

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 62, номер 6, 2022 год

---

---

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Асимптотика решения тихоновской системы уравнений  
с многозонным пограничным слоем

*М. В. Бутузова*

891

---

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Формулы аналитического продолжения функций Горна двух переменных

*С. И. Безродных*

912

Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче  
о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле  
с нелинейным потенциалом общего вида

*А. Л. Бекларян, Л. А. Бекларян*

933

О решениях матричного нелинейного уравнения Шрёдингера

*А. В. Домрин*

951

О нелинейной задаче для системы интегродифференциальных уравнений  
теории переноса излучения

*А. В. Калинин, А. А. Тюхтина*

965

Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами  
путем сведения к интегродифференциальным уравнениям

*В. Л. Литвинов, К. В. Литвинова*

977

Эллиптические дифференциально-разностные уравнения  
с нелокальными потенциалами в полупространстве

*А. Б. Муравник*

987

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Об устойчивости параболических дифференциальных  
и разностных уравнений с нелокальным по времени условием

*А. Ашыралыев, Ч. Ашыралыев*

994

Несжимаемый пограничный слой с противотоками  
при заданном градиенте давления

*Тэ Ха Чжун, С. И. Безродных, В. Б. Заметаев*

1007

О выводе уравнений электродинамики и гравитации  
из принципа наименьшего действия

*В. В. Веденяпин, В. И. Парёнкина, С. Р. Сvirщевский*

1016

Итерации Чернова как метод усреднения случайных  
аффинных преобразований

*Р. Ш. Кальметьев, Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев*

1030

Гиперболическое сингулярное разложение при исследовании уравнений  
Янга–Миллса и Янга–Миллса–Прока

*Д. С. Широков*

1042

---

## ИНФОРМАТИКА

Diffraction of Sound Plane Waves by a Strip with Mixed Soft–Hard Faces

*F. Hacivelioglu*

1056

---

---



---

**ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

---

УДК 519.622.2

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ТИХОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ  
УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ<sup>1)</sup>**

© 2022 г. М. В. Бутузова

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Россия

e-mail: m.butuzova@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.  
Переработанный вариант 29.12.2021 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Для системы двух уравнений тихоновского типа, содержащих разные степени малого параметра при производной в одном и другом уравнениях, построена и обоснована асимптотика погранслоного решения начальной задачи в случае двукратного корня вырожденной системы. Характер асимптотики и алгоритм ее построения существенно отличаются от классического случая простого (однократного) корня вырожденной системы. Пограничный слой оказывается многозонным. Библ. 14.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная система уравнений тихоновского типа, случай кратного корня вырожденной системы, многозонный пограничный слой.

DOI: 10.31857/S0044466922060060

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для системы двух уравнений следующего вида ( $z$  и  $y$  – скалярные функции,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр):

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dx} = F(x, y, z, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (1)$$

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0. \quad (2)$$

В классическом тихоновском случае (см. [1], см. также [2]) уравнение

$$F(x, y, z, 0) = 0, \quad (3)$$

получающееся из первого уравнения системы (1) при  $\varepsilon = 0$ , имеет простой (однократный) корень  $z = \varphi(x, y)$ , который подставляется в уравнение  $f(x, y, z, 0) = 0$ , и требуется, чтобы получившееся уравнение

$$g(x, y) := f(x, y, \varphi(x, y), 0) = 0 \quad (4)$$

также имело простой корень  $y = \bar{y}_0(x)$ .

Тогда при определенных условиях асимптотическое разложение по параметру  $\varepsilon$  решения задачи (1), (2) имеет вид

$$z = \bar{z}(x, \varepsilon) + Pz(\xi, \varepsilon) + Pz(\zeta, \varepsilon), \quad y = \bar{y}(x, \varepsilon) + Py(\xi, \varepsilon) + Py(\zeta, \varepsilon), \quad (5)$$

где

$$\bar{z}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(x) \quad (6)$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00424).

– регулярная часть асимптотики  $z$  – компоненты решения с главным членом  $\bar{z}_0(x) = \varphi(x, \bar{y}_0(x))$ ,

$$Pz(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i z(\xi) \quad (7)$$

и

$$Pz(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i z(\zeta) \quad (8)$$

– погранслоиные части асимптотики  $z$  – компоненты решения,  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  и  $\zeta = \frac{x}{\varepsilon^2}$  – погранслоиные переменные, разложения  $\bar{y}(x, \varepsilon)$ ,  $Pu(\xi, \varepsilon)$  и  $Pu(\zeta, \varepsilon)$  имеют такой же вид, как (6), (7) и (8). Члены рядов (6), (7) и (8) и аналогичных рядов для  $y$ -компоненты решения определяются последовательно по методу А.Б. Васильевой (см. [2]), причем пограничные функции имеют экспоненциальные оценки вида

$$\begin{aligned} |P_i z(\xi)| &\leq c \exp(-\kappa \xi), & \xi \geq 0, \\ |P_i z(\zeta)| &\leq c \exp(-\kappa \zeta), & \zeta \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c > 0$  и  $\kappa > 0$  – здесь и в дальнейшем подходящие положительные числа, не зависящие от  $\varepsilon$ .

В данной работе задача (1), (2) исследуется в том случае, когда вырожденное уравнение (3) имеет двукратный корень  $z = \varphi(x, y)$ , а уравнение (4) имеет простой корень  $y = \bar{y}_0(x)$ . Оказывается, что в этом случае при определенных условиях решение задачи (1), (2) сохраняет погранслоиное поведение, однако вид регулярной и погранслоиных частей асимптотики, поведение пограничных функций  $P_i z(\xi)$ ,  $P_i y(\xi)$  и их оценки, а также сам алгоритм определения этих функций существенно изменяются по сравнению со случаем простых корней вырожденных уравнений (3) и (4). В частности, особенностью  $P$ -функций является разделение полупрямой  $\xi \geq 0$  на три промежутка (три зоны) с различным характером убывания этих функций в разных зонах.

Аналогичные особенности в асимптотике погранслоиного решения начальной задачи были исследованы ранее в [3] для системы тихоновского типа, которая получается из (1), если параметр  $\varepsilon^2$  перед  $\frac{dz}{dx}$  заменить на  $\varepsilon$ , параметр  $\varepsilon$  перед  $\frac{dy}{dx}$  заменить на 1 и сохранить условие двукратного корня вырожденного уравнения (3). В этом случае асимптотика решения содержит регулярную часть и только одну погранслоиную часть типа  $Pz(\xi, \varepsilon)$ ,  $Pu(\xi, \varepsilon)$ , которая характеризуется трехзонным поведением.

Следует отметить, что другие сингулярно возмущенные задачи с кратным корнем вырожденного уравнения рассматривались в работах других авторов. В частности, в работе [4] исследована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Случаи кратных корней вырожденного уравнения рассматривались также в работах [5]–[13].

В разд. 2 будут сформулированы условия и описан алгоритм построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) в случае двукратного корня вырожденного уравнения (3), в разд. 3 доказано существование решения с построенной асимптотикой.

## 2. УСЛОВИЯ И АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ

### 2.1. Вид асимптотики

**Условие А1.** Пусть

$$F(x, y, z, \varepsilon) = -h(x, y)(z - \varphi(x, y))^2 + \varepsilon F_1(x, y, z, \varepsilon).$$

При условии А1 вырожденное уравнение (3) имеет двукратный корень  $z = \varphi(x, y)$ .

**Условие А2.** Достаточная гладкость функций  $h, \varphi, F_1, f$ .

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать функции  $h, \varphi, F_1$  и  $f$  бесконечно дифференцируемыми в соответствующих областях.

**Условие А3.** Уравнение (4) имеет относительно  $y = \bar{y}_0(x)$  такой, что

$$\bar{g}_y(x) := \frac{\partial g}{\partial y}(x, \bar{y}_0(x)) < 0, \quad 0 \leq x \leq X. \tag{10}$$

Неравенство (10) будет играть в дальнейшем принципиальную роль.

