



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

**Журнал основан в 1936 году**

**Выходит 12 раз в год**

**4**

**АПРЕЛЬ**

**Москва**

**2021**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,  
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,  
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,  
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,  
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,  
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,  
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,  
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»



## К 100-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА РАН А.А. КРАСОВСКОГО

DOI: 10.31857/S0005231021040012

В Москве 2 июня 2003 г. трагически погиб академик РАН Александр Аркадьевич Красовский, выдающийся отечественный ученый и учитель большого числа известных советских и российских научных работников и конструкторов, известный в мире специалист высочайшего уровня в области теории и систем управления, навигации и наведения летательных аппаратов, автоматизированных информационных и управляющих систем, родоначальник с неоспоримым мировым приоритетом двух крупных научно-технических направлений, получивших развитие и внедрение во многих странах: одноканальные системы измерения и управления, а также системы навигации и наведения по геофизическим полям Земли, председатель Всесоюзной комиссии по адаптивному управлению при Научном совете “Кибернетика” АН СССР, начальник кафедры Пилотажно-навигационных комплексов (и авиационных тренажеров) Военно-воздушной инженерной академии имени проф. Н.Е. Жуковского, профессор названной кафедры, лауреат Государственной премии СССР и Государственной премии РФ, Герой Социалистического Труда, генерал-майор авиации, доктор технических наук, профессор.

10 апреля 2021 г. Александру Аркадьевичу исполнилось бы 100 лет. Он родился в г. Калата под Екатеринбургом. Отец, Красовский Аркадий Александрович, – известный в России инженер-путеец, дворянин, почетный гражданин Екатеринбурга, окончил Фрайбургскую горную академию, поддерживал Советскую власть, мать – Евфалия Красовская, энциклопедически образованная, разносторонне талантливая женщина, воспитавшая четверых детей. Известно, что несколько лет она жила в семье Д.И. Менделеева.

Еще в средней школе у Шурика (так его называли в детстве и в узком кругу – всю жизнь) сформировалось призвание к общей физике, инженер-

ным проектам, изобретениям. Школу закончил с отличием (единственная четверка по рисованию). В последующем близко знавшими его людьми он характеризовался как талантливый инженер с высокоразвитой научной интуицией и превосходным физическим образованием.

Свою первую научную статью “О вязкости электронного газа” А.А. Красовский опубликовал в Журнале экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ) в 1940 г., будучи студентом 2-го курса физико-математического факультета Уральского государственного университета имени А.М. Горького в г. Свердловске. Таких прецедентов в Уральском университете еще не было, поэтому ректорат присудил ему Сталинскую стипендию из пяти стипендий, выделенных для университета.

В университете Александр Аркадьевич окончил три курса, а с первых дней Великой Отечественной войны был зачислен в роту связи, где самостоятельно начал работать над проектом электромагнитной танковой пушки. По завершении проекта написал Сталину. Самое удивительное, что в 1941 г. на это письмо отреагировали: из роты связи, позже целиком погибшей под бомбежкой, его вернули в университет. Много лет спустя, на своем 60-летнем юбилее, Александр Аркадьевич отмечал, что остался в живых один из 10 сверстников, поэтому должен был работать за десятых.

В январе 1942 г. в числе сильнейших студентов УГУ был принят в ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, которая к тому времени была эвакуирована в г. Свердловск. Вся последующая жизнь, учеба, работа и научные достижения были связаны с этой академией.

Кандидатскую диссертацию, посвященную в основном операторному методу интегральных квадратичных оценок, А.А. Красовский защитил в 1948 г. В более 20 дальнейших публикациях (до 1970 г.) Александра Аркадьевича этот метод перерос в аналитическое конструирование систем управления на основе минимизации функционала обобщенной работы (ФОР) – одно из наиболее плодотворных теоретических направлений, созданных А.А. Красовским.

Свою докторскую диссертацию А.А. Красовский защитил в 1952 г. Она была посвящена управлению техническими объектами совершенно нового типа – вращающимися ракетами, в ряде применений оттеснившими классические технические решения. В 90-х годах XX века почти все изделия, созданные Коломенским бюро машиностроения с участием А.А. Красовского и его учеников первого поколения, пошли в массовое производство и поставляются во многие страны. Американские аналоги были созданы позже и, вероятно, независимо. За достигнутые результаты в этом направлении А.А. Красовский с группой учеников в 1976 г. был удостоен Государственной премии СССР.

В 1953 г. А.А. Красовский возглавил вновь созданную в ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского кафедру “Основы автоматики и телемеханики” (впоследствии “Пилотажно-навигационные комплексы (и авиационные тренажеры)”, широко известную как кафедра № 37). Позже при кафедре создавались межотраслевые научные подразделения, нацеленные на развитие и внедрение научных результатов кафедры. Александр Аркадьевич подчеркивал, что в руководимой им кафедре он прежде всего стремился создать мощную науч-

ную школу и, как следствие, учебное подразделение вуза, способное доносить ученикам различной формы подготовки мировые, отечественные и собственные достижения в авиационной автоматике. Сейчас можно утверждать, что этой установке он успешно следовал всю свою творческую жизнь. В 1981 г. А.А. Красовскому за научно-практические результаты, полученные лично и руководимым им коллективом, было присвоено звание Героя Социалистического Труда с вручением ордена Ленина и золотой медали “Серп и Молот”.

На кафедре одним из основных стало научное направление “Навигация и наведение по геофизическим и физическим полям Земли”, зародившееся у А.А. Красовского еще в 50-х годах. Созданный им и его учениками научный задел получил применение в отечественных стратегических крылатых ракетах, принятых на вооружение и обеспечивших в этом направлении паритет с США. В 1993 г. А.А. Красовский вместе с группой своих учеников стал (второй раз) лауреатом Государственной премии РФ.

В начале 1960-х годах А.А. Красовский занялся проблемой самонастраивающихся систем. Его доклады на первом и втором конгрессах ИФАК, судя по дискуссии, вызвали повышенный интерес. Идея экстремального приема сигналов, впервые опубликованная А.А. Красовским в журнале “Автоматика и телемеханика” в 1961 г., получила широкую реализацию лишь в 90-х годах в форме радиоприемников с цифровой автоматической настройкой на максимум сигнала несущей или огибающей (для мегагерцовых и более высоких частот). Аналогичное достижение зарубежной радиоэлектроники, по-видимому, независимое, вызвало переворот в области связи.

Концепция самонастройки получила дальнейшее развитие в виде самоорганизующихся оптимальных регуляторов с экстраполяцией. Впервые соответствующая аббревиатура СОРЭ прозвучала в пленарном докладе А.А. Красовского в 1995 г. на юбилейной сессии Института проблем управления им. В.А. Трапезникова. В последующих статьях Александр Аркадьевич дал строгое доказательство существования оптимального времени экстраполяции, привел структурные схемы и алгоритмы двухконтурного регулятора, изложил целостное временное рассмотрение в детерминированно-вероятностном приближении двухконтурного СОРЭ биномиального типа, ввел понятие самоорганизующейся системы на примере резервного пилотажного комплекса к штатной системе автоматического управления самолета Ту-154М в качестве летающей лаборатории.

В начале 1960-х годов А.А. Красовский предложил конструкцию вращающегося гравитационного градиентометра со спаренными гантелями и синхронным детектированием на удвоенной частоте вращения, тем самым опередив аналогичные разработки в США. В середине 1990-х годов продолжались работы возглавляемой им кафедры по созданию нового направления в гравиметрии, сейсмометрии, геодезии, что дало принципиально новые концепции и конструктивные решения. В том числе были получены решения по активно-пассивной системе амортизации (виброзащиты) технологического модуля космической станции, по сейсмометрии, т.е. обнаружению дальних землетрясений на сейсмических станциях, по орбитальным (применительно к космической технике) гравиметру и градиентометру, по мобильному наземному гравиметрическому мониторингу. Современная теория замкнутых

платформенных гравиинерциальных систем строится на основе таких фундаментальных разделов прикладной физики и техники, как микромеханика, микроуправление, в создании которых А.А. Красовский принимал непосредственное участие.

В конце 1980-х годов А.А. Красовский приступил к разработке направления ветроэнергетических установок с колебательным рабочим движением (ВЭУК), что подразумевает теоретическое обоснование, конструктивные схемы, принципы действия и элементную базу. Руководимые им исследования включали и изучение ветрового потенциала на территории СССР и Евразийском континенте. Одновременно изучались данные по соотношению за год между возобновляемой энергией, получаемой планетой Земля в области ИК-излучения от Солнца, и энергией ветра, расходуемой в тропосфере над сушей, морем, в струйных течениях. В 1997–2000 годах под руководством А.А. Красовского были разработаны и переданы для проработки три обоснования проектов ВЭУК для острова Кипр. В России серийное производство ВЭУК планировалось начать с 2004 г., но по независимым от творческого коллектива причинам проект остался нереализованным.

С конца 1980-х годов А.А. Красовским лично и под его руководством выполнен широкий круг исследований по пассивной макроволновой радиолокации, включая интерферометрическую радиопеленгацию. Основная область применения – экологический мониторинг и безопасность.

К одному из крупнейших направлений как по количеству вовлеченных специалистов, так и по объему выполненных под руководством А.А. Красовского работ, несомненно, относится совокупность исследований кафедры по интегрированным комплексам бортового оборудования (ИКБО) летательных аппаратов разнообразного предназначения. Направление состоит в привлечении фундаментальных теоретических работ, открытий и прогнозов к созданию опережающих концепций бортовых комплексов. Оно реализовывалось в содружестве с кафедрами высшей школы и системными отраслевыми институтами, институтами Заказчика и конструкторскими бюро путем выполнения предэскизных и эскизных проектов, участия в опытно-конструкторских работах.

Часть описанного направления, с характерной спецификой, составляли исследования А.А. Красовского и его учеников в области теоретических основ и практических решений авиационного тренажеростроения. А.А. Красовский предложил основные пути формализации модели деятельности оператора (летчика) на базе результатов теории оптимального оценивания и оптимального управления на основе функционала обобщенной работы. Этот сплав передовых достижений науки об управлении и отечественной нейро- и психофизиологии позволил сформулировать концепцию так называемого оптимального электронного инструктора (ОЭИ).

Были и другие направления научной деятельности А.А. Красовского, которым он отдавал свои силы, но недетализируемые здесь. Это и физическая теория управления, и циклическая фильтрация по Калману, и управление в человеко-машинных системах, и законы сохранения и превращения общей энтропии, и синергетика с принципом наименьшего действия управляемых

самоорганизующихся систем, и полиномиальные колебания нелинейных динамических систем, и теоретическое обоснование (ученики экспериментально подтвердили) зеркально-дипольного излучения на несущей волне, равной четырем геометрическим высотам полета летательных аппаратов в плотной атмосфере.

А.А. Красовский с большой ответственностью относился к научно-организационной и педагогической деятельности. Он лично организовывал и возглавлял или входил в число организаторов большого числа Всероссийских и отраслевых научных конференций, был членом редакционных коллегий ведущих отечественных научных журналов по направлению автоматического управления.

В 1961 г. А.А. Красовский в соавторстве с Г.С. Поспеловым издали монографию “Основы автоматики и технической кибернетики”, явившуюся прорывом отечественной науки в области автоматического управления.

Но, пожалуй, основными достижениями А.А. Красовского являются созданные им кафедра и научная школа при ней, личный вклад сотрудников и выпускников которых получил высокую правительственную и общественную оценку: один Герой Социалистического труда (А.А. Красовский), два действительных члена АН СССР и РАН (Г.С. Поспелов, А.А. Красовский), десять (двое дважды) лауреатов Государственных премий СССР и РФ, четверо Заслуженных деятелей науки РФ и еще четверо удостоены других правительственных наград. На кафедре (в том числе под руководством А.А. Красовского) подготовлены 32 (11) доктора технических наук и 213 (105) кандидатов технических наук.

А.А. Красовский – автор 475 научных трудов, включая 20 книг и учебников, 188 научных статей и 42 изобретений, из которых три за единоличным авторством.

Деятельность А.А. Красовского отмечена орденами Ленина (18.02.1981), Отечественной войны 1-й степени (11.03.1985), Трудового Красного Знамени (17.09.1975), Красной Звезды (30.12.1956), “Знак Почёта” (15.09.1961) и медалями, в том числе “Серп и молот” (18.02.1981) и “За боевые заслуги” (13.06.1952).

Память об Александре Аркадьевиче Красовском, ученом и человеке, навсегда останется в наших сердцах.

*Редакционная коллегия журнала “Автоматика и телемеханика”*

© 2021 г. **А.П. КУРДЮКОВ**, д-р техн. наук,

О.Г. АНДРИАНОВА, канд. физ.-мат. наук (andrianovaog@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва),

А.А. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru),  
Д.А. ГОЛЬДИН, канд. техн. наук (goldind@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## МЕЖДУ $LQG/H_2$ И $H_\infty$ ТЕОРИЯМИ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В обзоре обсуждаются различные подходы в теории управления, возникавшие на протяжении последних десятилетий, которые отражают желание найти компромисс между  $LQG/H_2$  теорией управления и  $H_\infty$  теорией управления. К таким теориям можно отнести теорию регуляторов, чувствительных к риску (risk sensitive), теорию субоптимального управления с ограничением на функционал  $H_\infty$  энтропии, теорию смешанного  $H_2/H_\infty$  управления, теорию минимаксного  $LQG$  управления, анизотропийную теорию и некоторые другие. Более подробно в обзоре обсуждается анизотропийная теория управления, которая в рамках одной постановки задачи включает в себя и  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  теории.

*Ключевые слова:* линейные системы, подавление влияния внешних возмущений, робастное управление, робастная фильтрация, робастная стабилизация, субоптимальное управление, оптимальное управление, теория информации, окрашенный шум, робастная устойчивость, системы с неопределенностями, дескрипторные системы, частотная теорема.

DOI: 10.31857/S0005231021040024

### 1. Введение

На разных этапах развития теории автоматического управления линейными стационарными системами разработчики предъявляли различные требования к функционированию систем управления. На начальном этапе базовой задачей, стоявшей перед разработчиками систем автоматического управления, являлась задача обеспечения устойчивости замкнутой системы. По мере усложнения целей функционирования систем управления к системам предъявлялись более сложные требования: обеспечение заданных характеристик переходных процессов, оптимизация некоторых параметров и характеристик замкнутой системы управления и т.д. Все это привело к появлению теории

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-18-50330).



оптимального управления, использующей традиционные и новые методы оптимизации.

Одной из важных характеристик систем управления является энергия, которую система затрачивает в процессе своего функционирования. Если система описывается с помощью дифференциальных уравнений, в которые управление входит как параметр, то энергия представляет собой интеграл от квадратичной формы, аргументами которой являются состояние объекта и управление, построенное для него. В случае дискретного описания управляемой системы энергией будет некоторая сумма, являющаяся аналогом интеграла в непрерывном случае. Задача минимизации энергии, потребляемой управляемой системой, является одной из важнейших задач теории оптимального управления, нашедшей свое применение при синтезе управления для многих технических систем. Энергия является некоей усредненной характеристикой системы управления. Математическая модель такого критерия качества может быть представлена в виде  $H_2$  нормы замкнутой системы. Среди множества других критериев качества можно выделить критерий подавления влияния наихудшего в заданном классе воздействия, действующего на систему. Обеспечение подавления влияния наихудшего возмущения является чрезвычайно важной задачей при проектировании систем автоматического управления объектами, к которым предъявляются требования работоспособности при экстремальных условиях: системы управления самолетами, ядерными реакторами, аварийными ситуациями и т.д. Системы управления с такими критериями качества относятся к минимаксным (игровым) системам. Математической моделью такого критерия качества является  $H_\infty$  норма замкнутой системы.

Оба этих критерия могут рассматриваться как разные способы подавления влияния внешних возмущений для линейной задачи при различных предположениях на входные сигналы, действующие на систему.

В процессе работы над этими задачами в их решении обнаружили общие моменты. Это навело исследователей на мысль, что должна существовать теория, которая в определенном смысле обобщает эти две задачи и при этом каждая из задач будет являться ее частным случаем. Данная работа посвящена обзору различных задач теории автоматического управления, которые в той или иной степени разрабатывали теорию, обобщающую  $H_2$  и  $H_\infty$  методы построения регуляторов для линейных систем.

Первая часть настоящего обзора посвящена различным теориям, построенным во второй половине прошлого века, которые в той или иной степени являются развитием классических постановок  $H_2$  и  $H_\infty$  теорий автоматического управления.

Вторая часть обзора в основном посвящена робастной стохастической теории управления с анизотропийным функционалом качества, которая была создана И.Г. Владимировым, решившей задачу построения теории управления, лежащей между  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями. При этом обе эти теории являются частными (предельными) случаями анизотропийной теории управления.

В конце обзора рассматриваются задачи минимаксного  $LQG$  управления, по своей идеологии близкие к идеологии построения анизотропийного управ-

ления. В постановке задач минимаксного  $LQG$  управления также используется теоретико-информационная характеристика двух случайных сигналов — относительная энтропия. Однако в отличие от анизотропийной теории, где понятие относительной энтропии используется для формирования критерия качества системы управления, в минимаксном  $LQG$  управлении эта характеристика сигналов используется для описания ограничений в системе.

Несмотря на близость задач управления и фильтрации [147, 149, 150], авторы не включили в обзор работы по фильтрации с  $H_2$ ,  $H_\infty$  и анизотропийными критериями, так как это значительно увеличило бы объем этого обзора без изложения существенно новых идей. Постановки и решения задач анизотропийной фильтрации можно найти в [62, 63], идеи  $H_\infty$  фильтрации описаны, например, в [9, 10]. Задачи смешанной  $H_2/H_\infty$  фильтрации, подразумевающей  $H_2$  норму в качестве критерия минимизации и обеспечение заданного уровня подавления внешнего возмущения, были решены в [247].

В основе анизотропийной теории управления лежат теоретико-информационные идеи описания неопределенности сигналов в системах управления, основанные на понятии энтропии. В последнее время теоретико-информационному описанию неопределенности в различных работах уделено достаточно большое внимание. В частности, работа [46] посвящена минимизации и максимизации относительной энтропии в различных дисциплинах, однако в ней ни слова не говорится об описании неопределенностей сигналов в системах управления в терминах относительной энтропии. Данный обзор имеет своей целью закрыть этот пробел.

По образному выражению из введения к книге [108] “теория информации отвечает на два фундаментальных вопроса: каково предельное сжатие данных (ответ: энтропия) и какова предельная скорость передачи данных (ответ: пропускная способность канала)”. Теория управления также обеспечивает два основных требования к системам управления: построение устойчивых систем и гарантию выбранного качества систем. И теория информации, и теория управления имеют дело с моделями сигналов. В теории управления сигналы в основном рассматриваются в роли входов и выходов собственно систем управления (объект плюс регулятор), созданию которых и посвящена теория. В теории информации сигналы и их характеристики служат основным предметом исследования.

В теории информации в основном исследуются сигналы, имеющие стохастическую природу. Введение в теорию управления вероятностного описания приблизило модели систем управления к реальным техническим системам. В вероятностных терминах можно описывать как внешние сигналы, действующие на объект, так и сигналы внутри объекта управления. Соответственно, и неопределенности в системе следует описывать подобным способом.

Описание систем управления с помощью вероятностных характеристик уже подразумевает некую неопределенность. Как отмечал в своей работе А.А. Красовский [33], “статистическое рассмотрение позволяет построить некий мост от динамики систем к информационному описанию процессов в системах управления. Этот мост заключается в том, что переходные процессы получают описание в информационных терминах”. Однако можно ввести

неопределенности в описание характеристик случайного процесса, участвующего в описании управляемой системы. Известно, что наиболее полной характеристикой случайного процесса является плотность распределения вероятностей. Неизвестные характеристики плотности распределения вероятностей входного случайного сигнала или случайных начальных условий являются неопределенностью в вероятностном описании системы, а различные модели описания неизвестных характеристик плотности позволяют ставить и решать содержательные задачи теории управления в присутствии неопределенности [3]. Например, в книге Г.П. Тартаковского [60] рассматриваются задачи оценивания параметров и фильтрации случайных процессов, стохастического управления, в том числе при наличии априорной неопределенности.

Идеи применения теории информации стали появляться в 60-е годы XX в. В своей книге [66] А.А. Фельдбаум указывал на большие возможности применения теоретико-информационных методов в теории управления. Во введении к своей книге [57] А.В. Солодов отмечал важность привлечения информационных характеристик сигналов для постановки задач управления. В книге описано применение информационных характеристик к оценкам системы автоматического управления, рассмотрена пропускная способность систем при наличии помех. Однако никаких попыток ввести информационные характеристики в описание модели управления или в критерии качества в то время сделано не было.

Взаимосвязь теории информации и теории управления может рассматриваться в двух направлениях. Первое направление хорошо описано в обзоре [2]. Это введение объектов исследования теории информации в описание объекта управления (например, канала связи), что приводит к необходимости исследования традиционных задач теории управления с учетом изменившихся моделей. Второе направление влияния теории информации на теорию управления состоит в привлечении хорошо развитого аппарата теории информации для описания множества сигналов, циркулирующих в системе, и не только на ее входе и выходе, но и внутри объекта управления. Учет теоретико-вероятностных характеристик входных сигналов и сигналов внутри объекта управления является основой анизотропной теории управления, обзору работ по которой посвящена вторая часть настоящей статьи.

Авторы в основном придерживаются временной последовательности появления рассматриваемых в обзоре работ.

В работе использованы следующие обозначения:  $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел,  $\mathbb{R}$  — поле вещественных чисел,  $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел,  $\mathbf{E}$  — математическое ожидание,  $\mathbf{cov}$  — ковариационная матрица,  $\otimes$  — произведение Кронекера,  $\text{diag}(i_1, \dots, i_N)$  — диагональная матрица порядка  $N$ , на главной диагонали которой стоят числа  $i_1, \dots, i_N$ ,  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора,  $\mathbb{L}_2^m$  — класс  $m$ -мерных квадратично интегрируемых случайных последовательностей,  $l_2$  — класс квадратично суммируемых случайных последовательностей,  $\mathfrak{L}_2^m$  — класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных случайных распределенных абсолютно непрерывно векторов с конечным вторым моментом,  $D(p \parallel q)$  — относительная энтропия или расстояние Кульбака–Лейблера [34] между двумя распределениями  $p$  и  $q$ ,  $\mathbf{A}(w)$  — анизотропия случайного вектора  $w$ ,  $\overline{\mathbf{A}}(W)$  — средняя анизотропия

случайной последовательности  $W$ ,  $\|F\|_a$  — анизотропийная норма системы  $F$  с уровнем средней анизотропии входной последовательности  $a$ .

$H_2^{m \times m}$  обозначает пространство Харди аналитических в открытом единичном круге  $\{z \in \mathbb{C}^1 : |z| < 1\}$  на комплексной плоскости матричных функций  $G$ , имеющих конечную  $H_2$ -норму

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \text{tr} \left( (\widehat{G}(\omega))^* \widehat{G}(\omega) \right) d\omega \right)^{1/2},$$

где через  $\widehat{G}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(r e^{i\omega})$ ,  $\omega \in \Omega = [-\pi; \pi]$ , обозначено угловое граничное значение функции

$$(1.1) \quad G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k,$$

$g_k$  — импульсная переходная характеристика,  $(\cdot)^*$  обозначает комплексное сопряжение.

$H_{\infty}^{m \times m} (RH_{\infty}^{m \times m})$  обозначает пространство Харди (правильных) аналитических в открытом единичном круге передаточных функций  $H(z)$  дискретной системы, с нормой

$$(1.2) \quad \|H\|_{\infty} = \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(H(z)),$$

где  $\bar{\sigma}(\cdot)$  обозначает максимальное сингулярное значение матрицы.

## 2. Обзор современных подходов к понижению влияния внешних возмущений в линейных системах

В 50-е гг. двадцатого века на основе фундаментальной работы [32] по теории линейной фильтрации в дискретном времени, опубликованной в 1941 г. академиком А.Н. Колмогоровым, и подобной теории, независимо разработанной крупным американским математиком Н. Винером, рассмотревшим задачи линейной фильтрации сигналов, а также их экстраполяции и интерполяции для непрерывного времени [233], появились исследования по применению вероятностных методов в теории фильтрации и позже в теории автоматического управления. Подробнее об этом можно узнать в [19].

Ранее, как правило, предполагалось, что сигналы, функционирующие в системе управления, имеют детерминированный характер. Основой теории Винера–Колмогорова была спектральная теория случайных процессов, развившаяся из фундаментальной работы А.Я. Хинчина [68], в которой было установлено, что корреляционная функция случайного процесса и его энергетический спектр мощности связаны преобразованием Фурье. Теория, изложенная в книге Н. Винера, была очень сложна для понимания инженерами, которые в те годы не имели для этого необходимой математической подготовки. Известные американские ученые Г.В. Боде и К. Шеннон в 1950 г.,

используя интуитивно понятные соображения, дали упрощенное изложение этой теории [98]. Совершенно другой подход к проблемам выделения сигнала на фоне шума, отличный от теории Колмогорова–Винера, применимый и к проблемам оптимальной линейной фильтрации сигналов, был предложен Р.Л. Стратоновичем в 1959 г. [58]. Теория Р.Л. Стратоновича основывалась на представлении случайных процессов, моделирующих как полезный сигнал, так и шум с помощью дифференциальных уравнений (уравнений состояния). Независимо от Р.Л. Стратоновича законченные результаты оптимальной линейной фильтрации как в дискретном, так и в непрерывном времени получили в 1961 г. американские ученые Р.Е. Калман и Р.С. Бьюси [149, 150]. Для гауссовских и марковских случайных процессов Р.Л. Стратоновичем, Р.Е. Калманом и Р.С. Бьюси были выведены дифференциальные уравнения, определяющие структуру оптимального фильтра, на вход которого поступает принимаемый сигнал, и матричное уравнение Риккати, определяющее точность его оценки. Наличие дифференциальных уравнений оценки вместо интегральных предоставляет определенные практические преимущества, так как дифференциальные уравнения решаются намного легче с помощью аналоговой или цифровой техники, чем интегральные.

Введение в теорию управления сигналами, имеющих вероятностные характеристики, позволило ставить и решать новый класс задач теории управления. Одним из ярких результатов того времени явилась теория построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества, обеспечившая мощный инструмент для синтеза многомерных систем управления. Так называемая *LQG* задача (Р.Е. Калман [28, 148]) (аббревиатура *LQG* соответствует первым буквам английских слов в выражении “линейно-квадратичная гауссовская”) — это задача построения управления для объекта с линейной динамикой, возбужденной аддитивным гауссовским шумом, и критерием качества, который является математическим ожиданием положительно полуопределенной квадратичной формы и содержит интересную особенность. Линейный регулятор, являющийся решением этой задачи, оказывается линейной функцией состояния и идентичен регулятору в задаче, в которой отсутствует гауссовский шум. Такая задача называется задачей построения *LQR* регулятора (аббревиатура *LQR* соответствует первым буквам английских слов в выражении “линейно-квадратичный регулятор”). Эта задача была решена в работах А.М. Летова [41–44].

Напомним постановку и решение задачи *LQG* оптимизации для динамической линейной системы, заданной в непрерывном времени в следующем виде:

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t),$$

$$(2.2) \quad y(t) = C(t)x(t) + w(t),$$

где  $x$  — вектор состояния системы,  $u$  — вектор управления,  $y$  — измеряемый выход, используемый для построения управления. На систему также действуют аддитивные гауссовские белые шумы  $v(t)$  и  $w(t)$ <sup>2</sup>. Для заданной системы

<sup>2</sup> Формулы (2.1)–(2.2) являются символической (инженерной) записью случайных процессов, представленных в интегральной форме, которая включает стохастический интеграл Ито [143].

требуется найти такую последовательность  $u(t)$ , которая в каждый момент времени  $t$  линейно зависит только от предыдущих значений  $y(t')$ ,  $0 \leq t' < t$ , и минимизирует следующий критерий качества:

$$J = \mathbf{E} \left[ x^T(T)Fx(T) + \int_0^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)) dt \right],$$

$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0.$$

Время (горизонт)  $T$  может быть как конечным, так и бесконечным. Если  $T \rightarrow \infty$ , то первым членом  $x^T(T)Fx(T)$  можно пренебречь. Для того чтобы функционал качества  $J$  не стремился в этом случае к бесконечности, имеет смысл рассмотреть новый функционал, равный  $\frac{J}{T}$ .

$LQG$  регулятор, который решает поставленную задачу, удовлетворяет уравнениям

$$(2.3) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \mathbf{E}[x(0)],$$

$$(2.4) \quad u(t) = -K(t)\hat{x}(t).$$

Матрица  $L(t)$  называется коэффициентом усиления Калмана и ассоциируется с фильтром Калмана, представленным уравнением (2.3). В каждый момент времени фильтр генерирует оценку  $\hat{x}(t)$  состояния  $x(t)$ , используя измерения и входы. Коэффициент усиления  $L(t)$  определяется матрицами  $A(t)$ ,  $C(t)$ ,  $V(t)$ ,  $W(t)$ , две последние являются ковариационными матрицами  $v(t)$  и  $w(t)$ , а также  $\mathbf{E}(x(0)x^T(0))$ . Коэффициент усиления Калмана может быть найден из следующего матричного дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) + V(t),$$

$$P(0) = \mathbf{E}(x(0)x^T(0)).$$

При известном решении  $P(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , коэффициент усиления Калмана равен

$$L(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

Матрица обратной связи  $K(t)$  определяется с помощью матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$  и  $F$  и может быть найдена из матричного дифференциального уравнения Риккати

$$-\dot{S}(t) = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t),$$

$$S(T) = F.$$

При найденном  $S(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , матрица  $K(t)$  равна  $R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$ .

Полученные матричные уравнения Риккати очень похожи за исключением того, что первое решается в прямом времени, а второе — в обратном. Первое уравнение дает возможность найти решение задачи линейно-квадратичного

оценивания ( $LQE$ ), а второе — задачу поиска линейно-квадратичного регулятора ( $LQR$ ). Вместе эти две задачи представляют собой задачу линейно-квадратичного гауссовского управления ( $LQG$ ). Задачи оценивания ( $LQE$ ) и поиска регулятора ( $LQR$ ) могут быть решены отдельно, эта идея получила название принципа разделения.

Когда матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$ ,  $V(t)$ ,  $W(t)$  не зависят от времени, а  $T \rightarrow \infty$ , закон управления становится стационарным, а динамические уравнения Риккати могут быть заменены алгебраическими [54, 55].

### 2.1. $LQG$ , $LEQG$ и регуляторы, чувствительные к риску

Приведем формулировку и схему решения  $LQG$  задачи для линейной нестационарной системы управления, описываемой следующими уравнениями:

$$(2.5) \quad x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k,$$

$$(2.6) \quad y_k = C_k x_k + v_k, \quad 0 \leq k < N,$$

с нулевым начальным условием  $x_0 = 0$ . Здесь  $k$  является индексом времени, а  $w_k$ ,  $v_k$  представляют собой независимые дискретные гауссовские случайные процессы с ковариационными матрицами  $W_k$ ,  $V_k$  соответственно.

Функционал качества задается следующим выражением:

$$(2.7) \quad J = \mathbf{E} \left( x_N^T F x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k) \right),$$

$F \geq 0$ ,  $Q_k \geq 0$ ,  $R_k > 0$ .

Требуется найти регулятор, стабилизирующий замкнутую систему и минимизирующий функционал качества (2.7).

Регулятор в  $LQG$  задаче задается равенством

$$(2.8) \quad u_k = -L_k \hat{x}_k,$$

где  $\hat{x}_k$  является оценкой  $x_k$ . Оценка  $\hat{x}_k$  состояния  $x_k$  вычисляется с помощью решения разностного уравнения Риккати. Матрица обратной связи  $L_k$  также находится с помощью решения разностного уравнения Риккати. Таким образом, для получения управления (2.8), минимизирующего функционал качества (2.7), надо решить два разностных уравнения Риккати. Если все матрицы в формулировке задачи стационарны и если горизонт  $N$  стремится к бесконечности, дискретный  $LQG$  регулятор становится стационарным. В этом случае разностные уравнения Риккати заменяются соответствующими алгебраическими уравнениями. Причем уравнения для определения  $\hat{x}_k$  и  $L_k$  можно решать независимо, т.е. раздельно. В теории  $LQG$  управления принцип разделения, не верный в детерминированных системах и более формально известный как принцип разделения оценки и контроля, утверждает, что задача создания оптимальных  $LQG$  регуляторов по принципу обратной

связи для стохастической системы может быть решена путем разработки оптимального наблюдателя состояния системы, который подставляется в оптимальный детерминированный регулятор. Таким образом, проблема может быть разбита на две отдельные части, что облегчает синтез. Этот важный в  $LQG$  дискретной задаче принцип разделения подробно описан, например, в [48, 67].

Критерий качества (2.7), используемый в постановке задачи поиска оптимального  $LQG$  регулятора, в стационарном случае идентичен  $H_2$  норме передаточной функции замкнутой системы. Таким образом, решение оптимальной  $LQG$  задачи подразумевает минимизацию  $H_2$  нормы замкнутой системы. В данной ситуации можно говорить о решении  $H_2$  оптимальной задачи управления.

Обратим внимание, что описанная выше задача не имеет неопределенностей ни в описании модели объекта, ни в описании входных возмущений, так как гауссовская входная последовательность полностью определена своей функцией плотности распределения вероятностей.

$LQG$  и  $LQR$  задачам посвящено огромное количество литературы во всем мире. Обширная библиография приведена в [80]. В России наиболее популярна была монография Х. Квакернаака и Р. Сивана [29], в которой изложены эти задачи как для непрерывных, так и для дискретных систем управления. Описание вычислительных процедур можно найти в [83, 220].

В июне 1971 г. вышел первый тематический выпуск журнала IEEE Transactions on Automatic Control. Этот выпуск был полностью посвящен различным аспектам  $LQG$  управления и, по словам его редактора, подводил итоги как теоретических и алгоритмических, так и возможных практических аспектов этой задачи [84]. Однако уже в этом номере появились работы [84, 194], ставившие под сомнение универсальность этой теории. По образному выражению Д.С. Бернштейна [96] “ $LQG$  теория и ее техника уравнений Риккати очень похожа на здание, состоящее из одних стальных рам, — очень жесткое и очень ограниченное”.

В реальных задачах  $LQG$  регулятор работал достаточно хорошо, если аддитивная помеха была гауссовским белым шумом. Однако если у входного возмущения была достаточно большая временная ковариация, т.е. шум не белый, то  $LQG$  регуляторы не удовлетворяли требованиям, предъявляемым к замкнутым этими регуляторами системам управления. Интуитивно было понятно, что в случае большой ковариации входного возмущения другие регуляторы должны работать лучше, чем  $LQG$ . Это соображение подводило разработчиков систем управления к мысли учитывать при построении регуляторов свойства случайных сигналов, циркулирующих в системе управления. Одним из подходов к учету отличия входного случайного сигнала от белого шума был подход, основанный на изменении критерия качества (оптимальности) для системы управления.

Этот подход впервые применил Д. Джекобсон в 1973 г. в [144]. В этой статье автор впервые предложил использовать экспоненциально-квадратичный функционал качества. Задачу с критерием качества, в который входит экс-



понента, стали называть  $LEQG$  задачей (линейной, экспоненциально-квадратичной, гауссовской).

В [144] рассматривалась линейная стационарная система с наблюдаемым вектором состояния

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ y_k &= x_k,\end{aligned}$$

где  $x_k$  — вектор состояния,  $y_k$  — наблюдаемый вектор,  $u_k$  — вектор управления,  $w_k$  — гауссовский шум, постоянные матрицы  $A, B_1, B_2$  имеют соответствующие размерности. Вводилась квадратичная форма

$$(2.9) \quad G = x_N^T \Pi x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k).$$

Задача состояла в построении регулятора, минимизирующего функционал, равный

$$\Upsilon_N = \sigma \mathbf{E} \left[ \exp \left\{ \sigma \frac{1}{2} G \right\} \right],$$

причем параметр  $\sigma$  принимал значения  $\pm 1$ . Значение  $-1$  соответствовало так называемой  $LE - G$  задаче, а  $+1$  —  $LE + G$  постановке. Когда интенсивность шума стремилась к бесконечности, оптимальные коэффициенты усиления для  $LE - G$  задачи стремились к нулю, т.е. при таком входном воздействии практически невозможно было уменьшить значение критерия качества за счет подачи управляющего сигнала. В задаче  $LE + G$  оптимальный регулятор переставал существовать, если интенсивность шума была достаточно большой (т.е. критерий качества стремился к бесконечности независимо от управляющего входа). Регулятор получался линейной функцией состояния

$$u_k = K(\Sigma_k) x_k,$$

причем коэффициент  $K(\Sigma_k)$  зависел от  $\Sigma_k$  — ковариационной матрицы  $w_k$ . Более того, прямыми вычислениями Джекобсон впервые показал, что структура соответствующего регулятора является той же, что и структура регулятора для задачи управления в динамической игре. Этот интересный результат впервые установил связь между задачами управления в динамических детерминированных играх и задачами управления, основанными на минимизации стохастических функций качества.

В отсутствие шума решение этой задачи совпадало с  $LQR$  задачей. Однако в присутствии шума оптимальные регуляторы в задаче Джекобсона с экспоненциальным критерием качества отличались от регуляторов в  $LQG$  задаче. И хотя, как и в случае  $LQG$  задачи, эти регуляторы являлись линейными функциями переменных состояния, они определенно зависели от ковариационной матрицы аддитивного гауссовского шума. Для малых ковариаций решения этих задач были близки, но для больших — заметно различались.

Подчеркнем, что в задаче Джекобсона отсутствуют неопределенности в описании объекта и входных возмущений.

Вплоть до работы П. Уиттла [229] общий случай (случай наблюдения неполного вектора состояний) не был решен. Уиттл рассматривал модель объекта в виде

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \varepsilon_k, \\y_k &= Cx_k + \eta_k,\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_k$  и  $\eta_k$  являются входным возмущением и шумом измерений соответственно. Предполагалось, что последовательность векторов  $\{[\varepsilon_k^T, \eta_k^T]^T\}$  являлась гауссовским белым шумом с совместной ковариационной матрицей

$$\mathbf{cov}[\varepsilon_k^T, \eta_k^T] = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

Вводилась следующая квадратичная форма:

$$G = x_T^T P x_T + \sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k).$$

Функционал качества выбирался в виде

$$(2.10) \quad \gamma(\theta) = -2\theta^{-1} \log \mathbf{E} \left( e^{-1/2\theta G} \right).$$

Матрицы  $N, M, R, Q, P$  положительно определенные,  $\theta$  — действительный скаляр.

Если величина  $\theta \text{Var}(G)$  мала (здесь  $\text{Var}(G)$  — дисперсия), то  $\gamma(\theta) \sim \mathbf{E}(G) - 1/4\theta \text{Var}(G)$ . Это иллюстрирует тот факт, что случаи  $\theta = 0$ ,  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$  соответствуют поведению, нейтральному к риску, предпочитающему риск и не охотно относящемуся к риску соответственно в задачах оптимизации [97]. Параметр  $\theta$  Уиттл назвал параметром чувствительности к риску и продемонстрировал, что, выбирая этот параметр слишком большим, можно прийти к ситуации, в которой критерий качества может принимать бесконечные значения. Из приведенных выше рассуждений следует, что  $\gamma(0)$  является традиционным критерием и  $\mathbf{E}(G)$  является предельным значением для  $\gamma(\theta)$  при стремлении  $\theta$  к 0 с обеих сторон.

Уиттл показал, что оптимальный регулятор является линейной функцией оценки состояния, получаемой с помощью модифицированного фильтра Калмана.

Задача построения управления путем минимизации экспоненциально-квадратичного функционала — задача построения управления, чувствительного к риску (risk-sensitive problem), — изучалась в различных интерпретациях в [93, 103, 104, 145, 229, 230, 232].

Однако *LQG* и *LEQG* теории были весьма ограничены в своих приложениях к синтезу реальных технических систем управления. В конце 70-х годов

была указана причина ограниченных возможностей  $LQG$  теории [114]. Эта причина состояла в том, что регуляторы, построенные в рамках этой теории, плохо работали в присутствии неучтенных при синтезе неопределенностей объекта, даже если эти неопределенности были малы. Говоря современным языком, системы управления, замкнутые  $LQG$  регулятором, были не робастны относительно некоторых неточностей в описании объекта. Необходимо подчеркнуть, что с понятием неточности в описании модели объекта или входных сигналов в рассмотрение специалистов по теории управления входит и описание класса тех неопределенностей, которые так или иначе должны быть определены. Под неопределенностью описания объекта управления будем понимать параметрическую неопределенность в описании коэффициентов математической модели, неструктурированную (структурированную) неопределенность в описании модели объекта, а также неопределенность в виде так называемой  $M-\Delta$  конфигурации в соответствии с современной классификацией неопределенностей. Более подробно об описании моделей неопределенностей можно прочитать в [6, 52, 53, 174, 191]. Неопределенность в описании сигналов в системе управления определим в теоретико-информационных терминах несколько позже.

## 2.2. $H_\infty$ оптимальные и субоптимальные регуляторы

Попытки обойти изъяны теории построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества [115] привели к возрождению частотного подхода в форме теории  $H_\infty$  оптимизации [250].

В своей пионерской работе [250] для построения регуляторов Д. Зейм предложил использовать другой критерий качества —  $H_\infty$  норму замкнутой системы. Использование этой нормы в известном смысле обеспечивало робастную устойчивость системы. Идея этого способа обеспечения робастной устойчивости основана на известном круговом свойстве индуцированной нормы оператора (см., например, [25]) и на связи между устойчивостью системы управления и условием обеспечения сжимаемости оператора системы (его норма должна быть меньше 1). Если  $\|A\|_{\text{ind}}$  является индуцированной нормой оператора  $A$ , то

$$(2.11) \quad \|AB\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{ind}} \|B\|_{\text{ind}}.$$

Если в качестве  $A$  понимать оператор системы, а в качестве  $B$  — оператор неопределенности  $\Delta$ , тогда требование выполнения условия

$$\|A\|_{\text{ind}} \|\Delta\|_{\text{ind}} < 1$$

обеспечивает устойчивость последовательно соединенных операторов системы и неопределенности. Причем “размер” неопределенности, при которой совокупная система остается устойчивой, определяется “размером” системы

$$\|\Delta\|_{\text{ind}} < 1/\|A\|_{\text{ind}}.$$

Если в качестве индуцированной нормы оператора взять индуцированную  $l_2$  норму оператора (т.е.  $H_\infty$  норму), тогда неравенство (2.11) переписется в

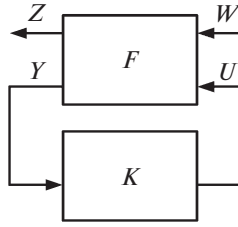


Рис. 1. Нижнее дробно-линейное преобразование  $\mathcal{L}(F, K)$ .

виде

$$(2.12) \quad \|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

Последнее неравенство тесно связано с так называемой теоремой о малом усилении (small gain theorem), опубликованной Зеймсом в 1966 г. [248, 249].

Приведем формальную постановку задачи построения управления по критерию минимума  $H_\infty$  нормы замкнутой системы.

Пусть разомкнутая система  $F$  имеет  $n$ -мерное внутреннее состояние  $x_k$ , связанное с  $m_1$ -мерным возмущением  $w_k$ ,  $m_2$ -мерным управлением  $u_k$ ,  $p_1$ -мерным управляемым сигналом  $z_k$  и  $p_2$ -мерным наблюдением  $y_k$  уравнениями

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ z_k &= C_1 x_k + D_{11} w_k + D_{12} u_k, \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} w_k, \quad -\infty < k < +\infty, \end{aligned}$$

где  $A$ ,  $C_i$ ,  $B_j$  и  $D_{ij}$  — постоянные матрицы соответствующих размеров. Система  $F$  имеет блочную структуру

$$(2.14) \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}.$$

Система  $F$ , а также ее подсистемы  $F_{ij}$  в (2.14) имеют следующие реализации в пространстве состояний:

$$(2.15) \quad F \sim \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Если управляющий сигнал  $U$  формируется по наблюдению  $Y$  регулятором  $K$ , являющимся физически реализуемой линейной стационарной (не обязательно устойчивой) системой, т.е.  $U = K \otimes Y$ , то передаточная функция от  $W$  к  $Z$  получающейся замкнутой системы представляет собой нижнее дробно-линейное преобразование пары  $(F, K)$  (см. рис. 1):

$$(2.16) \quad \mathcal{L}(F, K) = F_{11} + F_{12} K (I_{p_2} - F_{22} K)^{-1} F_{21}.$$

Задача построения оптимального  $H_\infty$  управления состоит в построении регулятора, обеспечивающего минимум  $H_\infty$  нормы, замкнутой этим регулятором системы, от  $W$  к  $Z$ . Другими словами, оптимальный  $H_\infty$  регулятор должен обеспечивать условие

$$\|\mathcal{L}(F, K)\|_\infty \rightarrow \inf_K.$$

В частотной области  $H_\infty$  норма линейной системы может быть интерпретирована как максимальное значение АЧХ системы. Хорошо известно, что решение задачи синтеза  $H_\infty$  регулятора в частотной области сводится к поиску матричных передаточных функций замкнутой системы с более равномерной АЧХ на всем диапазоне частот [121]. В отечественной литературе подобная интерпретация  $H_\infty$  нормы носит название равномерно-частотного показателя [11].

Решение оптимальной  $H_\infty$  задачи управления сводится к решению достаточно известной в теории управления задачи слежения за моделью (model matching problem) в  $H_\infty$  метрике (метрике пространства Харди). Для систем с одним входом и одним выходом (SISO) это решение описано в монографии [118] путем сведения задачи слежения за моделью к интерполяционной задаче Неванлинны–Пика. Для систем с многими входами и выходами (MIMO) решение задачи слежения за моделью и, следовательно,  $H_\infty$  оптимальной задачи сводится к известной задаче Нехари. Построение  $H_\infty$  оптимальных регуляторов методом сведения этой задачи к задаче Нехари изложено в [121], а также в [192]. В России решение задачи  $H_\infty$  оптимизации посредством решения задачи Нехари было описано в [51].

Несмотря на привлекательность  $H_\infty$  регуляторов, алгоритмы построения оптимального  $H_\infty$  управления были достаточно сложны для восприятия инженерами-разработчиками систем управления на рубеже 80-х годов прошлого века. Кроме того, эти алгоритмы обладали в глазах инженеров большим недостатком: оптимальный регулятор мог иметь порядок значительно больше порядка самой системы.

Существенным моментом в построении  $H_\infty$  теории управления явился переход от оптимальной  $H_\infty$  задачи к субоптимальной. Решение субоптимальной  $H_\infty$  задачи в наиболее полном виде в пространстве состояний для случая непрерывного времени опубликовано в знаменитой “работе четырех авторов” [117] и для дискретного случая в [139]. Решения задачи  $H_\infty$  субоптимального управления напоминают решения классической  $LQG$  задачи. За счет сведения решения задачи  $H_\infty$  субоптимального управления к решению двух уравнений Риккати вычислительная сложность решения субоптимальной задачи получилась значительно меньше, чем решение оптимальной задачи. Решение  $H_\infty$  субоптимальной задачи с помощью двух уравнений Риккати стали называть “2–Риккати подходом”.

Решение дискретной задачи  $H_\infty$  субоптимального управления всегда может быть получено с использованием хорошо известного преобразования

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}.$$

Это преобразование переводит функции, аналитические в полуплоскости, в функции, аналитические в единичном круге. Более того, Ганкелева норма и  $H_\infty$  норма передаточной функции являются инвариантными относительно этого преобразования. По этой причине субоптимальный  $H_\infty$  регулятор может быть получен с использованием следующей процедуры. Преобразуем дискретный объект  $G(z)$  в соответствующий непрерывный объект  $\tilde{G}(s) = G\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ . Построим регулятор в задаче с непрерывным временем  $\tilde{K}(s)$ , который преобразуется в регулятор с дискретным временем с использованием обратного преобразования. Описанная процедура теоретически корректна. Однако сложность ее выполнения сравнима с получением необходимых уравнений напрямую. Более того, использование преобразования невозможно для систем, имеющих полюса в точке  $-1$ . Для таких систем требуется другое билинейное преобразование.

Как было сказано выше, решение субоптимальной  $H_\infty$  задачи управления сводится к решению двух связанных уравнений Риккати, в которые входит параметр  $\gamma$ , задающий ограничение на верхнюю границу критерия качества —  $H_\infty$  норму замкнутой системы, т.е.

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где  $T_{zw}$  — передаточная функция замкнутой системы от возмущающего входа к управляемому выходу.

Заметим, что для  $H_\infty$  субоптимальных регуляторов справедливо утверждение, аналогичное принципу разделения при синтезе  $H_2$  оптимального регулятора.  *$H_\infty$  субоптимальный регулятор с обратной связью по выходу является оценщиком по выходу в случае закона управления по вектору состояния в присутствии “наихудшего случая” возмущения.* Этот принцип не означает возможность автономно решать задачу оценивания и управления, как в случае  $H_2$  задачи, однако в случае наилучшего возмущения, равного нулю, принцип разделения в  $H_\infty$  задаче становится принципом разделения в  $H_2$  задаче.

Решение  $H_\infty$  субоптимальной задачи входит в различные компьютерные пакеты для разработки систем управления, например в известный MATLAB Robust Control Toolbox [254].

### 2.3. Робастная устойчивость (в $H_\infty$ теории управления)

Важнейшей целью в синтезе систем управления является обеспечение устойчивости замкнутых систем. Это — минимальное требование к любому регулятору. В реальности же поведение объекта управления может отличаться от поведения его математической модели (называемой номинальным объектом). Эти отличия могут быть вызваны округлением или недостаточной точностью приборов для измерения параметров системы, технологическим разбросом характеристик компонент объекта управления, нелинейной или неучтенной динамикой и т.д. Отличие между реальным объектом и его номинальной моделью называется ошибкой моделирования или неопределенностью системы. Из-за наличия неопределенностей в системе синтезируемый

регулятор должен не только стабилизировать номинальный объект управления, но должен также стабилизировать семейство систем, которое состоит из области неопределенности вокруг номинальной модели в предположении, что реальный объект входит в это семейство.

Необходимость стабилизировать систему с неопределенностью определила концепцию робастной устойчивости: замкнутая система остается устойчивой при наличии неопределенностей из некоторого известного наперед множества. Методы  $H_\infty$  теории управления способствовали получению значительных результатов в области робастной стабилизации объектов с неопределенными параметрами.

Существует много способов описания неопределенности в системах управления. Для знакомства с большинством описаний этих неопределенностей авторы рекомендуют работу [191], в которой перечислены и определены основные способы описания неопределенностей. Достаточно распространенным способом описания меры неопределенности является  $L_\infty$  норма.

В  $H_\infty$  теории управления принято моделировать неопределенность передаточной функцией, отдельной от передаточной функции номинального объекта. Такой подход впервые для аддитивных и мультипликативных неопределенностей был применен в [106, 116] и для неопределенностей в виде взаимно простых множителей (факторов) в [222, 223].

Используя нижнее дробно-линейное преобразование пары  $(F, \Delta)$ , задаваемое формулой (2.16), определим вид матрицы  $F$  для основных типов неструктурированных неопределенностей, следуя монографии [132]:

- 1) аддитивной неопределенности соответствует матрица  $F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_O \end{bmatrix}$ , где  $G_O$  — передаточная функция номинального объекта;
- 2) обратной аддитивной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} -G_O & G_O \\ -G_O & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 3) входной мультипликативной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_O & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 4) выходной мультипликативной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} 0 & G_O \\ I & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 5) обратной входной мультипликативной неопределенности —

$$F = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_O & G_O \end{bmatrix};$$

- 6) обратной выходной мультипликативной неопределенности —

$$F = \begin{bmatrix} -I & G_O \\ -I & G_O \end{bmatrix};$$

- 7) левой неопределенности в виде взаимно простых факторов —

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{M}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_O \\ I \end{bmatrix} \\ \widetilde{M}^{-1} & G_O \end{bmatrix},$$

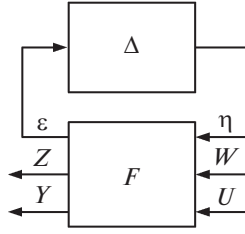


Рис. 2. Верхнее дробно-линейное преобразование  $\mathcal{U}(F, \Delta)$ .

где  $G_O = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$  — левая взаимно простая факторизация номинального объекта,  $F = (\widetilde{M} + \widetilde{\Delta}_M)^{-1}(\widetilde{N} + \widetilde{\Delta}_N)$  — передаточная функция возмущенного объекта,  $\Delta = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta}_M & \widetilde{\Delta}_N \end{bmatrix}$ ;

8) правой неопределенности в виде взаимно простых факторов —

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix} & \widetilde{M}^{-1} \\ \begin{bmatrix} -G_O & I \end{bmatrix} & G_O \end{bmatrix},$$

где  $G_O = \widetilde{N}\widetilde{M}^{-1}$ ,  $F = (\widetilde{N} + \widetilde{\Delta}_N)(\widetilde{M} + \widetilde{\Delta}_M)^{-1}$ ,  $\Delta = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta}_M \\ \widetilde{\Delta}_N \end{bmatrix}$ .

На рис. 2 схематично представлено так называемое верхнее дробно-линейное преобразование. Оно задается следующей формулой:

$$(2.17) \quad \mathcal{U}(F, \Delta) = F_{22} + F_{21}\Delta(I_n - F_{11}\Delta)^{-1}F_{12}.$$

При обратимой  $(I_n - F_{11}\Delta)$  систему с тремя неопределенностями (аддитивной, мультипликативной и неопределенностью в виде взаимно простых факторов) можно представить в виде верхнего дробно-линейного преобразования так называемого стандартного объекта  $F$  [174], представленного в блочном виде (2.14), и неопределенности  $\Delta$ .

Во всех описанных выше типах неопределенностей предполагается, что  $\Delta$  не имеет определенной структуры. Рассмотрим теперь *структурированную неопределенность*, включающую в себя немоделируемую динамику (неструктурированную неопределенность) и параметрическую неопределенность. В этом случае система с неопределенностью может быть представлена верхним дробно-линейным преобразованием (2.17), где

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f),$$

$\delta_i \in \mathbb{C}$ ,  $\Delta_i \in \mathbb{C}^{h_j \times h_j}$ ,  $\sum_{i=1}^s r_i + \sum_{j=1}^f h_j = n$ , где  $n$  — порядок  $\Delta$ .

В [174] приведены необходимые и достаточные условия робастной стабилизируемости номинального объекта при наличии неопределенностей. Это условие подразумевает выполнение теста на  $H_\infty$  норму передаточной функции системы. Математической основой для этого теста для разных классов неопределенностей является уже упоминаемая теорема о малом усилении [248, 249] и круговое свойство индуцированных норм (2.11) [25].



Робастные регуляторы могут быть найдены с помощью процедуры решения задачи  $H_\infty$  оптимизации, поставленной в [250].

Целью данной работы не является подробное изложение задач робастного анализа и синтеза, так как этому вопросу посвящено много литературы [120, 130, 205, 252]. Здесь необходимо было сформулировать основные понятия робастного анализа, чтобы далее была возможность при изложении этих вопросов в рамках анизотропийной теории управления сослаться на результаты, полученные, в частности, в  $H_\infty$  теории управления. Более подробно о задачах робастного анализа и синтеза можно прочесть в недавно вышедшем обзоре [191].

