^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\biggl|\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\biggr| \leqslant K\mathbb{E}|\eta_{H,\varepsilon,T}|\|c\|_{\alpha,T}T^{H-\varepsilon+\alpha-1} < \infty$$

(ввиду леммы 3 и [23, лемма 7.4]). Тогда применение неравенства Маркова даёт оценку

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} \leqslant \mathsf{P}\{|\nu(t)| > \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \leqslant C_T/\ln(\varepsilon_1/\delta),$$

и за счёт выбора достаточно малого δ можно добиться того, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше любого наперёд заданного $\varepsilon_2 > 0$.

Рассмотрим отдельно два случая, указанных в условии теоремы.

Случай 1. Пусть $\tau(\infty) = \tau_0 < \infty$ и выполнены условия утверждения 1) теоремы. Введём обозначения

$$\nu_W(t) = \frac{1}{2}A(t) - \frac{1}{2}\tau(t) + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s), \quad \nu_B(t) = \frac{1}{2}A(t) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s).$$

В данных обозначениях $\nu(t) = \nu_W(t) + \nu_B(t)$. Рассмотрим события

$$\mathcal{A}_t^W = \biggl\{\nu_W(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta)\biggr\} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_t^B = \biggl\{\nu_B(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta)\biggr\}.$$

Несложно видеть, что $\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W \bigcap \mathcal{A}_t^B\} = \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}$, поскольку процессы $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ и $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ независимы.

Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}$. Пусть

$$M(t) = \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta) - \frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}\tau(t).$$

В силу леммы 2 и свойств винеровского процесса будем иметь

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\} = \mathsf{P}\{\widetilde{W}(\tau(t)) \leqslant M(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(t)}}\int\limits_{-\infty}^{M(t)} e^{-s^2/(2\tau(t))}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{M(t)/\sqrt{\tau(t)}} e^{-s^2/2}\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{} 1,$$

поскольку $A(\infty)=-\infty$, $\tau(\infty)=\tau_0$ и, соответственно,

$$\lim_{t\to\infty} M(t)/\sqrt{\tau(t)}=\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}\lim_{t\to\infty} M(t)=\infty.$$

Теперь оценим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}$, используя лемму 3:

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}\geqslant\mathsf{P}\left\{C_{\varepsilon,\alpha}^H(t)\leqslant\frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta)-\frac{1}{2}A(t)\right\}\geqslant 1-L\biggl(\frac{2\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{\ln(\varepsilon_1/\delta)-A(t)}\biggr)^{2/\varepsilon}\xrightarrow[t\to\infty]{}1,$$

так как

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t)=0.$$

Таким образом, $\mathsf{P}\{\nu(t)\leqslant\ln(\varepsilon_1/\delta)\}\geqslant\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}\xrightarrow[t\to\infty]{}1$, что и требовалось.

Случай 2. Пусть $\tau(\infty)=\infty$ и выполнены условия утверждения 2) теоремы. Введём обозначение для функции из условия утверждения 2):

$$J(t):=A_\tau(t)/\varkappa(t),\quad \varlimsup_{t\to\infty} J(t)<-1.$$

Также для краткости обозначим

$$\xi(t):=A_\tau(t)+\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s).$$

По лемме 2 имеем

$$\widetilde{W}(\tau(t))=\int\limits_0^t b(s)\,dW(s)$$

п.н., отсюда $\nu(t)=\widetilde{W}(\tau(t))+\xi(t)$ п.н. и, следовательно,

$$\mathsf{P}\{\nu(t)\leqslant\ln(\varepsilon_1/\delta)\}=\mathsf{P}\left\{\frac{\nu(t)}{\varkappa(t)}\leqslant\frac{\ln(\varepsilon_1/\delta)}{\varkappa(t)}\right\}\geqslant\mathsf{P}\left\{\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{\varkappa(t)}+\frac{\xi(t)}{\varkappa(t)}\leqslant 0\right\}=:\mathsf{P}\{\mathcal{A}\}.$$

Выберем некоторое достаточно малое положительное $\widetilde{\varepsilon}\in(0,-1-\varlimsup_{t\to\infty}J(t))$ и рассмотрим события

$$\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}=\left\{\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{\varkappa(t)}\leqslant 1+\widetilde{\varepsilon}\right\}\quad\text{и}\quad\mathcal{A}_t^{\xi}=\left\{\frac{\xi(t)}{\varkappa(t)}\leqslant -1-\widetilde{\varepsilon}\right\}.$$

Как и в случае 1), получаем $\mathsf{P}\{\mathcal{A}\}\geqslant\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\bigcap\mathcal{A}_t^{\xi}\}=\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\xi}\}$.

Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}$. Для краткости введём обозначение

$$\zeta(\tau):=\sup_{s\geqslant\tau}\widetilde{W}(s)/\sqrt{2s\ln\ln s}.$$

По закону повторного логарифма $\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(\tau(t))=\lim\limits_{\tau\to\infty}\zeta(\tau)=1$ п.н. Кроме того, функция $\tau(t)$ возрастает, а функция $\zeta(\tau)$ убывает по τ при каждом фиксированном $\omega\in\Omega$. Значит, для любых $t_1,t_2>0$, $t_1<t_2$, справедливо включение $\{\zeta(\tau(t_1))\leqslant 1+\widetilde{\varepsilon}\}\subset\{\zeta(\tau(t_2))\leqslant 1+\widetilde{\varepsilon}\}$, откуда по аксиоме непрерывности

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}\geqslant\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\zeta(\tau(t))\leqslant 1+\widetilde{\varepsilon}\}\geqslant\mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty}\zeta(\tau(t))\leqslant 1+\widetilde{\varepsilon}\}=1.$$

Теперь оценим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\}$ для достаточно больших t, применяя лемму 3. Имеем

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} = \mathsf{P}\left\{\frac{1}{\varkappa(t)}\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) \leqslant -1-\widetilde{\varepsilon}-J(t)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\frac{C^H_{\varepsilon,\alpha}(t)}{\varkappa(t)} \leqslant -1-\widetilde{\varepsilon}-\sup_{s\geqslant t} J(s)\right\} \geqslant 1 - L\biggl(\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{(-1-\widetilde{\varepsilon}-\sup\limits_{s\geqslant t} J(s))\varkappa(t)}\biggr)^{2/\varepsilon}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем

$$\varliminf_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} \geqslant 1 - L\biggl(\frac{1}{(-1-\widetilde{\varepsilon}-\varlimsup\limits_{t\to\infty} J(s))}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{\varkappa(t)}\biggr)^{2/\varepsilon} = 1.$$

Таким образом $\mathsf{P}\{\nu(t)\leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для уравнения (3) любое из условий:*

1) $b=0,\ \ a<0,\ \ c$ *– любое;*

2) $b\neq 0,\ \ a<b^2/2,\ \ c=0,$

является достаточным для асимптотической устойчивости по вероятности его нулевого решения.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы 1 с учётом того, что в случае постоянной функции $c(t)\equiv c$ выражение $\|c\|_{\alpha,t}$ равно $|c|t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

Следующая теорема является критерием асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2) в предположении, что коэффициент $b(t)$ отличен от тождественно нулевого. Обозначим

$$C_\phi(t) = \|c\|^2_{L^2_\phi;t} = \int\limits_0^t\int\limits_0^t c(s)c(u)\phi(s,u)\,ds\,du. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $b\not\equiv 0$ *и* $c|_{[0,T]}\in L^2_\phi[0,T]$ *для любого* $T>0$. *Уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_\tau(t)}{\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}} = -\infty,$$

где $A_\tau(t)$, $\tau(t)$ *и* $C_\phi(t)$ *– функции, определённые в равенствах (9) и (10).*

Доказательство. Пусть $c\not\equiv 0$. Из лемм 1, 2 и предложения 1 следует, что интегралы Ито $I_W(t) = \int_0^t b(s)\,dW(s)$ и Янга $I_B(t) = \int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ при фиксированном t – независимые, нормально распределённые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями $\tau(t)$ и $C_\phi(t)$ соответственно. Следовательно, их сумма – также нормально распределённая случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\tau(t)+C_\phi(t)$, откуда для любого $M>0$ выводим равенство

$$\mathsf{P}\{\nu(t)>M\} = \mathsf{P}\{I_W(t)+I_B(t) > M - A_\tau(t)\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau(t)+C_\phi(t))}}\int\limits_{M-A_\tau(t)}^{\infty} e^{-s^2/(2(\tau(t)+C_\phi(t)))}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{M(t)}^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds,$$

$$M(t) = \frac{M-A_\tau(t)}{\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}}. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что формула (11) верна и в случае $c\equiv 0$. Условие $b\not\equiv 0$ гарантирует, что при достаточно больших t знаменатель дроби $M(t)$ будет отличен от нуля.

Далее, асимптотическая устойчивость равносильна соотношению $\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\nu(t)>M\}=0$, которое равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$. Заметим, что при достаточно больших t выражение $M/\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}$ ограничено: для достаточно малого $\epsilon>0$ оно принадлежит отрезку

$$\left[M\Big/\sqrt{\lim_{t\to\infty}\tau(t)+\overline{\lim_{t\to\infty}}\,C_\phi(t)+\epsilon},\,M\Big/\sqrt{\lim_{t\to\infty}\tau(t)+\underline{\lim_{t\to\infty}}\,C_\phi(t)-\epsilon}\,\right],$$

который, впрочем, может вырождаться в точку 0 в случае, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)$ или $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,C_\phi(t)$ равен бесконечности. Из ограниченности функции $M/\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}$ следует равносильность соотношений $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty}A_\tau(t)/\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}=-\infty$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Для уравнения (3) необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по вероятности его нулевого решения является неравенство* $a<b^2/2$.

Доказательство. Если коэффициенты уравнения постоянны, то справедливы равенства $\nu(t)=(a-b^2/2)t+bW(t)+cB^H(t)$ и $C_\phi(t)=c^2R_H(t,t)=c^2t^{2H}$. При $b=c=0$ утверждение теоремы очевидно.

Если $b\neq 0$ и $c=0$, то из формулы (11) следует эквивалентность

$$M(t)\sim -(a-b^2/2)t^{1/2}/|b|$$

при $t\to\infty$. Если же $c\neq 0$, то из формулы (11) следует эквивалентность

$$M(t)\sim -(a-b^2/2)t^{1-H}/|c|$$

при $t\to\infty$. Таким образом, для асимптотической устойчивости по вероятности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a<b^2/2$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Из последнего утверждения следует, что слагаемое $cx(t)\,dB^H(t)$ в уравнении (3) не влияет на асимптотическую устойчивость по вероятности его нулевого решения.

В следующем предложении получена явная формула для момента порядка $p>0$ решения уравнения (2).

Предложение 2. *Пусть* $c|_{[0,t]}\in L^2_\phi[0,t]$ *для некоторого* $t>0$. *Тогда для любого* $p>0$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}|x(t)|^p=\mathbb{E}|x(0)|^p\exp\biggl(p\int\limits_0^t\biggl(a(s)+\frac{p-1}{2}b^2(s)+pH(2H-1)\int\limits_0^s(s-u)^{2H-2}c(s)c(u)\,du\biggr)\,ds\biggr),$$

где $x(t)$ *– решение уравнения (2) с начальным значением* $x(0)$.

Доказательство. Из представления (5) решения уравнения (2), независимости $x(0)$, $W(t)$, $B^H(t)$ и из леммы 1 следует равенство

$$\mathbb{E}|x(t)|^p=\mathbb{E}|x(0)|^p\exp\biggl(p\int\limits_0^t\biggl(a(s)-\frac{1}{2}b^2(s)\biggr)\,ds\biggr)\times$$

$$\times\,\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pb(s)\,dW(s)\biggr)\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pc(s)\,dB^H(s)\biggr). \tag{12}$$

Вычислим $u(t)=\mathbb{E}\exp(\int_0^t pb(s)\,dW(s))$. Из представления (5) следует, что процесс $\eta(t)=$ $=\exp(\int_0^t pb(s)\,dW(s))$ является решением линейного уравнения

$$\eta(t)=1+\frac{p^2}{2}\int\limits_0^t b^2(s)\eta(s)\,ds+p\int\limits_0^t b(s)\eta(s)\,dW(s).$$

Возьмём математическое ожидание от обеих частей последнего равенства. Воспользовавшись теоремой Фубини и тем, что среднее интеграла Ито равно нулю, получаем

$$u(t) = 1 + \frac{p^2}{2}\int\limits_0^t b^2(s)u(s)\,ds.$$

Дифференцируя последнее равенство, приходим к уравнению

$$u'(t) - \frac{p^2}{2}b^2(t)u(t) = 0$$

с начальным условием $u(0) = \mathbb{E}e^{y(0)} = 1$. Его решение

$$\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pb(s)\,dW(s)\biggr) = u(t) = \exp\biggl(\frac{p^2}{2}\tau(t)\biggr). \tag{13}$$

Осталось вычислить $v(t) = \mathbb{E}\exp(\int_0^t pc(s)\,dB^H(s))$. Для краткости введём обозначения: $y(t) = \int_0^t pc(s)\,dB^H(s)$, $z(t) = e^{y(t)}$, тогда $v(t) = \mathbb{E}z(t)$. Из представления решения (5) следует, что процесс $z(t)$ является решением линейного уравнения

$$z(t) = 1 + p\int\limits_0^t c(s)z(s)\,dB^H(s). \tag{14}$$

Согласно [1, разд. 5.1] потраекторный интеграл Янга $\int_0^t c(s)z(s)\,dB^H(s)$ совпадает с симметрическим интегралом $\int_0^t c(s)z(s)d^\circ B^H(s)$. Согласно [1, теорема 5.5.1] симметрический интеграл может быть выражен через интеграл Вика–Ито–Скорохода $\int_0^t c(s)z(s)\diamond dB^H(s)$ по формуле

$$\int\limits_0^t c(s)z(s)d^\circ B^H(s) = \int\limits_0^t c(s)z(s)\diamond dB^H(s) + \int\limits_0^t D_s^\phi(c(s)z(s))\,ds$$

(п.н.), где D_t^ϕ – оператор ϕ-производной [1, разд. 3.5] (обобщённой производной по ω). Поскольку интеграл Вика–Ито–Скорохода имеет нулевое среднее, то, взяв математическое ожидание от обеих частей равенства (14), получим

$$v(t) = 1 + p\mathbb{E}\int\limits_0^t D_s^\phi(c(s)z(s))\,ds.$$

Вычислим ϕ-производную $D_s^\phi(c(s)z(s))$. Используя связь интеграла Янга, симметрического интеграла и интеграла Вика–Ито–Скорохода, нетрудно заметить, что

$$y(t) = p\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) = p\int\limits_0^t c(s)d^\circ B^H(s) = p\int\limits_0^t c(s)\diamond dB^H(s),$$

поскольку функция $c(s)$ не зависит от ω и, соответственно, $D_s^\phi(c(s)) = 0$. Следовательно, $z(t) = F(\int_0^t c(s)\diamond dB^H(s))$, где $F(y) = e^{py}$. Согласно свойствам ϕ-производной [1, раздел 3.5] будем иметь

$$D_t^\phi(c(t)z(t)) = c(t)D_t^\phi F(y(t)) = c(t)F'(y(t)) = c(t)pe^{y(t)}D_t^\phi\biggl(\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(s)1_{[0,t]}(s)\diamond dB^H(s)\biggr) =$$

$$= pc(t)z(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(s,t)c(s)1_{[0,t]}(s)\,ds = pH(2H-1)c(t)z(t)\int\limits_0^t (t-s)^{2H-2}c(s)\,ds.$$

Таким образом, используя последнее равенство и применяя теорему Фубини к интегралу (14), получаем интегральное уравнение для нахождения функции $v(t)$:

$$v(t) = 1 + p^2H(2H-1)\int\limits_0^t\biggl(c(s)\int\limits_0^s (s-u)^{2H-2}c(u)\,du\biggr)v(s)\,ds.$$

Дифференцируя последнее равенство, приходим к уравнению

$$v'(t) - p^2H(2H-1)c(t)\biggl(\int\limits_0^t (t-s)^{2H-2}c(s)\,ds\biggr)v(t) = 0$$

с начальным условием $v(0) = \mathbb{E}e^{y(0)} = 1$. Его решение:

$$\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pc(s)\,dB^H(s)\biggr) = v(t) = \exp\biggl(p^2H(2H-1)\int\limits_0^t c(s)\biggl(\int\limits_0^s (s-u)^{2H-2}c(u)\,du\biggr)\,ds\biggr). \quad (15)$$

Теперь из равенств (12), (13), (15) вытекает требуемое. Предложение доказано.

Обозначим

$$F_p(t) := a(t) + \frac{p-1}{2}b^2(t) + pH(2H-1)\int\limits_0^t (t-u)^{2H-2}c(t)c(u)\,du, \quad I_p(t) := \int\limits_0^t F_p(s)\,ds. \quad (16)$$

Из предложения 2 очевидным образом следует теорема о p-устойчивости нулевого решения уравнения (2).

Теорема 3. *Пусть* $c|_{[0,T]} \in L^2_\phi[0,T]$ *для любого* $T > 0$, *и* $F_p(t)$, $I_p(t)$ *– функции, определённые равенствами (16). Тогда справедливы утверждения.*

1. Уравнение (2) имеет p*-устойчивое нулевое решение тогда и только тогда, когда* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} I_p(t) < \infty$.

2. Уравнение (2) имеет асимптотически p*-устойчивое нулевое решение тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} I_p(t) = -\infty$.

3. Уравнение (2) имеет экспоненциально p*-устойчивое нулевое решение, если*

$$\sup_{t>0} F_p(t) < 0.$$

Следствие 3. *Для уравнения (3) имеют место следующие утверждения:*

1) необходимым и достаточным условием p*-устойчивости его нулевого решения является выполнение соотношений* $c = 0$ *и* $a \leqslant (1-p)b^2/2$;

2) необходимым и достаточным условием экспоненциальной p*-устойчивости его нулевого решения является выполнение соотношений* $c = 0$ *и* $a < (1-p)b^2/2$.

В частности, нулевое решение не является p*-устойчивым ни при каком* $c \neq 0$.

Доказательство. Если коэффициенты уравнения (2) постоянны, то выражение для $I_p(t)$ принимает вид

$$I_p(t) = \int\limits_0^t\biggl(a + \frac{p-1}{2}b^2 + pHc^2s^{2H-1}\biggr)\,ds = \biggl(a + \frac{p-1}{2}b^2 + \frac{p}{2}c^2t^{2H-1}\biggr)t.$$

Если $c \neq 0$, то имеет место эквивалентность $I_p(t) \sim pc^2t^{2H}/2$, откуда $\lim\limits_{t\to\infty} I_p(t) = \infty$, и нулевое решение не является p-устойчивым. Поэтому с необходимостью $c = 0$. В таком случае $I_p(t) = (a + (p-1)b^2/2)t$ и утверждение становится очевидным.

Замечание 3. Условия асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения стационарного уравнения (3) отличаются от условий асимптотической p-устойчивости. В критерии асимптотической устойчивости по вероятности c – любое, а в критерии асимптотической p-устойчивости $c = 0$ (при выполнении условий $a < b^2/2$ и $a < (1-p)b^2/2$ соответственно).

Это обстоятельство объясняется тем, что асимптотическая устойчивость по вероятности зависит от стандартного отклонения $\sigma(t) = \sqrt{b^2t + c^2t^{2H}}$ процесса $\nu(t) = (a - b^2/2)t + bW(t) + cB^H(t)$. Функция $\sigma(t)$ имеет порядок роста t^H – более низкий, чем порядок роста математического ожидания $\mu(t) = (a - b^2/2)t$ процесса $\nu(t)$. В свою очередь, асимптотическая p-устойчивость зависит от дисперсии $\sigma^2(t)$ процесса $\nu(t)$, имеющей порядок роста t^{2H} – более высокий, нежели порядок роста функции $\mu(t)$.

Замечание 4. Важное свойство линейного стационарного уравнения Ито (3) $(c = 0)$, состоящее в том, что для него из асимптотической устойчивости по вероятности следует p-устойчивость его нулевого решения при достаточно малом p [17, разд. 6.1], перестаёт быть верным в общем случае при $c \neq 0$.

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = -2tx(t)\,dt + \frac{x(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,dW(t) + tx(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0.$$

Для него

$$\tau(t) = \operatorname{arctg} t \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi/2, \quad A(t) = -t^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty, \quad \|c\|_{\alpha,t} = t^{2-\alpha}/(1-\alpha)$$

и нетрудно вычислить, что

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t) = \lim_{t\to\infty} t^{H-1}/(1-\alpha) = 0.$$

Поэтому на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво по вероятности.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = t(\cos^2 t)x(t)\,dt + 2\sqrt{t}(\cos t)x(t)\,dW(t) + x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0.$$

В данном случае

$$\tau(t) = t^2 + t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, \quad a(s) = \frac{1}{4}b^2(t),$$

соответственно

$$\lim_{t\to\infty} A_\tau(t)/\varkappa(t) = -\frac{1}{4}\lim_{\tau\to\infty}\sqrt{\frac{\tau}{2\ln\ln\tau}} = -\infty.$$

Поскольку $\|c\|_{\alpha,t} = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, $\tau(t) \sim t^2$, то

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/\varkappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1-\alpha)}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{H-1}}{\sqrt{\ln\ln\tau(t)}} = 0,$$

откуда на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво по вероятности.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = a(t)x(t)\,dt + b(t)x(t)\,dW(t) + e^{-t}x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0. \tag{17}$$

Поскольку $c(u) = e^{-u} \in (0,1]$ при $u \geqslant 0$, то

$$\int_0^t (t-u)^{2H-2} c(t)c(u)\, du \leqslant c(t) \int_0^t (t-u)^{2H-2}\, du = \frac{1}{2H-1} e^{-t} t^{2H-1}.$$

Заметим, что функция $\psi(t) = e^{-t}t^{2H-1}$ достигает максимума в точке $t_0 = 2H-1$, поскольку $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$, $\psi'(t) = e^{-t}t^{2H-2}((2H-1)-t)$. Значит, в обозначениях теоремы 3 будем иметь

$$F_p(t) \leqslant a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t) + pH(2H-1)^{2H-1}e^{1-2H} < a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t) + pH,$$

откуда на основании теоремы 3 достаточное условие экспоненциальной p-устойчивости даёт неравенство

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t)\right) \leqslant -pH.$$

В некотором смысле последнее неравенство является аналогом условия 2 из следствия 3 в классе уравнений (17) с непостоянными коэффициентами.

В частности, из последнего следует, что, к примеру, уравнение

$$dx(t) = \left(-\beta + \frac{(p-1)H}{2}\sin^2 t\right)x(t)\, dt + \sqrt{H}(\cos t)x(t)\, dW(t) + e^{-t}x(t)\, dB^H(t), \quad t \geqslant 0,$$

будет иметь p-экспоненциально устойчивое нулевое решение для любого $p > 0$ и $\beta \geqslant$ $\geqslant (3p-1)H/2$.

Автор выражает благодарность М.М. Васьковскому за предложенное направление исследования и внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. London, 2008.
2. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin; Heidelberg, 2008.
3. *Zahle M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I // Prob. Theory and Rel. Fields. 1998. V. 111. № 3. P. 333–374.
4. *Kubilius K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type // Stoch. Proc. and Their Appl. 2002. V. 98. № 2. P. 289–315.
5. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stoch. Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
6. *Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
7. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
8. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
10. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.

11. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
12. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
13. *Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
14. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
15. *Качан И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2018. Т. 54. № 2. С. 193–209.
16. *Khasminskii R.Z.* On the stability of nonlinear stochastic systems // J. of Appl. Math. and Mechanics. 1967. V. 30. № 5. P 1082–1089.
17. *Khasminskii R.Z.* Stochastic Stability of Differential Equations. Berlin; Heidelberg, 2012.
18. *Mao X.* Exponential Stability of Stochastic Differential Equations. New York, 1994.
19. *Garrido-Atienza M.J., Neuenkirch A., Schmalfuss B.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths // J. of Dynamics and Differ. Equat. 2018. V. 30. № 1. P. 359–377.
20. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
21. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
22. *Pipiras V., Taqqu M.S.* Integration questions related to fractional Brownian motion // Prob. Theory and Rel. Fields. 2000. V. 118. P. 251–291.
23. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Collect. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
После доработки 25.12.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 607–613

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

МЕТОД ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. А. И. Перов, И. Д. Коструб, В. К. Каверина

Методом замороженных коэффициентов для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений получены различные признаки экспоненциальной устойчивости. При этом использована и доказана уточнённая оценка Гельфанда–Шилова матричной экспоненты. Отдельно рассматриваются случаи, когда матрица коэффициентов системы удовлетворяет на всей числовой полуоси условию Липшица или условию Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0374064121050034

Оценка Гельфанда–Шилова и её уточнение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – вещественная или комплексная $n \times n$-матрица. Нас интересует поведение матричной экспоненты

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{E} + t\mathbf{A} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная $n\times n$-матрица. Поскольку общее решение линейной обыкновенной дифференциальной системы с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}$ имеет вид $e^{t\mathbf{A}}C$, где $C \in \mathbb{R}^n$ – вектор произвольных постоянных, то в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играют различные оценки матричной экспоненты, причём с учётом нашей цели – изучения условий устойчивости – нас интересуют оценки матричной экспоненты при неотрицательных значениях времени $t \in [0, +\infty)$. Помимо представления (1) существуют и другие способы задания матричной экспоненты.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначается матричная норма. Получим оценки нормы матричной экспоненты. Прежде всего, так как

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant \|\mathbf{E}\| + t\|\mathbf{A}\| + \ldots + \frac{t^k\|\mathbf{A}\|^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\|\mathbf{A}\|^k}{k!},$$

то

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\|\mathbf{A}\|} \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{2}$$

Эта оценка крайне груба: из неё, например, не следует стремление при $t \to +\infty$ матричной экспоненты к нулю, если матрица $\mathbf{A}$ является гурвицевой. Частично этот недостаток устраняет оценка

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{ta} \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{3}$$

где $a = \|\mathbf{A}\|_{\log}$ – *логарифмическая норма Лозинского* матрицы $\mathbf{A}$, т.е.

$$\|\mathbf{A}\|_{\log} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\|\mathbf{E}+t\mathbf{A}\| - \|\mathbf{E}\|}{t}$$

[1, с. 461; 2, с. 92, задача 16; 3, с. 93–94; 4]. Логарифмическая норма Лозинского может быть положительной, равной нулю или отрицательной; если $\|\mathbf{A}\|_{\log} < 0$, то матрица $\mathbf{A}$ гурвицева, причём $\operatorname{spa}\mathbf{A} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\log}$ (*спектральной абсциссой* $\operatorname{spa}\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A}$ называется максимальная из вещественных частей её собственных значений).

В оценках (2) и (3) порядок n матрицы не играет никакой роли. Более точная в определённом смысле оценка, учитывающая порядок матрицы, найдена Гельфандом и Шиловым [5, с. 78]:

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} t^k(2\|\mathbf{A}\|)^k \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{4}$$

где $\alpha = \operatorname{spa}\mathbf{A}$ и n – порядок матрицы $\mathbf{A}$. Для получения этой оценки в [5] использовался интерполяционный многочлен Ньютона. Более точный анализ рассуждений из [5] приводит к оценке

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k(2\|\mathbf{A}\|)^k}{k!} \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{5}$$

Это уточнение указано в монографии [1, с. 131]. Под *оценкой Гельфанда–Шилова* будем понимать оценку (5).

При выводе этой оценки вначале предполагается, что собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ матрицы $\mathbf{A}$ попарно различны; тогда для аналитической функции f значение $f(\mathbf{A})$ можно найти в виде следующего интерполяционного многочлена Ньютона:

$$f(\mathbf{A}) = a_1\mathbf{E} + a_2(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}) + a_3(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{E}), \tag{6}$$

коэффициенты которого $a_j,\ \ j=\overline{1,n},$ вычисляются по формуле [5, с. 80]

$$a_{k+1} = \int\limits_0^1 ds_1 \cdots \int\limits_0^{s_{n-1}} f^{(k)}(\lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1)s_1 + \ldots + (\lambda_{k+1}-\lambda_k)s_k)\,ds_k, \quad k=\overline{0,n-1}. \tag{7}$$

Из формулы (7) вытекает оценка

$$|a_{k+1}| \leqslant \frac{1}{k!}\max_{\lambda\in B_{k+1}} |f^{(k)}(\lambda)|, \tag{8}$$

где B_{k+1} – выпуклая оболочка первых $k+1$ собственных значений $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{k+1}$.

В интересующем нас случае $f(\lambda)=e^{t\lambda}$; поэтому $f^{(k)}(\lambda)=e^{t\lambda}t^k$ и оценка (8) принимает вид

$$|a_{k+1}| \leqslant \frac{1}{k!}e^{t\alpha}t^k \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{9}$$

а так как, кроме того, $\|\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + |\lambda_j| \leqslant 2\|\mathbf{A}\|$, то из (6) и (9) следует, что оценка (5) справедлива для матриц, все собственные значения которых попарно различны. Поскольку множество таких матриц всюду плотно в линейном нормированном пространстве матриц, то из соображений непрерывности заключаем, что оценка Гельфанда–Шилова (5) выполняется для любой матрицы $\mathbf{A}$.

В книге [5] k-кратный интеграл в (7) заменялся просто единицей, что и объясняет происхождение оценки (4).

Оценим норму $\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{E}$ более аккуратно: $\|\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + |\lambda_j| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \operatorname{spr}\mathbf{A}$ (*спектральным радиусом* $\operatorname{spr}\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A}$ называется число, равное наибольшему из модулей её собственных значений; известно, что $\operatorname{spr}\mathbf{A} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ для любой матричной нормы). Таким образом, наше уточнение оценки (5) состоит в следующем:

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+\|\mathbf{A}\|)^k}{k!}t^k \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{10}$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1,n}; \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ – матрица n-го порядка. Предположим, что $\mathbf{A}(t)$ гурвицева при каждом t. Означает ли это, что система (11) асимптотически устойчива? Ответ на поставленный вопрос отрицательный, как показывает приводимый ниже пример.

Пусть $n = 2$ и

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1-2\cos(4t) & 2+2\sin(4t) \\ -2+2\sin(4t) & -1+2\cos(4t) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Характеристическое уравнение $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}(t)) \equiv \lambda^2+2\lambda+1$ матрицы $\mathbf{A}(t)$ не зависит от t, а её собственные значения следующие: $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = -1$. Поэтому $\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) = -1$ и матрица $\mathbf{A}(t)$ является гурвицевой при каждом t. С другой стороны, система (11) в рассматриваемом случае имеет решение $(e^t\sin(2t), e^t\cos(2t))^{\mathrm{T}}$, для которого $\|x(t)\| = e^t$. Отметим, что в монографии [1, с. 124, формула (9.3)] вместо матрицы (12) приведена транспонированная к ней матрица.

Результаты А.Ю. Левина [6]. Пусть $\|\mathbf{A}(t)\| \leqslant h$ и $\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) \leqslant -\gamma$, где $\gamma > 0$ при $0 \leqslant t < \infty$. Мы видим, что $\mathbf{A}(t)$ гурвицева при всех неотрицательных t. Введём условие медленного изменения матричнозначной функции $\mathbf{A}(t)$: имеет место неравенство

$$\|\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)\| \leqslant \varphi(s) \quad (t \geqslant t_0, \quad s > 0), \tag{13}$$

где для функции φ выполняется оценка

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2h)^k}{k!}t^k\varphi(t)\,dt < 1. \tag{14}$$

Пусть выполнено условие медленного роста (13) и условие (14). Тогда система (11) экспоненциально устойчива [6].

Если колебание функции $\mathbf{A}(t)$ достаточно мало́:

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant \alpha \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t, s < \infty \tag{15}$$

(в этом случае $\varphi(s) \equiv \alpha$), то условие экспоненциальной устойчивости (14) приводит к оценке

$$(0 <)\ \alpha < \frac{2h-\gamma}{(2h\gamma^{-1})^n - 1}. \tag{16}$$

Если выполнено условие Липшица

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant L|t-s| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t, s < \infty \tag{17}$$

(в этом случае $\varphi(s) = Ls$), то условие экспоненциальной устойчивости (14) даёт оценку

$$(0 <)\ L < \frac{(2h-\gamma)^2}{n(2h\gamma^{-1})^{n+1} - (n+1)(2h\gamma^{-1})^n + 1}. \tag{18}$$

Условие (14) вытекает из метода замороженных коэффициентов В.М. Алексеева [7] (см. также [1, § 10]).

Основное условие. Рассмотрим систему (11). Предположим, что при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) \leqslant -\gamma, \quad \operatorname{spr}\mathbf{A}(t) \leqslant \rho \quad \text{и} \quad \|\mathbf{A}(t)\| \leqslant h, \tag{19}$$

где γ, ρ, h – некоторые положительные постоянные, причём без ограничения общности считаем, что $\gamma \leqslant \rho \leqslant h$. Использование оценки (10) в сочетании с условием (13), (14) медленного изменения, согласно методу замороженных коэффициентов В.М. Алексеева [7], приводит к следующему условию экспоненциальной устойчивости системы (11):

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\varphi(t)\,dt<1. \tag{20}$$

Так как $\rho + h \leqslant 2h$, то новое условие устойчивости не хуже известного (14) и лучше, если $\rho < h$.

Пусть выполнена оценка (15). Тогда основное условие (20) принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\alpha\,dt<1.$$

Так как

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-t\gamma}t^k\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{k!}{\gamma^{k+1}}=\frac{\Lambda}{\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{\rho+h}{\gamma}\Big)^k,$$

то, воспользовавшись очевидным тождеством $\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k=(\zeta^n-1)/(\zeta-1)$ при $\zeta\neq 1$, получаем

$$(0<)\ \alpha<\frac{\rho+h-\gamma}{((\rho+h)\gamma^{-1})^n-1}.$$

Эта оценка улучшает оценку (16) (и совпадает с ней, если $\rho = h$).

Условие Липшица. Пусть выполнено условие Липшица (17). Основное условие (20) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^kLt\,dt<1. \tag{21}$$

Имеем

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^{k+1}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-t\gamma}t^{k+1}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{(k+1)!}{\gamma^{k+2}}=\frac{1}{\gamma^2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{\rho+h}{\gamma}\Big)^k(k+1).$$

Поэтому неравенство (21) запишется в виде

$$(0<)\ L<\frac{(\rho+h-\gamma)^2}{n((\rho+h)\gamma^{-1})^{n+1}-(n+1)((\rho+h)\gamma^{-1})^n+1}. \tag{22}$$

Полученная оценка уточняет оценку (18) (и совпадает с ней, если $\rho = h$). При выводе оценки (22) мы воспользовались следующим тождеством:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k(k+1)=(n\zeta^{n+1}-(n+1)\zeta^n+1)(\zeta-1)^2\quad\text{при}\quad\zeta\neq 1.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $\zeta = (\rho + h)/\gamma \geqslant 2$.

Вернёмся к условию Липшица (17). Так как $\mathbf{A}(t) \leqslant h$, то $\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant 2h$ для всех t и s. Поэтому вместо (17) можно использовать оценку

$$|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant \min\{L|t-s|, 2h\} \quad (0 \leqslant t, s < \infty).$$

Основное условие (20) для такого модуля непрерывности принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k \min\{Lt, 2h\}\, dt < 1.$$

Оценивая $\min\{Lt, 2h\}$ сверху суммой $Lt + 2h$, приходим к неравенству

$$L \int_0^a e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^{k+1}\, dt + 2h \int_a^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k\, dt < 1.$$

Видим, что оценка (22) может быть существенно улучшена, однако мы не приводим получающиеся формулы, так как они имеют громоздкий вид и, что самое главное, не позволяют дать явную оценку для постоянной Липшица.

Условие Гёльдера. Пусть выполнено условие Гёльдера

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant H|t-s|^\sigma \quad (0 \leqslant t, s < \infty), \tag{23}$$

где H и σ – некоторые положительные постоянные, причём $0 < \sigma < 1$. Как и прежде, считаем, что при всех $t \geqslant 0$ имеют место неравенства (19), где γ, ρ, h – некоторые положительные постоянные, причём без ограничения общности $\gamma \leqslant \rho \leqslant h$.

Основное условие (20) в этом случае принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k H t^\sigma\, dt < 1, \tag{24}$$

и всё сводится к нахождению следующего выражения:

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt. \tag{25}$$

С этим обозначением неравенство (24) запишется в виде $HJ < 1$. Чтобы найти значения несобственного интеграла $\int_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt$ с нецелым показателем $k+\sigma$, нам понадобятся свойства гамма-функции [8] $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ $(a > 0)$. (Эйлеров интеграл второго рода). Сделав в искомом интеграле замену $s = \gamma t$, получим

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt = \int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{\gamma}\right)^{k+\sigma} \frac{ds}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^{1+k+\sigma}} \int_0^\infty e^{-s} s^{k+\sigma}\, ds = \frac{1}{\gamma^{1+k+\sigma}} \Gamma(1+k+\sigma).$$

Так как

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \tag{26}$$

то

$$\int_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt = \frac{1}{\gamma^{k+\sigma+1}} (k+\sigma)\Gamma(k+\sigma).$$

Поэтому интересующее нас выражение (25) принимает вид

$$J=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{1}{\gamma^{k+\sigma+1}}(k+\sigma)\Gamma(k+\sigma).$$

Применяя последовательно формулу (26), будем иметь

$$(k+\sigma)\Gamma(k+\sigma)=(k+\sigma)(k-1+\sigma)\Gamma(k-1+\sigma)=\ldots=(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma\Gamma(\sigma).$$

Это означает, что

$$J=\frac{1}{\gamma^{1+\sigma}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma}{k!}\Gamma(\sigma).$$

Поэтому условие (24) запишется следующим образом (краткое сообщение о последнем результате приведено в [9]):

$$0<H<\gamma^{1+\sigma}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots(\sigma)}{k!}\Gamma(\sigma)\right)^{-1}. \tag{27}$$

Рассмотрим более подробно случай $\sigma=1/2$. Тогда условие (23) принимает вид

$$\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant H\sqrt{|t-s|}=H|t-s|^{1/2}.$$

Найдём значение $\Gamma(1/2)$. Так как, согласно [8],

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\pi/\sin(a\pi)\quad(0<a<1),$$

то отсюда при $a=\sigma=1/2$ имеем $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Поскольку

$$\left(k+\frac12\right)\left(k-\frac12\right)\left(k-\frac32\right)\cdots\frac12=\frac{(2k+1)(2k-1)\cdots1}{2^{k+1}}=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}},$$

то при $\sigma=1/2$ получаем

$$\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma}{k!}\Gamma(\sigma)=\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому оценка (27) в конечном итоге при $\sigma=1/2$ принимает вид

$$0<H<2\gamma^{3/2}\pi^{-1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\right)^{-1}.$$

Вернёмся к условию Гёльдера (23). Так как $\|\mathbf{A}(t)\|\leqslant h$ для рассматриваемых значений t, то $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant 2h$. Поэтому вместо (23) можно использовать оценку

$$\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant\min\{H|t-s|^\sigma,2h\}\quad(0\leqslant t,s<\infty).$$

Основное условие (20) в этом случае принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\min\{Ht^\sigma,2h\}\,dt<1.$$

Полагая $b = (2h/L)^{1/\sigma}$, получаем

$$H\int\limits_0^b e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^{k+\sigma}\,dt + 2h\int\limits_b^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\,dt < 1.$$

Как видим, оценка (22) может быть существенно улучшена, однако мы не приводим получающиеся формулы, так как они имеют громоздкий вид и, что самое главное, не позволяют дать явную оценку для постоянной Гёльдера.

Исследования Перова А.И. выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19–01–00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
3. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на теории внедиагонально неотрицательных матриц. Воронеж, 2015.
4. *Лозинский С.М.* Оценка погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1958. № 5. С. 52–90.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.
6. *Левин А.Ю.* Теорема Харитонова для слабостационарных систем // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. Вып. 6 (306). С. 189–190.
7. *Алексеев В.М.* Оценка погрешности численного интегрирования // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 247–250.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1970.
9. *Перов А.И., Коструб И.Д., Каверина В.К.* Метод замороженных коэффициентов в условиях Гёльдера Современные методы теории краевых задач // Материалы междунар. конф. Воронежская весенняя мат. школа “Понтрягинские чтения XXXI” (3–9 мая 2020 г.). Воронеж, 2020. С. 171–172.

Воронежский государственный университет,
Финансовый университет при правительстве
Российской Федерации, г. Москва

Поступила в редакцию 23.02.2021 г.
После доработки 23.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 614–624

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

БИКВАТЕРНИОННЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА ИХ ОБОБЩЁННЫХ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. Л. А. Алексеева

Рассматриваются бикватернионные волновые (биволновые) уравнения. Они представляют собой бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака и эквивалентны системе из восьми дифференциальных уравнений гиперболического типа. С использованием теории обобщённых функций построены фундаментальные и обобщённые решения таких уравнений, в том числе и разрывные, описывающие ударные волны, и получены условия на фронтах. Построено решение задачи Коши для биволнового уравнения и бикватернионные аналоги формул Кирхгофа–Грина, которые позволяют по граничным и начальным значениям решения в ограниченной области определить его внутри области.

DOI: 10.31857/S0374064121050046

Введение. В настоящей работе строятся решения краевых задач для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений. Эти уравнения являются бикватернионными обобщениями уравнений Максвелла и Дирака. Отметим, что кватернионное представление уравнений Максвелла началось с работ Дж. Максвелла и имеет довольно обширную библиографию (см., например, [1–10] и др.). Бикватернионные волновые уравнения относятся к классу гиперболических и описывают решения гиперболических систем из восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Теория краевых задач для таких систем уравнений пока не получила такого значительного развития, как теория краевых задач для уравнений и систем эллиптического и параболического типов.

Здесь развивается подобная теория для биволновых уравнений с использованием методов теории обобщённых функций. Наиболее простая из краевых задач – это задача Коши с начальными условиями. Её решение для волнового уравнения хорошо известно и определяется формулами Даламбера, Пуассона и Кирхгофа при размерности пространства 1, 2 и 3 соответственно. Решение волнового уравнения при любых правых частях и начальных условиях из класса обобщённых функций было предложено В.С. Владимировым [11, 12]. Здесь мы используем метод Владимирова для решения соответствующей задачи Коши для биволнового уравнения.

Для решения начально-краевых задач в данной работе разработан метод обобщённых функций (МОФ), основные идеи которого для классического волнового уравнения в пространствах размерности, не превосходящей трёх, изложены автором в работах [13, 14]. В основе МОФ лежит представление краевой задачи в пространстве обобщённых функций, что позволяет начальные и краевые условия перевести в правую часть дифференциальных уравнений с использованием сингулярных обобщённых функций – простых и двойных слоёв на границе области определения решения. Плотности этих слоёв определяются граничными значениями решения и его производных. Свойства фундаментального решения – функции Грина уравнения – дают возможность строить решение полученного уравнения в пространстве обобщённых функций в виде его свёртки с правой частью этого уравнения. Регулярное интегральное представление обобщённого решения даётся классическим решением краевой задачи, которое позволяет найти решение внутри области определения по его граничным значениям, часть которых известна, а часть подлежит определению. Эти формулы являются аналогом известной формулы Грина для уравнения Лапласа, которая по граничному значению и нормальной производной решения вычисляет его внутри области определения. Для определения неизвестных граничных функций, используя предельные свойства решения при приближении к границе области, строятся разрешающие граничные интегральные уравнения, как правило, сингулярные. Метод позволяет строить решения с учётом ударных волн, характерных для гиперболических уравнений, на фронтах которых производные терпят скачки. Этот метод используется в настоящей работе для построения обобщённых решений краевых задач и их интегральных представлений.

1. Взаимные биградиенты. Биволновое уравнение. Рассмотрим бикватернионное волновое уравнение вида

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \mathbb{M}, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{M}$ – пространство Минковского. Здесь и далее используем гамильтонову скалярно-векторную запись бикватернионов, употребляя для скаляра одноимённые строчные курсивные буквы, а для вектора – прописные буквы:

$$\mathbf{B} = b(\tau, x) + B(\tau, x), \quad \mathbf{G} = g(\tau, x) + G(\tau, x),$$

структурный коэффициент $\mathbf{F}$ – постоянный бикватернион. Предполагается, что $\mathbf{B}(\tau, x)$ и $\mathbf{G}(\tau, x)$ принадлежат пространству *обобщённых* бикватернионов $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$. Под таковыми понимаем бикватернионы, компоненты которых принадлежат классу обобщённых функций медленного роста [12, § 8].

Дифференциальные бикватернионные операторы – *взаимные биградиенты* – имеют вид [14]

$$\nabla^{+} = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^{-} = \partial_\tau - i\nabla. \tag{1.2}$$

Их действие определяется согласно кватернионному умножению в алгебре бикватернионов:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{B} = (f + F) \circ (b + B) = (fb - (F, B)) + (fB + bF + [F, B]), \tag{1.3}$$

где

$$(F, B) = \sum_{j=1}^{3} F_j B_j \quad \text{и} \quad [F, B] = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} F_k B_l e_m$$

– это соответственно скалярное и векторное произведение указанных векторов, ε_{klm} – псевдотензор Леви–Чивиты, e_m – базисные элементы алгебры бикватернионов $(m = 0, 1, 2, 3)$. Согласно этому имеем

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B} \triangleq (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b(\tau, x) + B(\tau, x)) = (\partial_\tau b \mp i(\nabla, B) + \partial_\tau B \pm i(\nabla b + [\nabla, B]) =$$

$$= (\partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B) + \partial_\tau B \pm i \operatorname{grad} b \pm i \operatorname{rot} B$$

(соответственно верхнему и нижнему знакам).