Будем строить асимптотику погранслоного решения задачи (1), (2) в виде (5), где  $\xi = x/\varepsilon$  и  $\zeta = x/\varepsilon^2$  – погранслоные переменные. Однако, как показывает исследование, регулярная и погранслоная части асимптотики будут теперь рядами по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$  (а не  $\varepsilon$ , как в случае простых корней уравнений (3) и (4)):

$$\bar{z}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{z}_i(x), \quad \bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{y}_i(x); \tag{11}$$

$$\Pi z(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Pi_i z(\xi), \quad \Pi y(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Pi_i y(\xi); \tag{12}$$

$$Pz(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i z(\zeta), \quad Py(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i y(\zeta). \tag{13}$$

Более того, как мы увидим ниже, коэффициенты рядов (12) и (13), т.е. функции  $\Pi_i z$ ,  $\Pi_i y$  и  $P_i z$ ,  $P_i y$ , будут зависеть не только, соответственно, от  $\xi$  и  $\zeta$ , но также и от  $\varepsilon$ , но с целью уменьшения громоздкости записи зависимости их от  $\varepsilon$  отмечать не будем, т.е. будем писать  $\Pi_i z(\xi)$  вместо  $\Pi_i z(\xi, \varepsilon)$  и также для других функций.

Подставляем выражения (5) в систему (1) и представляем правые части уравнений в виде

$$F = \bar{F} + \Pi F + P F, \quad f = \bar{f} + \Pi f + P f$$

таким же образом, как это делается в стандартном алгоритме Васильевой (см. [2]), т.е.

$$\bar{F} = F(x, \bar{y}(z, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon), \varepsilon), \tag{14}$$

$$\Pi F = [F(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon), \varepsilon) - F(x, \bar{y}(x, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon), \varepsilon)]_{x=\varepsilon \xi},$$

$$P F = [F(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon) + P y(\zeta, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon) + P z(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) - F(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon), \varepsilon)]_{x=\varepsilon^2 \zeta, \xi=\varepsilon \zeta} \tag{15}$$

и аналогичные выражения имеют  $\bar{f}$ ,  $\Pi f$  и  $P f$ .

После этого разделяем каждое уравнение системы на три равенства:

$$\varepsilon^2 \frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{F}, \quad \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}, \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{16}$$

$$\varepsilon \frac{d\Pi z}{d\xi} = \Pi F, \quad \frac{d\Pi y}{d\xi} = \Pi f, \quad \xi \geq 0; \tag{17}$$

$$\frac{dPz}{d\zeta} = P F, \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{dPy}{d\zeta} = P f, \quad \zeta \geq 0. \tag{18}$$

К этим равенствам добавим два равенства, которые получаются подстановкой выражений (5) в начальные условия (2):

$$\bar{z}(0, \varepsilon) + \Pi z(0, \varepsilon) + Pz(0, \varepsilon) = z^0, \tag{19}$$

$$\bar{y}(0, \varepsilon) + \Pi y(0, \varepsilon) + Py(0, \varepsilon) = y^0, \tag{20}$$

а также добавим условие на бесконечности, стандартное при использовании алгоритма Васильевой для систем типа (1):

$$Py(\infty, \varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Из равенств (16)–(21) будем извлекать уравнения и дополнительные условия для коэффициентов рядов (11)–(13).

2.2. Регулярная часть асимптотики

Для нахождения коэффициентов регулярной части асимптотики имеем равенства (16). Запишем их, подставляя вместо  $\bar{z}$  и  $\bar{y}$  ряды (11) и используя представление для функции  $F$  из условия A1:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d}{dx} (\bar{z}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1 + \dots) &= -h(x, \bar{y}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1 + \dots) (\bar{z}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1 + \dots - \\ &- \varphi(x, \bar{y}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1 + \dots))^2 + \varepsilon F_1(x, \bar{y}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1 + \dots, \bar{z}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1 + \dots, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1 + \dots) &= f(x, \bar{y}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1 + \dots, \bar{z}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1 + \dots, \varepsilon). \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда стандартным способом, т.е. разложив правые части равенств в ряды по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$  и приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в обеих частях каждого равенства, будем получать системы уравнений для нахождения коэффициентов рядов (11).

В нулевом приближении, т.е. для  $\bar{z}_0, \bar{y}_0$ , получаем систему уравнений

$$0 = -h(x, \bar{y}_0) (\bar{z}_0 - \varphi(x, \bar{y}_0))^2, \quad 0 = f(x, \bar{y}_0, \bar{z}_0, 0). \tag{23}$$

Из первого уравнения следует:  $\bar{z}_0 = \varphi(x, \bar{y}_0)$ . Подставив это выражение для  $\bar{z}_0$  во второе уравнение, приходим к уравнению  $0 = f(x, \bar{y}_0, \varphi(x, \bar{y}_0), 0)$ , т.е.  $g(x, \bar{y}_0) = 0$ , которое в силу условия A3 имеет решение  $\bar{y}_0 = \bar{y}_0(x), 0 \leq x \leq X$ . Таким образом, найдены главные члены регулярной части асимптотики

$$\bar{y}_0(x) \quad \text{и} \quad \bar{z}_0(x) = \varphi(x, \bar{y}_0(x)). \tag{24}$$

**Условие A4.** Пусть

$$\bar{h}(x) := h(x, \bar{y}_0(x)) > 0, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Это условие понадобится в дальнейшем.

Разложение правой части первого равенства в (22) не содержит членов порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ . Приравняв нулю коэффициент при  $\varepsilon$  этого разложения, и также коэффициент при  $\sqrt{\varepsilon}$  разложения правой части второго равенства, получаем систему уравнений относительно  $\bar{z}_1, \bar{y}_1$ :

$$-\bar{h}(x) (\bar{z}_1 - \bar{\varphi}_y(x) \bar{y}_1)^2 + \bar{F}_1(x) = 0, \quad \bar{f}_y(x) \bar{y}_1 + \bar{f}_z(x) \bar{z}_1 = 0, \tag{25}$$

где  $\bar{h}(x) > 0$  в силу условия A4,  $\bar{\varphi}_y(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \bar{y}_0(x))$ ,  $\bar{F}_1(x) := F_1(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0)$  и такой же смысл имеют обозначения  $\bar{f}_y(x)$  и  $\bar{f}_z(x)$ .

Необходимым условием разрешимости первого уравнения системы (25) является неравенство  $\bar{F}_1(x) \geq 0$ . Потребуем выполнения более жесткого условия.

**Условие A5.** Пусть  $\bar{F}_1(x) > 0, 0 \leq x \leq X$ .

Тогда из первого уравнения (25) получаем

$$\bar{z}_1 - \bar{\varphi}_y(x) \bar{y}_1 = \left[ \bar{h}^{-1}(x) \bar{F}_1(x) \right]^{1/2} =: a(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq X, \tag{26}$$

либо  $\bar{z}_1 - \bar{\varphi}_y(x) \bar{y}_1 = -a(x) < 0$ . Как будет видно из дальнейшего, для того, чтобы решение задачи (1), (2) имело погранслоный характер, нужно взять первое решение, т.е.

$$\bar{z}_1 = \bar{\varphi}_y(x) \bar{y}_1 + a(x).$$

Подставляя это выражение для  $\bar{z}_1$  во второе уравнение (25), получаем линейное алгебраическое уравнение относительно  $\bar{y}_1$ :

$$[\bar{f}_y(x) + \bar{f}_z(x) \bar{\varphi}_y(x)] \bar{y}_1 = -\bar{f}_z(x) a(x). \tag{27}$$

Коэффициент при  $\bar{y}_1$  равен  $\bar{g}_y(x) < 0$  (см. (4) и условие A3), поэтому

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(x) &= -\bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_z(x)a(x), \\ \bar{z}_1(x) &= -\bar{\varphi}_y(x)\bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_z(x)a(x) + a(x) = \bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_y(x)a(x). \end{aligned}$$

Для  $\bar{z}_i, \bar{y}_i, i \geq 2$ , из (22) получаются системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \bar{z}_i - \bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_i &= [2\bar{h}(x)a(x)]^{-1} G_i(x), \\ \bar{f}_y(x)\bar{y}_i + \bar{f}_z(x)\bar{z}_i &= g_i(x), \end{aligned} \tag{28}$$

где функция  $a(x)$  определена в (26), а  $G_i(x)$  и  $g_i(x)$  – известные функции, выражающиеся рекуррентно через  $\bar{z}_j(x), \bar{y}_j(x)$  с номерами  $j < i$ . Так как определитель системы (28) равен  $\bar{f}_y(x) + \bar{f}_z(x)\bar{\varphi}_y(x) = \bar{g}_y(x) \neq 0$  (см. условие A3), то из этой системы однозначно определяются  $\bar{z}_i(x)$  и  $\bar{y}_i(x)$ .