В конце 80-х годов была создана теория робастного управления ( $H_\infty$  оптимального и  $H_\infty$  субоптимального управления) для систем в пространстве состояний. В рамках этой теории был четко определен класс неопределенностей, которые надо учитывать при построении систем управления.

Необходимость описания классов неопределенностей была давно понята специалистами по теории управления. Существует много работ, в которых так или иначе определяются неопределенности в теории управления, но здесь представляют интерес неопределенности в описании системы, которая фигурирует в задаче  $H_\infty$  оптимизации [100, 157, 228, 236, 240, 243].

В рамках этих теорий можно было, используя теорему о малом усилении, гарантированно обеспечивать робастность замкнутой системы.

Теориям  $H_\infty$  оптимального и  $H_\infty$  субоптимального управления посвящено огромное количество монографий, вышедших как за рубежом, так и в России. Из них стоит упомянуть книги [118, 121, 130, 205, 252], вышедшие на Западе. На русском языке выходили обзоры [51, 76, 77], которые сейчас стали библиографической редкостью.  $H_\infty$  оптимальное и  $H_\infty$  субоптимальное управление упомянуто в монографиях [8, 35, 52, 78].

#### *2.4. $H_2$ субоптимальные и робастные регуляторы*

Естественно предположить, что постановка задач синтеза  $H_2$  субоптимального управления должна была возникнуть в начале 60-х годов вслед за постановками и решениями  $H_2$  оптимальных задач [41, 148]. Однако исторически активное исследование субоптимальных и робастных  $H_2$  регуляторов началось значительно позже, в 90-х годах прошлого века. По мнению авторов, на это повлияли два фактора. Первый — появившиеся численные методы решения линейных матричных неравенств [101, 184] и задач выпуклой оптимизации [102], второй — развитие методологии и методики решения задач робастного и субоптимального  $H_\infty$  управления [101]. Поэтому раздел, посвященный  $H_2$  субоптимальным робастным регуляторам, помещен после раздела, посвященного  $H_\infty$  регуляторам.

Как указывается во введении к статье [170], “в практической задаче может оказаться, что оптимальный  $H_2$  регулятор для заданного конкретного объекта может не существовать. То есть данный объект не может удовлетворять необходимым и достаточным условиям для существования оптимального  $H_2$  управления” (для более детальной информации см., например, [195]). Тогда разработчик вынужден искать неоптимальный регулятор. При отсут-

ствии формального определения субоптимального регулятора любой регулятор, который обеспечивает внутреннюю устойчивость системы, замкнутой контуром, может быть истолкован как субоптимальный регулятор. Однако определение субоптимальности естественно дать через достижение  $H_2$  нормы (или любой указанной нормы) выбранной передаточной функции ограничения

$$\|T_{zw}\|_2 \leq \gamma,$$

где  $T_{zw}$  — матрица передаточных функций замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ ,  $\gamma$  — допустимая мера усиления возмущения.

В [195] дается краткое описание субоптимальной задачи  $H_2$  управления. Эта работа решает задачу синтеза регулятора, такого что  $H_2$  норма замкнутой системы сколь угодно близка к оптимальному значению. Теоретическое решение этой проблемы обеспечивается с помощью теории возмущений.

Перечислим результаты лишь некоторых работ, посвященных синтезу  $H_2$  управления. В [170] построено субоптимальное управление по состоянию и с использованием трех различных дифференциальных оценщиков (прогнозирования, оценивания текущего состояния и оценщика пониженного порядка) для дискретных стационарных систем. Динамический компенсатор для дискретных систем, обеспечивающий устойчивость и желаемое поведение системы, разработан в [154]. Вопросы робастного  $H_2$  оценивания для систем с ограниченными по норме и полиномическими неопределенностями были рассмотрены в [235]. Управление по выходу для систем с неопределенностями предложено в [197].

Предлагаемый читателю обзор ни в коей мере не может рассматриваться как изложение  $LQG$ ,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , а также связанных с этими задачами других теорий, поскольку имеет целью только изложить фактические работы, которые появились в этом направлении. Тем не менее сформулировать вышеупомянутые задачи следовало.

### 2.5. Редуция моделей в $H_2$ и $H_\infty$ теориях управления

Решение описанных выше задач сводится к нахождению оптимального (субоптимального) регулятора полного порядка, равного порядку модели объекта управления. В технических приложениях очень часто возникает необходимость построения регулятора пониженного (заданного) порядка меньшего, чем порядок модели. Стоит отметить, что задача синтеза такого регулятора является достаточно трудной, так как зачастую при ее решении нарушается выпуклость полученных условий относительно параметров регулятора. Методы синтеза регуляторов пониженного порядка разделяют на прямые и косвенные. При использовании прямых методов параметры регулятора пониженного порядка сразу вычисляются с помощью процедуры оптимизации или какой-либо другой процедуры. В косвенных подходах либо сначала строится регулятор полного порядка, который впоследствии редуцируется, либо сначала редуцируется модель объекта управления, для редуцированной модели строится регулятор полного порядка, а потом этот регулятор используется для управления исходной моделью. Остановимся подробнее на косвенных методах.

Редукция модели объекта управления является одной из классических задач теории управления, вопросам редукции посвящено большое количество литературы, например, [86, 125, 128, 134, 136, 137, 146, 169, 175, 177, 182, 234, 242, 251].

Существующие методы редукции можно сгруппировать по трем основным направлениям. К первому направлению относятся методы, основанные на отсечении или отбрасывании некоторых уравнений, описывающих систему [146, 175, 177, 182]. Работы [146, 182] посвящены понижению порядка с помощью отсечения  $LQG$  и  $H_\infty$  регуляторов соответственно. Редукция применяется к замкнутым оптимальным системам, а к диагональному виду приводятся решения алгебраических уравнений Риккати фильтрации и управления, соответствующие  $LQG$  и  $H_\infty$  задачам. Несмотря на то что методы в [146, 175, 177, 182] разработаны для непрерывных систем, они могут быть легко модифицированы на случай дискретных [252]. Следует отметить, что техника отсечения приводит к некоторой потере качества замкнутой системы и накладывает ограничения на пониженный порядок регулятора. Эти ограничения связаны с возможной неустойчивостью замкнутой регулятором пониженного порядка системы полного порядка.

Второе направление составляют методы оптимальной аппроксимации линейной системы моделью пониженного порядка с использованием различных критериев качества [86, 134, 136, 137, 169, 182, 234, 242]. В качестве критериев могут быть использованы, например, квадратичный критерий ошибки аппроксимации [134, 137, 234],  $H_2$  норма модели ошибки аппроксимации [136, 242],  $H_\infty$  норма [86] и другие критерии [169].

Наконец, третье направление включает в себя комбинированные методы редукции и оптимальной аппроксимации. К их числу относятся, например, оптимальная аппроксимация линейных стационарных систем по норме Ганкеля, предложенная в [125] и развитая для аппроксимации на определенных диапазонах частот в [134]. В [128] рассматриваются методы редукции  $H_\infty$  регуляторов, позволяющие сохранить неизменное значение  $H_\infty$  нормы замкнутой системы с регулятором пониженного порядка и обеспечивающие устойчивость этой системы. Эти методы основаны на усечении взаимно простых факторов передаточной функции регулятора с последующей аппроксимацией редуцированных факторов дробно-рациональными функциями.

### 3. Общая парадигма $H_2$ и $H_\infty$ теорий управления

Для линейных стационарных систем наиболее известными методами подавления влияния внешних возмущений являются  $H_2$  и  $H_\infty$  подходы, в которых критерием качества замкнутой системы является норма передаточной функции от возмущения к управляемому выходу. Стоит отметить, что  $H_\infty$  норма является индуцированной, в то время как  $H_2$  таковой не является. В  $H_2$  задаче возмущение всегда определенного вида — гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, в то время как в  $H_\infty$  оно наихудшее. В случае  $H_\infty$  управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия).

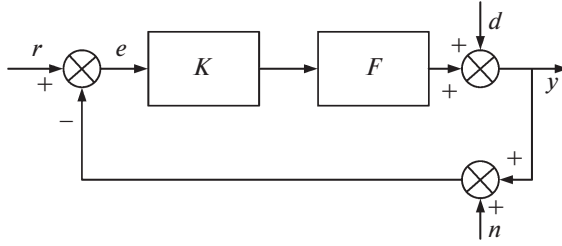


Рис. 3. Система  $F$ , замкнутая регулятором  $K$ .

Вследствие того, что  $H_\infty$  теория работает с широким классом возмущений, в рамках этой теории можно ставить и решать различные задачи управления. Рассмотрим их формулировки для замкнутой системы, изображенной на рис. 3. Здесь  $F$  — объект управления,  $K$  — закон управления, который требуется построить,  $r$  — задающее воздействие,  $y$  — выход системы,  $u$  — управление,  $e$  — сигнал ошибки между задающим воздействием и выходом системы,  $d$  — возмущение и  $n$  — шум измерений. Сигналы выхода, управления и ошибки генерируются следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= (I + FK)^{-1}FKr + (I + FK)^{-1}d - (I + FK)^{-1}GKn, \\ u &= K(I + FK)^{-1}r - K(I + FK)^{-1}d - K(I + FK)^{-1}n, \\ e &= (I + FK)^{-1}r - (I + FK)^{-1}d - (I + FK)^{-1}n. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что сигналы  $r$ ,  $d$ ,  $n$  обладают ограниченной энергией и были нормализованы, т.е. лежат в единичном шаре пространства  $\mathbb{L}_2$ . Однако точно не известна природа этих сигналов. При указанных допущениях можно синтезировать стабилизирующие регуляторы  $K$  для решения следующих задач с минимизацией  $H_\infty$  норм соответствующих систем:

- задача слежения,  $\|(I + FK)^{-1}FK\|_\infty$ ;
- ослабление влияния внешних возмущений,  $\|(I + FK)^{-1}\|_\infty$ ;
- подавление шумов,  $\|-(I + FK)^{-1}FK\|_\infty$ ;
- снижение энергии управления,  $\|K(I + FK)^{-1}\|_\infty$ .

Ниже будут использованы обозначение  $LQG/H_2$  или просто  $H_2$  для обозначения более общей, чем  $LQG$  задачи, —  $H_2$  задачи. О вложении  $LQG$  задачи в  $H_2$  задачу можно прочесть в разных работах, например в [99].

Общая парадигма задач  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  управления представлена на рис. 1.

Здесь  $F$  — объект управления,  $K$  — регулятор,  $W$  и  $Z$  — соответственно внешний вход и управляемый выход системы,  $Y$  и  $U$  — наблюдаемый выход и управление,  $T_{zw}$  — передаточная функция (матрица передаточных функций) замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ . В обеих задачах надо построить управление, которое минимизирует соответствующий задаче критерий качества.

В дальнейшем будут рассмотрены дискретные модели систем управления.

Общий взгляд на  $H_2$  и  $H_\infty$  задачи теории управления в свете представленной на рис. 1 парадигмы удобно изложить как различные интерпретации задачи понижения влияния внешних возмущений.

Стандартная задача  $H_2$  оптимизации состоит в нахождении регулятора  $K$  (см. рис. 1), который

- стабилизирует замкнутую систему;
- минимизирует  $H_2$  норму передаточной функции (матрицы передаточных функций)  $T_{zw}$  замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ , т.е.

$$(3.1) \quad \|T_{zw}\|_2 \rightarrow \min.$$

Стандартная задача  $H_\infty$  оптимизации состоит в нахождении регулятора  $K$  (см. рис. 1), который

- стабилизирует замкнутую систему;
- минимизирует  $H_\infty$  норму передаточной функции (матрицы передаточных функций)  $T_{zw}$  замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ , т.е.

$$(3.2) \quad \|T_{zw}\|_\infty = \sup_{|z|<1} \bar{\sigma}(T_{zw}(z)) \rightarrow \min.$$

Сформулированную задачу (как и всякую минимаксную задачу) можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступает разработчик системы управления, выбирающий регулятор  $K$ , а в качестве второго — природа (которая максимизирует влияние помехи на коэффициент усиления системы) [87].

Обычно рассматривают субоптимальную  $H_\infty$  задачу, которая отличается от сформулированной выше оптимальной требованием, чтобы

$$(3.3) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где  $\gamma \geq \gamma_{opt}$ . Если величина  $\gamma$  задана наперед и окажется, что  $\gamma \leq \gamma_{opt}$ , то задача субоптимального синтеза не будет иметь решения.

Прозрачна частотная интерпретация задач  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации для систем с одним входом и одним выходом.  $H_\infty$  регуляторы синтезируются, чтобы минимизировать максимальное значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, в то время как  $H_2$  управление минимизирует среднюю величину амплитуды по всем частотам.

Теории оптимального и субоптимального управления по критерию минимума  $H_\infty$  нормы замкнутой системы обеспечивали выполнение ограничений на понижение влияния внешних возмущений [188] в числе прочих целей. Замечательно, что теория  $H_\infty$  субоптимального управления базировалась на решении уравнений Риккати, содержащих некоторый параметр, и была очень похожа на теорию синтеза линейных регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества [117]. В случае, когда значение этого параметра стремилось к бесконечности, уравнения для синтеза  $H_\infty$  субоптимального регулятора стремились к уравнениям Риккати для  $LQG$  задачи. Однако  $H_\infty$  оптимальные регуляторы, являясь минимаксными, т.е. рассчитанными на наихудший случай входных возмущений, имеют свои естественные недостатки — для реализации минимума критерия качества величина управления порой становится очень большой и такие системы трудно реализуемы. Вдобавок системы с  $H_\infty$  критерием качества являются очень консервативными.

Субоптимальные  $H_\infty$  регуляторы, которые гарантируют то, что индуцированная норма оператора замкнутой системы ниже фиксированной границы  $\gamma$ , не единственны. Действительно, все регуляторы, достигающие заданной границы на норму передаточной функции замкнутой системы, могут быть выражены в терминах дробно-линейного преобразования [193] регулятора  $K_c$  (известного, как “центральный” [117]) и свободного параметра  $Q \in H_\infty$ ,  $\|Q\|_\infty < 1$ . Хотя каждый выбор параметра  $Q$  гарантирует ограничение на норму, интересно выяснить, когда существует такой параметр  $Q$ , при котором полученный регулятор будет минимизировать дополнительный функционал качества для замкнутой системы. Естественный выбор вспомогательного функционала —  $H_2$  норма передаточной функции замкнутой системы. Одним из недостатков  $H_\infty$  управления является тот факт, что качество замкнутой системы, обычно ассоциированное с  $H_2$  нормой передаточной функции замкнутой системы, приносится в жертву свойству робастности замкнутой системы, гарантированному  $H_\infty$  регуляторами. Обе концепции, рассматриваемые в отдельности ( $H_2$  и  $H_\infty$  управление), не являются удовлетворительными с инженерной точки зрения. Разработчики предпочитают компромиссы.

Эти компромиссы между достоинствами и недостатками  $LQG$  и  $H_\infty$  теорий можно разделить на два направления. Первое направление — минимизация  $H_2$  нормы замкнутой системы с ограничениями на  $H_\infty$  норму, второе — минимизация  $H_\infty$  нормы замкнутой системы с одновременной минимизацией верхней границы функционала качества, используемого в  $H_2$  задаче оптимального управления.

#### 4. Компромиссы между $LQG$ и $H_\infty$

Одной из первых работ, которая относится к первому из вышеперечисленных компромиссов, была работа Бернштейна и Хаддада [95], ставившая задачу построения  $LQG$  регулятора, обеспечившего вместе с тем и ограничения на  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы. Метод синтеза таких регуляторов приводил к решению трех связанных модифицированных уравнений Риккати. Связность этих уравнений иллюстрирует разрыв принципа разделения для  $LQG$  задачи с  $H_\infty$  ограничением. Важно отметить, что два из указанных трех уравнений Риккати, через решение которых строятся матрицы оптимальных регуляторов, являются уже известными, так как они идентичны уравнениям для решения  $LEQG$  задачи, исследованной в [93]. Тем самым прослеживается явная связь между  $LQG$  задачей с ограничением на  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы и  $LEQG$  задачей.

Опишем круг вопросов, относящихся ко второму направлению описанных выше компромиссов. Как хорошо известно,  $H_\infty$  субоптимальное управление не единственно и может быть неким способом параметризовано [126]. Однако если на множестве субоптимальных регуляторов поставить задачу максимизации так называемого функционала  $H_\infty$  энтропии

$$(4.1) \quad J(\gamma, F) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \ln \left| \det (I_m - \gamma^{-2} (F(j\omega))^* F(j\omega)) \right| d\omega,$$

здесь  $\gamma$  — величина, ограничивающая  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы  $F(s)$ , аналогичного введенному Аровым и Крейном функ-

ционала энтропии в задачах продолжения [4, 5], то получаемый регулятор (являющийся решением субоптимальной задачи и максимизирующий функционал  $H_\infty$  энтропии) оказывается единственным [178]. Этот регулятор является так называемым центральным регулятором. Более того, в [126] было показано, что задача синтеза регулятора, предполагающего минимизацию  $H_\infty$  энтропии, в определенном смысле эквивалентна задаче синтеза регулятора по критерию минимизации функционала чувствительности к риску (2.10). Тот же результат был получен другим методом в [231].

Известно [180], что  $H_\infty$  энтропия является некой мерой рассогласования между  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимальностью. Так,  $H_\infty$  энтропия является верхней гранью  $H_2$  нормы замкнутой системы, таким образом минимизация интеграла  $H_\infty$  энтропии приводит к достижению максимального значения в функционале качества в  $H_2(LQG)$  задаче. Заметим, что можно выбрать  $H_\infty$  субоптимальный регулятор в непрерывном времени, который приводит к неограниченной  $H_2$  норме замкнутой системы. Факт важности задачи минимизации  $H_\infty$  энтропийного функционала привлек большое внимание специалистов по  $H_2$  и  $H_\infty$  управлению, так как появилась надежда, что, минимизируя функционал  $H_\infty$ , разработчик в то же время минимизирует  $H_2$  критерий качества. Насколько известно авторам, этот факт еще не доказан, хотя и не опровергнут.

После появления работ [127, 178, 179] был опубликован целый ряд исследований, посвященных построению регуляторов, имеющих ограничение на  $H_\infty$  норму замкнутой системы и максимизирующих функционал  $H_\infty$  энтропии. Так, в [138] для дискретного времени в пространстве состояний получены формулы для регулятора, обеспечивающего ограниченность  $H_\infty$  нормы замкнутой системы параметром  $\gamma$  и минимизирующего функционал  $H_\infty$  энтропии. Решение получено переформулировкой задачи в непрерывном времени и применением билинейного преобразования, конформно переводящего единичный диск в левую полуплоскость. В [181] дано альтернативное [126] решение задачи минимизации функционала энтропии с требованием ограниченности  $H_\infty$  нормы и устойчивости замкнутой системы, которое получено сведением первоначальной задачи с помощью параметризации Юлы–Кучеры (см., например, [130]) к задаче слежения за моделью [121] и затем к так называемой задаче расстояния. В [140] задача поиска регулятора, минимизирующего энтропийный интеграл и при ограничении на  $H_\infty$  норму замкнутой системы сводится к решению двух вспомогательных задач (так называемых задач полной информации и оценки выхода) и далее применению принципа разделения. В [239] рассматривалась задача синтеза статического регулятора по выходу, минимизирующего функционал  $H_\infty$  энтропии и обеспечивающего заданное ограничение на  $H_\infty$  норму замкнутой системы. Решение задачи сводится к решению связанных уравнений Риккати и Ляпунова. Подход близок к подходу работы [95].

В [122] для непрерывных сингулярно-возмущенных систем рассматривалось статическое робастное управление по выходу, минимизирующее функционал  $H_\infty$  энтропии замкнутой системы. Требовалось, чтобы регулятор обеспечивал ограничения на  $H_\infty$  норму замкнутой системы и минимизировал  $H_\infty$  энтропию замкнутой системы для достаточно малых значений син-

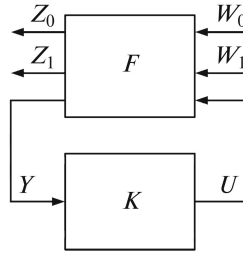


Рис. 4. Смешанная задача  $H_2/H_\infty$  управления.

гулярного возмущения  $\varepsilon$ . Оптимальный коэффициент усиления регулятора синтезируется на базе обобщенных уравнений Риккати и Ляпунова с симметричными  $2 \times 2$  блоками, которые связаны между собой. Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то оптимальный регулятор — один из тех, которые минимизируют  $H_\infty$  энтропию замкнутой непрерывной системы.

Понятие энтропии, использовавшееся в  $H_\infty$  оптимизации, для дискретных систем было распространено на нестационарный случай [141]. Это обобщение не тривиально, так как  $H_\infty$  энтропия для стационарной системы определяется в терминах передаточной функции замкнутой системы, которых не существует для нестационарных систем. Энтропия для нестационарных дискретных систем была определена в терминах теории операторов с привлечением фундаментальных теорем о факторизациях. В [186] была решена задача построения управления, минимизирующего энтропийный функционал для нестационарных дискретных систем, а в [187] получена взаимосвязь между задачей минимизации энтропии для нестационарных систем и задачей минимизации функции чувствительности к риску для таких систем.

Уже упомянутая работа Бернштейна и Хаддада [95], ставшая первой попыткой найти компромисс между робастной устойчивостью (хорошо известный факт, что величина  $H_\infty$  нормы отвечает за робастную устойчивость замкнутой системы — теорема о малых приращениях) и подавлением случайного возмущения в виде белого шума в соответствии с квадратичным критерием качества (величиной  $H_2$  нормы), породила целое направление в теории робастного управления, которое называется смешанным  $H_2/H_\infty$  управлением. Как отмечалось в книге [107], такие регуляторы представляют собой желаемый компромисс между  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями управления.

Изложим кратко парадигму смешанного  $H_2/H_\infty$  управления, следуя [155] (см. рис. 4).

Здесь, как и на предыдущем рисунке,  $F$  — объект управления,  $K$  — регулятор,  $T_{z_i w_i}$ ,  $i = 0, 1$  — передаточная матрица замкнутой системы от  $W_i$  к  $Z_i$ . Задача смешанного  $H_2/H_\infty$  управления — найти внутренне стабилизирующий регулятор  $K$ , минимизирующий  $\|T_{z_0 w_0}\|_2$  и обеспечивающий  $\|T_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ .

Задача управления, рассмотренная в [95], получается из задачи смешанного  $H_2/H_\infty$  управления при  $W_0 = W_1 = W$ . Вместо минимизации  $\|T_{z_0 w}\|_2$  в [95] решается задача синтеза LQG регулятора с ограничением на  $H_\infty$  норму замкнутой системы, которую называют смешанным  $H_2/H_\infty$  критерием качества.



В [179] показано, что в случае  $W_0 = W_1 = W$  и  $Z_0 = Z_1 = Z$  задача в [95] эквивалентна задаче минимизации энтропии [127].

Дальнейшее развитие теории смешанного  $H_2/H_\infty$  управления нашла в работах [119, 253]. В предисловиях к этим работам говорится, что одной из мотивировок написания работ является желание получить общую постановку для задач  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации аналогично тому, как решения этих задач проводятся по близкой схеме (см. [117]). Забегая вперед, отметим, что в рамках анизотропийной теории управления, описанной ниже, общая постановка задач  $H_2(LQG)$  и  $H_\infty$  оптимизации была получена. Задачи, поставленные и решенные в [253] и [119], являются в определенной степени дуальными результатами работы [95]. В [176] было получено решение стохастической смешанной  $H_2/H_\infty$  задачи для дискретного случая.

Недавно была опубликована работа [30], в которой предложен один из подходов к созданию общей теории  $H_2/H_\infty$  управления для систем с детерминированными входами. В работе вводится характеристика оператора из пространств входов в пространство выходов, названная  $H_\infty/\gamma_0$  нормой. Эта новая норма существенным образом зависит от входящей в ее определение матрицы  $R$ . В крайних случаях при отсутствии одного из входов введенная норма превращается в одну из оставшихся норм. Подход напоминает ранее предложенный подход с введением коэффициента усиления в виде суммы взвешенных норм  $\lambda \|\cdot\|_2 + (1 - \lambda) \|\cdot\|_\infty$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . В указанной работе также синтезирован оптимальный закон управления по состоянию, минимизирующий введенную  $H_\infty/\gamma_0$  норму.

Необходимо отметить работы [85, 185], в которых показана связь между задачами минимизации  $H_\infty$  энтропии и смешанным  $H_2/H_\infty$  управлением для стационарных и нестационарных систем управления соответственно. Авторам бы не хотелось в этом обзоре углубляться в строгое определение смешанной задачи  $H_2/H_\infty$  управления в нестационарном случае, читатель может найти необходимые сведения в процитированных выше работах.

## 5. Анизотропийная теория управления — начальный период

В этом разделе будут кратко приведены некоторые понятия теории информации, необходимые для изложения основ анизотропийной теории управления; введены основные понятия анизотропийной теории управления: понятия анизотропии вектора, средней анизотропии последовательности, анизотропийной нормы системы; сформулирована задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора и описано ее решение.

### 5.1. Необходимые (некоторые) сведения из теории информации

Пусть  $X$  будет дискретной случайной величиной с алфавитом  $\mathcal{X}$ , и пусть задана функция вероятностной меры  $p(x) = \text{Pr}\{X = x\}$ ,  $x \in \mathcal{X}$ .

Энтропия  $H(X)$  случайной переменной  $X$  определяется как

$$(5.1) \quad H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = -\mathbf{E}(\log p(x)).$$

Энтропия представляет собой характеристику одной случайной величины. Пусть теперь на одном множестве заданы два вероятностных распределения  $p(x)$  и  $q(x)$ .

*Относительная энтропия* или *расстояние Кульбака–Лейблера между двумя распределениями*  $p(x)$  и  $q(x)$  определяется как

$$(5.2) \quad D(p \parallel q) = \mathbf{E}_p \left( \log \frac{p(x)}{q(x)} \right),$$

где  $\mathbf{E}_p(\Phi)$  — математическое ожидание функции  $\Phi$ , определенное по правилу

$$\mathbf{E}_p(\Phi) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \Phi(x).$$

### Свойства относительной энтропии

- Пусть  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $x \in \mathcal{X}$  будут два распределения вероятностей (две меры). Тогда

$$D(p \parallel q) \geq 0.$$

Равенство нулю выполняется, если  $p(x) = q(x)$  для всех  $x$ .

- В общем случае

$$D(p \parallel q) \neq D(q \parallel p).$$

Рассмотрим две случайных величины  $X$  и  $Y$  с совместной функцией вероятностей  $p(x, y)$  и функциями вероятностей  $p(x)$  и  $p(y)$ .

*Взаимной информацией*  $I(X; Y)$  называется относительная энтропия между совместным распределением и произведением распределений  $p(x)p(y)$ , т.е.

$$(5.3) \quad I(X; Y) = D(p(x, y) \parallel p(x)p(y)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \left( \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right).$$

Определим важную для дальнейшего изложения дифференциальную энтропию случайной величины. Пусть  $X$  — непрерывная  $m$ -мерная случайная величина,  $f(x)$  — плотность распределения вероятностей для  $X$ . Множество, где  $f(x) > 0$ , называется опорным множеством на  $X$ .

*Дифференциальная энтропия*  $h(X)$  для  $X$  с плотностью распределения  $f(X)$  определяется как

$$h(X) = -\mathbf{E}(\log f(X)) = - \int_S f(X) \log f(X) dX,$$

где  $S$  — опорное множество случайной переменной.

По аналогии с дискретным случаем определим относительную энтропию.

Относительная энтропия или расстояние Кульбака–Лейблера  $D(f \parallel g)$  между плотностями  $f(x)$  и  $g(x)$  определяется как

$$(5.4) \quad D(f \parallel g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \log \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) dx_1 \cdots dx_m.$$

### Свойства относительной энтропии

- 1)  $D(f \parallel g)$  конечна, если опорное множество функции  $f(x)$  содержится в опорном множестве  $g(x)$ .
- 2)  $D(f \parallel g) \geq 0$ , причем равенство достигается, если  $f = g$ .
- 3) Справедливо соотношение  $0 \log \frac{0}{0} = 0$ .

Для непрерывных случайных величин определим взаимную информацию. Пусть  $X$  и  $Y$  — две случайные  $m$ -мерные величины с совместной функцией распределения плотности вероятностей  $f(x, y)$  и функциями плотностей вероятностей  $f(x)$  и  $f(y)$ .

Взаимная информация  $I(X; Y)$  определяется как

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= D(f(x, y) \parallel f(x)f(y)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(x, y) \log \left( \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right) dx_1 \cdots dx_m dy_1 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

Понятие относительной энтропии играет большую роль не только в теории информации (сжатие данных), но и в различных других научных дисциплинах, таких как статистическая физика, теория вероятностей, финансовая математика [46]. В следующем разделе покажем, какую роль это понятие играет в теории управления. Более подробно о введенных определениях и их свойствах можно прочесть в [59, 108, 129].

Пожалуй, первой работой, которая строго использовала теоретико-информационные понятия в постановках задач управления, была работа 1988 г. [198]. В ней предлагалось искать оптимальное управление из условия максимизации дифференциальной энтропии, связанной с функцией распределения вероятностей, построенной на множестве управлений. В этой работе было показано, что оптимизация среднего функции потерь эквивалентна минимизации энтропии управления при условии наилучшей функции плотности энтропии.

В [151] в роли критерия качества для построения управления была предложена относительная энтропия. Это направление в теории управления развивается достаточно успешно [152, 153]. Заметим, что концепция анизотропийного управления, также основанная на понятии относительной энтропии (расстоянии Кульбака–Лейблера), была предложена И.Г. Владимировым двумя годами ранее в [201].

### 5.2. Ключевые определения анизотропийной теории

Понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии последовательности случайных векторов, а также анизотропийной нормы линей-

ной стационарной системы впервые появились в 1994 г. в [201]. *Анизотропия случайного вектора* определяется как минимальная относительная энтропия (расстояние Кульбака–Лейблера) между плотностью распределения случайного вектора и плотностью распределения гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей [24]. Средняя анизотропия бесконечной последовательности случайных векторов определяется через анизотропию элемента последовательности аналогично тому, как определяется энтропия на степень свободы (термин заимствован из [60]). *Энтропия на степень свободы* есть предел отношения энтропии  $n$  случайных величин к числу  $n$  при стремлении числа  $n$  к бесконечности. Энтропия на степень свободы также называется *энтропией стационарного источника на сообщение* [31]. Аналогом этого понятия в английском языке служит термин «entropy rate» [108]. *Средняя анизотропия* определяется как предел отношения анизотропии вектора, составленного из  $n$  случайных векторов, к числу  $n$  при стремлении числа  $n$  к бесконечности.

### Определение анизотропии случайного вектора.

Напомним, что  $\mathfrak{L}_2^m$  — это класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных случайных распределенных абсолютно непрерывно векторов с конечным вторым моментом.

Для любого  $\lambda > 0$  обозначим через  $p_{m,\lambda}$  функцию плотности распределения вероятностей на  $\mathbb{R}^m$  гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$

$$(5.5) \quad p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Для любого  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  с функцией плотности распределения вероятностей  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  его относительная энтропия относительно (5.5) принимает вид [49]

$$(5.6) \quad D(f \| p_{m,\lambda}) = \mathbf{E} \ln \frac{f(w)}{p_{m,\lambda}(x)} = -h(w) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{\mathbf{E}|w|^2}{2\lambda},$$

где

$$(5.7) \quad h(w) = -\mathbf{E} \ln f(w) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$$

— дифференциальная энтропия случайного вектора  $w$ .

*Определение 1.* *Анизотропия  $\mathbf{A}(w)$  случайного вектора  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  определяется как минимальное информационное уклонение его распределения от гауссовских распределений на  $\mathbb{R}^m$  с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами*

$$(5.8) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f \| p_{m,\lambda}).$$

Непосредственное вычисление показывает, что минимум в (5.6) по всевозможным  $\lambda > 0$  достигается при  $\lambda = \mathbf{E}|w|^2/m$  и, следовательно,

$$(5.9) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}|w|^2 \right) - h(w).$$

### Свойства анизотропии

Пусть  $\mathbb{G}^m(\Sigma)$  — класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных гауссовских случайных векторов  $w$  с  $\mathbf{E}w = 0$  и  $\mathbf{cov}(w) = \Sigma$ ,  $\det \Sigma \neq 0$ , соответствующая функция плотности распределения вероятности

$$p(w) = (2\pi)^{-m/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\|w\|_{\Sigma^{-1}}^2\right),$$

$\|x\|_Q = \sqrt{x^\top Q x}$  — (полу-) норма вектора  $x$ , индуцированная положительно (полу-) определенной симметричной матрицей  $Q > 0$ . Тогда

(а) для любой положительно определенной матрицы  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$(5.10) \quad \min_w \left\{ \mathbf{A}(w) : w \in \mathfrak{L}_2^m, \mathbf{E}(ww^\top) = \Sigma \right\} = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma},$$

причем минимум достигается лишь на  $w \in \mathbb{G}^m(\Sigma)$ ;

(б) для любого  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  имеем  $\mathbf{A}(w) \geq 0$ , причем  $\mathbf{A}(w) = 0$  тогда и только тогда, когда  $w \in \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ ;

(в) анизотропия  $\mathbf{A}(w)$  инвариантна относительно вращения и центральной гомотетии вектора  $w$ , т.е.  $\mathbf{A}(\lambda U w) = \mathbf{A}(w)$  для любого скаляра  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и любой ортогональной матрицы  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

### Средняя анизотропия гауссовского сигнала

Пусть  $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — дискретный  $m$ -мерный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей:

$$\mathbf{E} v_k = 0, \quad \mathbf{E} (v_k v_k^\top) = I_m, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Рассмотрим  $m$ -мерную стационарную гауссовскую последовательность

$$W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = G \otimes V,$$

получаемую из белого шума  $V$  посредством формирующего фильтра  $G$  с импульсной переходной характеристикой  $g_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $k \geq 0$ :

$$w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k}, \quad -\infty < j < +\infty.$$

Такой фильтр отождествляется со своей передаточной функцией

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k,$$

которая предполагается лежащей в пространстве Харди  $H_2^{m \times m}$ .

Последовательность  $W$  имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность

$$(5.11) \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{G}(\omega) \left( \widehat{G}(\omega) \right)^*, \quad \omega \in \Omega = [-\pi; \pi].$$

Выделим из последовательности  $W$  подпоследовательность размерности  $N \times m$

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

каждый вектор  $w_i$  принадлежит  $\mathbb{R}^m$  при  $i = \overline{0, (N-1)}$ .

*Определение 2.* Средняя анизотропия последовательности  $W$  определяется следующим образом [20]:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}.$$

В [20] также доказано, что средняя анизотропия последовательности  $W = G \otimes V$  может быть определена как

$$(5.12) \quad \overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \ln \det \left( \frac{m}{\|G\|_2^2} \widehat{G}(\omega) \left( \widehat{G}(\omega) \right)^* \right) d\omega.$$

Функционал (5.12) принимает неотрицательные конечные значения, как только формирующий фильтр  $G \in H_2^{m \times m}$  имеет максимальный (точнее, полный строчный) ранг, т.е.

$$\text{rank } \widehat{G}(\omega) = m \quad \text{для почти всех } \omega \in \Omega.$$

Если же фильтр  $G$  не максимального ранга, то  $\overline{\mathbf{A}}(G) = +\infty$ . Отметим,  $\overline{\mathbf{A}}(G) = 0$  в том и только в том случае, если формирующий фильтр  $G$  является с точностью до ненулевого постоянного множителя системой полного пропускания, т.е. если последовательность  $W$  — гауссовский белый шум со скалярной ковариационной матрицей.

Как видно, средняя анизотропия (5.12) является характеристикой вероятностного распределения гауссовской последовательности  $W = G \otimes V$ , а не ее индивидуальных траекторий.

Заметим также, что функционал средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(G)$  инвариантен относительно преобразования  $G \mapsto \alpha U_1 G U_2$  с произвольными ненулевым постоянным множителем  $\alpha \in \mathbb{R}$  и системами полного пропускания  $U_1, U_2 \in H_2^{m \times m}$  (для которых матрицы  $\widehat{U}_1(\omega), \widehat{U}_2(\omega)$  унитарны при почти всех  $\omega \in \Omega$ ). В частности, это означает, что  $\overline{\mathbf{A}}(G)$  полностью определяется функциями собственных значений спектральной плотности (5.11), которые с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2\pi}$  совпадают с квадратами функций сингулярных значений  $\widehat{G}$ .

Имеются глубокие связи функционала средней анизотропии (5.12) с теоретико-информационным подходом к количественному описанию хаоса, основанным на колмогоровской  $\epsilon$ -энтропии вероятностных распределений [26, 65], с одной стороны, и с принципом изотропности конечномерного евклидова

пространства — с другой. Читатель, интересующийся подробностями этих связей, отсылается к работам И.Г. Владимирова [20, 56]. Упомянутые связи позволяют интерпретировать среднюю анизотропию (5.12) различными (но генетически едиными) способами.

Здесь заметим лишь, что (5.12) можно рассматривать как количественный показатель трудности генерации гауссовских последовательностей  $W = G \otimes V$  в природных условиях.

С использованием многомерной версии формулы Колмогорова–Сеге [27] в [113] получена формула для вычисления средней анизотропии случайной последовательности, сгенерированной с помощью формирующего фильтра из гауссовского белого шума. Фильтр задается своим  $(A, B, C, D)$  представлением. Для вычисления средней анизотропии необходимо получить решения алгебраического уравнения Риккати и уравнения Ляпунова, в которые входят матрицы  $A, B, C, D$  формирующего фильтра.

На базе результатов, полученных в [69], в [207] вычисление средней анизотропии сведено к решению линейных матричных неравенств. Задача изменения средней анизотропии в различных соединениях линейных фильтров была рассмотрена в [163].

В рамках теории анизотропного управления решена и обратная задача: имея заданный уровень средней анизотропии (цветности) на выходе формирующего фильтра построить характеристики фильтра. Алгоритмы решения обратной задачи изложены в [38, 166].

### **Анизотропная норма системы**

Рассмотрим устойчивую линейную дискретную систему  $F$ , заданную в пространстве состояний в следующем виде:

$$(5.13) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bw_k,$$

$$(5.14) \quad y_k = Cx_k + Dw_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы,  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — стационарная гауссовская последовательность  $m$ -мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$  ( $a \geq 0$ ) и нулевым средним,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  — выход системы.

Обозначим через  $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  выходную последовательность системы (5.13)–(5.14). Определим мощностную норму последовательности  $Y$  формулой

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|y_k|^2}.$$

Предполагая, что  $\|Y\|_{\mathcal{P}}$  и  $\|W\|_{\mathcal{P}}$  конечные, определим для заданной системы  $F$  с входным сигналом  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  *среднеквадратичный коэффициент усиления (СККУ)* в виде

$$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

*Определение 3.* Для заданной величины  $a \geq 0$  анизотропийной нормой системы  $F$  называют

$$(5.15) \quad \|F\|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(F, W).$$

Таким образом, анизотропийная норма системы  $\|F\|_a$  задает стохастический коэффициент усиления системой  $F$  входного сигнала  $W$ .

### Свойства анизотропийной нормы системы

Для  $F \in H_\infty^{p \times m}$  ее  $a$ -анизотропийная норма является неубывающей функцией параметра  $a \geq 0$ , удовлетворяющей неравенствам

$$(5.16) \quad \|F\|_2 / \sqrt{m} = \|F\|_0 \leq \|F\|_a \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty.$$

Вычисление нормы  $\|F\|_a$  для  $a > 0$  представляет интерес, лишь если

$$(5.17) \quad \|F\|_2 < \sqrt{m} \|F\|_\infty.$$

$\|F\|_2 = \sqrt{m} \|F\|_\infty$  тогда и только тогда, когда  $F^\top F = \lambda I_m$  для некоторого  $\lambda \geq 0$ . В частности, (5.17) выполнено, если  $F \neq 0$  и  $p < m$ .

Анизотропийная норма не обладает круговым свойством (2.11), однако в [113] доказано следующее свойство псевдомультпликативности анизотропийной нормы:

для любого  $a \geq 0$  и любых систем  $F \in H_\infty^{p \times m}$  и  $G \in H_\infty^{m \times m}$

$$(5.18) \quad \|FG\|_a \leq \|F\|_b \|G\|_a,$$

где

$$(5.19) \quad b = a + \overline{\mathbf{A}}(G) + m \ln(\sqrt{m} \|G\|_a / \|G\|_2).$$

В [22] представлена асимптотика поведения анизотропийной нормы при уровне средней анизотропии  $a$ , стремящемся к нулю и к бесконечности (при стремлении анизотропийной нормы к  $H_2$  и  $H_\infty$  норме соответственно).

В [113, 224] представлены формулы и приведен численный алгоритм для вычисления анизотропийной нормы в частотной области и в пространстве состояний. Для вычисления анизотропийной нормы системы  $F$  в пространстве состояний необходимо решить матричные алгебраические уравнения Риккати и Ляпунова, а также алгебраическое уравнение специального вида. В первые два уравнения входят параметры матриц  $(A, B, C, D)$  представления системы, во второе входят матрицы, являющиеся решениями вышеназванных алгебраических уравнений Риккати и Ляпунова, а также параметр уровня средней анизотропии сигнала на входе системы  $F$ .

Численный алгоритм для вычисления анизотропийной нормы системы основан на методе ньютоновских итераций и имеет достаточно высокую вычислительную сложность. Для преодоления этого недостатка в более поздних работах [70, 207] предложены новые способы оценки анизотропийной нормы методами выпуклой оптимизации. Результат, сформулированный в [70], позволяет оценивать анизотропийную норму системы с применением современных вычислительных пакетов, решающих задачи полуопределенного программирования.



### 5.3. Оптимальная анизотропийная задача и ее решение

В [21] и [201] для стационарных систем была поставлена задача синтеза регулятора, минимизирующего анизотропийную норму замкнутой системы, которая была решена в [225].

Пусть задана система  $F$ , изображенная на рис. 5 и имеющая описание в пространстве состояний (2.13). Внешнее возмущение является последовательностью случайных векторов с уровнем средней анизотропии  $a$ .

Сформулируем анизотропийную задачу оптимизации.

**Задача 1.** Для заданных системы (2.13) и уровня  $a \geq 0$  средней анизотропии входного возмущения  $W$  найти регулятор  $K$ , минимизирующий  $a$ -анизотропийную норму передаточной функции замкнутой системы (2.16):

$$(5.20) \quad \|\mathcal{L}(F, K)\|_a \equiv \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathbb{G}_a \right\} \rightarrow \inf_{K \in \mathbb{K}}.$$

Здесь  $\mathbb{G}_a$  обозначает множество фильтров, на выходе которых сигнал с уровнем средней анизотропии, меньшим или равным  $a$ ,  $\mathbb{K}$  — множество стабилизирующих регуляторов.

По аналогии с задачами  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации (3.1) и (3.2) задача анизотропийной оптимизации может быть переформулирована как

$$\|T_{zw}\|_a \rightarrow \min_K.$$

Сформулированную проблему (как и задачу  $H_\infty$  оптимизации) можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступает управление (регулятор  $K$ ), а в качестве второго — формирующий фильтр  $G$ , генерирующий входное возмущение  $W$ . Рассмотрим множества

$$\mathbb{K}_a^\diamond(G) \doteq \text{Arg} \min_{K \in \mathbb{K}(F)} \|\mathcal{L}(F, K)\|_2, \quad G \in \mathbb{G}_a,$$

$$\mathbb{G}_a^\diamond(K) \doteq \text{Arg} \max_{G \in \mathbb{G}_a} \frac{\|\mathcal{L}(F, K)\|_2}{\|G\|_2}, \quad K \in \mathbb{K}(F).$$

План решения сформулированной задачи состоит в следующем. Если для системы  $F$  и заданного уровня средней анизотропии  $a$  научиться строить «наихудший» фильтр  $G \in \mathbb{G}_a^\diamond(K)$ , который максимизирует  $\frac{\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2}{\|G\|_2}$ , то задача

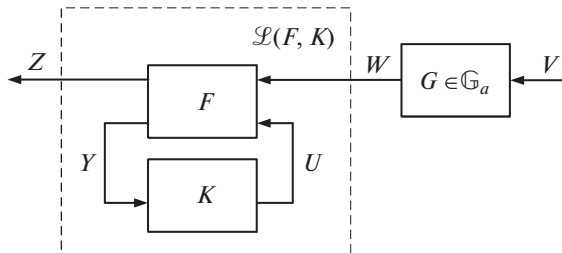


Рис. 5. Иллюстрация задачи стохастической  $H_\infty$ -оптимизации.

сводится к задаче построения оптимального регулятора  $K$ , который при этом наихудшем фильтре минимизирует  $\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2$ .

Алгоритм синтеза приводит к необходимости решения системы уравнений, состоящей из трех алгебраических уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и алгебраического уравнения специального вида. Одно алгебраическое матричное уравнение Риккати, матричное уравнение Ляпунова и уравнение специального вида необходимы для построения наихудшего фильтра, оставшиеся два алгебраических уравнения Риккати выполняют ту же роль, что и два алгебраических уравнения в  $LQG/H_2$  или  $H_\infty$  теориях. Одно из уравнений необходимо для решения задачи построения оценки вектора состояния системы  $\hat{x}$ , а второе — собственно для построения управления. Причем все эти уравнения являются связанными. В [172] описан метод гомотопий для решения связанных уравнений Риккати.

В [112] разработан метод гомотопий для решения системы уравнений, необходимых для синтеза анизотропийного регулятора. Описание применения метода гомотопий в анизотропийной теории управления, в частности, использование метода гомотопий с ньютоновскими итерациями изложено в [23].

Как было установлено выше, и  $H_\infty$  оптимальная задача, и анизотропийная оптимальная задача являются игровыми. В силу неравенства (5.16) анизотропийный регулятор занимает промежуточное место между  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  регуляторами. Это наводит на мысль, что и  $LQG$  регулятор является минимаксным. Это действительно так, потому что гауссовский белый шум (сигнал на входе системы в  $LQG$  задаче) является наихудшим возмущением по критерию максимума энтропии входного сигнала (см. [108]).

#### 5.4. Некоторые свойства анизотропийных регуляторов

Как и следовало ожидать, системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые  $H_2$  регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые  $H_\infty$  регуляторами. В [23, 35, 159] рассматривались сравнения возможностей  $H_2$ ,  $H_\infty$  и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа “сдвига ветра” при посадке самолета. Анизотропийные регуляторы показали значительные преимущества по сравнению с  $H_\infty$  регуляторами в вопросах энергозатрат на управление. Одновременно с этим анизотропийные регуляторы оказались более робастными относительно  $H_2$  регуляторов.

Напомним, что  $LQG/H_2$  оптимальная задача имеет единственное решение, решение  $H_\infty$  оптимальной задачи не единственно. Решение оптимальной анизотропийной задачи также является единственным.

Отметим очень важное свойство анизотропийных регуляторов. По аналогии с рассмотренной выше задачей построения  $H_\infty$  регуляторов, минимизирующих энтропийный функционал (4.1), между энтропийным функционалом и анизотропией также существует связь. В [45] было установлено, как можно трактовать энтропийный функционал с точки зрения теоретико-информационного подхода. В этой работе было показано, что анизотропийный регулятор также минимизирует  $H_\infty$  энтропию замкнутой системы для некоторого фиксированного значения параметра  $\gamma$ .

Выше были рассмотрены хорошо известные из литературы принципы разделения в  $LQG/H_2$  теории оптимального управления (см., например, [47, 48]) и в  $H_\infty$  теории субоптимального управления (см., например, [117, 130]). Замечательно то, что и в анизотропийной теории тоже можно сформулировать принцип разделения. Этот принцип в анизотропийной теории может выглядеть так: “Оптимальный анизотропийный регулятор полного порядка является оптимальным оценщиком оптимального закона управления в задаче с полной информацией о векторе состояния системы для случая наилучшего входа.”

Заметим, что принцип разделения не означает независимости уравнений Риккати. Он скорее близок к принципу разделения в задаче  $H_\infty$  субоптимального управления. Здесь задача синтеза оценщика и задача синтеза статического регулятора в виде обратной связи не могут быть решены независимо друг от друга. Более подробно об этом написано в [225].

## 6. Развитие анизотропийной теории

В данном разделе речь пойдет о развитии робастной анизотропийной теории управления, взявшей за основу определения и концепции предыдущего раздела, с начала 2000-х годов. Будут приведены постановки и решения следующих задач: робастная устойчивость, синтез анизотропийных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями, построение субоптимального управления методами выпуклой оптимизации, построение анизотропийной теории анализа и синтеза для дескрипторных систем, систем с нецентрированными входными сигналами и нестационарных систем, решение задач анизотропийной фильтрации.

### 6.1. Робастная устойчивость в анизотропийной теории

Как было указано в свойствах анизотропийной нормы, она не обладает круговым свойством (2.11). Однако существует аналог этого свойства. На базе соотношений (5.18), (5.19) в [36, 37] проведено исследование робастной устойчивости в анизотропийной теории.

Рассмотрим оператор  $F$ , задающий вход-выходные соотношения в виде

$$(6.1) \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $w_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^p$  — входы системы,  $z_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^q$  — выходы системы, причем  $z_1$  не обязательно является измеряемым.

Система (6.1) называется *внутренне устойчивой*, если матричная передаточная функция от входа  $(w_1, w_2)^T \in \mathbb{R}^{m+p}$  к выходу  $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^{m+q}$  асимптотически устойчива [130], что эквивалентно тому, что передаточные функции  $F_{z_1 w_1}$ ,  $F_{z_1 w_2}$ ,  $F_{z_2 w_1}$ ,  $F_{z_2 w_2}$  аналитичны вне единичного круга.  $F_{z_i w_j}$  — передаточная функция от входа  $w_i$  к выходу  $z_j$ ,  $i, j = 1, 2$ .

**Задача 2.** Для заданного номинального объекта  $F$  найти диапазон изменения неопределенности его параметров  $\Delta$ , количественно измеряемый анизо-

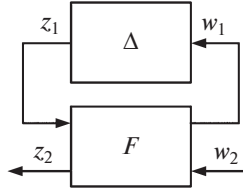


Рис. 6.  $F$ - $\Delta$  конфигурация.

тропийной нормой, при котором система с неопределенностью будет являться внутренне устойчивой.

Последнее будет означать *робастность* объекта  $F$  по отношению к неопределенности  $\Delta$ .

Введем класс допустимых неопределенностей

$$D_a(\epsilon) = \{ \Delta : \Delta \in RH_\infty^{m \times m} : \|\Delta\|_a < \epsilon \}.$$

Далее всюду  $\Delta(j\omega)$  означает предел

$$\Delta(j\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \Delta(r e^{j\omega}), \quad \omega \in [-\pi; \pi].$$

Будем говорить, что неопределенность  $\Delta$  является *допустимой для объекта  $F$* , если  $\Delta \in RH_\infty^{m \times m}$  и система  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  вида (2.17) внутренне устойчива.

*Теорема 1.* Рассмотрим систему  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  представленную на рис. 6, где  $\Delta : \mathfrak{L}_2^m \rightarrow \mathfrak{L}_2^m$  и  $F : \mathfrak{L}_2^{m+p} \rightarrow \mathfrak{L}_2^{m+q}$  — каузальные линейные системы и вход-выходные соотношения — задаются посредством (6.1).

Пусть

- $F$  устойчива и

$$(6.2) \quad \|F_{11}\|_c < \epsilon^{-1},$$

где  $c = a + m \ln \frac{\epsilon}{\text{ess inf}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \underline{\sigma}(\Delta(j\omega))}$ ,  $\underline{\sigma}(\Delta) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Delta^* \Delta)}$  — минимальное сингулярное значение оператора  $\Delta$ ,  $\epsilon$  — некоторая положительная константа.

- Уровень анизотропии  $a$  определяется по формуле

$$(6.3) \quad a = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma} - m \ln \frac{\epsilon}{\text{ess sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \underline{\sigma}(\Delta(j\omega))},$$

где  $\Sigma = (I_m - qF_{11}^* F_{11})^{-1}$ , а параметр  $q \in [0, \|F_{11}\|_\infty^{-2})$  является решением неравенства

$$(6.4) \quad \text{tr} \left[ (I_m - \epsilon^2 F_{11}^* F_{11}) (I_m - qF_{11}^* F_{11})^{-1} \right] \leq 0.$$

Тогда для всех  $\Delta \in D_a(\epsilon)$  замкнутая система  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  внутренне устойчива.

Теорема 1 дает достаточные условия робастности объектов, неопределенность которых ограничена по анизотропийной норме. Данная теорема позволяет ослабить консервативное условие  $\|F_{11}\|_\infty < 1/\epsilon$  теоремы о малом усилении, заменив его на условие (6.2). Уровень анизотропии  $a$  в данном случае показывает, насколько можно понизить требования теоремы о малом усилении, не потеряв при этом робастную устойчивость.

Можно указать, как находить граничный уровень анизотропии  $a$ , обеспечивающий внутреннюю устойчивость при выполнении (6.2), по заданной реализации номинального объекта. Нахождение подходящего уровня анизотропии сводится к задаче оптимизации  $\max q$  при нелинейных ограничениях. Подробно об этом можно прочесть в [37].

На базе предыдущей теоремы можно для заданной системы с различными типами неопределенности (аддитивной, мультипликативной, неопределенности в виде взаимно простых факторов) [130] находить возможный разброс параметров, точное значение которых неизвестно. Приведем аналог теоремы Гловера–МакФарлейна [174] о робастной стабилизируемости [51] системы с аддитивной неопределенностью.

*Теорема 2. Рассмотрим систему  $\mathcal{L}(F + \Delta, K)$ , с номинальным объектом  $F$ , аддитивной неопределенностью  $\Delta$  и регулятором  $K$ , где  $\Delta: l_2 \rightarrow l_2$  — аддитивные возмущения,  $F: l_2 \rightarrow l_2$  — номинальный объект,  $K: l_2 \rightarrow l_2$  — регулятор и  $\Delta, F, K$  — линейные каузальные системы. Пусть также относительно неопределенности известно ее максимальное сингулярное число обусловленности  $\psi = \operatorname{ess\,sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \operatorname{cond}(\Delta^* \Delta)$ . Регулятор  $K$  стабилизирует  $F + \Delta$ , если:*

1) регулятор  $K$  стабилизирует номинальный объект, т.е. система  $\mathcal{L}(F, K)$  устойчива,

2)  $\Delta \in D_a \left( \frac{1}{\|K(I - FK)^{-1}\|_{a+m \ln \psi}} \right)$  для некоторого  $a \in [0, \infty)$ .

Аналогичные результаты получены в анизотропийной теории с ненулевым матожиданием входного возмущения [167].