Уравнение (1.1) относится к классу биволновых уравнений общего вида

$$\mathbf{A} \circ \nabla^{\pm}\mathbf{B} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B} = \mathbf{H}(\tau, x),$$

которые приводятся к (1.1), если существует обратный бикватернион $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-} \circ \mathbf{A}/(a^2 + (A, A)),$$

где $\mathbf{A}^{-} = a - A$ (*взаимный* бикватернион). В этом случае, умножая равенство (1.3) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем уравнение (1.1), в котором

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{C}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{H}.$$

Введём также *сопряжённый* бикватернион: $\mathbf{A}^{*} = \bar{\mathbf{A}}^{-}$. Здесь и далее черта над символом означает комплексное сопряжение скалярной и векторной частей бикватерниона.

Ранее нами рассмотрены частные случаи, когда $\mathbf{F}$ скаляр или вектор. Уравнение (1.1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла при $\mathbf{F} = 0$, уравнениям Дирака при чисто мнимом $\mathbf{F}=i\rho$ (см. работы [15, 16]). В этих работах с использованием теории обобщённых функций построены элементарные и общие решения уравнения (1.1), описывающие нестационарные гармонические по времени и статические бикватернионные поля.

Построим обобщённые решения (1.1) при произвольной правой части $\mathbf{G}(\tau,x)\in\mathbb{B}'(\mathbb{M})$.

2. Взаимные МД-операторы и их свойства. Введём дифференциальные бикватернионные операторы

$$\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}=\nabla^++\mathbf{F}=\nabla^++f+F,\quad \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}=\nabla^-+\mathbf{F}^-=\nabla^-+f-F, \tag{2.1}$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В связи с изложенным выше назовём их *взаимными МД-операторами (операторами Максвелла–Дирака).* Используем далее обозначение для классического волнового оператора – даламбертиана:

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\Delta,$$

$\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ – лапласиан.

Взаимные биградиенты и МД-операторы обладают полезными для приложений свойствами.

Лемма. *Взаимные биградиенты коммутируют между собой, и для их композиции имеет место равенство*

$$\nabla^+\nabla^-=\nabla^-\nabla^+=\Box.$$

МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство

$$\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}=\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}=\Box+2f\partial_\tau+f^2+(F,F)-2i(F,\nabla).$$

Доказательство. Действительно, согласно определению (1.2), имеем

$$\nabla^+\nabla^-=(\partial_\tau+i\nabla)\circ(\partial_\tau-i\nabla)=\partial_\tau\partial_\tau-(\nabla,\nabla)-i\partial_\tau\nabla+i\partial_\tau\nabla-[\nabla,\nabla]=\nabla^-\circ\nabla^+=\Box.$$

Аналогично, воспользовавшись определением (2.1), получим

$$\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}=\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}=(\nabla^++f+F)\circ(\nabla^-+f-F)=\Box+2f\partial_\tau+f^2+(F,F)+2i(F,\nabla).$$

Далее значок кватернионного умножения между операторами не пишем.

3. Ударные волны как обобщённые решения биволнового уравнения. Условия на фронтах. Рассмотрим решения уравнения (1.1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x). \tag{3.1}$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже или просто используя операцию комплексного сопряжения.

Заметим, что в силу леммы биволновое уравнение (1.1) является гиперболическим и допускает решения, разрывные на характеристических поверхностях $F\subset\mathbb{M}$, нормаль к которым удовлетворяет характеристическому уравнению для волнового уравнения Даламбера:

$$n_0^2-n_1^2-n_2^2-n_3^2=0. \tag{3.2}$$

Им соответствуют волновые фронты $F_\tau\subset\mathbb{R}^3$, распространяющиеся в направлении волнового вектора $n(\tau,x)=(n_1,n_2,n_3)$ со скоростью

$$v=-\frac{n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}=1.$$

Из равенства (3.2) следует, что поверхность $\tau=\mathrm{const}$ не может быть характеристической. Если волновой вектор нормировать:

$$\|n\|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=1,$$

то из этих равенств вытекает, что

$$n_0 = -1. \tag{3.3}$$

С учётом правил дифференцирования разрывных регулярных функций [12, § 6], действие биградиента на соответствующий бикватернион имеет вид

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} = \nabla^+\mathbf{B} + \{n_0 + n\} \circ [\mathbf{B}(\tau, x)]_F \delta_F(\tau, x),$$

где $[\mathbf{B}]_F \delta_F(\tau, x)$ – простой слой на поверхности F, плотность которого равна скачку бикватерниона на F, т.е.

$$[\mathbf{B}]_F = \lim_{\varepsilon\to+0} \{\mathbf{B}(\tau + n_0\varepsilon, x + \varepsilon n) - \mathbf{B}(\tau - n_0\varepsilon, x - \varepsilon n)\}.$$

Следовательно, разрывные решения биволнового уравнения (1.1) должны удовлетворять следующему условию (*условие на фронтах ударных волн*):

$$\{n_0 + n\} \circ [\mathbf{B}(\tau, x)]_F = 0.$$

Раскрывая в этом равенстве скалярную и векторную части, с учётом равенства (3.3) получаем

$$[b(\tau, x)]_F + i(n(\tau, x), [B(\tau, x)]_F) = 0$$

и

$$[B(\tau, x)]_F = i\{n[b(\tau, x)]_F + [n, [B(\tau, x)]_F]\}.$$

Отсюда следует, что если $[b(\tau, x)]_F = 0$, то вектор $[B(\tau, x)]_F$ перпендикулярен фронту волны, т.е. если перед фронтом поле нулевое, то волна будет поперечной. Этот факт хорошо известен для электромагнитных волн, которые описываются чисто векторным бикватернионом с нулевой скалярной частью.

4. Построение решений МД-уравнения. Будем называть биволновое уравнение (1.1) *МД-уравнением*. Для построения его решений используем определение (2.1). В результате из (3.1) следует, что

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\mathbf{B} = \{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla)\}\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{G} \overset{\Delta}{=} \mathbf{Q}.$$

Другими словами, каждая компонента бикватерниона $\mathbf{B}$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F, \nabla u) + f^2 u + (F, F)u = q(\tau, x) \tag{4.1}$$

с соответствующей компонентой бикватерниона $\mathbf{Q}$ в правой части.

Заметим, что это уравнение, если положить $m^2 = f^2 + (F, F)$, содержит оператор Клейна–Гордона–Фока $(\Box + m^2)$, а также дополнительное слагаемое $2f\partial_\tau + 2i(F, \nabla)$. Если $f = ik$ – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шрёдингера $(2ik\partial_\tau - \Delta)$. Поэтому уравнение (4.1) называем КГФШ-*уравнением*.

Теорема 1. *Решение биволнового уравнения (1.1) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-(\psi * \mathbf{G}) = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \tag{4.2}$$

здесь $\psi(\tau, x)$ *– фундаментальное решение уравнения (4.1) (при* $q = \delta(\tau)\delta(x)$*), а* $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *– решение однородного уравнения (3.1) (при* $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$*):*

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_\mathbf{F}^-(\psi^0 * \mathbf{C}^0), \tag{4.3}$$

где $\psi^0(\tau, x)$*– решения однородного уравнения (1.1) (при* $q = 0$*),* $\mathbf{C}^0 \in \mathbb{B}'(\mathbb{M})$ *– произвольные бикватернионы, допускающие такую свёртку.*

Доказательство. В силу линейности уравнения достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (4.1). Подставим первое слагаемое в уравнение (3.1) и, используя определение (2.1) и свойство дифференцирования свёртки, получим

$$\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}(\psi * \mathbf{G}) = \{\Box\psi + 2f\partial_\tau\psi + f^2\psi + (F,F)\psi + 2i(F,\nabla\psi)\} * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем равенства

$$\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}(\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\}\psi^0 * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Очевидно, что в силу линейности уравнения (1.1) любое его решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах (4.2) и (4.3) теоремы для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления свёрток, что зависит от конкретного вида входящих в свёртку функций.

Следовательно, решение биволнового уравнения (3.1) определяется скалярными функциями $\psi(\tau,x)$ и $\psi^0(\tau,x)$ – решениями уравнения (4.1), которые будем называть *скалярными потенциалами* решений МД-уравнения.

5. Построение функции Грина МД-уравнения. Рассмотрим фундаментальные решения уравнения (1.1):

$$\nabla^\pm\mathbf{U} + \mathbf{F}\circ\mathbf{U} = \delta(\tau)\delta(x),$$

здесь справа сингулярные дельта-функции. Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного биволнового уравнения (с нулевой правой частью).

Определение. Назовём *функцией Грина* фундаментальное решение уравнения (4.2), удовлетворяющее следующим условиям излучения:

$$\mathbf{U}(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \tau < 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{U}(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \|x\| > \tau.$$

Свойства фундаментальных решений позволяют строить частные решения уравнения (1.1) в виде функциональной свёртки

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} * \mathbf{U} = (g+G)*(u+U) =$$

$$= \left\{g*u - \sum_{k=1}^{3} G_k * U_k\right\} + \left\{u*G + g*U + \sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}e_j(G_k*U_l)\right\}, \tag{5.1}$$

где в правой части стоят покомпонентные свёртки, которые следует брать согласно правилам теории обобщённых функций [12, § 7]. Условия существования таких свёрток определяют класс бикватернионов в правой части (1.1), для которых решения уравнения существуют.

Используя формулу теоремы 1, построим фундаментальные решения уравнения (5.1):

$$\mathbf{U}(\tau,x) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}(\psi * \delta(\tau)\delta(x)) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\psi + \mathbf{B}^0 = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\psi + \mathbf{B}^0. \tag{5.2}$$

Здесь мы использовали свойство свёрток с дельта-функцией: $\psi * \delta = \psi$.

6. Функция Грина КГФШ-уравнения. Для построения функции Грина биволнового уравнения найдём функцию Грина для КГФШ-уравнения, которая удовлетворяет уравнению

$$\Box\psi + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla\psi) + f^2\psi + (F,F)\psi = \delta(\tau)\delta(x) \tag{6.1}$$

и условиям излучения:

$$\psi(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \tau < 0 \quad \text{и} \quad \psi(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \|x\| > \tau.$$

Теорема 2. *Функция Грина уравнения (5.1) представима в виде*

$$\psi = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|), \tag{6.2}$$

где $\delta(\tau-\|x\|)$ *– сингулярная обобщённая функция – простой слой на световом конусе* $\|x\| = \tau$.

Доказательство. Для доказательства формулы (6.2) используем преобразование Фурье обобщённых функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x), обозначаем (ω, ξ). Рассмотрим преобразование Фурье КГФШ-уравнения (6.1):

$$(\|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F,\xi) + f^2 + (F,F))\bar{\psi}(\omega,\xi) = 1,$$

которое можно записать следующим образом:

$$\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\}\bar{\psi} = 1.$$

Откуда получим преобразование Фурье скалярного потенциала в виде

$$\bar{\psi}(\omega,\xi) = \frac{1}{(\xi+F,\xi+F) - (\omega+if)^2} \tag{6.3}$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$$\Box\,\chi = \delta(x,t),$$

удовлетворяющим условиям излучения. Это решение имеет вид

$$\chi(x,\tau) = \frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|).$$

Его преобразование Фурье равно следующей регуляризации функции $(\|\xi\|^2 - \omega^2)^{-1}$:

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - (\omega + i0)^2}. \tag{6.4}$$

Вследствие свойств сдвига преобразования Фурье из равенств (6.3) и (6.4) вытекает представление (6.2). Теорема доказана.

Заметим, что ψ – сингулярная обобщённая функция, носителем которой является трёхмерная расширяющаяся со временем сфера, т.е. сферическая расходящаяся волна, распространяющаяся в $\mathbb{R}^3$ с единичной скоростью (τ – время).

7. Функция Грина и решения МД-уравнения. Используя равенства (6.2) и (6.4), теперь можем дать представление функции Грина. Воспользовавшись формулой для обобщённого решения (5.2), получаем представление решения в виде

$$\mathbf{U}(\tau,x) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\} = (\partial_\tau - i\nabla + \mathbf{F}^-)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\} =$$

$$= (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\} + \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\}\mathbf{F}^-,$$

где $\mathbf{F}^- = f - F$. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Функция Грина МД-уравнения (1.1) имеет вид*

$$\mathbf{U} = (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\} + \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right\}\mathbf{F}^-,$$

а его общее решение представимо в виде

$$\mathbf{B} = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|) * \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{B}^0$ *– решение однородного уравнения (1.1).*

При $\mathbf{B}^0 = 0$ это решение описывает расходящиеся волны, порождаемые источником $\mathbf{G}$. Для регулярных дифференцируемых бикватернионов

$$\mathbf{K}(\tau, x) = k(\tau, x) + K(\tau, x) = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{G}(\tau, x) = (\partial_\tau - i\nabla)(g + G) + (f - F) \circ (g + G) =$$

$$= (\partial_\tau g + fg + (F, G) + i \operatorname{div} G) - i\nabla g + \partial_\tau G - i \operatorname{rot} G + fG - gF - [F, G]$$

формула (7.1) представляется в интегральном виде:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = \frac{e^{-i(F,x) - \|x\| f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * (k + K) + \mathbf{B}^0 =$$

$$= \int\limits_{\|x-y\|<\tau} \frac{e^{-i(F,x-y) - \|x-y\| f}}{4\pi\|x - y\|}\mathbf{K}(y, \tau - \|x - y\|)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 + \mathbf{B}^0.$$

Для сингулярных бикватернионов для вычисления свёрток следует использовать определение свёрток в пространстве обобщённых функций.

8. Задача Коши. Аналог формулы Кирхгофа. Так мы называем решение задачи Коши для биволнового уравнения, по аналогии с формулами Кирхгофа – представлением решений волнового уравнения при заданных начальных данных в трёхмерном пространстве [12, § 13, с. 233]. Здесь начальные условия имеют вид

$$\mathbf{B}(0, x) = \mathbf{B}0(x),$$

где бикватернион начальных данных $\mathbf{B}0(x)$ – регулярный бикватернион, компоненты которого принадлежат классу непрерывных дифференцируемых функций. Предположим, что его носитель ограничен:

$$\Omega_a = \operatorname{supp} \mathbf{B}0(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < a\}. \tag{8.1}$$

Требуется построить решение этой задачи, удовлетворяющее условию излучения:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| > \tau + a. \tag{8.2}$$

Для построения решения задачи Коши воспользуемся методом Владимирова [12, § 13, с. 229]. Рассмотрим уравнение (1.1) на пространстве обобщённых бикватернионов с носителем на положительной полуоси времени, которые представим в виде обобщённого бикватерниона

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \mathbf{B}(\tau, x)H(\tau),$$

где $\mathbf{B}(\tau, x)$ – решение задачи Коши, $H(\tau)$ – функция Хевисайда. В этом пространстве имеем

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}} = (\nabla^+\mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B})H(\tau) + \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) = \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + \mathbf{B}0(x)\delta(\tau).$$

Используя свойство функции Грина, представим решение в виде свёртки функции Грина с правой частью:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + \mathbf{U} * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) = \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) +$$

$$+ (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x) - \|x\| f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) + \left\{\frac{e^{-i(F,x) - \|x\| f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\}\mathbf{F}^{-} * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) =$$

$$= \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x) - \|x\| f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x) \underset{x}{*} \mathbf{B}0(x)\right\} = \hat{\mathbf{B}}_1(\tau, x) + \hat{\mathbf{B}}_2(\tau, x), \tag{8.3}$$

где $\delta_{S_\tau}(x)$ – простой слой на сфере S_τ радиуса τ и с центром в нуле, т.е. $S_\tau=\{x:\|x\|=\tau\}$. Здесь первое слагаемое в правой части имеет с учётом условий излучения вид

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\tau,x)=\int\limits_{\|x-y\|<\tau}\frac{e^{-i(F,x-y)-\|x-y\|f}}{4\pi\|x-y\|}\mathbf{K}(y,\tau-\|x-y\|)\,dy_1\,dy_2\,dy_3.$$

Второе слагаемое $\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x)$, содержащее неполную свёртку только по x, представляется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x)=(\partial_\tau-i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x)\underset{x}{*}\mathbf{B}0(x)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\partial_\tau(\delta_{S_\tau}(x)*\mathbf{B}0(x))\right\}-i\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x)\underset{x}{*}\nabla\mathbf{B}0(x)\right\}=$$

$$=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int\limits_{\|x-y\|\leqslant\tau}\mathbf{B}0(x-y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3\right)-i\int\limits_{\|x-y\|=\tau}\frac{e^{-i(F,x-y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}\nabla\mathbf{B}0(y)dS(y)=$$

$$=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\left(\int\limits_{\|x-y\|=\tau}b0(x-y)+B0(x-y)dS(y)\right)+$$

$$+\,ie^{-i(F,x)}\int\limits_{\|x-y\|=\tau}\frac{e^{i(F,y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}(\operatorname{div}B0(y)-\operatorname{rot}B0(y))dS(y).$$

Здесь интегралы поверхностные, берутся на сфере радиуса τ с центром в точке x.

Формулы (8.1)–(8.3) являются аналогом формулы Кирхгофа для биволнового уравнения (1.1). Они представляют решение задачи Коши для биволнового МД-уравнения.

9. Динамический аналог формулы Грина. Под таковым мы понимаем представление решения биволнового уравнения с нулевыми начальными данными в ограниченной открытой области $S^-\subset\mathbb{R}^3$ по его граничным значениям на границе S, по аналогии с представлением решений уравнения Лапласа по граничным значениям его решений и производных [12, § ??, с. ??]. Для этого используем характеристическую функцию этой области $H_S^-(x)$, функцию Хевисайда $H(\tau)$ и $H_S^-(x)H(\tau)$-характеристическую функцию пространственно-временнóго цилиндра $\mathrm{C}_+=\{(\tau,x)\in\mathbb{M}:\tau\geqslant0,\ \ x\in S^-+S\}$. Их обобщённые производные имеют вид

$$\partial_jH_S^-(x)=-n_j(x)\delta_S(x),\quad \partial_tH(t)=\delta(t),$$

$$\partial_j(H_S^-(x)H(t))=-n_j(x)\delta_S(x)H(t),\quad \partial_t(H_S^-(x)H(t))=H_S^-(x)\delta(t),$$

где сингулярная обобщённая функция $n_j(x)\delta_S(x)$ – простой слой на поверхности S, $n(x)=(n_1,n_2,n_3)$ – внешняя единичная нормаль на границе S.

Введём регулярный бикватернион

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=\mathbf{B}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau),$$

равный решению $\mathbf{B}(\tau,x)$ этого уравнения с нулевыми начальными условиями в этой области с её границей, а вне их равный нулю. Обобщённые частные производные этого бикватерниона в $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$ равны:

$$\partial_\tau\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}H_S^-(x)H(\tau)+\mathbf{B}0H_S^-(x)\delta(\tau),$$

$$\partial_j\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_j}H_S^-(x)H(\tau)-\mathbf{B}_S(\tau,x)n_j(x)\delta_S(x)H(\tau). \tag{9.1}$$

Здесь первые слагаемые справа – классические частные производные бикватерниона, $\mathbf{B}_S(\tau,x)$ – значения $\mathbf{B}(\tau,x)$ на S. С учётом представлений (9.1) и нулевых начальных условий $(\mathbf{B}0(x) = 0)$ действие биградиента на этот бикватернион имеет вид

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} = \{(\partial_\tau b - i\operatorname{div} B) + \partial_\tau B + i(\operatorname{grad} b + \operatorname{rot} B)\}H_S^-(x)H(\tau) + \\ + i\{(n(x),B) - bn(x) - [n(x),B]\}\delta_S(x)H(t). \tag{9.2}$$

Тогда действие МД-операторов на этот бикватернион в пространстве обобщённых бикватернионов, с учётом уравнения (1.1) и равенства (9.2), запишется следующим образом:

$$\mathbf{D}^+\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau) + \\ + i\{(n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S]\}\delta_S(x)H(t).$$

Обозначим $\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau)$ и введём сингулярный граничный бикватернион

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x) = \mathbf{\Gamma}(\tau,x)(\tau,x)\delta_S(x)H(t) = i\{(n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S]\}\delta_S(x)H(t).$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}(\tau,x)$ – плотность простого слоя на пространственно-временно́й цилиндрической поверхности: $\tau \geqslant 0$, $x \in S$. В результате приходим к уравнению

$$\mathbf{D}^+\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{G}}(\tau,x) + \hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x),$$

решение которого имеет вид бикватернионной свёртки правой части с функцией Грина:

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \mathbf{U}\circ\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{U}^+\circ\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) + \mathbf{U}\circ\hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x). \tag{9.3}$$

Первое слагаемое в правой части вычисляется по формуле

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\tau,x) = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = (u+U) * (\hat{g} + \hat{G}) =$$

$$= \left(u * \hat{g} - \sum_{k=1}^{3} U_k * \hat{G}_k\right) + \sum_{k=1}^{3}(u * \hat{G}_k + \hat{g} * U_k)e_k + \sum_{k=1}^{3} e_k \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm}(U_l * \hat{G}_m),$$

где покомпонентные свёртки берутся согласно определению свёрток в пространстве обобщённых функций.

Для регулярных $\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{G}(\tau,x)$ они имеют следующее интегральное представление:

$$4\pi\mathbf{B}_1 = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^-\left\{\frac{e^{-(f\|x-y\|+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * \hat{\mathbf{G}}\right\} =$$

$$= \nabla^- \int\limits_{r(x,y)\leqslant\tau} \frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{r(x,y)}\mathbf{G}(\tau - r(x,y),y)H_S^-(y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3 +$$

$$+ \mathbf{F}^-\circ \int\limits_{r(x,y)\leqslant\tau} \frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{r(x,y)}\mathbf{G}(\tau - r(x,y),y)H_S^-(y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3, \tag{9.4}$$

$r(x,y) = \|x-y\|$. Вычисляя второе слагаемое, получаем

$$4\pi\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x) = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x) =$$

$$= i\nabla^- \frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * ((n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S])\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ i\mathbf{F}^-\circ\left\{\frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * \right\}((n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S])\delta_S(x)H(t) =$$

$$= i\nabla^- \int\limits_S \frac{(n(y), B_S(\tau - r(x,y), y)) - b_S(\tau - r(x,y), y)n(y) - [n(x), B_S(\tau - r(x,y), y)]}{r(x,y)\exp(r(x,y)f + i(F, x-y))}\, dS(y) +$$

$$+ i\mathbf{F}^- \circ \int\limits_S \frac{i(n(y), B_S(\tau - r(x,y), y)) - b_S(\tau - r(x,y), y)n(y) - [n(x), B_S(\tau - r(x,y), y)]}{r(x,y)\exp(r(x,y)f + i(F, x-y))}\, dS(y).$$

Здесь вначале берём интегралы, а затем применяем МД-оператор к полученному бикватерниону.

Формулы (9.3), (9.4) представляют собой аналог формулы Грина. Они позволяют вычислить бикватернион внутри области по его граничным значениям. Заметим, что все интегралы и их производные существуют только при $x \notin S$. Для граничных точек сами интегралы являются слабо сингулярными и сходящимися, а вот их производные таковыми не являются. Здесь наблюдаются те же особенности, что и у решений волнового уравнения в трёхмерном пространстве [13].

Исследование интегральных представлений бикватерниона на границе позволяет получить граничные сингулярные интегральные уравнения для решений начально-краевых задач для биволновых уравнений и корректно поставить краевые условия на границе для построения их решений. Это можно сделать предельным переходом по $x \notin S$ в аналоге формулы Грина к границе S аналогично как для краевых задач для волнового уравнения [13].

Заключение. Используя построенные аналоги формулы Кирхгофа и Грина, можно получить аналоги формулы Грина при ненулевых начальных условиях, разлагая решение уравнения (1.1) на два бикватерниона, один из которых удовлетворяет начальным условиям, а другой – нулевым. Формулы (9.3), (9.4) дают его представление с учётом действующих источников. Условия на границе для второго бикватерниона получим, используя граничные значения исходного бикватерниона и учитывая поправки от первого построенного бикватерниона. После по этим формулам построим второй бикватернион.

Поскольку уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, построенные решения могут использоваться для решения задач электродинамики и теории поля. Они могут применяться в экспериментах, так как полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая сингулярные граничные интегральные уравнения.

Заметим также, что трансформация электрогравимагнитных (ЭГМ) зарядов и токов под действием внешних ЭГМ полей описывается бикватернионными дифференциальными уравнениями типа (1.1) (см. [17, 18]). Построенные здесь решения можно использовать для решения краевых задач в ЭГМ полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132272, 2018–2020 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W.R.* On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions // Proc. of the Royal Irish Academy. 1844. V. 2. P. 424–434.
2. *Edmonds J.D.* Eight Maxwell equations as one quaternionic // Amer. J. Phys. 1978. V. 46. № 4. P. 430.
3. *Шпилькер Г.Л.* Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1359–1363.
4. *Rodrigues W.A. Jr., Capelas de Oliviera E.* Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spinClifford bundles // Int. J. of Theor. Phys. 1990. V. 29. P. 379–412.
5. *Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D.* Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. 1992. V. 3. P. 207–220.
6. *Adler S.L.* Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York, 1995.
7. *De Leo S., Rodrigues W.A. Jr.* Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions // Int. J. Theor. Phys. 1997. V. 36. P. 2725–2757.

8. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. Т. 1. № 1. С. 111–127.
9. *Acevedo M., Lopez-Bonilla M.J., Sanchez-Meraz M.* Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations // Apeiron. 2005. V. 12. № 4. P. 371.
10. *Марчук Н.Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М., 2009.
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
13. *Алексеева Л.А.* Граничные интегральные уравнения начально-краевой задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1451–1453.
14. *Алексеева Л.А.* Метод обобщённых функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Мат. журн. 2006. Т. 6. № 1. С. 16–32.
15. *Alexeyeva L.A.* Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford Algebras and Their Applications. 2012. V. 7. № 1. P. 19–39.
16. *Alexeyeva L.A.* Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // Proc. of the 8th Congress of ISAAC. Moscow, Aug 22–27, 2011. Moscow, 2011. P. 153–161.
17. *Alexeyeva L.A.* Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimag-netic fields, charges, currents, and their interactions // J. of Phys. Math. 2009. V. 1. P. 15.
18. *Alexeyeva L.A.* Biquaternionic form of laws of electro-gravimagnetic charges and currents interactions // J. of Modern Phys. 2016. V. 7. P. 1351–1358.

Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
г. Алматы

Поступила в редакцию 14.08.2020 г.
После доработки 16.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 625–634

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПОЛОСЕ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2021 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассматривается первая начально-краевая задача для одномерной по пространственной переменной параболической по Петровскому системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами, заданной в полуполосе с негладкой боковой границей. Доказана теорема о единственности классического решения этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121050058

Введение. Работа посвящена исследованию единственности классического решения первой начально-краевой задачи для одномерной по пространственной переменной параболической по Петровскому (см. [1]) системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей.

Хорошо известно (см., например, [2, 3]), что из принципа максимума вытекает единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения. В [4] доказано, что для параболических систем, вообще говоря, принцип максимума места не имеет.

Из [5; 6, с. 706] следует единственность классического решения в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\alpha\in(0,1)$, первой начально-краевой задачи для параболической системы, если боковые границы криволинейной трапеции – достаточно гладкие кривые, а именно, принадлежат классу $H^{1+\alpha/2}$, т.е. функции, задающие указанные границы, обладают первой производной из пространства $H^{\alpha/2}[0,T]$.

Особый интерес указанная задача представляет в случае областей с негладкими боковыми границами, в частности, имеющими “клювы”. В [7–9] (см. также [10–12]) установлены существование и единственность классического решения в пространстве $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для параболических систем в криволинейной трапеции с боковыми границами, принадлежащими классу Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$.

Классическая разрешимость рассматриваемой задачи исследовалась также в топологически более слабых пространствах Дини–Гёльдера. В случае одного уравнения существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи в полуполосе с негладкой боковой границей хорошо известны. В [3, 13] установлены соответствующие теоремы при условии, что функция, задающая негладкую боковую границу, принадлежит пространству $H^{1/2+\omega}[0,T]$, здесь и до конца введения ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (определение см. в п.1).

В [14, 15] доказана теорема о существовании классического решения в пространстве $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для параболической системы в полуполосе с негладкой боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$. Единственность полученного решения в этих работах не рассматривалась.

Естественно, возникает вопрос о исследовании единственности классического решения первой начально-краевой задачи в случае параболической системы в полуполосе с боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$. Отметим, что если не требовать, чтобы модуль непрерывности ω из определения класса $H^{1/2+\omega}$, которому по предположению должна принадлежать боковая граница, удовлетворял условию Дини, то, как показано в работах [16, 17], на ней могут появиться слишком узкие “клювы”, что может привести к неограниченному росту вблизи боковой границы первой производной решения по пространственной переменной. Таким образом, указанное условие на гладкость боковой границы является минимальным для исследования классической разрешимости параболических начально-краевых задач в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$.

В настоящей работе устанавливается теорема о единственности классического решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ с дополнительным ограничением на характер гладкости решения по временнóй переменной и на характер роста его второй производной по пространственной переменной вблизи боковой границы. При доказательстве используется метод, разработанный в [11].

Работа состоит из трёх пунктов. В первом пункте приводятся необходимые определения и формулируется основная теорема. Второй пункт посвящён построению матрицы Грина первой начально-краевой задачи. В третьем пункте доказывается основная теорема.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Пусть фиксировано положительное число T. Введём нужные в дальнейшем функциональные пространства. Через $C[\tau,T]$, $\tau\in[0,T)$, обозначим линейное нормированное пространство непрерывных вектор-функций (матриц) $\psi:[\tau,T]\to\mathbb{R}^m$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, с нормой $\|\psi;[\tau,T]\|^0:=\max\limits_{t\in[\tau,T]}|\psi(t)|$, а его подпространство, состоящее из вектор-функций (матриц), обращающихся при $t=\tau$ в нуль, через $\underset{0}{C}[\tau,T]$, т.е. $\underset{0}{C}[\tau,T]=\{\psi\in C[\tau,T]:\psi(\tau)=0\}$. Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под нормой $|a|$ (соответственно нормой $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Рассмотрим в полосе $D=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T)\}$ некоторую область Ω такую, что $\overline{\Omega}\bigcap\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\neq\varnothing$. Обозначим через $C(\overline{\Omega})$ линейное пространство непрерывных ограниченных вектор-функций (матриц) $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0:=\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$ и его подпространство $\underset{0}{C}(\overline{\Omega}):=\{u\in C(\overline{\Omega}):u(x,0)=0\}$. Определим также линейное нормированное пространство

$$C^{1,0}(\overline{\Omega}):=\{u\in C(\overline{\Omega}):\partial_x u\in C(\overline{\Omega})\}$$

с нормой $\|u;\Omega\|^{1,0}:=\sum_{l=0}^{1}\|\partial_x^l u;\Omega\|^0$ и его подпространство

$$\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}):=\{u\in C^{1,0}(\overline{\Omega}):\partial_x^l u\in \underset{0}{C}(\overline{\Omega}),\quad l=0,1\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Функция $\nu(z)$, $z\geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если при некоторой положительной постоянной C неравенство $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$ выполняется для всех $z_1\geqslant z_2\geqslant 0$.

Следуя [18, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\omega(0)=0$. Заметим, что

$$\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\}\leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\}$$

для некоторых положительных постоянных C, c и всех $x\in\mathbb{R}$ и $t>0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\widetilde{\omega}(z):=\int\limits_0^z\omega(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0. \tag{1}$$

Через $\mathfrak{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1). Если $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\widetilde{\omega}$ – также модуль непрерывности, причём $\omega(z)\leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z\geqslant 0$. Кроме того, если ω – модуль непрерывности, то функция $\omega^*(z)=\omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом если $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\omega^*\in\mathfrak{D}$ и при $z\geqslant 0$ имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z)=2\widetilde{\omega}(z^{1/2})$.

Зафиксируем некоторый модуль непрерывности ω. Введём следующие линейные нормированные пространства: $H^{q+\omega}[\tau,T]$, $q\in[0,1)$, – пространство вектор-функций (матриц) $\psi\in\in C[\tau,T]$, для которых

$$\|\psi;[\tau,T]\|^{q+\omega}:=\|\psi;[\tau,T]\|^0+\sup_{t,t+\Delta t\in(\tau,T)}\left\{\frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty;$$

$\underset{0}{H}{}^{q+\omega}[\tau,T]:=\{\psi\in H^{q+\omega}[\tau,T]:\psi(0)=0\}$; $H^\omega(\overline{\Omega})$ – пространство вектор-функций (матриц) $u\in C(\overline{\Omega})$ таких, что

$$\|u;\Omega\|^\omega:=\|u;\Omega\|^0+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_{x,t}u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty;$$

$\underset{0}{H}{}^\omega(\overline{\Omega}):=\{u\in H^\omega(\overline{\Omega}):u(x,0)=0\}$; $\underset{0}{H}{}^{1,\omega}(\overline{\Omega})$ – пространство вектор-функций (матриц) $u\in\in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$, для которых

$$\|u;\Omega\|^{1,\omega}:=\|u;\Omega\|^{1,0}+\sup_{(x,t)(x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}+$$
$$+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty.$$

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t)\equiv(\partial_t^{1/2}\psi)(t):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [8, 14, 15], введём линейные нормированные пространства

$$\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]:=\{\psi\in\underset{0}{C}[0,T]:\partial^{1/2}\psi\in\underset{0}{C}[0,T]\}$$

с нормой $\|\psi;[0,T]\|^{1/2}:=\|\psi;[0,T]\|^0+\|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0$ и

$$\underset{0}{C}{}^{1/2,\omega}[0,T]:=\{\psi\in\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]:\partial^{1/2}\psi\in\underset{0}{H}{}^\omega[0,T]\}$$

с нормой $\|\psi;[0,T]\|^{1/2,\omega}:=\|\psi;[0,T]\|^0+\|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^\omega$.

Замечание 1. Если $\psi\in\underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$, где $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\psi\in\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ (см. [19]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [8]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [1]) оператор

$$Lu:=\partial_t u-\sum_{l=0}^2 A_l(x,t)\partial_x^l u,\quad u=(u_1,\ldots,u_m)^{\text{т}},\quad m>1,$$

где $A_l=\|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ – $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(a) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r\geqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $r=\overline{1,m}$;

(b) имеют место включения $a_{ijl}\in H^{\omega_0}(\overline{D})$, $i,j=\overline{1,m}$, $l=0,1,2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z)=\int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y\omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает.

Известно (см. [20]), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений (ф.м.р.) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$, и справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{2}$$

$2k+l \leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$.

Далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от числа T, размерности m, коэффициентов оператора L и кривой Σ, определяемой ниже.

В полосе D выделяется полуполоса $\Omega = \{(x,t)\in D : x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t)\in\overline{\Omega} : x = g(t)\}$, причём функция g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \tag{3}$$

где $\omega_1 \in \mathfrak{D}$ и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z>0$, почти убывает.

В области Ω рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \quad u|_\Sigma = \psi. \tag{4}$$

Известна следующая

Теорема 1 [14, 15]. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a), (b) и для функции g, задающей кривую Σ, – условие (3). Тогда для любой вектор-функции $\psi \in \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ классическим решением задачи (4) является потенциал простого слоя*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{5}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерры первого рода

$$\int\limits_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t), \quad t\in[0,T].$$

Решение (5) обладает свойствами

$$u, \partial_x u \in \underset{0}{C}(\overline{\Omega}),$$

$$|\Delta_t u(x,t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{\Omega}.$$

Если, кроме того, $\psi \in \underset{0}{C}{}^{1/2,\omega_2}[0,T]$, где ω_2 – модуль непрерывности, для которого существует $\varepsilon_2 \in (0,1)$ такое, что функция $\omega_2(z)z^{-\varepsilon_2}$, $z>0$, почти убывает, то выполнена оценка

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^{1/2,\omega_2}\omega_3(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega,$$

где $d(x,t) := |x-g(t)|$, $\omega_3 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2$.

Далее предполагаем, что для коэффициентов оператора L выполнено дополнительно условие

(c) справедливы включения $\partial_x^k a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\overline{D})$, $i,j=\overline{1,m}$, $l=0,1,2$, $0\leqslant k\leqslant l$.

Основное содержание настоящей работы составляет следующая

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a)–(c) и для функции g, задающей кривую Σ, – условие (3). Пусть, кроме того, вектор-функция $u \in \in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ – решение задачи*

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \quad u|_\Sigma = 0,$$

удовлетворяет неравенствам

$$|\Delta_t u(x,t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t) \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

и

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\omega(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{7}$$

где ω *– некоторый модуль непрерывности. Тогда* $u \equiv 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

2. Матрица Грина первой начально-краевой задачи. Для любого промежутка $\langle \tau, \eta \rangle$, $\tau, \eta \in [0,T]$, $\tau < \eta$, обозначим $\Omega_{\langle \tau,\eta \rangle} := \{(x,t) \in \Omega : t \in \langle \tau, \eta \rangle\}$. Построим матрицу Грина задачи (4), а именно, матрицу

$$G(x,t;\xi,\tau) = \Gamma(x,t;\xi,\tau) - v(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T]}, \quad (\xi,\tau) \in \Omega,$$

где Γ – ф.м.р. системы $Lu = 0$, а матрица $v(x,t;\xi,\tau)$ для любой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in \Omega$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \Omega_{(\tau,T]}, \tag{8}$$

$$v(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \overline{\Omega} \bigcap \{t = \tau\}, \tag{9}$$

$$v(\cdot\,;\xi,\tau) = \Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \ \text{ на } \ \Sigma \bigcap \{\tau \leqslant t \leqslant T\}, \tag{10}$$

где $\Psi(t;\xi,\tau) = \Gamma(g(t),t;\xi,\tau)$, $t \in (\tau,T]$, $\Psi(t;\xi,\tau) = 0$, $t = \tau$.

Замечание 2. В частном случае, когда $\omega_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, для систем с постоянными коэффициентами матрица Грина построена в [11].

Лемма. *Матрица* $\Psi(t;\xi,\tau)$ *обладает следующими свойствами:*

$$\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in H^{1/2+\omega_1}[\tau,T], \quad \Psi(\tau+0;\xi,\tau) = 0,$$

$$\|\Psi(\cdot\,;\xi,\tau);[\tau,T]\|^{1/2+\omega_1} \leqslant C(\xi,\tau) \tag{11}$$

для любых $(\xi,\tau) \in \Omega$, *где* ω_1 *– модуль непрерывности из условия (3), а* $C(\xi,\tau)$ *– положительная постоянная, зависящая только от* ξ *и* τ.

Доказательство. В силу оценок (2), условия (3) и неравенств

$$\xi > g(\tau) \quad \text{и} \quad (a-b)^2 \geqslant a^2/2 - 2b^2, \quad a,b \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

получаем

$$|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(g(t)-\xi)^2/(t-\tau)\} \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(g(\tau)-\xi)^2/(t-\tau)\}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(\xi,\tau)/(t-\tau)\}, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{13}$$

в которой $c(\xi,\tau)$ – положительная постоянная, зависящая только от ξ и τ.

Поэтому $\lim\limits_{t\to\tau+0} \Psi(t;\xi,\tau) = 0$, а значит, справедливо включение $\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in \underset{0}{C}[\tau,T]$ с оценкой $|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)$.

Докажем включение $\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in H^{1/2+\omega_1}[\tau,T]$. Проверим, что

$$|\Delta_t\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)(|\Delta t|)^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in (\tau,T]. \tag{14}$$

Не ограничивая общности, считаем $\Delta t > 0$. В случае $\Delta t \geqslant t - \tau$ оценка (14) непосредственно следует из (13). В случае $\Delta t < t - \tau$, используя оценки (2), условие (3) и неравенства (12), находим

$$|\Delta_t\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + (\Delta t)(t-\tau)^{-3/2}\}\exp\{-c(g(\tau)-\xi)^2/(t-\tau)\} \leqslant$$

$$\leqslant C(\xi,\tau)(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2}),$$

откуда вытекает оценка (14), переходя в которой к пределу при $t \to \tau + 0$, окончательно получаем доказываемое включение с оценкой (11). Лемма доказана.

Из леммы и теоремы 1 следует, что решением задачи (8)–(10) является потенциал простого слоя

$$v(x,t;\xi,\tau) = \int_{\tau}^{t} \Gamma(x,t;g(\eta),\eta)\varphi(\eta;\xi,\tau)\,d\eta, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_{(\tau,T)}, \tag{15}$$

где матричная плотность $\varphi(\cdot\,;\xi,\tau)$ принадлежит пространству $H^{\omega_4}[\tau,T]$, $\omega_4 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$, и является единственным в $C[\tau,T]$ решением интегрального уравнения Вольтерры первого рода

$$\int_{\tau}^{t} \Gamma(g(t),t;g(\eta),\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = \Psi(t;\xi,\tau), \quad t \in [\tau,T],$$

причём $\varphi(\tau+0;\xi,\tau) = 0$ для любых $(\xi,\tau) \in \Omega$. Кроме того (см. [20, 21]), матрица (15) принадлежит пространству $\underset{0}{H}{}^{1,\omega_4}(\overline{\Omega})$ и для неё справедливы оценки

$$|\partial_x^l v(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(x-g(t))^2/(t-\tau)\}, \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T]}, \quad l = 0,1;$$

$$|\partial_x^2 v(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\,d^{-1}(x,t)\,\omega_4(d(x,t)), \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T)}.$$

3. Доказательство теоремы единственности. Для оператора L рассмотрим сопряжённый к нему оператор L^*, определяемый формулой (см. [22, с. 318])

$$L^* u = \partial_t u + \sum_{l=0}^{2} (-1)^l \partial_x^l (A_l^{\mathrm{T}}(x,t)u) \equiv \partial_t u + A_2^{\mathrm{T}}(x,t)\partial_x^2 u +$$

$$+ [2\partial_x A_2^{\mathrm{T}}(x,t) - A_1^{\mathrm{T}}(x,t)]\partial_x u + [\partial_x^2 A_2^{\mathrm{T}}(x,t) - \partial_x A_1^{\mathrm{T}}(x,t) + A_0^{\mathrm{T}}(x,t)]u,$$

где A_l^{T} – транспонированная по отношению к A_l матрица, $l = 0,1,2$. Из результатов п. 2 следует, что можно построить матрицу Грина $G^*(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t) \in \Omega_{[0,\tau)}$, $(\xi,\tau) \in \Omega$, задачи

$$L^* u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x,T) = 0, \quad x \geqslant g(T), \quad u|_{\Sigma} = \psi,$$

а именно, функцию

$$G^*(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^*(x,t;\xi,\tau) - v^*(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t) \in \Omega_{[0,\tau)}, \quad (\xi,\tau) \in \Omega,$$

где Γ^* – ф.м.р. системы $L^* u = 0$, а матрица $v^*(x,t;\xi,\tau)$ для любой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in \Omega$ является решением первой начально-краевой задачи

$$L^* v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \;\text{ в }\; \Omega_{[0,\tau)},$$

$$v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \;\text{ в }\; \overline{\Omega} \bigcap \{t = \tau\},$$

$$v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = \Psi^*(\cdot\,;\xi,\tau) \;\text{ на }\; \Sigma \bigcap \{0 \leqslant t \leqslant \tau\},$$

где $\Psi^*(t;\xi,\tau) = \Gamma^*(g(t),t;\xi,\tau)$, $t \in [0,\tau)$, $\Psi^*(t;\xi,\tau) = 0$, $t = \tau$.

Известно (см. [22, с. 319]), что $\Gamma^*(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^{\mathrm{T}}(\xi,\tau;x,t)$, где Γ – ф.м.р. системы $Lu = 0$. Поэтому из оценок (2) вытекают неравенства

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma^*(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\tau-t)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(\tau-t)\}, \tag{16}$$

в которых $2k + l \leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$, $t < \tau$.

Из результатов п. 2 следует, что для любых (ξ,τ) имеет место включение

$$v^* \in \underset{0}{H}^{1,\omega_4}(\overline{\Omega}_{[0,\tau)}), \tag{17}$$

где $\omega_4 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1,$ и выполнены оценки

$$|\partial_x^l v^*(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(x-g(t))^2/(\tau-t)\}, \quad (x,t)\in\Omega_{[0,\tau)}, \quad l=0,1, \tag{18}$$

$$|\partial_x^2 v^*(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)d^{-1}(x,t)\omega_4(d(x,t)), \quad (x,t)\in\Omega_{(0,\tau)}. \tag{19}$$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольно выбранную точку $(\xi,\tau)\in\Omega$ и докажем, что $u(\xi,\tau)=0$.