Итак, регулярная часть асимптотики решения построена. Отметим, что частичные суммы

$$\bar{z}^{(n)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^2 \bar{z}_i(x) \quad \text{и} \quad \bar{y}^{(n)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^2 \bar{y}_i(x)$$

рядов (11) при подстановке их в равенства (16) вместо  $\bar{z}$  и  $\bar{y}$  удовлетворяют первому равенству в (16) с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)$ , а второму – с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , т.е.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d\bar{z}}{dx} - F(x, \bar{y}, \bar{z}, x) &O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X, \\ \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dx} - f(x, \bar{y}, \bar{z}, \varepsilon) &O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X. \end{aligned} \tag{29}$$

### 2.3. Погранслойные части асимптотики

Для нахождения коэффициентов погранслойных частей асимптотики, т.е. пограничных функций  $\Pi_i z(\xi), \Pi_i y(\xi), P_i z(\xi), P_i y(\xi)$  имеем равенства (17)–(21). Запишем равенства (17), используя выражение (14) для  $\Pi F$  и аналогичное выражение для  $\Pi f$ , учитывая вид функции  $F$  и подставляя вместо  $\bar{z}$  и  $\bar{y}$ ,  $\Pi z$  и  $\Pi y$  ряды (11) и (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{d\xi} (\Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 z + \dots) &= -h(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots + \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 y + \dots) \times \\ &\times [\bar{z}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1(\varepsilon \xi) + \dots + \Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 z + \dots - \varphi(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots + \\ &+ \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 y + \dots)]^2 + h(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots) [\bar{z}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1(\varepsilon \xi) + \dots - \\ &- \varphi(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots)]^2 + \varepsilon \Pi F_1, \quad \xi \geq 0; \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (\Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 y + \dots) &= f(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots + \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 y + \dots, \bar{z}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1(\varepsilon \xi) + \\ &+ \dots + \Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 z + \dots, \varepsilon) - f(\varepsilon \xi, \bar{y}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{y}_1(\varepsilon \xi) + \dots, \bar{z}_0(\varepsilon \xi) + \sqrt{\varepsilon} \bar{z}_1(\varepsilon \xi) + \dots, \varepsilon \xi), \quad \xi \geq 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Равенства (18) запишем в аналогичном виде, но с тем отличием, что будем использовать еще одну погранслоиную переменную  $\eta = \frac{x}{\varepsilon^{3/2}} = \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}$  и обе части второго равенства умножим на  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} (P_0z + \sqrt{\varepsilon}P_1z + \dots) = & -h \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots + P_0y + \sqrt{\varepsilon}P_1y + \dots \right) \times \\ & \times \left[ \bar{z}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots + P_0z + \sqrt{\varepsilon}P_1z + \dots - \right. \\ & \left. - \varphi \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}y_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots + P_0y + \sqrt{\varepsilon}P_1y + \dots \right) \right]^2 - \\ - h \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}y_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots \right) & \left[ \bar{z}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \right. \\ & + \Pi_0z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots - \varphi \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}y_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \right. \\ & \left. \left. + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots \right) \right]^2 + \varepsilon P_1F, \quad \zeta \geq 0; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} (P_0y + \sqrt{\varepsilon}P_1y + \dots) = & \varepsilon \left[ f \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}y_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. + P_0y + \sqrt{\varepsilon}P_1y + \dots, \bar{z}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots + P_0z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\varepsilon}P_1z + \dots, \varepsilon \right) - f \left( \varepsilon^{2/3}\eta, \bar{y}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}y_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \dots, \bar{z}_0 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1 \left( \varepsilon^{2/3}\eta \right) + \dots + \Pi_0z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \dots, \varepsilon \right) \right], \quad \zeta \geq 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Подставим также ряды (11), (12), (13) в равенства (19), (20) и условие на бесконечности (21):

$$\bar{z}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(0) + \dots + \Pi_0z(0) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1z(0) + \dots + P_0z(0) + \sqrt{\varepsilon}P_1z(0) + \dots = z^0, \tag{34}$$

$$\bar{y}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(0) + \dots + \Pi_0y(0) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1y(0) + \dots + P_0y(0) + \sqrt{\varepsilon}P_1y(0) + \dots = y^0, \tag{35}$$

$$P_0y(\infty) + \sqrt{\varepsilon}P_1y(\infty) + \dots = 0. \tag{36}$$

Из равенств (30)–(33) будем извлекать уравнения, а из равенств (34)–(36) – начальные условия и условие на бесконечности для последовательного определения пограничных функций. На каждом шаге будут определены четыре пограничные функции, причем порядок их нахождения на любом  $i$ -м шаге будет таким: сначала определяется функция  $P_iy(\zeta)$ , затем функции  $\Pi_iy(\xi)$  и  $\Pi_iz(\xi)$  и, наконец, функция  $P_iz(\zeta)$ . При этом алгоритм формирования уравнений для функций  $P_iz(\zeta)$  и  $P_iy(\zeta)$  будет существенно отличаться от стандартного алгоритма Васильевой. На начальном шаге из (33) и (36) получаем задачу для  $P_0y(\zeta)$ :

$$\frac{dP_0y}{d\zeta} = 0, \quad \zeta \geq 0; \quad P_0y(\infty) = 0,$$

откуда следует, что  $P_0y(\zeta) = 0, \zeta \geq 0$ .

Из (30) и (31) в нулевом приближении имеем уравнения

$$0 = h(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0y) [\bar{z}_0(0) + \Pi_0z - \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0y)]^2 - h(0, \bar{y}_0(0)) [\bar{z}_0(0) - \varphi(0, \bar{y}_0(0))]^2,$$



$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = f(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - f(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0), \quad \xi \geq 0.$$

В силу (24) и (23) вторые слагаемые в правых частях этих уравнений равны нулю, поэтому из первого уравнения находим

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z = \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), \tag{37}$$

и после подстановки этого выражения в правую часть второго уравнения получаем уравнение для  $\Pi_0 y(\xi)$ :

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = f(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), 0), \quad \xi \geq 0.$$

Его можно записать в виде (см. (4))

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = g(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), \quad \xi \geq 0. \tag{38}$$

Начальное условие для  $\Pi_0 y(\xi)$  следует из (35) с учетом того, что  $P_0 y(0) = 0$ :

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}_0(0). \tag{39}$$

В силу (10) имеем  $g_y(0, \bar{y}_0(0)) < 0$ , поэтому  $\Pi_0 y = 0$  является асимптотически устойчивой точкой покоя уравнения (38). Чтобы решение  $\Pi_0 y(\xi)$  задачи (38), (39) стремилось к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ , потребуем выполнения следующего условия.

**Условие А6.** Начальное значение  $y^0 - \bar{y}_0(0)$  функции  $\Pi_0 y(\xi)$  принадлежит области притяжения асимптотически устойчивой точки покоя  $\Pi_0 y = 0$  уравнения (38).

При этом условии функция  $\Pi_0 y(\xi)$  монотонно стремится к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$  и имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0 y(\xi)| \leq c \exp(-k\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{40}$$

Как обычно, для упрощения записи одними и теми же буквами  $c$  и  $k$  будем обозначать в разных оценках подходящие положительные числа, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Таким образом, функция  $\Pi_0 y(\xi)$  определена, и это позволяет найти  $\Pi_0 z(\xi)$  из равенства (37). Учитывая, что  $\bar{z}_0(0) = \varphi(0, \bar{y}_0(0))$  (см. (24)), запишем  $\Pi_0 z(\xi)$  в виде

$$\Pi_0 z(\xi) = \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) - \varphi(0, \bar{y}_0(0)).$$

Отсюда следует, что для  $\Pi_0 z(\xi)$  справедлива оценка типа (40).

Для дальнейшего нахождения пограничных функций нам понадобятся дополнительные требования, связанные с функциями  $\Pi_0 y(\xi)$  и  $\Pi_0 z(\xi)$ .

Введем две функции, зависящие от  $\Pi_0 y(\xi)$  и  $\Pi_0 z(\xi)$ :

$$h(\xi) := h(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) \tag{41}$$

и

$$\begin{aligned} b(\xi) &:= F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0) - \frac{d\Pi_0 z}{d\xi} = \\ &= F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), 0) - \\ &\quad - \varphi_y(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))g(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)). \end{aligned} \tag{42}$$

Как мы увидим, на следующих шагах алгоритма принципиальную роль будут играть неравенства

$$h(\xi) \geq c > 0, \quad b(\xi) \geq c > 0, \quad \xi \geq 0. \tag{43}$$

Чтобы обеспечить эти неравенства, введем следующее требование.