### 6.2. Субоптимальное анизотропийное управление, построение регуляторов пониженного и заданного порядков

Аналогично тому, как в  $H_2$  и  $H_\infty$  теориях управления вслед за оптимальными постановками появились постановки, а затем и решения субоптимальных задач, а также задач построения регуляторов пониженного и заданного порядков, такая же ситуация сложилась и в анизотропийной теории. Субоптимальные регуляторы стабилизируют замкнутую систему и обеспечивают ограниченность ее анизотропийной нормы заданным значением, т.е. гарантируют подавление случайных внешних возмущений, средняя анизотропия которых не превосходит некоторого заданного уровня. В отличие от синтеза оптимального анизотропийного регулятора решение субоптимальных задач приводит к множеству регуляторов, оставляя дополнительные степени сво-

боды для определения некоторых дополнительных требований к замкнутой системе с целью достижения желаемого качества управления.

### 6.2.1. Частотная теорема в анизотропной теории

Ключевым шагом в теории построения субоптимальных анизотропных регуляторов является частотная теорема, сформулированная как в терминах уравнения Риккати [164], так и в терминах матричных неравенств [70].

Кратко изложим анизотропную частотную теорему, следуя [70].

Модель дискретной линейной стационарной системы  $F \in H_\infty^{p \times m}$  с  $m$ -мерным входом  $W$ ,  $n$ -мерным состоянием  $X$  и  $p$ -мерным выходом  $Z$  имеет вид

$$(6.5) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где размерности вещественных матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  согласованы и матрица  $A$  является Шуровой ( $\rho(A) < 1$ ). Предполагается, что входная последовательность  $W$  есть стационарная последовательность гауссовских случайных векторов с ограниченной средней анизотропией  $a \geq 0$ . Задача состоит в следующем.

*Задача 3.* Для заданной системы  $F$ , уровня средней анизотропии входного возмущения  $a \geq 0$  и числа  $\gamma > 0$  проверить выполнение условия  $\|F\|_a < \gamma$ , где  $\|F\|_a$  — анизотропная норма системы  $F$ , определяемая (5.15).

*Теорема 3.* Пусть  $F \in H_\infty^{p \times m}$  — система с реализацией в пространстве состояний (6.5),  $a$ -анизотропная норма (5.15) системы  $F$  строго ограничена заданным пороговым значением  $\gamma > 0$ , т.е.

$$\|F\|_a < \gamma,$$

если существует  $\eta > \gamma^2$ , такое что неравенство

$$(6.6) \quad \eta - \left( e^{-2a} \det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D) \right)^{1/m} < \gamma^2$$

выполняется для вещественной  $(n \times n)$ -матрицы  $\Phi = \Phi^T \succ 0$ , удовлетворяющей ЛМН

$$(6.7) \quad \begin{bmatrix} A^T \Phi A - \Phi + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0.$$

Систему неравенств (6.6) и (6.7) можно решить с помощью свободно расширяемых программных пакетов, например [171] с программой-решателем [206] для системы *Matlab* и *Scilab*. Этот метод вычисления  $a$ -анизотропной нормы не использует решения сложной системы перекрестно связанных уравнений с помощью вычислительного алгоритма на основе метода гомотопий.

В случае  $a \rightarrow +\infty$  ЛМН (6.7) можно привести к виду

$$(6.8) \quad \begin{bmatrix} A^T \bar{\Phi} A - \bar{\Phi} & A^T \bar{\Phi} B & C^T \\ B^T \bar{\Phi} A & B^T \bar{\Phi} B - \gamma I_m & D^T \\ C & D & -\gamma I_p \end{bmatrix} < 0,$$

хорошо известному в контексте  $H_\infty$  управления для дискретных систем (см., например, [111, 123]). Этот факт тесно связан со сходимостью  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty$ , благодаря чему неравенство  $\|F\|_a < \gamma$  “аппроксимирует”

$$(6.9) \quad \|F\|_\infty < \gamma$$

для достаточно больших значений  $a$ . Таким образом, при  $a \rightarrow +\infty$  теорема 3 становится частотной теоремой для  $H_\infty$  нормы, устанавливающей эквивалентность между выполнением (6.9) и существованием положительно определенного решения ЛМН (6.8).

Частотная теорема для анизотропной нормы в терминах неравенств является ключевым результатом, который применяется для решения задач синтеза анизотропных субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, описанных в следующем разделе.

### 6.2.2. Построение субоптимальных анизотропных регуляторов

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью  $F$  с  $n_x$ -мерным состоянием  $X$ ,  $m_w$ -мерным входом возмущения  $W$ ,  $m_u$ -мерным входом управления  $U$ ,  $p_z$ -мерным управляемым выходом  $Z$  и  $p_y$ -мерным измеряемым выходом  $Y$ :

$$(6.10) \quad F : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы,  $p_z \leq m_w$ , пара матриц  $(A, B_u)$  является стабилизируемой, а пара  $(A, C_y)$  — детектируемой.

Предполагается, что средняя анизотропия (5.12) последовательности  $W$  не превосходит известного неотрицательного уровня  $a$ .

Регулятор заданного порядка по измеряемому выходу в форме динамического компенсатора имеет следующий вид:

$$(6.11) \quad K : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix},$$

где  $\xi_k$  —  $n_\xi$ -мерный вектор состояния, стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий некоторый заданный уровень качества подавления внешних возмущений. Предполагается, что для объекта управления (6.10) и регулятора (6.11) выполняется условие Кимуры [158] порядка  $n_\xi$ :

$$n_\xi > n_x - m_u - p_y.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка  $n_\xi$ .

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

**Задача 4.** Для заданных объекта управления  $F$  с моделью в пространстве состояний (6.10), уровня средней анизотропии  $a \geq 0$  входного возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти дискретный линейный стационарный регулятор по выходу  $K$  с моделью в пространстве состояний (6.11), стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что ее  $a$ -анизотропийная норма не превосходит порогового значения  $\gamma$ , т.е.

$$\|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

В рамках анизотропийной теории управления получено решение общей задачи синтеза регулятора заданного порядка и рассмотрены три важных частных случая структуры объекта и регулятора [72]: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно [212]; динамический регулятор полного порядка по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу объекта управления. Для решения задачи синтеза применяется критерий проверки условия ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением для модели в пространстве состояний. Этот критерий — частотная теорема для анизотропийной нормы — сформулирован в предыдущем разделе обзора. В [208, 209] предложена техника редукции оптимального анизотропийного регулятора, являющегося решением задачи анизотропийной стохастической  $H_\infty$  оптимизации полного порядка [210]. На основе методов выпуклой оптимизации в [71] решена задача синтеза субоптимального анизотропийного регулятора заданного порядка в виде динамического компенсатора.

### 6.2.3. Многоканальная задача анизотропийного управления

В рамках концепции построения субоптимальных регуляторов в [73] рассматривается задача синтеза анизотропийного управления для дискретной линейной стационарной системы, в которой определенные вход-выходные каналы сгруппированы вместе с учетом технических особенностей системы или близости свойств сигналов.

Предположим, что в векторе управляемого выхода  $Z$  объекта управления (6.10) с учетом требований технического проектирования выделены  $N$  групп каналов управляемых выходов  $Z_j$  (состоящих в минимальном случае из одного канала). Пусть в векторе внешнего входа  $W$  также выделены  $N$  групп каналов внешних входов  $W_j$ . Одинаковые группы каналов управляемых выходов  $Z_j = Z_i$  или внешних входов  $W_j = W_i$  считаются различными при  $j \neq i$ . Аналогичное разбиение входа и выхода объекта управления на группы каналов предлагается в [199, 200] в гораздо более широкой постановке задачи многоканального управления. Разбиение каналов по группам может осуществляться с учетом технических особенностей системы (например, эталонные сигналы/внешние возмущения/шумы измерений) или близости свойств сигналов



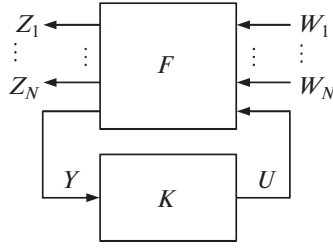


Рис. 7. Замкнутая система в многоканальной задаче.

(например, слабо/сильно коррелированные сигналы). Для каждой из групп каналов внешних входов  $W_j$  предполагается, что средняя анизотропия (5.12) последовательности  $W_j$  не превосходит известного неотрицательного уровня  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Синтезируемый анизотропийный регулятор одновременно обеспечивает заданные уровни подавления возмущений для определенных групп каналов. Такие задачи будем называть *многоканальными*.

Пусть  $T_{zw}(z)$  обозначает матричную передаточную функцию от внешнего входа  $W$  к управляемому выходу  $Z$  замкнутой системы с регулятором заданного порядка  $K$  в форме динамического компенсатора (6.11) с  $n_\xi$ -мерным состоянием  $\Xi = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , стабилизирующим замкнутую систему (рис. 7) и обеспечивающим некоторый заданный уровень подавления внешних возмущений или заданное качество отслеживания эталонных сигналов. Матричная передаточная функция замкнутой системы  $T_{zw}(z)$  задана нижним дробно-линейным преобразованием вида (2.16) для пары  $(F, K)$ . Тогда  $T_{z_j w_j}(z) := \mathcal{L}_j T_{zw}(z) \mathcal{R}_j$  — матричная передаточная функция от группы внешних входов  $W_j$  к группе управляемых выходов  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\mathcal{L}_j$ ,  $\mathcal{R}_j$  — вещественные матрицы выбора групп входов и выходов соответственно. Предполагается, что для объекта управления (6.10) и регулятора (6.11) выполняется условие Кимуры  $n_\xi > n_x - m_u - p_y$ , что гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка  $n_\xi$ .

Постановка многоканальной задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

**Задача 5.** Для заданных объекта управления  $F$  с моделью в пространстве состояний (6.10), уровней средней анизотропии  $a_j \geq 0$  групп внешних входов  $W_j$  и некоторого набора желаемых пороговых значений  $\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , найти дискретный линейный стационарный регулятор по выходу  $K$  с моделью в пространстве состояний (6.11), стабилизирующий замкнутую систему и обеспечивающий одновременное выполнение условий

$$(6.12) \quad \|T_{z_j w_j}\|_{a_j} < \gamma_j.$$

Решение многоканальных задач имеет достаточно важное прикладное значение. Разработанная методика построения анизотропийных регуляторов для многоканальных задач была применена к решению многоканальной задачи анизотропийного управления угловым положением гиросtabilизированной платформы с переменным кинетическим моментом гироблока под воздействием внешних возмущений в условиях шумов измерений [211].

### 6.3. Синтез анизотропийных регуляторов для объектов с параметрической неопределенностью

Естественно поставить задачу синтеза анизотропийных регуляторов для систем, в которых объект подвергается некоторым возмущениям, в частности параметрическим, т.е. поставить задачу синтеза, аналогичную задаче построения  $H_2$  регуляторов для возмущенных объектов, упомянутую выше в разделе 2.4.

Подробно содержание этого раздела опубликовано в [37]. Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $F$ , описываемую уравнениями

$$(6.13) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + F_1 \Omega_k E_1) x_k + (B_1 + F_2 \Phi_k E_2) w_k + (B_2 + F_3 \Psi_k E_3) u_k, \\ z_k &= C_1 x_k + D_{12} u_k, \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} w_k, \end{aligned}$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{E} |x_{-\infty}|^2 < +\infty$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — состояние,  $z_k \in \mathbb{R}^{p_1}$  — управляемый выход,  $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$  — вектор управления,  $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$  — возмущение,  $y_k \in \mathbb{R}^{p_2}$  — наблюдаемый выход. Все входящие в систему (6.13) матрицы известны за исключением матриц  $\Omega_k$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$ , отвечающих неизвестным параметрам, о которых известно только то, что они удовлетворяют следующим ограничениям:

$$(6.14) \quad \Omega_k^T \Omega_k \leq I, \quad \Phi_k^T \Phi_k \leq I, \quad \Psi_k^T \Psi_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где  $I$  обозначает единичную матрицу подходящей размерности.

Передаточная функция замкнутой системы от входа  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  к выходу  $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  задается согласно (2.16) нижним дробно-линейным преобразованием пары  $(F, K)$

$$\mathcal{L}(F, K) = F_{11} + F_{12} K (I - F_{22} K)^{-1} F_{21}.$$

Априорная информация о вероятностном распределении последовательности  $W$  состоит в следующем:  $W$  является стационарной гауссовской случайной последовательностью, средняя анизотропия которой ограничена сверху неотрицательным параметром  $a$ . Обозначим множество таких последовательностей через  $\mathcal{W}_a$ .

Введем  $\Delta_k = \text{diag} \{ \Omega_k, \Phi_k, \Psi_k \}$  матрицу всех неопределенностей в системе, тогда совокупность неравенств (6.14) может быть записана в виде

$$(6.15) \quad \Delta_k^T \Delta_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Неопределенность  $\Delta_k$ , удовлетворяющую (6.15), будем называть *допустимой*. Множество всех допустимых неопределенностей для системы  $F$  обозначим через  $\mathcal{D}$ :

$$(6.16) \quad \mathcal{D} = \{ \Delta_k = \text{diag} \{ \Omega_k, \Phi_k, \Psi_k \} : \Delta_k^T \Delta_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z} \}.$$

Перед постановкой задачи введем понятия неупреждающего и допустимого регулятора.

Линейный регулятор  $K$  называется *строго неупреждающим*, если для любого  $k$  управление  $u_k$  зависит только от предшествующих наблюдений  $y_j$ ,  $j \leq k$ . Регулятор  $K$  называется *допустимым*, если он строго неупреждающий и внутренне стабилизирует замкнутую систему  $\mathcal{L}(F, K)$ . Множество всех допустимых регуляторов для данной системы  $F$  обозначим через  $\mathbb{K}$ .

Сформулируем теперь робастную стохастическую задачу  $H_\infty$ -оптимизации для системы с параметрической неопределенностью.

**Задача 6.** Для заданной системы (6.13) и верхней границы  $a \geq 0$  уровня анизотропии входа найти допустимый регулятор  $K \in \mathbb{K}$ , который минимизирует максимальное значение  $a$ -анизотропийной нормы замкнутой системы  $\mathcal{L}(F, K)$  по всем неопределенностям  $\Delta_k \in \mathcal{D}$ , т.е. доставляет минимум функционалу качества

$$(6.17) \quad J_0(K) = \sup_{\Delta_k \in \mathcal{D}} \|\mathcal{L}(F, K)\|_a.$$

Оптимальная задача (6.17) эквивалентна оптимальной задаче

$$(6.18) \quad \sup_{\Delta_k \in \mathcal{D}} \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 \rightarrow \inf_{K \in \mathbb{K}}.$$

Здесь  $\mathcal{BW}_a$  — множество нормированных входных сигналов с ограниченной средней анизотропией:

$$\mathcal{BW}_a = \{W \in \mathcal{W}_a : \|W\|_{\mathcal{P}} = 1\}.$$

Решение сформулированной задачи производится путем погружения ее в более общую задачу  $H_\infty$  оптимизации. У новой задачи объектом является невозмущенный объект из задачи 6, влияние параметрической неопределенности заменяется новым дополнительным входом в объект.

Показано, что значение функционала качества новой задачи мажорирует значение функционала качества первоначальной задачи.

Решение новой более общей задачи сводится к решению четырех связанных алгебраических уравнений Риккати, уравнению Ляпунова и уравнению специального вида. Для их решения представлен модифицированный метод гомотопий [162].

Основным недостатком предложенной методики является высокая вычислительная сложность метода гомотопий. Данный недостаток был преодолен с применением матричных неравенств. Условия синтеза статических и динамических регуляторов на основе методов выпуклой оптимизации были сформулированы в [75] для системы с дробно-линейными неопределенностями вида

$$(6.19) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix} \Delta (I_{p_\Delta} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где  $x_k$  —  $n_x$ -мерный вектор состояния,  $w_k$  —  $m_w$ -мерная случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ,  $u_k$  —  $m_u$ -мерное управление,  $z_k$  —  $p_z$ -мерный управляемый выход,  $y_k$  —  $p_y$ -мерный измеряемый выход. Отметим, что  $p_z \leq m_w$ , пара  $(A, B_u)$  стабилизируема, а пара  $(A, C_y)$  детектируема. Стационарная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{m_\Delta \times p_\Delta}$  для заданного  $\gamma > 0$  удовлетворяет условию  $\Delta^T \Delta \leq \gamma^{-2} I_{p_\Delta}$ . Очевидно, что данная постановка обобщает задачу для объекта, записанного в форме (6.13).

Для решения задачи с использованием верхнего дробно-линейного преобразования были введены дополнительные  $m_\Delta$ -мерный вход неопределенности  $w_{\Delta_k}$  и  $p_\Delta$ -мерный выход неопределенности  $z_{\Delta_k}$  такие, что  $w_{\Delta_k} = \Delta z_{\Delta_k}$  и  $\mathbf{E} |w_{\Delta_k}|^2 \leq \gamma^{-2} \mathbf{E} |z_{\Delta_k}|^2$ .

В [213] для аналогичной системы была решена задача синтеза робастного субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию без увеличения размерности задачи.

Приведем теперь постановку задачи, следуя [17]. В качестве объекта управления рассматриваются дискретные системы, заданные в пространстве состояний в виде

$$(6.20) \quad x_{k+1} = A^\Delta x_k + B_w^\Delta w_k + B_u u_k,$$

$$(6.21) \quad y_k = C_y^\Delta x_k + D_{yw}^\Delta w_k,$$

$$(6.22) \quad z_k = C_z^\Delta x_k + D_{zw}^\Delta w_k + D_{zu} u_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$  — управление,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  — измеряемый выход,  $z_k \in \mathbb{R}^{p_1}$  — управляемый выход,  $A^\Delta = A + M_A \Delta N_A$ ,  $B_w^\Delta = B_w + M_B \Delta N_B$ ,  $C_z^\Delta = C_z + M_C \Delta N_C$ ,  $C_y^\Delta = C_y + M_{C_y} \Delta N_{C_y}$ ,  $D_{yw}^\Delta = D_{yw} + M_{D_y} \Delta N_{D_y}$ ,  $D_{zw}^\Delta = D_{zw} + M_D \Delta N_D$ . Матрицы  $A, B_w, B_u, C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{C_y}, N_{C_y}, M_{D_y}$  и  $N_{D_y}$  постоянные соответствующих размерностей.

Матрица  $\Delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$  неизвестная, ограниченная по спектральной норме  $\overline{\sigma}(\Delta) \leq 1$ , т.е.  $\Delta^T \Delta \leq I_q$ .

Можно показать, что в определенных случаях параметрические неопределенности объекта управления (6.19) могут быть представлены также и в форме (6.20)–(6.22). Однако данные классы не тождественны. Так, если матрица  $D_{\Delta\Delta} = 0$  в выражении (6.19), то дробно-линейные неопределенности являются подмножеством множества неопределенностей из класса (6.20)–(6.22). В случае же, если  $D_{\Delta\Delta} \neq 0$ , неопределенности принадлежат разным множествам.

Для системы (6.20)–(6.22) были получены условия для синтеза статических робастных субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию ( $u_k = Fx_k$ ) и по выходу ( $u_k = Ky_k$ ).

#### 6.4. Анизотропийная теория дескрипторных систем

Как говорилось выше, системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, лежат “между” системами, замкнутыми  $H_2$  регуляторами,

и системами, замкнутыми  $H_\infty$  регуляторами. Deskрипторные системы являются обобщением обыкновенных динамических систем, так как в своей модели содержат не только разностные или дифференциальные уравнения, но и алгебраические связи между переменными состояниями. Термин “deskрипторный” пришел из зарубежной литературы, так как переменными состояниями таких систем являются физические величины (отсюда термин “descriptor” — описатель). Deskрипторные системы имеют больше приложений, чем обыкновенные системы, поэтому обобщение известных для обыкновенных систем теорий явилось естественным развитием теории управления. Известны теории построения  $H_2$  и  $H_\infty$  регуляторов для линейных дискретных deskрипторных систем [92, 105, 109, 110, 142, 237, 238]. Естественно желание — построить анизотропийную теорию для дискретных deskрипторных систем.

В пространстве состояний модель линейного стационарного объекта управления в deskрипторной форме имеет вид

$$(6.23) \quad Ex_{k+1} = Ax_k + Bw_k,$$

$$(6.24) \quad y_k = Cx_k + Dw_k.$$

Основным отличием данной формы записи от обыкновенных систем является присутствие в левой части матричного сомножителя  $E$ . При этом матрица  $E$  предполагается вырожденной. Из-за вырожденности матрицы  $E$  отсутствует возможность записать уравнения (6.23)–(6.24) в форме (5.13)–(5.14). Это приводит к появлению у deskрипторных систем поведения, не характерного для систем обыкновенных, а именно (см. [92, 221]):

- передаточная функция deskрипторной системы может не являться строго правильной;
- для произвольных ограниченных начальных условий временная характеристика deskрипторных систем может проявлять импульсное или не причинное поведение вместе;
- deskрипторные системы обычно содержат три типа мод: ограниченные динамические моды, неограниченные динамические моды и нединамические моды; нежелательное импульсное поведение в deskрипторных системах может генерироваться неограниченными динамическими модами;
- даже если deskрипторная система является безымпурсной, она все равно может иметь разрывы первого рода из-за несогласованных начальных условий.

Подробнее о deskрипторных системах дискретного и непрерывного времени можно прочесть в [13, 15, 109].

Из-за вышеперечисленных особенностей построение анизотропийной теории для таких систем не является тривиальным обобщением анизотропийной теории для обыкновенных систем.

Первой задачей, которая была решена в рамках построения анизотропийной теории для дискретных deskрипторных систем, была задача вычисления анизотропийной нормы deskрипторной системы [12]. Для вычисления анизотропийной нормы необходимо решить алгебраическое матричное уравнение Риккати, уравнение Ляпунова и уравнение специального вида. В эти три

уравнения входили параметры обыкновенной системы, эквивалентной данной дескрипторной системе. В [90] предложен алгоритм вычисления анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы с помощью выпуклой оптимизации. Задачи анализа для дескрипторных систем, на вход которых поступает случайная гауссовская последовательность с ненулевым математическим ожиданием, рассмотрены в [81].

Первая работа по синтезу оптимального анизотропийного управления для дескрипторных систем [89] была посвящена построению управления при наличии информации обо всем векторе состояния и сводилась к решению двух алгебраических матричных уравнений Риккати, матричного уравнения Ляпунова и уравнения специального вида. В [14] поставлена и решена задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора по выходу. Решение задачи свелось к двухшаговой процедуре синтеза управления: на первом шаге производились каузализация системы и ее приведение к форме эквивалентной обыкновенной системы, а на втором шаге применялась известная методика решения задачи синтеза для обыкновенной системы.

В [1] получены условия ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы на основе решения обобщенного уравнения Риккати и проверки ряда неравенств. В [82] задача субоптимального управления по состоянию и вектору полной информации (состояние и возмущение) решена с помощью обобщенных алгебраических уравнений Риккати. В [16] предложена новая методика вычисления анизотропийной нормы и поиска субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию на основе строгих матричных неравенств.

Более подробно с поставленными и решенными задачами анизотропийного управления для дескрипторных систем можно ознакомиться в монографии [91].

### *6.5. Анизотропийный анализ систем с нецентрированными входными сигналами*

Как было сказано выше, в первоначальных постановках задач анизотропийного анализа и синтеза [20, 21, 24, 70, 164, 225] в качестве внешних входных возмущений рассматривались стационарные эргодические последовательности гауссовских случайных векторов с нулевыми математическими ожиданиями. Равенство нулю математических ожиданий означает, что средняя на бесконечном интервале ошибка, обусловленная наличием такого рода возмущений, зависит только от ковариационных матриц векторов последовательности. Однако в реальных ситуациях, при различных сбоях в оборудовании или наличии нетривиального внешнего возмущения, средние значения векторов возмущения отличны от нуля. В связи с этим в рамках анизотропийной теории имеет смысл в качестве внешнего возмущения рассматривать стационарные эргодические последовательности гауссовских случайных векторов с *ненулевыми* средними. Предположение о наличии у векторов последовательности постоянного (одного и того же) математического ожидания не нарушает свойств стационарности и эргодичности последовательности. Более того, при определенных условиях эти свойства сохраняются и при перемен-

ных во времени математических ожиданиях. Таким образом, при рассмотрении в анизотропной теории случая ненулевого математического ожидания у векторов входной последовательности фактически происходит расширение границ ее применения. Идея построения анизотропной теории с ненулевым матожиданием входного сигнала принадлежит М. Карни [165].

Для построения анизотропной теории управления с нецентрированными входными случайными сигналами необходимо скорректировать определения анизотропии, средней анизотропии и анизотропной нормы в случае, когда векторы входного возмущения имеют ненулевые математические ожидания. Далее нужно рассмотреть вопросы анализа и получить алгоритмы вычисления анизотропии, средней анизотропии и анизотропной нормы в частотной области и пространстве состояний. Окончательной целью является построение методов синтеза анизотропных регуляторов для систем, на вход которых поступает нецентрированная случайная последовательность. Рассмотрим два гауссовских  $m$ -мерных случайных вектора  $w$  и  $v$  с плотностями распределений

$$f(x) = \left( (2\pi)^m \det(\Sigma) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\},$$

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp \left\{ -\frac{x^T x}{2\lambda} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

соответственно. Случайный вектор  $w$  имеет ненулевое математическое ожидание  $\mathbf{E}[w] = \mu \neq 0$  и ковариационную матрицу  $\mathbf{cov}(w) = \Sigma = \Sigma^T \succ 0$ , в то время как математическое ожидание вектора  $v$  равно нулю, а его ковариационная матрица — скалярная:  $\mathbf{cov}(v) = \lambda I_m$ . В качестве меры отличия  $w$  от  $v$ , как и ранее, будет выступать относительная энтропия (5.4), равная в данном случае

$$(6.25) \quad D(f||p_\lambda) = -h(w) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2}{2\lambda},$$

так как  $\mathbf{E}[|w|^2] = \text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2$ .

*Анизотропия случайного вектора* определяется как минимальное в смысле параметра  $\lambda > 0$  значение относительной энтропии  $D(f||p_\lambda)$ :

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f||p_\lambda),$$

что с учетом (6.25) приводит к

$$\mathbf{A}(w) = -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2} \right).$$

Сравнение полученной формулы для анизотропии случайного вектора  $w$  с ненулевым математическим ожиданием  $\mu$  и выражения (5.10), определяющего анизотропию случайного вектора с нулевым математическим ожиданием, позволяет заключить, что

$$\mathbf{A}(w)|_{\mu \neq 0} = \mathbf{A}(w)|_{\mu=0} + \frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2}{\text{tr}(\Sigma)} \right).$$

Иными словами, наличие математического ожидания всегда увеличивает меру отличия  $w$  от множества эталонных случайных векторов с плотностями  $\{p_\lambda(x) : \lambda > 0\}$ . Более того, для двух различных случайных векторов  $w_1$  и  $w_2$  с математическими ожиданиями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и равными ковариационными матрицами  $\mathbf{cov}(w_1) = \mathbf{cov}(w_2) = \Sigma$  анизотропия тем больше, чем больше евклидова норма математического ожидания:

$$\mathbf{A}(w_1) \geq \mathbf{A}(w_2) \quad \Leftrightarrow \quad |\mu_1| \geq |\mu_2|.$$

В случае ненулевого математического ожидания *средняя анизотропия* допускает представление

$$(6.26) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left( \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2} \right) d\omega,$$

где для вектора  $\mathcal{M}$  справедливо

$$(6.27) \quad \mathcal{M} = (D_g + C_g(I - A_g)^{-1}B_g) \mu,$$

а матрицы  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$ ,  $D_g$  задают формирующий фильтр  $G$  в пространстве состояний следующим образом:

$$(6.28) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_g x_k + B_g(v_k + \mu), \\ w_k &= C_g x_k + D_g(v_k + \mu). \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления средней анизотропии при ненулевом математическом ожидании аналогичен алгоритму вычисления средней анизотропии в случае центрированного возмущения [113, 207].

Следующая формула устанавливает связь между значением средней анизотропии последовательности с ненулевыми матожиданиями и средней анизотропии последовательности с нулевыми математическими ожиданиями:

$$(6.29) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = \overline{\mathbf{A}}_o(W) + \frac{m}{2} \ln \left( \frac{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}{\|G\|_2^2} \right),$$

где  $\|G\|_2^2 = \text{tr}(\Sigma) - H_2$  норма передаточной функции  $G(z)$ .

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $F \in H_\infty^{p \times m}$  с  $m$ -мерным входом  $W$ , с  $p$ -мерным выходом  $Z$  и постоянными матрицами  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ :

$$(6.30) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bw_k, \\ z_k &= Cx_k + Dw_k. \end{aligned}$$

Передаточная функция такой системы равна  $F(z) = D + C(z^{-1}I_n - A)^{-1}B$ . В качестве входа  $W$  будем рассматривать последовательность с ограниченной сверху числом  $a \geq 0$  средней анизотропией, т.е. последовательность, сгенерированную формирующим фильтром (6.28) из множества

$$\mathbb{G}_a = \left\{ G \in H_2^{m \times m} : \overline{\mathbf{A}}(G) \leq a \right\}.$$



Анизотропийная норма системы (6.30) равна

$$(6.31) \quad \|F\|_a = \sup_{W: \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(F, W) = \sup_{G \in \mathbb{G}_a} \sqrt{\frac{\|FG\|_2^2 + |\mathcal{F}|^2}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}},$$

где  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{F}$  — математические ожидания соответственно векторов входной и выходной последовательностей  $W$  и  $Z$  на стационарном режиме:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[w_k] = (D_g + C_g(I - A_g)^{-1}B_g) \mu, \\ \mathcal{F} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[z_k] = (D + C(I - A)^{-1}B) \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Идеи построения анизотропийных регуляторов с нецентрированными входными возмущениями были опубликованы в [168].

### 6.6. Анизотропийная теория для нестационарных систем

В последние годы развивается подход к построению теории анизотропийного робастного управления и фильтрации в нестационарных системах. В [24] впервые была рассмотрена задача анизотропийного анализа робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале. В этой работе были даны определения анизотропии и анизотропийной нормы, которые соответствовали новым задачам нестационарной анизотропийной теории управления на конечном горизонте.

Следующей важной работой в построении анизотропийной теории для систем на конечном горизонте в субоптимальной постановке явилась работа [173]. Определения анизотропии случайного вектора и анизотропийной нормы дискретной линейной нестационарной системы, введенные в [24], являются основой для решения задач анизотропийного управления и фильтрации на конечном временном интервале. В [173] сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с переменными параметрами, предполагающие решение разностного уравнения Риккати и неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы. На основе этого критерия в [74] поставлена и решена задача синтеза анизотропийного регулятора для дискретной линейной нестационарной системы, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы заданным пороговым значением на конечном временном интервале. Получены достаточные условия существования анизотропийного регулятора с переменными параметрами, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой дискретной линейной нестационарной системы заданным пороговым значением на конечном временном отрезке. Эти условия определяют алгоритм вычисления матрицы параметров регулятора из рекуррентного решения систем матричных неравенств или последовательности оптимизационных задач.

Задача анализа нестационарной линейной системы на конечном интервале времени при нецентрированных входных возмущениях была решена в [40]. В этой работе было показано, что вычисление анизотропийной нормы указанного класса систем в пространстве состояний связано с решением систем разностных матричных уравнений и уравнения специального вида. Решение

задачи синтеза субоптимального управления для нестационарных систем на конечном горизонте было получено в [74].

### 6.7. Анизотропийная фильтрация

Как известно, вместе с  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями управления развивались и  $H_2$  и  $H_\infty$  теории фильтрации [79, 147, 204]. Этим теориям фильтрации присущи все особенности, имеющиеся в соответствующих теориях управления. В калмановской фильтрации предполагается, что модель динамики процесса и статистические характеристики шумов модели и измерения точно известны. Дисперсия ошибки оценивания (фильтрации) является квадратичным критерием оптимальности. Фильтр Калмана, обеспечивающий минимальную дисперсию ошибки оценивания, является оценщиком состояния системы. Минимизация или ограничение дисперсии ошибки фильтрации эквивалентна минимизации или ограничению  $H_2$  нормы оператора ошибки фильтрации. Также известно, что фильтр Калмана (или  $H_2$  фильтр), синтезированный для заданной модели, не является робастным, т.е. может потерять устойчивость при малых изменениях математической модели объекта.

В случае, когда априорная информация о модели объекта и статистических свойствах шумов модели и измерения не известна точно, может использоваться  $H_\infty$  критерий. Фильтр, синтезированный по критерию ограниченности  $H_\infty$  нормы, гарантирует, что  $H_\infty$  норма оператора, связывающего входной сигнал возмущения и ошибку оценивания, не превышает заданного положительного числа. Алгоритмы  $H_\infty$  фильтрации принадлежат классу минимаксных алгоритмов, при которых минимизируется ошибка оценивания для наихудшего случая (см., например, [131, 135, 183, 203, 204]).

Стоит отметить, что алгоритмы фильтрации в этих теориях рассматриваются как на конечном, так и на бесконечном горизонтах [135].

Как и в случае управления, оптимальные  $H_2$  и  $H_\infty$  фильтры эффективно функционируют только в том случае, когда входные сигналы принадлежат тем классам, которые предполагались при создании этих теорий. Применение  $H_2$  оценщика в случае с сильно “окрашенным” входным возмущением обычно приводит к неудовлетворительным ошибкам оценивания, а  $H_\infty$  оценщик, рассчитанный на наихудший случай, при входном возмущении в виде белого или слабо “окрашенного” шума является излишне перестраховочным (консервативным) [214].

Одним из направлений по синтезу менее консервативных, чем  $H_\infty$  фильтры, и более робастных, чем  $H_2$  фильтры, являются так называемые “смешанные”  $H_2/H_\infty$  фильтры (см., например, [119, 133, 156, 253]). В данном подходе минимизируется  $H_2$  критерий при заданном ограничении на  $H_\infty$  критерий. Методы  $H_2$ ,  $H_\infty$  и смешанной  $H_2/H_\infty$  фильтрации основываются на решениях уравнений Риккати или линейных матричных неравенств (см., например, [8, 101]). Достижение компромисса между  $H_2$  оптимальными и  $H_\infty$  оптимальными фильтрами рассматривается в задаче обобщенной  $H_\infty$  фильтрации [9], в которой минимизируется совместное влияние неизвестных начальных условий и неизмеряемого внешнего возмущения на ошибку оценивания. Для линейных нестационарных систем предложены алгоритмы синтеза нестационарных фильтров, которые основываются на рекуррентном решении си-

стемы разностных линейных матричных неравенств [124]. При этом решение системы линейных матричных неравенств необходимо на каждом шаге.

Первой работой по анизотропийной оптимальной фильтрации для стационарных систем на бесконечном горизонте была [227].

Задача оптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных дискретных систем на конечном горизонте решена в [226]. Она сводится к решению двух разностных уравнений Риккати в прямом и обратном времени.

В [61] решена задача анизотропийной субоптимальной фильтрации методами выпуклой оптимизации.

Работа [173] позволила решить задачу анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем на конечном горизонте для частного случая равенства размерностей оцениваемого выхода и внешнего возмущения [241]. При решении последней задачи в [241] вводится скалярная вспомогательная матричная переменная, которая приводит к существенному увеличению консерватизма.

В [63] сняты ограничения на равенства размерностей оцениваемого выхода и внешнего возмущения [241], решена задача робастной фильтрации на конечном горизонте для линейной дискретной нестационарной системы с наблюдаемым и оцениваемым выходами с неточно известным вероятностным распределением входного возмущения. Величина ошибки оценивания количественно характеризуется анизотропийной нормой. Задача нахождения субоптимального анизотропийного оценщика сводится к задаче выпуклой оптимизации. Приведен алгоритм поиска субоптимального анизотропийного оценщика, который основывается на рекуррентном решении системы матричных неравенств.

В [215] рассматривалась задача стохастической анизотропийной робастной фильтрации на бесконечном горизонте для линейной дискретной стационарной системы, подверженной влиянию нецентрированного случайного возмущения с неточно известным вероятностным распределением. В терминах матричных неравенств доказано достаточное условие строгой ограниченности анизотропийной нормы линейной дискретной стационарной системы заданным пороговым значением (частотная теорема). Сформулировано достаточное условие существования оценщика, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы оператора ошибки оценивания заданным пороговым значением.

Решение задачи фильтрации для линейной дискретной нестационарной системы на конечном горизонте было получено в [64], где предполагалось, что внешнее возмущение имеет ограниченную сверху анизотропию и дополнительно удовлетворяет двум ограничениям на моменты. Решение задачи основывается на критерии ограниченности анизотропийной нормы системы и сводится к поиску решения задачи выпуклой оптимизации.

### *6.8. Другие теории, имеющие отношение к относительной энтропии*

В теории минимаксного LQG управления относительная энтропия рассматривается для описания неопределенности объекта управления. Пара-

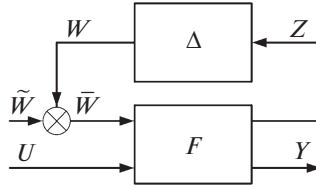


Рис. 8. К описанию неопределенностей в задаче минимаксного LQG.

метрические неопределенности, к которым можно отнести нелинейности, неучтенную и немоделируемую динамику, а также интервальные допуски на параметры системы, выделяются в структуру, показанную на рис. 8.

Математически неопределенность объекта управления описывается в виде:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D\bar{w}_k, \\ z_k &= E_1x_k + E_2u_k, \\ y_k &= Cx_k + \bar{v}_k. \end{aligned}$$

Здесь начальные условия  $x_0$  и шумы  $\bar{w}_k$  и  $\bar{v}_k$  — случайные процессы, определяемые неизвестной функцией распределения вероятностей  $\nu(\cdot)$ . Данная задача рассматривается на конечном горизонте, т.е.  $k = \overline{0, N}$ . Относительная энтропия в данном случае определяет “расстояние” между гауссовскими функциями распределения  $\mu(\cdot)$  и  $\nu(\cdot)$ . Матрицы  $E_1$  и  $E_2$  являются известными и участвуют в формировании неопределенности. При этом функция распределения вероятностей  $\nu(\cdot)$  определяет допустимые возмущения, если справедливо неравенство:

$$(6.32) \quad D(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot)) - \mathbf{E}_\nu \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \|z_k\|^2 + d \right] \leq 0,$$

где  $d > 0$  — постоянная скалярная величина,  $\mathbf{E}_\nu$  — условное математическое ожидание относительно  $\nu(\cdot)$ , а  $D(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot))$  — относительная энтропия между функциями распределения вероятностей  $\mu(\cdot)$  и  $\nu(\cdot)$ , определяемая выражением

$$(6.33) \quad R(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot)) = \begin{cases} \int_{\Omega} \nu(\eta) \log \frac{\nu(\eta)}{\mu(\eta)} d\eta, & \text{если } \nu(\eta) \ll \mu(\eta) \text{ и } \log \frac{\nu(\eta)}{\mu(\eta)} \in \mathbb{L}_1, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Запись  $\nu(\eta) \ll \mu(\eta)$  означает, что функция распределения вероятности  $\nu(\eta)$  абсолютно непрерывна относительно функции  $\mu(\eta)$ .

Задача минимаксного управления в данной постановке заключается в поиске наихудшего значения математического ожидания квадратичного функционала качества при ограничениях (6.33) и выражается в виде

$$V_\tau = \inf_{K \in \Lambda} \sup_{\nu(\cdot)} \mathbf{E}_\nu [J_\tau],$$

где

$$J_\tau = \frac{1}{2} x_{N+1}^T Q_{N+1} x_{N+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left[ x_k^T Q_k + u_k^T R u_k \right] - \\ - \tau \left[ R(\nu(\cdot) \| \mu(\cdot)) - d - \mathbf{E}_\nu \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \|z_k\|^2 \right].$$

Относительная энтропия в данном случае используется, чтобы характеризовать неопределенность в объекте. Однако она, как и в описанных чуть выше работах по анизотропийной теории управления, относится к описанию неопределенности входного сигнала, действующего на систему и формируемого в том числе за счет неопределенности объекта управления. Таким образом, ставится задача поиска оптимального управления, минимизирующего некий функционал качества при ограничениях на относительную энтропию входного вероятностного сигнала. Эта задача сводится к построению управления при наихудшем в смысле относительной энтропии входном сигнале. Такое управление авторы называли *минимаксным*. В отличие от работ по анизотропийной теории управления в серии работ по минимаксному управлению рассматриваются как дискретные описания систем управления [189, 190, 202, 219, 245, 246], так и описания системы в виде стохастических дифференциальных уравнений [217, 218]. Аналогом описания неопределенности для систем, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями, является описание с помощью интегральных квадратичных ограничений. В рамках такого подхода были решены задачи минимаксного управления и фильтрации на конечном горизонте [217, 245].

Содержательные результаты в минимаксной теории управления получены, когда система является линейной, а распределение входного сигнала является гауссовским. В этом случае решение минимаксной линейно-квадратичной задачи сводится к задаче оптимального управления, чувствительного к риску [229]. С описанными выше работами сильно коррелируют работы [189]–[202], в которых также используется информационная характеристика — относительная энтропия.

## 7. Заключение

Основной целью данной работы было провести обзор того, как во второй половине XX века развивались и модифицировались классические постановки задач  $H_2$  и  $H_\infty$  управления, как появились минимаксные задачи, а также их связь со стохастической робастной теорией управления с анизотропийным критерием качества, созданной И.Г. Владимировым и развиваемой научной школой А.П. Курдюкова более 20 лет.

Авторы просят прощения за неполное освещение всех подходов, лежащих между задачами  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимального и субоптимального управления. Робастные стохастические идеи и постановки задач приведены в обзоре в той степени, которая позволяет акцентировать особенность описываемого подхода и соотносить его с анизотропийной теорией.

В завершение обзора хотелось бы отменить дальнейшее направление развития анизотропной теории, основным объектом рассмотрения которой являются линейные системы дискретного времени. В недавних работах В.А. Бойченко и А.П. Курдюкова [18, 160] была сделана попытка расширить область применимости анизотропной теории на случай внешних возмущений в виде дискретных и непрерывных случайных процессов с конечной  $l_2/L_2$  или мощностной нормой. Для этого было введено понятие  $\sigma$ -энтропии случайного сигнала и определение  $\sigma$ -энтропийной нормы системы. Аксиоматика данной теории была построена на основе понятия корреляционной свертки случайного сигнала, которая позволяет работать как со стационарными, так и с нестационарными случайными процессами, используя матрицу спектральной плотности, которая инкапсулирует все различия, явившиеся следствием выбора  $l_2/L_2$  или мощностной нормы дискретного или непрерывного сигнала. Полученные результаты  $\sigma$ -энтропийного анализа верны для систем и непрерывного, и дискретного времени. В дальнейшем планируется развивать это направление, переходя к постановке и решению задач синтеза.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианова О.Г., Белов А.А., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропной нормы дескрипторной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 29–40.
2. Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. № 4. С. 34–99.  
*Andrievsky B.R., Matveev A.S., Fradkov A.L. Control and Estimation Under Information Constraints: Toward a Unified Theory of Control, Computation and Communications // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. P. 572–633.*
3. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971.
4. Аров Д.З., Крейн М.Г. Задача поиска минимума энтропии в проблеме продолжения // Функцион. анализ и его приложения. 1981. Т. 4. С. 73–75.
5. Аров Д.З., Крейн М.Г. О вычислении энтропийных интегралов и их минимумов в обобщенных проблемах продолжения // Acta Scienta Mathematica. 1983. Т. 45. С. 33–50.
6. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Алгоритмы синтеза робастного управления динамическими системами. Нижний Новгород, 2007.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенная  $H_\infty$ -оптимальная фильтрация при внешнем и начальном возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1507–1514.
10. Баландин Д.В., Коган М.М. Минимаксная фильтрация:  $\gamma_0$ -оптимальные наблюдатели и обобщенные  $H_\infty$ -оптимальные фильтры // АиТ. 2013. № 4. С. 43–58.  
*Balandin D.V., Kogan M.M. Minimax Filtering:  $\gamma_0$ -optimal Observers and Generalized  $H_\infty$ -optimal Filters // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 575–587.*

11. *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям ( $H_\infty$ -теория) // *АиТ.* 1992. № 9. С. 3–32.  
*Barabanov A.E., Pervozvanskiĭ A.A.* Optimization with respect to uniform-frequency indices ( $H_\infty$ -theory) // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 9. P. 1301–1327.
12. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Вычисление анизотропийной нормы дескрипторной системы // *АиТ.* 2010. № 6. С. 51–63.  
*Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the Anisotropic Norm of the Descriptor System // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. P. 1022–1033.
13. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011.
14. *Белов А.А.* Синтез анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем по выходной переменной // *АиТ.* 2013. № 11. С. 84–99.  
*Belov A.A.* Anisotropic Controller Design for Descriptor Systems with Respect to the Output Variable // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74, No. 11. P. 1838–1850.
15. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
16. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств // *АиТ.* 2016. № 10. С. 40–56.  
*Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-Based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 10. P. 1741–1754.
17. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез робастного управления параметрически неопределенными линейными системами для подавления случайных внешних возмущений // *АиТ.* 2020. № 4. С. 94–109.  
*Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 4. P. 649–661.
18. *Бойченко В.А.* Анизотропийный анализ в случае ненулевых начальных условий // *Управление большими системами.* 2017. № 67. С. 32–51.
19. *Быховский М.А.* Пионеры информационного века. История развития теории связи. М.: Техносфера, 2006.
20. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // *ДАН.* 1995. Т. 342. № 5 С. 583–585.
21. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема  $H_\infty$ -оптимизации // *ДАН.* 1995. Т. 343. № 5. С. 607–609.
22. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем. // *АиТ.* 1999. № 3. С. 78–87.  
*Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V.* Asymptotics of the Anisotropic Norm of Linear Time-Independent Systems // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 3. P. 359–366.
23. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Максимов Е.А., Тимин В.Н.* Анизотропийная теория управления — новый подход к стохастическому робастному управлению // Труды IV конференции “Идентификация систем и задачи управления” Пленарный доклад. Москва, Январь 25–28, 2005. С. 9–32.
24. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // *АиТ.* 2006. № 8. С. 92–111.

- Vladimirov I.G., Diamond Ph., Kloeden P.E.* Anisotropy-Based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
25. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
  26. Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н., Яглом А.М. Информация и энтропия для непрерывных распределений. Труды III Всесоюзного математического съезда, Москва, 1958. Т. 3. С. 300–320.
  27. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.
  28. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления, Труды I Конгресса IFAC, Т. 2, Изд-во АН СССР, М.: 1961.
  29. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
  30. Коган М.М. Синтез оптимального и робастного управления с  $H_\infty/\gamma_0$  критерием // АиТ. 2016. № 8. С. 3–23.  
*Kogan M.M.* Design of Optimal and Robust Control with  $H_\infty/\gamma_0$  Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. P. 1317–1333.
  31. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. М.: Наука, 1982.
  32. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. Акад. наук СССР, сер. Матем. 1941. Т. 5. № 1. С. 3–14.
  33. Красовский А.А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968.
  34. Кульбак С. Теория информации и статистика М.: Мир, 1967.
  35. Курдюков А.П., Владимиров И.Г., Тимин В.Н. Элементы теории робастного и стохастического робастного управления. Том 3 “Синтез регуляторов систем автоматического управления” в учебнике “Методы классической и современной теории автоматического управления”, М.: Изд. ГТУ им. Н.Э. Баумана, С. 385–480, 2004.
  36. Курдюков А.П., Максимов Е.А. Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределенностью, ограниченной по анизотропной норме // АиТ. 2004. № 12. С. 129–143.  
*Kurdyukov A.P., Maksimov E.A.* Robust Stability of Linear Discrete Stationary Systems with Uncertainty Bounded in the Anisotropic Norm // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. P. 1977–1990.
  37. Курдюков А.П., Максимов Е.А. Решение стохастической задачи  $H_\infty$ -оптимизации для линейных систем с параметрической неопределенностью // АиТ. 2006. № 8. С. 112–141.  
*Kurdyukov A.P., Maksimov E.A.* Solution of the Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem for Discrete Time Linear Systems Under Parametric Uncertainty // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 1283–1310.
  38. Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Синтез формирующего фильтра, обеспечивающего на своем выходе заданный уровень средней анизотропии // АиТ. 2013. № 3. С. 51–66.  
*Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P.* Shaping Filter Design with a Given Mean Anisotropy of Output Signals // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 358–371.
  39. Кустов А.Ю. Анизотропный анализ в случае ненулевого математического ожидания входного возмущения // Управление большими системами: сборник трудов (электронный журнал). М.: ИПУ РАН, 2014. Вып. 50. С. 6–23.



40. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н.* Анизотропный анализ нестационарных систем на конечном интервале времени при нецентрированном возмущении // *АиТ.* 2017. № 6. С. 18–35.  
*Kustov A.Yu., Timin V.N.* Anisotropy-Based Analysis for Finite Horizon Time-Varying Systems with Non-centered Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. P. 974–988.
41. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441.
42. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. II // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568.
43. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. III // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 6. С. 661–665.
44. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. IV // *АиТ.* 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435.
45. *Максимов Е.А.* О связи задачи синтеза анизотропных регуляторов с классическими задачами оптимального управления // *АиТ.* 2007. № 9. С. 134–144.  
*Maksimov E.A.* On the Relationship Between the Problem of Anisotropy-Based Controller Synthesis and Classical Optimal Control Problems // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. P. 1594–1603.
46. *Маслов В.П., Черный А.С.* О минимизации и максимизации энтропии в различных дисциплинах // *Теория вероятностей и ее применения.* 2003. Т. 48. № 3. С. 467–486.
47. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
48. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
49. *Пинскер М.С.* Количество информации о гауссовском случайном процессе, содержащейся во втором процессе, стационарно с ним связанном // *ДАН.* 1954. Т. 98. С. 213–216.
50. *Позняк А.С., Себряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А.*  $H_\infty$ -теория управления: феномен, достижения, перспективы, открытые проблемы. М: ГосНИИАС, Институт проблем управления АН СССР, 1990.
51. *Позняк А.С.* Лекции по основам  $H_\infty$  оптимального управления. М.: Изд. МФТИ, 1991.
52. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
53. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.: ЛЕНАНД, 2014.
54. *Пугачёв В.С., Симицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Изд. 2-е, доп., М.: Наука, 1990.
55. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер с англ. под ред. проф. Б. Р. Левина. М.: Связь, 1976.
56. *Семенов А.В., Владимиров И.Г., Фурлетов М.Ю., Мецерьяков О.Г.* Методы стохастической  $H_\infty$ -оптимизации в приложении к проблемам конструирования робастных регуляторов и фильтров. Технический отчет № 184 (1390)–94, М.: ГосНИИАС, 1994.
57. *Солодов А.В.* Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. М.: Наука, 1967.
58. *Стратонович Р.Л.* К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // *Теория вероятностей и ее применение.* 1959. Т. 4. № 2. С. 239–242.

59. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Советское радио, 1975.
60. *Тартаковский Г.П.* Теория информационных систем. М.: Физматкнига, 2005.
61. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 612–615.
62. *Тимин В.Н.* Субоптимальная анизотропная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // АиТ. 2013. № 11. С. 3–19.  
*Timin V.N.* Anisotropy-Based Suboptimal Filtering for the Linear Discrete Time-Invariant Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 1773–1785.
63. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.  
*Timin V.N., Kurdyukov A.P.* Suboptimal Anisotropic Filtering in a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. P. 1–20.
64. *Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Гольдин Д.А., Вершинин Ю.А.* Субоптимальная анизотропная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с нецентрированным внешним возмущением // АиТ. 2019. № 1. С. 3–20.  
*Timin V.N., Kustov A.Y., Kurdyukov A.P. et al.* Suboptimal Anisotropic Filtering for Linear Discrete Nonstationary Systems with Uncentered External Disturbance // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. P. 1–15.
65. *Тихомиров В.М.* Работы А.Н. Колмогорова по  $\epsilon$ -энтропии функциональных классов и суперпозициям функций // Успехи математических наук. 1963, Т. XVIII. № 5(113). С. 55–92.
66. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.
67. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: ЛГУ, 1985.
68. *Хинчин А.Я.* Теория корреляции стационарных стохастических процессов // Успехи мат. наук. 1938. № 5. С. 42–51.
69. *Чайковский М.М.* Нахождение сильно минимизирующего ранг решения линейного матричного неравенства // АиТ. 2007. № 9. С. 96–105.  
*Chaikovskiy M.M.* Finding the Strongly Rank-Minimizing Solution to the Linear Matrix Inequality // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. P. 1559–1567.
70. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Критерий строгой ограниченности анизотропной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // ДАН. 2011. Т. 441. № 3. С. 318–321.
71. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимобратных матриц // Управление большими системами. 2012. № 39. С. 95–137.
72. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // Управление большими системами. 2013. № 42. С. 100–152.
73. *Чайковский М.М.* Многоканальные задачи синтеза анизотропных регуляторов // АиТ. 2016. № 8. С. 43–65.  
*Chaikovskiy M.M.* Multichannel Synthesis Problems for Anisotropic Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 8. P. 1351–1369.
74. *Чайковский М.М., Тимин В.Н.* Синтез анизотропного субоптимального управления для линейных нестационарных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2017. № 7. С. 39–56.

- Tchaikovsky M.M., Timin V.N.* Synthesis of Anisotropic Suboptimal Control for Linear Time-Varying Systems on Finite Time Horizon // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1203–1217.
75. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Анизотропное субоптимальное управление для систем с дробно-линейной неопределенностью // АиТ. 2018. № 6. С. 172–190.
- Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty // Automation and Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1100–1116.
76. Новые перспективные методы проектирования многомерных динамических систем управления. Обзор. Под редакцией Е.А. Федосова, ГосНИИАС, 1989.
77. Конструирование робастных систем управления с использованием методов  $H_\infty$ -оптимизации. Обзор. Под редакцией Е.А. Федосова, ГосНИИАС, 1991.
78. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
79. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal filtering. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall. 1979.
80. *Anderson B. and Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice-Hall. 1990.
81. *Andrianova O.G., Kurdyukov A.P., Belov A.A., Kustov A.Y.* Anisotropy-Based Analysis for Descriptor Systems with Nonzero-Mean Input Signals // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg. 2014. P. 430–435.
82. *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati Equation Approach to Anisotropy-Based Control Problem for Descriptor Systems: State Feedback and Full Information Cases // 2015 European Control Conference (ECC). Linz. 2015. P. 3226–3231.
83. *Arnold W.F., Laub A.J.* Generalised Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations // Proc. IEEE. 1984. V. 72. No. 12. P. 1746–1754.
84. *Athans M.* Editorial on the LQG Problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. P. 528.
85. *Baeyens E., Khargonekar P.P.* Some Examples in Mixed  $H_2/H_\infty$  Control // Proc. 1994 American Control Conference — ACC '94. Baltimore. MD. USA. 1994. P. 1608–1612.
86. *Baratchart L., Leblond J., Partington J.R.* Hardy Approximation to  $L_\infty$  Functions on Subsets of the Circle // Constr. Approx. 1996. V. 12. P. 423–435.
87. *Basar T., Bernhard P.*  $H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach, Boston: Birkhauser, 1995.
88. *Bedioui N., Salhi S., Ksouri M.*  $H_2$  Performance via Static Output Feedback for a Class of Nonlinear Systems // Proc. IEEE International Conference on Signals, Circuits and Systems (SCS). 2008. P. 1–6.
89. *Belov A.A.* Anisotropy-Based Control for Discrete-Time Descriptor Systems via State Feedback // Proc. 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-Petersburg. 2011. P. 134–140.
90. *Belov A., Andrianova O.* Computation of Anisotropic Norm for Descriptor Systems Using Convex Optimization // 2013 International Conference on Process Control (PC), Strbske Pleso. P. 173–178.
91. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Robust Anisotropy-Based Control: Control of Discrete-Time Descriptor Systems, Cham: Springer International Publishing, 2018.