Пусть $\varepsilon\in(0,\tau)$ – произвольное фиксированное число. Положим

$$G^*(x,t)=G^*(x,t;\xi,\tau), \quad \hat{G}(x,t)=(G^*)^{\mathrm{т}}(x,t), \quad v^*(x,t)=v^*(x,t;\xi,\tau).$$

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 2. Справедливо тождество

$$0=\hat{G}(x,t)Lu(x,t)+(L^*G^*)^{\mathrm{т}}(x,t)u(x,t)=\partial_t[\hat{G}(x,t)u(x,t)]-\partial_x[\hat{G}(x,t)A_2(x,t)\partial_x u(x,t)-$$

$$-(\partial_x\hat{G}(x,t))A_2(x,t)u(x,t)-\hat{G}(x,t)(\partial_x A_2(x,t))u(x,t)+\hat{G}(x,t)A_1(x,t)u(x,t)],$$

в силу которого для любых $\varepsilon\in(0,\tau)$ и $M>\max\{\max\limits_{[0,T]}|g|,|\xi|\}$ имеет место равенство

$$0=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\{\partial_t[\hat{G}(x,t)u(x,t)]\}\,dx-\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\partial_x[\hat{G}(x,t)A_2(x,t)\partial_x u(x,t)-$$

$$-(\partial_x\hat{G}(x,t))A_2(x,t)u(x,t)-\hat{G}(x,t)(\partial_x A_2(x,t))u(x,t)+\hat{G}(x,t)A_1(x,t)u(x,t)]\,dx\equiv$$

$$\equiv P(\varepsilon,M)-Q(\varepsilon,M), \tag{20}$$

где

$$P(\varepsilon,M)=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\{\partial_t[\hat{G}(x,t)u(x,t)]\}\,dx.$$

Рассмотрим вектор-функцию $P(\varepsilon,M)$. Только в доказательстве теоремы 2 примем обозначение

$$\|u\|:=\sum_{l\leqslant1}\sup_{\Omega}|\partial_x^l u|+\sup_{\Omega}\{|\Delta_t u||\Delta t|^{-1/2}\}+\sup_{\Omega}\{|\partial_x^2 u|d(x,t)\omega^{-1}(d(x,t))\}.$$

Положим $h(x,t)=\hat{G}(x,t)u(x,t),$ если $x\geqslant g(t),$ и $h(x,t)=0,$ если $x<g(t).$ Заметим, что $\partial_t h(z,t)|_{z=g(t)}=0,\ \ 0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon.$

Действительно, при $g(t)<g(t+\Delta t)$ из определения функции h следует равенство

$$h(g(t),t+\Delta t)-h(g(t),t)=0.$$

В случае $g(t)\geqslant g(t+\Delta t)$ в силу оценок (6), (16), (19) и включения (17) находим

$$|h(g(t),t+\Delta t)-h(g(t),t)|=|\hat{G}(g(t),t+\Delta t)u(g(t),t+\Delta t)|=$$

$$=|\hat{G}(g(t),t+\Delta t)-\hat{G}(g(t),t)||u(g(t),t+\Delta t)-u(g(t),t)|\leqslant C(\varepsilon)\|u\||\Delta t|\omega_4(|\Delta t|^{1/2}).$$

Поэтому существует вектор-функция $f(x,t)\equiv\partial_t h(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\tau-\varepsilon]$. Заметим, что f непрерывна на $\mathbb{R}\times[0,\tau-\varepsilon]$. В самом деле, достаточно проверить, что

$$\lim_{(x,t)\to(g(t_0),t_0)} f(x,t)=f(g(t_0),t_0)=0,\quad (x,t)\in\Omega,\quad t_0\in[0,\tau-\varepsilon]. \tag{21}$$

По теореме о среднем в силу условий на гладкость вектор-функции u и соотношений (7), (16)–(19) получаем при x, достаточно близких к $g(t)$, неравенства

$$|[\partial_t\hat{G}(x,t)]u(x,t)|=|\partial_t\hat{G}(x,t)||u(x,t)-u(g(t),t)|\leqslant C(\varepsilon)\|u\|\omega_4(d(x,t)),\quad t\in[0,\tau-\varepsilon],$$

$$|\hat{G}(x,t)\partial_t u(x,t)|=|\hat{G}(x,t)-\hat{G}(g(t),t)||\partial_t u(x,t)|\leqslant C(\varepsilon)\|u\|\omega(d(x,t)),\quad t\in[0,\tau-\varepsilon].$$

Следовательно, $f(x,t)\to 0=f(g(t),t)$ при $x\to g(t)+0$ для любого $t\in[0,\tau-\varepsilon]$. Отсюда и из равенства $f(x,t)-f(g(t_0),t_0)=f(x,t)-f(g(t),t)$ вытекает соотношение (21). Поэтому $f\in C\{[-2M,2M]\times[0,\tau-\varepsilon]\}$. Тогда

$$P(\varepsilon,M)=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{-2M}^{2M}f(x,t)\,dx=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{-2M}^{2M}\partial_t h(x,t)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\{\partial_t\int\limits_{-2M}^{2M}h(x,t)\,dx\}=\int\limits_{-2M}^{2M}h(x,\tau-\varepsilon)\,dx-\int\limits_{-2M}^{2M}h(x,0)\,dx=\int\limits_{-2M}^{2M}h(x,\tau-\varepsilon)\,dx.$$

Положим $\hat{u}(x,t)=u(x,t)$, если $x\geqslant g(t)$, и $\hat{u}(x,t)=0$, если $x<g(t)$. Тогда при $M\to+\infty$ получаем, что

$$P(\varepsilon,M)=\int\limits_{-2M}^{2M}\hat{G}(x,\tau-\varepsilon)\hat{u}(x,\tau-\varepsilon)\,dx\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{G}(x,\tau-\varepsilon)\hat{u}(x,\tau-\varepsilon)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\Gamma(\xi,\tau;x,\tau-\varepsilon)-(v^*)^{\mathrm{т}}(x,\tau-\varepsilon)]\hat{u}(x,\tau-\varepsilon)\,dx.$$

При $\varepsilon\to+0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\xi,\tau;x,\tau-\varepsilon)\hat{u}(x,\tau-\varepsilon)\,dx\to\hat{u}(\xi,\tau)=u(\xi,\tau),$$

и в силу условий на гладкость вектор-функции u и оценок (18)

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v^*)^{\mathrm{т}}(x,\tau-\varepsilon)\hat{u}(x,\tau-\varepsilon)\,dx\Big|\leqslant C\|u\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-c\frac{(x-g(t))^2}{\varepsilon}\Big\}\,dx=C\|u\|\sqrt{\varepsilon}\to 0,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{M\to+\infty}P(\varepsilon,M)=u(\xi,\tau). \tag{22}$$

Рассмотрим вектор-функцию $Q(\varepsilon,M)$. Для неё справедливо равенство

$$Q(\varepsilon,M)=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}[\hat{G}(2M,t)A_2(2M,t)\partial_x u(2M,t)-(\partial_x\hat{G}(2M,t))A_2(2M,t)u(2M,t)-$$

$$-\hat{G}(2M,t)(\partial_x A_2(2M,t))u(2M,t)+\hat{G}(2M,t)A_1(2M,t)u(2M,t)]\,dt.$$

Из оценок (2), (18) и условий на гладкость вектор-функции u следует, что

$$|Q(\varepsilon, M)| \leqslant C\|u\| \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} \sum_{l=0}^{1} [|\partial_x^l \Gamma(2M, t; \xi, \tau)| + |\partial_x^l v^*(2M, t)|]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon)\|u\| \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} \exp\left\{ -c\frac{M^2}{T} \right\} dt \to 0$$

при $M \to +\infty$, а значит,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{M\to+\infty} Q(\varepsilon, M) = 0. \qquad (23)$$

Из соотношений (20), (22), (23) вытекает нужное равенство

$$0 = \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{M\to+\infty} [P(\varepsilon, M) - Q(\varepsilon, M)] = u(\xi, \tau).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
2. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
3. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
4. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 83. С. 3–163.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
8. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
9. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247–249.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
12. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness of a solution in a Hölder class to the first initial boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the plane // J. of Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
13. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
15. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2019. https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1698733.

16. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
17. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
18. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
19. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гельдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
20. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
21. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Smoothness in the Dini space of a single layer potential for a parabolic system in the plane // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 2. P. 154–167.
22. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 635–648

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:536.24

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

© 2021 г. Р. В. Бризицкий, В. С. Быстрова, Ж. Ю. Сарицкая

Доказывается глобальная разрешимость краевых задач для уравнения реакции–диффузии–конвекции в случае, когда коэффициент реакции в уравнении и коэффициент массообмена в граничном условии нелинейно зависят от концентрации вещества. Устанавливается принцип минимума и максимума для концентрации. В общем виде доказывается разрешимость задач мультипликативного управления. В случае, когда функционалы качества и зависящие от решения коэффициенты модели дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности и устанавливается наличие принципа bang-bang.

DOI: 10.31857/S037406412105006X

1. Введение. Разрешимость краевой задачи. Интерес к исследованию краевых задач и задач управления как для линейных, так и для нелинейных моделей массо- и теплопереноса не ослабевает на протяжении достаточно длительного периода (см., например, [1–11]). Отметим, что приложения задач управления не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями. В рамках оптимизационного подхода к задачам мультипликативного управления сводятся обратные коэффициентные задачи, которые заключаются в восстановлении неизвестных коэффициентов в уравнениях и граничных условиях рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении краевых задач (см. [9, 11]).

Настоящая работа является продолжением и обобщением некоторых результатов [10–12] по исследованию краевых и экстремальных задач для полулинейных уравнений реакции–диффузии–конвекции. В отличие от [10–12] в данной статье рассматривается случай, когда от решения краевой задачи зависят коэффициенты как в уравнении, так и в граничном условии рассматриваемой модели.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, содержащей две части Γ_D и Γ_N, рассматривается следующая краевая задача для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции:

$$-\mathrm{div}\,(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\varphi = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \quad \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi/\partial n + \alpha(\varphi,\mathbf{x})\varphi) = \chi \quad \text{на} \quad \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}\in\Omega$ и физический смысл входящих в задачу (1), (2) величин следующий: искомая функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объёмная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент реакции, $\alpha(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент массообмена, функция χ имеет смысл плотности граничных источников. Далее задачу (1), (2) при заданных функциях λ, k, f, α, χ и ψ будем называть *задачей 1*, а задачу 1 при $\psi = 0$ – *задачей 1a*.

В работе сначала доказывается глобальная разрешимость задачи 1а и локальная единственность её решения в случае, когда коэффициенты реакции и массообмена k и α достаточно произвольно зависят от решения φ и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Отметим, что при $\psi = 0$ не требуется монотонность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ и $\alpha(\varphi,\mathbf{x})\varphi$, что принципиально для моделей горения (см. [13]). В случае, когда указанные слагаемые монотонны, доказывается глобальная разрешимость и нелокальная единственность решения задачи 1. Для решения задачи 1 устанавливается строгий принцип минимума и максимума.

Далее для задачи 1 формулируются задачи мультипликативного управления. При этом предполагается, что коэффициент реакции имеет вид произведения $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$. Роль управлений в рассматриваемых задачах играют функция $\beta(\mathbf{x})$ и коэффициент диффузии $\lambda(\mathbf{x})$. Разрешимость задач управления, как и разрешимость краевых задач, доказывается для коэффициентов реакции и массообмена общего вида. В случае, когда коэффициенты, зависящие от решения, а также функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем для оптимальных решений конкретных задач управления устанавливается справедливость стационарного аналога принципа bang-bang (см. о содержании этого термина ниже или в [7, 8]).

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}, |\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в пространствах $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ или $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_N}$. Введём нужные в дальнейшем функциональные пространства:

$$L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geqslant 0\}, \quad p \geqslant 3/2; \quad Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\};$$

$$H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geqslant \lambda_0 > 0 \ \text{ в } \ \Omega\}, \quad s > 3/2; \quad \mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Далее считаем, что выполняются следующие предположения:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, являющейся объединением замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N $(\Gamma = \overline{\Gamma}_D \bigcup \overline{\Gamma}_N, \ \Gamma_D \bigcap \Gamma_N = \varnothing)$, при этом поверхностная мера $\operatorname{meas}\Gamma_D$ положительна, а граница $\partial\Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых;

(ii) имеют место включения

$$\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega), \quad s > 3/2, \quad \mathbf{u} \in Z, \quad f \in L^2(\Omega), \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad \chi \in L^2(\Gamma_N);$$

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо включение $k(v,\cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p \geqslant 3/2$, не зависящего от v, и на любом замкнутом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant L_1\|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad v_1, v_2 \in B_r,$$

константа L_1 в котором зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо включение $\alpha(w,\cdot) \in L^q_+(\Gamma_N)$ для некоторого $q \geqslant 2$, не зависящего от w, и на любом замкнутом шаре $S_a = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leqslant a\}$ радиуса a выполняется неравенство

$$\|\alpha(w_1,\cdot) - \alpha(w_2,\cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant L_2\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in S_a,$$

константа L_2 в котором зависит от a, но не зависит от $w_1, w_2 \in S_a$.

Отметим, что условия (iii) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$, и позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции как от концентрации φ, так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например,

$$k(\varphi,\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^2 \ (\text{или } \ \varphi^2|\varphi|), & \text{если } \ \mathbf{x} \in Q, \\ k_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Omega \setminus \overline{Q}), & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{Q}, \end{cases}$$

где Q – открытое множество в Ω.

В свою очередь, условия (iv) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^q(\Gamma_N)$, $q \geqslant 2$, который позволяет учитывать зависимость коэффициента α от φ и $\mathbf{x}$. Например,

$$\alpha(\varphi,\mathbf{x}) = \begin{cases} |\varphi|, & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ \alpha_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Gamma_N \setminus \Gamma_0), & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Gamma_N \setminus \overline{\Gamma}_0, \end{cases}$$

где Γ_0 – открытое множество в Γ_N.

Замечание 1.1. В дальнейшем для упрощения будем писать $k(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ вместо $k(\varphi,\mathbf{x})$ и $\alpha(\varphi,\mathbf{x})$, за исключением тех случаев, где зависимость от $\mathbf{x}$ играет не менее важную роль, чем нелинейная зависимость данных коэффициентов от φ.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s\leqslant 6$ и компактно при $s<6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C_s\|\varphi\|_{1,\Omega}\quad \text{для любой}\quad \varphi\in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q\leqslant 4$ и компактно при $q<4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma: H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma_N)$ (и его сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N\subset\Gamma$) имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)}\leqslant \tilde C_q\|\varphi\|_{1,\Omega}\quad \text{для любой}\quad \varphi\in H^1(\Omega) \tag{4}$$

с константой $\tilde C_q$, зависящей от q и Γ_N.

Справедлива следующая техническая лемма (см. [14]).

Лемма 1.1. *При выполнении предположений (i), (ii) и включений $\mathbf{u}\in Z$, $\lambda\in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s>3/2$, $k_1\in L^p_+(\Omega)$, $p\geqslant 3/2$, $\alpha_1\in L^q_+(\Gamma_N)$, $q\geqslant 2$, существуют положительные константы C_0, δ_0, γ_1, зависящие только от Ω, константа γ_p, зависящая только от Ω и p, и константа γ_q, зависящая только от Ω, Γ_N и q, с которыми справедливы следующие оценки:*

$$|(\lambda\nabla\varphi,\nabla\eta)|\leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},\quad |(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(k_1\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_p\|k_1\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda\alpha_1\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\alpha_1\|_{L^q(\Gamma_N)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}\quad\text{для всех}\quad\varphi,\eta\in H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$|(\chi,h)|\leqslant\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|h\|_{1,\Omega}\quad\text{для любых}\quad\chi\in L^2(\Gamma_N)\quad\text{и всех}\quad h\in H^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\varphi)=0,\quad(\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi)\geqslant\delta_0\|\varphi\|^2_{1,\Omega}\quad\text{для любых}\quad\varphi\in\mathcal{T},$$

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi)\geqslant\lambda_*\|\varphi\|^2_{1,\Omega}\quad\text{для любых}\quad\varphi\in\mathcal{T},\quad\text{где}\quad\lambda_*\equiv\delta_0\lambda_0. \tag{6}$$

Умножим уравнение (1) на $h\in\mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω, воспользовавшись формулой Грина. Учитывая условия (2), получаем, что выполняется соотношение

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(\varphi)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)+(\lambda\alpha(\varphi)\varphi,h)_{\Gamma_N}=$$

$$=(f,h)+(\chi,h)_{\Gamma_N}\quad\text{для всех}\quad h\in\mathcal{T},\quad\text{где}\quad\varphi|_{\Gamma_D}=\psi. \tag{7}$$

Определение 1.1. Функцию $\varphi\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношению (7), назовём *слабым решением задачи 1.*

Определение 1.2. Функцию $\varphi\in\mathcal{T}$, удовлетворяющую соотношению (7) при $\psi=0$, назовём *слабым решением задачи 1а.*

Разрешимость задачи (7) при $\psi=0$ докажем с помощью теоремы Шаудера, построив отображение $G:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$, действующее по формуле $G(w)=\varphi$, $w\in\mathcal{T}$. Здесь функция $\varphi\in\mathcal{T}$ является решением линейной задачи

$$a_w(\varphi,h)=(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(w)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)+(\lambda\alpha(w)\varphi,h)_{\Gamma_N}=$$

$$=(f,h)+(\chi,h)_{\Gamma_N}\quad\text{для всех}\quad h\in\mathcal{T}. \tag{8}$$

Поскольку $k(w)\in L^p_+(\Omega)$, $p\geqslant 3/2$, и $\alpha(w)\in L^q_+(\Gamma_N)$, $q\geqslant 2$, в силу предположений (iii) и (iv), то из леммы 1.1 вытекает, что форма $a_w:\mathcal{T}\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ непрерывна и коэрцитивна с константой $\lambda_* = \delta\lambda_0$, а задача (8) в силу теоремы Лакса–Мильграма имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{T}$, и для него справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant \tilde{M}_\varphi \equiv C_*(\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}), \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{9}$$

Обозначим $B_r = \{w \in \mathcal{T} : \|w\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$, где $r = \tilde{M}_\varphi$. Из оценки (9) следует, что введённый выше оператор G отображает шар B_r в себя. Докажем, что G непрерывен и компактен на B_r. Пусть $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность из B_r. В силу рефлексивности пространства $\mathcal{T} \subset H^1(\Omega)$ и компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ существует подпоследовательность последовательности $\{w_n\}_{n=1}^\infty$, которую мы снова обозначим через $\{w_n\}_{n=1}^\infty$, и функция $w \in B_r$ такие, что $w_n \to w$ слабо в $H^1(\Omega)$, $w_n \to w$ сильно в $L^4(\Omega)$ и $w_n|_{\Gamma_N} \to$ $\to w|_{\Gamma_N}$ сильно в $L^2(\Gamma_N)$ при $n \to \infty$. Положим $\varphi_n = G(w_n)$, $\varphi = G(w)$. Эти равенства означают, что $\varphi \in \mathcal{T}$ – решение задачи (8), а $\varphi_n \in \mathcal{T}$ – решение задачи

$$(\lambda\nabla\varphi_n, \nabla h) + (k(w_n)\varphi_n, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_n, h) + (\lambda\alpha(w_n)\varphi_n, h)_{\Gamma_N} =$$
$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}, \tag{10}$$

получающейся из задачи (8) заменой w на w_n. Покажем, что $\varphi_n \to \varphi$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $n \to \infty$. Почленно вычитая равенство (8) из равенства (10), будем иметь

$$(\lambda\nabla(\varphi_n - \varphi), \nabla h) + (k(w)(\varphi_n - \varphi), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\varphi_n - \varphi), h) + (\lambda\alpha(w)(\varphi_n - \varphi), h)_{\Gamma_N} =$$
$$= -((k(w_n) - k(w))\varphi_n, h) - (\lambda(\alpha(w_n) - \alpha(w))\varphi_n, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{11}$$

Используя оценку (5) и вытекающую из (9) оценку $\|\varphi_n\|_{1,\Omega} \leqslant \tilde{M}_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, выводим, что

$$|((k(w_n) - k(w))\varphi_n, h)| + |(\lambda(\alpha(w_n) - \alpha(w))\varphi_n, h)_{\Gamma_N}| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_p L_1 \tilde{M}_\varphi \|w_n - w\|_{L^4(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_q L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega}\|w_n - w\|_{L^2(\Gamma_N)}\|h\|_{1,\Omega}. \tag{12}$$

Полагая $h = \varphi_n - \varphi$ в (11), с учётом (6) и (12) получаем оценку

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_p L_1 \tilde{M}_\varphi \|w_n - w\|_{L^4(\Omega)} + \gamma_q L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega}\|w_n - w\|_{L^2(\Gamma_N)},$$

из которой вытекает, что $\|\varphi_n - \varphi\|_{1,\Omega} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует непрерывность и компактность оператора G. Тогда в силу теоремы Шаудера G имеет неподвижную точку $\varphi = G(\varphi) \in \mathcal{T}$, которая и является решением задачи (7) при $\psi = 0$.

Установим достаточные условия единственности решения задачи (7) с $\psi = 0$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}$ – любые два её решения, разность которых $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_2)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi_2)\varphi, h)_{\Gamma_N} = -((k(\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_1, h) -$$
$$- (\lambda(\alpha(\varphi_1) - \alpha(\varphi_2))\varphi_1, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{13}$$

Рассуждая так же, как при выводе оценки (12), будем иметь

$$|((k(\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_1, h)| + |(\lambda(\alpha(\varphi_1) - \alpha(\varphi_2))\varphi_1, h)_{\Gamma_N}| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_p C_4 L_1 \tilde{M}_\varphi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_q \tilde{C}_2 L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}. \tag{14}$$

Здесь C_4 – константа, входящая в (3) при $s = 4$, а $\tilde{C}_2$ – константа из (4) при $l = 2$. Полагая $h = \varphi$ в (13), с учётом (6) и (14) приходим к оценке

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_*(\gamma_p L_1 C_4 + \gamma_q L_2 \tilde{C}_2 \|\lambda\|_{s,\Omega})\tilde{M}_\varphi \|\varphi\|_{1,\Omega}.$$

Пусть исходные данные f и χ задачи 1а таковы, что выполняется неравенство

$$(\gamma_p L_1 C_4 + \gamma_q L_2 \tilde{C}_2 \|\lambda\|_{s,\Omega})(\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}) < \lambda_*^2. \tag{15}$$

Тогда из предыдущего неравенства следует, что $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$. Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *При выполнении предположений (i)–(iv) существует слабое решение $\varphi \in \mathcal{T}$ задачи 1a и справедлива оценка (9). Если, к тому же, выполняется условие (15), то слабое решение задачи 1a единственно.*

Для доказательства разрешимости задачи 1 нам потребуется следующая лемма [14].

Лемма 1.2. *Пусть выполняется предположение (i). Тогда для любой функции $\psi \in \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ_D и с некоторой константой C_Γ, зависящей от Ω и Γ_D, справедлива оценка $\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leqslant C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$.*

В дополнение к предположениям (iii), (iv) далее считаем, что нелинейности $k(\varphi)\varphi$ и $\alpha(\varphi)\varphi$ являются монотонными в том смысле, что выполняются следующие неравенства:

(v) $(k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$;

(vi) $(\alpha(\varphi_1)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$.

Пусть также функции $k(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ ограничены в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, и константы A_2, B_2, зависящие от α, такие, что справедливы оценки:

(vii) $\|k(\varphi)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant A_1 \|\varphi\|^r_{1,\Omega} + B_1$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $p \geqslant 3/2$, $r \geqslant 0$;

(viii) $\|\alpha(\varphi)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant A_2 \|\varphi\|^l_{1,\Omega} + B_2$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $q \geqslant 2$, $l \geqslant 0$.

Решение задачи 1 ищем в виде суммы $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$, где φ_0 – заданная функция из леммы 1.2, а $\tilde\varphi \in \mathcal{T}$ – неизвестная функция. Подставляя $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$ в соотношение (7), будем иметь

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) + (\lambda\alpha(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0), h)_{\Gamma_N} =$$

$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} - (\lambda\nabla\tilde\varphi_0, \nabla h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{16}$$

Прибавив к обеим частям равенства (16) слагаемые $-(k(\varphi_0)\varphi_0, h)$ и $-(\lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N}$, получим, что для всех $h \in \mathcal{T}$ имеет место равенство

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) + (\lambda\alpha(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0) - \lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= \langle l, h\rangle \equiv (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - (k(\varphi_0)\varphi_0, h) - (\lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N}. \tag{17}$$

Применив к его правой части неравенство Гёльдера, оценки из леммы 1.1, учитывая (3), свойства (vii), (viii) и лемму 1.2, нетрудно показать, что $l \in \mathcal{T}^*$ и, более того, что

$$\|l\|_{\mathcal{T}^*} \leqslant M_l \equiv C_2\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + (C_0 C_\Gamma \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1 C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3})\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} +$$

$$+ C_\Gamma(\gamma_p(A_1 C^r_\Gamma \|\psi\|^r_{1/2,\Gamma_D} + B_1) + \gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}(A_2 C^l_\Gamma \|\psi\|^l_{1/2,\Gamma_D} + B_2))\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \tag{18}$$

Введём нелинейный оператор $A : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ по формуле

$$\langle A(\tilde\varphi), h\rangle \equiv (\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) +$$

$$+ (\lambda\alpha(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - \lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{19}$$

Для доказательства существования решения $\tilde\varphi \in \mathcal{T}$ задачи (17), эквивалентной операторному уравнению $A(\tilde\varphi) = l$, достаточно, согласно [15, с. 182], показать, что, во-первых, оператор A непрерывен и ограничен; во-вторых, оператор A монотонен, т.е. $(A(u) - A(v), u - v) \geqslant 0$ для всех $u, v \in \mathcal{T}$; и, в-третьих, оператор A является коэрцитивным на $\mathcal{T}$.

Покажем, что оператор A является непрерывным и ограниченным. Для этого вычтем соотношение (19) при $\tilde\varphi = \varphi_2$ из соотношения (19) при $\tilde\varphi = \tilde\varphi_1$. Получим, что для всех $h \in \mathcal{T}$ справедливо равенство

$$\langle A(\tilde\varphi_1) - A(\tilde\varphi_2), h\rangle = (\lambda\nabla(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), \nabla h) + (k(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0), \tilde\varphi_1 h) +$$

$$+ (k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) + (\lambda(\alpha(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - \alpha(\tilde\varphi_2 + \varphi_0))\tilde\varphi_1, h)_{\Gamma_N} +$$

$$+(\lambda\alpha(\tilde\varphi_2+\varphi_0)(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),h)_{\Gamma_N}. \tag{20}$$

Из этого равенства с учётом оценок из леммы 1.1, свойств (iii) и (iv), а также оценок (3) и (4) вытекает неравенство

$$|\langle A(\tilde\varphi_1)-A(\tilde\varphi_2),h\rangle| \leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}+\gamma_pL_1C_4\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}+$$

$$+\gamma_p\|k(\tilde\varphi_2+\varphi_0)\|_{L^p(\Omega)}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}+\gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}+$$

$$+\gamma_qL_2\tilde C_2\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}+\gamma_q\|\alpha(\tilde\varphi_2+\varphi_0)\|_{L^q(\Gamma_N)}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega},$$

из которого следует непрерывность и ограниченность оператора A.

Запишем равенство (20) в следующем виде:

$$\langle A(\tilde\varphi_1)-A(\tilde\varphi_2),h\rangle=(\lambda\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),\nabla h)+(k(\tilde\varphi_1+\varphi_0)(\tilde\varphi_1+\varphi_0)-k(\tilde\varphi_2+\varphi_0)(\tilde\varphi_2+\varphi_0),h)+$$

$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),h)+(\lambda(\alpha(\tilde\varphi_1+\varphi_0)(\tilde\varphi_1+\varphi_0)-\alpha(\tilde\varphi_2+\varphi_0)(\tilde\varphi_2+\varphi_0)),h)_{\Gamma_N}. \tag{21}$$

Подставим $h=\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2$ в (21), тогда, учитывая неравенство $(\lambda\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2))\geqslant 0$, равенство $(\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2)=0$ (см. (6)), свойства (v) и (vi), заключаем, что

$$\langle A(\tilde\varphi_1)-A(\tilde\varphi_2),\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\rangle\geqslant 0.$$

Полагая $h=\tilde\varphi$ в соотношении (19), в силу леммы 1.1 и свойств (v), (vi) приходим к неравенству

$$\langle A(\tilde\varphi),\tilde\varphi\rangle=(\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla\tilde\varphi)+(k(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0)-k(\varphi_0)\varphi_0,\tilde\varphi)+$$

$$+(\lambda\alpha(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0)-\lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0,\tilde\varphi)_{\Gamma_N}\geqslant\lambda_*\|\tilde\varphi\|^2_{1,\Omega}\quad\text{для всех}\quad\tilde\varphi\in\mathcal{T}, \tag{22}$$

которое означает коэрцитивность оператора A на $\mathcal{T}$.

Из сказанного выше вытекает, что существует решение $\tilde\varphi\in\mathcal{T}$ задачи (16). Полагая $h=\tilde\varphi$ в (16), вследствие неравенств (22) и (18) получаем оценку $\|\tilde\varphi\|_{1,\Omega}\leqslant C_*\|l\|_{\mathcal{T}^*}$, $C_*=\lambda_*^{-1}$.

Тогда функция $\varphi=\tilde\varphi+\varphi_0$ является решением задачи 1, и имеет место

$$\|\varphi\|_{1,\Omega}\leqslant M_\varphi\equiv C_*M_l+C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \tag{23}$$

где константа M_l введена в (18), а C_Γ – константа из леммы 1.2.

Покажем, что решение задачи 1 единственно. Пусть φ_1 и $\varphi_2\in H^1(\Omega)$ – любые два решения задачи 1. Тогда их разность $\varphi=\varphi_1-\varphi_2\in\mathcal{T}$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(\varphi_1)\varphi_1-k(\varphi_2)\varphi_2,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)+$$

$$+(\lambda(\alpha(\varphi_1)\varphi_1-\alpha(\varphi_2)\varphi_2),h)_{\Gamma_N}=0\quad\text{для всех}\quad h\in\mathcal{T}.$$

Полагая здесь $h=\varphi$, в силу леммы 1.1 и свойств (v), (vi) приходим к неравенству $\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega}\leqslant$ $\leqslant 0$, из которого вытекает, что $\varphi_1=\varphi_2$ в Ω.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1.2. *При выполнении предположений (i)–(viii) существует единственное слабое решение $\varphi\in H^1(\Omega)$ задачи 1 и для него справедлива оценка (23).*

В рамках подхода из [16, гл. 3, § 1] докажем принцип максимума и минимума для φ.

Пусть в дополнение к (i)–(viii) выполняется предположение

(ix) имеют место двойные неравенства

$$\psi_{\min}\leqslant\psi\leqslant\psi_{\max}\ \text{ п.в. на }\ \Gamma_D,\quad f_{\min}\leqslant f\leqslant f_{\max}\ \text{ п.в. в }\ \Omega,$$

$$\lambda_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}\ \text{ п.в. в }\ \overline{\Omega}\quad\text{и}\quad\chi_{\min}\leqslant\chi\leqslant\chi_{\max}\ \text{ п.в. на }\ \Gamma_N.$$

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$, $\chi_{\min}$, $\chi_{\max}$ – неотрицательные, а $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – положительные числа.

Для упрощения основного неравенства будем считать, что выполняется предположение

(x) коэффициенты реакции и массообмена имеют следующий вид: $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $0 < a_{\min} \leqslant a(\mathbf{x}) \leqslant a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω, при этом $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(t)t)$ при $t > 0$, где $E(k_1(t)t)$ – область значений функции $k_1(t)t$;

$\alpha(\varphi, \mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\alpha_1(\varphi)$, где $\alpha_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $0 < b_{\min} \leqslant b(\mathbf{x}) \leqslant b_{\max} < \infty$ п.в. на Γ_N, при этом $[\chi_{\min}/b_{\max}\lambda_{\max}, \chi_{\max}/b_{\min}\lambda_{\min}] \in E(\alpha_1(r)r)$ при $r > 0$, где $E(\alpha_1(t)t)$ – область значений функции $\alpha_1(t)t$.

Лемма 1.3. *При выполнении предположений (i)–(x) для решения $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1 справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \leqslant \varphi \leqslant M \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad M = \max\{\psi_{\max}, M_1, M_2\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1, m_2\}. \tag{24}$$

Здесь M_1 и M_2 – минимальные корни уравнений $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ и $\alpha_1(M_2)M_2 = \chi_{\max}/\lambda_{\min}b_{\min}$, а m_1 и m_2 – максимальные корни уравнений $k(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ и $\alpha(m_2)m_2 = \chi_{\min}/\lambda_{\max}b_{\max}$.

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \leqslant M$ п.в. в Ω. Для этого введём функцию $\tilde{\varphi} = \max\{\varphi - M, 0\}$. Очевидно, что принцип максимума или оценка $\varphi \leqslant M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество Ω, в котором $\varphi > M$. Из [17, с. 152] и [18] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и $\tilde{\varphi} \in \mathcal{T}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) \quad \text{и} \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0.$$

С учётом этого, полагая $h = \tilde{\varphi}$ в равенстве (7), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) + (\lambda\alpha(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} = (f, \tilde{\varphi}) + (\chi, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N}. \tag{25}$$

Очевидно, что

$$(k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M), \tilde{\varphi})_{Q_M}$$

и для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ в силу свойств (v) справедливо неравенство

$$0 \leqslant (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi}) = (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}, \tag{26}$$

поскольку $\tilde{\varphi} = 0$ в $\Omega \setminus \overline{Q}_M$. Пусть также на некотором участке $\Gamma_N^0 \subset \Gamma_N$ выполняется неравенство $\varphi|_{\Gamma_N^0} > M$. Тогда

$$(\lambda\alpha(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} = (\lambda\alpha(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0} = (\lambda\alpha(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M), \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0}. \tag{27}$$

Аналогично, для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ в силу свойства (vi) верно неравенство

$$0 \leqslant (\lambda\alpha(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - \lambda\alpha(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} = (\lambda\alpha(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - \lambda\alpha(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0}.$$

С учётом этого, вычитая $(k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})$ и $(\lambda\alpha(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N}$ из обеих частей равенства (25), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} + (\lambda(\alpha(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - \alpha(M, \cdot)M), \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0} =$$

$$= (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} + (\chi - \lambda\alpha(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0}.$$

Отсюда в силу леммы 1.1 и (26), (27) вытекает оценка

$$\lambda_*\|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \leqslant (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} + (\chi - \lambda\alpha(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N^0},$$

из которой следует, что если для коэффициентов $k(\varphi, \mathbf{x})$ и $\alpha(\varphi, \mathbf{x})$ вида (x) постоянная M выбрана согласно условию (24), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства принципа минимума введём функцию $\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}$. Рассуждая так же, как для функции $\tilde{\varphi}$, заключаем, что $\tilde{w} \in \mathcal{T}$. Будем предполагать, что в измеримом открытом множестве $Q_m \subset \Omega$ и на участке $\Gamma_N^1 \subset \Gamma_N$ справедливо неравенство $\varphi < m$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{w}+m,\cdot)(\tilde{w}+m) - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\lambda(\alpha(\tilde{w}+m,\cdot)(\tilde{w}+m) - \alpha(m,\cdot)m), \tilde{w})_{\Gamma_N^1} =$$
$$= (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\chi - \lambda\alpha(m,\cdot)m, \tilde{w})_{\Gamma_N^1},$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_*\|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \leqslant (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\chi - \lambda\alpha(m,\cdot)m, \tilde{w})_{\Gamma_N^1}.$$

Из полученной оценки, как и выше, вытекает, что $\tilde{w} = 0$ для постоянной m, выбранной согласно (24).

Замечание 1.2. Для степенных коэффициентов параметры M_i, m_i, $i = 1, 2$, легко вычисляются. Например, при $k(\varphi) = \varphi^2$ и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/3}$, $m_1 = f_{\min}^{1/3}$ и $M_2 = (\chi_{\max}/\lambda_{\min})^{1/2}$, $m_2 = (\chi_{\min}/\lambda_{\max})^{1/2}$.

Замечание 1.3. Условие $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(t)t)$ при $t > 0$ в (x) можно заменить условием, что функциональные относительно M_1 и m_1 уравнения $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ и $k(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ имеют хотя бы по одному решению $M_1 > 0$ и $m_1 > 0$. Аналогичную альтернативу имеет условие $[\chi_{\min}/b_{\max}\lambda_{\max}, \chi_{\max}/b_{\min}\lambda_{\min}] \in E(\alpha_1(r)r)$ при $r > 0$. Если функции $k_1(t)$ и $\alpha_1(r)$ монотонны, то параметры M_1, M_2 и m_1, m_2 определяются однозначно.

2. Мультипликативная задача управления. При исследовании задач управления будем полагать, что для функции $k(\varphi, \mathbf{x})$ выполняется предположение

(xi) коэффициент реакции имеет вид $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, где $\beta(\mathbf{x}) \in H_+^1(\Omega)$, $k_0(\varphi) \in L_+^2(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$, и удовлетворяет свойству (vii) при $p > 2$; кроме того, в любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r справедливо неравенство

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant L_3\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in B_r. \tag{28}$$

Здесь константа L_3 зависит от радиуса r и не зависит от функций $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

Несложно показать, что условия из (xi) описывают частный случай функции $k(\varphi, \mathbf{x})$, удовлетворяющей предположению (iv). Действительно (см. также [12]),

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leqslant \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant C_6\|\beta\|_{1,\Omega}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Для постановки задачи управления разобьём множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесём функции $\mathbf{u}$, $k_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, f, χ и ψ, и группу управлений, куда отнесём функции λ и β, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$ и $K_2 \subset H_+^1(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Введём пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, положим $u = (\lambda, \beta)$, $K = K_1 \times K_2$, зададим оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ формулами

$$\langle F_1(\varphi, u), h\rangle = (\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N},$$
$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi$$

и запишем равенство (7) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\beta\|_{1,\Omega}^2 \to \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{29}$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{\rm ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, \ J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (29) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ и K – ограниченное множество, либо $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi^d|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2. \tag{30}$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения (i)–(viii), (xi) и условия (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество $Z_{\rm ad}$ не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (29).*

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, u_m) \in Z_{\rm ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) = \inf_{(\varphi,u)\in Z_{\rm ad}} J(\varphi, u) \equiv J^*.$$

Из условия (jj) и теоремы 1.2 вытекают оценки

$$\|\lambda_m\|_{s,\Omega} \leqslant c_1, \quad \|\beta_m\|_{1,\Omega} \leqslant c_2, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \leqslant c_3, \tag{31}$$

в которых константы c_1, c_2, c_3 не зависят от m. Из этих оценок и условия (j) вытекает, что существуют слабые пределы $\lambda^* \in K_1$, $\beta^* \in K_2$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Указанные подпоследовательности обозначим также через $\{\lambda_m\}$, $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$ соответственно, причём в силу компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при $p < 6$, $H^{1/2}(\Gamma_N) \subset L^q(\Gamma_N)$ при $q < 4$, $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ и $H^{s-1/2}(\Gamma_N) \subset L^\infty(\Gamma_N)$ при $s > 3/2$ считаем, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости:

$$\begin{gathered}
\varphi_m \to \varphi^* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \text{слабо в} \quad L^6(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^s(\Omega), \quad s < 6, \\
\varphi_m|_{\Gamma_N} \to \varphi^*|_{\Gamma_N} \quad \text{слабо в} \quad H^{1/2}(\Gamma_N), \quad \text{слабо в} \quad L^4(\Gamma_N) \quad \text{и сильно в} \quad L^q(\Gamma_N), \quad q < 4, \\
\beta_m \to \beta^* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \text{слабо в} \quad L^6(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad p < 6, \\
\lambda_m \to \lambda^* \quad \text{слабо в} \quad H^s(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^\infty(\Omega), \\
\lambda_m|_{\Gamma_N} \to \lambda^*|_{\Gamma_N} \quad \text{слабо в} \quad H^{s-1/2}(\Gamma_N) \quad \text{и сильно в} \quad L^\infty(\Gamma_N), \quad s > 3/2.
\end{gathered} \tag{32}$$

Очевидно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$, т.е. что

$$\begin{gathered}
(\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) + (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla\varphi^*, h) + (\lambda^* \alpha(\varphi^*)\varphi^*, h)_{\Gamma_N} = \\
= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}.
\end{gathered} \tag{33}$$

Для этого заметим, что пара функций (φ_m, u_m) удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered}
(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) + (\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\varphi_m, h) + (\lambda_m \alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} = \\
= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}.
\end{gathered} \tag{34}$$

Перейдём в (34) к пределу при $m \to \infty$. Из сходимостей (32) вытекает, что все линейные слагаемые в (34) переходят в соответствующие слагаемые в (33). Исследуем поведение при $m \to \infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h)$.

Справедливо равенство

$$\begin{gathered}
(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) - (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) = \\
= ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\beta^*(k_0(\varphi_m)\varphi_m - k_0(\varphi^*)\varphi^*), h).
\end{gathered} \tag{35}$$

Для сходимости к нулю второго слагаемого в правой части этого равенства достаточно, чтобы $k_0(\varphi_m) \to k_0(\varphi^*)$ сильно в $L^2(\Omega)$ и $\beta^* h\varphi_m \to \beta^* h\varphi^*$ слабо в $L^2(\Omega)$ для всех $h \in \mathcal{T}$ при $m \to \infty$. Действительно, из этих свойств вытекает сильная сходимость в $L^1(\Omega)$ произведения указанных последовательностей, или

$$(k_0(\varphi_m)\varphi_m - k_0(\varphi^*)\varphi^*, \beta^* h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{36}$$

Сильная сходимость $k_0(\varphi_m) \to k_0(\varphi^*)$ в $L^2(\Omega)$ при $m \to \infty$ следует из предположения (x), а из (32) вытекает, что $\beta^* h\varphi_m \to \beta^* h\varphi_m$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Поскольку пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно вложено в $\mathcal{T}$, то существует последовательность $\{h_n\} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, сходящаяся к h по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Используя $\{h_n\}$, для первого слагаемого в (35) получаем

$$((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) = ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h - h_n) + ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h_n).$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\beta_m - \beta^*\|_{L^6(\Omega)}$, $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega$, вытекающей из (x), из сходимости $\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$ следует существование для любого $\varepsilon > 0$ такого номера $N = N(\varepsilon, h)$, что

$$|((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h - h_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\beta_m - \beta^*\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N \ \text{ и } \ m \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega$ из сходимости $\|\beta_m - \beta^*\|_{L^4(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$ следует существование такого номера $M = M(\varepsilon, h)$, что

$$|((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\beta_m - \beta^*\|_{L^4(\Omega)}\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}\|h_n\|_{L^8(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{для всех} \quad m \geqslant M \ \text{ и } \ n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Из оценок (37) и (38) вытекает, что $((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Тогда с учётом сходимости (36) получаем, что $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Для слагаемого $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h).$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (32) получим, что $(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$. Применяя неравенство Гёльдера, заключаем в силу (32) и (31), что

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h)| \leqslant \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi_m\|_\Omega\|\nabla h\|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$.

Для нелинейного слагаемого $(\lambda_m \alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N}$ имеем равенство

$$(\lambda_m \alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha(\varphi^*)\varphi^*, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= ((\lambda_m - \lambda^*)\alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^*(\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*))\varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N}.$$

Поскольку $\lambda^* \alpha(\varphi^*)h \in L^{4/3}(\Gamma_N)$, то $(\varphi_m - \varphi^*, \lambda^* \alpha(\varphi^*)h)_{\Gamma_N} \to 0$ при $m \to \infty$ в силу (32).

Применив далее неравенство Гёльдера, в силу предположения (iv) и равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$ получим, что

$$|(\lambda^*(\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*))\varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \leqslant \|\lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)}\|\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}\|h\|_{L^4(\Gamma_N)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Используя неравенство Гёльдера, в силу (32), равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$ и вытекающей из свойства (viii) и (31) равномерной ограниченности по m величины $\|\alpha(\varphi_m)\|_\Omega$ будем иметь

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \leqslant \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \|\alpha(\varphi_m)\|_{\Gamma_N} \|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)} \|h\|_{L^4(\Gamma_N)} \to 0$$

при $m \to \infty$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega) \times H^s(\Omega) \times H^1(\Omega)$, то из сказанного выше следует, что $J(\varphi^*, u^*) = J^*$.

Замечание 2.1. Функционалы в (30) удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

Следующим этапом в исследовании экстремальной задачи (29) является вывод системы оптимальности, которая даёт ценную информацию о дополнительных свойствах оптимальных решений. На основе её анализа устанавливается, в частности, единственность и устойчивость оптимальных решений (см. детали, например, в [10–12] и [19, 20]).

Пусть, в дополнение к (i)–(xi), выполняется следующее предположение:

(xii) функции $k_0(\varphi)\varphi$ и $\alpha(\varphi)\varphi$ непрерывно дифференцируемы по Фреше и их производные удовлетворяют условиям:

$(k_0(\varphi)\varphi)' = b(\varphi)$, где $b(\varphi) \in L^2_+(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$;

$(\alpha(\varphi)\varphi)' = a(\varphi)$, где $a(\varphi) \in L^2_+(\Gamma_N)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Введём сопряжённое к Y пространство $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$. Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi, \hat u) = (\hat\varphi, \hat\lambda, \hat\beta)$ является линейным оператором $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \to Y$, ставящим в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)(h) = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat y_1 \in \mathcal{T}^*$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются по $\hat\varphi$ и τ соотношениями

$$\langle \hat y_1, \tau\rangle = (\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, h) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) \quad \text{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_{\Gamma_D}.$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряжённый к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач [21], введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, который будем называть *сопряжённым состоянием*, и введём лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, u)\rangle_{\Gamma_D},$$

где $\langle\zeta, \cdot\rangle_{\Gamma_D} = \langle\zeta, \cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^*\times H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

Так как $\hat\beta b(\hat\varphi) \in L^{3/2}_+(\Omega)$ и $\hat\lambda a(\hat\varphi) \in L^2_+(\Gamma_N)$, то из [14] следует, что для любых функций $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, h) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) = (f, h) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}, \quad \text{где} \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi.$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ – изоморфизм, а из [21] вытекает

Теорема 2.2. *Пусть выполняются предположения (i)–(viii), (xi), (xii) и условия (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по φ в точке $\hat\varphi$ и локальный минимум в задаче (29) достигается в точке $(\hat\varphi, \hat u) \in H^1(\Omega) \times K$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^*\mathbf{y}^* = -J'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ в $H^1(\Omega)^*$, эквивалентное тождеству*

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, \theta) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_{\Gamma_D} = \\ = -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle \quad \textit{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \tag{39}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat\varphi, \hat u, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat\varphi, u, \mathbf{y}^*)$ для любого $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat\lambda, \lambda - \hat\lambda)_{s,\Omega} + ((\lambda - \hat\lambda)\nabla\hat\varphi, \nabla\theta) + ((\lambda - \hat\lambda)\alpha(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta)_{\Gamma_N} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in K_1,$$
$$\mu_2(\hat\beta, \beta - \hat\beta)_{1,\Omega} + ((\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \beta \in K_2. \tag{40}$$

3. Анализ однопараметрической задачи управления. Свойство bang-bang. В данном пункте работы устанавливаются дополнительные свойства оптимального решения следующей задачи управления:

$$J(\varphi) \equiv (1/2)I(\varphi) \to \inf, \quad F(\varphi,\beta) = 0, \quad (\varphi,\beta) \in H^1(\Omega) \times K_3, \tag{41}$$

роль управления в которой играет функция β, тогда как λ считается заданной функцией.