**Условие А7.** Пусть

$$H(y) := h(0, y) > 0 \quad \text{при} \quad y \in [y^0, \bar{y}_0(0)],$$

$$B(y) := F_1(0, y, \varphi(0, y), 0) - \varphi_y(0, y)g(0, y) > 0 \quad \text{при} \quad y \in [y^0, \bar{y}_0(0)].$$

Так как

$$h(\xi) = H(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), \quad b(\xi) = B(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))$$

и функция  $\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)$  принимает значения от  $y^0$  до  $\bar{y}_0(0)$  при  $\xi \geq 0$  в силу монотонного изменения функции  $\Pi_0 y(\xi)$  от значения  $(y^0 - \bar{y}_0(0))$  до нуля при изменении  $\xi$  от 0 до  $\infty$ , то условие А7 обеспечивает выполнение неравенств (43).

Отметим, что условие А5 и условие А7 в отношении функции  $B(y)$  показывают, что в случае двукратного корня вырожденного уравнения (3) (в отличие от случая простого корня) принципиальную роль в построении (и, как увидим далее, в обосновании) погранслошной асимптотики решения задачи (1), (2) играют члены порядка  $O(\varepsilon)$ , входящие в правую часть первого уравнения системы (1) (а именно, функция  $\varepsilon F_1(x, y, z, 0)$ ).

Перейдем к определению пограничной функции  $P_0 z(\zeta)$ . Поскольку функция  $\Pi_0 z(\zeta)$  известна, из равенства (34) находим начальное значение функции  $P_0 z(\zeta)$  (используем также равенство (37)):

$$P_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) - \Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi(0, y^0) =: P^0. \quad (44)$$

Уравнение для  $P_0 z(\zeta)$  получим из (32). Стандартный алгоритм, при котором приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в разложениях левой и правой частей равенства (32), дает уравнение

$$\frac{dP_0 z}{d\zeta} = -h(0, y^0)(P_0 z)^2, \quad \zeta \geq 0. \quad (45)$$

Поскольку  $h(0, y^0) > 0$  (в силу условия А7), то решение  $P_0 z(\zeta)$  уравнения (45) с начальным условием (44) будет стремиться к нулю при  $\zeta \rightarrow \infty$ , т.е. будет удовлетворять стандартному требованию к пограничным функциям, если только  $P^0 \geq 0$ . Потребуем выполнения более жесткого условия.

**Условие А8.** Пусть

$$P^0 := z^0 - \varphi(0, y^0) > 0.$$

Отметим, что если  $P^0 = 0$ , то  $P_0 z(\zeta) \equiv 0$ , и этот случай требует отдельного рассмотрения. При условии А8 решение задачи (45), (44) имеет вид

$$P_0 z(\zeta) = \frac{P^0}{1 + h(0, y^0)P^0 \zeta}, \quad \zeta \geq 0. \quad (46)$$

Следовательно,  $P_0 z(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$  степенным образом:  $P_0 z(\zeta) = O\left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Однако, как показывает исследование, компонента решения, зависящая от погранслошной переменной  $\zeta$ , т.е. функция  $P_0 z(\zeta)$  и другие члены рядов (13), ведет себя более сложным образом, чем функция (46). Для правильного описания этой компоненты нужно изменить уравнение для  $P_0 z(\zeta)$  и также нестандартным образом формировать уравнения для следующих функций  $P_i z$  и  $P_i y$ .

Прежде чем внести изменения в уравнение (45) для  $P_0 z(\zeta)$ , рассмотрим уравнения для функций  $\Pi_1 z(\xi)$ ,  $\Pi_1 y(\xi)$ , которые получаются на следующем шаге из (30) и (31). Именно с этими функциями будет связано изменение уравнения (45).

Из (30) в первом приближении, т.е. приравнявая в разложениях обеих частей равенства коэффициенты при  $\varepsilon$ , получаем (заметим, что разложения левой и правой частей в (30) не содержат членов порядка  $O(\sqrt{\varepsilon})$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 z}{d\xi} = & -h(\xi)[\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y)]^2 + \bar{h}(0)[\bar{z}_1(0) - \bar{\varphi}_y(0)\bar{y}_1(0)] + \\ & + F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0) - \bar{F}_1(0), \quad \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $h(\xi)$  определена в (41),  $\varphi_y(\xi) := \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))$ . Учитывая первое равенство в (25) и выражение (42) для функции  $b(\xi)$ , запишем (47) в виде

$$h(\xi) [\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y)]^2 = b(\xi). \tag{48}$$

Так как  $h(\xi) \geq c > 0$  и  $b(\xi) \geq c > 0$  (см. (43)), то

$$\sigma(\xi) := [h^{-1}(\xi)b(\xi)]^{1/2} \geq c > 0, \quad \xi \geq 0. \tag{49}$$

Поэтому выражение в квадратных скобках в левой части (48) равно либо  $\sigma(\xi)$ , либо  $-\sigma(\xi)$ . Из дальнейшего станет ясно, что нужно взять положительное значение, т.е.

$$\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) = \sigma(\xi). \tag{50}$$

Тогда

$$\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z = \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) + \sigma(\xi). \tag{51}$$

Отметим также, что в силу (42) и (26)

$$\sigma(\infty) = [h^{-1}(\infty)b(\infty)]^{1/2} = [\bar{h}^{-1}(0)\bar{F}_1(0)]^{1/2} = a(0). \tag{52}$$

Из (31) в первом приближении получаем уравнение

$$\frac{d\Pi_1 y}{d\xi} = f_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) + f_z(\xi)(\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z), \quad \xi \geq 0,$$

где

$$f_y(\xi) := \frac{\partial f}{\partial y}(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0)$$

и такой же смысл имеет обозначение  $f_z(\xi)$ . Подставляя в правую часть уравнения выражение (51) для  $\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z$ , приходим к уравнению для  $\Pi_1 y(\xi)$ :

$$\frac{d\Pi_1 y}{d\xi} = g_y(\xi)\Pi_1 y + \pi_1(\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{53}$$

где

$$g_y(\xi) := g_y(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), \quad \pi_1(\xi) = [f_y(\xi) + f_z(\xi)\varphi_y(\xi)]\bar{y}_1(0) + f_z(\xi)\sigma(\xi).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \pi_1(\infty) &= [f_y(\infty) + f_z(\infty)\varphi_y(\infty)]\bar{y}_1(0) + f_z(\infty)\sigma(\infty) = \\ &= [\bar{f}_y(0) + \bar{f}_z(0)\bar{\varphi}_y(0)]\bar{y}_1(0) + \bar{f}_z(0)a(0) = 0 \quad (\text{см. (27)}), \end{aligned}$$

поэтому

$$|\pi_1(\xi)| \leq c \exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{54}$$

Начальное условие для  $\Pi_1 y(\xi)$  следует из (35):

$$\Pi_1 y(0) = -\bar{y}_1(0) - P_1 y(0). \tag{55}$$

Однако нам не известна пока величина  $P_1 y(0)$ , поэтому мы не можем на этом этапе определить функцию  $\Pi_1 y(\xi)$ , а значит, и функцию  $\Pi_1 z(\xi)$ , которая выражается через  $\Pi_1 y(\xi)$  по формуле (51).

Вернемся к уравнению (45) для  $P_0 z(\xi)$ , которое мы хотим модернизировать. Добавим в правую часть уравнения слагаемые

$$-h(0, y^0) \cdot 2\sqrt{\varepsilon} [\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z(0) - \varphi_y(0, y^0)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(0))] P_0 z,$$

содержащиеся в разложении правой части равенства (32). Хотя функции  $\Pi_1 y(\xi)$  и  $\Pi_1 z(\xi)$  еще не определены, но число, заключенное в квадратных скобках, нам известно — это  $\sigma(0) = [h^{-1}(0)b(0)]^{1/2} > 0$  (см. (50) и (49)). Уравнение для  $P_0 z(\zeta)$  принимает вид:

$$\frac{dP_0 z}{d\zeta} = -h(0, y^0) [(P_0 z)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0 z], \quad \zeta \geq 0. \tag{56}$$

Решение уравнения (56) с начальным условием (44) находится в явном виде:

$$P_0 z(\zeta) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\sigma P^0 \exp(-2\sqrt{\varepsilon}h\sigma\zeta)}{2\sqrt{\varepsilon}\sigma + P^0[1 - \exp(-2\sqrt{\varepsilon}h\sigma\zeta)]}, \quad \zeta \geq 0, \tag{57}$$

где  $h := h(0, y^0)$ ,  $\sigma := \sigma(0)$ . Отметим, что  $P_0 z(\zeta) > 0$  при  $\zeta \geq 0$ , это будет играть важную роль при обосновании асимптотики.