92. *Bender D.J., Laub A.J.* The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. P. 672–687.
93. *Bensoussan A., van Schuppen J.H.* Optimal Control of Partially Observable Stochastic Systems with an Exponential-of-Integral Performance Index // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. No. 4. P. 599–613.
94. *Berkenkamp F., Schoellig A.P.* Derivation of a Linear, Robust  $H_2$  Controller for Systems with Parametric Uncertainty. ETH Zurich. Tech. Rep. 2015. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-010405770>.
95. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound: A Riccati Equation Approach // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
96. *Bernstein D.S.* Review of Minimum Entropy  $H_\infty$  Control // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. No. 8. P. 1276–1277.
97. *Bertsekas D.P.* Dynamic Programming and Stochastic Control. Academic Press, New York. 1976.
98. *Bode H.W., Shannon C.E.* A Simplified Derivation of Linear Least-Square Smoothing and Prediction Theory // Proc. IRE. 1950. No. 4. P. 417–425.
99. *Bosgra O.H., Kvakernaak H.* Design Methods for Control Systems, Course notes, Dutch Institute for Systems and Control. V. 67. 2001.
100. *Boukas H., Shi P.*  $H_\infty$  Control for Discrete-Time Linear Systems with Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Automatica. 1999. V. 35. No. 9. P. 1625–1631.
101. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., and Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // 1994. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia. <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970777>.
102. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.
103. *Campi M.C., James M.R.* Risk-Sensitive Control: a Bridge Between  $H_2$  and  $H_\infty$  Control // Proc. 32nd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio. TX. USA. 1993. V. 3. P. 2179–2180.
104. *Campi M.C., James M.R.* Nonlinear Discrete-Time Risk-Sensitive Optimal Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 1–19.
105. *Yung C.-F., Wang C.-C., Wu P.-F., Wang H.-S.* Bounded Real Lemma for Discrete-Time Descriptor Systems // IFAC Proc. Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 9982–9986.
106. *Chen M., Desoer C.* Necessary and Sufficient for Robust Stability of Linear Distributed Feedback Systems // Int. J. Control. 1982. V. 35. No. 2. P. 255–267.
107. *Colaneri P., Geromel J.C., Locatelli A.* Control Theory and Design. A  $RH_2$  and  $RH_\infty$  Viewpoint. Academic press, 1997.
108. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. Wiley & Sons, Inc. 1991.
109. *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture notes in control and information sciences. New York: Springer-Verlag, 1989.
110. *Dai L.* Filtering and LQG Problems for Discrete-Time Stochastic Singular Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 10. P. 1105–1108.
111. *De Souza C.E., and Xie L.* On the Discrete-Time Bounded Real Lemma with Application in the Characterization of Static State Feedback  $H_\infty$  Controllers // Systems & Control Lett. 1992. V. 18. P. 61–71.
112. *Diamond P., Kurdjukov A., Semyonov A. and Vladimirov I.* Homotopy Methods and Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization of Control Systems // CADSMAP Report 97–14, December 1997, The University of Queensland, Australia. P. 1–22.

113. *Diamond P., Vladimirov I., Kurdjukov A., Semyonov A.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // *Int. J. Control.* 2001. V.74. No. 1. P. 28–42.
114. *Doyle J.C.* Guaranteed Margins for LQG Regulators // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1978. V. 23. No. 4. P. 756–757.
115. *Doyle J.C., Stein G.* Robustness with Observers // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1979. V. 24. No. 4. P. 607–611.
116. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1981. V. 26. P. 4–16.
117. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
118. *Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* Feedback Control Theory. Maxwell MacMillan Internat, New York, 1992.
119. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  Performance Objectives II: Optimal control // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1994. V. 39. No. 8. P. 1575–1586.
120. *Dullerud G.E., Paganini F.G.* A Course in Robust Control Theory. A convex approach. New York: Springer-Verlag, 2000.
121. *Francis B.A.* A Course in  $H_\infty$ -Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1987. V. 88. Springer-Verlag, Berlin.
122. *Fridman E., Shaked U.* Robust  $H_\infty$  Minimum Entropy Static Output-Feedback Control of Singularly Perturbed Systems // *Automatica.* 2000. V. 36. P. 1181–1188.
123. *Gahinet P., Apkarian P.A.* Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 1994. V. 4. No. 4. P. 421–448.
124. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.*  $H_\infty$  Control and Estimation of State-Multiplicative Linear Systems. London: Springer, 2005.
125. *Glover K.* All-optimal Hankel Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their  $L_\infty$ -error Bounds // *Int. J. Control.* 1984. V. 39. P. 1115–1193.
126. *Glover K., Doyle J.* State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers That Satisfy an  $H_\infty$ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity // *Systems & Control Lett.* 1988. V. 11. P. 167–172.
127. *Glover K., Mustafa D.* Derivation of the Maximum Entropy  $H_\infty$  Controller and a State-Space Formula for its Entropy // *Int. J. Control.* 1989. V. 50. P. 899–916.
128. *Goddard P.J., Glover K.* Controller Approximation: Approaches for Preserving  $H_\infty$  Performance // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1998. V. 43. No. 7. P. 858–871.
129. *Gray R.M.* Entropy and Information Theory. Springer US, 2011.
130. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robust Control. Pearson Education Inc., 1995.
131. *Grimble M.J., Elsayed A.* Solution of the  $H_\infty$  Optimal Linear Filtering Problem for Discrete-Time Systems // *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing.* 1990. V. 38. No. 7. P. 1092–1104.
132. *Gu Da-W, Petkov P.H., Konstantinov M.M.* Robust Control Design with MATLAB // *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing.* 2005. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
133. *Haddad W.M., Bernstein D.S., Mustafa D.* Mixed-Norm  $H_2/H_\infty$  Regulation and Estimation: the Discrete-Time Case // *Systems & Control Lett.* 1991 V. 16. No. 4 P. 235–247.

134. *Halevi Y.* Frequency Weighted Model Reduction via Optimal Projection // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. No. 10. P. 1537–1542.
135. *Hassibi B., Sayed A., Kailath T.* Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  Theories. SIAM, 1999.
136. *Huang X.-X., Yan W.-Y., Teo K. L.*  $H_2$  Near-Optimal Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46. No. 8. P. 1279–1284.
137. *Hyland D.C., Bernstein D.S.* The Optimal Projection Equations for Model Reduction and the Relationships Among the Methods of Wilson, Skelton, and Moore // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. V. 30. No. 12. P. 1201–1211.
138. *Iglesias P.A., Mustafa D., Glover K.* Discrete Time  $H_\infty$  Controllers Satisfying a Minimum Entropy Criterion // Systems & Control Lett. 1990. V. 14. P. 275–286.
139. *Iglesias P.A., Glover K.* State-Space Approach to Discrete-Time  $H_\infty$  Control // Int. J. Control. 1991. V. 54. No. 5. P. 1031–1073.
140. *Iglesias P.A., Mustafa D.* State-Space Solution of the Discrete-Time Minimum Entropy Control Problem Via Separation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1993. V. 38. No. 10. P. 1525–1530.
141. *Iglesias P.A.* An Entropy Formula for Time-Varying Discrete-Time Control System // SIAM J. Control Optim. 1996. V. 34. No. 5. P. 1691–1706.
142. *Ishihara J.Y., Terra M.H., Sales R.M.* The Full Information and State Feedback  $H_2$  Optimal Controllers for Descriptor Systems // Automatica. 2003. V. 39. No. 3. P. 391–402.
143. *Ito K.* Stochastic Integral // Proc. Imp. Acad. 1944. V. 20. No. 8. P. 519–524.
144. *Jacobson D.H.* Optimal Stochastic Linear Systems with Exponential Performance Criteria and Their Relation to Deterministic Differential Games // IEEE Trans. Automat. Contr. 1973. V. 18. No. 2. P. 124–131.
145. *Jacobson D.H.* Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory. New York: Academic Press, 1977.
146. *Jonckheere E., Silverman L.* A New Set of Invariants for Linear Systems—Application to Reduced Order Compensator Design // IEEE Trans. Automat. Contr. 1983. V. 28. No. 10. P. 953–964.
147. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. ASME. (J. Basic Eng.). 1960. V. 82. P. 34–45.
148. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. No. 5. P. 102–119.
149. *Kalman R.E.* New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. Baltimore: RIAS Tech. Rep. 1961. P. 1–61.
150. *Kalman R.E., Bucy R.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // ASME J. Basis Eng. 1961. V. 83. P. 95–108.
151. *Karny M.* Towards Fully Probabilistic Control Design // Automatica. 1996. Vol. 32. P. 1719–1722.
152. *Karny M., Guy T.V.* Fully Probabilistic Control Design // Systems & Control Lett. 2006. V. 55. No. 4. P. 259–265.
153. *Karny M., Kroupa T.* Axiomatisation of Fully Probabilistic Design // Information Sciences. 2012. V. 186. No. 1. P. 105–113.
154. *Kapila V., Haddad W.M.*  $H_2$  Stable Stabilization for Discrete-Time Systems // Proc. 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans. LA. USA. 1995. V. 2. P. 1933–1934.

155. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: A Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–837.
156. *Khargonekar P.P., Rotea M.A., Baeyens E.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 313–330.
157. *Kim S.W., Seo C.J., Kim B.K.* Robust and Reliable  $H_\infty$  Controllers for Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainty and Actuator Failure // Int. J. Syst. Sci. 1999. V. 30. No. 12. P. 1249–1258.
158. *Kimura H.* Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 1975. Vol. 20. No. 4. P. 509–516.
159. *Kurdyukov A.P., Pavlov B.V., Timin V.N., Vladimirov I.G.* Longitudinal Anisotropy-Based Flight Control in a Wind Shear // IFAC Proc. Volumes. 2004. V. 37. No. 6. P. 423–426.
160. *Kurdyukov A.P., Boichenko V.A.* A Spectral Method of the Analysis of Linear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2019. V. 29. No. 4. P. 667–679.
161. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Homotopy-Based Algorithm for Computing Stochastic  $H_\infty$ -optimal Controller for LTI-System with Uncertainty // 7-th Int. Scientific-Technical Conf. Process Control 2006. Pardubice (Czech Republic), 2006. CD-ROM.
162. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Homotopy Method for Solving Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem with Uncertainty // IFAC Proc. Volumes. V. 39. No. 9. 2006. P. 327–332.
163. *Kurdyukov A.P., Vladimirov I.G.* Propagation of mean Anisotropy of Signals in Filter Connections // IFAC Proc. Volumes. V. 41. No. 2. P. 6313–6318.
164. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma // Proc. of the 19-th International Symposium MTNS. Budapest. Hungary. 2010. P. 2391–2397.
165. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Yu., Tchaikovsky M.M., Karny M.* The Concept of Mean Anisotropy of Signals with Nonzero Mean // Proc. 2013 Int. Conf. on Process Control (PC). Strbske Pleso. 2013. P. 37–41.
166. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Y.* Constructing Signals with Prescribed Mean Anisotropy Level // IFAC Proc. Volumes. V. 46. No. 11. 2013. P. 489–494.
167. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Y., Yurchenkov A.V.* Robust Stability in Anisotropy-Based Theory with Non-Zero Mean of Input Sequence // Proc. 21st Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen. Netherlands. 2014. P. 208–214.
168. *Kustov A.* Anisotropy-Based Analysis and Synthesis Problems for Input Disturbances with Nonzero Mean // Proc. 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC). Velke Karlovice. 2014. P. 291–295.
169. *Li R.-C., Bai Z.* Structure-Preserving Model Reduction Using a Krylov Subspace Projection Formulation // Commun. Math. Sci. 2004. V. 3. No. 2. P. 179–199.
170. *Lin Z., Saberi A., Sannuti P., Shamash Y.A.* A Direct Method of Constructing  $H_2$  Suboptimal Controllers – Discrete-Time Systems // Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego. CA. USA. V. 2. 1997. P. 1008–1013.
171. *Löfberg J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in Matlab // Proc. CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
172. *Mariton M., Bertrand R.* A Homotopy Algorithm for Solving Coupled Riccati Equations // Optimal. Contr. Appl. Meth. 1985. V. 6. No. 4. P. 351–357.

173. *Maximov E.A., Kurdyukov A.P., Vladimirov I.G.* Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System // IFAC Proc. Volumes. 2011. V. 44. No. 1. P. 4701–4706.
174. *McFarlane G.C., Glover K.* Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin etc. 1990.
175. *Meyer D.G.* Fractional Balanced Reduction: Model Reduction via Fractional Representation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. 35. No. 12. P. 1341–1345.
176. *Miradore R., Ricci G.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: the Discrete-Time Case // Systems & Control Lett. 2005. V. 54. No. 1. P. 1–13.
177. *Moore B.C.* Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. 26. No. 1. P. 17–32.
178. *Mustafa D., Glover K.* Controllers which Satisfy a Closed-Loop  $H_\infty$ -norm Bound and Maximize an Entropy Integral // Proc. 27th IEEE Conference on Decision and Control. Austin. TX. USA. 1988. V. 2. P. 959–964.
179. *Mustafa D.* Relations Between Maximum Entropy/ $H_\infty$  Control and Combined  $H_\infty/LQG$  Control // Systems & Control Lett. 1989. V. 12. No. 3. P. 193–203.
180. *Mustafa D., Glover K.* Minimum Entropy  $H_\infty$ -Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin etc. 1991.
181. *Mustafa D., Glover K., Limebeer D.J.N.* Solutions to the  $H_\infty$  General Distance Problem which Minimize an Entropy Integral // Automatica. 1991. V. 27. P. 193–199.
182. *Mustafa D., Glover K.* Controller Reduction by  $H_\infty$ -Balanced Truncation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 6. P. 668–682.
183. *Nagpal K.M., Khargonekar P.P.* Filtering and Smoothing in an  $H_\infty$ -setting // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 2. P. 152–166.
184. *Nesterov Y., Nemirovski A.* Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming // Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA. 1994.
185. *Peters M.A., Iglesias P.A.* Connections Between Minimum Entropy Control and Mixed  $H_2/H_\infty$  Control for Time-Varying Systems // Systems & Control Lett. 1995. V. 26 P. 341–347.
186. *Peters M.A., Iglesias P.A.* Minimum Entropy Control For Discrete-time Time-Varying Systems // Automatica. 1997. V. 33. P. 591–605.
187. *Peters M.A., Iglesias P.A.* The Relationship Between Minimum Entropy Control and Risk-Sensitive Control for Time-Varying Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. P. 1065–1069.
188. *Petersen I.R.* Disturbance Attenuation and  $H_\infty$  Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1987. V. 32. No. 5. P. 427–429.
189. *Petersen I.R., James M.R., Dupuis P.* Minimax Optimal Control of Stochastic Uncertain Systems with Relative Entropy Constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. V. 45. No. 3. P. 398–412.
190. *Petersen I.R.* Minimax LQG Control // Int. J. Math. Comput. Sci. 2006. V. 16. No. 3. P. 309–323.
191. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
192. *Poznyak A.S.* Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Techniques. Elsevier, 2008.



193. *Redheffer R.* On a Certain Linear Fractional Transformation // J. Math. Phys. 1960. V. 39. P. 269–286.
194. *Rosenbrock H.H., McMorran P.D.* Good, Bad, or Optimal? // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. 16. No. 6. P. 552–554.
195. *Saberi A., Sannuti P., Chen B.M.*  $H_2$  Optimal Control. London: Prentice Hall International, 1995.
196. *Saberi A., Stoorvogel A., Sannuti P.* Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints. London: Springer-Verlag, 2000.
197. *Sadabadi M.S., Alireza K.* An LMI Formulation of Fixed-Order  $H_\infty$  and  $H_2$  Controller Design for Discrete-Time Systems with Polytopic Uncertainty // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. 2013. P. 2453–2458.
198. *Saridis G.N.* Entropy Formulation of Optimal and Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1988. V. 33. No. 8. P. 713–721.
199. *Scherer C.W., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.
200. *Scherer C.W.* An Efficient Solution to Multi-Objective Control Problems with LMI Objectives // Systems & Control Lett. 2000. V. 40. No. 1. P. 43–57.
201. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic Approach to  $H_\infty$ -optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. Florida(USA), 1994. V. 3. P. 2249–2250.
202. *Shaiju A.J., Petersen I.R.* Formulas for Discrete Time LQR, LQG, LEQG and Minimax LQG Optimal Control Problems // IFAC Proc. Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 8773–8778.
203. *Shaked U., Theodor Y.*  $H_\infty$ -optimal Estimation: A Tutorial // Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control. Tucson. AZ. USA. 1992. V. 2. P. 2278–2286.
204. *Simon D.* Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006.
205. *Stoorvogel A.A.* The  $H_\infty$  Control Problem: a State Space Approach. 2000.
206. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones // Optimization Methods and Software. 1999. V. 11. P. 625–653.
207. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Computing Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant System via LMI-Based Approach // Archives of Control Sciences. 2006. V. 16. No. 3. P. 257–281.
208. *Tchaikovsky M., Kurdyukov A.* Stochastic Robust Controller Reduction by Anisotropic Balanced Truncation // 2009 IEEE Control Applications (CCA) & Intelligent Control (ISIC). St. Petersburg. 2009. P. 1772–1777.
209. *Tchaikovsky M.* Anisotropic Balanced Truncation — Application to Reduced-Order Controller Design // Proc. 17th Int. Conf. on Process Control'09. Strbske Pleso. Slovakia. 2009. P. 14–27.
210. *Tchaikovsky M., Kurdyukov A.* On Simplifying Solution to Normalized Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$  Problem // IFAC Proc. Volumes. V. 42. No. 6. 2009. P. 161–166.
211. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., Nikiforov V.M.* LMI-Based Design of Multichannel Anisotropic Suboptimal Controllers with Application to Control of Gyrostabilized Platform // Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications (CCA-2012, Dubrovnik). Dubrovnik: IEEE (Catalog Number: CFP12CCA-USB). 2012. P. 1455–1460.

212. *Tchaikovsky M.M.* Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-Based Approach: General and Special Cases // Proc. 2012 American Control Conference (ACC). Montreal. QC. 2012. P. 5208–5213.
213. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Upper Estimate of Anisotropic Norm of Uncertain System with Application to Stochastic Robust Control // Int. J. Control. 2018. V. 91. No. 11. P. 2411–2421.
214. *Theodor Y., Shaked U., de Souza C.E.* A Game Theory Approach to Robust Discrete-Time  $H_\infty$  Estimation // IEEE Trans. Signal Proc. 1994. V. 42. P. 1486–1495.
215. *Timin V.N., Kustov A.Yu.* Suboptimal Anisotropy-Based/ $H_\infty$  Filtering for LDTI Systems with Nonzero-Mean Input // 2015 20th Int. Conf. on Process Control (PC). Strbske Pleso. 2015. P. 147–151.
216. *Trentelman H., Stoorvogel A.A., Hautus M.* Control Theory for Linear Systems. Communication and Control Engineering, Springer-Verlag London, 2001.
217. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Finite Horizon Minimax Optimal Control of Stochastic Partially Observed Time Varying Uncertain Systems // Math. Contr. Signals Syst. 1999. V. 12. No. 1. P. 1–23.
218. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Minimax LQG Control of Stochastic Partially Observed Uncertain Systems // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 40. No. 4. P. 1189–1226.
219. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Robust Output Feedback Stabilization via Risk-Sensitive Control // Automatica. 2002. V. 38. No. 3. P. 945–955.
220. *Van Dooren P.V.* A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equation // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1981. V. 2. P. 121–135.
221. *Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T.* A Generalized State-Space for Singular Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. P. 811–831.
222. *Vidyasagar M.* Control System Synthesis: a Factorization Approach. Cambridge, MA: MIT Press, 1985.
223. *Vidyasagar M., Kimura H.* Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems // Automatica. 1986. V. 22. No. 1. P. 85–94.
224. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // IFAC Proc. Volumes. 1996. V. 29. No. 1. P. 3057–3062.
225. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem // Proc. 13th IFAC World Congress. San-Francisco(USA). 1996. P. 427–432.
226. *Vladimirov I., Diamond P.* Robust Filtering in Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems by Minimum Anisotropic Norm Criterion // CADSMAP Res. Report 01–05. 2001.
227. *Vladimirov I.* Anisotropy-Based Optimal Filtering in Linear Discrete time Invariant Systems. Center for Applied Dynamical Systems // <http://arxiv.org/abs/1412.3010>, December 2014.
228. *Wang S.-Y., Gao Z.-F., Qiu J.-Q., He H.-K.* Observer-Based Robust  $H_\infty$  Control of a Class of Discrete Time Systems with State Uncertainties // Proc. 2009 Int. Conf. Machine Learning and Cybernetics. Hebei. 2009. P. 1949–1953.
229. *Whittle P.* Risk-Sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control // Adv. Appl. Prob. 1981. V. 13. No. 4. P. 764–777.
230. *Whittle P., Kuhn J.* A Hamiltonian Formulation of risk-sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 1. P. 1–12.

231. *Whittle P.* Entropy-Minimising and Risk-Sensitive Control Rules // Systems & Control Lett. 1989. V. 13. No. 1. P. 1–7.
232. *Whittle P.* Risk-Sensitive Optimal Control. New York: John Wiley and Sons, 1990.
233. *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York: John Wiley and Sons, 1949.
234. *Wilson D. A.* Optimum Solution of Model-Reduction Problem // Proc. IEE. 1970. V. 117. No. 6. P. 1161–1165.
235. *Xie L.* On Robust  $H_2$  Estimation // ACTA Automatica Sinica. 2005. V. 31. No. 1. P. 1–12.
236. *Xu S., Chen T.* Robust  $H_\infty$  Control for Uncertain Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via Exponential Output Feedback Controllers // Systems & Control Lett. 2004. V. 51. No. 3–4. P. 171–183.
237. *Xu S., Lam J.* Robust Control and Filtering of Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
238. *Yaesh I., Shaked U.* A Transfer Function Approach to the Problems of Discrete-Time Systems:  $H_\infty$ -optimal Linear Control and Filtering // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 11. P. 1264–1271.
239. *Yaesh I., Shaked U.* Minimum Entropy Static Output-Feedback Control with an  $H_\infty$ -norm Performance Bound // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. AC-42. No. 6. P. 853–858.
240. *Yaesh I., Shaked U.* Robust Reduced-Order Output-Feedback  $H_\infty$  Control // IFAC Proc. Volumes. V. 42. No. 6. 2009. P. 155–160.
241. *Yaesh I., Stoica A.-M.* Linear Time-Varying Anisotropic Filtering its Application to Nonlinear Systems State Estimation // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg. 2014. P. 975–980.
242. *Yan W.-Y., Lam. J.* An Approximate Approach to  $H_2$  Optimal Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. P. 1341–1358.
243. *Yang R., Lu L., Xie L.* Robust  $H_2$  and  $H_\infty$  Control of Discrete-Time Systems with Polytopic Uncertainties via Dynamic Output Feedback // Int. J. Control. 2005. V. 78. P. 1285–1294.
244. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A.* Robust Tracking Problem for Continuous Time Stochastic Uncertain Systems // 42nd IEEE Int. Conf. on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475). Maui. HI. 2003. V. 1. P. 282–287.
245. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Robust Finite Horizon Minimax Filtering for Stochastic Discrete Time Uncertain Systems // Systems & Control Lett. 2004. V. 52. No. 2. P. 99–112.
246. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* On the Worst-Case Disturbance of Minimax Optimal Control // Automatica. 2005. V. 41. P. 847–855.
247. *Li Y., Xu J.-M., Xu Ch.*  $H_2/H_\infty$  Optimal Filter Design for Linear Discrete-Time Systems // Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788). Hangzhou. China. 2004. V. 2. P. 1597–1600.
248. *Zames G.* On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. V. 11. No. 2. P. 228–238.
249. *Zames G.* On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. V. 11. No. 3. P. 465–476.

250. *Zames G.* Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. 26. No. 2. P. 301–320.
251. *Zhou K.* Frequency Weighted  $L_\infty$  Norm Optimal Hankel Norm Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1995. V. 40. P. 1687–1699.
252. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1996.
253. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed Performance Objectives Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  Performance Objectives. I. Robust Performance Analysis // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1564–1574.
254. Matlab Robust Control Toolbox, <http://www.mathworks.com/products/robust/?requestedDomain=de.mathworks.com>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 29.06.2020

После доработки 09.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020

© 2021 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, канд. техн. наук (a.glushchenko@sf-misis.ru),  
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Старооскольский технологический институт  
им. А.А. Угарова (филиал) ФГАОУ ВО  
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,  
Старый Оскол)

## АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ ЗАКОНА НАСТРОЙКИ НА ОСНОВЕ РЕКУРСИВНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ<sup>1</sup>

Целью работы является синтез адаптивной системы управления с переменным коэффициентом усиления контура адаптации для компенсации параметрической неопределенности объекта управления. Такая система в отличие от существующих одновременно 1) включает в себя алгоритм автоматического вычисления коэффициента усиления закона настройки параметров регулятора, который работает пропорционально текущей величине регрессора, позволяя получить регулируемую верхнюю оценку скорости сходимости рассогласований по выходу объекта и параметрам регулятора к нулю (при выполнении условия постоянного возбуждения регрессора), 2) не требует знания знака или значения элементов матрицы коэффициентов усиления объекта управления. Для синтеза такой системы управления использовались второй метод Ляпунова и рекурсивный метод наименьших квадратов. Для нее были доказаны свойства устойчивости, ограниченности значений упомянутых выше рассогласований и получены оценки скорости их сходимости к нулю. Демонстрация эффективности предлагаемого подхода была проведена путем математического моделирования на примере объекта управления, соответствующего постановке задачи исследования.

*Ключевые слова:* бесперебойное прямое адаптивное управление, эталонная модель, постоянное возбуждение регрессора, второй метод Ляпунова, коэффициент усиления закона настройки, рекурсивный метод наименьших квадратов, оценка устойчивости.

DOI: 10.31857/S0005231021040036

### 1. Введение

Основной целью функционирования адаптивных систем управления с эталонной моделью является поддержание требуемого качества регулирования

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-47-310003 p\_a).

в условиях наличия существенной параметрической неопределенности объекта управления путем настройки параметров его регулятора. На сегодняшний день существует два классических подхода для построения подобных систем управления: не прямое и прямое адаптивное управление [1, 2]. В данной работе рассматривается исключительно проблематика прямого адаптивного управления по полному вектору координат состояния.

Алгоритм настройки параметров регулятора в схемах прямого адаптивного управления обычно получают с помощью метода оптимизации первого порядка — градиентного спуска (и его вариаций), а также второго метода Ляпунова [1, 3, 4]. Сегодня нерешенными проблемами большинства законов настройки остаются, во-первых, требование наличия постоянного возбуждения регрессора для экспоненциальной сходимости к нулю параметрической ошибки между настраиваемыми и идеальными параметрами регулятора, а во-вторых, наличие в законе адаптации экспериментально подбираемого параметра — коэффициента усиления процесса адаптации [4, 5]. С основными путями решения первой проблемы можно ознакомиться в [6]. В данной же работе остановимся на рассмотрении и решении второй проблемы.

Само наличие в законе настройки экспериментально подбираемого параметра вызывает сложности, поскольку эксперименты по его выбору на реальном объекте не всегда возможно произвести, а коэффициент усиления, подобранный на математической модели, чаще всего не подходит для реального объекта.

Чтобы проанализировать другие проблемы, возникающие при использовании постоянного значения коэффициента усиления, отдельно рассмотрим ситуации наличия и отсутствия постоянного возбуждения регрессора.

В случае отсутствия постоянного возбуждения известно [1], что использование больших значений коэффициента усиления контура адаптации на реальном объекте может многократно усиливать высокочастотные паразитные составляющие в его динамике и шумы измерений, что является недопустимым с точки зрения робастной устойчивости [7, 8]. В литературе выделяют три типа неустойчивости адаптивных систем управления, которые вызываются высоким коэффициентом усиления закона настройки и наличием в объекте паразитной высокочастотной динамики: неустойчивость из-за быстрой адаптации, высокочастотная неустойчивость и неустойчивость вследствие полученных в результате адаптации больших значений коэффициентов регулятора [1, 7–9]. Все эти эффекты приводят к необходимости компромиссного выбора коэффициента усиления: его значения должны быть достаточно большими для удовлетворительного качества процесса адаптации, но достаточно большими для усиления паразитной динамики объекта.

Кроме того, адаптивная система даже с правильно выбранным коэффициентом усиления и в условиях отсутствия паразитной динамики обеспечивает желаемое быстродействие алгоритма настройки и соответственно требуемое качество управления только для ограниченного числа значений задания для рассматриваемого объекта управления. Это происходит вследствие того, что адаптивная система управления даже с линейным объектом и линейной эталонной моделью образует нелинейный замкнутый контур регулирования,

принцип суперпозиции для которого, как известно, не соблюдается [10]. Для решения этой проблемы и обеспечения требуемого быстродействия для наиболее широкого диапазона заданий на систему в [11, 12] был предложен метод масштабирования коэффициента усиления. Подход, использующий сходную идею, можно найти в [13]. Эти методики позволяют масштабировать подобранную экспериментально оптимальную скорость к различным уставкам. Недостатком такого метода является необходимость экспериментального, ручного подбора начального значения коэффициента усиления, обеспечивающего требуемую скорость сходимости процесса адаптации, и фактора масштабирования. Таким образом, основными недостатками использования постоянного значения коэффициента усиления закона настройки при отсутствии постоянного возбуждения является возможность усиления высокочастотной динамики при слишком большом его значении, а также обеспечение требуемого быстродействия закона настройки коэффициентов регулятора только для ограниченного числа заданий.

В случае наличия постоянного возбуждения, кроме описанных недостатков, связанных с использованием больших значений коэффициента усиления, возникает еще одна проблема. В [6, 7, 14] было доказано существование оптимального значения коэффициента усиления для текущего регрессора в случае наличия постоянного возбуждения и проиллюстрировано, что с его увеличением выше оптимального скорость сходимости процесса адаптации не ускоряется, а замедляется. С одной стороны, это означает, что скорость сходимости настраиваемых параметров к идеальным значениям не может быть сделана произвольно большой, а с другой стороны, что для каждого нового значения регрессора существует свое новое оптимальное значение коэффициента усиления процесса адаптации.

Из проведенного анализа следует, что использование экспериментально выбираемого постоянного коэффициента усиления адаптации и в ситуации наличия, и в ситуации отсутствия постоянного возбуждения приводит к серьезным проблемам, которые существенно уменьшают вероятность успеха практической реализации адаптивных систем управления.

Таким образом, задача разработки метода настройки коэффициента усиления контура адаптации является актуальной для теории адаптивных систем и особенно актуальной для практики их применения.

Поэтому в данном исследовании предлагается разработать контур адаптации, включающий алгоритм расчета коэффициента усиления и, следовательно, свободный от описанных недостатков, связанных с его экспериментальным выбором. В качестве основы для разработки такого контура предлагается использовать рекурсивный метод наименьших квадратов с коэффициентом экспоненциального забывания [1, 8]. Достоинствами этого метода являются, собственно, наличие закона настройки коэффициента усиления и экспоненциальная сходимость параметрической ошибки к нулю с регулируемой скоростью сходимости при выполнении условия постоянного возбуждения [1]. Данный подход широко известен в теории идентификации, однако эффективных его применений в схемах прямого адаптивного управления обнаружить не удалось.

В данной работе при разработке контура адаптации параметров регулятора с переменной скоростью настройки ограничимся рассмотрением случая выполнения условия постоянного возбуждения регрессора.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача адаптивного управления классом линейных объектов, которые в пространстве координат состояния могут быть записаны в фробениусовой форме:

$$(2.1) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x \in R^n$  — вектор координат состояния объекта,  $u \in R$  — управляющее воздействие,  $A \in R^{n \times n}$  — фробениусова матрица состояний системы, и  $B = [0, 0, \dots, b] \in R^{n \times 1}$  — матрица коэффициентов усиления. Значения элементов  $A$  и  $B$  неизвестны, но составляют управляемую пару  $(A, B)$ . Доступными для прямого измерения считаются вектор координат состояния  $x$  и вектор его первых производных  $\dot{x}$ . На практике получить оценку производной вектора координат состояния представляется возможным, в частности, используя методы, описанные в [15, 16]. Эталонная модель, определяющая требуемое качество управления объектом с неизвестными параметрами (2.1), также выбирается в фробениусовой форме:

$$(2.2) \quad \dot{x}_{ref} = A_{ref}x_{ref} + B_{ref}r,$$

где  $x_{ref} \in R^n$  — вектор координат состояния эталонной модели,  $r \in R$  — ограниченный сигнал задания,  $B_{ref} = [0, 0, \dots, b_{ref}] \in R^{n \times 1}$ . Матрица состояний эталонной модели  $A_{ref} \in R^{n \times n}$  является гурвицевой и записана в фробениусовой форме.

Уравнение в отклонениях между уравнениями объекта управления (2.1) и уравнениями эталонной модели (2.2) может быть найдено в виде

$$(2.3) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + Bu - (A_{ref} - A)x - B_{ref}r.$$

Поскольку и объект управления, и его эталонная модель записаны в форме фробениуса, то условие адаптируемости [4] естественным образом выполняется:

$$(2.4) \quad \text{rank} \{B, B_{ref}\} = \text{rank} \{B, A - A_{ref}\} = 1.$$

*Утверждение. Если выполняется условие адаптируемости (2.4), то выполняются и равенства:*

$$(2.5) \quad BB^\dagger = \begin{bmatrix} Z_{n-1,n} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \end{bmatrix};$$

$$BB^\dagger(A_{ref} - A) = A_{ref} - A; \quad BB^\dagger B_{ref} = B_{ref},$$

где  $Z_{n-1,n}$  — нулевая матрица. Справедливость утверждения может быть проверена, например, непосредственной подстановкой в формулы (2.5) любых матриц, соответствующих постановке задачи.



Выполнение условия (2.4) и равенств (2.5) позволяет переписать уравнение (2.3) в виде

$$(2.6) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + B \left[ u - B^\dagger (A_{ref} - A)x - B^\dagger B_{ref}r \right],$$

где  $B^\dagger$  — псевдообратная по отношению к  $B$  матрица.

Тогда закон управления, доставляющий объекту управления (2.1) желаемое качество управления, может быть определен из уравнения в отклонениях (2.6):

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u^* &= B^\dagger [(A_{ref} - A)x + B_{ref}r] = k_r k_x x + k_r r, \\ k_r k_x &= B^\dagger (A_{ref} - A); \quad k_r = B^\dagger B_{ref}, \end{aligned}$$

где  $k_x \in R^{1 \times n}$  и  $k_r \in R$  — идеальные коэффициенты закона управления.

В случае известных, например номинальных, значений элементов матриц  $A$  и  $B$  по формулам (2.7) может быть рассчитан идеальный регулятор для объекта (2.1).

Для случая неизвестных (квазистационарных) параметров матриц  $A$  и  $B$  введем закон управления с текущими параметрами

$$(2.8) \quad u = \hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r.$$

Из определения коэффициентов  $k_x$  и  $k_r$  в выражении (2.7) можно получить аналитические выражения для вычисления матрицы  $B$  и разницы  $(A_{ref} - A)$ :

$$(2.9) \quad A_{ref} - A = B_{ref} k_x; \quad B = k_r^{-1} B_{ref}.$$

С учетом выражений (2.9) при подстановке закона управления (2.8) в уравнение в отклонениях (2.6) получаем запись

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref} &= A_{ref}e_{ref} + B \left[ \hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r \right] - (A_{ref} - A)x - B_{ref}r = \\ &= A_{ref}e_{ref} + k_r^{-1} B_{ref} \left[ \hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r \right] - B_{ref} k_x x - \\ &\quad - B_{ref} r + \left( B_{ref} \hat{k}_x x - B_{ref} \hat{k}_x x \right) = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[ \left( \hat{k}_x - k_x \right) x + \hat{k}_x x \left( k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) + r \left( k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) \right] = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[ \tilde{k}_x x + \left( k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) \left( \hat{k}_x x + r \right) \right] = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[ \tilde{k}_x x - \tilde{k}_r^{-1} \hat{k}_r \left( \hat{k}_x x + r \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{k}_x = \hat{k}_x - k_x$ ,  $\tilde{k}_r^{-1} = \hat{k}_r^{-1} - k_r^{-1}$ . В уравнении (2.10) введем понятие функции обобщенной параметрической ошибки  $\varepsilon$ :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega, \\ \omega &= \left[ x^T \quad -\hat{k}_r \left( \hat{k}_x x + r \right) \right]^T; \quad \tilde{\theta}^T = \left[ \tilde{k}_x \quad \tilde{k}_r^{-1} \right] = \hat{\theta}^T - \theta^T. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\theta}^T \in R^{n+1}$  — настраиваемые параметры, через которые возможно вычислить (обращая оценку  $\hat{k}_r^{-1}$ ) текущие параметры регулятора (2.8),  $\theta^T \in R^{n+1}$  — идеальные параметры, через которые возможно вычислить (обращая  $k_r^{-1}$ ) параметры идеального регулятора (2.7),  $\tilde{\theta}^T \in R^{n+1}$  — разница между  $\hat{\theta}^T$  и  $\theta^T$ . Тогда уравнение (2.10) с учетом (2.11) может быть переписано в следующем виде:

$$(2.12) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + B_{ref}\tilde{\theta}^T\omega.$$

На основе уравнения (2.12) возможно получить закон адаптации регулятора (2.8). Поскольку от  $\hat{\theta}$  можно перейти к текущим  $\hat{k}_x$ ,  $\hat{k}_r$  параметрам регулятора (2.8), то под законом его адаптации будем понимать закон настройки  $\hat{\theta}$ . Впервые параметризация (2.12) была предложена в [17] с целью построения закона адаптации, не требующего знания матрицы коэффициентов усиления  $B$  объекта управления.

Для системы (2.12) необходимо построить закон настройки коэффициентов  $\hat{\theta}$ , который не требует экспериментального, ручного подбора коэффициента усиления закона адаптации и обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки  $\xi = \begin{bmatrix} e_{ref}^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}^T$  к нулю при выполнении условия постоянного возбуждения для регрессора  $\omega$ .

*Определение.* Для ограниченного сигнала  $\omega$  выполняется условие постоянного возбуждения, если  $\forall t \geq 0 \exists T > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что верно неравенство

$$(2.13) \quad \int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $\alpha$  — степень возбуждения.

### 3. Идентификатор идеальных параметров регулятора с переменным коэффициентом усиления контура адаптации

Для достижения поставленной цели сначала построим закон оценки  $\hat{\theta}$ , обеспечивающий экспоненциальную сходимость к нулю из всего вектора  $\xi$  только ошибки  $\tilde{\theta}^T$  и не требующий ручного подбора коэффициента усиления.

Для этого введем понятие желаемого поведения уравнения в отклонениях (2.12), которое зададим дифференциальным уравнением

$$(3.1) \quad \dot{e}_d = A_{ref}e_{ref}.$$

Обобщенная параметрическая ошибка (2.11) тогда может быть вычислена через рассогласование между уравнением в отклонениях (2.12) и его желаемым поведением (3.1):

$$(3.2) \quad \varepsilon = \dot{e}_{ref} - \dot{e}_d = B_{ref}\tilde{\theta}^T\omega = B_{ref}(\hat{\theta}^T - \theta^T)\omega = B_{ref}(\hat{\theta}^T\omega - y),$$

где  $y$  — идеальное значение параметрического возмущения на систему (2.12).

Из уравнения (3.2) следует справедливость записи

$$(3.3) \quad B_{ref}^\dagger \varepsilon = \tilde{\theta}^T \omega = (\hat{\theta}^T - \theta^T) \omega = \hat{\theta}^T \omega - y.$$

На этом этапе, следуя процедуре рекурсивного метода наименьших квадратов, чтобы построить контур идентификации  $\hat{\theta}(t)$  идеальных параметров  $\theta$  в момент времени  $t$ , введем в рассмотрение измерения  $y(\tau)$  и  $\omega(\tau)$  для  $0 \leq \tau < t$ . С учетом нового времени перепишем уравнение (3.3):

$$(3.4) \quad B_{ref}^\dagger \varepsilon = \hat{\theta}^T(t) \omega(\tau) - y(\tau).$$

В этом случае целевой критерий минимизации выражения (3.4) согласно рекурсивному методу наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием записывается в интегральном виде

$$(3.5) \quad Q(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} (B_{ref}^\dagger \varepsilon)^T B_{ref}^\dagger \varepsilon d\tau,$$

где  $\lambda$  — коэффициент экспоненциального забывания.

Условием минимума целевого критерия (3.5) является равенство нулю его градиента по настраиваемым параметрам:

$$(3.6) \quad \nabla_{\hat{\theta}^T} Q^T(\hat{\theta}) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) [\omega^T(\tau) \hat{\theta}(t) - y^T(\tau)] d\tau = 0.$$

В выражении (3.6), пользуясь свойством суммы интегралов, раскроем скобки и перенесем слагаемое, содержащее идеальное значение параметрического возмущения, в правую часть равенства

$$(3.7) \quad \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) \hat{\theta}(t) d\tau = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) y^T(\tau) d\tau.$$

Из (3.7) по методу наименьших квадратов может быть получена оценка  $\hat{\theta}$  идеальных параметров регулятора  $\theta$ :

$$(3.8) \quad \hat{\theta}(t) = \underbrace{\left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \right]^{-1}}_{\Gamma(t)} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) y^T(\tau) d\tau.$$

Здесь  $\Gamma(t)$  — матрица коэффициентов усиления закона настройки параметров аппроксимирующей линейной регрессии.

Закон изменения во времени матрицы  $\Gamma^{-1}(t)$  может быть найден с помощью теоремы о производной интеграла по его верхнему пределу:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{d\Gamma^{-1}}{dt} &= \omega(t)\omega^T(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau = \\ &= \omega(t)\omega^T(t) - \lambda\Gamma^{-1}(t). \end{aligned}$$

На этом этапе введем вспомогательное равенство

$$(3.10) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} [\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t)] = \frac{d\Gamma(t)}{dt}\Gamma^{-1}(t) + \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt}\Gamma(t) = 0.$$

С учетом выражения (3.10) и введенных ранее определений матриц  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma^{-1}(t)$  может быть получен закон изменения во времени матрицы  $\Gamma(t)$ :

$$(3.11) \quad \frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\Gamma(t) \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} \Gamma(t) = \lambda\Gamma(t) - \Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t)\Gamma(t).$$

Формулу оценки параметров идеального закона управления (2.7) с учетом выражения (3.11) найдем, дифференцируя по времени оценку (3.8):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} &= \frac{d\Gamma(t)}{dt} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)y^T(\tau)d\tau + \\ &+ \Gamma(t) \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)y^T(\tau)d\tau \right] = \\ &= (\lambda - \Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t))\hat{\theta}(t) - \lambda\hat{\theta}(t) + \Gamma(t)\omega(t)y^T(t) = \\ &= \Gamma(t)\omega(t) \left[ y^T(t) - \omega^T(t)\hat{\theta}(t) \right]. \end{aligned}$$

С учетом (3.4) уравнение (3.12) может быть приведено к виду

$$(3.13) \quad \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\Gamma(t)\omega(t) \left( B_{ref}^\dagger \varepsilon \right)^T.$$

Таким образом, контур идентификации идеальных параметров регулятора (2.7) описывается законом изменения во времени матрицы коэффициентов усиления (3.11) и непосредственно законом оценки (3.13):

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma\omega \left( B_{ref}^\dagger \varepsilon \right)^T, \\ \dot{\Gamma} &= \lambda\Gamma - \Gamma\omega\omega^T\Gamma. \end{aligned}$$

Свойства контура оценки (3.14) сформулируем в виде следующей теоремы.

*Теорема 1. Контуром оценки (3.14) для ошибки  $\tilde{\theta}$  обеспечиваются следующие свойства:*

- 1) *ошибка  $\tilde{\theta}$  является ограниченной величиной  $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$ ;*
- 2) *если выполняется условие постоянного возбуждения (2.13) и первая производная регрессора ограничена  $\dot{\omega} \in L_\infty$ , то обеспечивается экспоненциальная сходимость ошибки  $\tilde{\theta}$  к нулю со скоростью быстрее, чем к (ее значение определено в Приложении).*

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

#### **4. Синтез адаптивного управления с переменным коэффициентом усиления в контуре настройки**

В работе ранее была доказана сходимость к нулю параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$ , а значит, идентифицирующие свойства контура оценки (3.14) идеальных параметров регулятора. Но сходимость к нулю всего вектора  $\xi$ , а значит, устойчивость замкнутого контура регулирования (2.12) при использовании полученных оценок коэффициентов рассмотрена не была. Поэтому примем формулы (3.14) в качестве базовых и проведем их модификацию с целью обеспечения сходимости к нулю не только параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$ , но и ошибки слежения  $e_{ref}$ . Результаты выполненной модификации представим в виде теоремы 2.

*Теорема 2. Пусть контур адаптации для замкнутого контура управления (2.12) описывается выражениями:*

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma\omega \left[ B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref} \right]^T, \\ \dot{\Gamma} &= \lambda\Gamma - 2\Gamma\omega\omega^T\Gamma, \end{aligned}$$

где  $P$  – матрица, полученная путем решения уравнения Ляпунова

$$A_{ref}^T P + P A_{ref} = -Q,$$

$Q$  – экспериментально подбираемая матрица.

Тогда:

- 1) *ошибка  $\xi$  является ограниченной величиной  $\xi \in L_2 \cap L_\infty$ ;*
- 2) *если выполняется условие (2.13), то обеспечивается экспоненциальная сходимость ошибки  $\xi$  к нулю со скоростью быстрее, чем  $\eta_{\min}$ ;*
- 3) *если выполняется условие (2.13), то максимальная скорость сходимости  $\eta_{\max}$  ошибки  $\xi$  к нулю может быть сделана произвольно большой путем увеличения коэффициента  $\lambda$ .*

Доказательство теоремы 2, значения  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  приведены в Приложении.

#### **5. Пример**

Демонстрация эффективности предлагаемого подхода была проведена путем математического моделирования замкнутой системы (2.12) при адаптации параметров закона управления (2.8) по формулам (4.1). Моделирование

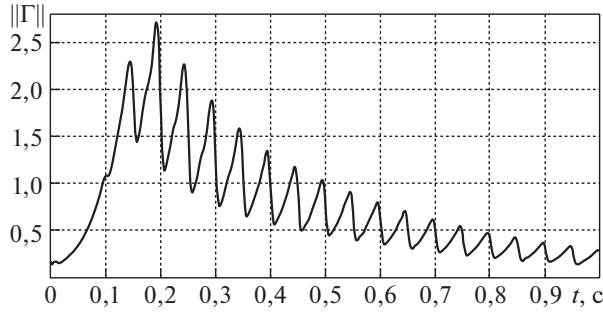


Рис. 1. Значение нормы матрицы коэффициентов усиления процесса адаптации.

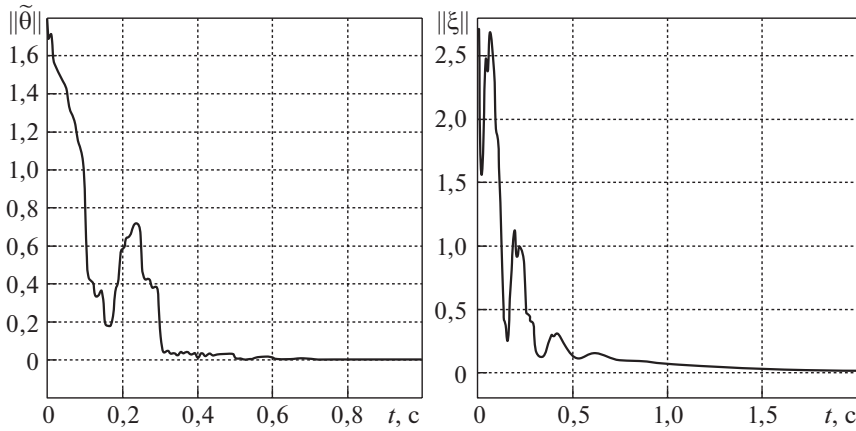


Рис. 2. Переходные процессы по нормам параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  и ошибки  $\xi$ .

проводилось в Matlab/Simulink на основе численного интегрирования методом Эйлера. Во всех экспериментах использовался постоянный шаг дискретизации  $\tau_s = 10^{-6}$  секунды. Объект управления в экспериментах описывался уравнением

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u.$$

Эталонная модель для него была выбрана в соответствии с уравнением

$$\dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x_{ref} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} r.$$

Согласно результатам, представленным, например, в [7], для обеспечения условия постоянного возбуждения для объекта второго порядка необходимо использовать в качестве задающего воздействия гармонического сигнала не менее чем с двумя частотами. Поэтому в экспериментах условие постоянного возбуждения (2.13) регрессора  $\omega$  выполнялось путем использования в качестве задания  $r$  гармонического сигнала

$$r = 125 \sin(t) + 250 \sin(125t) + 500 \sin(250t).$$

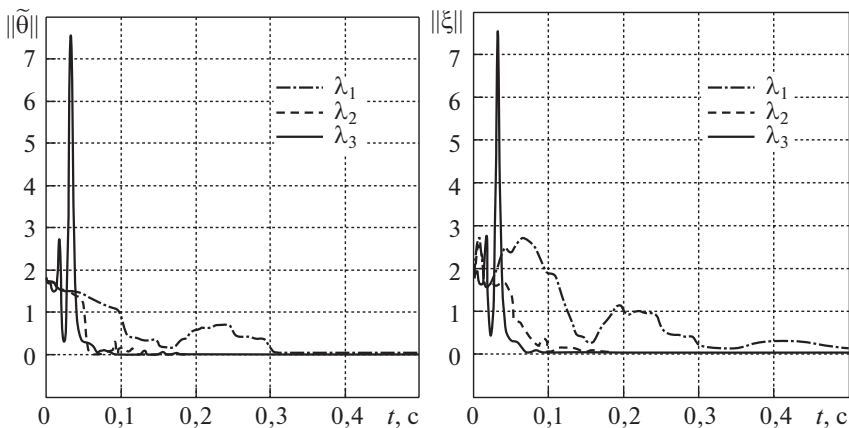


Рис. 3. Переходные процессы по нормам параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  и ошибки  $\xi$  при различных  $\lambda$ .

Всего было проведено два эксперимента. В первом эксперименте (см. рис. 1 и рис. 2) начальное значение матрицы  $\Gamma(0)$ , начальные значения коэффициентов закона управления (2.8), а также значение коэффициента забывания  $\lambda$  были выбраны в соответствии со следующими значениями

$$\Gamma(0) = 0,1I; \quad \hat{\theta}^T(0) = [0 \ 0 \ 1]; \quad \lambda = 25.$$

Из результатов моделирования (рис. 1 и рис. 2) следует, что предложенный контур адаптации (4.1) обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  и ошибки  $\xi$  к нулю, при этом в процессе адаптации используется переменное значение коэффициента усиления контура адаптации.

Во втором эксперименте в контуре адаптации использовались различные значения коэффициента забывания  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = 25; \quad \lambda_2 = 100; \quad \lambda_3 = 1000.$$

Но начальное значение матрицы  $\Gamma(0)$  и начальные значения коэффициентов закона управления (2.8) совпадали со значениями, используемыми в первом эксперименте.

Из результатов моделирования (рис. 3) следует, что с увеличением значения коэффициента забывания скорость сходимости параметрической ошибки и ошибки  $\xi$  также увеличивается. Данный факт подтверждает результаты, полученные в процессе доказательства теоремы 2.

Из рис. 3 также видно, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  возникают существенные колебания; и это подтверждает выводы, сделанные в замечании к теореме 2. Для устранения данного недостатка в дальнейших исследованиях планируется модификация разработанного контура адаптации (4.1) путем применения методов расширения и фильтрации регрессора [6] с целью минимизации значения  $T$  (максимизации допустимого значения  $\lambda$ ).

## 6. Заключение

В работе была предложена адаптивная система управления, которая при выполнении условия постоянного возбуждения не требует экспериментального, ручного подбора матрицы коэффициентов усиления процесса адаптации и при этом обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки слежения и параметрической ошибки к нулю с регулируемой верхней оценкой скорости сходимости.

В отличие от классической градиентной схемы, у которой существует предельная для текущего регрессора скорость сходимости [6, 13, 14], в разработанной схеме согласно доказательствам теоремы 2, проведенному анализу и результатам экспериментов верхняя оценка скорости сходимости может быть сделана произвольно большой путем увеличения фактора забывания  $\lambda$ .

В дальнейших исследованиях планируется модификация разработанного контура адаптации с целью ослабления использованных допущений (выполнение условия постоянного возбуждения, доступность первой производной вектора координат состояния) и улучшения его свойств (устранения колебаний при больших  $\lambda$  и обеспечения монотонной экспоненциальной сходимости).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Для доказательства теоремы подставим в уравнение (3.13) выражение (3.3). Тогда при условии  $\theta = \text{const}$  имеем уравнение

$$(П.1) \quad \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\omega\omega^T\tilde{\theta}.$$

Кандидата в функции Ляпунова выберем в виде квадратичной формы

$$(П.2) \quad V = \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta},$$

$$\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2,$$

где  $\lambda_{\min}(\cdot)$ ,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  — минимальное и максимальное собственные числа матрицы.

Производная квадратичной формы (П.2) в силу действия уравнения (П.1) и уравнений (3.9) и (3.13) имеет вид

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= 2\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T\dot{\Gamma}^{-1}\tilde{\theta} = \\ &= -2\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left[\Gamma\omega\omega^T\tilde{\theta}\right] + \tilde{\theta}^T\left[\omega\omega^T - \lambda\Gamma^{-1}\right]\tilde{\theta} = \\ &= -\tilde{\theta}^T\omega\omega^T\tilde{\theta} - \lambda\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} = \\ &= -\left(B_{ref}^\dagger\varepsilon\right)\left(B_{ref}^\dagger\varepsilon\right)^T - \lambda\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\left\|B_{ref}^\dagger\right\|^2\|\varepsilon\|^2 - \lambda\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2. \end{aligned}$$



Производная (П.3) положительно определенной квадратичной формы (П.2) является отрицательной полуопределенной функцией, поэтому параметрическая ошибка есть  $\tilde{\theta} \in L_\infty$  и обобщенная ошибка есть  $\varepsilon \in L_\infty$ , а уравнение (П.2) является функцией Ляпунова для системы (П.1). Вместе с этим функция Ляпунова (П.2) имеет конечный предел при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
V\left(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\right) &= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{\infty} \dot{V} dt = \\
&= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) - \int_{t_0}^{\infty} \left[ \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}\right) \right] dt \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} \left[ \left\| B_{ref}^\dagger \varepsilon \right\|^2 + \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \left\| \tilde{\theta} \right\|^2 \right] dt = \\
&= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) - V\left(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\right) < \infty,
\end{aligned}$$

а тогда  $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$ , и  $\omega \in L_\infty$  (как результат того, что  $\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$ ).

Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Для доказательства второй части теоремы 1 найдем вторую производную функции Ляпунова (П.2):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T - \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta}\right) = \\
(П.4) \quad &= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T - \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \left[-\omega \omega^T \tilde{\theta}\right] + \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right) = \\
&= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right).
\end{aligned}$$

По выражению (П.4) об ограниченности второй производной функции (П.2) сделать вывод довольно трудно, поэтому с учетом  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}}$  найдем производную обобщенной параметрической ошибки (3.2):

$$(П.5) \quad \dot{\varepsilon} = B_{ref} \left[ \dot{\tilde{\theta}}^T \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right] = B_{ref} \left[ -\Gamma \omega \omega^T \tilde{\theta} \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right].$$

С учетом выражения (П.5) для вычисления перепишем уравнение (П.4):

$$\dot{V} = -2 \left[ -\Gamma \omega \omega^T \tilde{\theta} \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right] \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right).$$

По доказанному имеем  $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$  и  $\omega \in L_\infty$ , а по формулировке теоремы 1 —  $\dot{\omega} \in L_\infty$ . Тогда чтобы заключить, что  $\dot{V} \in L_\infty$ , остается доказать  $L_\infty$  ограниченность матриц  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$ . Для этого получим решение дифференциального уравнения (3.9):

$$\Gamma^{-1}(t) = \Gamma^{-1}(0) e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau.$$

В случае выполнения условия постоянного возбуждения (2.13) нетрудно показать, что  $\forall t \geq T$  величина  $\Gamma^{-1}$  ограничена снизу выражением

$$(II.6) \quad \begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &\geq \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t-T}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau + \int_0^{t-T} e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь по теореме о среднем получим оценки снизу для каждого из двух интегралов в правой части выражения (II.6). Для этого перепишем условие постоянного возбуждения (2.13) в эквивалентном виде

$$(II.7) \quad \int_{t-T}^t \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I.$$

Тогда с учетом выражения (II.7) оценка снизу для первого интеграла имеет вид

$$(II.8) \quad \int_{t-T}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \int_{t-T}^t \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \alpha I.$$

Аналогично получим оценку снизу для второго интеграла:

$$(II.9) \quad \int_0^{t-T} e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \int_0^{t-T} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq 0.$$

Складывая (II.8) и (II.9), получаем оценку снизу для всей матрицы  $\Gamma^{-1}$ :

$$(II.10) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq e^{-\lambda T} \alpha I.$$

Теперь получим оценку снизу для матрицы  $\Gamma^{-1} \forall t \leq T$ :

$$(II.11) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq \Gamma^{-1}(0) e^{-\lambda T} \geq \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)) e^{-\lambda T} I.$$

Тогда с учетом оценок (II.10) и (II.11), нижняя граница матрицы  $\Gamma^{-1} \forall t \geq 0$  имеет вид

$$(II.12) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha \} e^{-\lambda T} I.$$

Так как  $\omega \in L_\infty$  по доказанному, то для выражения  $\omega \omega^T$  выполняется неравенство

$$(II.13) \quad \lambda_{\min}(\omega \omega^T) \leq \omega \omega^T \leq \lambda_{\max}(\omega \omega^T).$$

С учетом неравенства (П.13) получим верхнюю оценку для матрицы  $\Gamma^{-1}$

$$(П.14) \quad \begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &\leq \Gamma^{-1}(0) + \lambda_{\max}(\omega\omega^T) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau I \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) I + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} I. \end{aligned}$$

Объединяя выражения (П.12) и (П.14), получим неравенства для  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$ :

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T} I &\leq \Gamma^{-1}(t) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) I + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} I, \\ \left(\lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda}\right)^{-1} I &\leq \Gamma(t) \leq \\ &\leq \max\left\{\lambda_{\min}^{-1}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha^{-1}\right\} e^{\lambda T} I. \end{aligned}$$

Из выражений (П.15) ясно следует  $\Gamma \in L_\infty$ ,  $\Gamma^{-1} \in L_\infty$ , а значит, и  $\ddot{V} \in L_\infty$ . Тогда производная (П.3) функции Ляпунова (П.2) равномерно непрерывна и по лемме Барбалата  $\dot{V} \rightarrow 0$ . Соответственно достигается сходимость  $\tilde{\theta} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Чтобы определить оценку скорости сходимости ошибки  $\tilde{\theta}$  к нулю, получим с учетом неравенства (П.13) верхнюю оценку производной (П.3):

$$(П.16) \quad \dot{V} = -\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \lambda \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \leq -\lambda_{\min}(\omega\omega^T) \|\tilde{\theta}\|^2 - \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2.$$

Для дальнейшего определения минимальной скорости сходимости перейдем от полученной оценки матрицы  $\Gamma^{-1}$  снизу и сверху (П.15) к выражению для оценки снизу и сверху ее нормы

$$(П.17) \quad \begin{aligned} \|\Gamma^{-1}\| &\geq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[ \min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right]}_{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}, \\ \|\Gamma^{-1}\| &\leq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[ \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} \right]}_{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})}. \end{aligned}$$

С учетом выражения (П.17) перепишем верхнюю оценку (П.16)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\omega\omega^T) \|\tilde{\theta}\|^2 - \lambda \sqrt{n+1} \left[ \min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right] \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \\ &\leq - \left[ \frac{\lambda \lambda_{\min}(\omega\omega^T) + \lambda^2 \sqrt{n+1} \left[ \min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right]}{\sqrt{n+1} \left[ \lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \lambda_{\max}(\omega\omega^T) \right]} \right] \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \\ &\leq -\kappa V. \end{aligned}$$

Решим полученное дифференциальное неравенство, подставив при этом в левую часть решения нижнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.18) \quad \left\| \tilde{\theta} \right\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(\Gamma^{-1}) e^{-\kappa \cdot t} V(0)}.$$

Из выражения (П.18) следует, что ошибка  $\tilde{\theta}$  экспоненциально сходится к нулю со скоростью быстрее, чем  $\kappa$ , что и требовалось доказать во второй части теоремы 1.

*Доказательство теоремы 2.* Кандидат в функции Ляпунова для исследования устойчивости замкнутой системы (2.12) может быть выбран в виде суммы двух квадратичных форм:

$$(П.19) \quad \begin{aligned} V &= \xi^T H \xi = e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \\ H &= \text{blockdiag} \{ P \quad \Gamma^{-1} \}, \\ \lambda_{\min}(H) \|\xi\|^2 &\leq V \leq \lambda_{\max}(H) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Производная квадратичной формы (П.19) в силу действия уравнения в отклонениях (2.12) и уравнений контура адаптации (4.1), а также при учете, что  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$  и уравнения (3.3), принимает вид

$$(П.20) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_{ref}^T P e_{ref} + e_{ref}^T P \dot{e}_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} = \\ &= e_{ref}^T [A_{ref}^T P + P A_{ref}] e_{ref} + 2e_{ref}^T P B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega - \\ &\quad - 2\tilde{\theta}^T \omega [B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref}]^T + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - 2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T [2\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}] \tilde{\theta} = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - \lambda \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 - \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

Производная (П.20) положительно определенной квадратичной формы (П.19) является отрицательной полуопределенной функцией, поэтому ошибка есть  $\xi \in L_\infty$ , а уравнение (П.19) является функцией Ляпунова для системы (2.12). Вместе с этим функция Ляпунова (П.19) имеет конечный предел при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)) &= \\ &= V(\tilde{\theta}(t_0)) + \int_{t_0}^{\infty} \dot{V} dt = V(\tilde{\theta}(t_0)) - \int_{t_0}^{\infty} [e_{ref}^T Q e_{ref} + \lambda (\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta})] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} [\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 + \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2] dt = \\ &= V(\tilde{\theta}(t_0)) - V(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)) < \infty, \end{aligned}$$

а тогда  $\xi \in L_2 \cap L_\infty$  и  $\omega \in L_\infty$  (как результат того, что  $e_{ref} \in L_2 \cap L_\infty$ ).

Таким образом, первая часть теоремы 2 доказана. Для доказательства второй части теоремы 2 определим при учете уравнения (3.3) вторую производную функции Ляпунова (П.19):

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= -\dot{e}_{ref}^T Q e_{ref} - e_{ref}^T Q \dot{e}_{ref} - \lambda \left( \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right) = \\ &= -2e_{ref}^T Q \left[ A_{ref} e_{ref} + B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega \right] + 2\lambda \tilde{\theta}^T \omega \left[ B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref} \right]^T - \\ &\quad - \lambda \left( \tilde{\theta}^T [2\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}] \tilde{\theta} \right) = -2e_{ref}^T Q \left[ A_{ref} e_{ref} + B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega \right] + \\ &\quad + 2\lambda \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P B_{ref} + \lambda^2 \left( \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \right). \end{aligned}$$

По доказанному  $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $e_{ref} \in L_2 \cap L_\infty$  и  $\omega \in L_\infty$  при выполнении условия постоянного возбуждения имеем  $\Gamma \in L_\infty$ ,  $\Gamma^{-1} \in L_\infty$  (доказательство аналогично проведенному (П.6)–(П.15) при доказательстве теоремы 1), а значит, и  $\dot{V} \in L_\infty$ . В этом случае производная (П.20) функции Ляпунова (П.19) равномерно непрерывна и по лемме Барбалата  $\dot{V} \rightarrow 0$ , соответственно достигается сходимость  $\xi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Чтобы определить оценку скорости сходимости ошибки  $\xi$  к нулю, перепишем верхнюю оценку производной (П.20):

$$(П.21) \quad \dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \frac{\lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})} \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2.$$

Для дальнейшего определения минимальной скорости сходимости, пользуясь результатами, полученными при доказательстве теоремы 1, запишем оценку снизу и сверху нормы  $\Gamma^{-1}$  для закона настройки  $\Gamma$  в контуре адаптации (4.1):

$$(П.22) \quad \begin{aligned} \|\Gamma^{-1}\| &\geq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[ \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T} \right]}_{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}, \\ \|\Gamma^{-1}\| &\leq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[ \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)}{\lambda} \right]}_{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})}. \end{aligned}$$

С учетом (П.22) перепишем верхнюю оценку производной (П.21)

$$(П.23) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \\ &\quad - \frac{\lambda^2 \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T}}{\lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + 2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)} \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\eta_{\min} V, \\ \eta_{\min} &= \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}; \frac{\lambda^2 \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T}}{\lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + 2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)} \right\}. \end{aligned}$$

Решим полученное дифференциальное неравенство, подставив при этом в левую часть решения нижнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.24) \quad \|\xi\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(H) e^{-\eta_{\min} \cdot t} V(0)}.$$

Из мажоранты (П.24) следует, что ошибка  $\xi$  экспоненциально сходится к нулю со скоростью быстрее, чем  $\eta_{\min}$ , что и требовалось доказать во второй части теоремы 2.

Для доказательства третьей части теоремы 2 запишем нижнюю оценку производной (П.20):

$$(П.25) \quad \dot{V} \geq -\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \geq -\eta_{\max} V,$$

$$\eta_{\max} = \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}; \lambda \right\}.$$

Решим дифференциальное неравенство (П.25), подставив при этом в левую часть решения верхнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.26) \quad \|\xi\| \geq \sqrt{\lambda_{\max}^{-1}(H) e^{-\eta_{\max} \cdot t} V(0)}.$$

Из определения  $\eta_{\max}$  в (П.25) и миноранты (П.26) следует, что при увеличении коэффициента  $\lambda$  возможно сделать максимальную скорость сходимости ошибки  $\xi$  произвольно большой, что и требовалось доказать в третьей части теоремы 2.

*Замечание.* При  $\lambda \rightarrow \infty$  максимальная скорость сходимости  $\eta_{\max} \rightarrow \infty$ , но минимальная скорость сходимости  $\eta_{\min} \rightarrow 0$  (поскольку  $\lambda T \rightarrow \infty$  в (П.23), это ведет к существенному увеличению расстояния между мажорантой (П.24) и минорантой (П.26), что, в свою очередь, ведет к колебаниям по  $\xi$ . Поэтому на практике нецелесообразно использование значений  $\lambda$ , превышающих  $\lambda_{\max} = T^{-1}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Valavani L.S.* Direct and indirect model reference adaptive control // Automatica. 1979. V. 15. No. 6. P. 653–664.
3. *Hang C., Parks P.C.* Comparative studies of model reference adaptive control systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V. 18. No. 5. P. 419–428.
4. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
5. *Wise K.A., Lavretsky E., Hovakimyan N.* Adaptive control of flight: theory, applications, and open problems // Proc. 2006 Amer. Control Conf. 2006. P. 1–6.
6. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // Annual Reviews in Control. 2020. P. 1–16.

7. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable adaptive systems. N.J.: Prentice Hall, 1989.
8. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control – Stability, Convergence, and Robustness. N.J.: Prentice Hall, 1989.
9. *Ioannou P., Kokotovic P.* Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // *Automatica*. 1984. V. 20. No. 5. P. 583–594.
10. *Khalil H.K., Grizzle J. W.* Nonlinear systems. N.J.: Prentice-Hall, 2002.
11. *Schatz S.P., Yucelen T., Gruenwal B., Holzapfe F.* Application of a novel scalability notion in adaptive control to various adaptive control frameworks // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.* 2015. P. 1–17.
12. *Jaramillo J., Yucelen T., Wilcher K.* Scalability In Model Reference Adaptive Control // *AIAA Scitech 2020 Forum*. 2020. P. 1–13.
13. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Development of Balancing Robot Control System on the Basis of the Second Lyapunov Method with Setpoint-Adaptive Step Size // *Proc. 21th Int. Conf. Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*. 2019. P. 1–6.
14. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Persistent excitation in adaptive systems // *Int. J. Control*. 1987. V. 45. No. 1. P. 127–160.
15. *Kumar K.A., Bhasin S.* Data driven MRAC with parameter convergence // *IEEE Conf. Control Applications (CCA)*. 2015. P. 1662–1667.
16. *Chowdhary G., Muhlegg M., Johnson E.* Exponential parameter and tracking error convergence guarantees for adaptive controllers without persistency of excitation // *Int. J. Control*. 2014. Vol. 87. No. 8. P. 1583–1603.
17. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable adaptive schemes for system identification and control-Part I // *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*. 1974. Vol. 6. P. 542–551.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 23.07.2020

После доработки 09.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020

© 2021 г. А.И. МАЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (a\_i\_malikov@mail.ru)  
(Казанский национальный исследовательский технический  
университет им. А.Н. Туполева — КАИ)

## ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ<sup>1</sup>

Рассматриваются непрерывные системы с дискретным управлением с неопределенными нелинейностями, подверженные воздействию ограниченных внешних возмущений. На основе метода квадратичных функций Ляпунова, матричных систем сравнения и техники дифференциальных линейных матричных неравенств развивается подход к задачам оценивания состояния, подавления начальных отклонений и неопределенных возмущений с помощью обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени. Предлагается способ синтеза периодического и апериодического дискретного управления, обеспечивающий на конечном интервале принадлежность заданному множеству траекторий исходной системы при любых возмущениях, ограниченных по  $L_\infty$  норме.

*Ключевые слова:* непрерывные системы с липшицевыми нелинейностями, неопределенные возмущения, оценивание состояния, дискретное управление, дифференциальные линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231021040048

### 1. Введение

В обширной литературе по синтезу управления область, которой уделяется мало внимания, — это управление системами с дискретными данными. В этой задаче объект с непрерывным временем обычно управляется алгоритмом обратной связи с дискретным временем. Устройство дискретизации и квантования обеспечивает согласование между непрерывным временем и дискретным временем. Одним из способов решения проблемы дискретного управления является реализация алгоритма непрерывного управления с достаточно малым периодом дискретизации. Однако аппаратное обеспечение, используемое для дискретизации и проведения измерений на объекте или вычисления управляющего воздействия с обратной связью, может сделать невозможным сокращение периода выборки до уровня, который гарантирует приемлемые характеристики замкнутой системы. В этом случае становится интересным исследовать применение алгоритмов дискретного управления, основанных на модели процесса с непрерывным временем.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-01045а).



В последнее время дискретное управление широко применяется в цифровых и сетевых системах [1–6]. Большое внимание уделяется анализу их устойчивости [7–21]. Как отмечено в [1], существуют три основных подхода к анализу устойчивости и синтезу системы с дискретными данными, основанные на технике линейных матричных неравенств (ЛМН). Первый подход связан с представлением системы с дискретными данными в виде системы с запаздыванием [1, 2, 5–7]. Такой подход в основном применяется для линейных систем с дискретными данными при постоянной или изменяющейся во времени дискретизацией. Условия устойчивости таких систем получены с помощью функционалов Ляпунова–Красовского или функций типа Ляпунова–Разумихина [2].

Во втором подходе [8, 9, 13, 17 и др.] исходная система с дискретными данными представляется как система с импульсами. Выбирая кусочно-зависимый от времени функционал Ляпунова–Красовского или разрывный функционал Ляпунова–Красовского, можно получить менее консервативные условия устойчивости [14, 15, 18, 21, 22].

Следует отметить, что, хотя некоторые менее консервативные критерии устойчивости могут быть получены с использованием вышеупомянутых двух подходов, выбранные функционалы Ляпунова–Красовского обычно сложны. Так как полученные ЛМН требуют при решении большего количества скалярных и матричных переменных, общая вычислительная сложность критериев устойчивости определенно намного выше.

Третий подход – это подход с дискретным временем [1, 2, 10–12, 17, 19, 20], при котором система с дискретными данными эквивалентно преобразуется в конечномерную систему с дискретным временем, в которой сохраняется информация о состоянии системы между моментами дискретизации. Системы с аperiodическими дискретными данными также изучались в дискретной временной области. В частности, линейные системы с постоянными коэффициентами с аperiodической дискретизацией были проанализированы с использованием модели линейной системы с дискретным временем с переменным параметром. Эффект дискретизации может быть смоделирован с помощью оператора, а проблема устойчивости может быть решена в рамках подхода устойчивости входа/выхода [1, 2, 19]. В данной статье используется второй подход для решения задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления.

Как было отмечено в обзоре [1], несмотря на то что в публикациях были представлены значительные достижения в этой области, проблемы, связанные как с основами таких систем, так и с выводом конструктивных методов анализа устойчивости, остаются открытыми даже для случая линейной системы. Следует также отметить, что не все предлагаемые в литературе критерии устойчивости, представленные в виде ЛМН, могут быть применены для синтеза дискретного управления.

Обычно в основу способов синтеза дискретного управления полагается обеспечение устойчивости (асимптотической, экспоненциальной) [6–8, 10, 12, 17, 23] или оптимального качества по  $H_2$  или  $H_\infty$  критериям исходной непрерывной системы [24–28]. При этом рассматриваются, как правило, линейные

системы без учета возмущений. В [29] показатели  $H_2$  и  $H_\infty$  качества определяются и выражаются через дифференциальные линейные матричные неравенства (ДЛМН). На основе принципа оптимальности Беллмана, выраженного в терминах уравнения динамического программирования, связанного с интервалом времени, соответствующим двум последовательным моментам выборки, предлагаются способы синтеза оптимальных  $H_2$  и  $H_\infty$  регуляторов полного порядка с обратной связью по выходу периодических дискретных данных для линейных инвариантных систем с непрерывным временем. Задачи синтеза оптимальных регуляторов решаются путем преобразования всех ограничений в ЛМН и использования методов полуопределенного программирования. В [30] предложены способы синтеза стабилизирующих динамических регуляторов с обратной связью по выходу для класса линейных апериодических импульсных систем. Условия синтеза сформулированы в виде ЛМН, зависящих от времени, которые могут быть решены численно с использованием методов релаксации матричных сумм квадратов. Полученные результаты применены для синтеза динамических регуляторов с обратной связью по выходу для систем с апериодическими дискретными данными. В [31] подход с использованием векторной функции Ляпунова для 2D систем используется для получения условий устойчивости импульсной системы, а затем решается задача синтеза робастного управления на основе наблюдателя для линейных систем с дискретными данными.

Цель данной статьи — представить способы оценивания состояния и синтеза дискретного управления для класса непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями. При этом исходная непрерывная модель представляется в виде системы с импульсным изменением координат состояния. Предложенный в [32, 33] и развитый в [34, 35] подход с использованием функции Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и ДЛМН применяется для решения задач оценивания состояния, анализа ограниченности на конечном интервале и синтеза дискретного управления одного класса нелинейных систем при учете неопределенных возмущений. В результате задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сводятся к совокупности задач оптимизации с ЛМН, получающихся при кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН [36]. Рассматриваются случаи периодического и апериодического дискретного управления. На примере линейной системы второго порядка проводится сопоставление предлагаемого подхода с другими известными методами. Результаты применяются для стабилизации однозвенного манипулятора с помощью как периодического, так и апериодического дискретного управления.

## 2. Непрерывная система с дискретным управлением

Рассматривается система с дискретным управлением

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)w(t) + \Phi(t)\varphi(t, x(t)) + B(t)u(t),$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^r$  — вектор неопределенных внешних возмущений,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) = K(t_k)x(t_k)$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$  — вектор управления в форме обратной связи по состоянию, измеряемому в дискретные

моменты времени  $t_k \in \Theta = \{t_0, t_k = t_{k-1} + h_k, k = 1, \dots, N-1\}$ ,  $h_k$  — шаг выборки измерений,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times q}$  — известные матрицы с постоянными или непрерывными и ограниченными элементами при всех  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_N]$ ,  $t_0, t_N$  — начальный и конечный моменты времени.

Нелинейная векторная функция  $\varphi(t, x)$  является непрерывной и удовлетворяет ограничению

$$(2) \quad \|\varphi(t, x)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x\|^2 \quad \forall t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где  $C_f(t)x \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — известная матрица с ограниченными элементами при всех  $t \in T$ . Здесь и далее  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора,  $\mu_0, \mu_1 \geq 0$  — заданные константы.

Предположим, что неопределенные возмущения являются непрерывными и ограниченными в каждый момент времени функциями:

$$(3) \quad W = \{w(t) \in \mathbb{R}^r : \|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in T\}.$$

### 3. Задача оценивания состояния

Пусть в начальный момент времени состояние системы  $x(t_0) = x_0$  принадлежит заданному эллипсоиду

$$(4) \quad E(Q_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_0^{-1} x \leq 1\},$$

где  $Q_0$  — заданная положительно определенная матрица, индекс T — знак транспонирования.

Требуется найти оценку в виде эллипсоида, ограничивающего множество состояний исходной системы (1) на рассматриваемом интервале  $[t_0, t_N]$ . В дальнейшем будет предложен способ синтеза дискретного управления, обеспечивающего минимизацию следа матрицы эллипсоида, ограничивающего состояние или выход рассматриваемой системы.

Задача оценивания состояния решается с использованием второго подхода, при котором исходная система с дискретным управлением представляется как импульсная система [1]. Определим переменные  $u(t) = Kx(t_k)$  и  $z(t) = (x^T(t), u^T(t))^T$ . Тогда систему (1) можно представить как систему с импульсами

$$(5) \quad \dot{z}(t) = A_z(t)z(t) + D_z(t)w(t) + \Phi_z(t)\varphi(t, x(t)), \quad t \neq t_k,$$

$$(6) \quad z(t_k) = J_z(t_k)z(t_k - 0), \quad t = t_k \in \Theta,$$

где

$$A_z(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z(t) = \begin{bmatrix} D(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_z(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_z(t_k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K(t_k) & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом  $z(t_0) = z_0 = (x_0^T, u_0^T) \in E(Q_{z_0})$ , где  $Q_{z_0} = \text{diag}(Q_0, KQ_0K^T)$ ,  $x(t) = Cz(t)$ ,  $C = \begin{pmatrix} I_n & 0_m \end{pmatrix}$ ,  $I_n$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица. Обозначим  $C_{fz}(t) = [C_f(t), 0]$ . В дальнейшем для краткости опускаем зависимость от  $t$  или  $t_k$  у матриц  $A_z(t)$ ,  $D_z(t)$ ,  $\Phi_z(t)$ ,  $C_{fz}(t)$ ,  $J_z(t_k)$ .

На интервалах непрерывности  $[t_k, t_{k+1})$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) для оценивания состояния будут использоваться теоремы 1 и 2 из [34], которые здесь приводятся для указанных интервалов.

*Теорема 1 [34]. Если существует решение  $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$  дифференциального матричного уравнения*

$$(7) \quad \begin{aligned} dQ(t)/dt = & A_z(t)Q(t) + Q(t)A_z^T + \alpha Q(t) + \frac{1}{\alpha - \mu_0/\beta} D_z D_z^T + \\ & + \beta \Phi_z \Phi_z^T + \frac{\mu_1}{\beta} Q(t) C_{fz}^T C_{fz} Q(t) \end{aligned}$$

при  $t \in [t_k, t_{k+1})$  и  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$ , то эллипсоид  $E(Q(t))$  является ограничивающим для траекторий системы (5), стартующих из начального эллипсоида  $E(Q_k)$ , т.е.

$$z(t, t_k, z(t_k)) \in E(Q(t)) \quad \text{при всех } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Здесь  $Q(t_0) = Q_{z_0}$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  — свободные параметры, которые в общем случае могут зависеть от времени.

Доказательство теоремы 1 представлено в [34]. Там же были доказаны утверждения о существовании и ограниченности положительно определенных решений уравнения (7) при фиксированных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Вопрос же выбора значений  $\alpha$  и  $\beta$  не был рассмотрен. Однако ими можно распорядиться для получения оценки, оптимальной в каждый момент времени по критерию следа матрицы  $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$ , определяющего сумму длин полуосей ограничивающего эллипсоида  $E(Q(t))$ . Это обеспечивается минимизацией следа матрицы правой части (7) по  $\beta$ ,  $\alpha$  при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .

*Лемма. Пусть матрицы  $\Phi_z$ ,  $D_z$  имеют хотя бы по одному ненулевому элементу при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Тогда если существует на  $[t_k, t_{k+1})$  решение  $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$  уравнения (7), где*

$$(8) \quad \begin{aligned} \beta(Q(t)) = & \sqrt{\frac{\mu_0 \text{trace}(Q(t)) + \mu_1 \text{trace}(Q(t) C_{fz}^T C_{fz} Q(t))}{\text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T)}}, \\ \alpha(Q(t)) = & \frac{\mu_0}{\beta(Q(t))} + \sqrt{\frac{\text{trace}(D_z D_z^T)}{\text{trace}(Q(t))}}, \end{aligned}$$

то эллипсоид  $E(Q(t))$ , ограничивающий состояния системы (5), будет оптимальным по критерию  $\text{trace}(Q(t)) \rightarrow \min_{Q(t), \beta(t)}$  при каждом  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .

Доказательство леммы дано в Приложении.

*Замечание 1.* При подстановке выражений (8) уравнение (7) становится существенно нелинейным. При практических применениях оно может быть решено численно. Исследование же вопросов существования и свойств решений этого уравнения выходит за рамки данной статьи. Здесь предлагается ограничиться заданием на каждом интервале  $[t_k, t_{k+1})$  фиксированных значений параметров  $\beta(Q(t_k))$ ,  $\alpha(Q(t_k))$ , определяемых по формулам (8) в моменты  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ . В этом случае согласно леммам 1 и 2 из [34] (7) будет являться матричной системой сравнения (МСС) для (5), а ее решение  $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$  при условии  $Q(t_k) = Q_k > 0$  будет положительно определенным. Ясно, что такое решение будет определять эллипсоид  $E(Q(t))$ , ограничивающий траектории системы (5), стартующие из эллипсоида  $E(Q(t_k))$ , который, однако, не будет оптимальным при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Поэтому для оценивания состояния здесь будет использоваться подход, основанный на численном решении задачи оптимизации с ДЛМН.

*Теорема 2* [34]. *Если при некотором заданном  $\alpha > 0$  существует решение  $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ ,  $\beta(t) > \alpha/\mu_0$  дифференциального матричного неравенства*

$$(9) \quad \begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + A_z Q(t) + Q(t) A_z^T + \alpha Q(t) + \beta \Phi_z \Phi_z^T & D_z & Q(t) C_{fz}^T & 0 \\ & D_z^T & -\alpha I & 0 & I \\ & C_{fz} Q(t) & 0 & -\frac{\beta(t)}{\mu_1} I & 0 \\ & 0 & I & 0 & -\frac{\beta(t)}{\mu_0} I \end{bmatrix} \leq 0$$

при  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , то эллипсоид  $E(Q(t))$  является ограничивающим для траекторий системы (5), стартующих из начального эллипсоида  $E(Q_k)$ .

Доказательство теоремы 2 представлено в [34].

Как отмечено в [34], положительно определенное решение уравнения (7) при некоторых  $\alpha > 0$ ,  $\beta(t) \geq \mu_0/\alpha$  на рассматриваемом интервале времени (в данном случае  $[t_k, t_{k+1})$ ) будет являться решением дифференциального матричного неравенства (9) при тех же значениях  $\beta$ ,  $\alpha$ . При тех же  $\beta$ ,  $\alpha$  могут существовать и другие решения (9), которые будут определять эллипсоид, ограничивающий траектории системы (5). При фиксированном  $\alpha > 0$  неравенство (9) становится линейным по переменным  $Q(t)$  и  $\beta(t)$  и оптимальный ограничивающий эллипсоид будет определяться из решения следующей задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t)) \rightarrow \min$  при ограничениях  $Q(t) > 0$ ,  $\beta(t) > \mu_0/\alpha$

и ДЛМН (9). Такое оптимальное решение будет зависеть от параметра  $\alpha$ . Чтобы решение было оптимальным и по  $\alpha$ , следовало бы добавить еще одномерную оптимизацию по  $\alpha$  из заданного диапазона. Однако это еще более усложняет задачу нахождения оптимального ограничивающего эллипсоида. Поэтому значение параметра  $\alpha$  предлагается вычислять только в дискретные моменты  $t_k$  из (8) по известной в этот момент матрице  $Q(t_k)$ , а затем при  $\alpha_k = \alpha(Q(t_k))$  решать задачу оптимизации  $\text{trace}(Q(t)) \rightarrow \min$  при ограничениях  $Q(t) > 0$ ,  $\beta(t) > \mu_0/\alpha_k$  и ДЛМН (9). Далее будет показано, каким об-

разом эта задача оптимизации сводится в результате дискретизации к совокупности задач оптимизации с ограничениями в виде ЛМН.

В моменты  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , поведение системы представлено линейным разностным уравнением (6). В этом случае для оценивания состояния будет использоваться теорема 1 из [35], которая здесь приводится применительно к линейному разностному уравнению (6).

*Теорема 3. Чтобы эллипсоид  $E(Q(t_{k+1}))$  ограничивал состояния системы в момент  $t_{k+1}$  при условии, что  $z(t_{k+1} - 0) \in E(Q(t_{k+1} - 0))$ , достаточно, чтобы существовало решение  $Q(t_{k+1}) > 0$  разностного линейного матричного неравенства (РЛМН)*

$$(10) \quad \begin{pmatrix} Q(t_{k+1}) & J_z Q(t_{k+1} - 0) \\ Q(t_{k+1} - 0) J_z^T & Q(t_{k+1} - 0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Доказательство теоремы 3 для более общего случая дискретной системы с неопределенными возмущениями представлено в [35].

Рассмотрим теперь ряд случаев относительно параметра выборки  $h_k$ :

1. Все значения  $h_k$  равны  $h_k = h > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $h$  — постоянный период выборки;

2. Все значения  $h_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , известны (переменный период выборки);

3. Значения  $h_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , неизвестны и могут изменяться в интервале  $[h_{\min}, h_{\max}]$ , где  $0 < h_{\min} < h_{\max}$ ,  $h_{\min}, h_{\max}$  известны.

Рассмотрим сначала случай 1 с периодическими выборками (импульсами), т.е.  $t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$ . Случай 2 при переменных, но известных  $h_k$  рассматривается аналогично.

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 4. Эллипсоид  $E(Q(t))$ , где  $Q(t) = Q(t, t_0, Q_{z0})$  — решение матричной системы дифференциальных уравнений (7) с РЛМН (10) или задачи оптимизации  $\text{trase}(Q(t, t_0, Q_{z0})) \rightarrow \min$  с ограничениями ДЛМН (9) и РЛМН (10) будет ограничивающим для состояний системы (5), (6), а эллипсоид с матрицей  $CQ(t, t_0, Q_{z0})C^T$  будет ограничивающим для состояний исходной системы (1) с дискретным управлением при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3).*

Доказательство основывается на последовательном применении теорем 1 и 2 на интервалах непрерывности  $[t_k, t_{k+1})$  ( $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ) для получения матрицы  $Q(t, t_k, Q(t_k)) > 0$  эллипсоида, ограничивающего состояние  $z(t, t_k, x(t_k))$  системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида с матрицей  $Q(t_k)$  при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3), и применении теоремы 3 в точках  $t_{k+1}$ , ( $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ) для получения матрицы  $Q(t_{k+1}) > 0$ , ограничивающей состояние  $z(t_{k+1}, t_k, x(t_k))$  системы (5), (6) после импульса при условии  $z(t_{k+1} - 0, t_k, x(t_k)) \in E(Q(t_{k+1} - 0))$ . Здесь  $Q(t_{k+1} - 0) = Q(t_k + h, t_k, Q_k)$  — матрица эллипсоида, ограничивающего состояние системы (5), (6) непосредственно перед импульсом в момент  $t_{k+1}$ . Она определяется как решение дифференциального матричного

уравнения (7) или задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t, t_k, Q_k)) \rightarrow \min$  с ДЛМН (9) на  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Таким образом, в случае периодического дискретного управления состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида  $E(Q_{z0})$  будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией  $Q(t, t_0, Q_{z0})$ , являющейся решением МСС (7) с РЛМН (10) или задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t, t_0, Q_{z0})) \rightarrow \min$  с ограничениями ДЛМН (9) и РЛМН (10) при  $t \in T$ .

При численном решении задачи оптимизации проводится дискретизация ДЛМН (9) на рассматриваемом интервале  $[t_0, t_N]$ . Производная  $dQ(t)/dt$  на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  считается постоянной и представляется как  $dQ(t)/dt = Z(t_k)$ , где  $t_k = t_0 + kh$ ,  $k = 1, \dots, N$ , и  $N$  есть целая часть отношения  $(t_N - t_0)/h$ . Тогда для  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  матрица  $Q(t)$  определится как

$$(11) \quad Q(t) = Q(t_k) + (t - t_k)Z(t_k),$$

причем  $Q(t_0) = Q_{z0}$ . Для того чтобы матрица  $Q(t)$  удовлетворяла неравенству  $Q(t) > 0$  и ДЛМН (9) при всех  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла им в двух крайних точках  $t \in \{t_k, t_k + h\}$ , т.е. при каждом  $k = 0, \dots, N - 1$  одновременно должны выполняться неравенства [36]:

$$(12) \quad Q(t_k) > 0, \quad Q(t_k + h) > 0,$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} -Z(t_k) + A_z Q(t_k) + Q(t_k) A_z^T + \alpha_k Q(t_k) + \beta \Phi_z \Phi_z^T & D_z & Q(t_k) C_{fz}^T & 0 \\ & D_z^T & -\alpha_k I & 0 \\ & & 0 & -\frac{\beta(t_k)}{\mu_1} I \\ & C_{fz} Q(t_k) & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{\beta(t_k)}{\mu_0} I \\ & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} -Z(t_k) + A_z Q(t_k + h) + Q(t_k + h) A_z^T + \alpha Q(t_k + h) + \beta \Phi_z \Phi_z^T & D_z & Q(t_k + h) C_{fz}^T & 0 \\ & D_z^T & -\alpha_k I & 0 \\ & & 0 & -\frac{\beta(t_k)}{\mu_1} I \\ & C_{fz} Q(t_k + h) & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{\beta(t_k)}{\mu_0} I \\ & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \leq 0,$$

где  $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) = Q(t_{k+1} - 0)$ ,  $\alpha_k = \alpha(Q(t_k))$  из (8) и матрицы  $A_z, D_z, \Phi_z, C_{fz}$  берутся в момент  $t_k$ .

В результате линейной аппроксимации (11) решения ДЛМН (9) нахождение матрицы  $Q(t) > 0$  эллипсоида, ограничивающего состояния системы, сводится к последовательному решению совокупности задач оптимизации:  $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min_{Q(t_{k+1}) > 0, \beta(t_{k+1}) \geq \mu_0 / \alpha_k}$  при ЛМН ограничениях (10), (12)–(14) для  $k = 0, \dots, N - 1$ . На первой итерации при  $k = 0$  по заданной матрице  $Q(t_0) = Q_0$  и  $\alpha_0$  в результате решения указанной задачи оптимизации с

ЛМН вычисляются матрицы  $Q(t_0 + h)$  и  $Q(t_1)$  с минимальным следом, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающего состояния системы (5), (6) на интервале  $[t_0, t_1]$ . Затем при  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  по матрице  $Q(t_k)$  вычисляются  $\alpha_k$  и матрицы  $Q(t_k + h)$  и  $Q(t_{k+1})$ , которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающего состояния системы (5), (6) на последующих интервалах  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Для численного решения на каждой итерации задач оптимизации с ЛМН используются программные средства полуопределенного программирования (CVX, Sedumi, Yalmip и др.). Они позволяют решать такую задачу для системы размерности порядка 20 за доли секунды. Общее время, требуемое для численного решения всей совокупности задач и получения эллипсоидальных оценок, будет зависеть от длительности рассматриваемого интервала времени и шага дискретизации ДЛМН.

*Замечание 2.* С целью более точной аппроксимации решения задачи оптимизации с ДЛМН на интервалах  $[t_k, t_{k+1}]$  рекомендуется решать задачу с шагом  $h_{ki} = h/M$ , где  $M > 1$  — количество промежуточных точек дискретизации интервала  $[t_k, t_{k+1}]$ . В этом случае значение матрицы  $Q(t_k + h) = Q(t_{k+1} - 0)$  определится как  $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ_{ks}$ , где  $Z_{ks} = \sum_{i=0}^{M-1} Z(t_{ki})/M$  среднее значение производной на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $t_{ki} = t_k + ih_{ki}$ .

Рассмотрим теперь случай 3, когда система (5), (6) является апериодической, т.е. импульсы происходят в нерегулярные моменты времени. Пусть выполнено ограничение в виде интервала времени для последовательности моментов импульсов, т.е.  $t_{k+1} - t_k = h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ . Пусть  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  и  $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$ .

Так же как в случае 1, при  $t \in [t_k, t_{k+1}] = [t_k, t_k + h_{\min} + \theta]$  может быть получена оценка в виде эллипсоида  $E(t) = \{x : x^T Q^{-1}(t)x \leq 1\}$ , если при некоторых  $\beta(t_k) > 0$ ,  $\alpha(t_k) \geq \mu_0/\beta(t_k)$  найдется положительно определенное решение  $Q(t) > 0$  матричной системы сравнения (7) или дифференциального линейного матричного неравенства (9) при  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Однако момент возникновения каждого следующего импульса  $t_{k+1}$  является неопределенным и может изменяться в интервале  $[t_k + h_{\min}, t_k + h_{\max}]$ . В данном случае эллипсоид, ограничивающий состояния системы в момент  $t_{k+1}$ , должен гарантированно содержать все эллипсоиды, которые будут получены при импульсном воздействии из эллипсоидов, ограничивающих состояния до момента  $t_{k+1}$  при всех  $t_{k+1} = t_k + h_k \in [t_k + h_{\min}, t_k + h_{\max}]$ . Поэтому (10) заменяется неравенством

$$(15) \quad Q(t_{k+1}) \geq JQ(t_k + h_{\min} + \theta)J^T,$$

которое должно быть выполнено при любом  $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$ . Проверка этого неравенства затруднена, однако при использовании линейной аппроксимации решения задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t)) \rightarrow \min$  при ДЛМН ограничениях (9) в виде  $Q(t_k + h_{\min} + \theta) = Q(t_k) + (h_{\min} + \theta)Z(t_k)$  матричное неравенство (15) будет линейным по переменной  $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$ . Поэтому оно будет выполнено при любых  $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$  тогда и только тогда, когда



выполняется одновременно в двух крайних точках рассматриваемого интервала, т.е. при  $\theta \in \{0, h_{\max} - h_{\min}\}$ :

$$(16) \quad Q(t_{k+1}) \geq JQ(t_k + h_{\min})J^T, \quad Q(t_{k+1}) \geq JQ(t_k + h_{\max})J^T.$$

Здесь матрицы  $Q(t_k + h_{\min})$ ,  $Q(t_k + h_{\max})$  определяются из (11), вычисленных при  $t = t_k + h_{\min}$  и  $t = t_k + h_{\max}$  соответственно.

Таким образом, в случае аperiodического дискретного управления состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида  $E(Q_{z_0})$  будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией  $Q(t, t_k, Q_k)$  на интервалах непрерывности  $[t_k, t_{k+1})$  и эллипсоидом с матрицей  $Q_{k+1}$  при  $t = t_{k+1}$ . Матрица  $Q(t, t_k, Q_k)$  определяется из (11), где  $Z(t_k)$ , а также матрицы  $Q(t_k + h_k)$  и  $Q_{k+1}$  вычисляются в задаче оптимизации  $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min_{Q(t_{k+1}) > 0, \beta_k > \mu_0/\alpha_k}$  с ЛМН ограничениями (12)–(14) и (16).

Отметим, что оценку для вектора состояния  $x(t)$  исходной системы (1) с дискретным управлением, с нелинейностями из (2) и возмущениями из (3) при  $x(t_0)$  из (4) будет определять эллипсоид с матрицей  $CQ(t, t_0, Q_{z_0})C^T$ .

#### 4. Задача об ограниченности относительно заданных множеств

Обозначим множество начальных состояний  $E(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R_0^{-1} x \leq 1\}$  и множество допустимых траекторий  $E(R(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R^{-1}(t) x \leq 1\}$ ,  $R_0, R(t)$  — известные симметрические положительно определенные матрицы,  $t \in T$ . Так же как в [32], вводится определение.

*Определение.* Будем говорить, что система с дискретными данными (5), (6) обладает на  $t \in T$  свойством ограниченности относительно заданных множеств  $\{E(R_0), E(R(t))\}$ , если для всех  $z_0 \in E(R_0)$  существуют на  $t \in T$  решения  $z(t) = z(t, t_0, x_0)$  системы (5), (6) с начальными данными  $z(t_0) = z_0$ , для которых имеет место  $z(t, t_0, z_0) \in E(R(t))$  при всех  $t \in T$ , всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3).

Отметим, что аналогичное определение было введено в [32] для линейных неавтономных систем, где были получены необходимые и достаточные условия в терминах разрешимости дифференциальных линейных матричных неравенств. Такое же динамическое свойство изучалось применительно к непрерывным в [34] и дискретным в [35] нелинейным липшицевым системам с неопределенными возмущениями. Особенностью данного динамического свойства является то, что оно определяет как качественное поведение, так и дает количественные оценки, поскольку в его определении указываются конкретные множества начальных данных и множества, которым должны принадлежать траектории системы с этими начальными данными.

С учетом полученных выше эллипсоидальных оценок состояния для системы с дискретными данными (5), (6), приходим к следующему утверждению.

*Теорема 5.* Система (5), (6) с периодическими (аperiodическими) импульсами обладает на  $[t_0, t_N]$  свойством ограниченности относительно заданных множеств  $\{E(R_0), E(R(t))\}$ , если существует решение  $Q(t) =$

$= Q(t, t_0, Q_{z0})$  МСС (7) с РЛМН (10) или ДЛМН (9) с РЛМН (10) (соответственно задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min_{Q(t_{k+1}) > 0, \beta \geq \mu_0 / \alpha_k}$  с ЛМН ограничениями (12)–(14) и (16)) с начальными данными  $Q_0 \geq R_0$ , удовлетворяющее неравенству  $Q(t) \leq R(t)$  для всех  $t \in T$ .

При выполнении условий теоремы 5 исходная система (1) с дискретным управлением будет обладать ограниченностью относительно заданных множеств  $\{E(CR_0C^T), E(CR(t)C^T)\}$ .

### 5. Задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего ограниченность непрерывной системы

Рассмотрим систему (1) с управлением, которое должно удовлетворять ограничению

$$(17) \quad u(t) \in \left\{ u : u^T U^{-1} u \leq 1 \right\}, \quad t \in T,$$

где  $U$  — заданная симметрическая положительно определенная  $(m \times m)$ -матрица.

Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ :

$$(18) \quad u(t) = K(t_k)x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего начальные отклонения и воздействие внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для состояний или обеспечивающего ограниченность замкнутой системы. Здесь  $K$  — матрица коэффициентов усиления дискретного регулятора.

Задача синтеза с учетом рассмотренного в разделе 3 способа численного решения ДЛМН (9) сводится к задаче оптимизации критерия при ограничениях в виде разностных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы, определяющий размер ограничивающего состояния эллипсоида в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Представим исходную систему с дискретным управлением (18) в виде (5) с импульсами (6). Искомая матрица коэффициентов усиления регулятора входит только в разностное уравнение для импульсов (6). Представим его в виде

$$(19) \quad z(t_k) = J_z z(t_k - 0) = \left( \tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C \right) z(t_k - 0), \quad t_k \in \Theta,$$

где

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad C = ( I \ 0 ), \quad z(t_0 - 0) = z(t_0) \in E(Q_{z0}),$$

$Q_{z0} > 0$  — заданная матрица эллипсоида, ограничивающего начальные состояния.

Справедлива следующая теорема.

*Теорема 6.* Пусть при  $Q(t_0 - 0) = Q_{z0}$ ,  $\alpha_k = \alpha(Q(t_k - 0))$  из (8) и всех  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , найдутся решения  $Q(t_k)$ ,  $Q(t_{k+1} - 0) = Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k)$ ,  $Y(t_k)$  задачи

$$\text{trace}[Q(t_{k+1} - 0)] \rightarrow \min$$

при ограничениях (12)–(14) и

$$(20) \quad \begin{pmatrix} Q(t_k) & \tilde{J}Q(t_k - 0)C^T + \tilde{B}Y_k \\ CQ(t_k - 0)\tilde{J}^T + Y_k^T\tilde{B}^T & CQ(t_k - 0)C^T \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(21) \quad \begin{pmatrix} U & Y_k \\ Y_k^T & CQ(t_k - 0)C^T \end{pmatrix} \geq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q(t_k)$ ,  $Y_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z(t_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярной переменной  $\beta(t_k) > \mu_0/\alpha_k$ , определяет согласно (11) матрицу  $Q(t)$  ограничивающего эллипсоида для вектора состояния  $z(t)$  и зависящую от времени матрицу коэффициентов дискретного управления по состоянию  $K(t_k) = Y_k(CQ(t_k - 0)C^T)^{-1}$ . Если, кроме того, матрица  $Q(t)$  удовлетворяет дополнительно ограничениям  $Q_{z0} \geq R_0$  и  $Q(t) \leq R(t)$  для всех  $t \in [t_0, t_0 + Nh]$ , где  $R_0$  и  $R(t)$  — заданные положительно определенные симметрические матрицы, то искомое управление (18) обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств  $\{E(R_0), E(R(t))\}$ .

Доказательство теоремы 6 дано в Приложении.

В случае аperiodического дискретного управления ( $t_{k+1} - t_k = h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ ) с учетом полученных в разделе 3 оценок состояния задача синтеза сводится к подобной задаче оптимизации  $\text{trace}[Q(t_{k+1} - 0)] \rightarrow \min$  при ЛМН ограничениях (12)–(14) и (20), (21) с той лишь разницей, что добавляются дополнительные ограничения на матрицу  $Q(t_{k+1} - 0)$ :

$$(22) \quad Q(t_{k+1} - 0) \geq Q(t_k) + h_{\min}Z(t_k), \quad Q(t_{k+1} - 0) \geq Q(t_k) + h_{\max}Z(t_k).$$

*Замечание 3.* С целью уменьшения погрешности при линейной аппроксимации решения задачи оптимизации с шагом, равным периоду дискретного управления, предлагается аппроксимировать решение задачи оптимизации на каждом дискретном интервале  $[t_k, t_{k+1})$  с более мелким шагом, чем период дискретного управления, т.е.  $h_i = (t_{k+1} - t_k)/M = h/M$ , где  $M$  — количество промежуточных точек интервала  $[t_k, t_{k+1})$ . В результате исходная задача оптимизации заменяется следующей:

$$\begin{aligned} &\text{trace}(Q(t_{k+1} - 0)) \rightarrow \min \quad \text{с ЛМН ограничениями} \\ &Q(t_{kj}) = Q(t_{k(j-1)}) + (j-1)h_i Z(t_{k(j-1)}) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -Z(t_{k(j-1)}) + A_z Q(t_{k(j-1)}) + Q(t_{k(j-1)}) A_z^T + \\ + \alpha_{kj} Q(t_{k(j-1)}) + \beta \Phi_z \Phi_z^T & D_z & Q(t_{k(j-1)}) C_{fz}^T & 0 \\ D_z^T & -\alpha_{kj} I & 0 & I \\ C_{fz} Q(t_{k(j-1)}) & 0 & -\frac{\beta_{kj}}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\frac{\beta_{kj}}{\mu_0} I \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} -Z(t_{kj}) + A_z Q(t_{kj}) + Q(t_{kj}) A_z^T + \\ + \alpha_{kj} Q(t_{kj}) + \beta \Phi_z \Phi_z^T & D_z & Q(t_{kj}) C_{fz}^T & 0 \\ D_z^T & -\alpha_{kj} I & 0 & I \\ C_{fz} Q(t_{kj}) & 0 & -\frac{\beta_{kj}}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\frac{\beta_{kj}}{\mu_0} I \end{bmatrix} \leq 0,$$

при всех  $j = 1, 2, \dots, M$  и ЛМН

$$\begin{pmatrix} Q(t_k) & \tilde{J}Q(t_k - 0)\tilde{C}^T + \tilde{B}Y_k \\ \tilde{C}Q(t_k - 0)\tilde{J}^T + Y_k^T \tilde{B}^T & \tilde{C}Q(t_k - 0)\tilde{C}^T \end{pmatrix} \geq 0,$$

где  $t_{kj} = t_{k(j-1)} + (j-1)h_i$ ,  $\alpha_{kj} = \alpha(Q(t_{kj}))$  и матрицы  $A_z$ ,  $D_z$ ,  $\Phi_z$ ,  $C_{fz}$  берутся в момент  $t_{kj}$ .

## 6. Численные примеры

Для сравнения рассмотрим часто встречающийся пример из [6] линейной системы с дискретным управлением со значениями параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad K = [ -3,75 \quad -11,5 ].$$

Среди разрабатываемых подходов [6, 7, 9, 14, 16, 17] наибольшая верхняя оценка  $h = 1,7294$  периода дискретного управления с постоянными коэффициентами  $K$  была получена в [18] с использованием так называемого петлевого функционала с граничными условиями. Применение предложенного здесь подхода при численном решении МСС (7), принимающей вид  $dQ(t)/dt = A_z Q + Q A_z^T$  для линейной системы без возмущений, с РЛМН (10), получена такая же верхняя граница рассматриваемого дискретного управления, при котором эллипсоидальные оценки множества решений с начальными данными из заданного эллипсоида через некоторый промежуток времени стягиваются к началу координат, что соответствует поведению асимптотически устойчивой системы.

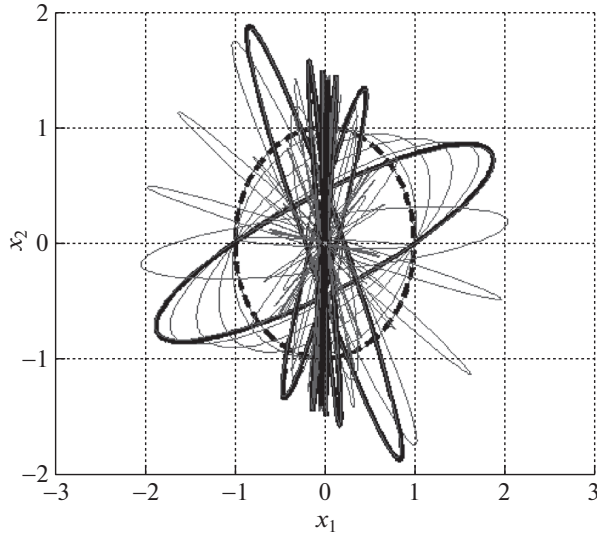


Рис. 1. Эллипсоидальные оценки множества состояний системы с периодическим ( $h = 1,7294$ ) дискретным управлением.

Следует отметить, что в [18] с помощью достаточно сложного, так называемого петлевого функционала анализ асимптотической устойчивости линейной автономной системы без возмущений сводился к разрешимости задачи оптимизации с ЛМН, в которой наряду с обычными переменными появляется большое количество вспомогательных матричных переменных. При этом существенно возрастает размерность ЛМН. В отличие от [18] предлагаемый подход применительно к линейным системам без возмущений позволяет свести задачу оценивания состояния (а также анализа асимптотической устойчивости) к совокупности задач оптимизации с ЛМН, в которых отсутствуют какие-либо вспомогательные переменные, что приводит к сокращению вычислений.

На рис. 1 толстыми сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояния рассматриваемой системы в дискретные моменты времени  $t_k = kh$ ,  $k = 1, \dots, N$ , при  $h = 1,7294$ , а тонкими сплошными линиями — в промежуточные моменты времени. Начальный эллипс с матрицей  $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  показан штриховой линией.

Пусть теперь период дискретного управления задан как  $h = 5$  с. В результате решения задачи оптимизации  $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min$  с ЛМН ограничениями (12)–(14) и (22) при каждом  $k = 0, 1, \dots, 19$  были получены коэффициенты усиления  $K(t_k)$  дискретного управления, которое обеспечивает ограниченность на интервале  $[0, 70$  с] траекторий рассматриваемой системы, с начальными данными из эллипса с матрицей  $Q_0$  (показан на рис. 2,а толстой штриховой линией). Тонкими сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояния в точках дискретизации  $t_k$  указанного интервала времени. При этом эллипсы сначала при каждом  $t_k \in [0, 25$  с) расширяются (по критерию  $\text{trace}(Q(t_k))$ ), а во второй части интервала  $[0, 70$  с] медленно сжимаются.

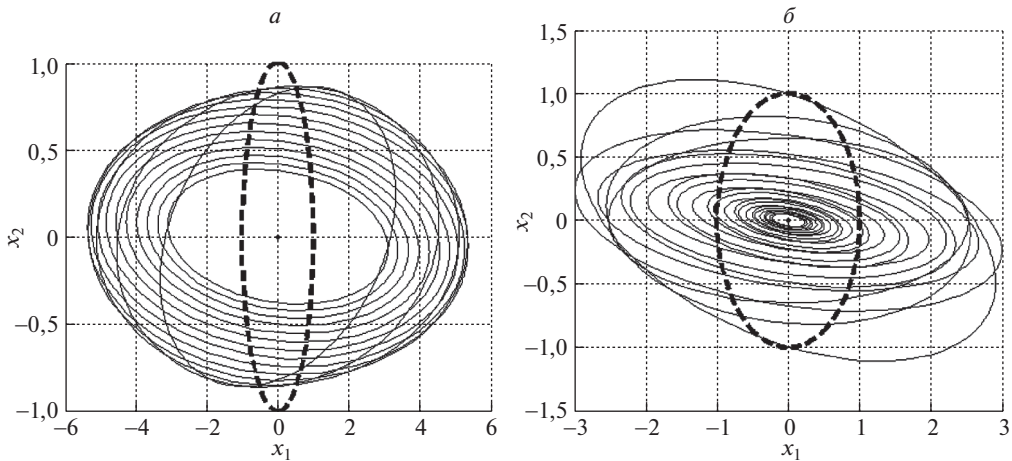


Рис. 2. Эллипсоидальные оценки множества состояний системы с периодическим ( $h = 5$  с) дискретным управлением.