Пусть выполняется условие

(jjj) $K_3 \subset L^6_+(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество.

Докажем разрешимость задачи (41) в случае, когда $k_0(\varphi) = \varphi^2$. Очевидно, что для функции $\beta k_0(\varphi)$ справедливо неравенство (28), поскольку для его выполнения достаточно, чтобы $\beta \in L^6(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения (i), (ii), (iv), (vi) (viii) и условие (jjj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество $Z_{\rm ad}$ не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi,\beta) \in H^1(\Omega) \times K_3$ задачи (41).*

Доказательство. Пусть $(\varphi_m,\beta_m) \in Z_{\rm ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m) = \inf_{(\varphi,\beta)\in Z_{\rm ad}} J(\varphi) \equiv J^*, \quad F(\varphi_m,\beta_m) = 0.$$

Из условия (jjj) и теоремы 1.2 вытекают следующие оценки:

$$\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \leqslant c_1, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \leqslant c_2,$$

где константы c_1, c_2 не зависят от m. Из этих оценок и условия (jjj) следует, что существуют слабые пределы $\beta^* \in K_3$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$.

Единственным отличием от доказательства теоремы 2.1 является доказательство сходимости $(\beta_m\varphi_m^3, h) \to (\beta^*(\varphi^*)^3, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$ при условии, что $\beta_m \to \beta^*$ слабо в $L^6(\Omega)$ при $m \to \infty$.

Справедливо равенство

$$(\beta_m\varphi_m^3, h) - (\beta^*(\varphi^*)^3, h) = (\beta_m - \beta^*, (\varphi^*)^3 h) + (\beta_m(\varphi_m^3 - (\varphi^*)^3), h).$$

Для всех $h \in \mathcal{T}$ из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$|(\beta_m(\varphi_m^3 - (\varphi^*)^3), h)| \leqslant 2\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^3(\Omega)}(\|\varphi_m\|^2_{L^6(\Omega)} + \|\varphi^*\|^2_{L^6(\Omega)})\|h\|_{L^6(\Omega)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Так как $(\varphi^*)^3 h \in L^{3/2}(\Omega)$, то $(\beta_m - \beta^*, (\varphi^*)^3 h) \to 0$ при $m \to \infty$.

Для задачи (41) также справедлив аналог теоремы 2.2, поскольку $\hat\beta\hat\varphi^2 \in L^2_+(\Omega)$, при этом уравнение (39) и неравенство (40) принимают вид

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + 3(\hat\beta\hat\varphi^2\tau, \theta) + (\lambda a(\hat\varphi)\tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_{\Gamma_D} =$$

$$= -(1/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle \quad \text{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \tag{42}$$

$$((\beta - \hat\beta)\hat\varphi^3, \theta) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \beta \in K_3. \tag{43}$$

Пусть вместо условия (jjj) выполняется более жёсткое условие

(jjj$'$) $\beta_{\min} \leqslant \beta \leqslant \beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta \in K_3$, где $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$ – положительные числа.

Очевидно, что условие (jjj$'$) задаёт частный случай выпуклого, ограниченного и замкнутого множества, введённого в (jjj).

Покажем, что оптимальное управление $\hat\beta(\mathbf{x})$ задачи (41) обладает свойством bang-bang, согласно которому оно принимает одно из двух значений $\beta_{\min}$ или $\beta_{\max}$ в зависимости от знака функции $\theta(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} \in \Omega$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.1 из [22, с. 67].

Лемма 3.1. *При выполнении условия (jjj′) неравенство (43) эквивалентно неравенству* $(\beta-\hat\beta)\hat\varphi^3\theta \geqslant 0$ *п.в. в* Ω *для всех* $\beta\in K_3$.

Замечание 3.1. Лемма 3.1 может быть доказана методом от противного. Предположим, что существует функция $\beta_1\in K_3$, с которой на множестве $D\subset\Omega$, $\operatorname{meas} D>0$, выполняется неравенство $(\beta_1-\hat\beta)\hat\varphi^3\theta<0$ п.в. в D. Рассмотрим функцию β_2 такую, что $\beta_2=\hat\beta$, если $\mathbf{x}\notin D$, и $\beta_2=\beta_1$, если $\mathbf{x}\in D$. Очевидно, что $\beta_2\in K_3$ и для неё справедливо неравенство

$$((\beta_2-\hat\beta)\hat\varphi^3,\theta)=((\beta_1-\hat\beta)\hat\varphi^3,\theta)_D<0,$$

противоречащее (43).

Из лемм 3.1 и 1.3 вытекает

Следствие 3.1. *Неравенство (43) эквивалентно неравенству*

$$(\beta-\hat\beta)\theta\geqslant 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \text{для всех} \quad \beta\in K_3. \tag{44}$$

Из (44) следует, что если $\theta<0$ п.в. в $D_1\subseteq\Omega$, то $\beta\leqslant\hat\beta$ п.в. в D_1 для всех $\beta\in K_3$. Тогда $\hat\beta=\beta_{\max}$ п.в. в D_1. В свою очередь, $\hat\beta=\beta_{\min}$ п.в. в $D_2\subseteq\Omega$, если $\theta>0$ п.в. в D_2.

Обратимся к функционалам $I_i(\varphi)$, $i=1,2$, введённым равенствами (30). Очевидно, что если $I_i(\hat\varphi)>0$, то $\hat\varphi\neq\varphi^d$ в $Q_1\subseteq Q$, $\operatorname{meas} Q_1>0$. Покажем, что при этом $\theta\neq 0$ по крайней мере п.в. в Q_1.

Пусть $I(\varphi)=I_1(\varphi)$. Выбирая в соотношении (42) функцию τ из $H_0^1(\Omega)$ и рассуждая так же, как в [14], приходим к равенству

$$-(\operatorname{div}\hat\lambda\nabla\theta)+3\hat\beta\hat\varphi^2\theta-\mathbf{u}\cdot\nabla\theta=-(\hat\varphi-\varphi^d)\chi_Q \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{45}$$

где χ_Q – характеристическая функция подобласти $Q\subset\Omega$. Из (45) вытекает, что $\theta\neq 0$ п.в. в Q_1. Используя (42), несложно показать, что аналогичный результат верен для функционала I_2.

Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения (i), (ii), (iv), (vi), (ix) и условие (jjj′). Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\hat\varphi,\hat\beta)\in H^1(\Omega)\times K_3$ *задачи (41), которому соответствует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^*=(\theta,\zeta)\in Y^*$, *удовлетворяющий соотношениям (42), (43). Пусть* $I(\hat\varphi)=I_i(\hat\varphi)>0$, $i=1,2$. *Тогда* $\hat\beta=\beta_{\min}$, *если* $\theta>0$, *и* $\hat\beta=\beta_{\max}$, *если* $\theta<0$.

Следствие 3.2. Если $I(\hat\varphi)=I_i(\hat\varphi)>0$, $i=1,2$, то оптимальное управление $\hat\beta$ задачи (41) не может быть внутренней точкой множества K_3.

Замечание 3.2. Если существует подмножество $D_0\subset\Omega$, $\operatorname{meas} D_0>0$, на котором $\theta=0$, то в этом подмножестве управление $\hat\beta$ принимает значение $\beta_{\max}$ или $\beta_{\min}$, а свойство bang-bang для задачи (41) является *не строгим.* Если $\theta\neq 0$ п.в. в Ω, то свойство bang-bang для задачи (41) называют *строгим*, так как не нужно уточнять поведение $\hat\beta$ при $\theta=0$ (см. [8]). Например, если $I(\varphi)=(1/2)\|\varphi-\varphi^d\|_\Omega^2$ и вместо $I(\hat\varphi)>0$ выполняется более жёсткое условие $\hat\varphi\neq\varphi^d$ п.в. в Ω, то из равенства (45) вытекает, что $\theta\neq 0$ п.в. в Ω.

Заключение. Отметим, что интерес к свойству bang-bang вызван исследованием задач управления, в которых из практических соображений не используется регуляризация. В частности, такая постановка задач управления используется при исследовании прикладных задач тепловой и электромагнитной маскировки (см., например, работу [23] и приведённые в ней ссылки).

Исследования Бризицкого Р.В. и Сарицкой Ж.Ю. выполнены в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (тема 075-01095-20-00), исследования Быстровой В.С. – при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2019-1878).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Control problems for convection-diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Var. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2006. Т. 16. № 1. С. 76–101.
4. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механика и техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
5. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Pointwise control of the Boussinesq system // Systems Contr. Lett. 2011. V. 60. P. 249–255.
6. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
7. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
8. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.
9. *Алексеев Г.В., Левин В.А.* Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 32–36.
10. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции-диффузии-реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
11. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
12. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
13. *Belyakov N.S., Babushok V.I., Minaev S.S.* Influence of water mist on propagation and suppression of laminar premixed // Combustion Theory and Modeling. 2018. V. 22. № 2. P. 394–409.
14. *Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
16. *Ладыженская О.Н., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.
17. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
18. *Berninger H.* Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators // Domain Decomposition Methods in Sci. and Engineering XVIII. Jerusalem, 2009. P. 169–176.
19. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 993–1004.
20. *Алексеев Г.В.* Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 12. С. 1863–1878.
21. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
22. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
23. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 135. P. 1269–1277.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 09.04.2020 г.
После доработки 08.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 649–654

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МЕРЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРЁХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ–СЖАТИЯ ВЯЗКОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2021 г. Д. В. Георгиевский

Рассматривается нестационарное трёхосное растяжение–сжатие движущегося и изменяющего в процессе движения линейные размеры (при постоянном объёме) параллелепипеда, заполненного ньютоновской вязкой жидкостью. Приводится постановка линеаризованной задачи в терминах трёхмерных возмущений, наложенных на основной процесс. Для исследования этой задачи применяется метод интегральных соотношений, основанный на использовании вариационных неравенств для оценок квадратичных функционалов. Данные оценки приводят к достаточным интегральным признакам устойчивости по энергетической мере при малых возмущениях – к признакам устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости. Выводится система линейных неравенств, включающих два характерных числа Рейнольдса, при выполнении которой начальная трёхмерная картина возмущений заведомо экспоненциально устойчива.

DOI: 10.31857/S0374064121050071

1. Кинематика трёхосного растяжения–сжатия пространства. Рассмотрим течение несжимаемой однородной ньютоновской жидкости с плотностью ρ и динамической вязкостью μ во всём трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ на полубесконечном интервале времени $t > 0$. Положим, что при эйлеровом описании движения компоненты вектора (v_1, v_2, v_3) скорости являются следующими функциями $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и t:

$$v_1 = -k(t)x_1, \quad v_2 = -m(t)x_2, \quad v_3 = (k+m)(t)x_3, \tag{1.1}$$

где $k(t)$ и $m(t)$ – заданные при $t > 0$ непрерывно-дифференцируемые функции. Как видим, поле скорости (1.1) обеспечивает несжимаемость и соответствует нестационарному трёхосному растяжению–сжатию сплошной среды в $\mathbb{R}^3$.

Из уравнений (1.1) при начальных условиях $x_j|_{t=0} = \xi_j$, $j = 1, 2, 3$, следует лагранжев закон движения:

$$x_1 = \xi_1 \exp\biggl(-\int_0^t k(\tau)\,d\tau\biggr), \quad x_2 = \xi_2 \exp\biggl(-\int_0^t m(\tau)\,d\tau\biggr), \quad x_3 = \xi_3 \exp\biggl(\int_0^t (k+m)(\tau)\,d\tau\biggr).$$

Плоскости, состоящие из лагранжевых частиц и параллельные в начальный момент координатным плоскостям, движутся параллельно самим себе. Следовательно, материальные частицы, принадлежащие при $t = 0$ параллелепипеду

$$\Omega_0 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : a_{10} < \xi_1 < a_{20}, \;\; b_{10} < \xi_2 < b_{20}, \;\; c_{10} < \xi_3 < c_{20}\}, \tag{1.2}$$

где a_{i0}, b_{i0}, c_{i0} – вещественные постоянные, $i = 1, 2$, остаются при $t > 0$ принадлежащими параллелепипеду

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1(t) < x_1 < a_2(t), \;\; b_1(t) < x_2 < b_2(t), \;\; c_1(t) < x_3 < c_2(t)\}, \tag{1.3}$$

при этом

$$a_i(t) = a_{i0} \exp\biggl(-\int_0^t k(\tau)\,d\tau\biggr), \quad b_i(t) = b_{i0} \exp\biggl(-\int_0^t m(\tau)\,d\tau\biggr), \quad c_i(t) = c_{i0} \exp\biggl(\int_0^t (k+m)(\tau)\,d\tau\biggr),$$

где $i = 1, 2$. В силу несжимаемости жидкости объём параллелепипеда Ω не зависит от времени:

$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) \equiv (a_{20} - a_{10})(b_{20} - b_{10)}(c_{20} - c_{10}).$$

Найдём напряжённое состояние, соответствующее в вязкой среде кинематике (1.1). Ненулевые компоненты тензора напряжений Коши $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ равны

$$\sigma_{11} = -p - 2\mu k, \quad \sigma_{22} = -p - 2\mu m, \quad \sigma_{33} = -p + 2(k + m), \tag{1.4}$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ – давление в несжимаемой среде, удовлетворяющее трём уравнениям Навье–Стокса:

$$p_{,1} = \rho(\dot{k} - k^2)x_1, \quad p_{,2} = \rho(\dot{m} - m^2)x_2, \quad p_{,3} = -\rho(\dot{k} + \dot{m} + (k + m)^2)x_3, \tag{1.5}$$

здесь запятые в индексе означают частное дифференцирование по соответствующей координате или по времени. Интегралом уравнений (1.5) служит функция

$$p = \frac{\rho}{2}[(\dot{k} - k^2)x_1^2 + (\dot{m} - m^2)x_2^2 - (\dot{k} + \dot{m} + (k + m)^2)x_3^2] + p_0(t), \tag{1.6}$$

содержащая в качестве слагаемого произвольное давление $p_0(t)$, которое по смыслу представляет собой давление в начале координат.

Сузим далее область, занимаемую вязкой средой, со всего трёхмерного пространства до параллелепипеда Ω (см. (1.3)), тем самым переходя к анализу процесса трёхосного растяжения–сжатия параллелепипеда. В такого рода процессах, важных в технологии обработки материалов [1, 2], функции $k(t)$ и $m(t)$ обычно периодичны с соизмеримыми между собой периодами. В дальнейшем для общности изложения условия периодичности налагать не будем.

2. Линеаризованная задача в возмущениях и её анализ методом интегральных соотношений. Положим, что рассмотренный выше процесс, характеризуемый скоростями (1.1) и напряжениями (1.4), (1.6), является *основным*, или *невозмущённым*. Наложим на него трёхмерную картину возмущений $\delta v_i(\mathbf{x}, t)$, $\delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $i, j = 1, 2, 3$. Функции времени a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, k и m, а следовательно, и границы параллелепипеда Ω (см. (1.3)) не претерпевают изменений в возмущённом движении по сравнению с основным процессом. Начальные значения $\delta v_i(\mathbf{x}, 0)$ считаются известными во всей области Ω_0 (см. (1.2)).

Запишем замкнутую линеаризованную систему четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных функций $\delta v_i(\mathbf{x}, t)$ и $\delta p(\mathbf{x}, t)$. Для упрощения будем опускать знаки вариаций δ:

$$\begin{gathered}
-p_{,1} + \mu\Delta v_1 = \rho(v_{1,t} - kv_1 - kx_1v_{1,1} - mx_2v_{1,2} + (k + m)x_3v_{1,3}),\\
-p_{,2} + \mu\Delta v_2 = \rho(v_{2,t} - mv_2 - kx_1v_{2,1} - mx_2v_{2,2} + (k + m)x_3v_{2,3}),\\
-p_{,3} + \mu\Delta v_3 = \rho(v_{3,t} + (k + m)v_3 - kx_1v_{3,1} - mx_2v_{3,2} + (k + m)x_3v_{3,3}),\\
v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где Δ – трёхмерный оператор Лапласа.

Однородные кинематические граничные условия заданы на шести движущихся плоских гранях параллелепипеда Ω:

$$\mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0: \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0, \tag{2.2}$$

и означают, что в возмущённом движении распределение скоростей на этих гранях такое же, как и в основном, т.е. описывается эйлеровым законом (1.1).

Для аналитического исследования задачи (2.1), (2.2) воспользуемся методом интегральных соотношений [3], оперирующим с квадратичными функционалами, построенными на векторном поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$. Введём обозначения для некоторых таких зависящих от t функционалов:

$$J_1^2(t) = \int\limits_{\Omega} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(\mathbf{x}, t)\, d\Omega \equiv \int\limits_{\Omega} |\mathbf{v}|^2(\mathbf{x}, t)\, d\Omega, \tag{2.3}$$

$$J_2^2(t) = \int\limits_{\Omega} (v_{j,i} v_{j,i})(\mathbf{x}, t)\, d\Omega \equiv \int\limits_{\Omega} (|\mathbf{v}_{,1}|^2 + |\mathbf{v}_{,2}|^2 + |\mathbf{v}_{,3}|^2)(\mathbf{x}, t)\, d\Omega.$$

По повторяющимся два раза индексам, обозначенным малыми латинскими буквами, производится суммирование от 1 до 3.

Умножим первое уравнение в системе (2.1) на v_1, второе на v_2, третье на v_3, затем сложим полученные равенства и проинтегрируем по Ω в предположении, что все интегралы существуют. Примем во внимание равенство

$$\int\limits_{\Omega} p_{,i} v_i \, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} p v_i n_i \, d\Sigma - \int\limits_{\Omega} p v_{i,i} \, d\Omega, \tag{2.4}$$

справедливое в силу четвёртого уравнения системы (2.1) и однородных граничных условий (2.2) (n_i – компоненты единичной внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$), а также равенство

$$\int\limits_{\Omega} v_{i,t} v_i \, d\Omega = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2)_{,t} (\mathbf{x}, t)\, d\Omega = \frac{1}{2} \frac{dJ_1^2}{dt}, \tag{2.5}$$

которое имеет место в силу формулы дифференцирования по времени интеграла с зависящими от t пределами:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)\, d\Omega = \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \\
+ \dot{c}_2 \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1, x_2, c_2(t), t)\, dx_1\, dx_2 - \dot{c}_1 \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1, x_2, c_1(t), t)\, dx_1\, dx_2 + \\
+ \dot{b}_2 \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1, b_2(t), x_3, t)\, dx_1\, dx_3 - \dot{b}_1 \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1, b_1(t), x_3, t)\, dx_1\, dx_3 + \\
+ \dot{a}_2 \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} f(a_2(t), x_2, x_3, t)\, dx_2\, dx_3 - \dot{a}_1 \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} f(a_1(t), x_2, x_3, t)\, dx_2\, dx_3.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

В качестве f в (2.5) выступает функция $|\mathbf{v}|^2$, равная нулю на всех шести гранях параллелепипеда Ω. Поэтому подынтегральные функции в шести двукратных интегралах в (2.6) нулевые. Кроме того, выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega} (v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2 + v_3 \Delta v_3)\, d\Omega = -J_2^2, \tag{2.7}$$

опять же на основании однородных граничных условий (2.2).

С учётом равенств (2.4), (2.5) и (2.7) из системы (2.1) следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_1^2}{dt} = K - \nu J_2^2, \tag{2.8}$$

где ν – кинематическая вязкость ньютоновской среды, а зависящий от t квадратичный функционал K имеет вид

$$K = \int\limits_{\Omega} (k v_1^2 + m v_2^2 - (k+m) v_3^2 + k x_1 v_{i,1} v_i + m x_2 v_{i,2} v_i - (k+m) x_3 v_{i,3} v_i)\, d\Omega.$$

Воспользуемся теперь [4, с. 29–30] неравенством Коши–Буняковского для функций из пространства $L_2(\Omega)$:

$$K \leqslant MJ_1^2 + |k|l_1\|v_{i,1}\|\|v_i\| + |m|l_2\|v_{i,2}\|\|v_i\| + |k+m|l_3\|v_{i,3}\|\|v_i\|, \tag{2.9}$$

где

$$M(t) = \max\{|k(t)|, |m(t)|, |(k+m)(t)|\}, \quad l_\alpha(t) = \sup_\Omega |x_\alpha|,$$
$$l(t) = \max_{\alpha=1,2,3} l_\alpha = \max\{|a_1(t)|, |a_2(t)|, |b_1(t)|, |b_2(t)|, |c_1(t)|, |c_2(t)|\}. \tag{2.10}$$

В неравенстве (2.9) и всюду далее имеется в виду норма пространства $L_2(\Omega)$.

Так как произведение не превосходит полусуммы квадратов, верхнюю оценку (2.9) функционала K можно продолжить следующим образом:

$$K \leqslant MJ_1^2 + \frac{|k|}{2}(l_1^2\|v_{1,1}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_1^2\|v_{2,1}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_1^2\|v_{3,1}\|^2 + \|v_3\|^2) +$$
$$+ \frac{|m|}{2}(l_2^2\|v_{1,2}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_2^2\|v_{2,2}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_3^2\|v_{3,2}\|^2 + \|v_3\|^2) +$$
$$+ \frac{|k+m|}{2}(l_3^2\|v_{1,3}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_3^2\|v_{2,3}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_3^2\|v_{3,3}\|^2 + \|v_3\|^2). \tag{2.11}$$

Пусть далее $\Lambda^2(t)$ – минимизирующий множитель в неравенстве Фридрихса

$$J_2^2(\mathbf{v}) \geqslant \Lambda^2(t)J_1^2(\mathbf{v}) \tag{2.12}$$

для всех векторных полей $\mathbf{v}$ с компонентами $v_i \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющими условиям (2.2). На явном нахождении функции $\Lambda^2(t)$ остановимся позже.

Из неравенств (2.11), (2.12) следует, что при выполнении условия

$$2\nu > Ml^2, \quad t > 0, \tag{2.13}$$

левая часть равенства (2.8) допускает оценку

$$\frac{dJ_1^2}{dt} \leqslant G(t)J_1^2, \quad G = 5M - \Lambda^2(2\nu - Ml^2). \tag{2.14}$$

Неравенство (2.13), принадлежащее эвлюционному типу, приводит к окончательной искомой оценке изменения во времени функционала $J_1^2(t)$:

$$J_1^2(t) \leqslant J_1^2(0)\exp\biggl(\int\limits_0^t G(\tau)\,d\tau\biggr). \tag{2.15}$$

Из определения (2.3) видим, что с точностью до множителя $\rho/2$ этот квадратичный функционал имеет смысл кинетической энергии объёма Ω, построенной по полю возмущений $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ вектора скорости. В связи с этим неравенство (2.15) является энергетической, или интегральной по мере L_2, оценкой развития возмущений, наложенных на основной процесс растяжения–сжатия (1.1). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Ограниченность при $t \to \infty$ экспоненты в неравенстве (2.15), в котором функция $G(t)$ имеет вид (2.14), в совокупности с оценкой (2.13) служит достаточным условием устойчивости по Ляпунову в смысле энергетической меры (2.3) трёхмерной картины возмущений основного процесса, описываемого кинематикой (1.1).*

Стремление к нулю при $t \to \infty$ экспоненты в (2.15) в совокупности с оценкой (2.13) служит достаточным условием асимптотической устойчивости в смысле энергетической меры (2.3) этой трёхмерной картины.

3. Нахождение минимизирующего множителя $\boldsymbol{\Lambda^2(t)}$. Поскольку каждая из функций $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет граничным условиям (2.2), имеют место неравенства Фридрихса [5, § 4.1] (следующие ниже девять неравенств слева) и их следствия для интегралов по всей области Ω (девять неравенств справа):

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} v_{i,1}^2\, dx_1 \geqslant \frac{\pi^2}{(a_2-a_1)^2} \int\limits_{a_1}^{a_2} v_i^2\, dx_1 \Longrightarrow \int\limits_{\Omega} v_{i,1}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(a_2-a_1)^2} \int\limits_{\Omega} v_i^2\, d\Omega, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} v_{i,2}^2\, dx_2 \geqslant \frac{\pi^2}{(b_2-b_1)^2} \int\limits_{b_1}^{b_2} v_i^2\, dx_2 \Longrightarrow \int\limits_{\Omega} v_{i,2}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(b_2-b_1)^2} \int\limits_{\Omega} v_i^2\, d\Omega, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} v_{i,3}^2\, dx_3 \geqslant \frac{\pi^2}{(c_2-c_1)^2} \int\limits_{c_1}^{c_2} v_i^2\, dx_3 \Longrightarrow \int\limits_{\Omega} v_{i,3}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(c_2-c_1)^2} \int\limits_{\Omega} v_i^2\, d\Omega. \tag{3.3}$$

Суммируя девять неравенств справа в импликациях (3.1)–(3.3), убеждаемся, что в неравенстве (2.12) можно положить

$$\Lambda^2(t) = \pi^2((a_2-a_1)^{-2} + (b_2-b_1)^{-2} + (c_2-c_1)^{-2}). \tag{3.4}$$

Итак, функция времени $G(t)$ полностью определена. В неё в оценке (2.14) помимо постоянной кинематической вязкости ν входят функции $M(t)$, $l(t)$ и $\Lambda^2(t)$, определяемые в (2.10) и (3.4) лишь основным движением.

4. Экспоненциальные оценки устойчивости по энергетической мере. Оценку (2.15), хотя в неё и входит экспонента, в полной мере экспоненциальной назвать нельзя, поскольку $G(t)$ может быть произвольной функцией. Если же существует $G_0 = \mathrm{const}$, такая что $G(t) \leqslant \leqslant G_0$ при $t > 0$, то в силу (2.14) получаем

$$\frac{dJ_1^2}{dt} \leqslant G_0 J_1^2.$$

Это неравенство даёт уже экспоненциальную оценку

$$J_1^2(t) \leqslant J_1^2(0)\mathrm{e}^{G_0 t},$$

так что в случае $G_0 < 0$ и, разумеется, при выполнении требования (2.13) имеет место экспоненциальная устойчивость основного процесса по энергетической мере.

Пусть существуют следующие верхние и нижние грани функций:

$$\sup_{t>0} M(t) = M_0, \quad \sup_{t>0} l(t) = l_0, \quad \inf_{t>0} \Lambda^2(t) = \Lambda_0^2.$$

Тогда в силу (2.13) и (2.14) в качестве постоянной G_0 можно взять величину

$$G_0 = 5M_0 - \Lambda_0^2(2\nu - M_0 l_0^2).$$

Образуем два безразмерных числа $\mathsf{R}_1 = M_0 l_0^2/\nu$ и $\mathsf{R}_2 = M_0/(\Lambda_0^2\nu)$, по сути являющиеся числами Рейнольдса, построенными по двум характерным длинам l_0 и $1/\Lambda_0$. Доказана

Теорема 2. *Выполнения системы неравенств* $\mathsf{R}_1 < 2$, $\mathsf{R}_2 < (2 - \mathsf{R}_1)/5$ *достаточно для экспоненциальной устойчивости в смысле энергетической меры (2.3) трёхмерной картины возмущений основного процесса, описываемого кинематикой (1.1).*

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, относящиеся к оценкам развития возмущений, наложенных на другие характерные в приложениях существенно нестационарные течения сплошной среды, сформулированы в недавних работах [6–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-29-10085мк и 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin; Heidelberg; New York, 2001.
2. *Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А.* Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. М., 2009.
3. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа. 1991. Т. 25. С. 3–89.
4. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.
5. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М., 1997.
6. *Георгиевский Д.В.* Постановки линеаризованных краевых задач механики сплошной среды со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 683–690.
7. *Георгиевский Д.В.* Малые возмущения диффузионно-вихревых течений ньютоновской жидкости в полуплоскости // Прикл. математика и механика. 2020. Т. 84. № 2. С. 151–157.
8. *Georgievskii D.V., Putkaradze V.G.* Evolution of perturbations imposed on 1D nonsteady shear in viscous half-plane with oscillating boundary // Rus. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 2. P. 212–217.
9. *Георгиевский Д.В.* Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики, г. Москва,
Научный центр мирового уровня
“Сверхзвук – МГУ”, г. Москва

Поступила в редакцию 19.02.2021 г.
После доработки 19.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 655–672

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ПУАССОНА В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. **Д. П. Емельянов, И. С. Ломов**

Рассматривается краевая задача для заданного в прямоугольнике вырождающегося по одной из переменных эллиптического дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами. С использованием метода спектрального выделения особенностей построено решение этой задачи в виде ряда Пуассона – ряда по собственным функциям предельного линейного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с аналитическими коэффициентами. Получены оценки функций фундаментальной системы решений и функций Грина соответствующей этому оператору последовательности граничных задач, что позволило ослабить известные ранее условия сходимости построенного для решения ряда, в том числе в случае наличия логарифмических особенностей.

DOI: 10.31857/S0374064121050083

Введение. Рассмотрим следующую краевую задачу (задачу E согласно терминологии М.В. Келдыша [1]) для нерегулярно вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике $D=\{(x,y): 0<x<1,\ \ 0<y<b\}\equiv(0,1)\times(0,b)$:

$$u''_{xx}+y^2u''_{yy}+c(y)u'_y-a(y)u=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

$$u(0,y)=u(1,y)=u(x,b)=0,\quad |u(x,0)|<+\infty. \tag{1}$$

Коэффициенты $a(z)$, $c(z)$ дифференциального оператора при $z\in\mathbb{C}$ считаем аналитическими функциями в круге $U=\{z\in\mathbb{C}: |z|<R\}$, $R>b$ $(y=\operatorname{Re} z)$. Кроме того, функции $a(y)$ и $c(y)$ неотрицательны при $y\in[0,b]$, $c(0)=0$, правая часть уравнения $f(x,y)$ при каждом фиксированном x аналитична по y при $y\in[0,b]$ и непрерывна по совокупности переменных в $\overline{D}$.

Однородная задача (1) $(f\equiv 0)$ для области с гладкой границей была поставлена М.В. Келдышем в [1; 2, с. 299–301], им доказаны существование и единственность её классического решения. Явного вида решения приведено не было. Рассмотрены другие задачи с коэффициентом y^m при производной u_{yy}, указаны условия корректной разрешимости краевых задач в терминах показателя m и знаков коэффициентов уравнения задачи (1). Эти задачи исследовались и другими авторами. Отметим работы А.И. Янушаускаса [3, гл. 4], М.М. Смирнова [4, с. 88–94] $(0<m<2)$, Е.И. Моисеева [5, с. 73–88] (y^m – при производной u_{xx}, $m>0$), В.М. Ивакина [6] $(m>2)$, И.М. Петрушко [7] $(m=1)$ и др. Решения этих задач получены либо в виде интегралов (метод функций Грина), либо в виде биортогональных рядов; изучалось также асимптотическое поведение решений при $y\to 0$.

В [8; 9; 10, гл. X] предложен новый метод исследования таких задач – метод спектрального выделения особенностей, позволяющий построить решение задачи в виде ряда Пуассона по собственным функциям предельного оператора $(y=0)$ и указать, каким образом наличие вырождения уравнения сказывается на решении и каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи (обобщение теоремы Коши–Ковалевской). Исследован случай задачи (1) с нулевым коэффициентом $c(y)$. В [11] изучена задача (1) с ненулевым коэффициентом $c(y)$.

В данной работе продолжается изучение задачи (1). Применяется метод функции Грина для вспомогательных задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка. Это позволило снять некоторые ограничения на коэффициенты уравнения (снимается условие на “малые знаменатели”).

От задачи (1) переходим к расширенной (регуляризованной) задаче, решение которой ищем в виде ряда Пуассона

$$v(x,y,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}[\tau_k\varphi_k(y)+\eta_k(y)]\psi_k(x),$$

где φ_k, η_k – аналитические функции, представимые на $[0,b]$ рядами по степеням y, а $\psi_k(x)=\sin(\pi kx)$ – собственные функции “предельного” оператора

$$L:\ lw(x)\equiv -w''(x)+a(0)w(x),\quad x\in(0,1),\quad w(0)=w(1)=0,$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_k=-k^2\pi^2-a(0)$. Расширенная задача получается из исходной задачи (1) после перехода в пространство бесконечной размерности (по аналогии с методом регуляризации сингулярных возмущений [10, гл. 1, § 2]), $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots)$ – новые независимые переменные, τ_k отвечает своему собственному значению λ_k, $k=1,2,\ldots$ При $\tau_k=(y/b)^{r_k}$ (r_k записаны ниже) решение расширенной задачи переходит в решение задачи (1). Новые переменные позволяют описать особенности решения, связанные с вырождением эллиптического оператора.

Для нахождения функций φ_k, η_k приходим к необходимости решить серию задач следующего вида (далее обозначаем неизвестную функцию буквой $y=y(x)$ с нижними индексами):

$$\begin{gathered}x^2y_k''+c(x)y_k'-(a(x)+\pi^2k^2)y_k=f_k(x),\quad x\in(0,b),\\ |y_k(0)|<+\infty,\quad y_k(b)=0,\end{gathered}\tag{2}$$

где $k\in\mathbb{N}$, а $f_k(t)$ – коэффициенты спектрального разложения $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\psi_k(x)$.

В п. 1 исследуются задачи (2). Для задачи (2) получены оценки функции Грина и её производной (через параметр k). Исследованы функции из фундаментальной системы решений задачи (2), для которых также получены необходимые оценки. Подобные результаты для функции Грина в самосопряжённом случае для ОДУ без вырождения следуют, например, из результатов [12, гл. I]. Общие результаты для задачи Коши для систем ОДУ без вырождения изложены в [13, гл. VI].

Вернёмся к задаче (1). Установлено (в [8; 9; 10, гл. X] при $c(y)=0$ и [11]), что при выполнении условия (условие на “малые знаменатели”)

$$\min_{n\in\mathbb{N}_0}|n(n-1)+nc'(0)-\pi^2k^2-a(0)|\geqslant \mathrm{const}\times\pi^2k^2q_0^{\pi k},\quad q_0>b/R,\quad k\in\mathbb{N},$$

и некоторых требованиях на правую часть $f(x,y)$ (например, аналитичность в $\overline{D}$) классическое решение задачи (1) существует и представляется рядом

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k(y)+(y/b)^{r_k}\varphi_k(y))\sin(\pi kx),\tag{3}$$

функции $\eta_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ в котором являются аналитическими в круге U. Ряд сходится равномерно в $\overline{D}$ и допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y в области D.

Условие на малые знаменатели выполняется, если, например, значения $a(0)$ и $c'(0)$ рациональны. Это условие не является устойчивым относительно малых возмущений коэффициентов уравнения. В данной работе приведённый результат будет доказан без использования условия на малые знаменатели.

Результат работы можно трактовать как обобщение теоремы Коши–Ковалевской на вырождающиеся эллиптические уравнения рассматриваемого вида – предложенная форма решения указывает, каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи.

В п. 2 результаты, установленные в п. 1, применены для построения решения задачи (1).

1. Оценки функции Грина краевой задачи для квадратично вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения.

1.1. Свойства решений дифференциального уравнения с произвольным вырождением. Установим ряд свойств решений однородных уравнений более общего вида. Данные свойства будут полезны нам в дальнейшем. Рассмотрим уравнения

$$x^m y_k'' + c(x)y_k' - (a(x)+\pi^2k^2)y_k = 0, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

где m – произвольное положительное число.

Лемма 1. *Решение уравнения (4) при* $a(x)+\pi^2k^2>0$ *не может иметь положительного максимума или отрицательного минимума во внутренней точке никакого отрезка* $T\subset$ $\subset[0,b]$.

Доказательство. Докажем утверждение для положительного максимума. Случай минимума доказывается аналогично. Пусть $\xi\in T\setminus\partial T$ – точка положительного максимума. Так как решение y_k уравнения (4) аналитично в точке ξ в силу аналитичности коэффициентов дифференциального оператора, то выполняются необходимые условия максимума: $y_k'(\xi)=0$, $y_k''(\xi)\leqslant 0$. Тогда для решения y_k в точке ξ в силу уравнения получаем

$$\xi^m y_k''(\xi) = (a(\xi)+\pi^2k^2)y_k(\xi) > 0,$$

поскольку $y_k(\xi)>0$ по предположению. Следовательно, так как $\xi^m>0$, выполняется неравенство $y_k''(\xi)>0$ – противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что проведённое доказательство верно и для любого вещественного показателя m.

Лемма 2. *Каждое нетривиальное решение уравнения (4) при* $a(x)+\pi^2k^2>0$ *имеет на отрезке* $[0,b]$ *не более одного нуля. Если этот нуль отличен от точки* $x=0$, *то он является простым.*

Доказательство. Предположим, что решение y_k обращается в нуль в точках ξ_1 и ξ_2 отрезка $[0,b]$. Рассмотрим его на $T=[\xi_1,\xi_2]$. В силу леммы 1 $y_k\equiv 0$ на T, а в силу теоремы единственности аналитических функций $y_k\equiv 0$ и на $[0,b]$, что противоречит условию леммы. Таким образом, произвольное решение y_k обращается в нуль не более чем в одной точке.

Пусть $y_k(\xi)=0$, $\xi\neq 0$. Если кратность данного нуля больше единицы, то в силу теоремы о единственности решения задачи Коши $y_k\equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует номер* $k_0\in\mathbb{N}$ *такой, что при каждом* $k\geqslant k_0$ *всякое нетривиальное решение уравнения (4), обращающееся в нуль на одном из концов отрезка* $[0,b]$, *будет строго монотонным.*

Доказательство. Используя уравнение (4), выразим решение y_k через его производные:

$$y_k = \frac{x^m y_k'' + c(x)y_k'}{a(x)+\pi^2k^2} \equiv A_k(x)y_k'' + C_k(x)y_k'. \tag{5}$$

Отметим, что функции $a(x)$, $c(x)$, $A_k(x)$ и $C_k(x)$ являются ограниченными функциями в следующем смысле:

$$\|a\|_{C^1[0,b]}, \|c\|_{C^1[0,b]}, \|A_k\|_{C[0,b]}, \|C_k\|_{C[0,b]} \leqslant M = \mathrm{const}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Дифференцируя уравнение (4) по x, получаем

$$x^m y_k''' + mx^{m-1}y_k'' + c(x)y_k'' + c'(x)y_k' - [a(x)+\pi^2k^2]y_k' - a'(x)y_k = 0. \tag{6}$$

Подставив выражение для $y_k(x)$ из представления (5) в уравнение (6), получим следующее дифференциальное соотношение для $y_k'(x)$:

$$x^m(y_k')'' + [mx^{m-1}+c(x)-a'(x)A_k(x)](y_k')' - [a(x)-c'(x)+a'(x)C_k(x)+\pi^2k^2](y_k') = 0.$$

В силу равномерной ограниченности коэффициентов последнего уравнения выберем номер k_0 таким, чтобы имело место неравенство

$$a(x)-c'(x)+a'(x)C_k(x)+\pi^2k^2>0, \quad x\in[0,b], \quad k\geqslant k_0.$$

Тогда для последнего уравнения выполнены все условия леммы 2, следовательно, y'_k может обращаться в нуль на $[0,b]$ не более чем в одной точке. Если это граничная точка, то $y'_k(x)$ не обращается в нуль на интервале $(0,b)$, а значит, сохраняет на нём знак, из чего следует строгая монотонность решения y_k.

Предположим, что $y'_k(\xi)=0$, $\xi\in(0,b)$. Не ограничивая общности, пусть $y_k(\xi)>0$. Если $y''_k(\xi)<0$, то ξ – точка локального положительного максимума функции $y_k(x)$, что противоречит лемме 1. Следовательно, $y''_k(\xi)>0$. По условию леммы $y_k(\eta)=0$ при $\eta=0$ или $\eta=b$, а тогда существует точка $\zeta\in(\xi,\eta)$ такая, что $y_k(\zeta)>y_k(\xi)>0=y_k(\eta)$, но это также противоречит лемме 1. Поэтому $y'_k(x)\neq 0$, $x\in(0,b)$. Но тогда $y'_k(x)$ сохраняет знак, а значит, $y_k(x)$ строго монотонна. Лемма доказана.

1.2. Ограниченные решения однородной задачи. Далее будем считать, что $m=2$.

Исследуем решения следующих задач (однородные уравнения задачи (2) с её краевым условием в точке нуль, $k\in\mathbb{N}$):

$$x^2y''_k+c(x)y'_k-a(x)y_k-\pi^2k^2y_k=0,\quad x\in[0,b],$$

$$|y_k(0)|<+\infty. \tag{7}$$

Разложим коэффициенты задачи в ряды Маклорена

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad c(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n. \tag{8}$$

Отметим, что при рассматриваемой постановке задачи (1) коэффициент c_1 неотрицателен.

В соответствии с [9, 11] проведём “регуляризацию” уравнения задачи (7). Оставим только главные члены из разложений в ряды Маклорена коэффициентов уравнения:

$$x^2y''_k+xc_1y'_k-(a_0+\pi^2k^2)y_k=0.$$

Для полученного дифференциального уравнения его “характеристическое уравнение”

$$r(r-1)+c_1r-a_0-\pi^2k^2=r^2+(c_1-1)r-a_0-\pi^2k^2=0$$

имеет 2 корня. Введём для них обозначения:

$$r_k=\frac{1-c_1+\sqrt{(1-c_1)^2+4a_0+4\pi^2k^2}}{2},\quad r_k^-=\frac{1-c_1-\sqrt{(1-c_1)^2+4a_0+4\pi^2k^2}}{2}.$$

Далее будет показано, что числа r_k соответствуют ограниченным решениям однородного уравнения (2), а числа r_k^- – неограниченным.

Решение задачи (7) будем искать в виде $y_k=(x/b)^r\varphi_k$, где φ_k – новая неизвестная функция, а постоянный показатель r пока не фиксируем. Подставляя это выражение в уравнение и сокращая затем на $(x/b)^r$, получаем

$$x^2\varphi''_k+2rx\varphi'_k+r(r-1)\varphi_k+c(x)\varphi'_k+rc(x)x^{-1}\varphi_k-(a(x)+\pi^2k^2)\varphi_k=0.$$

Положим $r=r_k$, тогда

$$x^2\varphi''_k+2r_kx\varphi'_k+c(x)\varphi'_k+r_k\overline{c}(x)x^{-1}\varphi_k-\overline{a}(x)\varphi_k=0, \tag{9}$$

где $\overline{a}(x)\equiv a(x)-a_0$, $\overline{c}(x)\equiv c(x)-xc_1$.

Теорема 1. *Для любого номера k в классе $A(U)$ существует нетривиальное решение $\varphi_k(x)$ уравнения (9). Это решение не может обращаться в нуль в точке $x=b$. При дополнительном условии $\varphi_k(0)=1$ решение единственно и равномерно ограничено по $k\in\mathbb{N}$, $x\in[0,b]$ вместе с первой и второй производными.*

Доказательство. Пусть решение $\varphi_k(x)$ уравнения (9) в классе $A(U)$ существует. Представим его в виде ряда

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{kn} x^n, \quad x \in [0, b], \tag{10}$$

подставим этот ряд и разложения (8) в уравнение (9):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\varphi_{kn}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2r_k n\varphi_{kn}x^n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{k,n+1}x^n +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} r_k c_{m+1} x^m \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{kn}x^n - \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{kn} x^n = 0.$$

Пользуясь абсолютной сходимостью рядов внутри области сходимости, перемножим их почленно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2r_k-1)\varphi_{kn}x^n + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_m(n+1)\varphi_{k,n+1}x^{n+m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_k c_{m+1}\varphi_{kn}x^{n+m} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_m\varphi_{kn}x^{n+m} = 0.$$

Изменим порядок суммирования. Введём новый индекс суммирования $l = n + m$. Тогда выражение в левой части примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2r_k-1)\varphi_{kn}x^n + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{l} c_m(l-m+1)\varphi_{k,l-m+1}\right)x^l +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{l} r_k c_{m+1}\varphi_{k,l-m}\right)x^l - \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{l} a_m\varphi_{k,l-m}\right)x^l = 0.$$

Наконец, переобозначая $l = n$ и пользуясь единственностью разложения аналитической функции в ряд Тейлора, приходим к тождествам:

$$n(n+2r_k-1)\varphi_{kn} + \sum_{m=1}^{n} c_m(n-m+1)\varphi_{k,n-m+1} + r_k\sum_{m=1}^{n} c_{m+1}\varphi_{k,n-m} - \sum_{m=1}^{n} a_m\varphi_{k,n-m} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Выберем $\varphi_{k,0} = 1$. Тогда для остальных коэффициентов получим рекуррентные формулы:

$$\varphi_{kn} = -\frac{1}{n(n+2r_k-1+c_1)} \times$$

$$\times \left(\sum_{2\leqslant m\leqslant n} c_m(n-m+1)\varphi_{k,n-m+1} + r_k\sum_{1\leqslant m\leqslant n} c_{m+1}\varphi_{k,n-m} - \sum_{1\leqslant m\leqslant n} a_m\varphi_{k,n-m}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где первая сумма при $n = 1$ не содержит слагаемых. Единственность решения уравнения (9) доказана.