Несложный анализ выражения (57) показывает, что  $P_0 z(\zeta)$  монотонно стремится к нулю при  $\zeta \rightarrow \infty$ , но убывание функции  $P_0 z(\zeta)$  имеет различный характер на разных промежутках изменения  $\zeta$ . Можно разделить полупрямую  $\zeta \geq 0$  на три зоны.

Первой зоной является промежуток  $0 \leq \zeta \leq \varepsilon^{-\gamma}$ , где в качестве  $\gamma$  можно взять любое положительное число, меньшее, чем  $\frac{1}{2}$ . В этой зоне  $P_0 z(\zeta) = O\left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)$ , т.е. функция  $P_0 z(\zeta)$  убывает с ростом  $\zeta$  степенным образом так же, как функция (46).

Промежуток  $\varepsilon^{-\gamma} \leq \zeta \leq \varepsilon^{-1/2}$  является второй (переходной) зоной. Здесь происходит изменение характера убывания функции  $P_0 z(\zeta)$  и изменение масштаба погранслошной переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где  $\zeta \geq \varepsilon^{-1/2}$ , функция  $P_0 z(\zeta)$  имеет оценку

$$P_0 z(\zeta) = O(\sqrt{\varepsilon}) \exp(-k\eta), \quad \text{где } k := 2h\sigma > 0, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\zeta = \frac{x}{\varepsilon^{3/2}},$$

т.е. новая погранслошная переменная  $\eta$ , возникающая в третьей зоне, имеет иной масштаб по сравнению со старой переменной  $\zeta$ , а функция  $P_0 z$  убывает в третьей зоне экспоненциально при  $\eta \rightarrow \infty$ .

Отметим, что принципиальную роль в описанном поведении функции  $P_0 z(\zeta)$  играет положительность чисел  $h = h(0, y^0)$  и  $\sigma = \sigma(0)$ .

Итак, на начальном шаге алгоритма определены функции  $P_0 y$ ,  $\Pi_0 y$ ,  $\Pi_0 z$ ,  $P_0 z$ , т.е. главные члены рядов (12) и (13). Из (57) для  $P_0 z(\zeta)$  следует оценка

$$P_0 z(\zeta) \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{58}$$

где

$$P_\kappa(\zeta) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta)}{1 + \sqrt{\varepsilon} - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta)}, \quad \zeta \geq 0, \\ 0 < \kappa \leq k = 2h\sigma.$$

Функция  $P_\kappa(\zeta)$  имеет такое же трехзонное поведение, как и функция  $P_0 z(\zeta)$ . Она будет играть роль эталонной (оценочной) функции для коэффициентов  $P_i z(\zeta)$ ,  $P_i y(\zeta)$  рядов (13) аналогично тому, как функция  $\exp(-\kappa\zeta)$  была эталонной функцией в случае простого корня уравнения (3) (см. (9)), т.е. все функции  $P_i z(\zeta)$  и  $P_i y(\zeta)$  будут иметь оценки типа (58):

$$|P_i z(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad |P_i y(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{59}$$

с различными, вообще говоря,  $c$  и  $\kappa$  для различных  $i$ . Чтобы обеспечить эти оценки, будем формировать уравнения для  $P_i z(\zeta)$ ,  $P_i y(\zeta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , нестандартным способом.

В правую часть уравнения для  $P_i z(\zeta)$  наряду с членом  $-2h(0, y^0)P_0 z(\zeta)P_i z$  включим слагаемое  $-2h(0, y^0)\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_i z$ , аналогичное слагаемому  $-2h(0, y^0)\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0 z$ , добавленному в уравнение (45) (см. (56)). Уравнение для  $P_i z(\zeta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , будет иметь вид

$$\frac{dP_i z}{d\zeta} = -2h(0, y^0)(P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(0))P_i z + p_i(\zeta, \varepsilon), \quad \zeta \geq 0, \tag{60}$$

где  $p_i(\zeta, \varepsilon)$  рекуррентно выражаются через  $P_j z(\zeta)$  с номерами  $j < i$  и  $P_j y(\zeta)$  с номерами  $j \leq i$  и формируются нестандартным способом. Опишем этот способ.

Разложив правую часть (32) в ряд по степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ , обозначим коэффициент при  $\varepsilon^{\frac{i}{2}}$  через  $\beta_i(\eta, P_0 z, \dots, P_{i-1} z, P_1 y, \dots, P_i y)$  (в этот коэффициент мы не включаем слагаемое  $-2h(0, y^0)P_0 z(\zeta)P_i z$ , оно уже вошло в правую часть уравнения (60)). Если какое-то слагаемое (обозначим его  $\tilde{\beta}_i(\eta, P_0 z, \dots, P_{i-1} z, P_1 y, \dots, P_i y)$ ), входящее в  $\beta_i$ , имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей из числа функций  $|P_0 z|, \dots, |P_{i-1} z|, |P_1 y|, \dots, |P_i y|$  (например,  $|\tilde{\beta}_i| \leq q(\eta)|P_k z(\zeta)| \cdot |P_l y(\zeta)|$ ,  $k \leq i-1, l \leq i$ ), то это слагаемое включаем в  $p_i(\zeta, \varepsilon)$ ; если же оценка  $|\tilde{\beta}_i|$  содержит только один сомножитель указанного типа, то слагаемое  $\sqrt{\varepsilon}\tilde{\beta}_i$  включаем в  $p_{i-1}(\zeta, \varepsilon)$ , т.е. это слагаемое войдет в правую часть уравнения для  $P_{i-1} z(\zeta)$ . Кроме того, переменную  $\eta$ , входящую в выражение для  $\beta_i$ , заменяем на  $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ .

В качестве примера выпишем выражение для  $p_1(\zeta, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} p_1(\zeta, \varepsilon) = & 2h(0, y^0) \left[ \varphi_y(0, y^0)P_0 z(\zeta)P_1 y(\zeta) - \sqrt{\varepsilon}(a_1 P_0 z(\zeta) - \sigma(0)\varphi_y(0, y^0)P_1 y(\zeta)) \right] - \\ & - h_y(0, y^0)(a_2 + \sqrt{\varepsilon}a_3 \zeta + P_1 y(\zeta))(P_0 z(\zeta))^2 + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left[ F_1(0, y^0, \varphi(0, y^0) + P_0 z(\zeta), 0) - F_1(0, y^0, \varphi(0, y^0), 0) \right], \end{aligned} \tag{61}$$

где  $a_1, a_2, a_3$  – известные числа.

Уравнения для  $P_i y(\zeta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , извлекаемые из (33), имеют вид

$$\frac{dP_i y}{d\zeta} = q_i(\zeta, \varepsilon), \quad \zeta \geq 0, \tag{62}$$

где правые части  $q_i(\zeta, \varepsilon)$  выражаются рекуррентно через известные к моменту рассмотрения этого уравнения на  $i$ -м шаге функции  $P_j z(\zeta)$  и  $P_j y(\zeta)$  с номерами  $j < i$  и формируются по тому же принципу, что и функции  $p_i(\zeta, \varepsilon)$ . В частности, функция  $q_1(\zeta, \varepsilon)$  имеет вид

$$q_1(\zeta, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \left[ f(0, y^0, \varphi(0, y^0) + P_0 z(\zeta), 0) - f(0, y^0, \varphi(0, y^0), 0) \right]. \tag{63}$$

Рассмотрим теперь шаг алгоритма, на котором определяются пограничные функции с номером 1.