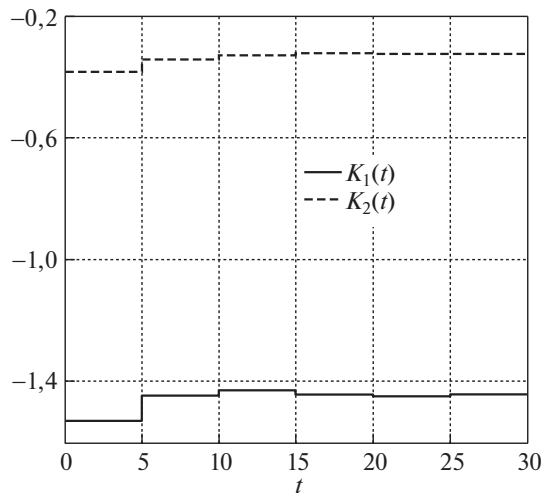


Рис. 3. Изменения коэффициентов усиления периодического ( $h = 5$  с) дискретного управления.

С использованием замечания 2 при  $h_i = h/5 = 1$  с были получены коэффициенты дискретного управления и эллипсоидальные оценки состояния, которые представлены на рис. 2, б. Штриховой линией показан начальный эллипс, а тонкими сплошными линиями — эллипсы, ограничивающие состояния в дискретные  $t_k$  и промежуточные  $t_{ki}$  моменты времени рассматриваемого интервала  $[0, 70$  с].

Сравнивая рис. 2, а и 2, б, можно отметить, что полученное периодическое дискретное управление обеспечивает после  $t = 5$  с постепенное сжатие эллипсоидальных оценок, причем более эффективное (по критерию следа матрицы эллипса) при использовании замечания 2. На рис. 3 изображены графики изменения коэффициентов усиления дискретного управления.

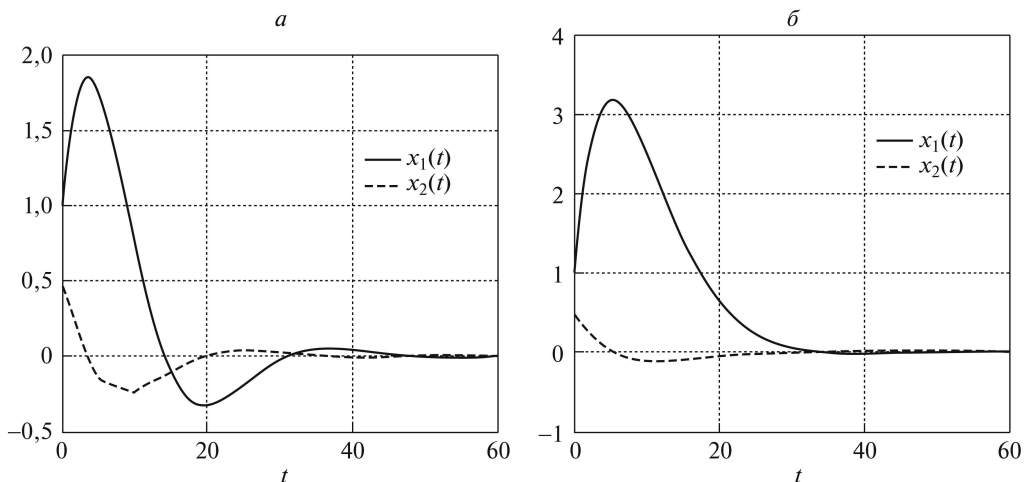


Рис. 4. Изменения координат состояния рассматриваемой системы (а) с периодическим, (б) с аperiodическим дискретным управлением.

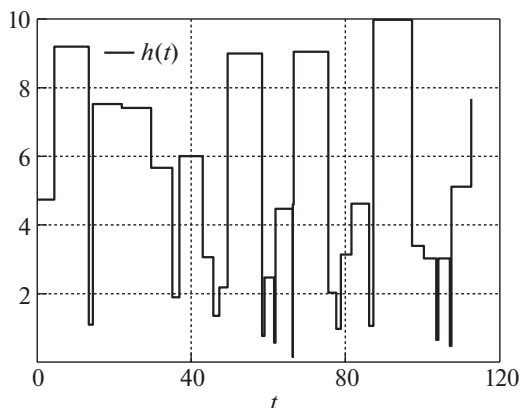


Рис. 5. Изменение шага дискретизации в системе с аperiodическим дискретным управлением.

В результате решения задачи оптимизации из теоремы 6 для системы с аperiodическим дискретным управлением ( $h_{\min} = 0,01$  с;  $h_{\max} = 10$  с) получены коэффициенты усиления  $K = [-0,0617 \quad -0,4326]$ , при которых обеспечивается сначала расширение, а после 10 с — медленное сжатие эллипсоидальных оценок. На рис. 4,а показаны изменения координат состояния рассматриваемой системы с полученным периодическим ( $h = 5$  с) дискретным управлением, а на рис. 4,б — с аperiodическим дискретным управлением при изменении шага дискретизации  $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ , задаваемого с помощью датчика случайных чисел (показано на рис. 5).

## 7. Приложение к однозвенному манипулятору

Рассматривается манипулятор с одним звеном, который через редуктор соединен с выходным валом двигателя постоянного тока [37]. Предполагается, что движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости (рис. 6).

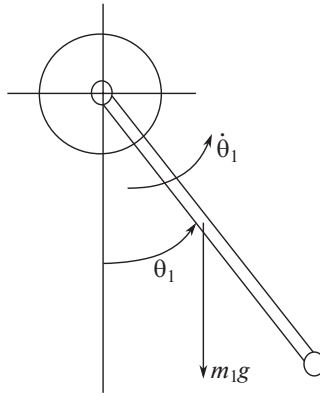


Рис. 6. Кинематическая схема однозвенного манипулятора.

Обозначим  $\theta_1$  — угол отклонения от вертикальной оси,  $\dot{\theta}_1 = d\theta_1/dt$  — угловая скорость звена манипулятора. Предполагается, что известны значения  $\theta_1, \dot{\theta}_1$  только в дискретные моменты времени  $t_k \in \Theta$ .

Уравнение динамики манипулятора имеет вид

$$(23) \quad (m_1 l_1^2 + I_{p1}) \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 + T_1 - B_{\theta 1} \dot{\theta}_1 - w_1.$$

Здесь  $m_1, l_1, I_{p1}$  — масса, расстояние до центра масс и момент инерции звена,  $B_{\theta 1}$  — коэффициент пропорциональности момента вязкого трения,  $w_1$  — неопределенное возмущение, вызванное моментами сопротивления, сухого трения и других неучтенных моментов,  $T_1$  — момент, создаваемый двигателем постоянного тока.

Пренебрегая электромагнитными переходными процессами в якорной обмотке двигателя и полагая, что момент двигателя пропорционален напряжению якорной обмотки, выражение для момента представляется в виде

$$(24) \quad T_1 = \frac{K_g K_m}{R} V_1 - \frac{(K_g K_m)^2}{R} \dot{\theta}_1,$$

где  $K_g, K_m, R$  — коэффициенты редукции, пропорциональности и активное сопротивление обмотки двигателя,  $V_1$  — управляющее напряжение. Таким образом, момент, приложенный к звену, является функцией входного напряжения якорной обмотки двигателя. Второй член пропорционален угловой скорости со знаком минус потому, что ЭДС вращения вызывает противодействующий момент по сравнению с моментом, создаваемым входным напряжением.

Положение равновесия для манипулятора определяется из уравнения

$$-m_1 g l_1 \sin \theta_1 + T_1 = 0.$$

Если требуется стабилизировать манипулятор в заданном положении  $\theta_{10}$ , то необходимо приложить управляющий момент  $T_0 = m_1 g l_1 \sin \theta_{10}$ . Тогда из (24) получаем выражение для установочного значения напряжения для выбранного положения:

$$V_0 = m_1 g l_1 \sin \theta_{10} \frac{R}{K_g K_m}.$$



Введем обозначения для отклонений от невозмущенного движения  $\theta_{10}$  и от установочных значений момента и напряжения:

$$\theta = \theta_1 - \theta_{10}, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_1, \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1, \quad T = T_1 - T_0, \quad V = V_1 - V_0.$$

После подстановки (24) в (23) с учетом обозначения  $\beta = K_g K_m$  получаем уравнение движения манипулятора в отклонениях от требуемого положения равновесия  $\theta_{10}$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{-m_1 g l_1 [\sin(\theta + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10})] - \left( B_{\theta 1} + \frac{\beta^2}{R} \right) \dot{\theta} + \frac{\beta}{R} V - w}{m_1 l_1^2 + I_{p1}}.$$

Определим вектор состояния  $x = (\theta, \dot{\theta})^T$  и управление  $u(t_k) = V(t_k) = K(t_k)x(t_k)$ . Тогда исходное уравнение представляется в виде (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} & -\frac{B_{\theta 1} + \frac{\beta^2}{R}}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{R(m_1 l_1^2 + I_{p1})} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix},$$

$$C_f = (1 \ 0), \quad \varphi(\theta) = \sin(\theta + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10}) - \theta.$$

Моделирование системы с регуляторами проводилось при значениях параметров:  $l = 0,5$ ;  $I_P = 0,05$ ;  $g = 9,8$ ;  $R = 2,6$ ;  $K_g = 3,7$ ;  $K_m = 3,835$ ;  $B_\theta = 0,025$ .

Пусть требуется стабилизировать звено манипулятора в вертикальном положении  $\theta_{10} = \pi$ . При таком  $\theta_{10}$  нелинейность  $\varphi(\theta)$  удовлетворяет условию (2) при  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 \leq 1$ .

С использованием теоремы 6 в результате решения совокупности задач оптимизации с ЛМН при  $\alpha = 0,0043$ ,  $\beta = 1,0296$  было получено периодическое с  $h = 2$  с дискретное управление с постоянными коэффициентами усиления  $K = [-3,2518 \quad -0,0025]$ , которое обеспечивает на конечном интервале  $[0 \ 100 \text{ с}]$  стабилизацию манипулятора с начальными данными из эллипса с матрицей  $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . На рис. 7 представлены эллипсоидальные оценки состояния однозвенного манипулятора с периодическим дискретным управлением. Начальный эллипс с матрицей  $Q_0$  обозначен толстой штриховой линией. Тонкими сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояние в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 50$ . Предельный эллипс с матрицей  $Q_0 = \begin{bmatrix} 0,1193 & -0,0159 \\ -0,0159 & 0,5904 \end{bmatrix}$ , к которому стягиваются оценки состояния при  $t \geq 90$  с, обозначен толстой сплошной линией.

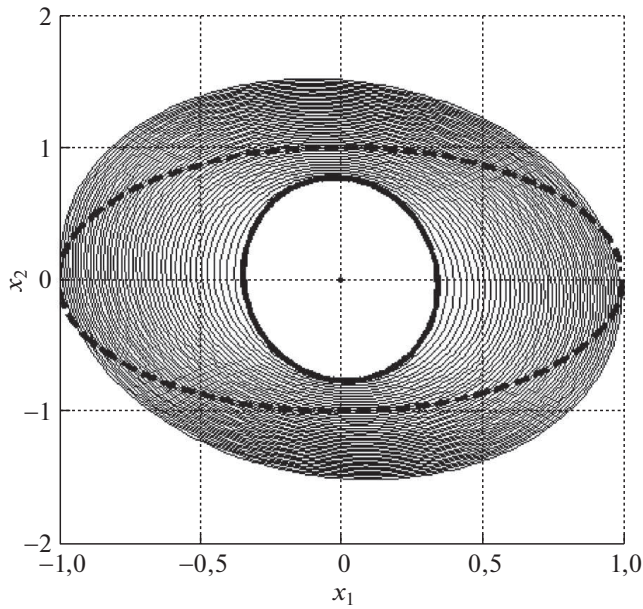


Рис. 7. Оценки множества состояний однозвенного манипулятора с периодическим дискретным управлением при действии возмущений.

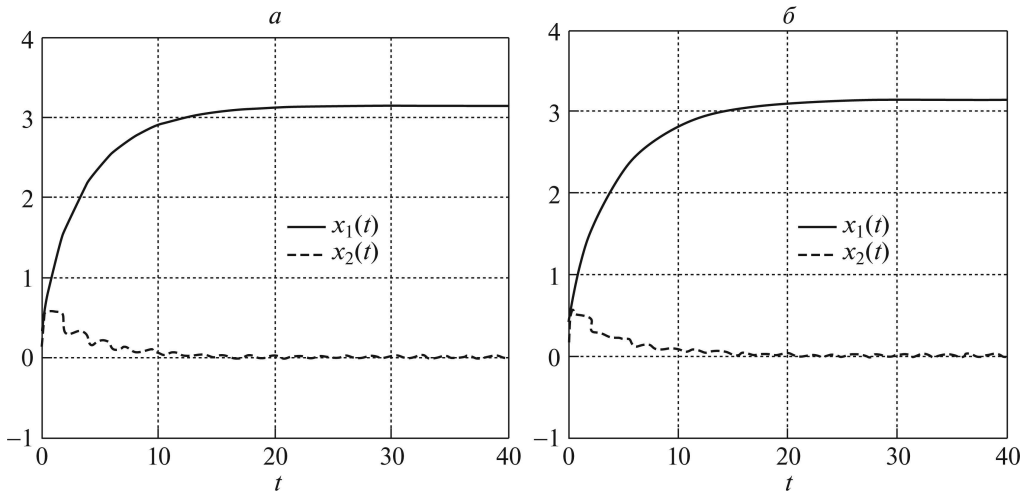


Рис. 8. Изменения координат состояния однозвенного манипулятора (а) с периодическим дискретным управлением, (б) с аperiodическим дискретным управлением при действии возмущений.

На рис. 8,а и 8,б показаны изменения координат состояния однозвенного манипулятора соответственно с периодическим и аperiodическим дискретным управлением при действии возмущения, заданного в виде  $w(t) = \sin(2 \cos(3t))$ .

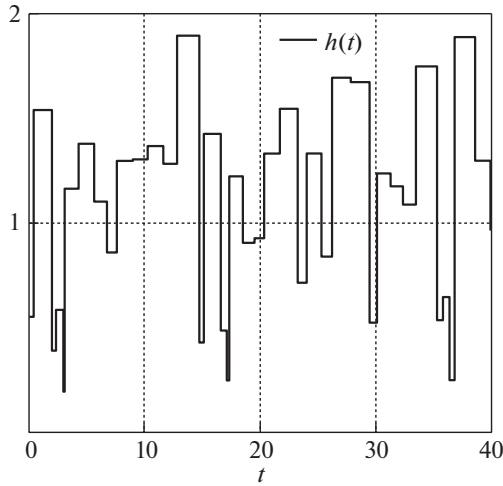


Рис. 9. Изменение шага дискретизации в системе с аperiodическим дискретным управлением.

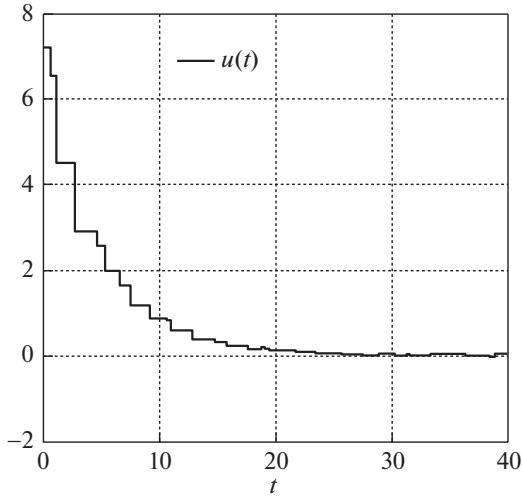


Рис. 10. Изменение аperiodического дискретного управляющего сигнала.

На рис. 9 и 10 представлены соответственно изменения шага дискретизации и управляющего сигнала в системе с аperiodическим дискретным управлением при действии возмущений.

### 8. Заключение

Для непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями и дискретным управлением предложены способы оценивания состояния в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида. Исходная система с дискретным управлением представлена как импульсная система. С исполь-

зованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися параметрами получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости дифференциального матричного уравнения и задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН задачи оценивания состояния и синтеза как периодического, так и аperiodического дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Для сравнения рассмотрен пример линейной системы второго порядка без возмущений. Для него известными методами была ранее получена верхняя граница периода дискретного управления с постоянными коэффициентами, при которых обеспечивается асимптотическая устойчивость. Такая же верхняя граница получена с применением предложенного подхода при сокращении количества варьируемых переменных в задаче оптимизации. Кроме того, данный подход позволяет получать на конечном интервале времени эллипсоидальные оценки множества состояний исходной нелинейной системы с дискретным управлением и неопределенными возмущениями, синтезировать дискретное управление, обеспечивающее свойство ограниченности относительно заданных множеств. Результаты применены для оценивания состояния и синтеза периодического и аperiodического дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию на конечном интервале времени однозвенного манипулятора, представленного нелинейной моделью с неопределенными возмущениями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы.* Чтобы скалярная переменная  $\text{trace}(Q(t))$ , зависящая от времени и параметров, принимала наименьшее значение при каждом  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , достаточно, чтобы ее производная  $d(\text{trace}(Q(t)))/dt$  была минимальной по параметрам  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$  при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Поскольку  $d(\text{trace}(Q(t)))/dt = \text{trace}(dQ(t)/dt)$ , то приходим к следующей задаче оптимизации:

$$(П.1) \quad \text{trace} \left( A_z Q + Q A_z^T + \alpha Q + \frac{\beta}{\alpha\beta - \mu_0} D_z D_z^T + \beta \Phi_z \Phi_z^T + \frac{\mu_1}{\beta} Q C_{fz}^T C_{fz} Q \right) \rightarrow \min_{\alpha, \beta}.$$

Так как  $\text{trace}(A_z Q + Q A_z^T)$  не зависит от  $\alpha$  и  $\beta$ , то минимум для (П.1) (если существует) будет отличаться от минимума функции  $F(\alpha, \beta) = \alpha \text{trace}(Q) + \frac{\beta}{\alpha\beta - \mu_0} \text{trace}(D_z D_z^T) + \beta \text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T) + \frac{\mu_1}{\beta} \text{trace}(Q C_{fz}^T C_{fz} Q)$  на постоянную при каждом  $t$  величину  $\text{trace}(A_z Q + Q A_z^T)$ . По условиям леммы матрицы  $\Phi_z$  и  $D_z$  имеют хотя бы по одному ненулевому элементу при каждом  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Величины  $\text{trace}(D_z D_z^T)$  и  $\text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T)$  будут положительными при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , так как они представляют собой квадрат нормы Фробениуса для матриц  $D_z^T$  и  $\Phi_z^T$  соответственно. Матрица  $Q(t)$  является положительно определенной при всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , так что  $\text{trace}(Q(t)) > 0$  и  $\text{trace}(Q C_{fz}^T C_{fz} Q) \geq 0$ . Функция  $F(\alpha, \beta)$  определена, непрерывна, непрерывно

дифференцируема, ограничена снизу  $F(\alpha, \beta) > 0$  в открытой выпуклой области  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$ . Проверим условие выпуклости функции  $F(\alpha, \beta)$  по  $\alpha, \beta$ . Для этого вычислим частные производные второго порядка для  $F(\alpha, \beta)$  по параметрам  $\beta, \alpha$ :

$$(П.2) \quad \partial \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \alpha = \text{trace}(Q(t)) - \frac{\beta^2}{(\alpha\beta - \mu_0)^2} \text{trace}(D_z D_z^T),$$

$$(П.3) \quad \partial \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \beta = -\frac{\mu_1}{\beta^2} \text{trace}(QC_{fz}^T C_{fz} Q) - \\ - \frac{\mu_0}{(\alpha\beta - \mu_0)^2} \text{trace}(D_z D_z^T) + \text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T),$$

$$\partial^2 \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \alpha^2 = \frac{2\beta^3}{(\alpha\beta - \mu_0)^3} \text{trace}(D_z D_z^T),$$

$$\partial^2 \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \alpha \partial \beta = \partial^2 \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \beta \partial \alpha = \frac{2\beta\mu_0}{(\alpha\beta - \mu_0)^3} \text{trace}(D_z D_z^T),$$

$$\partial^2 \text{trace}(dQ(t)/dt)/\partial \beta^2 = \frac{2\mu_1}{\beta^3} \text{trace}(QC_{fz}^T C_{fz} Q) + \frac{2\mu_0\alpha}{(\alpha\beta - \mu_0)^3} \text{trace}(D_z D_z^T).$$

Легко видеть, что матрица вторых производных (гессиан)

$$\nabla^2 F(\alpha, \beta) = \frac{2}{(\alpha\beta - \mu_0)^3} \text{trace}(D_z D_z^T) \begin{bmatrix} \beta^3 & \mu_0\beta \\ \mu_0\beta & \mu_0\alpha \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 \text{trace}(QC_{fz}^T C_{fz} Q)/\beta^3 \end{bmatrix}$$

является положительно определенной при всех  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$ . Согласно теореме 5 из [38, с. 163], функция  $F(\alpha, \beta)$  является выпуклой по параметрам  $\beta, \alpha$  из области определения. Известно, что если выпуклая функция имеет минимум внутри открытой выпуклой области, то этот минимум будет глобальным. Для нахождения минимума определим стационарные точки, используя необходимые условия экстремума функции [38]. Приравнявая производные (П.2), (П.3) нулю, получаем:

$$(П.4) \quad \text{trace}(Q(t)) = \frac{\beta^2}{(\alpha\beta - \mu_0)^2} \text{trace}(D_z D_z^T),$$

$$(П.5) \quad \text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T) = \frac{\mu_1}{\beta^2} \text{trace}(QC_{fz}^T C_{fz} Q) + \frac{\mu_0}{(\alpha\beta - \mu_0)^2} \text{trace}(D_z D_z^T).$$

Уравнение (П.5) с учетом (П.4) принимает вид

$$\text{trace}(\Phi_z \Phi_z^T) = \frac{1}{\beta^2} [\mu_0 \text{trace}(Q(t)) + \mu_1 \text{trace}(QC_{fz}^T C_{fz} Q)].$$

Отсюда находится  $\beta(Q(t))$  как в (8). Далее из первого уравнения находим  $(\alpha\beta - \mu_0)^2 = \frac{\beta^2 \text{trace}(D_z D_z^T)}{\text{trace}(Q(t))}$  и, извлекая квадратный корень из обеих частей,

получаем второе в (8) выражение для  $\alpha(Q(t))$ . Так что (8) является единственным решением уравнений (П.2), (П.3) при  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$ .

Выше было показано, что матрица вторых частных производных является положительно определенной при всех  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \mu_0/\beta$ , а значит, и для  $\beta$ ,  $\alpha$  из (8). Таким образом, согласно достаточным условиям [38] полученные выражения (8) действительно доставляют глобальный минимум  $d(\text{trace}(Q(t)))/dt$  при каждом  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , что завершает доказательство леммы.

*Доказательство теоремы 6.* В случае периодического дискретного управления ( $h_k = h = \text{const} > 0$ ), как показано в разделе 3, задача построения оценки состояния сводится к совокупности задач оптимизации  $\text{trace}(Q(t_{k+1} - 0)) \rightarrow \min$  с ЛМН ограничениями (10), (12)–(14) для всех  $k = 0, \dots, N - 1$ . С учетом (19) матричное неравенство (10) здесь принимает вид

$$\begin{pmatrix} Q(t_k) & (\tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C)Q(t_k - 0) \\ Q(t_k - 0)(\tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C)^T & Q(t_k - 0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Далее, умножая последнее неравенство слева на матрицу  $\text{diag}(I, C)$ , а справа — на  $\text{diag}(I, C^T)$  и вводя замену  $Y_k = K(t_k)CQ(t_k - 0)C^T$ , приходим к РЛМН (20) относительно матричных переменных  $Q(t_k)$ ,  $Q(t_{k+1} - 0)$  и  $Y_k$ . Ограничение на управление (17) обеспечивается ЛМН (21). Отметим, что параметр  $\alpha_k$  при каждом  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  определяется из (8) по известной после  $k$ -й итерации матрице  $Q(t_k - 0)$ , а матрица  $CQ(t_k - 0)C^T$  будет положительно определенной, так как является верхним левым блоком размерности  $(n \times n)$ -матрицы  $Q(t_k - 0)$ . Теорема 6 доказана.

Автор выражает благодарность А.И. Матасову за ряд ценных замечаний по статье.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hetel L., Fiter C., Omran H., Seuret A., Fridman E., Richard J.-P., Niculescu S.* Recent Developments on the Stability of Systems with Aperiodic Sampling: an Overview // *Automatica*. 2017. V. 76. P. 309–335.
2. *Seuret A.* Contributions to the Stability Analysis and Control of Networked Systems. Automatic Control Engineering. Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2017.
3. *Hespanha J.P., Naghshtabrizi P., Xu Y.* A Survey of Recent Results in Networked Control Systems // *Proc. IEEE*. 2007. V. 95 (1). P. 138–162.
4. *Zhang X.-M., Han Q.-L., Yu X.* Survey on Recent Advances in Networked Control Systems // *IEEE Trans. Ind. Inf.* 2016. V. 12. P. 1740–1752.
5. *Lee T., Wu Z.-G., Park J.* Synchronization of a Complex Dynamical Network with Coupling Time-Varying Delays via Sampled-Data Control // *Appl. Math. Comput.* 2012. V. 219 (3). P. 1354–1366.
6. *Fridman E., Seuret A., Richard J.-P.* Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems: An Input Delay Approach // *Automatica*. 2004. V. 40. P. 1441–1446.
7. *Fridman E.* A Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Control // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 421–427.

8. *Naghshtabrizi P., Hespanha J., Teel A.* On the Robust Stability and Stabilization of Sampled-Data Systems: A Hybrid System Approach. // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 13–15 December 2006. P. 4873–4878.
9. *Naghshtabrizi P., Hespanha J.P., Teel A.R.* Exponential Stability of Impulsive Systems with Application to Uncertain Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 378–385.
10. *Suh Y.* Stability and Stabilization of Nonuniform Sampling Systems // Automatica. 2008. V. 44. P. 3222–3226.
11. *Fujioka H.* A Discrete-time Approach to Stability Analysis of Systems with Aperiodic Sample-and-hold Devices // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54 (10). P. 2440–2445.
12. *Oishi Y., Fujioka H.* Stability and Stabilization of Aperiodic Sampled-Data Control Systems Using Robust Linear Matrix Inequalities // Automatica. 2010. V. 46. P. 1327–1333.
13. *Chen W.-H., Zheng W.X.* Input-to-State Stability for Networked Control Systems via an Improved Impulsive System Approach // Automatica. 2011. V. 47. P. 789–796.
14. *Seuret A.* A Novel Stability Analysis of Linear Systems under Asynchronous Sampling // Automatica. 2012. V. 48. P. 177–182.
15. *Zhang C.-K., Jiang L., He Y., Wu H., Wu M.* Stability Analysis for Control Systems with Aperiodically Sampled Data Using an Augmented Lyapunov Functional Method // IET Control Theory Appl. 2012. No. 7. P. 1219–1226.
16. *Seuret A., Peet M.M.* Stability Analysis of Sampled-Data Systems Using Sum of Squares // IEEE Trans. Automat. Control. 2013. V. 58 (6). P. 1620–1625.
17. *Briat C.* Convex Conditions for Robust Stability Analysis and Stabilization of Linear Aperiodic Impulsive and Sampled-Data Systems under Dwell-Time Constraints // Automatica. 2013. V. 49. P. 3449–3457.
18. *Seuret A., Briat C.* Stability Analysis of Uncertain Sampled-Data Systems with Incremental Delay Using Looped Functionals // Automatica. 2015. V. 55. P. 274–278.
19. *Omran H., Hetel L., Petreczky M., Richard J.P., Lamnabhi-Lagarrigue F.* Stability Analysis of Some Classes of Input-Affine Nonlinear Systems with Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2016. V. 70. P. 266–274.
20. *Jiang X., Yin Z., Wu J.* Stability Analysis of Linear Systems Under Time-Varying Samplings by a Non-Standard Discretization Method. // Electronics. 2018. V. 7 (10). P. 1–11.
21. *Xiao S.-P., Lian H., Teo K., Zeng H.-B., Zhang X.-H.* A New Lyapunov Functional Approach to Sampled-Data Synchronization Control for Delayed Neural Networks // J. Franklin Inst. 2018. P. 8857–8873.
22. *Park J.M., Park P.G.* An Improved Stability Criterion for Linear Systems with Multi-Rate Sampled Data // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2020. V. 38. P. 100947.
23. *Sevim U., Goren-Sumer L.* Singular Value Assignment for Nonuniformly Sampled Systems: Stabilization and Control. arXiv:1706.00967v2 [math.DS] 29 Jun 2020.
24. *Khargonekar P.P., Sivashankar N.*  $H_2$  optimal Control for Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 1991. V. 17. No. 6. P. 425–436.
25. *Hu L.S., Lam J., Cao Y.Y., Shao H.H.* An LMI Approach to Robust  $H_2$  Sampled-Data Control for Linear Uncertain Systems // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics. 2003. V. 33. No. 1. P. 149–155.
26. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive Theoretical/Numerical Comparative Studies on  $H_2$  and Generalized  $H_2$  Norms in Sampled-Data Systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.

27. *Kim J.H., Hagiwara T.* Upper/Lower Bounds of Generalized  $H_2$  Norms in Sampled-Data Systems with Convergence Rate Analysis and Discretization Viewpoint // *Syst. Control Lett.* 2017. V. 107. P. 28–35.
28. *Бирюков Р.С.* Обобщенное  $H_2$ -управление линейным непрерывно-дискретным объектом на конечном горизонте // *АиТ.* 2020. № 8. С. 40–53.  
*Birukov R.S.* Generalized  $H_2$ -optimal Control of Continuous-Discrete Linear Plant on a Finite Horizon // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 8. P. 1394–1404.
29. *Geromel J.C., Colaneri P., Bolzern P.* Differential Linear Matrix Inequality in Optimal Sampled-Data Control // *Automatica.* 2019. V. 100. P. 289–298.
30. *Holicki T., Carsten W., Scherer C.W.* Output Feedback Synthesis for a Class of Aperiodic Impulsive Systems. arXiv:1910.03486v3 [math.OC] 21 Jun 2020.
31. *Ríos H., Hetel L., Efimov D.* Robust Output-feedback Control for Uncertain Linear Sampled-Data Systems: A 2D Impulsive System Approach // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019. P. 177–201.
32. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite Time Stability and Control. London: Springer-Verlag, 2014.
33. *Amato F., De Tommasi G., Pironti A.* Finite-time Stability: an Input-output Approach. N.Y.: Wiley, 2018.
34. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // *АиТ.* 2016. № 5. С. 19–36.  
*Malikov A.I.* State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 5. P. 764–778.
35. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // *АиТ.* 2019. № 11. С. 59–82.  
*Malikov A.I.* State Estimation and Stabilization of Discrete-time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.
36. *Маликов А.И., Дубаккина Д.И.* Численные способы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами // *Изв. ВУЗов. Математика.* 2020. № 4. С. 74–86.  
*Malikov A.I., Dubakina D.I.* Numerical Methods for Solving Optimization Problems with Differential Linear Matrix Inequalities // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 2020. No. 4. P. 74–86.
37. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // *АиТ.* 2017. № 5. С. 16–35.  
*Malikov A.I.* State Observer Synthesis by Measurement Results for Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 5. P. 782–797.
38. *Васильев В.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.*

Поступила в редакцию 11.09.2020

После доработки 21.11.2020

Принята к публикации 08.12.2020



© 2021 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)  
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru)  
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург),

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ГАРАНТИЕЙ НАХОЖДЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМОГО СИГНАЛА В ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ<sup>1</sup>

Предложен метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходного сигнала объекта в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи используется специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и синтезированы алгоритмы управления линейными объектами и системами с секторной нелинейностью при наличии параметрической неопределенности и возмущений. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающим теоретические выводы.

*Ключевые слова:* динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S000523102104005X

### 1. Введение

Задача управления объектами с обеспечением желаемого качества переходных процессов по регулируемой переменной является одной из основных задач теории автоматического управления. В условиях определенности параметров модели объекта существует ряд классических методов: методы управления с заданным расположением собственных чисел замкнутой системы, методы управления с обеспечением желаемых частотных характеристик замкнутой системы, методы оптимального управления и т.д., см., например, [1–4]. Вопрос улучшения оценки сверху для отклонения регулируемой переменной в линейных параметрически определенных системах с ненулевыми начальными условиями до сих пор остается актуальным [5–7].

Для управления в условиях параметрической неопределенности и возмущений можно выделить методы адаптивного и робастного управления, где качество регулирования задается эталонным сигналом, см., например, [8–10].

---

<sup>1</sup> Результаты разделов 3–5 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в Институте проблем машиноведения РАН. Результаты раздела 6 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МД-1054.2020.8) в Институте проблем машиноведения РАН.

Однако методы [8–10] не гарантируют заданного отклонения регулируемого сигнала от эталонного в переходном режиме. Если начальные условия объекта неизвестны, то в начальный момент времени данные отклонения могут быть произвольно большими. Методы [8–10] гарантируют только заданное отклонение регулируемой переменной от эталонного сигнала в установившемся режиме.

Метод [11] позволяет гарантировать нахождение фазовых траекторий системы в некотором наименьшем эллипсоиде в переходном и установившемся режимах. Однако данный эллипсоид остается одним и тем же в любой момент времени, что может давать грубое качество регулирования в переходном и в установившемся режимах.

В [12] рассмотрено применение адаптивного управления с обеспечением регулируемой переменной в заданных множествах, которые могут быть разными для переходного и установившегося режимов. Данные множества задаются последовательностью прямоугольников, где высота каждого прямоугольника соответствует желаемому максимальному отклонению выходной переменной объекта от положения равновесия, а длина прямоугольника — желаемому времени нахождения выходной переменной объекта в соответствующем прямоугольнике. Однако прямоугольные области в [12] достаточно грубые и алгоритм применим только для объектов со скалярными входными и выходными сигналами.

В отличие от [12] в [13] предложен метод управления с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном криволинейном множестве для объектов с векторными входными и выходными сигналами. Однако реализация данного метода требует знания знака и множества начальных условий объекта, а полученные верхние и нижние оценки переходных процессов достаточно грубые в том смысле, что определяются одной функцией с разными знаками. Причем верхние и нижние оценки должны асимптотически сходиться к некоторым константам. В настоящее время результат [13] имеет большое количество обобщений на разного рода системы, см. например, [14–16], но все вышеперечисленные особенности метода [13] остаются справедливыми и в [14–16].

Настоящая статья сфокусирована на получении нового метода управления с обеспечением регулируемой переменной в заданном множестве. В отличие от [13] целевое множество не будет зависеть от знака значений начальных условий, а требуется только знание множества начальных значений объекта управления. По сравнению с [12, 13] конфигурация заданного множества может задаваться произвольными ограниченными непрерывно-дифференцируемыми функциями, для которых не требуется асимптотическая сходимости. В результате полученный метод позволит существенно расширить класс решаемых задач в смысле качества переходных процессов в отличие от [12, 13].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведен класс исследуемых объектов и поставлена цель управления в виде принадлежности выходного сигнала объекта заданному множеству. Раздел 3 содержит основной результат, где предложена специальная замена координат, которая позволяет свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на

устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Также в разделе 3 приведены примеры такой замены координат. Возможность использования предложенного метода продемонстрирована в дальнейших разделах для некоторых видов систем. Так, в разделе 4 предложен алгоритм управления по состоянию линейными объектами с известными параметрами и неизвестным внешним ограниченным возмущением. Раздел 5 содержит синтез закона управления, который не зависит от параметров объекта, где сам объект описывается динамической системой с секторной нелинейностью и возмущениями. Раздел 6 иллюстрирует применимость предложенной схемы для объекта управления с произвольной относительной степенью. Разделы 4–6 сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода, и анализом полученных результатов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  — сигнал управления,  $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_v\}$  — выходной сигнал, вектор-функция  $F$  определена для всех  $x$ ,  $u$  и  $t$ , кусочно-непрерывна и ограничена по  $t$ ,  $h(x)$  — непрерывно-дифференцируемая функция по  $x$ . Объект управления (1) управляемый и наблюдаемый для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Требуется разработать закон управления, который обеспечит нахождение выходного сигнала объекта  $y(t)$  в следующем множестве

$$(2) \quad \mathcal{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R}^v : \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \bar{g}_i(t), i = 1, \dots, v \right\} \text{ для любых } t \geq 0,$$

где  $\underline{g}_i(t)$  и  $\bar{g}_i(t)$  — ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований работы системы. Например, при управлении электрическим генератором [17] требуется поддержание частоты  $w(t)$  и выходного напряжения  $V(t)$  в заданных пределах:  $\underline{w} < w(t) < \bar{w}$  и  $\underline{V} < V(t) < \bar{V}$ .

## 3. Метод решения. Основной результат

Введем замену выходной переменной  $y$  в виде

$$(3) \quad y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$  — непрерывно-дифференцируемая вектор-функция по  $t$ , функция  $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$(a) \quad \underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t), i = 1, \dots, v \text{ для любых } t \geq 0 \text{ и } \varepsilon \in \mathbb{R}^v;$$

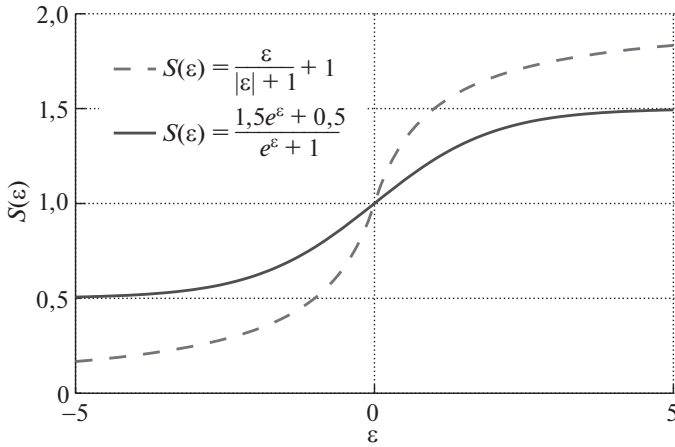


Рис. 1. Примеры функции  $S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + |\varepsilon|} + 1$  и  $S(\varepsilon) = \frac{1,5e^\varepsilon + 0,5}{e^\varepsilon + 1}$ .

- (б) существует обратное отображение  $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$  для любых  $y \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq 0$ ;
- (в) функция  $\Phi(\varepsilon, t)$  непрерывно-дифференцируемая по  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\det \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$  для любых  $y \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq 0$ ;
- (г) функция  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$  ограничена по  $t \geq 0$  для любых  $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ .

Приведем четыре примера функции  $\Phi(\varepsilon, t)$ , где в примерах 1 и 2 верхняя и нижняя границы множества будут зависеть от одной функции  $g(t)$ , а в примерах 3 и 4 границы множества будут заданы независимыми функциями  $\underline{g}(t)$  и  $\bar{g}(t)$ .

*Пример 1.* Пусть  $\Phi(\varepsilon, t) = g(t)S(\varepsilon)$ , где в данном случае функция  $S(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  определяет замену координат, а функция  $g(t) \in \mathbb{R}$  задает качество переходных процессов. Дополнительно,  $g(t) \neq 0$  и  $\dot{g}(t)$  — ограниченные функции,  $S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|} + r$  (см. пример функции  $S(\varepsilon)$  на рис. 1 для  $r = 1$ ). Так как из (3)  $y(t) = g(t)S(\varepsilon)$ , то переменная  $y(t)$  содержится в множестве  $(r - 1)g(t) < y(t) < (r + 1)g(t)$  при  $g(t) > 0$  или в множестве  $(r + 1)g(t) < y(t) < (r - 1)g(t)$  при  $g(t) < 0$ . Обратное отображение имеет вид  $\varepsilon = \frac{y - rg}{g - (y - rg) \text{sign}(\varepsilon)}$ .

*Пример 2.* Зададим в примере 1 функцию  $S(\varepsilon)$  в виде  $S(\varepsilon) = \frac{\bar{r}e^\varepsilon + r}{e^\varepsilon + 1}$ , где  $0 < \underline{r} < \bar{r}$  (см. пример функции  $S(\varepsilon)$  на рис. 1 для  $\bar{r} = 1,5$  и  $\underline{r} = 0,5$ ). Тогда из (3) обратное преобразование выглядит как  $\varepsilon = \ln \frac{r g - y}{y - \bar{r} g}$ . Переменная  $y(t)$  находится в множестве  $\underline{r}g(t) < y(t) < \bar{r}g(t)$  при  $g(t) > 0$  или в множестве  $\bar{r}g(t) < y(t) < \underline{r}g(t)$  при  $g(t) < 0$ .

*Пример 3.* Выберем  $\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + g(t)}{e^\varepsilon + 1}$ , где  $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , функции  $\bar{g}(t)$ ,  $\underline{g}(t)$ ,  $\dot{\bar{g}}(t)$  и  $\dot{\underline{g}}(t)$  ограниченные для любого  $t$  и  $\underline{g}(t) < \bar{g}(t)$ . С учетом (3) обратное преобразование  $\varepsilon = \ln \frac{g - y}{y - \bar{g}}$  будет выполнено при  $\underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)$  для любых  $t$ .

Пример 4. Зададим  $\Phi(\varepsilon, t)$  в виде

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{cases} \bar{g}(t) + 0,5(\underline{g}(t) - \bar{g}(t))e^{-\varepsilon}, & \varepsilon \geq 0, \\ \underline{g}(t) + 0,5(\bar{g}(t) - \underline{g}(t))e^{\varepsilon}, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

где остальные функции, как и в примере 3. Принимая во внимание (3), обратное преобразование примет вид

$$\varepsilon = \begin{cases} \ln \frac{\bar{g} - g}{2(\bar{g} - y)}, & 0 \leq y < \bar{g}, \\ \ln \frac{2(y - \underline{g})}{\bar{g} - \underline{g}}, & \underline{g} < y < 0. \end{cases}$$

Значит,  $\underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)$  для любых  $t$ .

Теперь определим динамику по переменной  $\varepsilon$  для исследования устойчивости замкнутой системы. Для этого найдем полную производную по времени от (3) в виде  $\dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ . Так как  $\det \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$  (см. условие (в)), то перепишем последнее равенство как

$$(4) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( \dot{y} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Выражение (4) содержит сигнал управления  $u(t)$ , так как  $\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} F(x, u, t)$  из (1). Теперь сформулируем основной результат статьи.

*Теорема 1.* Пусть для преобразования (3) выполнены условия (а)–(г). Если существует такой закон управления  $u$ , что решения (4) ограничены, то  $y(t) \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$ . Если при выбранном законе управления решения (4) неограниченны, то  $y(t) \in \mathcal{Y}$ .

*Доказательство.* Пусть выбран закон управления так, что решения уравнения (4) ограничены, т.е.  $|\varepsilon(t)| < N$  при любом  $t$ , где  $0 < N < \infty$ . Тогда в силу преобразования (3) и условия (а) следует, что

$$y \in \mathcal{Y}_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^v : \underline{M}_i(t) < y_i(t) < \overline{M}_i(t), i = 1, \dots, v\},$$

где  $\underline{M}_i(t) = \inf_{|\varepsilon| < N} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$  и  $\overline{M}_i(t) = \sup_{|\varepsilon| < N} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$  для любых  $t \geq 0$ . Поскольку

ку (3) является взаимно однозначным отображением, то  $\overline{M}_i(t) < \bar{g}_i(t)$  и  $\underline{M}_i(t) > \underline{g}_i(t)$ , значит,  $\mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$ . Пусть теперь закон управления не обеспечивает ограниченность решения (4), т.е.  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ . Тогда в силу преобразования (3), а также условий (а) и (2) имеем, что  $y \in \mathcal{Y}$ , где  $\underline{g}_i(t) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}^v} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$  и  $\bar{g}_i(t) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^v} \{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ . Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет перейти от задачи управления (1) с ограничениями (2) к задаче управления (4) без ограничений. Следующие разделы демонстрируют возможность применения предложенного метода для некоторых типов задач.

#### 4. Управление линейным объектом с известными параметрами и измеряемым вектором состояния в условиях возмущений

Пусть объект управления описывается следующим линейным дифференциальным уравнением:

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx. \end{aligned}$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathbb{R}^l$  — неизвестное ограниченное возмущение, матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  и  $L \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  известны, а матрица  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$  неизвестна. Пара  $(A, B)$  управляема и пара  $(L, A)$  наблюдаема. Объект (5) имеет относительную степень, равную единице ( $LB \neq 0$  [10]).

Сформулируем результат, который содержит «простейший» закон управления в смысле «удобства» анализа замкнутой системы на устойчивость.

*Теорема 2.* Предположим, что для преобразования (3) выполнены условия (а)–(г),  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ , а также существует вектор  $T \in \mathbb{R}^n$  такой, что матрица  $A - B(LB)^{-1}LA - TL$  гурвицева. Тогда для любого  $K > 0$  закон управления

$$(6) \quad u = -(LB)^{-1}[LAx + K\varepsilon]$$

обеспечивает выполнение целевого условия (2).

*Замечание 1.* Отметим, что модель (5) с гурвицевой матрицей  $A - B(LB)^{-1}LA - TL$  может описывать ряд технических систем. Например, дистилляционная колонна [18], [4, с. 569], где сигнал управления — расход орошения, а регулируемый сигнал — состав легких фракций верха колонны; летательный аппарат [4, с. 565] на различных высотах и числах Маха, где  $u$  — управление рулями высоты,  $y$  — вертикальное ускорение; электрический двигатель постоянного тока [19], где сигнал управления — входное напряжение, выходной сигнал — угловая скорость, и т.д.

*Доказательство.* Принимая во внимание преобразование (3) и уравнение объекта (5), перепишем выражение (4) в виде

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} (LAx + LBu + \psi),$$

где  $\psi = LDf - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$  — ограниченная функция по  $\varepsilon$  и  $t$ . Подставив закон управления (6) в первое уравнение (5) и уравнение (7), а также добавив в полученном выражении слагаемое  $T\Phi(\varepsilon, t) - TLx(t) = 0$  (которое справедливо в силу (3) и второго уравнения (5)), получим

$$(8) \quad \dot{x} = (A - B(LB)^{-1}LA - TL)x - KB(LB)^{-1}\varepsilon + Df + T\Phi(\varepsilon, t),$$

$$(9) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [-K\varepsilon + \psi].$$

Введение вектора  $T$  позволяет рассматривать неустойчивые объекты (5). Исследуем уравнение (9) на устойчивость по вход-состоянию. Для этого выберем функцию Ляпунова вида  $V = 0,5\varepsilon^2$ . Подставив (9) в условие

$$\dot{V} + 2\alpha V \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} - \beta \psi^2 \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \leq 0, \quad \text{где } \alpha > 0 \text{ и } \beta > 0,$$

получим  $-(K - \alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi - \beta\psi^2 \leq 0$  или в виде  $[\varepsilon \ \psi] \begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ 0,5 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{bmatrix} \leq 0$ .

Последнее неравенство будет выполнено, если матрица  $\begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ 0,5 & -\beta \end{bmatrix}$  будет отрицательно определенной, что равносильно выполнению условий  $K > \alpha$  и  $(K - \alpha)\beta > 0,25$ . Поскольку  $K$  заданное число, то для него всегда найдутся  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что данные условия будут выполнены. Значит, сигнал  $\varepsilon(t)$  будет ограниченным. Если матрица  $A - B(LB)^{-1}LA - TL$  гурвицева, то в силу ограниченности функций  $\varepsilon(t)$ ,  $\Phi(\varepsilon, t)$  и  $f(t)$  сигнал  $x(t)$  будет ограниченным. Значит, закон управления  $u$ , определенный в (6), будет ограничен. Тогда из теоремы 1 следует, что целевое условие (2) будет выполнено. Теорема 2 доказана.

*Пример 5.* Продемонстрируем теперь качество переходных процессов на примере управления объектом, параметры которого заданы в виде

$$(10) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \ 2], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) + \text{sat} \left( \frac{d(t)}{0,3} \right),$$

где  $\text{sat}(\cdot)$  — функция насыщения, сигнал  $d(t)$  смоделирован в Matlab Simulink с помощью блока “Band-Limited White Noise” с мощностью шума 0,1 и временем выборки 0,1. Требуется обеспечить принадлежность выходного сигнала  $y(t)$  множеству  $\underline{r}g(t) < y(t) < \bar{r}g(t)$ , где  $\underline{r} = 0,8$  и  $\bar{r} = 1$ , а функция  $g(t)$  будет определена ниже.

Матрица  $A - B(LB)^{-1}LA - TL$  гурвицева, например, при любом  $T = [T_1 \ T_2]^T$ , где  $T_1 > 0$  и  $T_2 > 0$ . Зададим  $K = 1$  в (6). Определим функцию  $\Phi(\varepsilon, t)$ , как в примере 2, задав  $g(t)$  в виде

$$(11) \quad g(t) = (g_0 - g_\infty)e^{-kt} + g_\infty.$$

Здесь  $g_0 = y(0) + 0,01$ ,  $g_\infty = 0,1$  и  $k = 0,5$ . На рис. 2 приведены результаты переходных процессов по  $y(t)$ ,  $u(t)$  и  $f(t)$ . Колебания сигнала управления на рис. 2 вызваны наличием возмущения  $f$ . Причем, как видно из рис. 2 (справа), после 3 с с начала работы системы амплитуда колебаний сигнала управления соизмерима с величиной возмущения. На рис. 3 представлены результаты моделирования при отсутствии возмущения ( $f = 0$ ). Таким образом, для стабилизации объекта в заданном множестве не требуется большого значения управляющего сигнала.

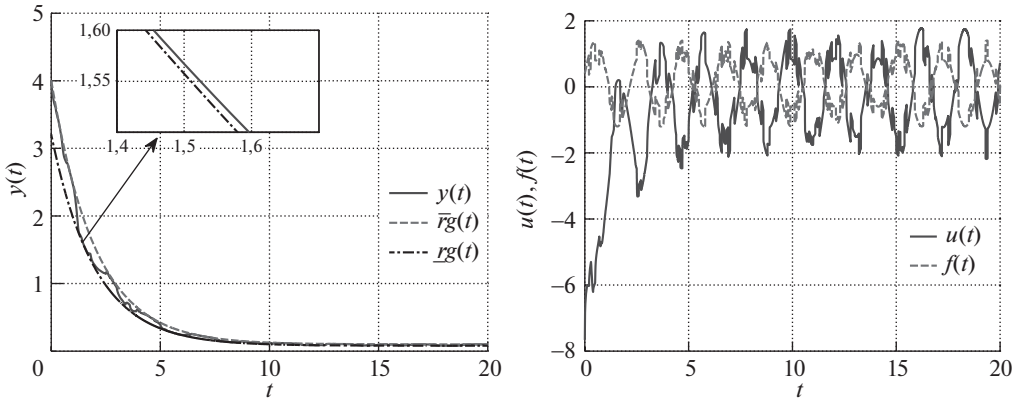


Рис. 2. Переходные процессы по  $y(t)$  (слева),  $u(t)$  и  $f(t)$  (справа) при  $g(t)$  вида (11).

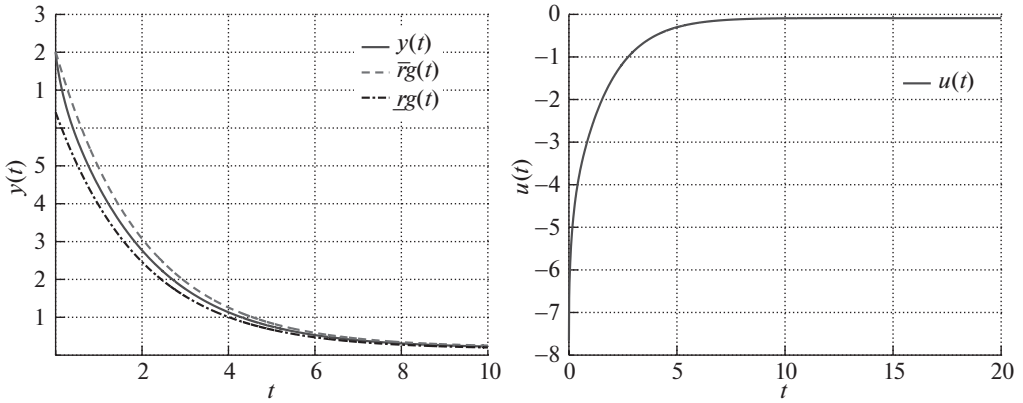


Рис. 3. Переходные процессы по  $y(t)$  (слева) и  $u(t)$  (справа) для  $g(t)$  вида (12) при отсутствии возмущения ( $f = 0$ ).

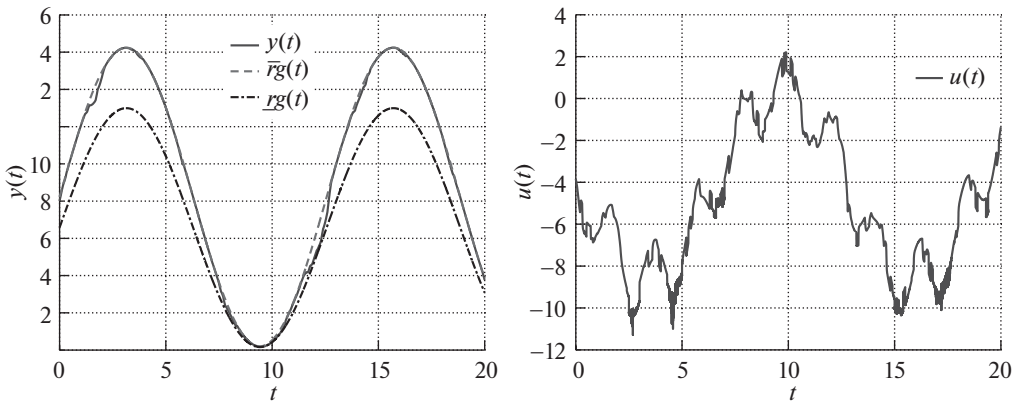


Рис. 4. Переходные процессы по  $y(t)$  (слева) и  $u(t)$  (справа) для  $g(t)$  вида (12).



Отметим, что на рис. 2 (и в последующих примерах) выходные сигналы не достигают границ желаемого множества, что согласуется с теоретическими выводами и что читатель может легко проверить путем моделирования. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 приведен фрагмент рисунка в увеличенном масштабе.

В отличие от [13] и рис. 2, 3, где границы целевого множества сходятся к некоторым числам, теперь обеспечим принадлежность выходного сигнала  $y(t)$  ранее заданному множеству  $0,8g(t) < y(t) < g(t)$ , где функция  $g(t)$  не имеет предела:

$$(12) \quad g(t) = g_0 \sin(kt) + g_0 + g_\infty.$$

На рис. 4 приведены результаты моделирования по  $y(t)$  и  $u(t)$ .