Докажем сходимость ряда для $\varphi_k(x)$ в U. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\vartheta' - d(x)\vartheta = 0, \quad x \in [0, b], \quad \vartheta(0) = 1,$$

где $d(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(|c_{n+2}| + |a_{n+1}|)x^n$. Её решение $\vartheta(x) = \exp\int_0^x d(\zeta)\,d\zeta$ является аналитической функцией в U. Найдём его в виде степенного ряда

$$\vartheta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n x^n.$$

Подставим этот ряд в уравнение задачи и приравняем в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\vartheta_{n+1}x^n - \sum_{m=0}^{\infty}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)x^m\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n x^n = 0,$$

$$(n+1)\vartheta_{n+1} = \sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Так как $\vartheta(0)=1,$ то $\vartheta_0=1,$ и тогда для коэффициентов ряда получаем рекуррентные соотношения

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Радиус сходимости R' полученного ряда определяется областью аналитичности функции $d(x)$ (см., например, [13, с. 102]). Функция $d(x)$ по построению аналитична в $U,$ следовательно, радиус R' не меньше $R.$

Вернёмся к ряду (10) для $\varphi_k(x).$ Очевидно, что $1=|\varphi_{k0}|\leqslant\vartheta_0=1.$ Пусть $|\varphi_{k,m}|\leqslant\vartheta_m,$ $m=\overline{0,n}.$ Докажем эту оценку для $n+1,$ имеем

$$|\varphi_{k,n+1}|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2r_k+c_1)}\bigg(\sum_{m=2}^{n+1}|c_m|(n-m+2)|\varphi_{k,n-m+2}|+r_k\sum_{m=1}^{n+1}|c_{m+1}||\varphi_{k,n+1-m}|+$$

$$+\sum_{m=1}^{n+1}|a_m||\varphi_{k,n+1-m}|\bigg)\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2r_k+c_1)}\bigg(\sum_{m=2}^{n+2}|c_m|(n-m+2+r_k)\vartheta_{n-m+2}+$$

$$+\sum_{m=2}^{n+2}|a_{m-1}|\vartheta_{n-m+2}\bigg)\leqslant\frac{1}{n+1}\bigg(\sum_{m=2}^{n+2}|c_m|\vartheta_{n-m+2}+\sum_{m=2}^{n+2}|a_{m-1}|\vartheta_{n-m+2}\bigg)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m}=\vartheta_{n+1}.$$

В силу принципа математической индукции $|\varphi_{k,n}|\leqslant\vartheta_n,$ $n\in\mathbb{N}_0,$ $k\in\mathbb{N}.$

Применив к ряду (10) признак Вейерштрасса, установим его равномерную сходимость в U к решению уравнения (9). Выше было доказано, что при $\varphi_k(0)=1$ справедливы оценки

$$|\varphi_k(x)|\leqslant\vartheta(x), \quad x\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично получаем оценки

$$|\varphi_k'(x)|\leqslant\vartheta'(x), \quad |\varphi_k''(x)|\leqslant\vartheta''(x), \quad x\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Поскольку функции $\vartheta(x),$ $\vartheta'(x)$ и $\vartheta''(x)$ непрерывны на $[0,b],$ то отсюда следует равномерная ограниченность семейства функций $\varphi_k(x),$ $k\in\mathbb{N},$ вместе с их производными первого и второго порядков.

Наконец, решение задачи (7) имеет вид

$$y_k(x)=(x/b)^{r_k}\varphi_k(x), \quad y_k(0)=0,$$

следовательно, в силу леммы 2 имеем $y_k(b)=\varphi_k(b)\neq 0,$ как утверждается в теореме. Теорема доказана.

В дальнейшем условимся понимать под $\varphi_k(x)$ то решение уравнения (9), для которого $\varphi_k(0)=1.$

Теорема 2. *Существуют постоянные* C_1 *и* C_2, *не зависящие от* k, *такие, что*

$$0 < C_1 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant C_2, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и признака равностепенной непрерывности каждое из множеств $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k'\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому, как следует из теоремы Арцела, множество $\{\varphi_k\}$ предкомпактно в пространстве $C^1[0,b]$. Пусть $\overset{\circ}{\varphi}$ – какая-либо предельная точка этого множества в $C^1[0,b]$. Поделим уравнение (9) на r_k и затем перейдём в нём к пределу по той содержащейся в множестве $\{\varphi_k\}$ последовательности, которая равномерно на $[0,b]$ сходится к функции $\overset{\circ}{\varphi}$, а последовательность её производных – к функции $\overset{\circ}{\varphi}{}'$. Пользуясь ограниченностью коэффициентов уравнения, получаем предельную задачу Коши

$$\overset{\circ}{\varphi}{}' + \frac{\overline{c}(x)}{2x^2}\,\overset{\circ}{\varphi} = 0, \quad x \in [0,b], \quad \overset{\circ}{\varphi}(0) = 1.$$

Решение этой задачи единственно. Следовательно, множество $\{\varphi_k\}$ имеет единственную предельную точку в $C^1[0,b]$, и эта точка является решением данной задачи Коши. Так как

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \exp\biggl(-\int\limits_0^x \frac{\overline{c}(\xi)}{2\xi^2}\,d\xi\biggr),$$

то найдутся постоянные A_1 и A_2 такие, что $0 < A_1 \leqslant \overset{\circ}{\varphi}(x) \leqslant A_2$. Так как $\varphi_k \xrightarrow{C[0,b]} \overset{\circ}{\varphi}$, то

$$0 < A_1/2 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 2A_2, \quad x \in [0,b], \quad k \geqslant k_0.$$

Поскольку функция $y_k(x) = (x/b)^{r_k}\varphi_k(x)$ является решением однородного уравнения (7), $y_k(0) = 0$, то из этого заключаем, что $\varphi_k(x) > 0$ при $x \in [0,b]$, $k \in \mathbb{N}$ (лемма 2). Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$ справедливы оценки

$$0 < C_1 = \min_{x\in[0,b]}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{k_0-1}(x), A_1/2) \leqslant \varphi_k(x) \leqslant C_2 = \max_{x\in[0,b]}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{k_0-1}(x), 2A_2).$$

Теорема доказана.

Обозначим построенные ограниченные решения задач (7) через $Y_k^0(x)$, т.е.

$$Y_k^0(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\varphi_k(x).$$

Заметим, что при $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство

$$\frac{dY_k^0}{dx}(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\varphi_k'(x) + \frac{r_k}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-1}\varphi_k(x) \geqslant \mathrm{const}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\left(\frac{r_k}{x} - \|\varphi_k'\|_{C[0,b]}\right), \quad x \in [0,b].$$

Теоремы 1 и 2 позволяют сделать заключение об оценках решений задач (7) при $k \geqslant k_0$, именно:

$$\tilde{C}_1\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k} \leqslant Y_k^0(x) \leqslant \tilde{C}_2\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}, \quad \tilde{C}_1\frac{r_k}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k} \leqslant \left|\frac{dY_k^0}{dx}(x)\right| \leqslant \tilde{C}_2\frac{r_k}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k},$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^0}{dx^2}(x)\right| \leqslant \tilde{C}_2\frac{r_k^2}{x^2}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}, \quad x \in [0,b], \tag{12}$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – положительные постоянные.

1.3. Неограниченные решения однородной задачи. Для анализа функции Грина задачи (2) установим аналогичные полученным в п. 1.2 соотношения для решений задач

$$x^2 y_k'' + c(x) y_k' - a(x) y_k - \pi^2 k^2 y_k = 0, \quad x \in (0, b],$$
$$y_k(b) = 0,$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Проведя регуляризацию при $r = r_k^-$, будем искать неограниченное решение в виде

$$Y_k^b(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x/b)^{r_k^-} \psi_k(x),$$

где ψ_k – новая неизвестная функция. В силу известного следствия из формулы Остроградского–Лиувилля это решение можно записать в виде следующего интеграла:

$$Y_k^b(x) = -Y_k^0(x) \int\limits_b^x \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\biggl(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)\,d\xi.$$

Несложно видеть, что условие $Y_k^b(b) = 0$ выполнено. Подставляя в это представление решения выражения для функций $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$, будем иметь

$$\psi_k(x) = -\Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{r_k - r_k^-} \varphi_k(x) \int\limits_b^x \Bigl(\frac{\xi}{b}\Bigr)^{-2r_k} \frac{1}{(\varphi_k(\xi))^2} \exp\biggl(-\int\limits_b^\xi \frac{c_1}{\zeta}\,d\zeta - \int\limits_b^\xi \frac{\overline{c}(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)\,d\xi,$$

или

$$\psi_k(x) = -\Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{r_k - r_k^-} \varphi_k(x) \int\limits_b^x \Bigl(\frac{\xi}{b}\Bigr)^{-2r_k - c_1} \theta_k(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

где

$$\theta_k(\xi) = \exp\biggl(-\int\limits_b^\xi \frac{\overline{c}(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)(\varphi_k(\xi))^{-2}, \quad 0 < \Theta_1 \leqslant \theta_k(\xi) \leqslant \Theta_2, \quad \xi \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где Θ_1, Θ_2 – постоянные.

Далее равенство (13) понимаем как определение функций $\psi_k(x)$.

Теорема 3. *Существуют положительные постоянные* Ψ_1 *и* Ψ_2, *не зависящие от* k, *такие, что равномерно по* $x \in (0, b]$, $k \in \mathbb{N}$ *выполняются оценки*

$$|\psi_k(x)| \leqslant \frac{\Psi_2}{k}, \quad |\psi_k'(x)| \leqslant \frac{\Psi_2}{x}, \quad |\psi_k''(x)| \leqslant \frac{k\Psi_2}{x^2},$$

и равномерно по $x \in (0, 3b/4]$, $k \geqslant k_0$ *– оценка*

$$0 < \frac{\Psi_1}{k} \leqslant |\psi_k(x)|.$$

Доказательство. Пользуясь определением (13) функций $\psi_k(x)$ и оценками (12) и (14) функций $\varphi_k(x)$ и $\theta_k(x)$, а также асимптотикой $r_k \sim \pi k$ и соотношением $r_k + r_k^- = 1 - c_1$, получаем при $x \in [0, b]$ неравенства

$$|\psi_k(x)| \leqslant C_2 \Theta_2 \Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{r_k - r_k^-} \int\limits_x^b \Bigl(\frac{\xi}{b}\Bigr)^{-2r_k - c_1} d\xi \leqslant \frac{C}{k} \Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{r_k - r_k^-} \biggl[\frac{1}{b} + b\Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{1 - 2r_k - c_1}\biggr] =$$

$$= \frac{C}{k}\Bigl(b + \frac{1}{b}\Bigr) = \frac{\Psi_2}{k},$$

здесь и в дальнейшем C – некоторая положительная постоянная, не обязательно одна и та же в разных оценках.

Аналогично при $x \in [0,b]$ имеем

$$|\psi_k(x)| \geqslant C_1\Theta_1\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\int\limits_x^b\left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1}d\xi \geqslant \frac{C}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}b^{2r_k+c_1}(x^{1-2r_k-c_1}-b^{1-2r_k-c_1}) =$$

$$= \frac{C}{k}\left(b-\frac{x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^--2r_k-c_1-1+2r_k+c_1}}\right) = \frac{C}{k}\left(b-b\frac{x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^-}}\right) = \frac{C}{k}\frac{b^{r_k-r_k^-}-x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^-}}.$$

Обозначим $b^{r_k-r_k^-}-x^{r_k-r_k^-}=h(x)$. При $x \leqslant x_0 = b\exp(-\ln 2/(r_k-r_k^-))$ справедлива оценка $h(x) \geqslant b^{r_k-r_k^-}/2$. Используя неравенство $\exp(\ln 2/(r_k-r_k^-)) \leqslant 4/3$, верное при достаточно больших k, получаем, что $x_0 \geqslant 3b/4$, т.е. указанная оценка функции $h(x)$ имеет место на отрезке $[0,3b/4]$. Окончательно заключаем, что

$$|\psi_k(x)| \geqslant \frac{C}{k}\frac{b^{r_k-r_k^-}}{2b^{r_k-r_k^-}} = \frac{\Psi_1}{k}, \quad x\in[0,3b/4], \quad k \geqslant k_0.$$

Получим оценки на производные:

$$\psi_k'(x) = \frac{r_k-r_k^-}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\int\limits_b^x\left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(\xi)\,d\xi +$$

$$+\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k'(x)\int\limits_b^x\left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(\xi)\,d\xi + \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\left(\frac{x}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(x),$$

$$|\psi_k'(x)| \leqslant \frac{r_k-r_k^-}{x}\frac{C(b+1/b)}{k}+\frac{C(b+1/b)}{k}+C\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} \leqslant \frac{\Psi_2}{x}, \quad x\in(0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично доказывается оценка для $|\psi_k''(x)|$, $x\in(0,b]$, $k\in\mathbb{N}$. Теорема доказана.

Возвращаясь к функции $Y_k^b(x)$, получаем в силу теоремы 3 при $k\in\mathbb{N}$ следующие оценки:

$$Y_k^b(x) \leqslant \frac{C_4}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad x\in[0,b], \quad \frac{C_3}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-} \leqslant Y_k^b(x), \quad x\in(0,3b/4],$$

$$\left|\frac{dY_k^b}{dx}(x)\right| \leqslant \frac{C_4}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad \left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant \frac{kC_4}{x^2}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad x\in(0,b], \tag{15}$$

где C_3, C_4 – некоторые положительные постоянные.

1.4. Построение функции Грина. Построим функции Грина $G_k(x,\xi)$ задач (2). Пусть

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{Y_k^0(x)Y_k^b(\xi)}{w_k(\xi)\xi^2}, & \text{если } x<\xi, \\[2ex] \dfrac{Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)}{w_k(\xi)\xi^2}, & \text{если } \xi<x, \end{cases}$$

где $x,\xi\in(0,b)$, $k\in\mathbb{N}$, здесь $w_k(x)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений (ФСР)

$$w_k(x) = \det\begin{pmatrix} Y_k^0(x) & Y_k^b(x) \\ \dfrac{dY_k^0}{dx}(x) & \dfrac{dY_k^b}{dx}(x)\end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Существует постоянная* $W>0$ *такая, что*

$$w_k(x)\leqslant -Wx^{-c_1}<0$$

равномерно по $x\in(0,b),\ \ k\geqslant k_0,\ \ c_1=c'(0).$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Остроградского–Лиувилля, получим равенство

$$w_k(x)=w_k\left(\frac{b}{2}\right)\exp\left(-\int\limits_{b/2}^{x}\frac{c(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\right)=w_k\left(\frac{b}{2}\right)x^{-c_1}P(x),\quad x\in(0,b),$$

где $P(x)\geqslant \mathrm{const}=P>0,\ \ k\in\mathbb{N}.$

Оценим величину $w_k(b/2)$ сверху (по модулю – снизу). В силу леммы 3 при достаточно больших k элементы ФСР будут монотонными функциями. Несложно видеть, что выполняются неравенства

$$Y_k^0(x)>0,\quad {Y_k^0}'(x)>0,\quad Y_k^b(x)>0,\quad {Y_k^b}'(x)<0.$$

Тогда

$$w_k\left(\frac{b}{2}\right)=Y_k^0\left(\frac{b}{2}\right){Y_k^b}'\left(\frac{b}{2}\right)-Y_k^b\left(\frac{b}{2}\right){Y_k^0}'\left(\frac{b}{2}\right)\leqslant -Y_k^b\left(\frac{b}{2}\right){Y_k^0}'\left(\frac{b}{2}\right).$$

Применив нужные из оценок (11) и (15), будем иметь

$$w_k\left(\frac{b}{2}\right)\leqslant -\frac{C_3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_k^-}\tilde{C}_1\frac{2r_k}{b}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_k}\leqslant -\frac{\pi\tilde{C}_1C_3}{b}\cdot 2^{-(r_k+r_k^-)}=-\frac{2^{c_1-1}\pi\tilde{C}_1C_3}{b}\equiv -\mathrm{V}.$$

Таким образом,

$$w_k(x)\leqslant -\mathrm{V}x^{-c_1}P=-Wx^{-c_1},\quad x\in(0,b),\quad k\geqslant k_0.$$

Лемма доказана.

Полученные в пп. 1.2, 1.3 и лемме 4 результаты позволяют легко найти равномерные оценки функции Грина задачи (2) и её производных. Мы же докажем оценку интеграла по ξ от модуля $|G_k(x,\xi)|$ функции Грина, что, например, при условии равномерной ограниченности правых частей задач (2) позволит перейти к асимптотике решений $y_k(x)$ при $k\to+\infty$.

Введём обозначение

$$\|f(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}=\int\limits_0^b|f(x,\xi)|\,d\xi.$$

Теорема 4. *Существует постоянная* $M>0$, *при которой*

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}\leqslant\frac{M}{k^2}$$

равномерно по $x\in[0,b],\ \ k\in\mathbb{N}.$ *Для любого компакта* $K\subset(0,b]$ *найдётся постоянная* $M_K>0$ *такая, что*

$$\left\|\frac{\partial G_k}{\partial x}(x,\xi)\right\|_{L_1^\xi[0,b]}\leqslant\frac{M_K}{k}$$

равномерно по $x\in K,\ \ k\in\mathbb{N}.$

Доказательство. В силу определения (11) имеем

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x)=\int\limits_0^b|G_k(x,\xi)|\,d\xi=\int\limits_0^x\left|\frac{Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)}{w_k(\xi)\xi^2}\right|d\xi+\int\limits_x^b\left|\frac{Y_k^b(\xi)Y_k^0(x)}{w_k(\xi)\xi^2}\right|d\xi.$$

Воспользовавшись для оценок функций Y_k^0 и Y_k^b первыми из оценок (11) и (15) и оценкой снизу для определителя Вронского из леммы 4, получим

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4}{kW}\left[b^{-(r_k+r_k^-)}x^{r_k^-}\int\limits_0^x \xi^{r_k+c_1-2}\,d\xi + b^{-(r_k+r_k^-)}x^{r_k}\int\limits_x^b \xi^{r_k^-+c_1-2}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\left[\frac{x^{r_k^-+r_k+c_1-1}}{r_k+c_1-1} - \frac{x^{r_k+r_k^-+c_1-1}}{r_k^-+c_1-1} + \frac{x^{r_k}}{r_k^-+c_1-1}b^{r_k^-+c_1-1}\right].$$

Учтём соотношения $(r_k+r_k^-)+(c_1-1)=(1-c_1)+(c_1-1)=0.$ Тогда $r_k^-+c_1-1=-r_k.$ Поэтому, продолжая оценку, будем иметь

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\left[\frac{1}{r_k+c_1-1} - \frac{1}{r_k^-+c_1-1} + \frac{1}{r_k^-+c_1-1}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\left(\frac{1}{r_k+c_1-1} - \frac{1}{r_k^-+c_1-1}\right) = \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\left(\frac{1}{-r_k^-} - \frac{1}{-r_k}\right).$$

Несложно видеть, что в последнем выражении множитель в скобках не превосходит $4/(\pi k)$ при достаточно больших $k,$ значит,

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{4\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{\pi W}\frac{1}{k^2}, \quad x\in[0,b].$$

Первая оценка доказана. Докажем вторую оценку теоремы 4. Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,b)$ и положим $x\in K=[\varepsilon,b].$ Повторяя уже проведённые преобразования, применяя оценки производных ФСР и учитывая, что $x\geqslant\varepsilon,$ получаем следующие оценки:

$$\left\|\frac{\partial G_k}{\partial x}(x,\xi)\right\|_{L_1^\xi[0,b]} \leqslant \frac{4\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{\pi W}\frac{1}{\varepsilon}\frac{k}{k^2} \leqslant \frac{\widetilde{M}_K}{k}, \quad \widetilde{M}_K=\widetilde{M}_K(\varepsilon)=\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

2. Решение задачи для эллиптического уравнения.

2.1. Использование функции Грина для построения решения. Теорема сходимости. Пользуясь полученными в п. 1 результатами, докажем, что справедлива

Лемма 5. *Пусть функции $f_k(y)$ имеют вторые производные, равномерно ограниченные по $k\in\mathbb{N},$ $y\in[0,b].$ Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

равномерно по $y\in[0,b],$

$$\frac{d^m}{dy^m}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = -\frac{f_k^{(m)}(y)}{\pi^2k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-m}}\right), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

равномерно по $y\in[\varepsilon,b-\varepsilon]$ для любого фиксированного $\varepsilon\in(0,b/2),$ $m=0,1,2.$

Доказательство. Пусть

$$Y_k(y) \equiv \int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = -\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} + R_k(y), \quad y\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}, \tag{18}$$

где $R_k(y)$ – некоторая функция. Получим оценки для $R_k(y)$. Рассмотрим дифференциальную операцию

$$L_k \equiv y^2\frac{d^2}{dy^2} + c(y)\frac{d}{dy} - (a(y) + \pi^2k^2), \quad y \in [0,b].$$

Так как $Y_k(y)$ – решение задачи (2), то $L_kY_k(y) = f_k(y)$. Применяя к левой и правой частям равенства (18) операцию L_k, получаем тождество

$$L_kY_k(y) = f_k(y) = -y^2\frac{f_k''(y)}{\pi^2k^2} - c(y)\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2} + a(y)\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} + f_k(y) + L_kR_k(y), \quad y \in (0,b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Выразив отсюда $L_kR_k(y)$, будем иметь

$$L_kR_k(y) = y^2\frac{f_k''(y)}{\pi^2k^2} + c(y)\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2} - a(y)\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} \equiv \frac{F_k(y)}{\pi^2k^2}, \quad y \in (0,b), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где $F_k(y) \equiv y^2f_k''(y) + c(y)f_k'(y) - a(y)f_k(y)$, а $R_k(b) = f_k(b)/(\pi^2k^2)$. Используя функции Грина, для $R_k(y)$ получаем следующее выражение:

$$R_k(y) = \frac{1}{\pi^2k^2}\bigg[\frac{f_k(b)}{Y_k^0(b)}Y_k^0(y) + \int\limits_0^b G_k(y,\eta)F_k(\eta)\,d\eta\bigg], \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

В силу теоремы 4 и оценок (11) функций $Y_k^0(y)$ выражение в квадратных скобках в равенстве (20) равномерно ограничено по $y \in [0,b]$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть M – точная верхняя грань его модуля. Тогда

$$|R_k(y)| \leqslant \frac{M}{\pi^2k^2}, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая эту оценку в равенстве (18), получаем соотношение (16).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, b/2)$ и $m = 0,1$. Продифференцируем равенства (18) и (20) по y m раз и рассмотрим их при $y \in K = [\varepsilon, b-\varepsilon]$. Пользуясь теми же оценками, что и в первой части доказательства леммы, приходим к неравенству

$$\bigg|\frac{d^mR_k}{dy^m}(y)\bigg| \leqslant \frac{1}{\pi^2k^2}\bigg[\bigg|\frac{f_k(b)}{Y_k^0(b)}\bigg|C_2\bigg(\frac{r_k}{b}\bigg)^m\bigg(\frac{y}{b}\bigg)^{r_k-m} + \|F_k(y)\|_{C[0,b]}\frac{M_K}{k^{2-m}}\bigg], \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad m=0,1.$$

Так как $y/b < (b-\varepsilon)/b \equiv q < 1$, то $(y/b)^{r_k-m} \leqslant (y/b)^{r_k-1} \leqslant q^{\mathrm{const}\times k}$. Для каждого фиксированного ε найдётся постоянная Q_K такая, что $(y/b)^{r_k-m} \leqslant Q_K/k^4$ при всех $y \in K$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\bigg|\frac{d^mR_k}{dy^m}(y)\bigg| \leqslant \frac{1}{\pi^2k^2}\bigg[C \times (\pi k)^m\frac{Q_K}{k^4} + \frac{C}{k^{2-m}}\bigg] \leqslant \frac{C}{k^{4-m}}, \quad y \in K, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m = 0,1.$$

Учитывая эти оценки в равенстве (18), получаем соотношение (17) при $m = 0,1$.

Для $R_k''(y)$ в силу (19) имеем

$$R_k''(y) = y^{-2}\bigg[\frac{F_k(y)}{\pi^2k^2} + (a(y) + \pi^2k^2)R_k(y) - c(y)R_k'(y)\bigg], \quad y \in K, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для $R_k''(y)$, применяя установленные выше оценки функций $R_k(y)$ и $R_k'(y)$, получаем

$$|R_k''(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\bigg[\frac{C}{k^2} + (C + \pi^2k^2)\frac{C}{k^4} + \frac{C}{k^3}\bigg] \leqslant \frac{C}{k^2}, \quad y \in K, \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает соотношение (17) при $m = 2$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, а функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ принадлежат классу Гёльдера по $x \in [0,1]$ при любом $y \in (0,b)$. Тогда классическое решение задачи (1) существует, единственно и представляется рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \sin(\pi k x), \quad (x,y) \in \overline{D}. \tag{21}$$

Доказательство. Докажем непрерывность определённой рядом (21) функции $u(x,y)$ в $\overline{D}$. Оценим общий член этого ряда:

$$\left| \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \sin(\pi k x) \right| \leqslant \|f_k(y)\|_{C[0,b]} \|G_k(y,\eta)\|_{L_1^{\eta}[0,b]} \leqslant 4\|f(x,y)\|_{C(\overline{D})} \frac{M}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

здесь мы использовали оценки теоремы 4. Поэтому, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (21) сходится равномерно в $\overline{D}$. Каждый его член непрерывен в $\overline{D}$, следовательно, функция $u(x,y)$ также непрерывна в $\overline{D}$. Выполнение для функции $u(x,y)$ краевых условий задачи (1) вытекает из вида общего члена ряда (21).

Применяя лемму 5, покажем, что ряд (21) можно дважды дифференцировать под знаком суммы внутри D. Фиксируем любой компакт $K \subset D$, и пусть $(x,y) \in K$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \sin(\pi k x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \pi^2 k^2 \sin(\pi k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k(y) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \sin(\pi k x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin(\pi k x) + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \sin(\pi k x), \quad (x,y) \in K.$$

Так как x отделён от 0 и 1, то в силу принадлежности функции $f(x,y)$ классу Гёльдера по x первый ряд сходится при любом фиксированном y равномерно по x, $(x,y) \in K$, второй ряд сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса.

Используя лемму 5 и неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, получаем следующую оценку:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \sin(\pi k x) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{f_k(y)}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \cos(\pi k x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad (x,y) \in K.$$

Сходимость первого ряда в правой части этого неравенства следует из тождества Парсеваля. Второй и третий ряды сходятся равномерно по $(x,y) \in K$ в силу признака Вейерштрасса. Используя полученные соотношения и то, что компакт K может быть выбран произвольным, получаем, что ряд (21) допускает двукратное почленное дифференцирование по x внутри D.

Аналогично, при $(x,y) \in K$ в силу леммы 5 имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \int\limits_0^b G_k(y,\eta) f_k(\eta)\, d\eta\, \sin(\pi k x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{f_k^{(i)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-i}}\right)\right) \sin(\pi k x), \quad (x,y) \in K, \quad i = 1, 2.$$

Так как функция $f''_{yy}(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то её коэффициенты разложения $f''_k(y)$ и $f'_k(y)$ равномерно ограничены по $k \in \mathbb{N}$ и по $(x,y) \in K$. Следовательно, указанные ряды сходятся равномерно по $(x,y)\in K$ и, аналогично, ряд (21) допускает двукратное почленное дифференцирование по y внутри D. Точно так же получаем

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)\Bigr|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl|\Bigl(-\frac{f_k'(y)}{\pi k}+O\Bigl(\frac{1}{k^2}\Bigr)\Bigr)\cos(\pi kx)\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f_k'(y))^2+\sum_{k=1}^{\infty}O\Bigl(\frac{1}{k^2}\Bigr),\quad (x,y)\in K.$$

Следовательно, ряд из смешанных производных также сходится равномерно внутри D. Таким образом, функция $u(x,y)\in C^2(D)$ является классическим решением задачи (1).

Докажем единственность классического решения задачи (1). Пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ – два её классических решения. Тогда функция $v(x,y)\equiv u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является решением задачи (1) с нулевой правой частью. В силу результатов [1] функция $v(x,y)$ является тождественным нулём. Теорема доказана.

2.2. Построение решения методом спектрального выделения особенностей. Далее будем предполагать, что коэффициенты $f_k(y)$ разложения правой части $f(x,y)$ задачи (1) являются аналитическими функциями в круге U. Построим решение этой задачи в явном виде. Пользуясь аналитичностью функции $f_k(y)$, разложим её в ряд Маклорена:

$$f_k(y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{kn}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Будем искать частное ограниченное решение $\eta_k(y)$ уравнения (2) (меняем в (2) обозначения: x на y и y_k на η_k) в виде

$$\eta_k(y)=\eta_k^A(y)+\ln y\cdot\eta_k^S(y),$$

где η_k^A и η_k^S – аналитические функции в U. Разложим их также в ряды Маклорена:

$$\eta_k^A(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^Ay^n,\quad \eta_k^S(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^Sy^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Для производных функции $\eta_k(y)$ имеют место следующие формулы:

$$\eta_k'(y)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\eta_{k,n+1}^A+\eta_{k,n+1}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}^Sy^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N},$$

$$y^2\eta_k''(y)=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\eta_{k,n}^A+(2n-1)\eta_{k,n}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\eta_{k,n}^Sy^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\eta_{k,n}^A+(2n-1)\eta_{k,n}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\eta_{k,n}^Sy^n+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}c_my^m\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\eta_{k,n+1}^A+\eta_{k,n+1}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}^Sy^n\Bigr)-$$

$$-\Bigl(\sum_{m=0}^{\infty}a_my^m+\pi^2k^2\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^Ay^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^Sy^n\Bigr)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{kn}y^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1, приравняв коэффициенты при y^n и $\ln y \cdot y^n$, придём к системе равенств для коэффициентов рядов (23):

$$\nu(n,k)\eta^A_{k,n} + (2n-1+c_1)\eta^S_{k,n} =$$

$$= f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} c_{n-m}[(m+1)\eta^A_{k,m+1} + \eta^S_{k,m+1}], \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\nu(n,k)\eta^S_{k,n} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} c_{n-m}(m+1)\eta^S_{k,m+1} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^S_{km} = 0, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad k\in\mathbb{N};$$

здесь и ниже принято обозначение

$$\nu(n,k) = n(n+c_1-1) - \pi^2k^2 - a_0$$

(т.е. через $\nu(n,k)$ обозначено выражение, стоящее под знаком минимума в неравенстве (3)).

I. Пусть при фиксированном $k\in\mathbb{N}$ для любого $n\in\mathbb{N}_0$ величина $\nu(n,k)$ отлична от нуля. Тогда положим $\eta^S_{k,0}=0$, учитывая условие ограниченности решения. Как следствие, $\eta^S_{kn}=0$ для всех $n\in\mathbb{N}_0$, т.е. $\eta_k\in A(U)$. Для "аналитической" компоненты $\eta^A_k(y)$ получим

$$\nu(n,k)\eta^A_{k,n} = f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

следовательно,

$$\eta^A_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\Bigg(f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}\Bigg), \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Полученная формула совпадает с формулой из работы [11].

II. Пусть при некотором $k\in\mathbb{N}$ найдётся номер $n_0\in\mathbb{N}$ такой, что $\nu(n_0,k)=0$ (нетрудно видеть, что такой номер единственен). Данное условие выполняется тогда и только тогда, когда квадратное относительно n_0 уравнение

$$n_0^2 + (c_1-1)n_0 - (\pi^2k^2+a_0) = 0$$

имеет положительный целый корень, или, иначе говоря, $r_k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\eta^A_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\Bigg(f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}\Bigg), \quad n=\overline{0,n_0-1},$$

$$\eta^S_{kn} = 0, \quad n=\overline{0,n_0-1}.$$

При $n=n_0$ получаем соотношение $0\cdot\eta^S_{k,n_0}=0$, что позволяет выбрать любое η^S_{k,n_0}. Одновременно имеем

$$0\cdot\eta^A_{k,n_0} + (2n_0-1+c_1)\eta^S_{k,n_0} = f_{k,n_0} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-1} a_{n_0-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-2} (m+1)c_{n_0-m}\eta^A_{k,m+1}.$$

Выберем $\eta^A_{k,n_0}=0$. Тогда

$$\eta^S_{k,n_0} = \frac{1}{2n_0-1+c_1}\Bigg(f_{k,n_0} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-1} a_{n_0-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-2} (m+1)c_{n_0-m}\eta^A_{k,m+1}\Bigg).$$

Наконец, для оставшихся коэффициентов при всех $n = n_0+1, n_0+2, \ldots,$ получим рекуррентные формулы:

$$\eta_{kn}^S = \frac{1}{\nu(n,k)}\biggl(\sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta_{km}^S - \sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}(m+1)\eta_{k,m+1}^S\biggr),$$

$$\eta_{kn}^A = \frac{1}{\nu(n,k)}\biggl(f_{kn} + \sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta_{km}^A - \sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}[(m+1)\eta_{k,m+1}^A + \eta_{k,m+1}^S] - (2n-1+c_1)\eta_{kn}^S\biggr).$$

Докажем теперь сходимость построенных рядов (23) в U вне зависимости от того, какой из случаев I или II имеет место.

Теорема 6. *Ряды (23) имеют радиусы сходимости не меньше R при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Фиксируем номер $k \in \mathbb{N}$. Так как функции $a(y)$, $c(y)$ и $f_k(y)$ являются аналитическими в круге U, то в силу теоремы Коши–Адамара для любого $R_1 \in (0,R)$ существует число $M>0$ такое, что $|a_n|, |f_{kn}| \leqslant M/R_1^n$, $|c_n| \leqslant MR_1/R_1^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (см. разложения (8) и (22)).

Поскольку $\nu(n,k) \sim n^2$ при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$, то для любой постоянной $M_1 \geqslant 1$ (её мы выберем позже) и для любого числа $M>1$ найдётся номер N такой (считаем $N > n_0$), что при $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $\nu(n,k) \geqslant nMM_1$. Выберем также число $p>2$ такое, что

$$|\eta_{kn}^A|, |\eta_{kn}^S| \leqslant p^n/R_1^n, \quad n = \overline{0, N-1}$$

(см. разложения (17)). Методом математической индукции докажем, что последние неравенства верны при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть неравенства выполнены для всех номеров $m = \overline{0, n-1}$. Докажем их для номера n. Имеем

$$|\eta_{kn}^S| \leqslant \biggl(\biggl|\sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta_{km}^S\biggr| + \biggl|\sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}(m+1)\eta_{k,m+1}^S\biggr|\biggr)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{M}{R_1^{n-m}}\frac{p^m}{R_1^m} + \sum_{m=0}^{n-2}(m+1)\frac{MR_1}{R_1^{n-m}}\frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}}\biggr)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\sum_{m=0}^{n-1} p^m\frac{1}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-2} p^{m+1}\frac{1}{R_1^n}\biggr)M_1^{-1} \leqslant \frac{2}{M_1R_1^n}\sum_{m=0}^{n-1} p^m = \frac{2}{M_1R_1^n}\frac{p^n-1}{p-1} \leqslant \frac{2p^n}{M_1R_1^n}.$$

Если предположить, что $M_1 \geqslant 2$, то получим $|\eta_{kn}^S| \leqslant p^n/R_1^n$.

Аналогично для η_{kn}^A:

$$|\eta_{kn}^A| \leqslant \biggl(\frac{M}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{M}{R_1^{n-m}}\frac{p^m}{R_1^m} + n\sum_{m=0}^{n-2}\frac{MR_1}{R_1^{n-m}}\biggl[\frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}} + \frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}}\biggr] + 2n\frac{p^n}{R_1^n} + (M+1)\frac{p^n}{R_1^n}\biggr)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\frac{M}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{Mp^m}{R_1^n} + 2\sum_{m=0}^{n-2}\frac{Mp^{m+1}}{R_1^n} + 2\frac{p^n}{R_1^n} + 2M\frac{p^n}{R_1^n}\biggr)(MM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}\biggl(1 + \sum_{m=0}^{n-1} p^m + 2\sum_{m=0}^{n-2} p^{m+1} + 2p^n + 2p^n\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}\biggl(5p^n + 3\sum_{m=0}^{n-1} p^m\biggr) = \frac{1}{M_1R_1^n}\biggl(5p^n + 3\frac{p^n-1}{p-1}\biggr) \leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}(5p^n + 3p^n) = \frac{8p^n}{M_1R_1^n}.$$

Окончательно положим $M_1 = 8$. Тогда, согласно методу математической индукции, неравенства $|\eta^A_{kn}|, |\eta^S_{kn}| \leqslant p^n/R_1^n$ справедливы при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, пользуясь теоремой Коши–Адамара, заключаем, что радиусы сходимости рядов (23) не меньше, чем $R_2 = R_1/p > 0$.

Покажем, что радиусы сходимости рядов (23) на самом деле не меньше, чем R. Подставим функцию $\eta_k(y) \equiv \eta^A_k(y) + \ln y \cdot \eta^S_k(y)$ в уравнение (2). Используя формулы производных функции $\eta_k(y)$:

$$\eta_k'(y) = \eta_k^{A\,\prime}(y) + \frac{\eta^S_k(y)}{y} + \ln y \cdot \eta_k^{S\,\prime}(y),$$

$$\eta_k''(y) = \eta_k^{A\,\prime\prime}(y) - \eta^S_k(y)y^{-2} + 2\eta_k^{S\,\prime}(y)y^{-1} + \ln y \cdot \eta_k^{S\,\prime\prime}(y),$$

получаем дифференциальные уравнения для функций $\eta^S_k(y)$ и $\eta^A_k(y)$:

$$y^2\eta_k^{S\,\prime\prime}(y) + c(y)\eta_k^{S\,\prime}(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta^S_k(y) = 0, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} y^2\eta_k^{A\,\prime\prime}(y) + c(y)\eta_k^{A\,\prime}(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta^A_k(y) = \\ = f_k(y) - c(y)\eta^S_k(y)y^{-1} + \eta^S_k(y) - 2y\eta_k^{S\,\prime}(y), \end{gathered} \tag{25}$$

где $y \in U$, $k \in \mathbb{N}$. Уравнение (24) – линейное дифференциальное уравнение относительно $\eta^S_k(y)$ с аналитическими в U коэффициентами и нулевой правой частью. Поэтому аналитическое в $U_2 = \{y \in \mathbb{C} : |y| < R_2\}$ решение этого уравнения может быть единственным образом аналитически продолжено в большую область U (см., например, [13, с. 102]). Из этого следует сходимость ряда $\eta^S_{k,0} + \eta^S_{k,1}y + \eta^S_{k,2}y^2 + \ldots$ в области U.

Такие же рассуждения справедливы для функции $\eta^A_k(y)$ и уравнения (25). Таким образом, ряды (23) сходятся равномерно внутри области U. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, все коэффициенты $f_k(y)$ её разложения в ряд по системе $\{\sin(\pi kx) : k \in \mathbb{N}\}$ аналитичны в U, а функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ принадлежат классу Гёльдера по $x \in [0,1]$ при любом $y \in (0,b)$. Тогда классическое решение задачи (1) существует, единственно и представляется рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta^A_k(y) + \ln y \cdot \eta^S_k(y) - \frac{\eta^A_k(b) + \ln b \cdot \eta^S_k(b)}{\varphi_k(b)} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \varphi_k(y)\right] \sin(\pi kx), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

где функции $\eta^A_k(y)$, $\eta^S_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ являются аналитическими в круге U. Если при некотором номере $k \in \mathbb{N}$ показатель $r_k \notin \mathbb{N}$, то соответствующая функция $\eta^S_k(y)$ является тождественным нулём.

Доказательство. В силу преобразований, проведённых в данном пункте, выражение в квадратных скобках является решением соответствующей задачи (2). Таким образом, данный ряд совпадает с рядом (21) и по теореме 5 является единственным классическим решением задачи (1). Свойство аналитичности коэффициентов последнего ряда следует из результатов данного пункта и п. 1.2. Теорема доказана.

Отметим, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и $y \to 0+0$ имеют место асимптотические соотношения $\eta^A_k(y) \sim -f_k(y)/(\pi^2k^2 + a(0))$, $\eta^S_k(y) \sim \mathrm{const} \times y^{r_k}$.

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М., 1985.

3. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, 1979.
4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. *Ивакин В.М.* Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск, 1982. С. 12–21.
7. *Петрушко И.М.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 103. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1968. С. 181–200.
8. *Ломов И.С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2079–2089.
9. *Ломов И.С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 5. С. 593–596.
10. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
11. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 45–58.
12. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы). М., 1970.
13. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 09.02.2021 г.
После доработки 09.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 673–686

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.575

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ НАВЬЕ И РИКЬЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

© 2021 г. В. В. Карачик

Строятся функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре и приводятся интегральные представления решения этих задач.

DOI: 10.31857/S0374064121050095

Введение. Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач посвящено достаточно много работ. Функции Грина для бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске построены в [1] с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле, а в [2, 3] найдено явное представление гармонической функции Робина. Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [4, 5]. Статьи [6, 7] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [8] для бигармонического уравнения в единичном шаре найден оператор Грина задачи Дирихле при полиномиальных данных. В [9] дано явное представление функции Грина задачи Робина для уравнения Пуассона, а в [10] приведён явный вид функции Грина для тригармонического уравнения в единичном шаре.

В работе [1] построены функции Грина ряда задач для бигармонического уравнения в двумерном диске и приведены условия их разрешимости. Условия разрешимости некоторых вариантов задач для бигармонического уравнения в шаре, исследованных в [1], были получены также в работах [11, 12], но без предоставления функций Грина. В работе [13] исследована фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях.

Хорошо известно (см., например, [14, с. 53]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|<1\}$ при $n\geqslant 2$ имеет вид

$$G_2(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x/|x|,|x|\xi), \tag{1}$$

где

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n>2,\\ -\ln|x-\xi|, & n=2,\end{cases}$$

– элементарное решение уравнения Лапласа. По аналогии с этим решением в работе [15] было определено элементарное решение

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4,\quad n=3,\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1), & n=2,\end{cases} \tag{2}$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n\geqslant 3$ функция вида

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)$$

представляет собой функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S. Эта функция удовлетворяет граничным условиям $G_4(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \partial G_4(x,\xi)/\partial\nu|_{\xi\in\partial S} = 0$ при $x \in S$ и является симметричной, $G_4(x,\xi) = G_4(\xi,x)$ при $x \neq \xi \in S$.

В настоящей работе в теореме 1 приводится интегральное представление функций класса $u \in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$. Затем в теореме 2 определяется функция Грина задачи Навье [16] и в следствии 1 даётся интегральное представление решения этой задачи. Далее исследуется задача Рикье–Неймана [17]. В теореме 4 определяется функция Грина задачи Рикье–Неймана, а в теореме 5 находится интегральное представление решения этой задачи. Даются два примера решения рассмотренных однородных задач при полиномиальной правой части уравнения.

1. Интегральное представление. Приведём интегральное представление функции класса $u \in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D.

Теорема 1. *Для функции* $u \in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$ *имеет место следующее интегральное представление:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\biggl(-\int\limits_{\partial D} E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\,ds_\xi + \int\limits_{\partial D}\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u\,ds_\xi -$$

$$-\int\limits_{\partial D}\Delta_\xi E_4(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds_\xi + \int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Delta_\xi E_4(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\,ds_\xi + \int\limits_D E_4(x,\xi)\Delta^2 u(\xi)\,d\xi\biggr), \tag{3}$$

где $\omega_n = |\partial S|$ *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, ν *– внешняя единичная нормаль к* ∂D.

Доказательство. Рассмотрим функции $u, v \in C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$. Нетрудно видеть, что для них в области D верно тождество $v\Delta u - u\Delta v = \operatorname{div}(v\nabla u) - \operatorname{div}(u\nabla v)$. Проинтегрировав это тождество по области D и воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, придём к равенству

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\,d\xi = \int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds_\xi,$$

заменив в котором u на Δu и v на Δv, получим соответственно

$$\int\limits_D (v\Delta^2 u - \Delta u\Delta v)\,d\xi = \int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} - \Delta u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds_\xi,$$

$$\int\limits_D (\Delta v\Delta u - u\Delta^2 v)\,d\xi = \int\limits_{\partial D}\left(\Delta v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}\right)ds_\xi.$$

Почленно складывая два последних равенства, будем иметь

$$\int\limits_D (v\Delta^2 u - u\Delta^2 v)\,d\xi = \int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} - \Delta u\frac{\partial v}{\partial\nu} + \Delta v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}\right)ds_\xi. \tag{4}$$

Очевидно, что полученная формула (4) верна для $u, v \in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$. Отметим точку $x \in D$ и выделим в области D содержащийся в ней замкнутый шар $|\xi - x| \leqslant \delta$ с центром в этой точке некоторого радиуса $\delta > 0$. Оставшуюся часть области D обозначим через D_δ. Очевидно, что $\partial D_\delta = \partial D\bigcup\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - x| = \delta\}$. Применим формулу (4) для области $D = D_\delta$ в случае, когда $v(\xi) = E_4(x,\xi)$, и при этом учтём, что $\Delta_\xi^2 E_4(x,\xi) = 0$ и $\Delta_\xi E_4(x,\xi) = -E(x,\xi)$ при $x \neq \xi \in D$; в результате получим

$$\int\limits_{D_\delta} E_4(x,\xi)\Delta^2 u(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\partial D}\left(E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} - \Delta u\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu} - E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} + u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right)ds_\xi -$$

$$-\int\limits_{|\xi-x|=\varepsilon}\left(E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}-E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right)ds_\xi. \qquad (5)$$

Знак минус возник из-за того, что вместо внутренней нормали к части границы области D_δ – сфере $|\xi-x|=\delta$ – в формуле Гаусса–Остроградского взята внешняя нормаль. Вычислим второй интеграл в правой части равенства (5); для этого запишем его в виде суммы четырёх интегралов от слагаемых подынтегральной функции и обозначим эти интегралы I_1^δ, I_2^δ, I_3^δ, I_4^δ в соответствии с порядком следования подынтегральных слагаемых.