Для  $P_1 y(\zeta)$  имеем уравнение (62) при  $i = 1$ , где  $q_1(\zeta, \varepsilon)$  выражается формулой (63) и имеет, очевидно, оценку

$$|q_1(\zeta, \varepsilon)| \leq c\sqrt{\varepsilon}P_0 z(\zeta) \leq c\sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0,$$

последнее неравенство получено с учетом (58). Из (36) для  $P_1 y(\zeta)$  получаем условие

$$P_1 y(\infty) = 0. \tag{64}$$

Решение уравнения для  $P_1 y(\zeta)$  с условием (64) имеет вид

$$P_1 y(\zeta) = \int_{\infty}^{\zeta} q_1(s, \varepsilon) ds. \tag{65}$$

Нетрудно доказать так же, как это сделано в лемме в работе [3], что для  $P_1y(\zeta)$  имеет место оценка вида (59):

$$|P_1y(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0. \tag{66}$$

Из (65) находим значение  $P_1y(0)$ :

$$P_1y(0) = -\int_0^\infty q_1(s, \varepsilon) ds.$$

Теперь мы можем найти функцию  $\Pi_1y(\xi)$  как решение уравнения (53) с начальным условием (55):

$$\Pi_1y(\xi) = \Pi_1y(0) \exp\left(\int_0^\xi g_y(s) ds\right) + \int_0^\xi \exp\left(\int_s^\xi g_y(p) dp\right) \pi_1(s) ds. \tag{67}$$

Так как

$$\exp\left(\int_s^\xi g_y(p) dp\right) = \exp\left(\int_s^\xi g_y(0, \bar{y}^0(0) + \Pi_0y(p)) dp\right) \leq c \exp(-\kappa(\xi - s)) \quad \text{при } 0 \leq s \leq \xi$$

в силу (10) и (40), то из (67) с учетом оценки (54) получаем для  $\Pi_1y(\xi)$  экспоненциальную оценку типа (40):

$$|\Pi_1y(\xi)| \leq c \exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{68}$$

Функция  $\Pi_1z(\xi)$  находится из равенства (51) и также имеет оценку типа (68). Эта оценка следует из вида функции  $\Pi_1z(\xi)$  с учетом равенства (см. (26) и (50)):

$$\bar{z}_1(0) - \varphi_y(\infty)\bar{y}_1(0) - \sigma(\infty) = \bar{z}_1(0) - \varphi_y(0, \bar{y}_0(0))\bar{y}_1(0) - a(0) = a(0) - a(0) = 0.$$

Определив  $\Pi_1z(\xi)$ , находим из (34) начальное условие для  $P_1z(\zeta)$ :

$$P_1z(0) = -\bar{z}_1(0) - \Pi_1z(0). \tag{69}$$

Уравнение для  $P_1z(\zeta)$  имеет вид (60) при  $i = 1$ , где  $p_1(\zeta, \varepsilon)$  выражается формулой (61) и имеет оценку

$$|p_1(\zeta, \varepsilon)| \leq c \left[ P_0z |P_1y| + \sqrt{\varepsilon}(P_0z + |P_1y|) + (1 + \sqrt{\varepsilon}\zeta)(P_0z)^2 \right] \leq c \left[ P_\kappa^2(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta) \right].$$

Последнее неравенство получено с учетом оценок (58), (66) и неравенства  $\sqrt{\varepsilon}\zeta P_\kappa(\zeta) \leq cP_\kappa(\zeta)$ , где  $\kappa_1 < \kappa$ . Решение уравнения для  $P_1z(\zeta)$  с начальным условием (69) можно записать в виде

$$P_1z(\zeta) = \Phi(\zeta)\Phi^{-1}(0)P_1z(0) + \Phi(\zeta)\int_0^\zeta \Phi^{-1}(s)p_1(s, \varepsilon) ds,$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{dP_0z}{d\zeta}(\zeta) = -h(0, y^0) \left[ (P_0z(\zeta))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0z(\zeta) \right].$$

Нетрудно доказать, так же, как это сделано в лемме в работе [3], что для  $P_1z(\zeta)$  имеет место оценка вида (59):

$$|P_1z(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0.$$

На следующих шагах алгоритма (втором, третьем и т.д.) определяются пограничные функции с номерами 2, 3, ... С помощью метода математической индукции можно доказать, что функции  $\Pi_i z(\xi)$ ,  $\Pi_i y(\xi)$  и  $P_i z(\zeta)$ ,  $P_i y(\zeta)$  ( $i \geq 2$ ) имеют оценки типа (68) и (59).

Отметим, что частичные суммы

$$\overset{(n)}{\Pi} z(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \Pi_i z(\xi) \quad \text{и} \quad \overset{(n)}{\Pi} y(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \Pi_i y(\xi)$$

рядов (12) при подстановке их в равенства (17) вместо  $\Pi z$  и  $\Pi y$  удовлетворяют первому равенству в (17) с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)$ , а второму – с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , т.е.

$$\varepsilon \frac{d \Pi z}{d \xi} - \Pi F = O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right), \quad \frac{d \Pi y}{d \xi} - \Pi f = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (70)$$

а частичные суммы

$$P z(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i z(\zeta) \quad \text{и} \quad P y(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i y(\zeta)$$

рядов (13) при постановке их в равенства (18) вместо  $P z$  и  $P y$  удовлетворяют первому равенству с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , а второму – с точностью порядка  $O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)$ , т.е.

$$\frac{d P z}{d \zeta} - P F = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{d P y}{d \zeta} - P f = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right). \quad (71)$$

### 3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

#### 3.1. Теорема о существовании решения задачи (1), (2) с построенной асимптотикой

Для доказательства существования решения задачи (1), (2) с построенным асимптотическим разложением понадобится еще одно требование.

**Условие А9.** Пусть

$$\bar{\varphi}_y(x) > 0, \quad \bar{f}_z(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq X.$$

Напомним, что

$$\bar{\varphi}_y(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \bar{y}_0(x)), \quad \bar{f}_z(x) := \frac{\partial f}{\partial z}(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), x).$$

Роль этого условия выяснится ниже.

Обозначим через  $Z_n(x, \varepsilon)$ ,  $Y_n(x, \varepsilon)$  частичные суммы построенных разложений (5):

$$\begin{aligned} Z_n(x, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}} \left( \bar{z}_i(x) + \Pi_i z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + P_i z\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \right), \\ Y_n(x, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}} \left( \bar{y}_i(x) + \Pi_i y\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + P_i y\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (72)$$

**Теорема.** Если выполнены условия А1–А9, то для достаточно малых  $\varepsilon$  задача (1), (2) имеет решение  $z(x, \varepsilon)$ ,  $y(x, \varepsilon)$ , и для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$  справедливы асимптотические (при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ) равенства

$$z(x, \varepsilon) = Z_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X. \quad (73)$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы проведем с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. путем построения (с использованием частичных сумм (72)) нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) (см. [5]). В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (1), (2).

**Определение 1.** Две пары функций  $\underline{Z}(x, \varepsilon)$ ,  $\underline{Y}(x, \varepsilon)$  и  $\bar{Z}(x, \varepsilon)$ ,  $\bar{Y}(x, \varepsilon)$  называются *нижним* и *верхним* решениями задачи (1), (2), если они удовлетворяют условиям:

$$1^0. \quad L_\varepsilon(\underline{Z}, y) := \varepsilon^2 \frac{d \underline{Z}}{dx} - F(x, y, \underline{Z}, \varepsilon) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\bar{Z}, y)$$

при  $0 \leq x \leq X, \quad \underline{Y}(x, \varepsilon) \leq y \leq \overline{Y}(x, \varepsilon);$

$$M_\varepsilon(\underline{Y}, x) := \varepsilon \frac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}, z, \varepsilon) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\overline{Y}, z)$$

при  $0 \leq x \leq X, \quad \underline{Z}(x, \varepsilon) \leq z \leq \overline{Z}(x, \varepsilon);$

$$2^0. \quad \underline{Z}(0, \varepsilon) \leq z^0 \leq \overline{Z}(0, \varepsilon), \quad \underline{Y}(0, \varepsilon) \leq y^0 \leq \overline{Y}(0, \varepsilon).$$

Известно, что если существуют нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), то существует решение  $z(x, \varepsilon), y(x, \varepsilon)$  этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{Z}(x, \varepsilon) \leq z(x, \varepsilon) \leq \overline{Z}(x, \varepsilon), \quad \underline{Y}(x, \varepsilon) \leq y(x, \varepsilon) \leq \overline{Y}(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq X. \tag{74}$$

Мы рассмотрим систему (1) последовательно на двух отрезках: в п. 3.3 на отрезке  $0 \leq x \leq \varepsilon \xi_0$  с начальными условиями (2), где выбор числа  $\xi_0$  (не зависящего от  $\varepsilon$ ) уточним ниже, и в п. 3.4 на отрезке  $\varepsilon \xi_0 \leq x \leq X$  с соответствующими начальными условиями в точке  $\varepsilon \xi_0$ , обеспечивающими гладкое продолжение решения за точку  $\varepsilon \xi_0$ . На каждом отрезке будут построены подходящие нижнее и верхнее решения, удовлетворяющие условиям  $1^0$  и  $2^0$  определения 1 с учетом того, что отрезок  $0 \leq x \leq X$ , фигурирующий в определении 1, заменяется в первом случае на отрезок  $0 \leq x \leq \varepsilon \xi_0$ , а во втором случае – на отрезок  $\varepsilon \xi_0 \leq x \leq X$ .