Из рис. 2–4 видно, что при  $\underline{r} > 0$  и  $\bar{r} > 0$  значение  $y = 0$  недостижимо в силу преобразования координат из примера 2. Нулевое значение  $y$  может быть достигнуто только при  $\underline{r} < 0$  и  $\bar{r} > 0$  (с учетом  $g(t) > 0$ ). Однако в таком случае заданное множество будет более грубым по сравнению с множествами из рис. 2–4, поскольку нижняя граница желаемого множества будет находиться в отрицательной области значений  $y$ . Данная проблема будет преодолена в последующих примерах при использовании замены координат из примера 3.

## 5. Управление объектом по выходу с секторной нелинейностью в условиях возмущений

Рассмотрим объект управления вида

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + G\varphi(x) + Bu + Df, \\ y &= Lx. \end{aligned}$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^v$  ( $v \leq m$ ),  $f \in \mathbb{R}^l$  — неизвестная ограниченная функция,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$  и  $L \in \mathbb{R}^{v \times n}$  — известные матрицы, неизвестная нелинейность  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k$  удовлетворяет условию  $|\varphi(x)| \leq C|x|$ ,  $C > 0$  — известная константа. Пара  $(A, B)$  управляема и пара  $(L, A)$  наблюдаема. Объект (13) имеет строгую относительную степень (от англ. «strict relative degree»), равную единице (т.е.  $L_i B_j \neq 0$ , где  $L_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $L$  и  $B_j$  —  $j$ -я строка матрицы  $B$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  [20, 21]). Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (2).

Зададим закон управления в виде

$$(14) \quad u = K_1 y + K_2 \varepsilon,$$

где  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times v}$  и  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times v}$  выбираются разработчиком. В частности,  $K_1$  и  $K_2$  можно выбирать при условии, что матрицы  $A + BK_1 L$  и  $LBK_2$  гурвицевы. Принимая во внимание (3) и (14), а также добавив в полученном выражении слагаемые  $T_1 Lx - T_1 \Phi(\varepsilon, t) = 0$  и  $T_2 Lx - T_2 \Phi(\varepsilon, t) = 0$  (которые

справедливы в силу (3) и второго уравнения (13)), перепишем (4) и (13) в виде

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK_1L + T_1L)x + BK_2\varepsilon + G\varphi(x) + Df - T_1\Phi(\varepsilon, t), \\ \dot{\varepsilon} &= \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} \left[ LBK_2\varepsilon + (LA + LBK_1L + T_2L)x + \right. \\ &\quad \left. + LG\varphi(x) + LDf - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} - T_2\Phi(\varepsilon, t) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times v}$ ,  $T_2 \in \mathbb{R}^{v \times v}$ ,  $I$  — единичная матрица. Введение матриц  $T_1$  и  $T_2$  позволяет исследовать неустойчивые объекты (13).

Из второго уравнения (15) следует, что условие  $v \leq m$  (т.е.  $\dim \varepsilon \leq \dim u$ ) и единичная строгая относительная степень (13) позволит закону управления (14) обеспечить ограниченность  $\varepsilon(t)$ . Введем новые обозначения

$$(16) \quad \begin{aligned} x_e &= \text{col} \{x, \varepsilon\}, \quad f_e = \text{col} \left\{ f, \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}, \Phi(\varepsilon, t) \right\}, \\ A_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} A + BK_1L + T_1L & BK_2 \\ \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} (LA + LBK_1L + T_2L) & \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} LBK_2 \end{bmatrix}, \\ G_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} G \\ \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} LG \end{bmatrix}, \\ D_e(\varepsilon, t) &= \begin{bmatrix} D & 0 & -T_1 \\ \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} LD & - \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} & - \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} T_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и перепишем (15) в виде

$$(17) \quad \dot{x}_e = A_e(\varepsilon, t)x_e + G_e(\varepsilon, t)\varphi(x) + D_e(\varepsilon, t)f_e.$$

*Теорема 3.* Предположим, что для преобразования (3) выполнены условия (а)–(г),  $\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ . Пусть для заданных  $\alpha > 0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$  существует коэффициент  $\beta > 0$  и матрица  $P = P^T > 0$  такие, что выполнено матричное неравенство

$$(18) \quad \begin{bmatrix} A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P + C^2 E^T E & P G_e(\varepsilon, t) & P D_e(\varepsilon, t) \\ * & -1 & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0.$$

Здесь “\*” определяет симметричный блок симметричной матрицы,  $E = [I \ 0]$ . Тогда закон управления (14) обеспечивает выполнение целевого условия (2).

*Доказательство.* Для анализа устойчивости (17) зададим функцию Ляпунова в виде  $V = x_e^T P x_e$ , где  $P = P^T > 0$ . С учетом (17), подставив выражение для  $V$  в неравенство

$$(19) \quad \dot{V} + \alpha V - \beta f_e^T f_e \leq 0,$$

получим

$$(20) \quad x_e^T [A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P] x_e + 2x_e^T P G_e(\varepsilon, t) \varphi(x) + 2x_e^T P D_e(\varepsilon, t) f_e - \beta f_e^T f_e \leq 0.$$

Введем новый вектор  $z = \text{col} \{x_e, \varphi(x), f_e\}$  и перепишем неравенство (20) в виде

$$(21) \quad z^T \begin{bmatrix} A_e(\varepsilon, t)^T P + P A_e(\varepsilon, t) + \alpha P & P G_e(\varepsilon, t) & P D_e(\varepsilon, t) \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} z \leq 0.$$

По условию задачи  $\varphi^2(x) \leq C^2 x_e^T E^T E x_e$ . Перепишем данное условие в виде

$$(22) \quad z^T \begin{bmatrix} C^2 E^T E & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \geq 0.$$

Согласно S-процедуре неравенства (21) и (22) будут одновременно выполнены, если будет выполнено неравенство (18). Значит, из условия (19) функция  $x_e(t)$  ограничена, следовательно, сигналы  $x(t)$  и  $\varepsilon(t)$  ограничены. Тогда закон управления (14) будет ограниченным. В силу теоремы 1 цель управления (3) будет выполнена. Теорема 3 доказана.

*Пример 6.* Продемонстрируем качество управления на объекте с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = \sin(x),$$

возмущение  $f(t)$  определено в (10).

Параметры регулятора (14) зададим в виде  $K_1 = 0,01 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $K_2 = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,75 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Дополнительно выберем  $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  и  $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Пусть  $\Phi(\varepsilon, t) = \text{diag} \{ \Phi_1(\varepsilon_1, t), \Phi_2(\varepsilon_2, t) \}$ , где  $\Phi_i$  определены, как в примере 3, т.е.

$$\Phi_i(\varepsilon_i, t) = \frac{\bar{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + \underline{g}_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1}, \quad i = 1, 2.$$

Значит,  $\Phi(\varepsilon, t) > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ . Тогда

$$\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{e^{\varepsilon_i}(\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t))}{(e^{\varepsilon_i} + 1)^2} > 0,$$

так как  $\bar{g}_i(t) > \underline{g}_i(t)$ . Дополнительно,  $\left( \frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} \right)^{-1} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  и наименьшее значение  $\left( \frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} \right)^{-1} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{4}{\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)} > 0$ . Согласно [22], если выполнено линейное матричное неравенство в вершинах политопа, то и внутри политопа линейное матричное неравенство будет выполнено. В рассматриваемом случае при каждом фиксированном  $\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i}$  матричное неравенство (18) является линейным. Однако политоп не замкнутый, так как  $\left( \frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} \right)^{-1} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ . Численное моделирование при увеличении  $\left( \frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} \right)^{-1}$  показало, что собственные числа матрицы  $P$  сходятся к некоторым положительным значениям. В вершинах  $\frac{4}{\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)}$  матричное неравенство (18) также выполнено.

Зададим параметры функции  $\Phi(\varepsilon, t)$  в виде

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{g}_1(t) &= (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1, & \bar{g}_2(t) &= (g_0 - g_2) \cos(kt) + g_4, \\ \underline{g}_1(t) &= (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3, & \underline{g}_2(t) &= \cos(kt) + g_5, \end{aligned}$$

где  $g_0 = \sqrt{y^T(0)y(0)} + 0,01$ ,  $g_1 = 0,1$ ,  $g_2 = 2$ ,  $g_3 = -0,2$ ,  $g_4 = g_0 - 0,1$ ,  $g_5 = 0,8$  и  $k = 0,5$ .

На рис. 5, 6 приведены результаты переходных процессов по  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $u(t) = \text{col} \{ u_1(t), u_2(t) \}$  при  $x(0) = \text{col} \{ \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1 \}$ .

Исследования робастности замкнутой системы с законом управления  $u = K_1 y + K_2 \varepsilon$  по отношению к параметрам объекта (5) путем моделирования показали, что замкнутая система сохраняет устойчивость и обеспечивает выполнение цели управления при  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$  и  $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{\varphi 1} & g_{\varphi 2} & g_{\varphi 3} \end{bmatrix}$ , где

$a_1 \in [-5; 0,1]$ ,  $a_2 \in [-5; -2]$ ,  $a_3 \in [-5; -3]$ ,  $b \in [0,5; 10]$  и  $g_{\varphi 1} \in [-3; 3]$ ,  $g_{\varphi 2} \in [-3; 3]$  и  $g_{\varphi 3} \in [-3; 3]$ .

Исследование робастности по отношению к начальным значениям объекта показало следующее. Согласно условиям (3) и (а) начальные значения  $y_i(0)$  должны быть согласованы с неравенствами  $\underline{g}_i(0) < y_i(0) < \bar{g}_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ . Однако начальные условия могут иметь существенную неопределенность, и если они оказались на границе заданной области или за ее пределами, то закон

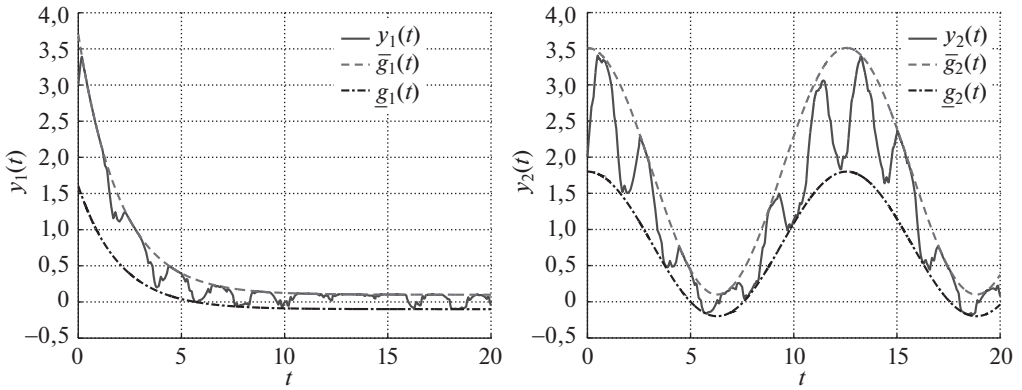


Рис. 5. Переходные процессы по  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  для функции  $\Phi(\varepsilon, t)$  с параметрами (23) при  $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$ .

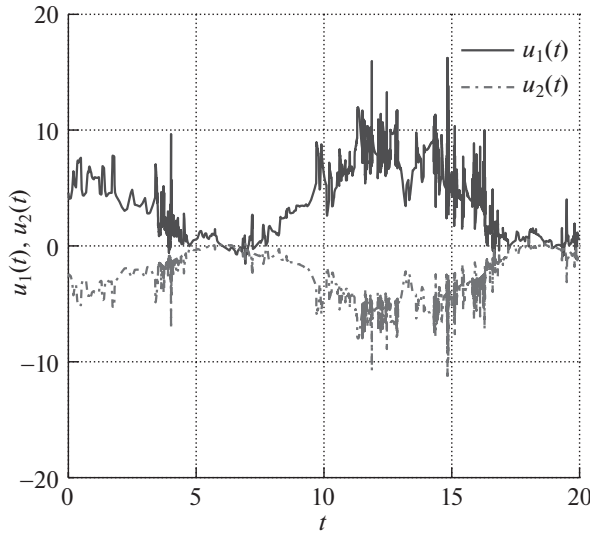


Рис. 6. Переходные процессы по  $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\}$  для функции  $\Phi(\varepsilon, t)$  с параметрами (23) при  $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$ .

управления будет неработоспособным в силу того, что обратная функция не существует при таких значениях (см. пример 3). Для решения данной проблемы  $\underline{g}_i(t)$  и  $\bar{g}_i(t)$  в (23) можно задавать с «запасом» в начальный момент времени, например в виде

$$(24) \quad \begin{aligned} \bar{g}_1(t) &= (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1 + g_6 e^{-k_0 t}, & \bar{g}_2(t) &= (g_0 - g_2) \cos(kt) + g_4 + g_6 e^{-k_0 t}, \\ \underline{g}_1(t) &= (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3 - g_6 e^{-k_0 t}, & \underline{g}_2(t) &= \cos(kt) + g_5 - g_6 e^{-k_0 t}, \end{aligned}$$

где  $g_6 > 0$  и  $k_0 > 0$ . Причем для покрытия большой области начальных значений с обеспечением нахождения выходных переменных объекта в множестве (23) необходимо  $g_6$  и  $k_0$  выбирать достаточно большими числами. Результаты моделирования по выходным сигналам  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  представлены

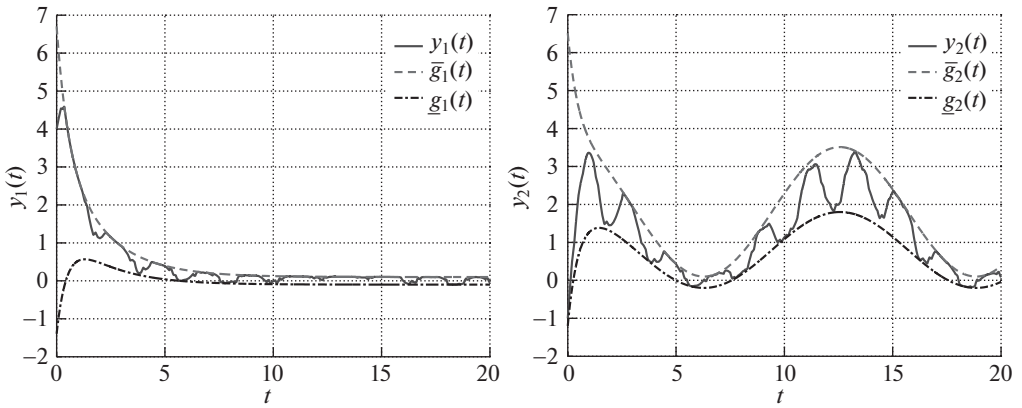


Рис. 7. Переходные процессы по  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  для функции  $\Phi(\varepsilon, t)$  с параметрами (24) при  $x(0) = \text{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$ .

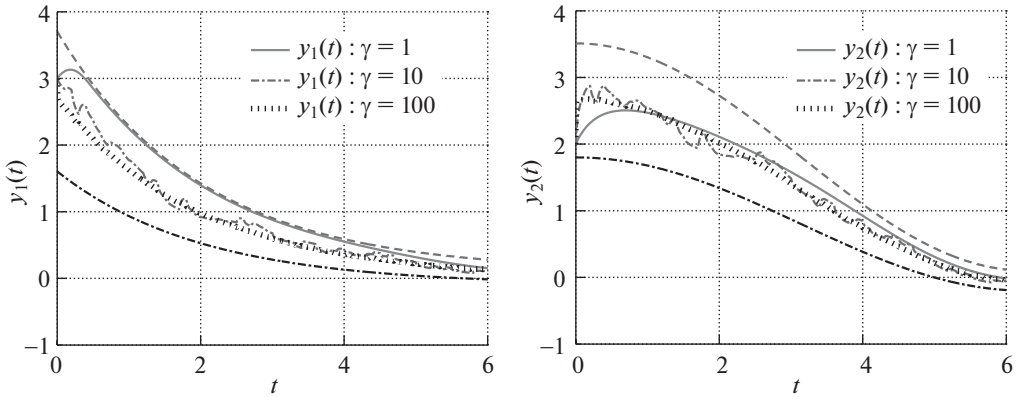


Рис. 8. Переходные процессы по  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  при  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 10$  и  $\gamma = 100$  при  $x(0) = \text{col}\{1 \ 1 \ 0\}$ .

на рис. 7 при  $g_6 = 3$  и  $k_0 = 2$  (значения  $g_6$  и  $k_0$  не выбраны достаточно большими числами для иллюстрации результата на рисунке) в (24), а также  $x(0) = \text{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$ .

Анализ результатов моделирования также показал, что если:

1) время переходного процесса по  $y(t)$  соизмеримо со временем переходного процесса по  $\varepsilon(t)$ ;

2) функция  $|f(t)|$  принимает большие значения,

то переходные процессы по  $y$  могут протекать почти на границах  $\bar{g}(t)$  и  $\underline{g}(t)$ . Из выражения  $\varepsilon = \ln \frac{g-y}{y-g}$  следует, что величина  $|\varepsilon(t)|$  может принимать большие значения, а значит, возрастет вычислительная нагрузка на систему управления. В результате увеличивается работа Matlab/Simulink, а иногда Matlab/Simulink выдает ошибку в вычислениях. Для предотвращения данной проблемы рекомендуется выбирать настраиваемые параметры так, чтобы переходные процессы по  $\varepsilon(t)$  протекали быстрее, чем по  $y(t)$ . Это также

позволит повысить робастность по отношению к параметрической неопределенности в объекте и влиянию возмущения  $f$ . Так, из рис. 8 видно, что при увеличении  $\gamma > 0$  в законе управления  $u = K_1 y + \gamma K_2 \varepsilon$  переходные процессы по  $y$  отдаляются от границ  $\underline{g}(t)$  и  $\bar{g}(t)$ .

## 6. Динамический регулятор для объектов со скалярным входным и выходным сигналами и произвольной относительной степенью

Результаты разделов 4 и 5 справедливы при относительной степени объекта, не превышающей единицы. Хорошо известно, что управление объектами со скалярными входными и выходными сигналами и с произвольной относительной степенью в условиях параметрической неопределенности является сложной задачей относительно обоснования работоспособности алгоритма, см., например, [23, 24]. Поскольку основная цель статьи — обеспечение целевого условия (2) с применением нового преобразования (3), то в настоящем разделе ради простоты выводов рассматривается объект со скалярными входным и выходным сигналами и с известными параметрами, но с произвольной относительной степенью. В численном примере будет продемонстрирована работоспособность алгоритма по отношению к параметрической неопределенности.

Пусть объект управления описывается уравнением

$$(25) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t).$$

Здесь  $y \in \mathbb{R}$  — выходной сигнал,  $u \in \mathbb{R}$  — сигнал управления,  $f \in \mathbb{R}$  — ограниченное возмущение,  $Q(p)$  и  $R(p)$  — линейные дифференциальные операторы с известными коэффициентами,  $Q(\lambda)$  — гурвицевый полином,  $\lambda$  — комплексная переменная,  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования. Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (2).

Подставив  $y(t)$  из (25) в (4), получим

$$(26) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( \frac{pR(p)}{Q(p)} u(t) + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Закон управления  $u = -\frac{Q(p)}{pR(p)} K \varepsilon$ , где  $K > 0$ , позволил бы свести уравнение (26) к виду  $\dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( -K \varepsilon + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)$ , решение которого было бы ограниченным при  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ . Обозначим относительную степень объекта (25) через  $\rho = \deg Q(p) - \deg R(p)$ . Тогда приведенный закон управления не реализуем при  $\rho > 1$  из-за требований к наличию  $\rho - 1$  производных от сигнала  $\varepsilon(t)$ . Поэтому зададим закон управления в виде

$$(27) \quad u = -\frac{Q(p)}{R(p)[p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu]} K \varepsilon.$$

Здесь достаточно малое число  $\mu > 0$  и коэффициент  $a > 0$  выбираются из условия гурвицевости полинома  $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$ . Учитывая (27), перепи-

шем (25) и (26) как

$$(28) \quad y(t) = -K \frac{1}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon(t) + \frac{D(p)}{Q(p)} f(t),$$

$$(29) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( -K\varepsilon - K \frac{p - p(\mu p + 1)^{\rho-1} - a\mu}{p(\mu p + 1)^{\rho-1} + a\mu} \varepsilon + \phi \right),$$

где  $\phi = \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$  — ограниченная функция.

**Теорема 4.** Пусть для преобразования (3) выполнены условия (а)–(г),  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ . Тогда существуют коэффициенты  $\mu_0$  и  $a$  такие, что при  $\mu < \mu_0$  полином  $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$  гурвицев и закон управления (27) обеспечивает выполнение целевого условия (2).

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (29), которое является регулярно возмущенным при малом параметре  $\mu$ . Перепишем (29) при  $\mu = 0$  в виде

$$(30) \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \left( \frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} (-K\bar{\varepsilon} + \phi).$$

Для анализа устойчивости (30) зададим функцию Ляпунова как  $V = 0,5\bar{\varepsilon}^2$ . Проверим условие  $\dot{V} + 2\alpha V \left( \frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} - \beta \left( \frac{\partial \Phi(\bar{\varepsilon}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^{-1} \phi^2 < 0$ , где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ . Подставив  $V$  и (30) в последнее неравенство, получим  $-(K - \alpha)\bar{\varepsilon}^2 + \bar{\varepsilon}\phi - \beta\phi^2 < 0$ . Данное неравенство будет выполнено при выполнении условия  $K > \alpha$  и  $(K - \alpha)\beta > 0,25$  (см. доказательство теоремы 2). Поскольку  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа, то всегда можно обеспечить выполнение данных условий при заданном  $K$ . Следовательно, решение уравнения (30) предельно ограниченное. Значит, согласно теореме 2.2 из [25] существует  $\mu_0$  такое, что при  $\mu < \mu_0$  выполнено условие  $|\bar{\varepsilon}(t) - \varepsilon(t)| < O(\mu)$ , где  $\lim_{\mu \rightarrow 0} O(\mu) = 0$ . В результате при  $\mu < \mu_0$  решение уравнения (29) также предельно ограниченное. Тогда в силу ограниченности  $f(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , а также гурвицевости  $Q(\lambda)$  и  $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$  сигнал  $y(t)$  будет ограниченным из (28). Значит, закон управления  $u$  будет ограничен из (27). Тогда из теоремы 1 следует, что целевое условие (3) будет выполнено. Теорема 4 доказана.

**Пример 7.** Пусть параметры объекта управления (25) определены в виде  $Q(p) = (p + 1)^3$ ,  $R(p) = 1$  и возмущение  $f(t)$  задано в (10).

Параметры регулятора (14) зададим в виде  $K = 3$ ,  $\mu = 0,01$  и  $a = 0,1$ . Тогда закон управления (27) будет выглядеть как

$$(31) \quad u = -\frac{3(p + 1)^3}{p(0,01p + 1)^2 + 10^{-3}} \varepsilon.$$

Зададим функцию  $\Phi$ , как в примере 3, где  $\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + \underline{g}(t)}{e^\varepsilon + 1}$  и

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} 2 \cos(t) + 0,2, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 2,2, & t > 2\pi; \end{cases} \quad \underline{g}(t) = \begin{cases} 2 \cos(t) - 0,2, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 1,8, & t > 2\pi. \end{cases}$$



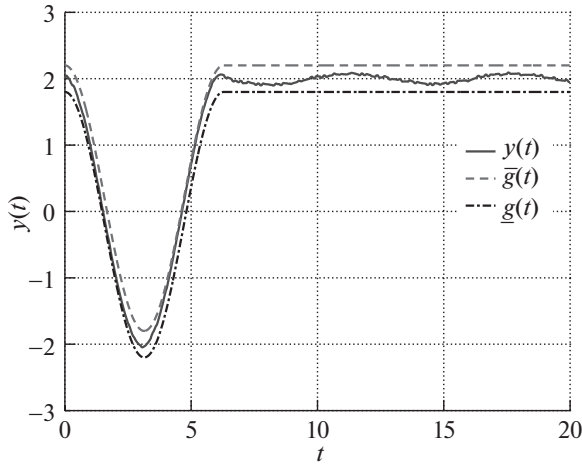


Рис. 9. Переходные процессы по  $y(t)$ .

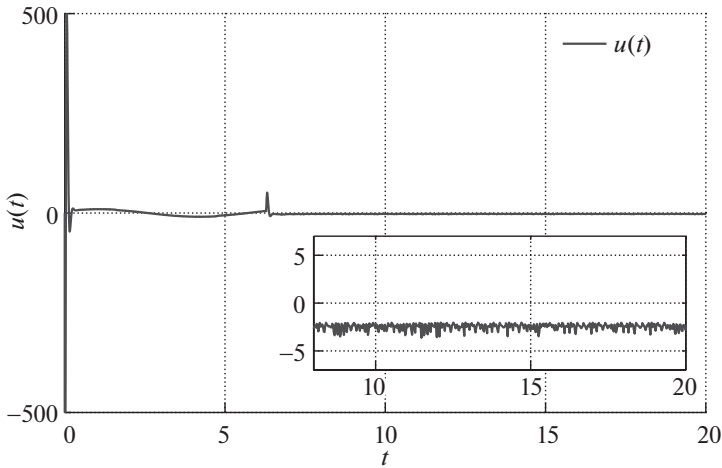


Рис. 10. График сигнала  $u(t)$ .

Результаты моделирования показали, что закон управления (31) обеспечивает цель управления (2). Моделирование также показало, что замкнутая система робастна по отношению к параметрическим неопределенностям. Так, на рис. 9, 10 приведены результаты переходных процессов по  $y(t)$  и  $u(t)$  при  $y(0) = 2$ ,  $py(0) = p^2y(0) = 1$ , неустойчивом полиноме  $Q(\lambda) = (\lambda - 1)^3$  и регуляторе (31). Начальные всплески сигнала управления обусловлены рассогласованием начальных условий в регуляторе и в объекте управления. Однако после отработки регулятором рассогласования начальных условий дальнейший график управления принимает «небольшие» значения, которые соответствуют выходному сигналу в заданном множестве.

## 7. Заключение

Разработан новый метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходной переменной объекта управле-

ния в заданном множестве. Для решения задачи предложена специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и алгоритмы управления линейными объектами и динамическими системами с секторной нелинейностью. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающими аналитические выводы.

Отметим, что основным результатом, сформулированный в теореме 1, справедлив для объектов с произвольной размерностью входных и выходных сигналов. Однако решение, полученное в разделе 5, не позволяет управлять объектами с размерностью выходного сигнала больше, чем размерность сигнала управления. Для управления такими объектами существует ряд решений, см., например, [26, 27] и список литературы в них. Применение методов [26, 27] и теоремы 1 может быть отдельным исследованием по управлению объектами с размерностью выходного сигнала больше, чем размерность сигнала управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
2. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. "Автоматика и телемеханика". В 2-х ч. *Под ред. А.А. Воронова.* М.: Высш. шк., 1986.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления, учебное пособие. М.: Ленанд, 2019.
4. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.
6. *Whidborne J.F., Amar N.* Computing the Maximum Transient Energy Growth // BIT Numerical Math. 2011. V. 51. No. 2. P. 447–557.
7. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 957–976.
8. *Tao G.* Adaptive Control Design and Analysis. John Wiley & Sons, 2003.
9. *Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2018.
10. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
11. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.
12. *Miller D.E., Davison E.J.* An Adaptive Controller Which Provides an Arbitrarily Good Transient and Steady-State Response // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 68–81.

13. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 9. P. 2090–2099.
14. *Bu X., He G., Wei D.* A new prescribed performance control approach for uncertain nonlinear dynamic systems via back-stepping // J. Franklin Institut. 2018. V. 355. No. 17. P. 8510–8536.
15. *Yin Z., Luo J., Wei C., Yin Z., Luo J., We C.* Robust Prescribed Performance Control for Euler-Lagrange Systems with Practically Finite-Time Stability // Eur. J. Control. 2020. V. 52. P. 1–10.
16. *Du P., Zhou Q., Liang H., Du P., Zhou Q., Liang H.* Neural adaptive prescribed performance control for interconnected nonlinear systems with output dead zone // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2019. <https://doi.org/10.1002/rnc.4802>
17. *Павлов Г.М., Меркурьев Г.В.* Автоматика энергосистем. СПб.: Издание Центра подготовки кадров РАО “ЕЭС России”, 2001.
18. *Буяхияуь К., Григорьев Л.И., Лаауад Ф., Хелласи А.* Оптимальное нечеткое управление для снижения энергопотребления в дистилляционных колоннах // АИТ. 2005. № 2. С. 36–45.  
*Bouyahiaoui C., Grigoriev L.I., Laaouad F., Khelassi A.* Optimal Fuzzy Control to Reduce Energy Consumption in Distillation Columns // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 2. P. 200–208.
19. *Ruderman M., Krettek J., Hoffmann F., Bertram T.* Optimal State Space Control of DC Motor // Proc. 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, 2008. P. 5796–5801.
20. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
21. *Фомичев В.В., Ильин А.В., Коровин С.К.* Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.
22. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. 2010. V. 46. P. 421–427.
23. *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // АИТ. 2003. № 6. С. 104–113.  
*Bobtsov A.A.* A Robust Control Algorithm for Tracking the Reference Signal // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 6. P. 943–950.
24. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // АИТ. 2007. № 7. С. 103–115.  
*Tsykunov A.M.* Robust Control Algorithms with Compensation of Bounded Perturbations // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
25. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
26. *Liu X., Gu G., Zhou K.* Robust stabilization of MIMO nonlinear systems by back-stepping // Automatica. 1999. V. 35. P. 987–992.
27. *Estrada A., Fridman L., Iriarte R.* Combined backstepping and HOSM control design for a class of nonlinear MIMO systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2017. V. 27. No. 4. P. 566–581.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 23.03.2020

После доработки 17.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

## Интеллектуальные системы управления, анализ данных

- © 2021 г. Ю.А. ДУБНОВ (yury.dubnov@phystech.edu)  
(Институт системного анализа Федерального исследовательского центра  
“Информатика и управление” РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва;  
Московский физико-технический институт),  
В.Ю. ПОЛИЩУК, канд. техн. наук (liquid\_metal@mail.ru)  
(Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН;  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет),  
Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук (popkov@isa.ru)  
(Институт системного анализа Федерального исследовательского центра  
“Информатика и управление” РАН, Москва;  
Брауде Колледж университета Хайфы, Кармиель, Израиль;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
Ю.М. ПОЛИЩУК, д-р физ.-мат. наук (yupolishchuk@gmail.com),  
А.В. МЕЛЬНИКОВ, д-р техн. наук (melnikovav@uriit.ru),  
Е.С. СОКОЛ (eugen137@gmail.com)  
(Югорский НИИ информационных технологий, Ханты-Мансийск)

### МЕТОД ЭНТРОПИЙНО-РАНДОМИЗИРОВАННОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОПУЩЕННЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Статья посвящена проблеме восстановления пропусков в коллекциях данных для задач машинного обучения. Предложен новый рандомизированный метод восстановления пропущенных данных, основанный на технологии энтропийно-робастного оценивания и генерации ансамблей случайных величин. Предложенный метод схож с использованием вспомогательной регрессии для восстановления пропущенных значений, но в отличие от последней в случае энтропийного оценивания не накладываются дополнительные ограничения на функцию правдоподобия ошибок в выборке и допустимы малые объемы данных, что становится крайне актуальным в задачах, когда объем данных для обучения ограничен, а пропуски встречаются не систематически. Предложенный метод применяется для восстановления пропущенных данных о площадях термокарстовых озер арктической зоны РФ, измеряемых по спутниковым снимкам.

*Ключевые слова:* восстановление пропусков, энтропийное оценивание, рандомизированное машинное обучение, термокарстовые озера, Арктика.

**DOI:** 10.31857/S0005231021040061

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 19-07-00282, 20-07-00223). Работа выполнена в рамках госбюджетной темы.

## 1. Введение

В прикладных задачах анализа данных нередко возникает необходимость работы с выборками данных, содержащих пропущенные значения. Пропуски в данных могут быть следствием самых различных причин, от отказа респондентов отвечать на вопросы анкеты до технических сбоев измерительных датчиков или программного обеспечения. Наличие пропусков в данных приводит к искажению результатов анализа и, следовательно, требует дополнительной обработки. Кроме того, большинство современных алгоритмов машинного обучения не поддерживают наличие пропусков в данных, что приводит к необходимости восстановления пропущенных значений.

Проблеме неполноты данных посвящено множество публикаций по статистике [1–4], и в различных сферах прикладного анализа данных, например в медицине [5], образовании [6] и др. [7, 8]. В частности, в [5] приводится один из наиболее полных обзоров современных методов анализа в условиях наличия пропусков в данных, книга содержит подробную теорию и примеры реализации и тестирования методов для клинических данных.

Различают три механизма появления пропусков в данных [2]:

- *Полностью случайные пропуски* (Missing Completely At Random, MCAR) — механизм, при котором вероятность появления пропущенных значений одинакова для всех объектов выборки. Например, если на предприятии не измеряют характеристики некоторых случайно выбранных устройств;
- *Случайные пропуски* (Missing At Random, MAR) — механизм, при котором вероятность появления пропусков может быть выявлена на основе имеющейся в выборке информации. Например, если не измеряются характеристики устройств с определенными критериями по весу, габаритам и пр.;
- *Неслучайные пропуски* (Missing Not At Random, MNAR) — в этом случае наличие пропусков в данных является дополнительной характеристикой объекта и не может игнорироваться при анализе. Например, если оказывается невозможным измерить характеристики уже вышедших из строя устройств.

Существует два основных подхода к анализу неполных данных. Первый подход подразумевает *отбрасывание пропусков*, полное или частичное (Listwise/pairwise deletion), в зависимости от требований алгоритма анализа [9]. Это наиболее простой в реализации способ, но применяемый исключительно для полностью случайных (MCAR) пропусков, когда исключение одного или нескольких объектов не приводит к нарушению репрезентативности выборки. Кроме того, данный способ не подойдет для выборок малых объемов и выборок с высокой долей пропусков.

Второй подход предполагает восстановление пропущенных значений, т.е. вставку (импутирование) некоторых значений на места пропусков. Согласно классификации, приведенной в [1], различают простые и сложные методы импутирования. К простым относятся замещения пропусков специальными значениями, например нулями, средними или медианными значениями по признаку, модой или новой категорией для дискретных и категориальных

признаков [10]. Такие способы восстановления пропущенных значений наиболее распространены на практике благодаря своей простоте реализации, но подходят преимущественно для случайных пропусков (MAR). Также в эту группу методов входит использование вспомогательной регрессии для признаков, метода ближайших соседей (HotDeck [11], kNN [12]) и метода  $k$ -средних ( $k$ -means [13]) для поиска подходящего значения на место пропуска.

К сложным методам импутирования относятся итеративные алгоритмы, предполагающие оптимизацию некоторого функционала, отражающего точность расчета подставляемых значений. Причем оптимизация функционала может проводиться как глобально, т.е. по всем объектам выборки (метод Бартлетта [4], EM-оценивание [14, 15] и Resampling [4]), так и локально, когда для подбора пропущенного значения используются только близкие объекты (алгоритмы Zet [16, 17] и ZetBraid [18]).

Так или иначе, любые алгоритмы импутирования предполагают использование имеющейся информации для заполнения пропусков, что приводит к искажению статистических характеристик выборки в сторону характеристик только полных наблюдений. Кроме того, замещение пропусков вносит в выборку определенную долю искусственных данных, которые в свою очередь приводят к смещению значимости получаемых на их основе результатов [19].

Для борьбы с данными недостатками в публикациях [20–22] был предложен метод множественного импутирования, предполагающий замещение пропусков несколькими возможными значениями, с каждым из которых будет формироваться отдельный массив данных для обучения и анализа. Множественное импутирование призвано отразить присущую реальным данным неопределенность при подстановке пропущенных значений. Поэтому результаты анализа получившихся массивов данных приводятся в терминах средних значений, дисперсионного разброса и доверительных интервалов. На аналогичной идее усреднения основаны также методы стохастической регрессии для восстановления пропусков и популярная в последнее время технология размножения выборки bootstrap [23].

Таким образом, существующие методы работы с пропущенными данными различаются по качеству восстановления, сложности реализации и критериям применимости. Наиболее интуитивными и простыми в реализации являются отбрасывание пропусков и импутирование специальными значениями, более технологичными и универсальными являются поиск ближайших соседей и восстановление регрессией, а наиболее робастными оказываются стохастические методы, основанные на многократном повторении и усреднении результатов анализа.

В данной статье предложен новый метод восстановления пропущенных данных, основанный на энтропийно-робастном оценивании и генерации ансамблей случайных величин [24, 25]. В результате оценивания восстанавливаются плотности распределения вероятностей как для параметров модели, так и для шумов измерений, что позволяет восстановить пропущенные значения с помощью семплирования случайных величин.

## 2. Структура процедуры рандомизированного восстановления пропущенных данных

Рассмотрим состав и свойства информационного обеспечения задачи машинного обучения. Обучающая коллекция состоит из данных о функционировании исследуемого объекта  $O$  (рис. 1) и его измеренных входа  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$  и выхода  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$  объекта  $O$ . Переменные  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$  сопровождаются измерительными ошибками  $\eta(t) \in \mathbb{R}^m$  и  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  соответственно. Обычно информация о них гипотетическая. Обычно предполагается, что они в обучающей коллекции присутствуют аддитивно:

$$(2.1) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t) + \eta(t); \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^0(t) + \xi(t),$$

где  $\mathbf{x}^0(t), \mathbf{y}^0(t)$  — “чистые” переменные.

Будем полагать, что измерения входа и выхода осуществляются в одной временной шкале  $t = kh$  с шагом  $h$  и на одинаковом временном интервале  $\mathcal{T} = [0, T]$ . Следовательно, реальная обучающая коллекция состоит из матрицы данных о входе и выходе объекта  $O$ .

Наборы данных о входе и выходе могут иметь пропуски (рис. 2, интервал  $[k^-, k^+]$ ). Возможны три ситуации пропусков: в выходных, входных, и в выходных и входных данных (необязательно в одни и те же моменты времени).

Основная идея рандомизированного восстановления пропущенных данных состоит в том, чтобы пропуски заменить ансамблем пропущенных данных (АПД) — случайными значениями компонент входа и выхода (см. рис. 2), оптимизированным с учетом имеющихся измерений. При этом используется параметризованная рандомизированная модель (РПМ) объекта, вероятностные характеристики которой — плотности распределение вероятностей ее параметров (ПРВ) — определяются посредством *MEE*-оценивания (Maximum Entropy Estimation) [26].

Генерация оптимизированных АПД осуществляется путем сэмплирования оптимальных ПРВ [27]. Синтезированный АПД позволяет использовать его непосредственно для решения различных задач машинного обучения, либо определять его численные характеристики: средние, медианные, дисперсион-

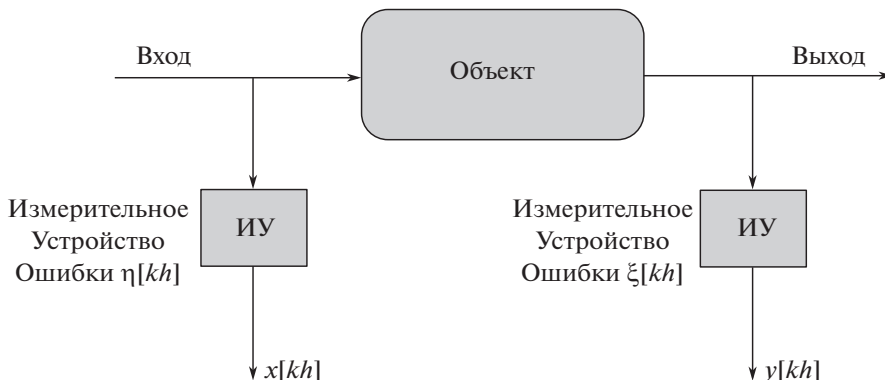


Рис. 1. Блок-схема процедуры измерения данных об объекте.

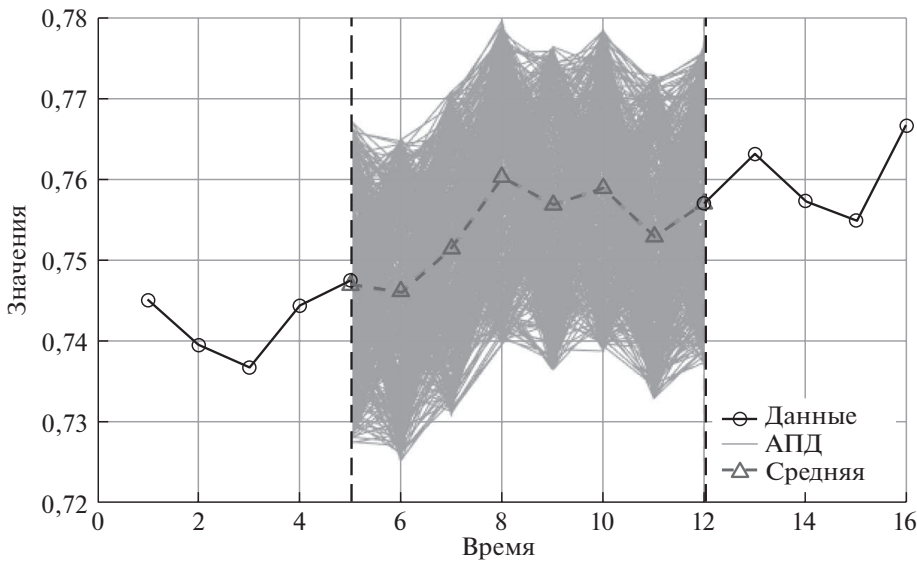


Рис. 2. Пример построения ансамбля пропущенных данных (АПД).

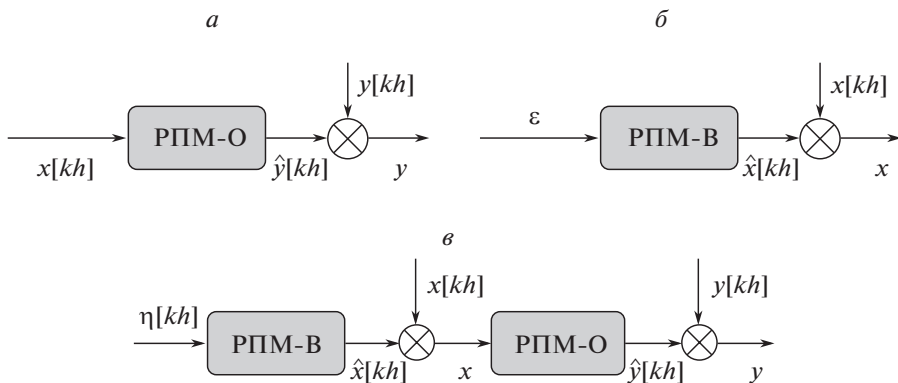


Рис. 3. Блок-схемы моделей РПМ.

ные трубки, интерквантильные множества данных и т.д. Иллюстрация этой идеи представлена на рис. 2.

В ситуации, когда пропуски имеют место в выходных данных, процедура использует входные данные  $\mathbf{x}[kh]$ , РПМ-О и выходные данные с пропусками  $\tilde{\mathbf{y}}[kh]$  для вычисления энтропийно-оптимальных ПРВ (рис. 3, а) и генерации ансамбля  $\mathcal{Y}$  восстановленных входных данных.

Если имеют место пропуски во входных данных, то для их восстановления используется дополнительная РПМ-В со входом в виде оптимизированной последовательности независимых случайных векторов  $\eta[kh]$  и входные данные с пропусками  $\tilde{\mathbf{x}}[kh]$ . Для определения ПРВ параметров и указанной последовательности используется МЕЕ-оценивание. Они позволяют генери-



ровать ансамбль  $\mathcal{E}$  случайных векторов  $\eta[kh]$  и ансамбль  $\mathcal{X}$  восстановленных входных данных (рис. 3,б).

И наконец, если пропуски имеют место и во входных, и в выходных данных, то сначала восстанавливаются ансамбли  $\mathcal{E}$  случайных векторов  $\eta[kh]$  и входных данных  $\mathcal{X}$ , которые затем используются для восстановления ансамблей выходных данных  $\mathcal{Y}$  (рис. 3,в).

Совокупность методов рандомизированного восстановления пропущенных данных будем обозначать RRMD — Random Restored Missing Data.

### 3. Алгоритмы оптимизации АПД

#### 1. Пропуски в выходных данных.

Пусть на дискретном интервале наблюдения  $\tau = [0, N]$  имеется набор входных данных  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  без пропусков  $\mathbf{x}[0], \dots, \mathbf{x}[N]$  и набор выходных данных  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  с пропусками  $\mathbf{y}[0], \dots, \mathbf{y}[k^- - 1], \mathbf{y}[k^+ + 1], \dots, \mathbf{y}[N]$ . Данные  $\mathbf{y}[k^-], \dots, \mathbf{y}[k^+]$  отсутствуют.

Из набора входных данных образуем матрицу

$$(3.1) \quad X_{(k-\rho)} = [\mathbf{x}[k - \rho], \mathbf{x}[k - \rho + 1], \dots, \mathbf{x}[k]]$$

с параметром  $\rho < N$ .

Выходные данные содержат аддитивные ошибки  $\xi[k] \in \mathbb{R}^n$  интервального типа:

$$(3.2) \quad \xi[k] \in \Xi_k = [\xi^-, \xi^+].$$

Вероятностные свойства ошибок характеризуются функциями ПРВ  $Q_k(\xi[k])$ ,  $k = \overline{0, N}$ , которые предполагаются непрерывно-дифференцируемыми.

В общем случае связь между входом и выходом объекта  $O$  описывается рандомизированной параметризованной динамической моделью РДМ-О:

$$(3.3) \quad \hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\rho)}),$$

где  $\mathbb{B}$  — нелинейный функционал со случайными параметрами  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$  интервального типа:

$$(3.4) \quad \mathbf{a} \in \mathcal{A} = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+].$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функцией ПРВ  $P(\mathbf{a})$ , которая предполагается непрерывно-дифференцируемой.

Наблюдаемый выход РДМ-О

$$(3.5) \quad \mathbf{v}[k] = \hat{\mathbf{y}}[k] + \xi[k], \quad k = \overline{0, N}.$$

Для определения оптимальных ПРВ воспользуемся алгоритмом рандомизированного машинного обучения (РМО) [25], который в данном случае имеет

вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}[P(\mathbf{a}), Q(\xi)] &= - \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \ln P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} - \\
 (3.6) \quad &- \sum_{k=0}^T \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) \ln Q_k(\xi[k]) d\xi[k] \Rightarrow \max, \\
 &\int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = 1; \quad \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) d\xi[k] = 1, \quad k = \overline{0, N}, \\
 &\int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\varrho)}) d\mathbf{a} + \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) \xi[k] d\xi[k] = \mathbf{y}[k], \\
 &k \neq k^-, \dots, k^+; \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что ПРВ — непрерывно-дифференцируемые функции и задача (3.6) относится к ляпуновскому классу функциональных оптимизационных задач [28], можно получить ее аналитическое решение, параметризованное множителями Лагранжа  $\theta^{(0)}, \dots, \theta^{k^--1}, \theta^{k^++1}, \dots, \theta^{(N)}$ :

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad P^*(\mathbf{a}, \theta) &= \frac{\exp \left[ - \sum_{k=0}^N \langle \theta^{(k)}, \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\varrho)}) \rangle \right]}{\mathcal{P}(\theta)}, \\
 Q_k^*(\xi[k], \theta^{(k)}) &= \frac{\exp(-\langle \theta^{(k)}, \xi[k] \rangle)}{Q_k(\theta^{(k)})}, \quad k \neq k^-, \dots, k^+; \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \mathcal{P}(\theta) &= \int_{\mathcal{A}} \exp \left[ - \sum_{k=0}^N \langle \theta^{(k)}, \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\varrho)}) \rangle \right] d\mathbf{a}, \\
 Q_k(\theta^{(k)}) &= \int_{\Xi_k} \exp(-\langle \theta^{(k)}, \xi[k] \rangle) d\xi[k], \quad k \neq k^-, \dots, k^+; \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

Множители Лагранжа определяются из системы уравнений

$$(3.9) \quad \frac{\mathbf{M}_k(\theta)}{\mathcal{P}(\theta)} + \frac{\mathbf{N}_k(\theta^{(k)})}{Q_k(\theta^{(k)})} = \mathbf{y}[k], \quad k \neq k^-, \dots, k^+; \quad k = \overline{0, N},$$

где

$$(3.10) \quad \mathbf{M}_k(\theta) = \int_{\mathcal{A}} \exp \left[ - \sum_{k=0}^T \langle \theta^{(k)}, \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\varrho)}) \rangle \right] \mathbb{B}(\mathbf{a}, X_{(k-\varrho)}) d\mathbf{a},$$

$$(3.11) \quad \mathbf{N}_k(\theta^{(k)}) = \int_{\Xi_k} \exp(-\langle \theta^{(k)}, \xi[k] \rangle) \xi[k] d\xi[k].$$

## 2. Пропуски во входных данных.

Восстановление пропусков во входных данных представляет собой более сложную задачу, чем то же самое для входных данных. Причина состоит в том, что механизм происхождения входных данных и источник его возбуждения неизвестны. В терминах используемого здесь подхода, неизвестны модель, которая может генерировать указанные входные данные, и возбуждающий ее процесс. Все это повышает уровень неопределенности в данной задаче, что мотивирует применение рандомизированного подхода.

Реализация его состоит в использовании последовательности независимых случайных векторов  $\zeta[k] \in \mathbb{R}^q$  ( $k = \overline{0, N}$ ) со специальными вероятностными характеристиками и рандомизированной параметризованной модели, выбор которой определяется ее степенью сложности<sup>2</sup>.

Итак, рассмотрим интервал наблюдения  $\tau = [0, N]$  и набор входных данных  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  с пропусками  $\mathbf{x}[0], \dots, \mathbf{x}[k^- - 1], \mathbf{x}[k^+ + 1], \dots, \mathbf{x}[T]$ . Данные  $\mathbf{x}[k^-], \dots, \mathbf{x}[k^+]$  отсутствуют.

Для восстановления пропущенных входных данных будем полагать, что они являются результатом преобразования последовательности независимых случайных векторов  $\zeta[k] \in \mathbb{R}^q$ ,  $k \in \tau$ . Будем полагать, что векторы  $\zeta[k]$  — интервального типа, т.е.

$$(3.12) \quad \zeta[k] \in \mathcal{Z}_k = [\zeta^-[k], \zeta^+[k]], \quad k = \overline{0, N}.$$

В силу неопределенности и недостаточности знаний о процессе и его преобразовании будем использовать его рандомизированную параметризованную модель (РПМ-В)

$$(3.13) \quad \hat{\mathbf{x}}[k] = \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}),$$

где  $\mathbb{F}$  — нелинейный векторный функционал со случайными параметрами  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$  и входом — матрицей, составленной из столбцов векторов  $\zeta[k] \in \mathbb{R}^q$ , с размером  $(q \times \rho)$ :

$$(3.14) \quad Z_{(k-\rho)} = [\zeta[k-\rho], \zeta[k-\rho+1], \dots, \zeta[k]].$$

Введем матрицу

$$(3.15) \quad Z = [Z_{(-\rho)}, Z_{(1-\rho)}, \dots, Z_{(N-\rho)}],$$

характеризующую вход РПМ-В (3.13) на интервале  $k = \overline{0, N}$ . Матрица  $Z$  — случайная, интервального типа:

$$(3.16) \quad Z \in \mathcal{Z} = \bigcup_{k=0}^N \mathcal{Z}_k = [Z^-, Z^+].$$

Случайные параметры модели

$$(3.17) \quad \mathbf{c} \in \mathcal{C} = [\mathbf{c}^-, \mathbf{c}^+].$$

<sup>2</sup> Возможно, потребуется перебор и тестирование разных моделей.

Вероятностные свойства параметров  $\mathbf{c}$  и матрицы  $Z$  (3.15) характеризуются функцией совместной плотности распределения вероятностей (ПРВ)  $W(\mathbf{c}, Z)$ , которая определена на множестве

$$(3.18) \quad \mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Z}$$

и предполагается непрерывно-дифференцируемой.

Пусть имеющиеся входные данные  $\mathbf{x}[k]$  содержат ошибки  $\eta[k] \in \mathbb{R}^m$  интервального типа:

$$(3.19) \quad \eta[k] \in \mathcal{E}_k = [\eta^-, \eta^+].$$

Вероятностные свойства ошибок характеризуются функциями ПРВ  $G_k(\eta[k])$ ,  $k = \overline{0, N}$ , которые предполагаются непрерывно-дифференцируемыми.

Наблюдаемый выход РПМ-В

$$(3.20) \quad \mathbf{z}[k] = \hat{\mathbf{x}}[k] + \eta[k], \quad k = \overline{0, N}.$$

Отсюда видно, что для восстановления пропущенных входных данных используется похожая с РДМ-О модель, но со случайным входом  $\zeta[k]$ .

Воспользуемся алгоритмом РМО [25] для определения функций ПРВ  $W(\mathbf{c}, Z)$  и  $G_k(\zeta[k])$ ,  $k = \overline{0, N}$ , который в данном случае имеет вид:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}[W(\mathbf{c}, Z), G(\eta)] &= - \int_{\mathcal{F}} W(\mathbf{c}, Z) \ln W(\mathbf{c}, Z) d\mathbf{c} dZ - \\ &- \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{E}_k} G_k(\eta[k]) \ln G_k(\eta[k]) d\eta[k] \Rightarrow \max, \\ \int_{\mathcal{F}} W(\mathbf{c}, Z) d\mathbf{c} dZ &= 1; \quad \int_{\mathcal{E}_k} G_k(\eta[k]) d\eta[k] = 1, \\ \int_{\mathcal{F}} W(\mathbf{c}, Z) \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}) d\mathbf{c} dZ &+ \int_{\mathcal{E}_k} G_k(\eta[k]) \eta[k] d\eta[k] = \mathbf{x}[k], \\ &k \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

где множество индексов  $\mathcal{K} = \overline{0, N}$  не содержит значения  $k = k^-, \dots, k^+$ .

Эта задача того же класса, что и (3.6). Ее решение имеет вид

$$(3.22) \quad \begin{aligned} W^*(\mathbf{c}, Z, \lambda) &= \frac{\exp \left[ - \sum_{k \in \mathcal{K}} \langle \lambda^{(k)}, \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}) \rangle \right]}{\mathcal{W}(\lambda)}, \\ G_k^*(\eta[k], \lambda^{(k)}) &= \frac{\exp(-\langle \lambda^{(k)}, \eta[k] \rangle)}{\mathcal{G}_k(\lambda^{(k)})}, \\ &k \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

где

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(\lambda) &= \int_{\mathcal{F}} \exp \left[ - \sum_{k \in \mathcal{K}} \langle \lambda^{(k)}, \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}) \rangle \right] d\mathbf{c}, \\ \mathcal{G}_k(\lambda^{(k)}) &= \int_{\mathcal{E}_k} \exp \left( - \langle \lambda^{(k)}, \eta[k] \rangle \right) d\eta[k]. \end{aligned}$$

В этих равенствах  $\lambda^{(k)}$  — вектор множителей Лагранжа, соответствующий  $k$ -му балансовому ограничению. Он определяется из системы уравнений:

$$(3.24) \quad \frac{\tilde{\mathbf{M}}_k(\lambda)}{\mathcal{W}(\lambda)} + \frac{\tilde{\mathbf{S}}_k(\lambda^{(k)})}{\mathcal{G}_k(\lambda^{(k)})} = \mathbf{x}[k], \quad k \neq k^-, \dots, k^+; k \in \mathcal{K},$$

где

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_k(\lambda) &= \int_{\mathcal{F}} \exp \left[ - \sum_{k \in \mathcal{K}} \langle \lambda^{(k)}, \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}) \rangle \right] \mathbb{F}(\mathbf{c}, Z_{(k-\rho)}) d\mathbf{c} dZ, \\ \tilde{\mathbf{S}}_k(\lambda^{(k)}) &= \int_{\mathcal{E}_k} \exp \left( - \langle \lambda^{(k)}, \eta[k] \rangle \right) \eta[k] d\eta[k]. \end{aligned}$$

3. Пропуски во входных и выходных данных.