Пусть $n>4$ или $n=3$. В силу формулы (2) $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=\delta^{4-n}/(2(n-2)(n-4))$ и, значит,

$$|I_1^\delta|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}|E_4(x,\xi)|\left|\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\right|ds_\xi\leqslant\delta^{4-n}\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_n\delta^{n-1}/(2(n-2)|n-4|)\leqslant\operatorname{const}\delta^3.$$

Если $n=4$, то $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=-(1/4)\ln\delta$, и тогда аналогично предыдущему

$$|I_1^\delta|\leqslant|\ln\delta|\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_4\delta^3/4\leqslant\operatorname{const}|\ln\delta|\delta^3.$$

Если $n=2$, то $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=\delta^2|\ln\delta-1|/4$, и поэтому

$$|I_1^\delta|\leqslant\delta^2|\ln\delta-1|\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_2\delta/4\leqslant\operatorname{const}|\ln\delta-1|\delta^3.$$

Рассмотрим интеграл I_2^δ при $n>4$ или $n=3$. Учитывая, что

$$\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\bigg|_{|x-\xi|=\delta}=-\frac{1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^n\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^{n-2}}=-\frac{\delta^{3-n}}{2(n-2)},$$

будем иметь

$$|I_2^\delta|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}\left|\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\right||\Delta u|\,ds_\xi\leqslant\delta^{3-n}\max_{\xi\in\overline{D}}|\Delta u|\omega_n\delta^{n-1}/(2(n-2))\leqslant\operatorname{const}\delta^2.$$

Если $n=4$, то

$$\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\bigg|_{|x-\xi|=\delta}=-\frac14\sum_{i=1}^n\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^2}=-\frac{1}{4\delta},$$

что совпадает с предыдущим случаем при $n=4$, и, значит, получаем аналогичную оценку $|I_2^\delta|\leqslant\operatorname{const}\delta^2$.

Если $n=2$, то

$$\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\bigg|_{|x-\xi|=\delta}=\frac14\sum_{i=1}^n2\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}(\xi_i-x_i)(\ln|x-\xi|-1)+\frac14|x-\xi|=$$

$$=\frac{|x-\xi|}{4}(2\ln|x-\xi|-1)=\frac{\delta}{4}(2\ln\delta-1),$$

и тогда

$$|I_2^\delta|\leqslant\delta|2\ln\delta-1|\max_{\xi\in\overline{D}}|\Delta u|\omega_2\delta/4\leqslant\operatorname{const}\delta^2|2\ln\delta-1|.$$

Рассмотрим интеграл I_3^δ при $n > 2$. Учитывая, что $E(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta} = \delta^{2-n}/(n-2)$, получаем

$$|I_3^\delta| \leqslant \int\limits_{|\xi-x|=\delta} |E(x,\xi)| \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds_\xi \leqslant \delta^{2-n} \max_{\xi\in\overline{D}} \|\nabla u\| \omega_n \delta^{n-1}/(n-2) \leqslant \mathrm{const}\,\delta.$$

Если $n = 2$, то поскольку $E(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta} = -\ln\delta$, будем иметь

$$|I_3^\delta| \leqslant |\ln\delta| \max_{\xi\in\overline{D}} \|\nabla u\| \omega_2 \delta \leqslant \mathrm{const}\,\delta |\ln\delta|.$$

Во всех рассмотренных случаях $I_i^\delta \underset{x\in D}{\rightrightarrows} 0$ при $\delta \to 0$, $i = 1, 2, 3$.

Исследуем последний интеграл I_4^δ. Поскольку при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{|x-\xi|=\delta} = -\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|} \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|^n} = -\delta^{1-n},$$

то

$$\left| I_4^\delta - u(x) \int\limits_{|\xi-x|=\delta} \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}\, ds_\xi \right| \leqslant \int\limits_{|\xi-x|=\delta} |u(\xi) - u(x)| \left| \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu} \right| ds_\xi \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{1-n} \max_{|\xi-x|\leqslant\delta} |u(\xi) - u(x)| \omega_n \delta^{n-1} = \omega_u(\delta)\omega_n,$$

где $\omega_u(\delta)$ – модуль непрерывности функции u. По теореме Кантора $\omega_u(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, а значит,

$$I_4^\delta = \left(I_4^\delta - u(x) \int\limits_{|\xi-x|=\delta} \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}\, ds_\xi \right) + u(x) \frac{\omega_n \delta^{n-1}}{\delta^{n-1}} \to \omega_n u(x) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Перейдём к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (5). В силу интегрируемой особенности в объёмном интеграле слева имеет место сходимость

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} E_4(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_D E_4(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

вследствие которой и найденных выше пределов при $\delta \to 0$ интегралов I_i^δ, $i = \overline{1,4}$, получаем

$$\int\limits_D E_4(x,\xi) \Delta^2 u(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\partial D} \left(E_4(x,\xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \Delta u \frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial \nu} - E(x,\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} + u(\xi) \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu} \right) ds_\xi + \omega_n u(x).$$

Перенося интеграл из правой части этого равенства в левую, деля на ω_n и учитывая тождество $\Delta_\xi E_4(x,\xi) = -E(x,\xi)$, приходим к формуле (3). Теорема доказана.

2. Функция Грина задачи Навье. Далее граничные задачи будем рассматривать в шаре S. Задача Навье [16] (в работе [1] она называется также задачей Дирихле-2) заключается в нахождении функции $u \in C^4(S) \bigcap C^3(\overline{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in S,$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0(\xi), \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in \partial S. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию вида

$$G_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_4^r(x,\xi), \tag{7}$$

где $g_4^r(x,\xi) \in C_\xi^3(\overline{S})$ – бигармоническая функция по переменным $x,\xi \in S$ такая, что

$$G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = 0$$

при $x \in S$. Назовём функцию $G_4^r(x,\xi)$ *функцией Грина задачи Навье* (6). Обозначим также

$$E_4^r(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)E(y,\xi)\,dy.$$

Теорема 2. *Функция Грина $G_4^r(x,\xi)$ задачи Навье (6) находится по формуле*

$$G_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)G_2(y,\xi)\,dy, \tag{8}$$

где функция $G_2(x,y)$ определена равенством (1).

Доказательство. Сначала докажем, что функция (8) представима в виде (7). Для этого установим, что функция $g_0(x,\xi) = E_4^r(x,\xi) - E_4(x,\xi)$ является гармонической по $\xi \neq x \in S$, где функция $E_4(x,y)$ определена равенством (2). Пусть $x \neq \xi \in S$. Обозначим $S_\delta = S \setminus \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant \delta\}$ и возьмём $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\xi \in S_\delta$, т.е. $|x-\xi| > \delta$ и $\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant \delta\} \subset S$. Тогда

$$E_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_{S_\delta} + \int\limits_{|x-y|\leqslant\delta}\bigg)E(x,y)E(y,\xi)\,dy.$$

Поскольку $\xi \in S_\delta$ и $x \notin S_\delta$, то, согласно свойству объёмного потенциала, имеем

$$\Delta_\xi \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S_\delta} E(x,y)E(y,\xi)\,dy = -E(x,\xi). \tag{9}$$

Пусть $n > 4$ или $n = 3$. Другие случаи рассматриваются аналогично. Обозначим

$$F(x,\xi) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\delta} E(x,y)E(y,\xi)\,dy = \frac{1}{(n-2)^2}\int\limits_{|\eta|\leqslant\delta} |\eta|^{2-n}|x-\xi-\eta|^{2-n}\,d\eta.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле имеет особенность только в нуле $(|x-\xi-\eta| \geqslant |x-\xi| - \delta > 0)$, и поэтому операцию дифференцирования по ξ этого интеграла можно внести под знак интеграла, а значит, $F(x,\xi)$ – гармоническая функция по ξ. Следовательно, в силу свойств функции $E_4(x,\xi)$ получаем, что

$$\Delta_\xi g_0(x,\xi) = \Delta_\xi(E_4^r(x,\xi) - E_4(x,\xi)) = -E(x,\xi) - (-E(x,\xi)) = 0$$

при $x \neq \xi$. Функция $E_4(x,\xi)$ при $\xi = x$ имеет особенность $\mathrm{O}(|x-\xi|^{4-n})$, если $n > 4$. Далее,

$$E_4^r(x,\xi) = C\int\limits_{|\xi+\eta|<1} |x-\xi-\eta|^{n-2}|\eta|^{n-2}\,d\eta \leqslant C\int\limits_{|\eta|<2} |z-\eta|^{2-n}|\eta|^{2-n}\,d\eta =$$

$$= C\bigg(\int\limits_{|z|<|\eta|<2} + \int\limits_{|\eta|<|z|}\bigg)|z-\eta|^{2-n}|\eta|^{2-n}\,d\eta \equiv I_1 + I_2,$$

где $z = x - \xi$. Для интеграла I_1 справедлива оценка

$$I_1 \leqslant C|z|^{3-n} \int\limits_{|\eta|<2} |z-\eta|^{2-n}|\eta|^{-1}\, d\eta = \mathrm{O}(|z|^{3-n}),$$

так как, согласно [18, с. 27], интеграл в правой части неравенства ограничен. Кроме того,

$$I_2 = C|z|^{2-n}|z|^n \int\limits_{|\theta|z||<|z|} |z-\theta|z||^{2-n}|\theta|^{2-n}\, d\theta = C|z|^{4-n} \int\limits_{|\theta|<1} |\hat z-\theta|^{2-n}|\theta|^{2-n}\, d\theta,$$

где $\hat z = z/|z|$. Поскольку интеграл непрерывен по $\hat z \in \partial S$ [18, с. 27], то $I_2 = \mathrm{O}(|x-\xi|^{4-n})$. Значит, $g_0(x,\xi) = \mathrm{O}(|z|^{3-n})$ и по теореме о стирании особенностей [18, с. 368] функция $g_0(x,\xi)$ гармоническая в S.

Каждая из функций $E_4^r(x,\xi)$ и $E_4(x,\xi)$ симметрична, поэтому функция $g_0(x,\xi)$ является гармонической и по x. Теперь преобразуем функцию G_4^r. Согласно доказанному выше имеем

$$G_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_0(x,\xi) + \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S E(x,y)g^d(y,\xi)\, dy +$$

$$+ \int\limits_S g^d(x,y)E(y,\xi)\, dy + \int\limits_S g^d(x,y)g^d(y,\xi)\, dy\bigg) \equiv E_4(x,\xi) + g_4^r(x,\xi), \tag{10}$$

где $g^d(x,\xi) = -E(x/|x|, |x|\xi)$. Первый и третий интегралы в полученном равенстве – гармонические функции по ξ, поскольку особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не усиливает. Второй интеграл в силу свойств объёмного потенциала – бигармоническая функция по ξ, так как функция $g^d(x,y) = -E(x/|x|, |x|y)$ имеет ограниченные производные по y в $\overline{S}$ при $x \in S$ [14, с. 58].

Проверим граничные условия для функции G_4^r. Вследствие свойств функции Грина $G_2(x,\xi)$ и непрерывности объёмного потенциала получаем

$$G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)G_2(y,\xi)|_{\xi\in\partial S}\, dy = 0,$$

где $x \in S$. С помощью (10) в силу свойств объёмного потенциала при $x \in S$ найдём, что

$$\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = (-E(x,\xi) - g^d(x,\xi))|_{\xi\in\partial S} = -G_2(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = 0.$$

Поскольку каждая из функций $E_4(x,\xi)$ и $g^d(x,y)$ симметрична, то функция $G_4^r(x,\xi)$ из (8) также симметрична. Из равенства (10) следует, что $g_4^r(x,\xi) \in C^3_\xi(\overline{S})$ при $x \in S$, так как такими являются функции $g^d(x,\xi)$ и $g_0(x,\xi)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Функция $u \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$, являющаяся решением задачи Навье (6), может быть представлена в виде*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial \Delta_\xi G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_0(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_1(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi)f(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$, то функция $u(x)$, определённая равенством (11), является решением задачи Навье (6).

Доказательство. Пусть $u \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$ – решение задачи Навье (6). Воспользовавшись формулой (3) и аналогично выводимой формулой

$$0 = \int\limits_{\partial S}\bigg(-g_4^r(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \frac{\partial g_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u - \Delta_\xi g_4^r(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} + \frac{\partial\Delta_\xi g_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\bigg)\, ds_\xi +$$

$$+\int\limits_S g_4^r(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

придём к равенству

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\biggl(-G_4^r(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}+\frac{\partial G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u-$$

$$-\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+\frac{\partial\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\biggr)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Из него, так как $G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S}=\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S}=0$ при $x\in S$, вытекает представление (11).

Проверим, что функция $u(x)$, определяемая равенством (11), является решением задачи Навье (6) при $\varphi_0\in C(\partial S)$, $\varphi_1\in C^1(\partial S)$ и $f\in C^1(\overline{S})$. Обозначим первый, второй и третий интегралы из (11) через u_1, u_2 и u_3 соответственно. Поскольку $\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)=-G_2(x,\xi)$ при $x\neq\xi$ (доказывается аналогично (9)), то, как известно, функция

$$u_1(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_0(\xi)\,ds_\xi\equiv w_{\varphi_0}(x)$$

является таким решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре S, что его сужение на ∂S совпадает с функцией φ_0. Далее, по теореме Фубини получаем

$$u_2(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)\biggl(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\frac{\partial G_2(y,\xi)}{\partial\nu}\varphi_1(\xi)\,ds_\xi\biggr)\,dy=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)w_{\varphi_1}(y)\,dy,$$

а значит, $\Delta_x u_2(x)=w_{\varphi_1}(x)$ и $u_2(x)|_{\partial S}=0$. При этом от функции $w_{\varphi_1}(x)$ нужно требовать, чтобы имело место включение $w_{\varphi_1}\in C^1(\overline{S})$, а оно выполнено, если $\varphi_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ [19, лемма 2.7]. Итак, бигармоническая функция $u_1(x)+u_2(x)$ – решение задачи Навье (6) для однородного бигармонического уравнения. Наконец, в силу свойств функции $G_2(x,\xi)$ имеем

$$\Delta^2 u_3(x)=-\frac{1}{\omega_n}\Delta\int\limits_S G_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=f(x)$$

и $u_3(x)|_{\partial S}=\Delta u_3(x)|_{\partial S}=0$. Следствие доказано.

Отметим, что задача Навье в шаре S безусловно разрешима [20].

3. Задача Рикье–Неймана. Задача Рикье–Неймана [17] (в [1] она называется задачей Неймана-2) заключается в нахождении функции $u\in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u(x)=f(x),\quad x\in S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S}=\varphi_0(\xi),\quad \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S}=\varphi_1(\xi),\quad \xi\in\partial S. \tag{13}$$

Сначала сделаем несколько замечаний по задаче Неймана. В работе [20] построена функция Грина $\mathcal{N}(x,\xi)=E(x,\xi)-E_0(x,\xi)$ задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре S, где гармоническая функция $E_0(x,\xi)$ записывается в виде

$$E_0(x,\xi)=\int\limits_0^1\biggl(\hat{E}\biggl(\frac{x}{|x|},t|x|\xi\biggr)+1\biggr)\frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}(x,\xi)=\Lambda_x E(x,\xi)$. Здесь $\Lambda_x u=\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$. Очевидно, что функция $\mathcal{N}(x,\xi)$ симметрична.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^1(\overline{S})$ *и* $\psi \in C(\partial S)$*. Тогда решение задачи Неймана*

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial S} = \psi$$

при условии

$$\int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi = \int\limits_S f(\xi)\, d\xi \tag{14}$$

с точностью до константы можно записать в виде

$$v_\psi(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \mathcal{N}(x,\xi)\psi(\xi)\, ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{15}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $\Lambda u = \partial u/\partial \nu$ на ∂S. В работе [20, теорема 2] установлено, что второй интеграл в представлении (15) является решением неоднородного уравнения Пуассона с $f \in C^1(\overline{S})$ в правой части и что

$$\Lambda_x \int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \bigg|_{x\in\partial S} = -\int\limits_S f(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Рассмотрим первый интеграл в условии (14). Очевидно, что функция $\mathcal{N}(x,\xi)$ в силу её определения является гармонической в S. Используя симметричность функции $G_2(x,\xi)$, нетрудно подсчитать, что при $\xi \in \partial S$ справедливы равенства

$$\Lambda_x \mathcal{N}(x,\xi) = \Lambda_x E(x,\xi) - \hat{E}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - 1 = -\Lambda_\xi G_2(x,\xi) - 1 = -\frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial \nu} - 1,$$

а поэтому по свойству функции Грина $G_2(x,\xi)$ (см. (1)) задачи Дирихле в S имеем

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \Lambda_x \mathcal{N}(x,\xi)\psi(\xi)\, ds_\xi|_{x\in\partial S} = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial \nu}\psi(\xi)\, ds_\xi \bigg|_{x\in\partial S} - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= \psi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial v_\psi(x)}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = \psi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S f(\xi)\, d\xi.$$

Теперь, воспользовавшись условием (14), заключаем, что гармоническая в S функция $v_\psi(x)$ удовлетворяет также и граничному условию задачи Неймана. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 3 для любой функции $\varphi \in C(\partial S)$ получена следующая формула:

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{N}(x,\xi)}{\partial \nu_x}\varphi(\xi)\, ds_\xi \bigg|_{x\in\partial S} = \varphi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Вернёмся к задаче Рикье–Неймана (13). Рассмотрим функцию вида

$$G_4^{rn}(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_4^{rn}(x,\xi), \tag{18}$$

где $g_4^{rn}(x,\xi) \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$ – бигармоническая функция по переменным $x,\xi \in S$ такая, что

$$\frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 1 \tag{19}$$

при $x \in S$. Назовём функцию $G_4^{rn}(x,\xi)$ *функцией Грина задачи Рикье–Неймана* (13).

Теорема 4. *Функцию Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ задачи Рикье–Неймана (13) можно представить в виде*

$$G_4^{rn}(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\mathcal{N}(y,\xi)\,dy - \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy \int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg), \tag{20}$$

где $\tau_n = |S|$ – объём шара S. Функция Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ является симметричной функцией.

Доказательство. Сначала докажем, что функция (20) представима в виде (18). Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$G_4^{rn}(x,\xi) = E_4^n(x,\xi) - \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S E(x,y)E_0(y,\xi)\,dy + \int\limits_S E_0(x,y)E(y,\xi)\,dy -$$

$$- \int\limits_S E_0(x,y)E_0(y,\xi)\,dy + \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy \int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg) \equiv E_4(x,\xi) + g_4^{rn}(x,\xi),$$

которое аналогично равенству $E_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_0(x,\xi)$ из теоремы 2. Первый и третий интегралы в полученном выше равенстве – гармонические функции по ξ, так как особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не усиливает. Второй интеграл в силу свойств объёмного потенциала – бигармоническая функция по ξ, поскольку функция $E_0(x,\xi)$ имеет ограниченные производные по ξ в $\overline{S}$ при $x \in S$.

Проверим граничные условия для функции $G_4^{rn}(x,\xi)$. По свойству (16) функции Грина $\mathcal{N}(x,\xi)$ и непрерывной дифференцируемости объёмного потенциала при $x \in S$ имеем

$$\frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\bigg(-\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy + \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy\,\tau_n\bigg) = 0.$$

В работе [20] установлено, что $\Lambda_\xi \mathcal{N}(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = -1$, и так как

$$\Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi) = -\mathcal{N}(x,\xi) + \frac{1}{|S|}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy$$

при $x \neq \xi$ (доказывается аналогично (9)), то при $x \in S$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 1.$$

Симметричность функции $G_4^{rn}(x,\xi)$ вытекает из симметричности функции $\mathcal{N}(x,\xi)$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть функция $u \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$ является решением задачи Рикье–Неймана (13). Тогда эта функция может быть представлена в виде*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} G_4^{rn}(x,\xi)\varphi_1(\xi)\,ds_\xi +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi + C, \tag{21}$$

где C – некоторая постоянная.

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$, то функция $u(x)$, определённая равенством (21), является решением задачи Рикье–Неймана (13) при условии

$$\int\limits_{\partial S} \varphi_1(\xi)\, ds_\xi = \int\limits_S f(\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи Рикье–Неймана (13). Аналогично доказательству следствия 1, воспользовавшись формулами (3) и (12) при $g_4^r(x,\xi) = g_4^{rn}(x,\xi)$, придём к равенству

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \left(-G_4^{rn}(x,\xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu} \Delta u - \right.$$

$$\left. - \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu} u(\xi) \right) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

учитывая в котором равенство (19), получаем представление (21) при $C = \int_{\partial S} u(\xi)\, ds_\xi / \omega_n$.

Проверим, что функция $u(x)$, заданная равенством (21), – решение задачи Навье при $\varphi_0 \in \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^1(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$. Обозначим первый, второй и третий интегралы из (21) через v_1, v_2 и v_3 соответственно. Поскольку при $x \neq \xi$ справедливо равенство

$$\Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi) = -\mathcal{N}(x,\xi) + \frac{1}{\tau_n} \int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\, dy,$$

то в силу представления (15) функция

$$v_1(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \mathcal{N}(x,\xi) \varphi_0(\xi)\, ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \mathcal{N}(x,y) \left(\frac{1}{\tau_n} \int\limits_{\partial S} \varphi_0(\xi)\, ds_\xi \right) dy$$

является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа в S с функцией φ_0 на границе и значением $\int_{\partial S} \varphi_0(\xi)\, ds_\xi / \tau_n$ в правой части уравнения (требуемое условие равенства интегралов выполнено). Значит, $v_1(x)$ – бигармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \right|_{\partial S} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \nu} \right|_{\partial S} = 0.$$

Далее, в силу теоремы Фубини будем иметь

$$v_2(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \mathcal{N}(x,y) \left(\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \mathcal{N}(y,\xi) \varphi_1(\xi)\, ds_\xi - \int\limits_{\partial S} \frac{1}{\tau_n} \int\limits_S \mathcal{N}(z,\xi)\, dz\, \varphi_1(\xi)\, ds_\xi \right) dy,$$

откуда в силу (15) (интеграл по y от выражения в скобках равен нулю) получаем

$$\Delta_x v_2(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \mathcal{N}(x,\xi) \varphi_1(\xi)\, ds_\xi - \int\limits_{\partial S} \frac{1}{\tau_n} \int\limits_S \mathcal{N}(z,\xi)\, dz\, \varphi_1(\xi)\, ds_\xi \equiv v_{\varphi_1;0}(x) - C$$

и $\partial v_2 / \partial \nu|_{\partial S} = 0$. Кроме того, $\Delta_x^2 v_2(x) = 0$ и, согласно формуле (17),

$$\frac{\partial \Delta v_2}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1(x) - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial S} \varphi_1(\xi)\, d\xi.$$

Для вычисления $\Delta_x v_2(x)$ нужно требовать, чтобы имело место включение $v_{\varphi_1;0} \in C^1(\overline{S})$, а оно выполнено, если $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ [19]. Наконец, в силу свойств функций $G_4^{rn}(x,\xi)$ и $\mathcal{N}(x,\xi)$ имеем

$$\Delta^2 v_3(x) = -\frac{1}{\omega_n}\Delta\int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\,d\xi = f(x)$$

при $f \in C^1(\overline{S})$. Теперь, воспользовавшись тем, что в этом равенстве производную можно внести под знак объёмного потенциала, и равенством $\Lambda_x\mathcal{N}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = -1$, получаем

$$\frac{\partial v_3}{\partial\nu}|_{x\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial\Delta v_3}{\partial\nu}|_{x\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S f(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, функция $u(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$ является решением следующей задачи Рикье–Неймана:

$$\Delta^2 u(x) = 0 + 0 + f(x) = f(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{x\in\partial S} = \varphi_0(x) + 0 + 0 = \varphi_0(x),$$
$$\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{x\in\partial S} = 0 + \varphi_1(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\varphi_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S f(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому, если выполнены условия (22), то функция $u(x)$, определённая равенством (21), является решением задачи (13). Теорема доказана.

Замечание. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Рикье–Неймана для полигармонического уравнения получено в работе [17], и это условие (22).

4. Примеры. Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i = \overline{1,h_k},\ \ k \in \mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ и ортогональных на ∂S сферических гармоник (см., например, [21]), нормированных так, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(\xi))^2\,ds_\xi = \omega_n$, и

$$h_k = \frac{2k+n-2}{n-2}\binom{k+n-3}{n-3}$$

при $n > 2$ $(h_k = 2$ при $n = 2)$ – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k.

Найдём решения рассмотренных выше однородных задач (нулевые значения на границе) для неоднородного бигармонического уравнения в шаре при $f(x) = |x|^{2l}H_m^{(j)}(x)$, $l \in \mathbb{N}_0$.

4.1. Задача Навье. По теореме 2 функция Грина задачи Навье $G_4^r(x,\xi)$ имеет вид

$$G_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)G_2(y,\xi)\,dy.$$

Функция $G_2(x,\xi)$ симметрична и из работы [15, лемма 3.2] следует, что при $n > 2$ и $|x| > |\xi|$ справедливо представление

$$G_2(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{-(2k+n-2)}-1}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Вычислим следующий интеграл:

$$I(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^1\rho^{n-1}d\rho\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}G_2(x,\rho\xi)f(\rho\xi)\,ds_\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_0^{|x|-\varepsilon} + \int\limits_{|x|+\varepsilon}^{1}\Bigg)\rho^{n-1}d\rho\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} G_2(x,\rho\xi)f(\rho\xi)\,ds_\xi \equiv \lim_{\varepsilon\to+0}(I_1^\varepsilon(x)+I_2^\varepsilon(x)).$$

Если $x=0$, то интеграл $I_1^\varepsilon(x)$ нужно опустить. Вычислим интеграл $I_1^\varepsilon(x)$. Так как $|\xi| < < |x|-\varepsilon \equiv a < |x|$, то, согласно [15, лемма 3.1], следующий ниже ряд сходится равномерно по ξ и поэтому суммирование и интегрирование можно поменять местами:

$$I_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^{|x|-\varepsilon} \rho^{2l+m+n-1+k}\,d\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{-(2k+n-2)}-1}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} H_k^{(i)}(\xi)H_m^{(j)}(\xi)\,ds_\xi.$$

Вследствие ортогональности системы $\{H_k^{(i)}(x): i=\overline{1,h_k},\ \ k\in\mathbb{N}_0\}$ находим, что

$$I_1^\varepsilon(x) = \frac{|x|^{-(2m+n-2)}-1}{2m+n-2}\frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}H_m^{(j)}(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_1^\varepsilon(x) = \frac{|x|^{2l+2}-|x|^{2l+2m+n}}{(2m+n-2)(2l+2m+n)}H_m^{(j)}(x).$$

Аналогично, используя симметричность функции $G_2(x,\xi)$, найдём, что

$$I_2^\varepsilon(x) = \int\limits_{|x|+\varepsilon}^{1} \rho^{2l+2m+n-1}\frac{\rho^{-(2m+n-2)}-1}{2m+n-2}\,d\rho\, H_m^{(j)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{1}{2l+2}-\frac{1}{2l+2m+n}-\frac{(|x|+\varepsilon)^{2l+2}}{2l+2}+\frac{(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)H_m^{(j)}(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2^\varepsilon(x) = \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{1-|x|^{2l+2}}{2l+2}-\frac{1-|x|^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)H_m^{(j)}(x).$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi = I_1^0(x)+I_2^0(x) = \frac{1}{C_{l,m}}(1-|x|^{2l+2})H_m^{(j)}(x),$$

где обозначено $C_{l,m}=(2l+2)(2l+2m+n)$. Следовательно, в силу теоремы Фубини

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(y,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi\,dy =$$

$$= \frac{1}{C_{l,m}}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)(1-|y|^{2l+2})H_m^{(j)}(y)\,dy = \left(\frac{|x|^{2l+4}-1}{C_{l,m}C_{l+1,m}}+\frac{1-|x|^2}{C_{l,m}C_{0,m}}\right)H_m^{(j)}(x). \tag{23}$$

4.2. Задача Рикье–Неймана. По теореме 4 функция Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ имеет вид

$$G_4^{rn}(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\left(\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\mathcal{N}(y,\xi)\,dy - \frac{n}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\right).$$

Условие разрешимости однородной задачи Рикье–Неймана при $f(x)=|x|^{2l}H_m^{(j)}(x)$ даётся равенством $\int_S|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=0,$ которое возможно только при $m>0,$ поскольку при таких m верно равенство $\int_{\partial S}H_m^{(j)}(\xi)\,ds_\xi=0.$ В работе [20, замечание 2] доказана формула

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=-\frac{|x|^{2l+2}-(2l+2+m)/m}{C_{l,m}}H_m^{(j)}(x). \tag{24}$$

В силу теоремы Фубини имеем

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(x,y)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(y,\xi)f(\xi)\,d\xi\,dy-$$

$$-\frac{n}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(x,y)\,dy\,\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\bigg(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi\equiv J_1(x)+J_2(x).$$

Вычислим интеграл $J_1(x).$ В силу формулы (24) получаем

$$J_1(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(x,y)\frac{|y|^{2l+2}-(2l+2+m)/m}{C_{l,m}}H_m^{(j)}(y)\,dy=$$

$$=\bigg(\frac{|x|^{2l+4}-(2l+4+m)/m}{C_{l,m}C_{l+1,m}}-\frac{2l+2+m}{mC_{l,m}}\frac{|x|^2-(m+2)/m}{C_{0,m}}\bigg)H_m^{(j)}(x).$$

Из результатов работы [20, теорема 1] при $|\xi|>|x|$ следует представление

$$\mathcal{N}(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}+(k+n-2)/k}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi)+\frac{|\xi|^{-(n-2)}}{n-2},$$

из которого находим, что

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(x,\xi)\,d\xi=\frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_0^{|x|}+\int\limits_{|x|}^1\bigg)\rho^{n-1}\int\limits_{\partial S}\mathcal{N}(x,\rho\xi)\,ds_\xi\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{n-2}\bigg(\frac{|x|^2}{n}+\frac{1}{2}-\frac{|x|^2}{2}\bigg)=\frac{1}{2(n-2)}-\frac{|x|^2}{2n}.$$

Поэтому, используя симметричность функции $\mathcal{N}(x,\xi),$ получаем

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\bigg(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\bigg(\frac{|\xi|^{2l}}{2(n-2)}-\frac{|\xi|^{2l+2}}{2n}\bigg)H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=0,$$

откуда следует, что $J_2(x)=0.$ Значит, при $m>0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\bigg(\frac{|x|^{2l+4}-(2l+4+m)/m}{C_{l,m}C_{l+1,m}}-\frac{2l+2+m}{mC_{l,m}}\frac{|x|^2-(m+2)/m}{C_{0,m}}\bigg)H_m^{(j)}(x). \tag{25}$$

Поскольку коэффициенты при многочленах $H_m^{(j)}(x)$ в правых частях формул (23) и (25) не зависят от индекса j, то в них можно положить $H_m^{(j)}(x) = H_m(x)$, где $H_m(x)$ – произвольный однородный гармонический многочлен степени m.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.A03.21.0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // Le Matematiche. 2006. V. 61. № 2. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
5. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
6. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.
7. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 177–183.
8. *Карачик В.В., Антропова Н.А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2013. V. 49. № 2. С. 250–254.
9. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Adv. in Pure and Appl. Math. 2019. V. 10. № 3. С. 203–214.
10. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
11. *Карачик В.В., Торебек Б.Т.* О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
12. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. труды. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
13. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
14. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
15. *Karachik V.V.* Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
16. *Sweers G.* A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equat. 2009. V. 54. P. 79–93.
17. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2018. V. 54. № 5. С. 653–662.
18. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
19. *Алимов Ш.А.* Об одной задаче с наклонной производной // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1738–1751.
20. *Карачик В.В., Турметов Б.Х.* О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // Мат. труды. 2018. Т. 21. № 1. С. 17–34.
21. *Karachik V.V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 12. P. 3513–3519.

Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет),
г. Челябинск

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.
После доработки 16.09.2020 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 687–699

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.958:539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. О. И. Махмудов, И. Э. Ниёзов

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений, известным на части границы этой области, т.е. задача Коши.

DOI: 10.31857/S0374064121050101

Введение. В настоящей работе предлагается явная формула восстановления решения систем термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям напряжений, заданным только на части границы области. Рассмотрения ведутся в двух направлениях: поиск разумных условий разрешимости и вывод формул для решений, а также критериев разрешимости поставленной задачи.

Для решения задач теории упругости требуется задание тех или иных граничных условий на всей границе области. В классических задачах это задание либо вектора смещения, либо вектора напряжения на всей границе области, либо смещений на одной части границы, а напряжений – на другой. В других вариантах задач на каждой части границы заданы комбинации необходимого количества компонент смещений и напряжений. Эти краевые задачи или подобные им задачи математической физики являются корректными и хорошо изучены. Во многих реальных задачах, однако, смещения и напряжения либо недоступны для измерения на части границы, либо известны опосредовано при помощи некоторых их интегральных характеристик.

Система уравнений термоупругости является эллиптической. Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна (пример Адамара). Решение может существовать, тогда оно единственно, но не устойчиво, т.е. решение может сильно изменяться при малом изменении начальных данных. В некорректных задачах существование решения и принадлежность его классу корректности предполагается априори.

Задача Коши для эллиптических уравнений являлась предметом изучения математиков на протяжении двадцатого века и продолжает по сей день притягивать внимание исследователей.

Развитие специальных методов, позволяющих работать с некорректными задачами Коши, стимулировалось запросами практики. Такие задачи ставились в гидродинамике, в теории передачи сигналов, в томографии, в геологоразведке, в геофизике, в теории упругости и т.д.

Решение задачи Коши для одномерной системы уравнений Коши–Римана впервые получил Т. Карлеман в 1926 г. [1]. Им была предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, позволяющей при помощи предельного перехода погасить влияние интегралов по той части границы, где значения продолжаемой функции не заданы. Идею Карлемана развили Г.М. Голузин и В.И. Крылов в 1933 г. [2], которые нашли общий способ получения формул Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана.

На основе результатов Карлемана и Голузина–Крылова М.М. Лаврентьев ввёл понятие функции Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана. Метод Лаврентьева [3] состоит в аппроксимации ядра Коши на дополнительной части границы области вне носителя данных задачи Коши.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа – это фундаментальное решение, зависящее от положительного числового параметра, стремящегося к нулю вместе со своей производной по нормали на части границы области вне носителя данных Коши, когда параметр стремится к бесконечности. При помощи функции Карлемана и интегральной формулы

Грина получается формула Карлемана, которая даёт точное решение задачи Коши, когда данные заданы точно. Построение функции Карлемана позволяет также строить регуляризацию, если данные Коши заданы приближённо. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы Мергеляна [4].

В 1959 г. В.А. Фок и Ф.М. Куни [5] нашли применение формулы Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана. В случае, когда часть границы области является отрезком действительной оси, они, используя формулу Карлемана, нашли критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Коши–Римана на плоскости. Аналог формулы Карлемана и критерии разрешимости задачи Коши для аналитических функций многих переменных получены в работах [6, 7], для гармонических функций – в работах [8–10], а также в работах авторов [11–16].

Монографии [3, 9, 17, 18] представляют собой достаточно полный обзор по формулам Карлемана.

В данной работе на основе метода функции Карлемана строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений термоупругости.

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ – точки вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂D и S – гладкая часть ∂D.

Пусть 4-компонентная вектор-функция $U(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),u_4(x))^*$, где * здесь и далее означает операцию транспонирования, удовлетворяет в области D системе уравнений термоупругости [19, с. 50]

$$B(\partial_x,\omega)U(x)=0, \tag{1}$$

где $B(\partial_x,\omega)=\|B_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times 4}$ – операторная 4×4-матрица с элементами

$$B_{kj}(\partial_x,\omega)=\delta_{kj}(\mu\Delta+\rho\omega^2)+(\lambda+\mu)\partial^2/\partial x_k\partial x_j,\quad k,j=1,2,3,$$

$$B_{k4}(\partial_x,\omega)=-\gamma\partial/\partial x_k,\quad k=1,2,3,$$

$$B_{4j}(\partial_x,\omega)=-i\omega\eta\partial/\partial x_j,\quad j=1,2,3,$$

$$B_{44}(\partial_x,\omega)=\Delta+i\omega/\theta,$$

Δ – оператор Лапласа, δ_{kj} – символ Кронекера, i – мнимая единица, т.е. $i^2=-1$, коэффициенты λ, μ, ρ, ω, θ – характеристики среды – удовлетворяют условиям $\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$, $\theta>0$, $\rho>0$, $\gamma\eta>0$, а ω – некоторое действительное число, называемое *частотой колебания.*

Пусть $U(x)=(u(x),v(x))^*$, где $u(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x))$ – вектор смещения, $v(x)$ – температура среды. Тогда уравнение (1) можно записать в виде системы

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u-\gamma\operatorname{grad}v+\rho\omega^2u=0,$$

$$\Delta v+\frac{i\omega}{\theta}v+i\omega\eta\operatorname{div}u=0,$$

где λ, μ – постоянные Ламе.

Вектор-функция $U(y)$ называется *регулярной* в D, если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D}=D\bigcup\partial D$.

1. Фундаментальные решения уравнений термоупругости и интегральное представление. Для уравнения термоупругости (1) имеем

$$\det B(\partial_x,\omega)=\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2,$$

где λ_1^2 и λ_2^2 определяются из уравнений

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{i\omega}{\theta}+\frac{i\omega\gamma\eta}{\lambda+2\mu}+k_1^2,\quad \lambda_1^2\lambda_2^2=\frac{i\omega}{\theta}k_1^2,$$

$k_1^2=\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)$, причём предполагается, что $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$, а $\lambda_3^2=\rho\omega^2/\mu$.

Алгебраическое дополнение элемента $B_{kj}(\partial_x,\omega)$ в детерминанте $\det B(\partial_x,\omega)$, которое обозначим через $\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)$, равно

$$\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)=\mu^2(\lambda+2\mu)(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg\{\frac{\delta_{kj}}{\mu}(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)-$$

$$-\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg[(\lambda+\mu)\bigg(\Delta+\frac{i\omega}{\theta}\bigg)+i\omega\eta\gamma\bigg](\Delta+\lambda_3^2)\bigg\}+\gamma\mu^2\delta_{k4}(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta+\lambda_3^2)^2-$$

$$-i\eta\mu^2\omega\delta_{j4}(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta+\lambda_3^2)^2+\mu^2(\lambda+2\mu)\delta_{k4}\delta_{j4}(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2,\quad k,j=\overline{1,4}.$$

Подставляя в систему (1) вместо U матрицу

$$U=\|\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)\|^*_{4\times4}\varphi, \tag{2}$$

где φ – скалярная функция, получаем

$$\sum_{q=1}^{3}B_{kq}(\partial_x,\omega)\mathcal{B}_{qj}(\partial_x,\omega)\varphi=\sum_{q=1}^{3}B_{kq}(\partial_x,\omega)\mathcal{B}_{jq}(\partial_x,\omega)\varphi\equiv$$

$$\equiv\delta_{kj}\det B(\partial_x,\omega)\varphi=\delta_{kj}\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2\varphi=0,\quad k,j=\overline{1,4},$$

и для функции $\psi=\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_3^2)\varphi$ имеем уравнение

$$(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)\psi=0.$$

Для того чтобы матрица решений (2) оказалась фундаментальной, мы должны найти такое решение последнего уравнения, частные производные четвёртого порядка которого имеют особенности лишь вида $|x|^{-1}$. Такое решение, если оно существует, должно удовлетворять условиям

$$(\Delta+\lambda_{q+1}^2)(\Delta+\lambda_{q+2}^2)\psi=\frac{\exp(\lambda_q|x|)}{2\pi|x|},\quad q=1,2,3,$$

где $\lambda_4=\lambda_1$, $\lambda_5=\lambda_2$.

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно ψ, $\Delta\psi$, $\Delta^2\psi$, найдём

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{3}\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{(\lambda_{q+1}^2-\lambda_q^2)(\lambda_{q+2}^2-\lambda_q^2)|x|}, \tag{3}$$

и после подстановки значения ψ в (2), помня, что $\mathcal{B}_{jq}(\partial_x,\omega)$ содержит множитель $\Delta+\lambda_3^2$, получим матрицу фундаментальных решений уравнения (1)

$$\Psi(x,\omega)=\|\Psi_{kj}(x,\omega)\|_{4\times4}, \tag{4}$$

здесь

$$\Psi_{kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^{3}\bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)+$$

$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\bigg\}\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{|x|},$$

где

$$\alpha_q=\frac{(-1)^q(1-i\omega\theta^{-1}\lambda_q^{-2})(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}-\frac{\delta_{3q}}{2\pi\rho\omega^2},\quad \sum_{q=1}^{3}\alpha_q=0,$$

$$\beta_q = \frac{(-1)^q(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^{3}\beta_q = 0,$$

$$\gamma_q = \frac{(-1)^q(\lambda_q^2-k_1^2)(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^{3}\gamma_q = 1.$$

Несложно проверить, что каждый вектор-столбец в фундаментальной матрице $\Psi(x,\omega)$ имеет единственную особенность в точке $x=0$, и притом порядок не выше $|x|^{-1}$. Кроме того, из представления (4) с помощью непосредственных вычислений вытекает

Теорема 1. *Каждый столбец матрицы $\Psi(x,\omega)$, рассматриваемый как вектор, удовлетворяет системе (1) во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат.*

Заметим, что матрица $\Psi(x,\omega)$ не симметрична и её строки, рассматриваемые как векторы, не удовлетворяют уравнению (1).

Для матрицы $\Psi(x,\omega)$ имеет место равенство $\Psi^*_{kj}(x,\omega)=\Psi_{jk}(-x,\omega), \quad k,j=\overline{1,4}$.

Прямым вычислением доказывается

Теорема 2. *Каждый столбец матрицы $\Psi^*(x,\omega)$, рассматриваемый как вектор, удовлетворяет союзному уравнению $B^*(\partial_x,\omega)U=0$ $(B^*_{kj}(\partial_x,\omega)=B_{jk}(-\partial_x,\omega))$ во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат.*

Обозначим через $\mathbb{B}=\mathcal{B}/\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_3^2)$, где $\mathcal{B}=\|\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times4}$. Тогда $\mathbb{B}$ является матричным дифференциальным оператором второго порядка в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющим равенствам $\mathbb{B}B=B\mathbb{B}=pE_4$, где $p(\Delta)=(\Delta+k_1^2)(\Delta+k_2^2)(\Delta+k_3^2)$.

Функция ψ, определяемая равенством (3), является фундаментальным решением в $\mathbb{R}^3$ самосопряжённого оператора $p(\Delta)$, и $\Psi(x,\omega)=\mathbb{B}\psi$.

Отсюда следует, что если u является решением уравнения $pu=0$ в каком-то открытом множестве $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^3$, то $U=\mathbb{B}u$ будет решением уравнения $BU=0$ на $\mathcal{O}$.

Известно, что для регулярного решения системы (1) верно следующее интегральное представление [19, с. 380]:

$$2U(x)=\int\limits_{\partial D}(\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\}-\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Psi}(y-x,\omega)\}^*U(y))\,ds_y, \quad x\in D, \tag{5}$$

где $R(\partial_y,\nu(y))$ – оператор напряжения, определяемый равенством

$$R(\partial_y,\nu(y))=\|R_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{4\times4}=\begin{pmatrix} & & & -\gamma\nu_1\\ & T & & -\gamma\nu_2\\ & & & -\gamma\nu_3\\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\nu(y)\end{pmatrix},$$

$$T=T(\partial_y,\nu(y))=\|T_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{3\times3},$$

$$T_{kj}(\partial_y,\nu(y))=\lambda\nu_k(y)\partial/\partial y_j+\mu\nu_j(y)\partial/\partial y_k+(\lambda+\mu)\delta_{kj}\partial/\partial\nu(y), \quad k,j=1,2,3,$$

$$\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))=\|\widetilde{R}_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{4\times4}=\begin{pmatrix} & & & -i\omega\eta\nu_1\\ & T & & -i\omega\eta\nu_2\\ & & & -i\omega\eta\nu_3\\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\nu(y)\end{pmatrix},$$

$\widetilde{\Psi}(x,\omega)=\Psi^*(x,\omega)=\Psi(-x,\omega)$, $\nu(y)=(\nu_1(y),\nu_2(y),\nu_3(y))$ – внешний единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y.

2. Задача Коши и критерий разрешимости. Через S обозначим гладкую открытую часть поверхности ∂D. Задача Коши для системы $BU=0$ в D с данными на S состоит в следующем: для заданных функций U_0 и U_1 на S со значениями в $\mathbb{R}^4$ найти решение U этой системы в D такое, что $U=U_0$ и $R(\partial_y,\nu(y))U=U_1$ на S.

Чтобы изучить эту задачу, мы должны выбрать функциональные пространства для U_0, U_1 и U. Строгий анализ можно найти в [9, гл. 10, § 10.4]. Этот анализ немного громоздок, так как поведение решения вблизи границы S требует внимательного изучения. Чтобы выделить основные трудности в задаче Коши, ограничимся случаем, когда U_0 и U_1 – интегрируемые функции на S классов C^1 и C соответственно. Таким образом, мы рассматриваем задачу

$$B(\partial_x,\omega)U(x)=0,\quad x\in D,$$

$$U(y)=U_0(y),\quad y\in S,$$

$$R(\partial_y,\nu(y))U(y)=U_1(y),\quad y\in S, \tag{6}$$

где $U_0\in C^1(S)\bigcap L_1(S)$, $U_1\in C(S)\bigcap L_1(S)$.

Известно, что эта задача некорректна. Её некорректность аналогична некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа [8]. Хорошо известно, что задача (6) имеет не более одного решения в любом разумно выбранном пространстве функций на D.

Введём функцию

$$2\mathcal{U}(x)=\int\limits_S(\Psi(x-y,\omega)U_1(y)-\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^*U_0(y))\,ds_y \tag{7}$$

для $x\notin S$. Так как фундаментальное решение $\Psi(x-y,\omega)$ является вещественным и аналитическим, кроме начала координат в $\mathbb{R}^3$, то функция $\mathcal{U}$ также является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. Кроме того, $\mathcal{U}$ является решением однородной системы (1), т.е. системы

$$B(\partial_x,\omega)\mathcal{U}(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}.$$

В частности, компоненты векторнозначной функции $\mathcal{U}$ являются решениями скалярного уравнения

$$p(\Delta)\varphi=(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)\varphi=0$$

в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. Если $x\in S$, то оба интеграла $\mathcal{U}$ и $R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}$ имеют скачки, равные U_0 и U_1 соответственно.