Предварительно в п. 3.2 будут получены некоторые вспомогательные оценки.

### 3.2. Вспомогательные оценки

а) Из (29), (70) и (71) следуют асимптотические равенства

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(Z_n, Y_n) &:= \varepsilon^2 \frac{dZ_n}{dx} - F(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X, \\ M_\varepsilon(Z_n, Y_n) &:= \varepsilon \frac{dY_n}{dx} - f(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X. \end{aligned} \tag{75}$$

Отметим также, что

$$Z_n(0, \varepsilon) = z^0, \quad Y_n(0, \varepsilon) = y^0. \tag{76}$$

б) Введем функцию

$$k_0(x, \varepsilon) = Z_1(x, \varepsilon) - \varphi(x, Y_1(x, \varepsilon)), \tag{77}$$

где  $Z_1(x, \varepsilon)$  и  $Y_1(x, \varepsilon)$  определены формулами (72) при  $n = 1$ , и рассмотрим ее сначала на отрезке  $0 \leq x \leq A\varepsilon^\gamma$ , где  $A$  и  $\gamma$  – положительные числа:

$$\begin{aligned} k_0(x, \varepsilon) &= \overline{z}_0(x) + \sqrt{\varepsilon} \overline{z}_1(x) + \Pi_0 z(\xi) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 z(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon} P_1 z(\zeta) - \\ &- \left[ \varphi(x, \overline{y}_0(x) + \Pi_0 y(\xi)) + \varphi_y(x, \overline{y}_0(x) + \Pi_0 y(\xi)) \sqrt{\varepsilon} (\overline{y}_1(x) + \Pi_1 y(\xi) + P_1 y(\zeta)) + \right. \\ &+ O(\varepsilon) \left. \right] = \overline{z}_0(0) + O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon} \overline{z}_1(0) + \Pi_0 z(\xi) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_1 z(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon} P_1 z(\zeta) - \\ &- \left[ \varphi(0, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) + O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon} \varphi_y(0, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) (\overline{y}_1(0) + \Pi_1 y(\xi) + \right. \\ &+ P_1 y(\zeta)) + O(\varepsilon) \left. \right] = O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon} \sigma(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon} (P_1 z(\zeta) - \varphi_y(\xi) P_1 y(\zeta)) + \\ &+ O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq A\varepsilon^\gamma. \end{aligned} \tag{78}$$



Последнее равенство в (78) получено с учетом (37) и (50). Из (78) следует: если  $0 \leq x \leq A\epsilon^2$ , т.е.  $0 \leq \zeta \leq A$ , то  $P_0 z(\zeta) > \frac{c}{A}$ , где  $c > 0$  – некоторое число (см. (57)), и, следовательно, для достаточно малых  $\epsilon$

$$k_0(x, \epsilon) \geq \frac{c}{A} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq A\epsilon^2; \tag{79}$$

если  $A\epsilon^2 \leq x \leq \epsilon^{\frac{1+\delta}{2}}$ , где  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , то, учитывая, что  $\sigma(\xi) \geq 2c_1 > 0$ , где  $c_1$  – некоторое число (см. (49)),  $P_0 z(\zeta) > 0$  и  $|P_z(\zeta) - \varphi_y(\xi)P_y(\zeta)| \leq c_1$  при достаточно большом  $A$ , получаем для достаточно малых  $\epsilon$  неравенство

$$k_0(x, \epsilon) \geq c_1 \sqrt{\epsilon} \quad \text{при} \quad A\epsilon^2 \leq x \leq \epsilon^{\frac{1+\delta}{2}}. \tag{80}$$

Если  $\epsilon^{\frac{1+\delta}{2}} \leq x \leq X$ , где  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , то все пограничные функции являются величинами порядка  $o(\epsilon^N)$  для любого  $N$ , поэтому из (77) следует (принимая во внимание (24) и (26)):

$$\begin{aligned} k_0(x, \epsilon) &= \bar{z}_0(x) + \sqrt{\epsilon} z_1(x) - \varphi(x, \bar{y}_0(x) + \sqrt{\epsilon} \bar{y}_1(x)) + o(\epsilon^N) = \\ &= [\bar{z}_0(x) - \varphi(x, \bar{y}_0(x))] + \sqrt{\epsilon} [\bar{z}_1(x) - \varphi_y(x, \bar{y}_0(x)) \bar{y}_1(x)] + O(\epsilon) = \sqrt{\epsilon} a(x) + O(\epsilon), \end{aligned} \tag{81}$$

и, значит,

$$k_0(x, \epsilon) \geq c_2 \sqrt{\epsilon} \quad \text{при} \quad \epsilon^{\frac{1+\delta}{2}} \leq x \leq X, \tag{82}$$

где  $c_2 > 0$  – некоторое число.

Из (79), (80) и (82) получаем

$$k_0(x, \epsilon) \geq c_0 \sqrt{\epsilon} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq X, \tag{83}$$

где  $c_0$  – некоторое число, не зависящее от  $\epsilon$ .

в) Получим теперь оценки для производных

$$F_z(x, \epsilon) := \frac{\partial F}{\partial z}(x, Z_n(x, \epsilon), Y_n(x, \epsilon), \epsilon)$$

и

$$F_y(x, \epsilon) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, Z_n(x, \epsilon), Y_n(x, \epsilon), \epsilon),$$

где  $Z_n(x, \epsilon)$  и  $Y_n(x, \epsilon)$  определены формулами (72) и  $n \geq 1$ . Для  $F_z(x, \epsilon)$  имеем:

$$\begin{aligned} F_z(x, \epsilon) &= -2h(x, Y_n)(Z_n - \varphi(x, Y_n)) + \epsilon F_{1z}(x, \epsilon) = -2h(x, Y_1) \times \\ &\times (Z_1(x, \epsilon) - \varphi(x, Y_1(x, \epsilon)) + O(\epsilon)) = -2h(x, Y_1) k_0(x, \epsilon) + O(\epsilon). \end{aligned} \tag{84}$$

В силу условий A4 и A7 справедливо неравенство

$$h(x, Y_1(x, \epsilon)) \geq c > 0, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Учитывая также (83), из (84) получаем для достаточно малых  $\epsilon$ :

$$F_z(x, \epsilon) \leq -A_0 k_0(x, \epsilon), \quad 0 \leq x \leq X, \tag{85}$$

где число  $A_0 > 0$  не зависит от  $\epsilon$ .

Для  $F_y(x, \epsilon)$  аналогично получаем

$$F_y(x, \epsilon) = [-h_y(x, Y_1) k_0(x, \epsilon) + 2h(x, Y_1) \varphi_y(x, Y_1)] k_0(x, \epsilon) + O(\epsilon), \tag{86}$$

откуда следует, что для достаточно малых  $\epsilon$

$$|F_y(x, \epsilon)| \leq A_1 k_0(x, \epsilon), \quad 0 \leq x \leq X, \tag{87}$$

где число  $A_1 > 0$  также не зависит от  $\epsilon$ .