В этом случае описанные процедуры применяются последовательно: сначала алгоритм (3.21), а затем алгоритм (3.6).

В результате применения упомянутых алгоритмов отдельно или последовательно получаем

- энтропийно-оптимальные функции ПРВ параметров соответствующих моделей:  $P^*(\mathbf{a}), W^*(\mathbf{c})$ ;
- энтропийно-оптимальные функции ПРВ измерительных шумов:  $Q_k^*(\xi[k]), G_k^*(\eta[k]), k = \overline{1, N}$ ;
- энтропийно-оптимальную функцию ПРВ рандомизированной входной последовательности  $K_k^*(\zeta[k]), k = \overline{1, N}$ .

#### 4. Сэмплирование оптимальных функций ПРВ

Сэмплирование предполагает трансформацию функции ПРВ в соответствующую последовательность случайных векторов. В данной процедуре это есть способ реализации ансамблей случайных векторов на участках пропущенных данных.

Общий метод генерации последовательностей случайных векторов с заданной функцией ПРВ изложен в [29]. Он используется для сэмплирования последовательностей соответствующих случайных векторов-параметров РПМ-О, РПМ-В и векторов-шумов измерений и генерирования ансамблей восстановленных данных с помощью метода Монте-Карло [30].

Полезными характеристиками ансамблей являются:

— эмпирические функции ПРВ  $\mathcal{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}[k]), \mathcal{W}_k(\hat{\mathbf{z}}_{rst}[k])$  для восстановленных выходных и входных данных соответственно;

— эмпирические функции РВ:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(i)}[k]) &= \sum_{j=1}^i \mathcal{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(j)}[k]) \quad \text{для выходных данных;} \\ \mathfrak{W}_k(\hat{\mathbf{z}}_{rst}^{(i)}[k]) &= \sum_{j=1}^i \mathcal{W}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(j)}[k]) \quad \text{для входных данных.} \end{aligned}$$

Востребованными для решения задач машинного обучения являются наборы восстановленных данных, которые являются интегральными характеристиками ансамбля случайных траекторий.

1. Данные, соответствующие максимумам ПРВ параметров и шумов (max-pn):

— восстановленные выходные данные

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{rst}[k] &= \mathbb{B}(\mathbf{a}^*, X_{(k-\rho)}), \quad \mathbf{a}^* = \arg \max P^*(\mathbf{a}), \\ \xi_{rst}[k] &= \arg \max Q_k^*(\xi[k]), \\ \hat{\mathbf{v}}_{rst}[k] &= \hat{\mathbf{y}}_{rst}[k] + \xi_{rst}[k], \quad k = \overline{0, N}; \end{aligned}$$

— восстановленные входные данные

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{rst}[k] &= \mathbb{F}(\mathbf{c}^*, Z_{(k-\rho)}^*), \quad \mathbf{c}^* = \arg \max W^*(\mathbf{a}), \\ Z_{(k-\rho)}^* &= [\zeta^*[k-\rho], \dots, \zeta^*[k]], \quad \zeta^*[k] = \arg \max K_k^*(\zeta[k]), \\ \eta_{rst}[k] &= \arg \max G_k^*(\eta[k]), \\ \hat{\mathbf{z}}_{rst}[k] &= \hat{\mathbf{x}}_{rst}[k] + \eta_{rst}[k], \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

2. Данные, соответствующие максимумам эмпирических ПРВ наблюдаемых траекторий для  $k = \overline{0, N}$  (max-ePDF):

— восстановленные выходные данные

$$(4.4) \quad \check{\mathbf{v}}_{rst}[k] = \arg \max \mathcal{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}[k]), \quad k = \overline{0, N};$$

— восстановленные входные данные

$$(4.5) \quad \check{\mathbf{z}}_{rst}[k] = \arg \max \mathcal{W}_k(\hat{\mathbf{z}}_{rst}[k]), \quad k = \overline{0, N}.$$

3. Данные, соответствующие средней по ансамблю траектории (mean) ( $M$  — количество траекторий в ансамбле):

— восстановленные выходные данные

$$(4.6) \quad \bar{\mathbf{v}}_{rst}[k] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(i)}[k], \quad k = \overline{0, N};$$

— восстановление входных данных

$$(4.7) \quad \bar{\mathbf{z}}_{rst}[k] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{z}}_{rst}^{(i)}[k], \quad k = \overline{0, N}.$$

4. Данные, соответствующие медианной по ансамблю траектории (med) ( $M$  — количество траекторий в ансамбле):

— восстановление выходных данных:

$$(4.8) \quad \hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(j^*)}[k] \Rightarrow \sum_{j=1}^{j^*} \mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(j)}[k]) = \sum_{j=j^*+1}^M \mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}_{rst}^{(j)}[k]);$$

— восстановление входных данных:

$$(4.9) \quad \hat{\mathbf{z}}_{rst}^{(j^*)}[k] \Rightarrow \sum_{j=1}^{j^*} \mathfrak{W}_k(\hat{\mathbf{z}}_{rst}^{(j)}[k]) = \sum_{j=j^*+1}^M \mathfrak{W}_k(\hat{\mathbf{z}}_{rst}^{(j)}[k]).$$

## 5. Восстановление пропусков данных дистанционного зондирования состояния термокарстовых озер арктической зоны

Термокарстовые озера, расположенные в арктической зоне, являются основным природным источником эмиссии метана, который считается вторым по значимости парниковым газом, влияющим на изменение климата Земли [31]. Арктические зоны России и Канады являются основными регионами наиболее динамичных изменений вечной мерзлоты и термокарстовых озер. Поэтому изменения площади озер являются важными для прогнозирования динамики выбросов метана. Для получения данных о площадях озер используются космические снимки Landsat и средства их дешифрирования в геоинформационной системе ArcGIS. Климатические данные (среднегодовая температура и годовая сумма осадков) получены с использованием систем реанализа метеоданных ERA-40, ERA-Interim [32]. Пространственная структура данных состоит из 30 тестовых участков, расположенных в трех зонах вечной мерзлоты Западной Сибири: сплошной ( $C$  — *continuous*), прерывистой ( $D$  — *discontinuos*) и островной ( $I$  — *insular*).

Однако данные о текущем состоянии озер, в частности об их площади и форме, а также климатические данные (например, температура и осадки) регистрируются нерегулярно, а их преобразование от источника измерений до компьютерных атрибутов сопровождается существенными ошибками.

Многочисленными экспериментальными исследованиями с применением методов математической статистики показано, что основными факторами, влияющими на величину площади термокарстовых озер, являются среднегодовая температура воздуха  $T[t]$  и годовая сумма осадков  $R[t]$  ( $t$  — календарный год) [33].

1. Данные.

Данные по температуре  $\tilde{T}$ , осадкам  $\tilde{R}$  и площади озер  $\tilde{S}$  в календарной и в дискретной временных шкалах представлены в [34]. В настоящей статье

Таблица 1. Данные площади тестовых участков

Участок $I - 5$		Участок $D - 9$		Участок $C - 24$	
Год	Площадь, га	Год	Площадь, га	Год	Площадь, га
1973	67,90	1973	13,88	1977	25,62
1984	68,89	1987	14,29	1981	22,59
1988	64,27	1988	15,36	1988	24,24
2001	62,36	2001	15,40	1999	23,81
2003	62,31	2002	14,15	2001	22,96
2007	66,96	2003	14,50	2006	23,76
		2006	13,88		
		2007	13,01		

используются данные для трех участков  $I - 5$ ,  $D - 9$ ,  $C - 24$ , данные по площади представлены в табл. 1, а данные по температуре и количеству осадков приведены в Приложении в табл. П.1.

Данные охватывают временной интервал [1973–2007], или  $k = \overline{1, 35}$ . Преобразуем их к нормализованной форме, т.е. отобразим их значения на числовой отрезок  $[0, 1]$ :

$$(5.1) \quad S_r = \frac{\tilde{S} - \tilde{S}_{\min}}{\tilde{S}_{\max} - \tilde{S}_{\min}}, \quad T_r = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_{\min}}{\tilde{T}_{\max} - \tilde{T}_{\min}}, \quad R_r = \frac{\tilde{R} - \tilde{R}_{\min}}{\tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min}}.$$

Данные о площади озера на соответствующих участках с пропусками:

- *участок  $I - 5$* : обучающая коллекция

$$S_{r,LM}^{(I-5)}[k], \quad k \in \mathcal{K}_{LM}^{(I-5)} = \{1, 12, 16, 29, 31, 35\};$$

- *участок  $D - 9$* : обучающая коллекция

$$S_{r,LM}^{(D-9)}[k], \quad k \in \mathcal{K}_{LM}^{(D-9)} = \{1, 16, 29, 35\};$$

тестовая коллекция

$$S_{r,T}^{(D-9)}[k], \quad k \in \mathcal{K}_T^{(D-9)} = \{15, 30, 31, 34\};$$

- *участок  $C - 24$* : обучающая коллекция

$$S_{r,LM}^{(C-24)}[k], \quad k \in \mathcal{K}_{LM}^{(C-24)} = \{5, 9, 16, 27, 29, 34\}.$$

Данные по площади озера на участках  $I - 5$ ,  $C - 24$  будут использованы для обучения соответствующих моделей и восстановления пропущенных данных, данные по участку  $D - 9$  — для обучения модели ( $\mathcal{K}_{LM}^{(D-9)}$ ) и тестирования ( $\mathcal{K}_T^{(D-9)}$ ) восстановленных данных.



## 2. Модель.

Восстановление пропущенных данных на трех обозначенных выше зонах и участках осуществляется единой по структуре моделью линейной регрессии вида

$$(5.2) \quad \hat{S}[k] = \alpha T[k] + \beta R[k] + \xi[k], \quad k = \overline{0, N},$$

где параметры  $\alpha, \beta$  — случайные, независимые, интервального типа:

$$(5.3) \quad \alpha \in \mathcal{A} = [\alpha^-, \alpha^+], \quad \beta \in \mathcal{B} = [\beta^-, \beta^+].$$

Для принятых тестовых участков границы интервалов одинаковые<sup>3</sup>:

$$\mathcal{A}[0; 1], \quad \mathcal{B} = [0; 1].$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функциями ПРВ  $P(\alpha), F(\beta)$ .

Шум также нормализованный и интервальный

$$(5.4) \quad \xi[k] \in \Xi = [\xi^-, \xi^+] = [-0,15; 0,15]$$

с функциями ПРВ  $Q_k(\xi[k]), k \in \mathcal{K}$ .

### 3. Алгоритм РМО.

Общая форма алгоритма обучения модели имеет вид

$$(5.5) \quad \mathcal{H} = - \int_{\mathcal{A}} P(\alpha) \ln P(\alpha) d\alpha - \int_{\mathcal{B}} F(\beta) \ln F(\beta) d\beta - \\ - \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) \ln Q_k(\xi[k]) d\xi[k] \Rightarrow \max,$$

— нормировка

$$(5.6) \quad \int_{\mathcal{A}} P(\alpha) d\alpha = 1, \quad \int_{\mathcal{B}} F(\beta) d\beta = 1, \quad \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) d\xi[k] = 1, \quad k \in \mathcal{K},$$

— эмпирические балансы

$$(5.7) \quad \int_{\mathcal{A}} P(\alpha) \alpha T[k] d\alpha + \int_{\mathcal{B}} F(\beta) \beta R[k] d\beta + \int_{\Xi_k} Q_k(\xi[k]) \xi[k] d\xi[k] = S_r[k], \quad k \in \mathcal{K}.$$

Решение задачи (5.5)–(5.7) имеет вид

$$(5.8) \quad P^*(\alpha, \theta) = \frac{\exp(-\alpha l_r(\theta))}{\mathcal{P}(\theta)}, \quad F^*(\beta, \theta) = \frac{\exp(-\beta h_r(\theta))}{\mathcal{F}(\theta)}, \\ Q_k(\xi[k], \theta_k) = \frac{\exp(-\theta_k \xi[k])}{\mathcal{Q}_k(\theta_k)}, \quad k \in \mathcal{K},$$

где  $\theta = \{\theta_k, k \in \mathcal{K}\}$  — множители Лагранжа,

<sup>3</sup> Границы интервалов косвенно влияют на качество восстановленных данных, измеряемого принятым функционалом. Для выбора границ можно воспользоваться его численной оптимизацией.

Таблица 2. Расчетные данные по тестовым участкам

Участок $I - 5$		Участок $D - 9$		Участок $C - 24$	
$\mathcal{K}_{LM}^{(I-5)}$	$\theta/10^3$	$\mathcal{K}_{LM}^{(D-9)}$	$\theta/10^3$	$\mathcal{K}_{LM}^{(C-24)}$	$\theta/10^3$
1	0,0015	1	-2,13	5	4,73
12	2,99	16	4,73	9	-0,734
16	-0,0278	29	0,0321	16	-0,0102
29	-0,356	35	-1,56	27	-1,07
31	-4,73			29	-0,076
35	3,26			34	-0,0042

— нормировочные коэффициенты

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(\theta) &= \int_A \exp(-\alpha l_r(\theta)) d\alpha; & \mathcal{F}(\theta) &= \int_B \exp(-\beta h_r(\theta)) d\beta; \\ \mathcal{Q}_k(\theta_k) &= \int_{\Xi} \exp(-\theta_k \xi[k]) d\xi[k], & k \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

— показатели экспонент

$$(5.10) \quad l_r(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \theta_k T[k], \quad h_r(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \theta_k R[k].$$

Множители Лагранжа определяются из системы уравнений

$$(5.11) \quad L(\theta)T[k] + K(\theta)R[k] + V_k(\theta_k) = S_r[k], \quad k \in \mathcal{K},$$

где

$$(5.12) \quad \begin{aligned} L(\theta) &= \frac{\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \alpha \exp(-\alpha l_r(\theta)) d\alpha}{\mathcal{P}(\theta)}, & K(\theta) &= \frac{\int_{\beta^-}^{\beta^+} \beta \exp(-\beta h_r(\theta)) d\beta}{\mathcal{F}(\theta)}, \\ V_k(\theta_k) &= \frac{\int_{\xi^-[k]}^{\xi^+[k]} \xi[k] \exp(-\theta_k \xi[k]) d\xi[k]}{\mathcal{Q}_k(\theta_k)}. \end{aligned}$$

В табл. 2 приведены результаты обучения по тестовым участкам  $I - 5$ ,  $D - 9$ ,  $C - 24$ .

В силу линейности модели (5.2) все энтропийно-оптимальные функции ПРВ — экспоненциальные:

- участок  $I - 5$ :

$$(5.13) \quad \begin{aligned} P^*(\alpha) &= 7,28 \exp(-7,27\alpha), & F^*(\beta) &= 0,0448 \exp(4,65\beta), \\ \alpha^{mean} &= 0,137; & \beta^{mean} &= 0,795; \end{aligned}$$

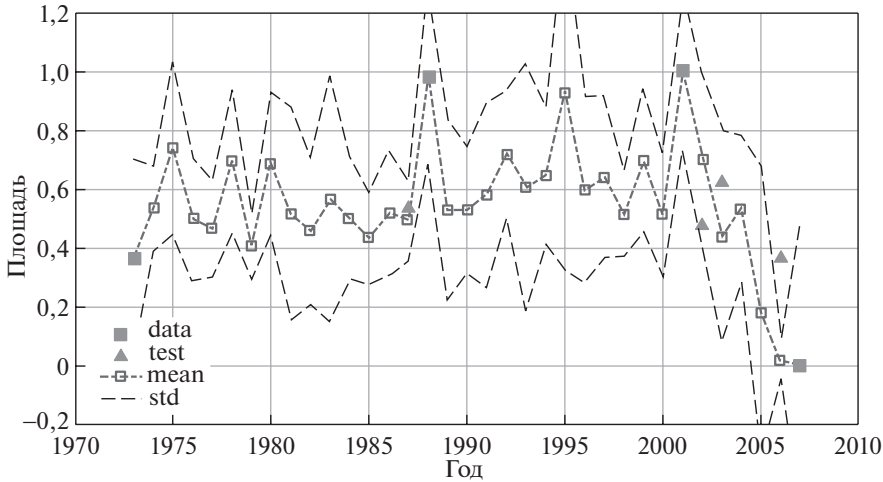


Рис. 4. Восстановление пропущенных данных на участке  $D - 9$ .

- участок  $D - 9$ :

$$(5.14) \quad \begin{aligned} P^*(\alpha) &= 0,476 \exp(0,543\alpha), & F^*(\beta) &= 0,0462 \exp(4,60\beta), \\ \alpha^{mean} &= 0,178; & \beta^{mean} &= 0,783; \end{aligned}$$

- участок  $C - 24$ :

$$(5.15) \quad \begin{aligned} P^*(\alpha) &= 1,84 \exp(-1,37\alpha), & F^*(\beta) &= 1,14 \exp(-0,272\beta), \\ \alpha^{mean} &= 0,389; & \beta^{mean} &= 0,477. \end{aligned}$$

#### 4. Тестирование для участка $D - 9$ .

Для участка  $D - 9$  имеются данные  $\mathcal{K}_T^{(D-9)}$ , которые будем использовать для оценки качества восстановления данных на этом участке.

Имея набор энтропийно-оптимальных ПРВ (5.14), сэмплируем их и, вычисляя для каждого сэмпла траектории  $\hat{S}[k]$ , формируем ансамбль случайных траекторий на интервале  $k \in [1, 35]$  (рис. 4). На этом же интервале показана средняя по ансамблю траектория  $mean[k]$ , которая принята за траекторию восстановленных данных.

Качество восстановления характеризуется относительной ошибкой

$$(5.16) \quad \delta = \frac{\sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_T^{(D-9)}} (\hat{S}[k] - S_{r,T}^{(D-9)}[k])^2}}{\sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_T^{(D-9)}} \hat{S}^2[k] + \sum_{k \in \mathcal{K}_T^{(D-9)}} (S_{r,T}^{(D-9)}[k])^2}}.$$

Для участка  $D - 9$  относительная ошибка  $\delta \approx 0,23$ . Поскольку сформирован ансамбль траекторий восстановленных данных, то по нему можно определить и другие типы траекторий и доверительные области (см. п. 5).

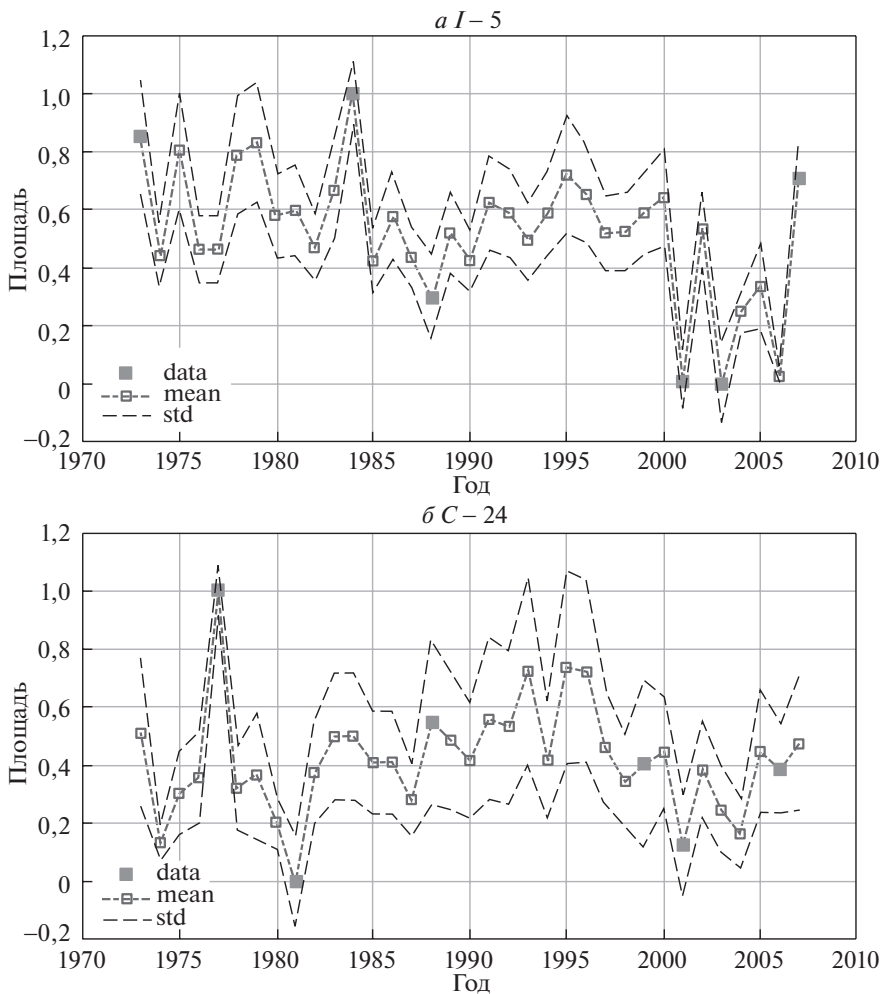


Рис. 5. Восстановление пропущенных данных на участках  $I - 5$  (а) и  $C - 24$  (б).

### 5. Генерация восстановленных данных.

Для модели (5.2) производилось сэмплирование функций ПРВ параметров согласно (5.13) и (5.15). Для каждого сэмпла вычислялась траектория  $\hat{S}[k]$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , и формировался ансамбль  $\hat{\mathcal{S}}$  случайных траекторий.

Полезными вероятностными характеристиками ансамбля являются функции эмпирической плотности  $U_k(\hat{S}[k])$  (гистограммы), определенные на множестве  $\mathcal{S}_k = [\hat{S}^-[k], \hat{S}^+[k]]$ , где  $\hat{S}^-[k] = \min \hat{S}[k]$ ,  $\hat{S}^+[k] = \max \hat{S}[k]$ . Переменная  $k \in \mathcal{K}^{(I-5)}$  для участка  $I - 5$  и  $k \in \mathcal{K}^{(C-24)}$  для участка  $C - 24$ .

Определялись следующие числовые характеристики ансамбля — траектории:

— максимумов гистограмм

$$(5.17) \quad \max[k] = \max U_k(\hat{S}[k]), \quad k \in \mathcal{T};$$

— медиан

$$(5.18) \quad \int_{\hat{S}[k]^-}^{\text{med}[k]} U_k(\hat{S}[k]) d\hat{S}[k] = \int_{\text{med}[k]}^{\hat{S}[k]^+} U_k(\hat{S}[k]) d\hat{S}[k], \quad k \in \mathcal{T};$$

— средних

$$(5.19) \quad \text{mean}[k] = \int_{\hat{S}[k]^-}^{\hat{S}[k]^+} \hat{S}[k] U_k(\hat{S}[k]) d\hat{S}[k].$$

На рис. 5,а и 5,б показаны ансамбли и графики соответствующих траекторий.

## 6. Заключение

Предложен новый метод восстановления пропущенных данных, состоящий в генерации ансамбля случайных траекторий, формируемых рандомизированной параметризованной моделью, обученной с привлечением имеющихся данных. Для пропусков в выходных данных развит алгоритм рандомизированного машинного обучения, основанный на технике *МЕЕ*-оценивания функций ПРВ параметров модели и шумов измерений. В случае пропусков во входных данных развит метод восстановления, использующий аналогичную рандомизированную параметризованную модель и специальный оптимизированный шум. С помощью техники *МЕЕ*-оценивания определяются функции ПРВ параметров модели и шума.

Предложенный метод сочетает преимущества подходов параметрического оценивания с заданной моделью процесса и непараметрического оценивания при неизвестных характеристиках шумов измерений, что обеспечивает робастность метода, но может в определенных случаях приводить к завышенным ошибкам восстановления. Робастность также обеспечивается и процедурой генерации энтропийно-оптимизированных траекторий путем сэмплирования соответствующих функций ПРВ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Таблица П.1.** Данные о температуре и осадках для тестовых участков

Участок I – 5			Участок D – 9		Участок C – 24	
Год	<i>T</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>R</i>
1	2	3	4	5	6	7
1973	-1,00	650,30	-3,50	580,80	-11,00	372,40
1974	-3,50	494,25	-6,00	494,30	-12,00	211,00
1975	-2,00	684,80	-4,00	579,00	-9,50	220,50
1976	-2,50	487,30	-4,50	442,50	-10,00	263,40
1977	-2,50	486,50	-5,00	432,60	-11,00	216,70
1978	-3,50	706,40	-4,50	562,70	-11,00	275,40
1979	-2,00	700,10	-6,00	414,40	-12,50	342,90

Таблица П.1. (окончание)

1	2	3	4	5	6	7
1980	-2,50	556,50	-4,50	556,50	-11,00	216,00
1981	-1,00	534,60	-3,00	427,30	-9,00	209,30
1982	-2,50	489,95	-4,00	409,90	-11,00	303,10
1983	-1,00	578,80	-2,50	448,80	-9,50	318,80
1984	-2,50	465,05	-4,50	444,20	-9,50	319,20
1985	-3,50	482,20	-5,00	412,90	-9,50	274,20
1986	-3,50	577,30	-4,50	456,00	-9,50	274,00
1987	-2,50	467,50	-6,00	467,50	-11,00	253,60
1988	-1,00	501,20	-3,50	390,30	-10,00	390,30
1989	-1,00	487,70	-3,50	444,40	-11,00	357,70
1990	-2,50	462,10	-4,50	462,10	-11,00	323,00
1991	-1,00	551,50	-3,50	473,80	-11,00	396,20
1992	-3,50	585,30	-5,00	585,30	-11,00	381,80
1993	-1,00	471,50	-2,50	471,50	-8,50	402,70
1994	-2,50	562,50	-4,50	532,75	-11,00	324,60
1995	0,50	578,90	-1,00	640,50	-6,00	332,60
1996	-1,00	571,35	-3,50	485,90	-7,50	372,10
1997	-2,50	521,10	-4,00	521,10	-9,50	299,80
1998	-3,50	544,80	-6,00	480,70	-11,00	288,10
1999	-2,50	563,15	-4,50	563,15	-8,50	369,50
2000	-1,00	561,30	-4,50	453,30	-9,50	291,20
2001	-2,00	430,20	-4,00	511,60	-9,50	267,40
2002	-2,06	520,15	-4,02	555,80	-9,82	270,50
2003	-0,48	429,20	-2,92	378,90	-9,05	177,80
2004	-1,80	338,40	-4,13	457,80	-9,78	159,20
2005	0,44	343,90	-1,66	199,50	-8,02	247,70
2006	-2,78	222,00	-5,44	168,30	-9,24	222,00
2007	0,14	325,40	-1,77	285,75	-7,51	246,10

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загоруйко Н.Г.* Методы распознавания и их применение. М.: Сов. Радио, 1972.
2. *Литтл Р.Дж.А., Рубин Д.Б.* Статистический анализ данных с пропусками. М.: Финансы и статистика, 1990.
3. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
4. *Злоба Е., Яцкив И.* Статистические методы восстановления пропущенных данных // Computer Modeling & New Technologies. 2004. V. 6. P. 55–56.
5. *Molenberghs G., Kenward M.G.* Missing Data in Clinical Studies. Chichester, UK., John Wiley & Sons, 2007. P. 47–50.
6. *Cheema J.* A Review of Missing Data Handling Methods in Education Research // Review of Educational Research. 2014. No. 4. P. 487–508.
7. *Круглов В.В., Абраменкова И.В.* Методы восстановления пропусков в массивах данных // Методы восстановления пропусков в массивах данных. 2005. № 2.
8. *Van Buuren S.* Flexible Imputation of Missing Data. Chapman and Hall/CRC; 1 ed., 2012.
9. *Enders C.* Applied Missing Data Analysis. N.Y.–London, 2010.

10. *Schafer J.L., Schenker N.* Inference with Imputed Conditional Means // Journal of the American Statistical Association. 2000. V. 95. No. 449. P. 144–154.
11. *Mander A., Clayton D.* HotDeck Imputation. Stata Technical Bulletin. 1999. V. 51. P. 32–34.
12. *Batista G.E.A.P.A., Monard M.C.* K-Nearest Neighbour as Imputation Method: Experimental Results. Technical report, ICMC-USP, 2002.
13. *Dan Li, Jitender Deogun, William Spaulding, Bill Shuart.* Towards Missing Data Imputation: A Study of Fuzzy K-means Clustering Method // S. Tsumoto, et al. (Eds.): RSCCTC 2004. LNAI 3066. 2004. P. 573–579.
14. *Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B.* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. 1977. V. 39. P. 1–38.
15. *Zhou X.-Y., Lim J.S.* EM Algorithm with GMM and Naive Bayesian to Implement Missing Values // Advanced Science and Technology Lett. 2014. V. 46. P. 1–5.
16. *Загоруйко Н.Г., Елкина В.Н., Тимеркаев В.С.* Алгоритм заполнения пропусков в эмпирических таблицах (алгоритм Zet) // Эмпирическое предсказание и распознавание образов. Новосибирск: 1975. Вып. 61: Вычислительные системы. С. 3–27.
17. *Снитюк В.Е.* Эволюционный метод восстановления пропусков в данных. Сборник трудов VI Межд. конф. “Интеллектуальный анализ информации”, Киев: 2006. С. 262–271.
18. Алгоритм ZetBraid // Информационные интеллектуальные системы. 2008. Вып. 40.
19. *Rubin D.B.* Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys. N.Y.: Wiley, 1987. P. 64–66.
20. *Rubin D.B.* Multiple Imputation After 18+ Years // Journal of the American Statistical Association. 1996. No. 91. P. 473–489.
21. *Lipsitz S.R., Lue Ping Zhao, Molenberghs G.A.* Semiparametric Method of Multiple Imputation // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B (Statistical Methodology). 1998. V. 60. No. 1. P. 127–144.
22. *Horton N.J., Lipsitz S.R.* Multiple Imputation in Practice: Comparison of Software Packages for Regression Models with Missing Variables // The American Statistician. 2001. V. 55. No. 3. P. 244–254.
23. *Efron B.* Missing Data, Imputation, and the Bootstrap // Journal of the American Statistical Association. 1994. V. 89. No. 426. P. 463–475.
24. *Popkov Y.S., Dubnov Y.A., Popkov A.Y.* New Method of Randomized Forecasting Using Entropy-Robust Estimation: Application to the World Population Prediction // Mathematics. 2016. V. 4. Iss. 1. P. 1–16.
25. *Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А.* Рандомизированное машинное обучение. М.: УРСС, 2019.
26. *Попков Ю.С.* Асимптотическая эффективность оценок максимальной энтропии // ДАН. Математика, Информатика, Процессы управления. 2020. Т. 493. С. 100–103.
27. *Geweke J., Hisashi T.* Note on the Sampling Distribution for the Metropolis-Hastings Output // Journal of American Statistical Association. 2003. V. 96. (453). P. 270–281.
28. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
29. *Дарховский Б.С., Попков Ю.С., Попков А.Ю., Алиев А.С.* Метод генерации случайных векторов с заданной функцией плотности распределения вероятностей // АИТ. 2018. Вып. 9. С. 31–45.

- Darkhovskiy B.S., Popkov Yu.S., Popkov A.Yu., Aliev A.S.* A Method of Generating Random Vectors with a Given Probability Density Function // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1569–1581.
30. *Rubinsteyn R.Y., Kroese D.P.* Simulation and Monte Carlo Method. John Wiley and Sons, 2007.
31. *Полищук В.Ю., Полищук Ю.М.* Геоимитационное моделирование полей термокарстовых озер в зонах мерзлоты. Ханты-Мансийск: УИИ ЮГУ, 2013.
32. *Polishchuk Y.M., Muratov I.N., Polishchuk V.Y.* Remote Research of Spatiotemporal Dynamics of Thermocarst Lakes Fields in Siberian Permafrost / The Arctic: Current Issues and Challenges (Eds. Pokrovsky O.S., Kirpotin S.N., Malov A.I.). N.Y.: Nova Science Pbl., 2020. P. 208–237.
33. *Попков Ю.С., Волкович В., Мельников А.В., Полищук Ю.М.* Методологические вопросы использования рендомизированного машинного обучения для прогнозирования динамики термокарстовых озер Арктики // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. “Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника”. 2019. Т. 19. Вып. 4. С. 5–12.
34. Электронный ресурс,  
URL: <https://cloud.uriit.ru/index.php/s/0DOrxL9RmGqXsV0>.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.*

Поступила в редакцию 24.07.2020

После доработки 27.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020



## Заметки, хроника, информация

### 18-я Европейская конференция по управлению ЕСС 2020: Первая виртуальная

DOI: 10.31857/S0005231021040073

18-я Европейская конференция по управлению (18th European Control Conference, ECC 2020, 1st Virtual ECC) состоялась 12–15 мая 2020 г. в Санкт-Петербурге. Европейские конференции по управлению организованы Европейской ассоциацией по управлению (EUCA) и направлены на объединение широкого круга специалистов в области систем и управления с целью обсудить новые результаты, обменяться опытом и стимулировать дальнейшее развитие науки и техники. ECC проводятся с 1991 г. раз в два года, а с 2013 г. ежегодно, кроме 2017 г.

Конференция ECC 2020 проводилась Университетом ИТМО при поддержке Института проблем машиноведения РАН. Председателем конференции являлся А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН), сопредседателями — А.А. Бобцов (ИТМО) и А.А. Пыркин (ИТМО), председателем международного программного комитета (International Programme Committee, IPC) Дмитрий Посель (LAAS CNRS, Франция). Рецензирование докладов проводилось редколлегией конференций EUCA (EUCA Conference Editorial Board) под руководством Антонеллы Феррара (Италия). Техническое спонсорство мероприятия было предоставлено Обществом систем управления IEEE (IEEE CSS) и Международной федерацией автоматического управления (IFAC). Более подробную информацию можно найти на официальной веб-странице <https://ecc20.eu/>

Первоначально планировалось собрать относительно небольшое число участников — около 300, так как на июль 2020 г. было запланировано другое крупное международное мероприятие — Всемирный конгресс ИФАК (IFAC 2020) в Берлине. Однако из-за вспышки COVID-19 организаторы столкнулись с форс-мажорными обстоятельствами и были поставлены перед необходимостью принятия нестандартных и новаторских решений. Многие международные мероприятия были отменены или перенесены на 2021 г. В середине марта 2020 г. стало ясно, что университеты в России, как и во многих других странах, собираются перейти на дистанционное обучение хотя бы на несколько месяцев. Таким образом, единственным вариантом реализации ECC 2020 был запуск ее в виртуальном формате. К счастью, организаторы узнали о паре успешных виртуальных конференций, проведенных на платформе Zoom, и решили использовать Zoom и для ECC 2020. Это произошло 18 марта, менее чем за два месяца до даты начала конференции.

Были аргументы «за» и «против» такого решения. Главный минус в том, что многие планировали посетить Санкт-Петербург, один из красивейших го-

родов мира, бывшую столицу и исторический научный центр России, а такая возможность отсутствовала. Чтобы хотя бы отчасти удовлетворить интерес участников, были организованы виртуальные экскурсии по городу и музеям и предоставлены ссылки на существующие виртуальные туры по городским туристическим объектам, а также виртуальные кофе-брейки в системе Online Town (<https://theonline.town/>). Был устроен также виртуальный банкет в стиле В.У.О.В. (Bring Your Own Beverages) с сохранением традиционной программы банкета с награждениями и презентацией очередной конференции ЕСС 2021 ее председателем Хенком Неймейером. В последний день конференции перед церемонией закрытия в восьми виртуальных конференц-залах было проведено восемь виртуальных круглых столов, соответствующих восьми тематическим конференц-трекам. На них участники имели возможность обсудить итоги конференции как научные, так и организационные.

В итоге было зарегистрировано 374 участника и около 30 гостей из 45 стран, что свидетельствует об успехе ЕСС 2020.

Что касается программы конференции, то всего на ЕСС 2020 было подано около 600 докладов из 60 разных стран. С учетом числа авторов этих 600 заявок в первую десятку стран-участниц вошли: Россия (88), Германия (73), Франция (61), Китай (44), Италия (42), Соединенные Штаты Америки (36), Индия (29), Швеция (19), Нидерланды (17), Великобритания (15). Всего в программе приняли участие 1085 авторов и соавторов, а 10 ведущих стран-участниц были следующие: Германия (158), Франция (115), Россия (107), Соединенные Штаты Америки (89), Италия (84), Китай (70), Нидерланды (52), Швеция (39), Индия (33) и Испания (29).

Из представленных материалов было 516 отдельных статей (contributed papers), 25 статей из приглашенных сессий (invited sessions) и 37 расширенных тезисов (extended abstracts). Остальные статьи относятся к пленарным заседаниям, семинарам (workshops) и учебной сессии (tutorial). Такое количество докладов — примерно половина от числа докладов, представленных на ЕСС 2019, было ожидаемым, с учетом того, что 2020 г. является годом Всемирного конгресса ИФАК, который к тому же проводился в Европе.

Все представленные и приглашенные доклады прошли тщательный отбор под руководством редакционной коллегии конференции. Было собрано 1506 рецензий (в среднем 2,9 рецензии на каждый опубликованный и приглашенный доклад), и все они сопровождались подробными рекомендациями старших редакторов. В отношении очень небольшого числа документов (менее 5%) председатель СЕВ и председатель международного программного комитета (IPC) обсудили и приняли решение об использовании дополнительных экспертных оценок со стороны старших членов IPC. К концу процесса рецензирования 270 работ получили оценки А, В+, В или В- и были приняты для включения в программу. Еще несколько работ, 63 из 98 с оценкой С, также были приняты на основании их актуальности на этапе построения сессий программы конференции. Всего было принято 333 представленных или приглашенных статей, что соответствует достаточно строгому уровню принятия (acceptance rate) 63%. Важно отметить, что организаторы не имели возможности влиять на ход рецензирования, что соответствует высшим мировым стандартам. Отметим также, что не все принятые статьи были вклю-

чены в программу, так как некоторые были сняты авторами или в связи с отсутствием регистрации. Расширенные тезисы (26 принятых в программе на основе специальной оценки) были размещены в соответствующих по тематике технических сессиях, чтобы заполнить пустые места, или организованы в специальные «интерактивные» сессии (WeIB9 и ThIB9).

На ЕСС 2020 состоялись пленарные доклады ряда выдающихся ученых.

В докладе Эдуардо Сонтара (North-Western University, USA) «Некоторые идеи теории управления в системной и синтетической биологии» обсуждалось, как определенные типы сетевой качественной информации могут быть почерпнуты из «динамических фенотипов» — термина, охватывающего переходные характеристики временных реакций. Примеры динамических фенотипов включают обнаружение кратных изменений (масштабная инвариантность), немонотонные реакции и индуцированные субгармонические колебания. Были представлены теоремы, которые связывают различное поведение с мотивами цепей, а также биологические приложения на разных уровнях, включая ферментативные механизмы, химиочувствительность, генерацию определенных стрессовых реакций и кинетическое распознавание «свой» или «чужой» иммунной системой.

Эмилия Фридман (Тель-Авивский университет, Израиль) в докладе «Управление системами ODE и PDE<sup>1</sup> по запаздывающим и выборочным данным» показала, что для некоторых систем наличие задержки может иметь стабилизирующий эффект. Описан подход к дискретному управлению непрерывными объектами (sampled data control) на основе введения переменного запаздывания, который стал в последнее время популярным в сетевых системах управления, где объект и регулятор обмениваются данными через сеть связи. Этот подход был представлен в докладе для сетевого управления системами ODE и PDE. В отличие от других подходов этот подход допускает задержки в каналах связи, превышающие интервалы дискретизации при наличии протоколов коммутирования. Представлен также совсем недавний подход к усреднению на основе запаздывания, дающий конструктивные верхние границы малого параметра, сохраняющие устойчивость.

Доклад Владимира Пешехонова (Концерн ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург, Россия) был посвящен перспективам гироскопии. Гироскопические датчики (гироскопы, акселерометры и инерциальные системы) широко используются в системах управления движением благодаря своей универсальности, автономности и высокой точности. Однако создание глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), обеспечивающих точное координирование, сузило область применения гироскопических датчиков до задач, где важны автономность (под водой, под землей, в ограниченном пространстве) или высокая помехозащищенность. В области пространственной стабилизации гироскопические датчики по-прежнему занимают монопольное положение. Развитие гироскопии направлено на устранение разрыва с пользовательским оборудованием (ПО) ГНСС. В связи с тем, что механические

---

<sup>1</sup> ODE — Ordinary Differential Equations (Обыкновенные дифференциальные уравнения), PDE — Partial Differential Equation (Дифференциальные уравнения в частных производных).

гироскопические датчики были вытеснены гироскопами, основанными на эффекте Саньяка, впервые налажено крупносерийное производство гироскопической техники. Осуществляется серийное производство микромеханических гироскопических датчиков, сопоставимых с ПО ГНСС по массогабаритным характеристикам, энергопотреблению и стоимости. Созданы высокоточные малогабаритные гироскопы на основе инерционного действия упругих волн во вращающемся осесимметричном теле. Разрабатывается высокоточный миниатюрный гироскоп на эффекте ядерного магнитного резонанса. Продолжаются исследования возможности создания гироскопа на волнах де Бройля (холодных атомов), сопоставимого по точности с ПО ГНСС.

Большой интерес вызвал доклад Стефано Страмиджиоли (Университет Твенте, Нидерланды) «Физическое управление физическими системами: почему и как». Принципы управления, о которых он рассказывал, основаны на описании энергетического взаимодействия: как описать взаимодействие физических и технических объектов, робота и внешней среды через энергетический подход, через дифференциальные уравнения, которые описывают передачу энергии. Им удалось достичь таких успехов, благодаря которым робот-птица может разогнаться в небе до 80 километров в час.

Флориан Дёрфлер (ETH Zurich, Швейцария) в докладе «Оптимизация онлайн-обратной связи с приложениями к энергосистемам» говорил о регуляторах, которые асимптотически ведут физическую систему к решению некоторой задачи оптимизации при соблюдении физических и эксплуатационных ограничений. Для рассматриваемой задачи оптимизации многие параметры могут быть неизвестны, но можно полагаться на измерения в реальном времени и на лежащую в основе физическую систему, обеспечивающую определенные ограничения. Эта постановка проблемы мотивирована приложениями к электроэнергетическим системам и имеет исторические корни в сетях связи и управлении технологическими процессами. По сравнению с обычными стратегиями оптимального управления оптимальность переходных процессов не является основной целью и не требуется никаких прогнозирующих моделей или заданных извне установившихся значений. Таким образом, ищутся регуляторы, которым требуется мало информации о модели, имеющие низкие вычислительные затраты, но которые используют измерения в реальном времени. В докладе такие регуляторы строятся на основе алгоритмов оптимизации, которые принимают форму открытых и разрывных динамических систем. Обсуждаются различные алгоритмы, такие как проекция градиента и седловые потоки, устойчивость в замкнутом контуре при взаимодействии с физическими системами, условия робастности и аспекты реализации для работы энергосистем в реальном времени.

Доклад Мазьяра Миррахими (INRIA, Ecole Polytechnique и Mines Paris-techn, Франция) «На пути к отказоустойчивому квантовому компьютеру» был посвящен недавнему прогрессу в управлении квантовыми системами, который привел к ускоренной гонке по созданию практически полезного квантового компьютера. Основная часть последних разработок касается шумящих квантовых битов и нацелена на доказательство их преимущества по сравнению с классическими процессорами. Однако для того чтобы в полной мере использовать возможности квантовой физики в вычислениях, необходима

разработка отказоустойчивых процессоров. В таком процессоре квантовые биты и логические вентили динамически и непрерывно защищены от шума посредством квантовой коррекции ошибок. Хотя теория квантовой коррекции ошибок существует и развивается с середины 1990-х годов, первые эксперименты в физических лабораториях по всему миру стали проводиться только сейчас. Центральная проблема во всех этих экспериментах связана с управлением обратной связью в реальном времени, необходимым для исправления ошибок. В докладе объясняется, как можно подходить к этой проблеме на основе пассивности и диссипативности. Дан обзор серии недавних экспериментальных разработок сверхпроводящих схем (ведущей физической платформы для разработки таких квантовых процессоров).

Распределение докладов по сессиям частично определялось организационными ограничениями, определенными еще до вспышки COVID-19. Организаторы решили сохранить эту структуру, хотя конференция стала полностью виртуальной. Программа состояла из 8 параллельных треков, каждый из которых содержал от четырех до шести сессий.

Тематика трека T1 включала обучение и подходы, основанные на данных.

Трек T2 был посвящен робастному управлению и системам с неопределенностями.

Работы по нелинейному управлению были отнесены к Треку T3.

Трек T4 охватывал автомобилестроение и робототехнику.

В треке T5 были представлены сетевые многоагентные системы и кооперативное управление.

В треке T6 были собраны доклады по дедуктивным рассуждениям, а также по оптимальному и прогнозирующему управлению.

Трек T7 содержал доклады по диагностике, идентификации, оцениванию и наблюдателям.

Трек T8 был посвящен приложениям, в частности в биологии и медицине.

Некоторые специальные сессии заслуживают отдельного внимания.

Был проведен мини-семинар под названием «Новые вызовы в области устойчивости, управления и оптимизации энергосистем», организованный при участии Флориана Дёрфлера, обладателя премии EUSA European Control Award в этом году, пленарного докладчика ECC 2020.

Были организованы приглашенные сессии на темы «Новые разработки в области управления дорожным движением», «Моделирование и управление в биологических системах и медицине», «История нелинейных систем и управления». Была проведена учебная сессия «Совместное проектирование управления и распределение ресурсов в периферийных вычислениях и динамических сетях».

Наконец, 15 мая 2020 г. традиционный спонсор серии конференций ECC, компания The Mathworks, являющаяся разработчиком MATLAB, провела обеденное заседание (lunchtime session), посвященное использованию технологии Live Scripts для создания интерактивных документов. После доклада представителей компании развернулась оживленная дискуссия о плюсах и минусах этого продукта, возможных сферах использования, перспективах

развития и существующих аналогах. Это была очень хорошая возможность пообщаться непосредственно с производителем основного для многих “рабочего инструмента” и обменяться мнениями о развитии этого продукта.

Среди удачных особенностей программы отметим сочетание синхронного (через Zoom) и асинхронного (через Paperplaza) просмотров с синхронными обсуждениями (9 синхронных треков). Достоинством конференции явилась также открытая трансляция докладов на канале Youtube, привлекающая к ней дополнительный интерес специалистов и заслужившее одобрение сообщества.

Еще одним признаком успеха конференции ECC 2020 явилось то, что после ее окончания к организаторам обратились организаторы крупнейшей международной конференции IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2020) с просьбой поделиться опытом. Во время конференции к ней проявляли интерес и организаторы других крупных конференций: American Control Conference (ACC 2020), IFAC World Congress on Automatic Control (IFAC 2020). Поэтому ниже приводятся технические подробности, которые могут быть полезными для организаторов будущих виртуальных конференций.

Для проведения конференции был приобретен аккаунт Zoom категории Business, который позволяет добавлять от 10 организаторов, что позволило реализовать одновременно 10 параллельных секций. При необходимости можно докупить большее число “организаторов”. Все “организаторы” позволяют создавать конференции до 300 участников, поэтому для пленарных лекций было докуплено расширение “Большая конференция” для одного организатора, расширяющее число участников до 500 подключений. Пленарные доклады были реализованы в режиме вебинара. Для этого также была докуплена опция веб-семинара в зум “Webinar” для одного организатора. Особенностью этой опции является то, что слушатели не видят списка участников, но могут задавать вопросы в чат или в Q&A сессии. Разумеется, требовалось записывать конференцию и с Zoom это сделать было очень удобно. Все записи ECC 2020 за 4 дня (9 параллельных сессий) в Zoom заняли около 100 Гб хранилища. Для увеличения размера хранилища была приобретена опция “Облачное хранилище”. Удобной опцией Zoom оказалась и возможность трансляции сессий на видеохостинг Youtube. Для этого потребовалось завести 9 верифицированных youtube-аккаунтов. Не обошлось и без курьезных случаев, когда алгоритм машинного обучения Youtube в одной из сессий распознал непристойный контент и заблокировал трансляцию. После подачи апелляции этот аккаунт был оперативно разблокирован и трансляция продолжилась.

Технически конференция была реализована в форме полностью децентрализованной системы. Для обеспечения большей устойчивости работы было закуплено девять производительных ноутбуков, на которых было установлено лишь минимально необходимое программное обеспечение и отключены все уведомления и системные звуки, чтобы ничего не могло даже теоретически прервать трансляцию. На ноутбуки были загружены все предварительно записанные видеопрезентации участников, которые включали модераторы сессий, что позволило гарантировать показ презентаций и комментариев авторов независимо от условий каналов связи участников. Ноутбуки были распространены среди волонтеров (студентов и аспирантов Университета ИТМО, помогавших проводить конференцию), имеющих устойчивое

Интернет-соединение и широкий канал связи. Дополнительно каждого волонтера страховал напарник с личным ноутбуком, на котором также было установлено необходимое программное обеспечение и загружены видеопрезентации на случай, если вдруг внезапно что-то пойдет не так и можно было бы оперативно перезапустить сессию с теми же данными. Все напарники должны были находиться на связи друг с другом посредством телефонного контакта. Поскольку на ECC 2020 было до 9 параллельных сессий одновременно, регулярно на связи находилось 18 волонтеров.

В день перед официальным открытием конференции с утра до вечера было открыто три сессии, где каждый участник мог протестировать в Zoom свои камеру и микрофон, научиться ими пользоваться, если установил это приложение впервые, освоиться с переходами между сессиями. Как показала практика, большая часть участников воспользовалась этой возможностью и совершила тестовые подключения. В конце первого дня после тестирования системы, в качестве Welcome Reception был проведен виртуальный тур по Санкт-Петербургу с использованием web-сервиса Яндекс.Панорамы профессиональным лицензированным гидом-переводчиком.

В пятницу 15 мая после окончания последних сессий в качестве Farewell Reception были организованы тематические круглые столы, где участники смогли обсудить насущные темы: управление на основе обработки данных; робастное управление и системы с неопределенностью; управление нелинейными системами; автомобили и робототехника; сетевые мультиагентные системы и кооперативное управление; оптимальное и предиктивное управление; диагностика, идентификация, оценка и системы наблюдения; приложения теории управления в медицине и биологии. Ведущие мировые ученые смогли собраться одновременно и обсудить актуальные проблемы и решения уже независимо от программы. На некоторых круглых столах развернулась столь жаркая дискуссия, что участники едва не опоздали на виртуальную церемонию закрытия, где была предоставлена возможность после официальной части выступить всем желающим в формате “свободного микрофона”. Было высказано много теплых слов о качестве организации конференции в таком “инновационном” формате и о том, что многие ожидали худшего. Напоследок был организован еще один “виртуальный” тур по Санкт-Петербургу для тех, кто не смог его посетить в день открытия.

Организаторы не забыли и такую традиционную для конференций рубрику на сайте, как фотогалерея, которую можно найти на странице Photo (<https://ecc20.eu/photo/>). На этой странице можно увидеть, как проходила первая виртуальная европейская конференция по управлению.

Интересна статистика “посещения” конференции по данным аналитического сервиса Яндекс.Метрика. За 4 дня конференции сайт <https://ecc20.eu> посетило 2113 уникальных посетителей. В день открытия конференции, 13 мая, сайт посетил 1051 уникальный посетитель. Стоит отметить, что самой популярной страницей на сайте после главной страницы является страница со ссылками на трансляции в Youtube. Одновременно в Zoom на всех сессиях в среднем присутствовало порядка 160 участников и порядка 40 зрителей в Youtube. Также интерес представляет и возрастная статистика уникальных посетителей сайта. Основной процент посетителей приходится на возраст лю-

дей 25–34 (33,9%), затем следует возрастная группа 18–24 (25,8%), группа 35–44 (17,2%), 45–54 (12,4%), старше 55 (10,6%), что говорит о сильном вовлечении молодежи в область теории управления.

Подводя итог, можно заключить, что первая Европейская конференция по управлению в новом формате успешно прошла в России, в Санкт-Петербурге. Следующая конференция ЕСС 2021 пройдет в Роттердаме в июне 2021 г.

*А.А. Бобцов, д-р техн.наук,  
Д. Посель, д-р техн. наук,  
А.А. Пыркин, д-р техн.наук,  
А.Л. Фрадков, д-р техн.наук,  
С.В. Шаветов, канд. техн.наук*



---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

К 100-летию академика РАН А.А. Красовского ..... 3

### Обзоры

**Курдюков А.П.**, Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А. Между  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  теориями управления ..... 8

### Линейные системы

**Глуценко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.** Адаптивная система управления с переменным коэффициентом усиления закона настройки на основе рекурсивного метода наименьших квадратов ..... 77

### Нелинейные системы

**Маликов А.И.** Оценка состояния и стабилизация нелинейных систем с дискретным управлением и неопределенными возмущениями ..... 96

**Фуртат И.Б., Гуцин П.А.** Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве ..... 121

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

**Дубнов Ю.А., Полищук В.Ю., Попков Ю.С., Полищук Ю.М., Мельников А.В., Сокол Е.С.** Метод энтропийно-рандомизированного восстановления пропущенных данных ..... 140

### Заметки, хроника, информация

**Бобцов А.А., Посель Д., Пыркин А.А., Фрадков А.Л., Шаветов С.В.**  
18-я Европейская конференция по управлению ЕСС 2020: Первая виртуальная ..... 161

## C O N T E N T S

To the 100th Anniversary of A.A. Krasovskii, the Academician of the Ras . . . . . 3

### Surveys

**Kurdyukov A.P.**, **Andrianova O.G.**, **Belov A.A.**, **Goldin D.A.** Between  $LQG/H_2$   
and  $H_\infty$  Control Theories . . . . . 8

### Linear Systems

**Glushchenko A.I.**, **Petrov V.A.**, **Lastochkin K.A.** Adaptive control system with  
adjustable adaptation rate based on recursive least-squares method . . . . . 77

### Nonlinear Systems

**Malikov A.I.** State Estimation and Stabilization of Nonlinear Systems with Dis-  
crete Control and Uncertain Disturbances . . . . . 96

**Furtat I.B.**, **Gushchin P.A.** Control of Dynamical Systems with Guarantee of  
Output Signal in a Given Set . . . . . 121

### Intellectual Control Systems, Data Analysis

**Dubnov Yu.A.**, **Polishchuk V.Yu.**, **Popkov Yu.S.**, **Polishchuk Yu.M.**, **Melnikov A.V.**,  
**Sokol E.S.** Method of Entropy-Randomized Restoration of Missing Data . . . . . 140

### Notes, Meetings, Information

**Bobtsov A.A.**, **Peaucelle D.**, **Pyrkin A.A.**, **Fradkov A.L.**, **Shavetov S.V.**  
18th European Control Conference ECC 2020 — 1st Virtual . . . . . 161