Введём обозначения $\mathcal{U}^{\pm}(x)=\mathcal{U}(x)$, $x\in D^{\pm}$, где $D^+=D$, $D^-=\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$.

Лемма 1. *Если $S\in C^2$, а $U_0(y)\in C^1(S)\bigcap L_1(S)$, $U_1(y)\in C(S)\bigcap L_1(S)$, то вектор-функция $\mathcal{U}^-$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^-\bigcup S$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}^+$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^+\bigcup S$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что существует гладкая в некоторой окрестности S в $\mathbb{R}^3$ функция $\widehat{U}$ такая, что сужение на S функций $\widehat{U}$ и $R(\partial_y,\nu(y))\widehat{U}$ равны U_0 и U_1 соответственно (см. [20, лемма 28.2]). Тогда на основании формулы Сохоцкого–Племеля получаем: если $y\in S$, $\nu(y)$ – единичный вектор внешней нормали к S в точке y, то

$$\lim_{\varepsilon\to0}\{\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=U_0(y),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\{R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=U_1(y),$$

причём предел достигается равномерно на компактных подмножествах S. Для удобства в дальнейшем эти предельные соотношения запишем в виде

$$\lim_{\varepsilon\to0}\{\partial^p\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-\partial^p\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=\partial^p\widehat{U}(y),\quad |p|\leqslant1, \tag{8}$$

где $\widehat{U}(y)=U_0(y)$ при $p=0$, $\partial^1\widehat{U}(y)=U_1(y)$ при $p=1$ и $\partial^1=R(\partial_y,\nu(y))$.

Пусть, например, вектор-функция $\mathcal{U}^+$ гладко продолжается в $D^+\bigcup S$. Зафиксируем мультииндекс p $(|p|\leqslant 1)$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\partial^p\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))=\partial^p\mathcal{U}^+(y)-\partial^p\widehat{U}(y),\quad |p|\leqslant 1.$$

Доопределим $\partial^p\mathcal{U}^-$ в $D^-\bigcup S$ следующим образом:

$$\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x)=\begin{cases}\partial^p\mathcal{U}^-(x), & x\in D^-,\\ \partial^p\mathcal{U}^+(x)-\partial^p\widehat{U}(x), & x\in S.\end{cases}$$

Покажем, что $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-$ непрерывна в $D^-\bigcup S$. Зафиксируем произвольно выбранную точку $x_0\in$ $\in S$ и число $\tau>0$. Поскольку $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-$ непрерывна на S, то найдётся такое δ_0, что если $x_1\in S$ и $|x_1-x_0|<\delta_0$, то справедливо неравенство

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)|<\tau/2.$$

Уменьшая в случае надобности величину δ_0, можно считать, что $K=\overline{B_{\delta_0}(x_0)}\bigcap S$ – компактное подмножество в S.

Так как поверхность S является гладкой, то можно выбрать число $0<\delta<\delta_0/2$ таким, чтобы каждая точка $x\in B_\delta(x_0)\bigcap D^-$ представлялась в виде $x=x_1+\varepsilon\nu(x_1)$, где $x_1\in S$, а $\varepsilon=\operatorname{dist}(x,S)$. Тогда $\varepsilon<\delta$, поэтому $|x_1-x_0|\leqslant|x_1-x|+|x-x_0|<\delta_0$, т.е. $x_1\in K$.

Учитывая, что предел в (8) достигается равномерно на компактных подмножествах поверхности S, и уменьшая, если надо, δ, можно добиться того, чтобы при $x_1\in K$ и $0<\varepsilon<\delta$ выполнялось неравенство

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1+\varepsilon\nu(x_1))-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|<\tau/2.$$

Пусть теперь $x\in B_\delta(x_0)\bigcap D^-$, тогда $x=x_1+\varepsilon\nu(x_1)$ для некоторых $x_1\in K$ и $0<\varepsilon<\delta$. Поэтому

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x)|\leqslant|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|+|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1+\varepsilon\nu(x_1))-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|<\tau.$$

Следовательно, вектор-функция $\mathcal{U}^-$ гладко продолжается в $D^-\bigcup S$, если вектор-функция $\mathcal{U}^+$ гладко продолжается в $D^+\bigcup S$, и наоборот. Лемма доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало решение $U\in C^1(D\bigcup S)$ задачи Коши (6), необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\mathcal{U}$ можно было продолжить из $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ через S в D как вещественную аналитическую функцию.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется решение $U\in C^1(D\bigcup S)$ задачи Коши (6) в $\mathbb{R}^3\setminus\partial D$. Определим функцию V следующим образом:

$$V(x)=\begin{cases}\mathcal{U}(x)-U(x), & x\in D,\\ \mathcal{U}(x), & x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}.\end{cases}\tag{9}$$

Сужение вектор-функции V на D обозначим через V^+, а на $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ через V^-. На основе формул (5), (7) и (9) получим

$$2V^+(x)=\int\limits_{\partial D\setminus S}(\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^*U(y)-\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\})\,ds_y$$

для всех $x\in D$.

Отсюда следует, что V^+ продолжается через S до аналитической функции V на всё множество $\mathbb{R}^3 \setminus (\partial D \setminus S)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$2V(x) = \int\limits_S (\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^* U(y))\, ds_y$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Поэтому $\mathcal{U}$ по лемме 1 продолжается из $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ через S в D как вещественная аналитическая функция.

Достаточность. Обратно, пусть $\mathcal{U}$ продолжается до вещественной аналитической функции V из $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ через S в D со значениями в $\mathbb{R}^3$, так что $V = \mathcal{U}$ вне окрестности $\overline{D}$. Тогда

$$B(\partial_x,\omega)V(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Поскольку вектор-функция $B(\partial_x,\omega)V$ является вещественно аналитической, то она также обращается в нуль на D.

Положим $U(x) = \mathcal{U}(x) - V(x)$, $x \in D$. Из только что доказанного следует, что U является гладкой функцией в окрестности поверхности S в D, удовлетворяющей уравнению $B(\partial_x,\omega)U = 0$. Мы утверждаем, что U является требуемым решением задачи (6). Несложно проверить, что $U = U_0$ и $R(\partial_y,\nu(y))U = U_1$ на S. Так как V является гладкой в $\mathbb{R}^3 \setminus (\partial D \setminus S)$, без труда можем получить формулу Сохоцкого–Племеля

$$U(y) = \mathcal{U}^+(y) - V^+(y) = \mathcal{U}^+(y) - V^-(y) = \mathcal{U}^+(y) - \mathcal{U}^-(y) = U_0(y), \quad y \in S,$$

аналогично

$$R(\partial_y,\nu(y))U(y) = R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))V^+(y) = R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))V^-(y) =$$

$$= R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^-(y) = U_1(y), \quad y \in S.$$

Теорема доказана.

3. Базисы с двойной ортогональностью. Формула Карлемана. “Задача продолжения” функций в гильбертовых пространствах имеет приемлемое решение в терминах базисов с двойной ортогональностью (ср. [9, гл. 12]). Идея применения этого понятия принадлежит С. Бергману (1927 г.), который использовал его для вывода критерия аналитического продолжения. Мы применяем этот метод к задаче Коши (6) в том частном случае, когда D является частью шара B_R с центром в начале координат и радиусом $R > 0$.

Пусть S – гладкая замкнутая поверхность в B_R, разбивающая его на две связные компоненты B_R^+ и B_R^- и ориентированная как граница B_R^-, при этом $0 \in B_R^+$, $0 \notin S$. Пусть $D = B_R^-$ и его граница состоит из S и части границы сферы ∂B_R в $\mathbb{R}^3$.

Как показано выше, интеграл $\mathcal{U}(x)$ является решением уравнения $B(\partial_x,\omega)\mathcal{U}(x) = 0$ и его компоненты удовлетворяют скалярному уравнению $p(\Delta)u = 0$ вне $\overline{D}$. Последнее уравнение фактически является скалярным и вытекает из первого. Мы здесь применяем базисы двойной ортогональности для получения условия аналитического продолжения решения уравнения $p(\Delta)u = 0$ из маленького шара – окрестности нуля – в большой шар B_R.

Оператор Гельмгольца $\Delta + k^2$ в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\Delta + k^2 = \frac{1}{r^2}\left\{\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + r\frac{\partial}{\partial r} + k^2r^2 - \Delta_{\mathbb{S}}\right\},$$

где $\Delta_{\mathbb{S}}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере, $k > 0$.

Решая уравнение Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$ методом Фурье, получаем

$$u(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(kr) Y_n(\varphi,\vartheta),$$

где $J_{n+1/2}(kr)$ – функция Бесселя $(n+1/2)$-го порядка, $Y_n(\varphi,\vartheta)=\sum_{m=0}^{n}Y_{n,m}$ – сферические функции n-го порядка [21, с. 555].

Верны следующие утверждения [22].

Теорема 4. *Для каждого $R>0$ система решений $J_{n+1/2}(kr)Y_n(\varphi,\vartheta)$, $n\in\mathbb{N}$, уравнения Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$ является ортогональным базисом в подпространстве $L^2(B_R)$.*

Теорема 5. *Для фундаментального решения уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$ имеет место разложение*

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp{(ik|x-y|)}}{|x-y|}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k)\bar{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x), \tag{10}$$

ряд в котором сходится равномерно вместе со всеми своими производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3:|x|<|y|\}$.

Здесь

$$c_{n,m}(y,k)=-\frac{1}{4\pi}\biggl(\int\limits_{B_{|y|}}\frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}\overline{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x)\,dx\biggr)\biggl(\int\limits_0^{|y|}|J_{n+1/2}(rk)|^2r\,dr\biggr)^{-1},$$

$$\bar{J}_n(t)=\left(\frac{k}{2}\right)^{n+1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(t/2)^{2j}}{j!\Gamma(j+n+3/2)},$$

$P_{n,m}(x)=|x|^nY_n^m(\theta,\varphi)$ – однородные гармоники n-го порядка (шаровые функции).

Представление (10), полученное для фундаментального решения с помощью ортогонального базиса, позволяет получить следующую формулу Карлемана для восстановления решения однородной системы (1):

$$\Psi(y-x,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x,y), \tag{11}$$

в которой ряд равномерно сходится вместе со всеми производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3:|x|<|y|\}$ и каждая Ψ_n является 4×4-матрицей, так что

$$\Psi_{n,kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^{3}\biggl\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\biggl(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\biggr)+$$

$$+\beta_q\biggl[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\biggr]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\biggr\}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k)\bar{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x).$$

Теперь, если заменить $\partial/\partial x_i$ на $-\partial/\partial y_i$, получим, что справедлива

Теорема 6. *Каждый член $\Psi_n(x,y)$ является вещественно аналитической матричнозначной функцией на $\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, удовлетворяющей уравнениям*

$$B(\partial_x,\omega)\Psi_n(x,y)=0\quad\text{и}\quad B^*(\partial_y,\omega)(\Psi_n(x,y))^*=0.$$

Доказательство. Указанные свойства матрицы $\Psi_n(x,y)$ вытекают из её построения. Сингулярность при $y=0$ обусловлена интегралом $\int_0^{|y|}|J_{n+1/2}(rk)|^2r\,dr$. Теорема доказана.

Так как матричнозначные функции $\Psi_n(x,y)$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяют союзному уравнению $B^*(\partial_y,\omega)(\Psi_n(x,y))^*=0$, то ряда (11) достаточно для получения явной формулы решения задачи Коши (6).

Пусть

$$\Psi^{(n)}(x,y)=\Psi(x-y,\omega)-\sum_{\nu=0}^{n}\Psi_\nu(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}).$$

Теорема 7. *Для любой вектор-функции* $U \in C^1(\overline{D})$ *верно интегральное представление*

$$2U(x) = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y\Bigg]$$

для всех $x \in D$.

Доказательство. Из представления (5), теоремы 6 и формулы Грина вытекает равенство

$$0 = \int\limits_{\partial D} (\Psi_{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y$$

при $x \in D$, где $\Psi_{(n)}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n}\Psi_\nu(x,y)$ – регулярное решение системы (1). Теперь, вычитая это равенство из равенства (5), будем иметь

$$2U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y. \tag{12}$$

Левую часть равенства (12) представим в виде $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y,$$

$$I_2 = \int\limits_{\partial D\setminus S} (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y.$$

При $y \in \partial D\setminus S$, где $|x| < |y|$, в интеграле I_2 последовательность матричнозначных функций $\Psi^{(n)}(y,x)$ по теореме 5 равномерно сходится к нулю, когда $n \to \infty$. Поэтому, переходя в равенстве (12) к пределу при $n \to \infty$, приходим к утверждению теоремы.

Пусть U является решением задачи (6). Вне S в $\mathbb{R}^3$ имеем

$$\int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^*U(y))\,ds_y = \mathcal{U}(x) - V_{(n)}(x), \tag{13}$$

где

$$V_{(n)}(x) = \int\limits_S (\Psi_{(n)}(x,y)U_1(y) - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_{(n)}(x,y)\}^*U_0(y))\,ds_y,$$

или

$$V_{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{n}\int\limits_S (\Psi_m(x,y)U_1(y) - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_m(x,y)\}^*U_0(y))\,ds_y.$$

Теперь пусть $\varepsilon = \operatorname{dist}\{0,S\} > 0$. Если $x \in B_\varepsilon$, то левая часть равенства (13) стремится к нулю, так как ряд (11) сходится равномерно вместе со своими первыми производными по y на S. Отсюда следует, что последовательность $\{V_{(n)}\}$ сходится к $\mathcal{U}$ равномерно вместе со своими производными на компактных подмножествах шара B_ε. Отсюда и теоремы 3 вытекает условие разрешимости задачи (6).

Следствие 1. *Если последовательность* $\{V_{(n)}\}$ *сходится равномерно на компактных подмножествах шара* B_R, *то задача Коши (6) разрешима.*

Доказательство. Так как члены последовательности $\{V_{(n)}\}$ покомпонентно являются решением скалярного уравнения $p\varphi = 0$, то по теореме Стилтьеса–Витали его предел $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_{(n)}$ также покомпонентно удовлетворяет тому же уравнению в B_R. Поэтому V является вещественно аналитической функцией на B_R с значениями в $\mathbb{R}^3$. Но V совпадает в маленьком шаре B_ε с $\mathcal{U}$, что гарантирует по теореме 3 разрешимость задачи Коши.

4. Условие разрешимости на языке матрицы Карлемана. Пусть D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой части S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, и части $\partial D \setminus S$, лежащей в плоскости $y_3 = 0$.

Рассмотрим задачу Коши (6). Для её решения для данной односвязной области S используется метод функции Карлемана, т.е. строится матрица Карлемана и с помощью этой матрицы даётся формула для нахождения решения внутри области.

Следуя [8], приведём

Определение. *Матрицей Карлемана задачи (6)* называется 4×4-матрица $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$, зависящая от двух точек y, x и положительного числового параметра σ, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) имеет место равенство $\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \Psi(y-x,\omega) + G(y,x,\sigma)$, где $\Psi(y-x,\omega)$ – матрица фундаментальных решений систем термоупругости, а матрица $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет по переменной y системе (1) всюду в области D;

2) справедливо неравенство $\int_{\partial D\setminus S}(|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|)\,ds_y \leqslant \varepsilon(\sigma)$, в котором $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$.

Здесь и далее $|\Pi|$ – евклидова норма матрицы $\Pi = \|\Pi_{kj}\|$, т.е. $|\Pi| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^4(\Pi_{kj})^2}$. В частности, $|U| = \sqrt{\sum_{k=1}^4 u_k^2}$.

Известно, что для вектор-функций U и $\widetilde U$, регулярных в D, и вектор-функций BU и $\widetilde B\widetilde U$, абсолютно интегрируемых в D, справедлива формула [19, с. 376]

$$\int\limits_D [U(y)\{\widetilde B(\partial_y,\omega)\widetilde U(y)\} - \widetilde U(y)\{B(\partial_y,\omega)U(y)\}]\,dy =$$

$$= \int\limits_{\partial D} [U(y)\{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))\widetilde U(y)\} - \widetilde U(y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\}]\,ds_y,$$

где $\widetilde B(\partial_x,\omega) = \|\widetilde B_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times 4}$, $\widetilde B_{kj}(\partial_x,\omega) = B_{jk}(-\partial_x,\omega)$.

Подставляя в это равенство вместо $\widetilde U(y)$ и $U(y)$ соответственно $G(y,x,\sigma)$ и регулярное решение $U(y)$ системы (1), будем иметь

$$0 = \int\limits_{\partial D} [G(y,x,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))G^*(y,x,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y. \tag{14}$$

Почленно складывая равенства (5) и (14), заключаем, что имеет место

Теорема 8. *Всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в области D определяется формулой*

$$2U(x) = \int\limits_{\partial D} [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))\widetilde\Pi(y,x,\omega,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y, \quad x\in D,$$

где $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$ – матрица Карлемана, $\widetilde\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \Psi(x-y,\omega) + G^*(y,x,\sigma)$.

С целью построения приближённого решения задачи (6) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \|\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma)\|_{4\times 4},$$

$$\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma) = \sum_{q=1}^3 \biggl\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\biggl(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q} - \alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\biggr) +$$

$$+ \beta_q\biggl[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\biggr] + \delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\biggr\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$\Pi_{4j}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\left\{i\beta_q\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}+\delta_{j4}\gamma_q\right\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q),\quad j=1,2,3,$$

$$\Pi_{k4}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\left\{-\beta_q\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}+\delta_{k4}\gamma_q\right\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q),\quad k=1,2,3,$$

$$\Pi_{44}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\gamma_q\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q), \tag{15}$$

где

$$\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)=\frac{1}{-2\pi^2\exp(\sigma x_3^2)}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\exp(\sigma w^2)}{w-x_3}\frac{\cos(\Lambda u)\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{16}$$

$w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, $\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $\alpha>0$. Из результатов работы [23] вытекает

Лемма 2. *Функция $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$, определяемая равенством (16), представима в виде*

$$\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)=\frac{\exp(i\Lambda r)}{4\pi r}+\varphi(y,x,\sigma,\Lambda),\quad r=|y-x|, \tag{17}$$

где $\varphi(y,x,\sigma,\Lambda)$ – некоторая функция, заданная для всех значений и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, $\Delta(\partial_y)\varphi+\Lambda^2\varphi=0$, $y\in D$, где $\Delta(\partial_y)=\partial^2/\partial y_1^2+\partial^2/\partial y_2^2+\partial^2/\partial y_3^2$.

Для функции $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\partial D\setminus S}\left(|\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)|+\left|\frac{\partial\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)}{\partial\nu}\right|\right)ds_y\leqslant C(\Lambda,D)\sigma\exp(-\sigma x_3^2), \tag{18}$$

где $C(\Lambda,D)$ – некоторая ограниченная функция, не зависящая от σ.

Функцию $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ назовём *функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца*. Функция $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ при $x\neq y$ дважды непрерывно дифференцируема по y, и имеют место следующие неравенства:

$$|\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)|\leqslant C_1r^{-1}\exp\{\sigma(y_3^2-x_3^2)\},$$

$$|\partial\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)/\partial y_k|\leqslant C_2r^{-2}\sigma\exp\{\sigma(y_3^2-x_3^2)\},\quad k=1,2,3,$$

$$|\partial^2\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)/\partial y_k\partial y_j|\leqslant C_3r^{-3}\sigma^2\exp\{\sigma\,(y_3^2-x_3^2)\},\quad k,j=1,2,3. \tag{19}$$

Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Матрица $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$, определённая равенствами (15), (16), является матрицей Карлемана задачи (6).*

Доказательство. В силу равенств (15)–(17) имеем $\Pi(y,x,\omega,\sigma)=\Psi(x-y,\omega)+G(y,x,\sigma)$, где $\Psi(x-y,\omega)=\|\Psi_{kj}(x-y,\omega)\|$ и $G(y,x,\sigma)=\|G_{kj}(y,x,\sigma)\|$, а

$$\Psi_{kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^{3}\left\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_q\left[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\right]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\right\}\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{|x|},$$

$$G_{kj}(y,x,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\left\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_q\left[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\right]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\right\}\varphi(y,x,\sigma,\Lambda).$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться, что матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D.

Используя равенства (15), (16) и (18), получаем

$$\int\limits_{\partial D\setminus S} (|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|)\,ds_y \leqslant C(x)\sigma^3\exp(-\sigma x_3^2), \tag{20}$$

где $C(x)$ – некоторая ограниченная внутри D функция, не зависящая от σ.

При $x\in D$ положим

$$2\mathcal{U}_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y. \tag{21}$$

Имеет место

Теорема 9. *Пусть $U(x)$ – регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условию*

$$|U(y)| + |R(\partial_y,\nu(y))U(y)| \leqslant M, \quad y\in\partial D\setminus S. \tag{22}$$

Тогда при $\sigma\geqslant 1$ справедлива оценка

$$|U(x) - \mathcal{U}_\sigma(x)| \leqslant MC_1(x)\sigma^3\exp(-\sigma x_3^2),$$

где $C_1(x) = C\int_{\partial D_\rho} r^{-2}\,ds_y$.

Доказательство. Вследствие равенств (5) и (21) имеем

$$|U(x) - \mathcal{U}_\sigma(x)| \leqslant \frac{1}{2}\Bigg|\int\limits_{\partial D\setminus S} [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D\setminus S} [|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|][|U(y)| + |R(\partial_y,\nu(y))U(y)|]\,ds_y.$$

Теперь в силу неравенств (20) и (22) получаем требуемую оценку.

Следствие 2. *При выполнении условия (21) справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:*

$$U(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\mathcal{U}_\sigma(x) = \frac{1}{2}\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} -$$

$$- \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y, \quad x\in D, \tag{23}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}\int\limits_S [\Pi(y,x,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega)\}^* U(y)]\,ds_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Q(x,\omega,\sigma)\,d\sigma, \quad x\in D, \tag{24}$$

где

$$Q(x,\omega,\sigma) = \int\limits_S [P(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} -$$

$$- \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))P^*(y,x,\omega,\sigma)\}^* U(y)]\,ds_y, \quad x\in D, \tag{25}$$

$$P(y,x,\omega,\sigma) = \partial/\partial\sigma\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \|\partial/\partial\sigma\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma)\|,$$

а $\Pi(y,x,\omega)$ – матрица, заданная равенствами (15), в которых $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda) = (4\pi r)^{-1}\exp(i\Lambda r)$.

Эквивалентность формул продолжения (23) и (24) вытекает из соотношения

$$\lim_{\sigma\to\infty}\mathcal{U}_\sigma(x)=\int\limits_0^\infty \frac{d\mathcal{U}_\sigma(x)}{d\sigma}\,d\sigma+\mathcal{U}_0(x).$$

Заключение. Аналогичные результаты можно получить для областей типа конуса и для неограниченных областей типа слоя, а также для системы уравнений моментной теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carleman T.* Les Functions Quasi Analitiques. Paris, 1926.
2. *Голузин Г.М., Крылов В.И.* Обобщенная формула Carleman‘а и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40. № 2. С. 144–149.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
4. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. Вып. 5 (71). С. 337–340.
5. *Фок В.А., Куни Ф.М.* О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 6. С. 1195–1198.
6. *Gonchar A.A.* On analytic continuation from the “edge of wedge” // Ann. Acad. Sci. Finnical. Ser. AI: Matem. 1985. V. 10. P. 221–225.
7. *Кытманов А.М.* Интеграл Мартинелли–Бохнера и его применения. Новосибирск, 1991.
8. *Ярмухамедов Ш.Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
9. *Tarkhanov N.N.* The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. Math. Top. V. 7. Berlin, 1995.
10. *Шлапунов А.А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 205–215.
11. *Makhmudov O., Niyozov I.* Regularization of a solutions to the Cauchy problem for systems of elasticity theory. More progresses on analysis // Proc. of the Int. 5th ISAAK Congress / Eds. H.G.W. Begehr. Singapore, 2009.
12. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity // Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 297–310.
13. *Makhmudov O., Niyozov I.* The Cauchy problem for the Lame system in infinite domains in $\mathbb{R}^m$ // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. V. 14. № 9. P. 905–924.
14. *Makhmudov O., Niyozov I.* Regularization of a solution to the Cauchy problem for the system of thermoelasticity // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 285–289.
15. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 674–678.
16. *Махмудов О.И., Ниезов И.Э.* Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. № 2. С. 369–376.
17. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
18. *Айзенберг Л.А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск, 1990.
19. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейтвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., 1976.
20. *Тарханов Н.Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск, 1991.
21. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М., 1974.
22. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* О задаче Коши для системы динамических уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1164–1173.
23. *Махмудов К.О., Махмудов О.И., Тарханов Н.Н.* Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 2. С. 270–283.

Самаркандский государственный университет
им. Алишера Навои, Узбекистан

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
После доработки 20.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 700–716

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2+517.958:539.3(5)

МОДЕЛИ УПРУГОГО СОЧЛЕНЕНИЯ ПЛАСТИНЫ СО СТЕРЖНЯМИ, ОСНОВАННЫЕ НА ТОЧЕЧНЫХ УСЛОВИЯХ СОБОЛЕВА И САМОСОПРЯЖЁННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. С. А. Назаров

Двумерная и одномерные модели Кирхгофа тонких изотропных пластины и стержней соединены в единую задачу, описывающую деформацию сочленения этих упругих объектов. Условия сопряжения в точках присоединения стержней к пластине назначаются при помощи техники самосопряжённых расширений дифференциальных операторов, имеющих четвёртый порядок в двумерной области и второй порядок на одномерных отрезках. Приведены постановки задач, содержащих нелинейные условия сопряжения, в частности, односторонние связи.

DOI: 10.31857/S0374064121050113

1. Постановка задачи. Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой (класса C^∞ для упрощения) границей $\Gamma = \partial\Omega$ и компактным замыканием $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$. Внутри Ω зафиксируем J различных точек $P^1, \ \ldots, \ P^J$. Пусть ещё Υ^j – отрезок длиной $l_j > 0$, лежащий в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющий с областью Ω общей только точку P^j (рис. 1, а) и параметризованный переменной $z_j \in (0, l_j)$ так, что этой точке отвечает координата $z_j = 0$, $j = \overline{1, J}$. Интерпретируя область Ω и отрезки $\Upsilon^1, \ \ldots, \ \Upsilon^J$ как двумерную пластину и одномерные стержни соответственно, рассмотрим задачу Неймана (свободный край пластины) для бигармонического уравнения

$$D_0 \Delta_x^2 u_0(x) = f_0(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{P^1, \ldots, P^J\}, \tag{1}$$

$$N^q(x, \nabla_x) u_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \tag{2}$$

и обыкновенные дифференциальные уравнения с условиями Дирихле (зафиксированы внешние концы стержней)

$$-D_j \partial_{z_j}^2 u_j(z_j) = f_j(z_j), \quad z_j \in (0, l_j), \tag{3}$$

$$u_j(l_j) = 0 \quad (j = \overline{1, J}), \tag{4}$$

где $D_0, \ D_1, \ \ldots, \ D_j$ – положительные множители.

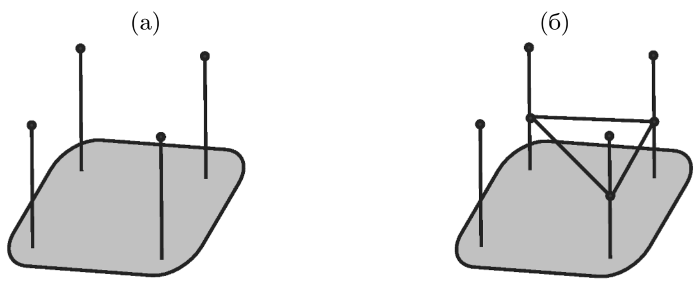

Рис. 1. Сочленение пластины со стержнями: простое (а) и с жёсткими стрингерами (б).

Поясним принятые обозначения: u_0 – прогиб пластины и u_j – продольные смещения в стержнях, а f_0 и f_j – поперечные и продольные силы соответственно. Дифференциальные операторы в краевых условиях (2) имеют вид (см. [1; 2, § 30] и др.)

$$N^2(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1-\nu)(\partial_s^2 + \varkappa(s)\partial_n),$$

$$N^3(x, \nabla_x) = \partial_n\Delta_x - (1-\nu)(\partial_s\varkappa(s)\partial_s - \partial_n\partial_s^2), \tag{5}$$

где $\nabla_x = \operatorname{grad}$, $\Delta_x = \nabla_x\cdot\nabla_x$ – оператор Лапласа и (n, s) – локальная система криволинейных координат в окрестности $\mathcal{V}$ контура Γ, n – ориентированное расстояние до Γ, $n < 0$ в $\Omega\bigcap\mathcal{V}$, s – длина дуги на Γ, а $\varkappa(s)$ – кривизна контура в точке $s \in \Gamma$, положительная на выпуклых участках. Множители $D_0 > 0$ в (1) и $D_j > 0$ в (3) – цилиндрическая жёсткость пластины и приведённый модуль Юнга стержня, а $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона материала пластины, отсутствующий в уравнении Софи Жермон (1), но присутствующий в операторах (5) и функционале удвоенной упругой энергии $D_0E_0(u^0, u^0; \Omega)$ пластины Ω:

$$E_0(u, \upsilon; \Omega) = D_0\int\limits_\Omega\biggl(\Delta_x u\Delta_x\upsilon + (1-\nu)\biggl(2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2}\biggr)\biggr)\,dx. \tag{6}$$

Масштабированием сведём характерный размер упругого сочленения $\Xi = \Omega\bigcup\Upsilon^1\bigcup\ldots\bigcup\Upsilon^J$ к единице и тем самым сделаем координаторы и все геометрические параметры безразмерными. Множители D_0 и $D_1, \ldots, D_J$ зависят от поперечных размеров исходных трёхмерных пластины и стержней (прототипов их моделей Ω и $\Upsilon^1, \ldots, \Upsilon^J$; см., например, [3, гл. 4, § 2; гл. 5, § 2]), однако в данной работе считаем их величинами одного порядка, т.е., в частности, предполагаем, что исходные жёсткостные характеристики изотропного материала пластины превосходят такие же характеристики у стержней. Сделаем обсуждаемые множители безразмерными, положив $D_0 = 1$.

Уравнение (1) поставлено в проколотой области $\Omega\setminus\{P^1, \ldots, P^J\}$ – вне точек множества $\mathcal{P} = \{P^1, \ldots, P^J\}$ – и ещё не назначены краевые условия для уравнений (3) в точках $z_j = 0$. Основная цель работы – при помощи техники самосопряжённых расширений дифференциальных операторов (см. публикации [4–13] и многие др.) осуществить корректную постановку задачи о деформации упругого сочленения областей с различными предельными размерностями, учитывающую разнообразные способы взаимодействия его элементов – пластины и стержней.

В п. 2 рассматривается простейший вариант: абсолютно жёсткие стержни фиксируют прогиб пластины Ω в точках $P^1, \ldots, P^J$, т.е. задача (1), (2) снабжается точечными условиями Соболева

$$u_0(P^j) = 0, \quad j = \overline{1, J}, \tag{7}$$

корректность постановки которых обеспечена теоремой Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости (см. монографии [14, 15] и др.). Подобные задачи широко используются, например, при моделировании вантовых и подвесных мостов (см. справочник [16] и, например, монографию [17]) при интерпретации поддерживающих тросов, стальных и обычно предварительно напряжённых, именно как абсолютно жёстких стержней. Вместе с тем в определённых ситуациях, особенно для пенькового или синтетического такелажа, приходится принимать во внимание деформацию тросов. С этой целью в п. 3 вводится положительный неограниченный симметрический замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве

$$H = L^2(\Omega)\times L^2(\Upsilon^1)\times\ldots\times L^2(\Upsilon^J), \tag{8}$$

где $L^2(\Sigma)$ – пространство Лебега с натуральным скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\Sigma$, и находится область определения самосопряжённого оператора A^*. В п. 4 описываются все возможные самосопряжённые расширения оператора A, при помощи которых можно смоделировать любые (жёсткие, упругие, шарнирные и прочие) способы прикрепления стержней к пластине, но в п. 5 выделяется то из расширений, которое отвечает рассматриваемой первичной модели упругого сочленения Ξ при игнорировании продольной деформации пластины и изгиба вместе с закручиванием стержней. Наконец, в п. 6 обсуждаются задачи с односторонними связями: в определённых условиях пластина перестаёт контактировать с тем или иным стержнем (ср. статью [18] о мембране, натянутой на несколько стоек). При этом помимо корректных постановок дифференциальных и вариационных задач основная цель – сведение их к алгебраическим задачам на основе схемы, разработанной в п. 2 с использованием обобщённых функций Грина с особенностями в точках $P^1, \ldots, P^J$. Полное изучение нелинейных задач планируется провести в более общей ситуации систем дифференциальных уравнений, учитывающих все возможные способы деформации элементов упругой конструкции.

2. Задача Соболева. В силу формулы Грина (см., например, монографию [2, § 30])

$$(\Delta_x^2 u, v)_\Omega = E(u, v; \Omega) - (N^2 u, \partial_n v)_\Gamma + (N^3 u, v)_\Gamma \tag{9}$$

вариационная постановка задачи (1), (2), (7) реализуется как интегральное тождество

$$E(u_0, v_0; \Omega) = (f_0, v_0)_\Omega \quad \text{для любой} \quad v_0 \in H^2(\Omega; \mathcal{P}) \tag{10}$$

на подпространстве

$$H_0^2(\Omega; \mathcal{P}) = \{u_0 \in H^2(\Omega) : u_0(P^j) = 0, \quad j = \overline{1, J}\}. \tag{11}$$

Поскольку пространство Соболева $H^2(\Omega)$ вкладывается в пространство непрерывных функций $C(\Omega)$, подпространство (11) замкнуто.

В силу простого алгебраического неравенства

$$E(u_0, u_0; \Omega) \geqslant (1 - \nu)\|\nabla_x^2 u_0; L^2(\Omega)\|^2, \tag{12}$$

в котором $\nabla_x^p u_0$ – вектор, составленный из производных функции u_0 порядка p, в частности, $\nabla_x^2 u_0 = (\partial^2 u_0/\partial x_1^2, 2\partial^2 u_0/\partial x_1 \partial x_2, \partial^2 u_0/\partial x_2^2)$, билинейная форма (6) вырождается только на линейных функциях $\ell(x) = \ell_0 + \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2$ и, следовательно, обладает полиномиальным свойством [18], обеспечивающим полезные свойства операторам задачи (1), (2) (см. ниже). Далее придётся различать три геометрические ситуации:

1°. $J = 1$, т.е. отмечена только одна точка, для определённости, начало координат $P^1 = (0, 0)$, и

$$\mathcal{L} := \{\ell(x) = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 : \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}\}; \tag{13}$$

2°. $J \geqslant 2$ и точки $P^1, \ldots, P^J$ лежат на одной прямой, для определённости, на оси ординат, и

$$\mathcal{L} := \{\ell(x) = \ell_1 x_1 : \ell_1 \in \mathbb{R}\}; \tag{14}$$

3°. $J \geqslant 3$ и в множестве $\mathcal{P}$ есть три точки, являющиеся вершинами невырожденного треугольника, и поэтому $\mathcal{L} = \{0\}$.

В силу теоремы Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве справедливо следующее

Предложение 1. *Задача (10) с правой частью $f_0 \in L^2(\Omega)$ имеет решение $u_0 \in H_0^2(\Omega; \mathcal{P})$ в том и только в том случае, если*

$$(f_0, \ell)_\Omega = 0 \quad \textit{для всех} \quad \ell \in \mathcal{L}. \tag{15}$$

Само решение определено с точностью до слагаемого из подпространства $\mathcal{L}$, но, будучи подчинено условиям ортогональности

$$(u_0, \ell)_\Omega = 0 \quad \textit{для всех} \quad \ell \in \mathcal{L}, \tag{16}$$

становится единственным и удовлетворяет оценке $\|u_0; H^2(\Omega)\| \leqslant c\|f_0; L^2(\Omega)\|$, в которой постоянный множитель c не зависит от функции f_0.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{P} = \varnothing$, т.е. задача (1), (2) ставится в цельной, а не проколотой области Ω. Предложение 1 сохраняет силу, если в формулах (15) и (16) взять

$$\mathcal{L} = \{\ell(x) = \ell_0 + \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 : \ell_q \in \mathbb{R}, \quad q = 0, 1, 2\}. \tag{17}$$

В ситуации 3° задача (10) однозначно разрешима – в этом пункте работы для краткости имеем дело только с таким расположением точек. Включение $u_0 \in H^2(\Omega; \mathcal{P})$ не даёт полной информации о дифференциальных свойствах решения и её можно уточнить, а именно, справедливо представление

$$u_0(x) = \widetilde{u}_0(x) + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x) a_j \Phi(x - P^j), \tag{18}$$

где $\widetilde{u}_0 \in H^4(\Omega)$, $\widetilde{u}_0(P^j) = 0$, $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ – срезающая функция, равная единице в окрестности точки P^j, причём $\operatorname{supp}\chi_j \bigcap \operatorname{supp}\chi_k = \varnothing$ при $j \neq k$, а Φ – фундаментальное решение бигармонического оператора на плоскости,

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi}|x|^2 \ln\frac{1}{|x|}, \tag{19}$$

для которого, согласно его назначению, верна формула

$$\int\limits_{\{x:|x|=\rho\}} N^3(x, \nabla_x)\Phi(x)\, ds_x = 1. \tag{20}$$

Наконец, $a_1, \ \ldots, \ a_j$ – коэффициенты, определяемые при решении всей задачи (10) (или (1), (2), (7) в дифференциальной постановке), и верна оценка

$$\|u_0; H^4(\Omega)\| + \sum_{j=1}^{J} |a_j| \leqslant C\|f_0; L^2(\Omega)\|.$$

В рамках теории распределений (см., например, книги [19, 20]) уравнение (1) распространяем на всю область Ω следующим образом:

$$\Delta_x^2 u_0(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{J} a_j \delta(x - P^j), \quad x \in \Omega.$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака. Найдём представление этого решения, используя обобщённую функцию Грина задачи (1), (2), отыскиваемую как решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta_x^2 G(x; y) = \delta(x - y) - L(x; y), \quad x \in \Omega, \\ N^q(x, \nabla_x) G(x; y) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \end{gathered} \tag{21}$$

и подчинённую трём условиям ортогональности (ср. предложение 1)

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{x} G(x; y)\, dx = 0 \in \mathbb{R}^3. \tag{22}$$

При этом $\mathbf{x} = (1, x_2, x_3)^{\mathrm{т}}$ (здесь и всюду в статье $^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования), а линейная функция $x \mapsto L(x; y)$ с вектором коэффициентов $\mathbf{L}(y) \in \mathbb{R}^3$ выбрана так, что

$$\int\limits_{\Omega} L(x; y)\, dx = \mathbf{y} := (1, y_1, y_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Согласно замечанию 1 существование решений задачи (21), (22) обеспечено непрерывностью функционала

$$H^2(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int\limits_\Omega \delta(x-y)\varphi(x)\,dx = \varphi(y)$$

и выполнением условий разрешимости (23). Положим $G_j(x) = G(x; P^j)$, $\mathbf{L}^j = \mathbf{L}(P^j)$ и заметим, что

$$\mathbf{G}_{jk} := G_j(P^k) = \int\limits_\Omega G_j(x)\Delta_x^2 G_k(x)\,dx = E(G_j, G_k; \Omega), \tag{24}$$

т.е. $J\times J$-матрица $\mathbf{G}$ с элементами (24) является матрицей Грама, симметричной и положительно определённой. Ещё одна 3×3-матрица Грама

$$\mathbf{M} = \int\limits_\Omega \mathbf{x}\mathbf{x}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\,dx \tag{25}$$

содержится в вытекающем из (23) равенстве $\mathbf{ML} = \mathbf{P}$, связывающем между собой $3\times J$-матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_0^1 & \ldots & \mathbf{L}_0^J \\ \mathbf{L}_1^1 & \ldots & \mathbf{L}_1^J \\ \mathbf{L}_2^1 & \ldots & \mathbf{L}_2^J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ P_1^1 & \ldots & P_1^J \\ P_2^1 & \ldots & P_2^J \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Решение $u_0 \in H_0^2(\Omega; \mathcal{P})$ задачи (10) ищем в виде

$$u_0(x) = u_\bullet(x) + \ell(x) + \sum_{j=1}^J a_j G_j(x). \tag{27}$$

Здесь ℓ – линейная функция с коэффициентами ℓ_q, столбцы $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_j)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$ и $\mathbf{l} = (\ell_0, \ell_1, \ell_2)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$ подлежат определению, а $u_\bullet \in H^4(\Omega)$ – решение задачи (1), (2) с правой частью $f_\bullet(x) = f_0(x) + \ell_\bullet(x)$ в цельной области Ω, причём в соответствии с замечанием 1 линейная функция $\ell_\bullet$ со столбцом коэффициентов

$$\mathbf{l}_\bullet = -\mathbf{M}^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{x} f_0(x)\,dx \in \mathbb{R}^3 \tag{28}$$

обеспечивает существование решения $u_\bullet$, подчинённого условиям ортогональности (16), (17).

Функция (27) удовлетворяет уравнению (1) с правой частью f_0 при условии

$$\mathbf{La} = \mathbf{l}_\bullet \in \mathbb{R}^3 \tag{29}$$

(уничтожили линейные функции в правых частях бигармонических уравнений для G_j и $u_\bullet$). Условия Соболева (7) принимают вид системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{u}_\bullet + \mathbf{P}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\mathbf{l} + \mathbf{Ga} = 0 \in \mathbb{R}^J,$$

где $\mathbf{u}_\bullet = (u_\bullet(P^1), \ldots, u_\bullet(P^J))^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$, а значит,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\mathbf{l} - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{u}_\bullet \in \mathbb{R}^J. \tag{30}$$

Поскольку $\mathbf{L} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$, выводим из формул (29) и (30) ещё одну систему

$$\mathbf{PG}^{-1}\mathbf{P}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\mathbf{l} = \mathbf{MPG}^{-1}\mathbf{u}_\bullet - \mathbf{Ml}_\bullet \in \mathbb{R}^3. \tag{31}$$

Матрица из левой части последней системы симметрична и положительно определена. В самом деле, эти же свойства матрицы Грама $\mathbf{G}$ гарантируют, что в случае $b^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}b = 0$ для некоторого столбца $b \in \mathbb{R}^3$ выполнены равенства $\mathbf{P}^{\mathrm{т}} b = 0 \in \mathbb{R}^J$ и тогда $b = 0$, так как ранг второй матрицы (26) равен трём в силу принятого ограничения 3°.

Итак, находим столбец $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ из уравнений (31), а затем и столбец $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^J$ из уравнений (30). Следовательно, справедливо представление (27), а вместе с ним и разложение (18).

Замечание 2. Ограничение 3° назначено лишь для упрощения проверки нужных фактов. В ситуациях 1° или 2° коэффициенты ℓ_1, ℓ_2 или ℓ_1 линейной функции ℓ из (27) остаются произвольными, а компоненты $\ell_{\bullet 1}$, $\ell_{\bullet 2}$ или $\ell_{\bullet 1}$ столбца (28) обращаются в нуль благодаря соотношению (15) из предложения 1. Иными словами, системы (29) и (30) сужаются на соответствующее подпространство в $\mathbb{R}^3$, на котором матрица $\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{т}}$ обратима.

3. Исходный симметрический оператор модели упругого сочленения и его сопряжённый. Пусть A_c – неограниченный оператор в гильбертовом пространстве (8) с дифференциальным выражением

$$(\Delta_x^2, -D_1\partial_{z_1}^2, \ldots, -D_J\partial_{z_J}^2) \tag{32}$$

и областью определения

$$\mathcal{D}_c = \{U = (u_0, u_1, \ldots, u_J) : u_0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}), \quad N^q(x, \nabla_x)u_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3;$$

$$u_j \in C_c^\infty(0, l_j], \quad u_j(l_j) = 0, \quad j = \overline{1, J}\}. \tag{33}$$

Здесь $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ – пространство бесконечно дифференцируемых в проколотом замыкании $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$ функций, обращающихся в нуль в какой-то окрестности множества $\mathcal{P}$, и столь же гладкие функции $u_j \in C_c^\infty(0, l_j]$ аннулируются около точки $z_j = 0$.

Оператор A_c симметрический и положительный, однако незамкнутый. Для описания его замыкания A и сопряжённого оператора A^* понадобятся пространства Кондратьева $V_\beta^l(\Omega; \mathcal{P})$ (см. первоисточник [21] и, например, монографию [22]), полученные пополнением линейного пространства $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ по весовой соболевской норме

$$\|u; V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})\| = \left(\sum_{p=0}^{s} \|\mathbf{r}^{\beta - s + p}\nabla_x^p u; L^2(\Omega)\|^2\right)^{1/2}, \tag{34}$$

где $s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса, а $\mathbf{r}(x)$ – расстояние от точки x до множества $\mathcal{P}$. Пространство $V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})$ состоит из тех функций $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, для которых конечна норма (34). Поскольку $\mathbf{r}(x) > c_\Gamma > 0$ при $x \in \Gamma$, то в случае $s \geqslant 1$ пространство следов на Γ функций из $V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})$ есть не что иное как пространство Соболева–Слободецкого $H^{s-1/2}(\Gamma)$.

Понятно, что отображение

$$\mathcal{N}_\beta = \{\Delta_x^2, N^2, N^3\} : V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P}) \to V_\beta^0(\Omega; \mathcal{P}) \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \tag{35}$$

непрерывно при любом весовом показателе. Более того, верна оценка (см. [21] и, например, [22, гл. 4, § 1])

$$\|u_0; V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P})\| \leqslant c_\beta(\|\Delta_x^2 u_0; V_\beta^0(\Omega; \mathcal{P})\| +$$

$$+ \|N^2 u_0; H^{3/2}(\Gamma)\| + \|N^3 u_0; H^{1/2}(\Gamma)\| + \|u_0; V_{\beta-4}^0(\Omega; \mathcal{P})\|). \tag{36}$$

Принципиально присутствие в правой части неравенства (36) нормы функции u_0 в пространстве $V_{\beta-4}^0(\Omega; \mathcal{P})$, содержащем пространство $V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P})$ из левой части: такая оценка окажется полезной, но она все-таки не даёт сколь-нибудь важной информации о самом отображении (35), так как вложение $V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P}) \subset V_{\beta-4}^0(\Omega : \mathcal{P})$ является непрерывным, но не компактным. Согласно теории Кондратьева [21] (см. также [23; 22, гл. 6, § 6] и др.) для придания фредгольмова свойства оператору $\mathcal{N}_\beta$ требуется, чтобы весовой показатель β не был “запретным” – такие запретные показатели образуют счётное множество $\mathcal{B}$ на вещественной оси с двумя точками сгущения $\pm\infty$. Благодаря полиномиальному свойству формы (6) (см. комментарий к формуле (12)) известно (см. [24, пример 1.14 и предложение 2.21]), что $\mathcal{B} = \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – множество целых чисел. К сожалению, $L^2(\Omega) = V_0^0(\Omega; \mathcal{P})$, а индекс $\beta = 0$ как раз запретный. Поэтому далее придётся также оперировать со ступенчатым весовым пространством $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$ с нормой*)

$$\|u; V_{\#}^{-4}(\Omega; \mathcal{P})\| = (\|\nabla_x^2 u; H^1(\Omega)\|^2 + \|u; V_{-1-\varepsilon}^2(\Omega; \mathcal{P})\|^2)^{1/2}, \tag{37}$$

где ε – любое число из интервала $(0, 1)$. Пространство $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$ не зависит от выбора ε ни алгебраически, ни топологически (см. замечание 3). Отображение

$$\mathcal{N}_{\#} = \{D_0 \Delta_x^2, N^2, N^3\} : V_{\#}^4(\Omega : \mathcal{P}) \to V_0^0(\Omega; \mathcal{P}) \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

остаётся непрерывным, но дополнительно приобретает фредгольмово свойство, выражаемое оценкой

$$\|u_0; V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})\| \leqslant c_\Sigma(\|\Delta_x^2 u_0; V_0^0(\Omega; \mathcal{P})\| + \|N^2 u_0; H^{3/2}(\Gamma)\| + \|N^3 u_0; H^{1/2}(\Gamma)\| + \|u_0; L^2(\Sigma)\|, \tag{38}$$

где Σ – компакт в $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$, а множитель c_Σ зависит от выбора подмножества Σ, но не от функции u_0.

Предложение 2. *Замыкание A оператора A_c сохраняет дифференциальное выражение (32), но приобретает область определения*

$$\mathcal{D} = \{U \in V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P}) \times H^2(0, l_1) \times \ldots \times H^2(0, l_J) :$$

$$N^q(x, \nabla_x) u_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \quad u_j(l_j) = 0, \quad u_j(0) = \partial_{z_j} u_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, J}\}.$$

Доказательство. Согласно определению оператор A будет замыканием оператора A_c, если из того, что $U^k \in \mathcal{D}_c$, $U^k \to U^\infty$, $F^k = A_c U^k \to F^\infty$ сильно в H вытекают соотношения $U^\infty \in \mathcal{D}$ и $AU^\infty = F^\infty$. Для первых компонент вектор-функций U^k, U^m из линейного множества (33) оценка (38) гарантирует, что

$$\|u_0^k - u_0^m; V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})\| \leqslant c_\Sigma(\|\Delta_x^2(u_0^k - u_0^m); L^2(\Omega)\| + \|u_0^k - u_0^m; L^2(\Sigma)\|) \leqslant$$

$$\leqslant c_0(\|f_0^k - f_0^m; L^2(\Omega)\| + \|u_0^k - u_0^m; L^2(\Omega)\|).$$

Следовательно, фундаментальность последовательностей $\{u_0^k\}$ и $\{f_0^k = \Delta_x^2 u_0^k\}$ в $L^2(\Omega)$ влечёт за собой фундаментальность первой из них в $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$. Аналогичное свойство последовательностей $\{u_j^k\}$ и $\{f_j^k = -D_j \partial_{z_j}^2 u_j^k\}$ в $L^2(0, l_j)$, обеспеченное простым следствием интерполяционного неравенства

$$\|u_j; H^2(0, l_j)\| \leqslant c_j(\|\partial_{z_j}^2 u_j; L^2(0, l_j)\| + \|u_j; L^2(0, l_j)\|),$$

вместе с элементарным следовым неравенством [27, гл. 1]

$$|u_j(0)| + |\partial_{z_j} u_j(0)| + |u_j(l_j)| \leqslant c_j \|u_j; H^2(0, l_j)\|$$

заканчивает доказательство предложения.

---

*) Следует упомянуть, что в последнем параграфе работы [21] приведены наметки возможной модификации кондратьевских весовых классов V_β^s при наличии у модельной задачи в конусе или проколотом пространстве полиномиальных решений, однако законченная теория краевых задач для эллиптических систем в ступенчатых весовых пространствах, инициированная вопросами механики трещин [25], представлена в статье [26] и книге [22, гл. 8, § 4]. Сам термин “ступенчатый” связан с тем, что график зависимости от порядка дифференцирования p в норме (34) – наклонная прямая, а в норме (37) график имеет уступ на уровне $p = 3$.

Замечание 3. Поскольку $V^4_{\#}(\Omega;\mathcal{P}) \subset H^4(\Omega)$ ввиду определений весовых норм (37), (34) и любой квадратичный полином $x \mapsto p(x)$ не попадает в пространство $V^2_{-1-\varepsilon}(\Omega;\mathcal{P})$ из-за расходимости интегралов в точках $P^1, \ldots, P^J$, возможна подмена $V^4_{\#}(\Omega;\mathcal{P})$ подпространством пространства Соболева $H^4(\Omega)$, выделенном равенствами

$$u_0(P^j) = 0, \quad \nabla_x u_0(P^j) = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2_x u_0(P^j) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad j = \overline{1,J}. \tag{39}$$

Обратная подмена обеспечена трёхкратным применением одномерного неравенства Харди

$$\int\limits_0^d r^{-2\gamma-1}|\mathcal{U}(r)|^2\,dr \leqslant \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^d r^{-2\gamma+1}\left|\frac{d\mathcal{U}}{dr}(r)\right|^2 dr \tag{40}$$

для любых $\mathcal{U} \in C^1[0,d]$, $\mathcal{U}(0)=0$, $d>0$, $\gamma>0$. При этом функцию u_0 следует записать в полярной системе координат (r_j,φ_j) с центром в точке P^j и дополнительно проинтегрировать по угловой переменной $\varphi_j \in [0,2\pi)$ неравенство (40), в котором

$$\mathcal{U}(r_j,\varphi_j) = \chi_j(x)\nabla^q_x u_0(x), \tag{41}$$

$\gamma = \varepsilon - q + 5/2$, $q = 2,1,0$, а χ_j – срезки, введённые в представлении (18). Требование $\mathcal{U}(0)=0$ в (40) для вектор-функций (41) обеспечено соотношениями (39).

В статье [6], относящейся к задаче Дирихле для бигармонического уравнения в случае $J = 1$, содержится именно описание области определения оператора задачи как пространства $H^4(\Omega)$ с условиями (39). В данной работе удобно применить теорию Кондратьева, обслуживающую эллиптические краевые задачи с асимптотическими условиями на подмногообразиях границы (см. [22, гл. 6, § 7 и гл. 12, §§ 1–3; 19, § 2, п. 7] и др. публикации), поскольку эта теория позволяет также исследовать полную модель тонкой упругой анизотропной и неоднородной пластины (ср. [3] и [11]) без особых изменений в схеме рассуждений, но с несоизмеримо более длинными выкладками.

Оператор A симметрический и замкнутый, но не самосопряжённый. Для описания сопряжённого для него оператора A^* понадобится следующий базис в шестимерном пространстве квадратичных полиномов:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x_1, \quad p_2(x) = x_2,$$
$$p_3(x) = 2^{-1/2}x_1^2, \quad p_4(x) = x_1, x_2, \quad p_5(x) = 2^{-1/2}x_2^2. \tag{42}$$

Обозначив $\delta_{p,m}$ символ Кронекера, получаем равенства

$$p_k(\nabla_x)p_m(x)|_{x=0} = \delta_{m,p}, \quad m,p = \overline{0,5}. \tag{43}$$

Предложение 3. *Сопряжённый для оператора A оператор A^* сохраняет дифференциальное выражение (32), но приобретает область определения*

$$\mathcal{D}^* = \Bigg\{U : u_0(x) = \sum_{j=1}^J \chi_j(x)\sum_{k=0}^5 (b^+_{jk}p_k(x-P^j) + b^-_{jk}p_k(-\nabla_x)\Phi(x-P^j)) + \widetilde{u}_0(x),$$

$$b^\pm_j = (b^\pm_{j0},\ldots,b^\pm_{j5})^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^6, \ \ \widetilde{u}_0 \in V^4_{\#}(\Omega;\mathcal{P}), \ \ u_j \in H^2(0,l_j), \ \ u_j(l_j) = 0, \ \ j = \overline{1,J}\Bigg\}. \tag{44}$$

Доказательство. Сопряжённый оператор находится по правилу: если $U,F \in H$ и $\langle U, AV\rangle = \langle F, V\rangle$ для всех $V \in \mathcal{D}$, то $U \in \mathcal{D}^*$ и $F = A^*U$. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ – скалярное произведение в пространстве (8), т.е.

$$\langle U,V\rangle_H = (u_0,v_0)_\Omega + (u_1,v_1)_{\Upsilon_1} + \ldots + (u_J,v_J)_{\Upsilon_J}.$$

Взяв в качестве компонент пробной вектор-функции $V = (v_0, v_1, \dots, v_J) \in \mathcal{D}$ в определении сопряжённого оператора функции $v_0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, $v_j \in C_c^\infty(0, l_j]$, получим интегральное тождество

$$(f_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega + \sum_{j=1}^{J} ((f_j, v_j)_{\Upsilon_j} + (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j}) = 0. \tag{45}$$

Пусть сначала $v_1 = 0, \ \dots, \ v_J = 0$. Тогда оставшееся в (45) интегральное тождество в области Ω позволяет заключить, что в силу общих результатов [28, гл. 2, §§ 5, 6] об улучшении дифференциальных свойств решений эллиптических краевых задач и дважды применённой формулы Грина (9) справедливо тождество

$$(f_0 - \Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (N^2 u_0, \partial_n v_0)_\Gamma + (N^3 u_0, v_0)\Gamma = 0 \tag{46}$$

для всех таких функций $v_0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, что $N^q v_0 = 0$ на Γ, $q = 2, 3$. Благодаря произвольности функции v_0 в проколотой области $\Omega \setminus \mathcal{P}$ и следов v_0, $\partial_n v_0$ на $\Gamma = \partial\Omega$ выводим из тождества (46) соотношения (1) и (2). Кроме того, безусловная оценка (36) с $\beta = 4$, правая часть которой конечна, так как $V_4^0(\Omega; \mathcal{P}) \subset V_0^0(\Omega; \mathcal{P}) = L^2(\Omega)$, гарантирует, что $u_0 \in V_4^4(\Omega; \mathcal{P})$.

Теперь воспользуемся теоремой Кондратьева об асимптотике (см. [21, 23], а также [22, гл. 3, § 5 и гл. 4, § 2] и др.) и получим указанное формулой (44) представление функции u_0. Поясним, что отделённые асимптотические члены представляют собой степенно-логарифмические решения

$$\psi(x) = r^\Lambda \Psi(\varphi; \ln r) \tag{47}$$

модельного уравнения на проколотой плоскости

$$\Delta_x^2 \psi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{48}$$

При этом $\Lambda \in \mathbb{C}$ и Ψ – полином переменной $\ln r$, коэффициенты которого – гладкие 2π-периодические функции угловой переменной φ, а в асимптотику включены те функции (47), которые принадлежат классу V_4^4 в окрестности начала координат, но не содержатся в классе $V_\#^4 \subset V_{-1-\varepsilon}^2$. Как показано в цитированной литературе (см., в частности, [19, пример 1.14 и предложение 2.21]) степенными решениями (47) уравнения (48) служат только полиномы и производные фундаментального решения (19). Упомянутые факты объясняют формулу для компоненты u_0 в определении (44).

Аналогичные рассуждения в значительно более простом исполнении показывают, что интегральное тождество (45) с пробной функцией V, имеющей только одну ненулевую компоненту v_j, приводит к формуле

$$(f_j + D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_\Upsilon - u_j(l_j) D_j \partial_{z_j} v_j(l_j) = 0 \ \text{ для любой } \ v_j \in C_0^\infty(0, l_j], \quad v_j(l_j) = 0,$$

из которой следует, что

$$u_j \in H^2(0, l_j), \quad u_j(l_j) = 0, \quad -D_j \partial_{z_j}^2 u_j(z_j) = f_j(z_j), \quad z_j \in (0, l_j).$$

Это заканчивает проверку предложения 3.

4. Обобщённая формула Грина. Для вектор-функции $U \in \mathcal{D}^*$ введём проекции

$$\pi_0^\pm U := (b_1^\pm, \dots, b_j^\pm)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{6 \times J}, \quad \pi_j^+ U := u_j(0), \quad \pi_j^- U =: -D_j \partial_{z_j} u_j(0), \tag{49}$$

где $b_j^\pm$ – векторы коэффициентов из представления функции u_0 в формуле (44), а также

$$\pi^\pm = \pi_0^\pm = (b_1^\pm, \dots, b_J^\pm)^{\mathrm{т}}, \quad \pi = (\pi^+, \pi^-)^{\mathrm{т}}. \tag{50}$$

Подчеркнём, что все векторы (49) и (50) реализованы как столбцы.

Отображения $\pi^{\pm} : \mathcal{H} \rightharpoonup \mathbb{R}^{6J+6}$ непрерывны; здесь $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство вектор-функций $U \in \mathcal{D}^*$ с нормой

$$\|U;\mathcal{H}\| = \left(\|\widetilde{u}_0; V^4_{\#}(\Omega;\mathcal{P})\|^2 + |\pi^+ u_0|^2 + |\pi^- u_0|^2 + \sum_{j=1}^{J} \|u_j; H^2(\Upsilon_j)\|^2\right)^{1/2}.$$

Лемма 1. *Для вектор-функций $U, V \in H$ справедлива формула*

$$Q(U,V) := (\Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega -$$

$$- \sum_{j=1}^{J} ((D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_{\Upsilon_j} - (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j}) = (\pi^- V)^{\mathrm{T}} \pi^+ U - (\pi^+ V)^{\mathrm{T}} \pi^- U. \tag{51}$$

Доказательство. Все скалярные произведения в пространствах Лебега определены корректно. Сразу же запишем простые формулы

$$-(D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_{\Upsilon_j} + (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j} = D_j (v_j(0) \partial_{z_j} u_j(0) - u_j(0) \partial_{z_j} v_j(0)). \tag{52}$$

Для вычисления интегралов по области Ω воспользуемся методом [29] (см. также [22, гл. 4, § 3]). Обозначив через $\mathbb{B}_\rho(P^j)$ круг с центром P^j и радиусом ρ, применим формулу Грина на множестве $\Omega_\rho = \Omega \setminus (\mathbb{B}_\rho(P^1) \bigcup \ldots \bigcup \mathbb{B}_\rho(P^J))$ и выполним предельный переход $\rho \to +0$. Имеем

$$(\Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega = \lim_{\rho \to +0} ((\Delta_x^2 u_0, v_0)_{\Omega_\rho} - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_{\Omega_\rho}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \lim_{\rho \to +0} \int\limits_{\partial \mathbb{B}_\rho(P^j)} (v_0 N^3 u_0 - \partial_n v_0 N^2 u_0 + \partial_n u_0 N^2 v_0 - u_0 N^3 v_0)\, ds_x =: \sum_{j=1}^{J} I_j^\rho (u_0, v_0).$$

Учтём указанные в (44) разложения функций u_0 и v_0 с коэффициентами $b_{jk}^{\pm u}$ и $b_{jk}^{\pm v}$. Удалим из подынтегральных выражений в $I_j^\rho(u_0, v_0)$ величины $o(\rho^{-1})$ при $\rho \to +0$, исчезающие в пределе после интегрирования вдоль дуг длиной $2\pi\rho$. Обозначим $S_j^u(x - P^j)$, $S_j^v(x - P^j)$ и $T_j^u(x - P^j)$, $T_j^v(x - P^j)$ соответственно полиномы и линейные комбинации производных фундаментального решения, входящие в разложения рассматриваемых функций. В итоге получим равенство

$$I_j^\rho(u_0, v_0) = I_j^\rho(S_j^u + T_j^u, S_j^v + T_j^u) = (b_j^{-v})^{\mathrm{T}} b_j^{+u} - (b_j^{-u})^{\mathrm{T}} b_j^{+v}, \tag{53}$$

которое вместе с (52) и (49), (50) приводит к формуле (51). Само равенство (53) вытекает из базового соотношения (20) для фундаментального решения Φ или выводится при помощи следующих вычислений в рамках теории распределений (см. учебник [19]):

$$\lim_{\rho \to +0} \int\limits_{\partial \mathbb{B}_\rho(P^j)} (S_j^v N^3 T_j^u - \partial_n S_j^v N^2 T_j^u + \partial_n T_j^u N^2 S_j^v - T_j^u N^3 S_j^v)\, ds_x =$$

$$= - \lim_{\rho \to +0} \int\limits_{\mathbb{B}_\rho(P^j)} S_j^v (x - P^j) \Delta_x^2 T_j^u (x - P^j)\, dx =$$

$$= \lim_{\rho \to +0} \int\limits_{\mathbb{B}_\rho(P^j)} b_{jk}^{+v} p_k(x - P^j) \Delta_x^2 (b_{jm}^{-u} p_m(-\nabla_x) \Phi(x - P^j))\, dx =$$

$$= - \sum_{k,m=0}^{5} b_{jk}^{+v} b_{jm}^{-u} \int\limits_{\mathbb{R}^2} p_k(x) p_m(-\nabla_x) \delta(x)\, dx = - \sum_{k,m=0} b_{jk}^{+v} b_{jk}^{-u} \delta_{k,m} = -(b_j^{-u})^{\mathrm{T}} b_j^{+v}.$$

Здесь приняты во внимание соотношения (43) и определение производной дельта-функции Дирака. Наконец, похожие выкладки показывают, что интегралы $I_j^\rho(S_j^u, S_j^v)$ и $I_j^\rho(T_j^u, T_j^v)$ обращаются в нуль. Лемма доказана.

Следуя [22, гл. 6, § 2 и гл. 12, § 2], называем соотношение (51) *обобщённой формулой Грина.*

Приступим к описанию самосопряжённых расширений оператора A. Если $A_\bullet$ – такое расширение, полученное сужением сопряжённого оператора A^* на подпространство $\mathcal{D}_\bullet \subset \mathcal{D}^*$ коразмерностью $6J + J = 7J$ (согласно проведённым в п. 3 вычислениям индекс дефекта оператора A равен $(7J : 7J)$; ср. замечание 4), то

$$Q(U,V) = \langle A_\bullet U, V\rangle_H - \langle U, A_\bullet, V\rangle_H = 0 \text{ для любых } U,V \in \mathcal{D}_\bullet.$$

Таким образом, требуется выяснить условия вырождения симплектической (билинейной и антисимметричной) формы из правой части формулы (51). Этот вопрос решён в работе [30] (см. также публикации [9–11, 13] и иные подходы в статьях [4–7] и [8, 12]).

Теорема 1. *1) Пусть $\mathcal{R}^- \bigoplus \mathcal{R}^0 \bigoplus \mathcal{R}^+$ – ортогональное разложение евклидова пространства $\mathbb{R}^{6J+J}$, а $\mathcal{A} : \mathcal{R}^0 \to \mathcal{R}^0$ – симметричный изоморфизм. Сужение оператора A^* на подпространство*

$$\mathcal{D}_\bullet = \{U \in \mathcal{D}^* : \pi^+ U = a^+ + a^0, \quad \pi^- U = a^- + \mathcal{A}a^0, \quad a^\alpha \in \mathcal{R}^\tau, \quad \tau = 0, \pm\} \tag{54}$$

оказывается самосопряжённым расширением оператора A.

2) Всякое самосопряжённое расширение допускает указанное описание.

Доказательство. Проверка первого утверждения проста:

$$(\pi^+ U, \pi^- V) - (\pi^- U, \pi^+ V) = (a_U^+ + a_U^0, a_V^- + \mathcal{A}a_V^0) -$$
$$- (a_U^- + \mathcal{A}a_U^0, a_V^+ + a_V^0) = (a_U^0, \mathcal{A}a_V^0) - (\mathcal{A}a_U^0, a_V^0) = 0. \tag{55}$$

Здесь $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{7J}$, a_U^α и a_V^α – столбцы, предписанные вектор-функциям $U,V \in \mathcal{D}_\bullet$ формулой (54), а в выкладке (55) использованы назначенные ортогональности столбцов и симметричность оператора $\mathcal{A}$.

Второе утверждение требует чуть более долгих рассуждений – см. первоисточник [30], а также, например, статью [10, § 6] и монографию [23, гл. 6, § 3].

Замечание 4. Коразмерность подпространства $\mathcal{D}_\bullet \subset \mathcal{D}^*$ в самом деле равна $7J$, так как в определении (54) наложены именно $7J$ линейных связей. Отсюда вытекает и упомянутая формула для индекса дефекта оператора A.

Замечание 5. Если точка P^j попала на границу Γ, то предложение 3 в целом сохраняет силу, однако размерность подпространства полиномов, входящих в формулу (44) и далее, уменьшается на единицу, так как линейные комбинации полиномов (42) должны удовлетворять в точке $P^j \in \Gamma$ краевым условиям (2) с главными частями $N_0^q(P^j, \nabla)$ дифференциальных операторов (5), причём заведомо $N_0^3(P^j, \nabla)p_k(x) = 0$, $k = \overline{0,5}$, т.е. приходится наложить только одно дополнительное ограничение. Разумеется, сингулярные составляющие $p_k(-\nabla)\Phi(x - P^j)$ также подлежат изменению.

5. Выбор параметров самосопряжённого расширения. Механическая интерпретация рассматриваемой задачи требует специфического подбора параметров самосопряжённого расширения $A_\bullet$. В согласии со списком полиномов (42) коэффициенты b_{j0}^+ и b_{j1}^+, b_{j2}^+ суть прогиб и углы поворотов вокруг осей $x_2 - P_2^j$, $x_1 - P_1^j$ пластины в точке $P^j \in \Omega$. Соответственно b_{j0}^- и b_{j1}^-, b_{j2}^- – сосредоточенные поперечная сила и изгибающие моменты вокруг названных осей. Остальные элементы столбцов $b_j^\pm$ не имеют очевидного физического смысла, а сингулярности $b_{jk}^- p_k(-\nabla_x)\Phi(x - P^j)$ с индексами $k \geqslant 3$ выводят функцию u_0 даже из класса $H^1(\Omega)$. Поэтому положим

$$b_{jk}^- = 0, \quad k = 3,4,5, \quad j = \overline{1,J}, \tag{56}$$

но оставим произвольными коэффициенты b_{jk}^+ с такими же индексами.

В выстраиваемой простейшей модели упругого сочленения Ξ следует пренебречь и сосредоточенными моментами: для их привлечения требуются полные модели пластины и стержней, а именно, 3×3- и 4×4-системы дифференциальных уравнений в Ω и на $\Upsilon^1,\ \ldots,\ \Upsilon^J$ (см., например, монографию [22] и ср. конец замечания 3). Таким образом, введём ограничения

$$b_{j1}^{-}=0,\quad b_{j2}^{-}=0,\quad j=\overline{1,J}. \tag{57}$$

Равенства (56), (57) и формула (19) для Φ, в частности, означают, что $b_{j0}^{+}=u_0(P^j)$.

Поскольку стержни прикреплены к пластине, логично наложить условия

$$u_0(P^j)=b_{j0}^{+}=u_j(0),\quad j=\overline{1,J}. \tag{58}$$

При учёте требований (56)–(58) выберем следующие подпространства в ортогональном разложении из теоремы 1:

$$\mathcal{R}^0=\{0\},\quad \mathcal{R}^{+}=\{c=(c_1,\ldots,c_{7J})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{6J+J}:c_{6(j-1)+1}=c_{6J+p+1},\ \ j=\overline{1,J}\},$$

$$\mathcal{R}^{-}=\mathbb{R}^{6J+j}\ominus\mathcal{R}^{+}=\{c\in\mathbb{R}^{6J+J}:c_{6(j-1)+1}+c_{6J+j+1}=0,$$
$$c_{6(j-1)+p}=0,\quad p=\overline{2,6},\quad j=\overline{1,J}\}. \tag{59}$$

Согласно определениям (49) и (50) включение $\pi^{+}U\in\mathcal{R}^{+}$ гарантирует выполнение равенств (58), а включение $\pi^{-}U\in\mathcal{R}^{-}$ – равенств (56), (57), а также соотношения

$$b_{j0}^{-}=-\pi_j^{-}U=D_j\partial_{z_j}u_j(0),\quad j=\overline{1,J},$$

означающего обращение в нуль суммы сил, приложенных к точкам P^j присоединения одномерных стержней Υ^j к двумерной пластине Ω.

Лемма 2. *Для вектор-функций $U,\ V$ из пространства (54), построенного по ортогональному разложению (59) пространства $\mathbb{R}^{6J+J}$, справедлива формула*

$$\langle A_{\bullet}U,V\rangle_H=E(u_0,v_0;\Omega)+\sum_{j=1}^{J}D_j(\partial_{z_j}u_j,\partial_{z_j}v_j)_{\Upsilon_j}. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку условия (56) и (57) оставляют отделёнными в представлении компонент u_0 и v_0 только полиномы и само фундаментальное решение, справедливы включения $u_0,v_0\in H^2(\Omega)$. Таким образом, верны формулы (вторые очевидны)

$$(\Delta_x^2u_0,v_0)_{\Omega}=E(u_0,v_0;\Omega)+\sum_{j=1}^{J}b_{j0}^{-u}v_0(P^j), \tag{61}$$

$$(-D_j\partial_{z_j}^2u_j,v_j)_{\Upsilon_j}=D_j(\partial_{z_j}u_j,\partial_{z_j}v_j)_{\Upsilon_j}+D_j\partial_{z_j}u_j(0),\quad j=\overline{1,J}.$$

Почленно сложим указанные равенства и при учёте условий сопряжения, назначенных согласно определениям (54) и (59), получим соотношение (60). Лемма доказана.

Теорема 2. *Самосопряжённое расширение $A_{\bullet}$ оператора A с областью определения (54), найденной по ортогональному разложению (59) пространства $\mathbb{R}^{6J+J}$, является положительно определённым оператором лишь в случае 3° из п. 2.*

Доказательство. Применим формулу (60) с $V=U$. В силу условий Дирихле (4) имеем

$$|u_j(0)|^2+\|u_j;L^2(0,l_j)\|^2\leqslant c_j\|\partial_{z_j}u_j;L^2(0,l_j)\|^2. \tag{62}$$

Для функции u_0 напишем представление

$$u_0(x)=u_{\perp}(x)+\ell_0+\ell_1x_1+\ell_2x_2, \tag{63}$$

а коэффициенты ℓ_q линейной функции ℓ из (63) выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\int\limits_{\Omega} u_\perp(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_\perp}{\partial x_j}(x)\,dx = 0, \quad j = 1, 2. \tag{64}$$

Вследствие формул (6) и (12) неравенства Пуанкаре, опирающиеся на условия ортогональности (64), показывают, что справедливы оценки

$$E(u_0, u_0; \Omega) = E(u_\perp, u_\perp; \Omega) \geqslant c_1 \|\nabla_x u_\perp; L^2(\Omega)\|^2 \geqslant c_0 \|u_\perp; L^2(\Omega)\|^2, \quad c_0 > 0.$$

Следовательно,

$$|u_\perp(P^j)|^2 \leqslant C\|u_\perp; H^2(\Omega)\|^2 \leqslant CE(u_0, u_0; \Omega). \tag{65}$$

Кроме того, в силу соотношений (63) и (58) получаем, что

$$|\ell(P^j)| = |u_0(P^j) - u_\perp(P^j)| \leqslant |u_j(0)| + |u_\perp(P^j)| \leqslant$$
$$\leqslant C(\|\partial_{z_j} u_j; L^2(\Upsilon^j)\| + \|u_\perp; H^2(\Omega)\|), \quad j = \overline{1, J}. \tag{66}$$

Как указано в комментариях к формуле (31), в случае 3° оценки (66) гарантируют такое неравенство для линейной функции:

$$\|\ell; L^2(\Omega)\|^2 \leqslant c(|\ell_0|^2 + |\ell_1|^2 + |\ell_2|^2) \leqslant c\bigg(E(u_0, u_0; \Omega) + \sum_{j=1}^{J} \|\partial_{z_j} u_j; L^2(\Upsilon^j)\|^2\bigg).$$

Оно вместе с формулами (62) и (65) приводит к нужному неравенству

$$\|U; H^2\|^2 \leqslant c\langle A_\bullet U, U\rangle_H$$

(см. определение (8)).

В ситуациях 1° или 2° подстановка в соотношение (60) пробной вектор-функции $U = (\ell, 0, \ldots, 0)$, где ℓ – какой-то элемент линейного множества (13) или (14), показывает, что форма $\langle A^\bullet U, U\rangle_H$ вырождается. Теорема доказана.

Введённые точечные условия (58), (59) и (56), (57) локальные: стержни взаимодействуют только через упругую пластину. Между тем можно соорудить механизм из стрингеров (абсолютно жёстких тонких стержней), выравнивающий прогибы пластины в точках $P^1, \ldots, P^K$ (перенумеровали при необходимости). В такой конструкции (см. рис. 1, б) связи (58) дополняются равенствами

$$b_{10}^+ = \ldots = b_{K0}^+, \tag{67}$$

и соответственно подпространства в разложении из теоремы 1 выглядят следующим образом:

$$\mathcal{P}^+ = \{c \in \mathbb{R}^{6J+J} : c_1 = c_{6k+1}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad c_{6(j-1)+1} = c_{6J+j}, \quad j = \overline{1, J}\},$$
$$\mathcal{P}^0 = \{0\}, \quad \mathcal{P}^- = \mathbb{R}^{6J+J} \ominus \mathcal{P}^+. \tag{68}$$

Включение $\pi^- U \in \mathcal{P}^-$ обеспечивает выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^{K} (b_{k0}^- - D_k \partial_{z_k} u_k(0)) = 0, \quad b_{j0}^- = D_j \partial_{z_j} u_j(0), \quad j = \overline{K+1, J}.$$

В случае $K = J$ соотношения (58), (67) и (68) представляют собой не что иное, как классические условия сопряжения Кирхгофа. При любом $K \in [1, J]$ ортогональное разложение (68) пространства $\mathbb{R}^{6J+J}$ порождает самосопряжённое расширение оператора A с областью определения (54) и энергетической билинейной формой (60).

6. Нелинейные задачи. В этом пункте полное исследование сформулированных задач проводить не будем, а ограничимся только рассмотрением деформации пластины под действием силы тяжести ($f_0(x) = -f_{\rm grav}$ с положительной постоянной $f_{\rm grav}$), причём стержни считаем невесомыми ($f_j = 0$).

Пусть пластина Ω опирается на абсолютно жёсткие стержни (рис. 2, а). Отрицательные величины прогиба пластины в точках $P^1, \ldots, P^J$ невозможны, и поэтому задача о минимуме функционала полной (упругой плюс потенциальной) энергии пластины

$$J_\triangle(u_0) = \frac{1}{2}E(u_0, u_0; \Omega) - (f_0, u_0)_\Omega \tag{69}$$

ставится на выпуклом замкнутом конусе

$$H^2_\triangle(\Omega; \mathcal{P}) = \{u_0 \in H^2(\Omega) : u_0(P^j) \geqslant 0, \quad j = \overline{1, J}\} \tag{70}$$

и оказывается эквивалентной вариационному неравенству [31]

$$E(u_0, v_0 - u_0; \Omega) - (f_0, v_0 - u_0)_\Omega \geqslant 0 \ \text{ для любой } \ v_0 \in H^2_\triangle(\Omega; \mathcal{P}). \tag{71}$$

Обобщённая формула Грина (61) показывает, что при $j = \overline{1, J}$ верны импликации

$$u_0(P^j) > 0 \quad \Rightarrow \quad b^-_{j0} = 0 \quad \text{и} \quad u_0(P^j) = 0 \quad \Rightarrow \quad b^-_{j0} > 0, \tag{72}$$

представляющие собой математически строгое истолкование механических ограничений.

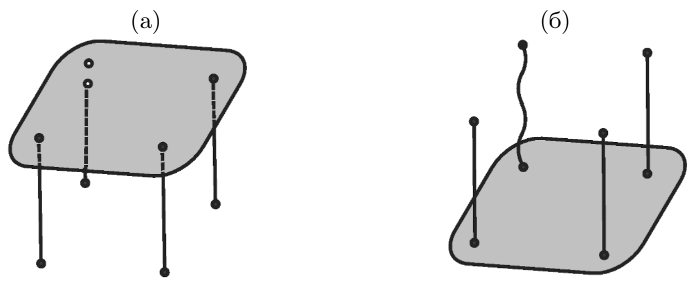

Рис. 2. Пластины: опёртая (а) и подвешенная (б). Присоединённые концы стержней помечены значком $\bullet$, а отсоединённые – значком $\circ$. Ослабленный канат – волнистая линия.

Сформулируем ещё одну задачу, сводящуюся к бигармоническому уравнению с нелинейным возмущением, а именно, задачу о деформации плиты Ω, подвешенной на невесомых эластичных канатах, которые воздействуют на плиту только в случае растяжения, т.е. при $u_0(P^j) < 0$, но в случае $u_0(P^j) \geqslant 0$ канат "провисает" (ср. рис. 2, б), и поэтому сосредоточенная в точке P^j сила равна нулю ($b^-_j = 0$). Однородная ($f_j = 0$) задача (3), (4) с краевым условием $u_j(0) = [u_0(P^j)]_-$ решается явно: из того, что $u_j(z_j) = [u_0(P^j)]_- l_j^{-1}(l_j - z_j)$ следует равенство $b^-_j = -\pi^j_- u_j = D_j l_j^{-1}[u_0(P^j)]_-$. Здесь $[t]_- = (t - |t|)/2$ – отрицательная часть числа $t \in \mathbb{R}$. Итак, заменив воздействия стержней сосредоточенными силами с интенсивностью b^-_j, приходим к уравнению

$$\Delta^2_x u_0(x) - \sum_{j=1}^J D_j l_j^{-1}[u_0(P^j)]_- \delta(x - P^j) = f_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{73}$$

снабжённому краевыми условиями (3). В силу обобщённой формулы Грина (ср. леммы 1 и 2) вариационная формулировка задачи (73), (3) принимает вид

$$E(u_0, v_0; \Omega) - \sum_{j=1}^J D_j l_j^{-1}[u_0(P^j)]_-[v_0(P^j)] = (f_0, v_0)_\Omega \ \text{ для любой } \ v_0 \in H^2(\Omega). \tag{74}$$

Замечание 6. Если часть $\Sigma \neq \varnothing$ кромки Γ пластины Ω жёстко защемлена, т.е. условия Неймана (2) заменены смешанными краевыми условиями

$$N^q(x,\nabla_x)u_0(x)=0, \quad x\in\Gamma\setminus\overline{\Sigma}, \quad q=2,3, \quad \text{и} \quad u_0(x)=\partial_n u_0(x), \quad x\in\Sigma, \tag{75}$$

то ввиду неравенства

$$\|u_0;H^2(\Omega)\|^2\leqslant cE(u_0,u_0;\Omega), \tag{76}$$

обеспеченного условиями Дирихле на Σ, однозначная разрешимость обеих задач (71) и (74), (75) вытекает из базовых результатов выпуклого анализа (см., например, теоремы 2.1 и 2.2 из [32, гл. 1]). Упомянем работу [18], в которой проводился аналогичный анализ задачи о мембране с препятствиями на исчезающе малых множествах.

В случае полностью свободной кромки Γ и условий Неймана на ней неравенство (76) нарушено для линейных функций, и для проверки разрешимости задач требуются несколько дополнительных требований. Пусть, во-первых, выполнено ограничение 3° из п. 2 и, во-вторых, центр тяжести плиты находится во внутренности $\operatorname{int}\mathcal{P}_{\rm span}$ выпуклой оболочки $\mathcal{P}_{\rm span}$ множества $\mathcal{P}=\{P^1,\ldots,P^J\}$ точек крепления. Совместим начало координат $\mathcal{O}$ с этим центром, обеспечив тем самым равенства

$$\int\limits_\Omega x_j\,dx=0, \quad j=1,2. \tag{77}$$

Воспользуемся обозначениями из п. 2 и будем искать решение задачи (71) в виде

$$u_0(x)=\sum_{j=1}^J a_jG_j(x)+\ell(x). \tag{78}$$

Столбец $\mathbf{l}$ коэффициентов линейной функции ℓ и столбец $\mathbf{a}$ множителей при функциях Грина (см. формулы (21)–(24)) являются неизвестными. При этом согласно определениям (49) столбцы $\pi_0^-u_0=\mathbf{a}$ и $\pi_0^+u_0=\mathbf{u}_0=(u_0(P^1),\ldots,u_0(P^J))^{\rm т}$ имеют вид

$$\pi_0^-u_0=\mathbf{a}\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_0=\mathbf{Ga}+\mathbf{P}^{\rm т}\mathbf{l}\geqslant 0. \tag{79}$$

При этом формула $\mathbf{a}\geqslant 0$ означает, что $a_j\geqslant 0$, $j=\overline{1,J}$. Таким образом, импликации (72) превращаются в следующие:

$$(\mathbf{Ga}+\mathbf{P}^{\rm т}\mathbf{l})_j>0 \;\Rightarrow\; a_j=0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{Ga}+\mathbf{P}^{\rm т}\mathbf{l})_j=0 \;\Rightarrow\; a_j\geqslant 0. \tag{80}$$

В силу равенств (77) матрица Грама (25) является блочно-диагональной, т.е. $M_{00}=|\Omega|$ и $M_{01}=M_{02}=0$. Поэтому для соблюдения уравнения (1) в проколотой области $\Omega\backslash\mathcal{P}$ требуется, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{La}=f_0\mathbf{e}_{(0)}\in\mathbb{R}^3$, которое, очевидно, равносильно равенству

$$\mathbf{Pa}=\mathbf{f}:=|\Omega|f_0\mathbf{e}_{(0)}, \tag{81}$$

здесь и выше $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ – $3\times J$-матрицы (26) и $\mathbf{e}_{(0)}=(1,0,0)^{\rm т}$. Зафиксируем какой-то столбец $\mathbf{a}^{\mathbf{f}}$, удовлетворяющий соотношениям (81), и назначим $\mathbf{a}^0=\mathbf{a}-\mathbf{a}^{\mathbf{f}}$ новой неизвестной.

По стандартной схеме (см., например, монографии [31, 32]) соотношения (80) и (81) порождают вариационное неравенство

$$(\mathbf{Ga}^0+\mathbf{F})(\mathbf{b}^0-\mathbf{a}^0)\geqslant 0 \;\text{ для любого }\; \mathbf{b}^0\in\mathbf{K}, \tag{82}$$

включающее слагаемое $\mathbf{F}=\mathbf{Ga}^{\mathbf{f}}$ и поставленное на выпуклом замкнутом конусе

$$\mathbf{K}=\{\mathbf{b}^0\in\mathbb{R}^J: b_j^0\geqslant -a_j^{\mathbf{f}}, \quad j=\overline{1,J}, \quad \mathbf{Pb}^0=0\in\mathbb{R}^J\}. \tag{83}$$

Благодаря последнему условию в (83) слагаемое $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$, входящее в (80), исчезло из (83). Требование $\mathcal{O} \in \operatorname{int} \mathcal{P}_{\mathrm{span}}$ означает, что множество (83) не пусто. Наконец, задача (80) сводится к задаче о минимизации функционала

$$\mathbf{K} \ni \mathbf{a}^0 \mapsto \mathbf{J}(\mathbf{a}^0) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{a}^0 + (\mathbf{a}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}. \tag{84}$$

Поскольку $\mathbf{G}$ – симметричная положительно определённая $J \times J$-матрица, задача о минимизации функционала (84) и задача (82) могут быть решены при помощи базовых результатов выпуклого анализа (см., например, теоремы 2.1 и 2.2 из монографии [32, гл. 1]).

Теорема 3. *При указанных ограничениях задача (71) имеет единственное решение $u_0 \in \in H^2_\Delta(\Omega)$. Оно представимо в виде линейной комбинации (78), в которой столбец коэффициентов $\mathbf{a}^0$ находится как решение вариационного неравенства (82), а коэффициенты $\mathbf{l}$ линейной функции ℓ восстанавливаются при помощи формулы (80), так как ранг матрицы $\mathbf{P}$ равен трём.*

Обратимся к задаче (74), решение которой по-прежнему ищем в виде (78). Формулы (79) и (81) сохраняют силу, а множители при функциях Грина в линейной комбинации (78) и множители при дельта-функциях в уравнении (74) связаны соотношением

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{a} = -[\mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}]_-, \tag{85}$$

где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица $\operatorname{diag}\{l_1^{-1}D_1, \ldots, l_J^{-1}D_J\}$. Очевидно, что компоненты a_j решения $\mathbf{a}$ системы (85), (81) неотрицательные. Следовательно, накладывая ограничение $\mathbf{a} \geqslant 0$, приходим к равенству $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} = -\mathbf{G}\mathbf{a}$, из которого следует, что $\mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} \leqslant 0$. В итоге, используя частное решение $\mathbf{a}^{\mathbf{f}}$ уравнения (81) и переходя к новой неизвестной $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} - \mathbf{a}^{\mathbf{f}}$, получаем уравнение

$$(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{G})\mathbf{a}^0 + \mathbf{P}\mathbf{l} = \mathbf{F} := -\mathbf{G}\mathbf{a}^{\mathbf{f}} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{a}^{\mathbf{f}} \quad \text{на} \quad \mathbf{K},$$

которое эквивалентно задаче о минимизации на конусе (83) функционала (84) с симметричной положительно определённой матрицей $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{G}$ на месте матрицы $\mathbf{G}$. Итак, по тем же причинам, что и выше, справедлива

Теорема 4. *При перечисленных геометрических ограничениях задача (74), (2) имеет единственное решение $u_0 \in H^2(\Omega)$, которое находится в виде (78) как решение алгебраических задач по указанной схеме.*

Приведём пояснения к введённым ограничениям. Допустим, что включение $\mathcal{O} \in \mathcal{P}_{\mathrm{span}}$ не выполнено и точки $P^1, \ldots, P^J$ лежат в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{x : x_1 > 0\}$. Тогда конус (70) содержит линейную функцию $\ell_K(x) = K(x_1 - L)$ при $2L = \min\{P^1_1, \ldots, P^J_1\} > 0$ и любом $K > 0$. При этом в силу формул (78) и (6) функционал (69) удовлетворяет соотношению

$$J_\Delta(\ell) = 0 - (f_0, \ell)_\Omega = -f_{\mathrm{grav}}|\Omega|KL \to -\infty \quad \text{при} \quad K \to +\infty,$$

т.е. задача (71) неразрешима. На практике этот факт очевиден: пластина сваливается с опор, если центр тяжести лежит вне множества $\mathcal{P}_{\mathrm{span}}$. Если $\mathcal{O} \in \partial\mathcal{P}_{\mathrm{span}}$ или нарушено требование 3°, а значит, $\operatorname{int} \mathcal{P}_{\mathrm{span}} = \varnothing$, то положение пластины Ω на опорах неустойчивое, а применение приближённой двумерной модели неправомерно – необходим учёт малых сечений стержней и, весьма возможно, сил трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00325).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирман М.Ш.* О вариационном методе Треффца для уравнения $\Delta^2 u = f$ // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.
2. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
3. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.

4. *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
5. *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л., 1975.
6. *Капешина Ю.Е., Павлов Б.С.* Взаимодействия нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Мат. заметки. 1986. Т. 40. № 1. С. 49–59.
7. *Павлов Б.С.* Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131.
8. *Exner P., Šeba P.* Applications of self-adjoint extensions in quantum physics // Lect. Not. in Phys. V. 324. Heidelberg, 1989.
9. *Назаров С.А.* Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 2. С. 224–241.
10. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
11. *Назаров С.А.* Эллиптические задачи на гибридных областях // Функц. анализ и его приложения. 2004. Т. 38. № 4. С. 55–72.
12. *Brüning J., Geyler V., Pankrashkin K.* Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators // Rev. in Math. Phys. 2008. V. 20. P. 1–70.
13. *Назаров С.А.* Моделирование сингулярно возмущённой спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функц. анализ и его приложения. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
14. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
15. *Adams R.* Sobolev Spaces. New York, 1976.
16. *Петропавловский А.А.* Вантовые мосты. М., 1985.
17. *Gazzola A.* Mathematical Models for Suspension Bridges. Nonlinear Structural Instability. Modeling, Simulation and Applications. V. 15. Berlin, 2015.
18. *Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1031–1041.
19. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
20. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
21. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского мат. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
22. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York, 1994.
23. *Pazy A.* Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
24. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряжённых эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
25. *Арутюнян Н.Х., Назаров С.А., Шойхет Б.А.* Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1365–1369.
26. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленинградского мат. об-ва. 1990. Т. 1. С. 174–211.
27. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
28. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
29. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
30. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. С. 1034–1037.
31. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М., 1980.
32. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств М., 1979.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 09.12.2020 г.
После доработки 09.12.2020 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.