Наряду с оценками (85) и (87) нам понадобятся представления производных  $F_z(x, \varepsilon)$ ,  $F_y(x, \varepsilon)$ ,  $f_z(x, \varepsilon) := f_z(x, Z_n, Y_n, \varepsilon)$  и  $f_y(x, \varepsilon) := f_y(x, Z_n, Y_n, \varepsilon)$  на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  для достаточно большого  $\xi_0$ . На отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  функции  $P_{iz}(\zeta)$  и  $P_{iy}(\zeta)$  имеют порядок  $o(\varepsilon^N)$  для любого  $N$ ,  $k_0(x, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$  (это следует из (78) и (81)),

$$h(x, Y_1) = h(x, \bar{y}_0(x)) + O(\Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}) = \bar{h}(x) + O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon}),$$

$$\varphi_y(x, Y_1) = \bar{\varphi}_y(x) + O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon}).$$

Учитывая эти равенства и обозначая (для краткости записи) величины  $O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon})$  через  $\omega(x, \varepsilon)$ , из (84) и (86) получаем

$$F_z(x, \varepsilon) = -[2\bar{h}(x) + \omega(x, \varepsilon)]k_0(x, \varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X, \tag{88}$$

$$F_y(x, \varepsilon) = [2\bar{h}(x)\bar{\varphi}_y(x) + \omega(x, \varepsilon)]k_0(x, \varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X. \tag{89}$$

Отметим, что величины  $\omega(x, \varepsilon)$  сколь угодно малы на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  при достаточно большом  $\xi_0$  и достаточно малых  $\varepsilon$ , а для их производных справедливо равенство

$$\omega'(x, \varepsilon) := \frac{d\omega}{dx}(x, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \exp(-\kappa\xi_0) + 1\right), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X.$$

Для  $f_z(x, \varepsilon)$  и  $f_y(x, \varepsilon)$  имеют место очевидные асимптотические равенства

$$f_z(x, \varepsilon) = \bar{f}_z(x) + \omega(x, \varepsilon), \quad f_y(x, \varepsilon) = \bar{f}_y(x) + \omega(x, \varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X. \tag{90}$$

Перейдем к рассмотрению системы уравнений (1) последовательно на отрезках  $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$  и  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$ .

### 3.3. Система уравнений (1) на отрезке $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$

На этом отрезке, где  $\xi_0 > 0$  – фиксированное число, выбор которого уточним ниже, сделаем в системе (1) замену переменных  $x = \varepsilon\xi$ . Получим уравнения

$$\varepsilon \frac{dz}{d\xi} = F(\varepsilon\xi, y, z, \varepsilon), \quad \frac{dy}{d\xi} = f(\varepsilon\xi, y, z, \varepsilon), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0. \tag{91}$$

Нижнее и верхнее решения задачи (91), (2) возьмем в виде

$$\begin{aligned} \underline{Z}(\xi, \varepsilon) &= Z_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) - M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, & \underline{Y}(\xi, \varepsilon) &= Y_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) - \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \\ \bar{Z}(\xi, \varepsilon) &= Z_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) + M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, & \bar{Y}(\xi, \varepsilon) &= Y_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{92}$$

где  $n \geq 2$ ,  $M$  и  $\lambda$  – не зависящие от  $\varepsilon$  положительные числа, выбор которых сделаем ниже.

Очевидно, что  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  и  $\bar{Z}$ ,  $\bar{Y}$  при любых  $M$  и  $\lambda$  удовлетворяют условиям  $2^0$  из определения 1, поскольку  $Z_n(0, \varepsilon) = z^0$ ,  $Y_n(0, \varepsilon) = y^0$  (см. (76)). Покажем, что числа  $M$  и  $\lambda$  можно выбрать так, что для достаточно малых  $\varepsilon$  будет выполнено условие  $1^0$  из определения 1 на отрезке  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  (для любого фиксированного  $\xi_0 > 0$ ). Начнем с условия  $1^0$  для  $\underline{Z}(\xi, \varepsilon)$ , учитывая, что если  $\underline{Y}(\xi, \varepsilon) \leq y \leq \bar{Y}(\xi, \varepsilon)$ , то  $y$  можно представить в виде

$$y = Y_n(\varepsilon\xi) + \Theta \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad -1 \leq \Theta \leq 1:$$

$$L_\varepsilon(\underline{Z}, y) := \varepsilon \frac{d\underline{Z}}{d\xi} - F(\varepsilon\xi, y, \underline{Z}, \varepsilon) = \varepsilon \frac{dZ_n}{d\xi} - M\lambda \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n+1}{2}} -$$

$$- \left[ F(\varepsilon\xi, Y_n, Z_n, \varepsilon) + F_y(\varepsilon\xi, \varepsilon)\Theta \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - F_z(\varepsilon\xi, \varepsilon)M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n \right], \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0.$$

Отсюда с учетом оценок (75), (85), (87), (83) получаем

$$\begin{aligned}
 L_\varepsilon(\underline{Z}, y) &\leq \left[ \varepsilon^2 \frac{dZ_n}{dx} - F(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) \right] - M\lambda \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n+2}{2}} + \\
 &+ A_1 k_0(\varepsilon\xi, \varepsilon) \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - A_0 k_0(\varepsilon\xi, \varepsilon) M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n \leq \\
 &\leq O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right) - (A_0 M - A_1) c_0 \sqrt{\varepsilon} \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n.
 \end{aligned} \tag{93}$$

Так как  $\varepsilon^n = o\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , поскольку  $n \geq 2$ , то для достаточно большого  $M$  и достаточно малых  $\varepsilon$  второе (отрицательное) слагаемое в правой части (93) обеспечит выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{Z}, y) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad \underline{Y}(\xi, \varepsilon) \leq y \leq \bar{Y}(\xi, \varepsilon),$$

т.е. на отрезке  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  будет выполнено условие  $l^0$  для  $L_\varepsilon(\underline{Z}, y)$  из определения 1.

Аналогично проверяется выполнение условия  $l^0$  для  $L_\varepsilon(\bar{Z}, y)$  при достаточно большом  $M$  и достаточно малых  $\varepsilon$ .

Перейдем к условию  $l^0$  для  $\underline{Y}(\xi, \varepsilon)$ . Записывая  $z$ , изменяющееся в промежутке  $\underline{Z}(\xi, \varepsilon) \leq z \leq \bar{Z}(\xi, \varepsilon)$ , в виде  $z = Z_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \Theta M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}$ , где  $-1 \leq \Theta \leq 1$ , получаем

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon(\underline{Y}, z) &:= \frac{d\underline{Y}}{d\xi} - f(\varepsilon\xi, \underline{Y}, z, \varepsilon) \frac{dY_n}{d\xi} - \lambda \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - \\
 &- \left[ f(\varepsilon\xi, Y_n, Z_n, \varepsilon) - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon) \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon) \Theta M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n \right] = \\
 &= \left[ \varepsilon \frac{dY_n}{dx} - f(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) \right] - (\lambda - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon) + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon) \Theta M) \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n = \\
 &= O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) - \left[ \lambda - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon) + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon) \Theta M + O(M^2 \exp(\lambda\xi))\varepsilon^{\frac{n}{2}} \right] \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}.
 \end{aligned}$$

При достаточно большом  $\lambda$  и достаточно малых  $\varepsilon$  выражение в последних квадратных скобках положительно, и, следовательно, для достаточно большого  $\lambda$  и достаточно малых  $\varepsilon$  справедливо неравенство

$$M_\varepsilon(\underline{Y}, z) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad \underline{Z}(\xi, \varepsilon) \leq z \leq \bar{Z}(\xi, \varepsilon).$$

Аналогично устанавливается справедливость неравенства

$$M_\varepsilon(\bar{Y}, z) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad \underline{Z}(\xi, \varepsilon) \leq z \leq \bar{Z}(\xi, \varepsilon).$$

Таким образом, для любого фиксированного  $\xi_0 > 0$  функции  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  и  $\bar{Z}$ ,  $\bar{Y}$ , определенные равенствами (92), являются при достаточно больших  $M$  и  $\lambda$  и достаточно малых  $\varepsilon$  нижним и верхним решениями задачи (91), (2). Следовательно, существует решение этой задачи (обозначим его  $\tilde{z}(\xi, \varepsilon)$ ,  $\tilde{y}(\xi, \varepsilon)$ ), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{Z}(\xi, \varepsilon) \leq \tilde{z}(\xi, \varepsilon) \leq \bar{Z}(\xi, \varepsilon), \quad \underline{Y}(\xi, \varepsilon) \leq \tilde{y}(\xi, \varepsilon) \leq \bar{Y}(\xi, \varepsilon), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0.$$

Отсюда, учитывая вид функций (92), получаем асимптотические равенства для решения  $z(x, \varepsilon)$ ,  $y(x, \varepsilon)$  задачи (1), (2) на отрезке  $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$ :

$$z(x, \varepsilon) = \tilde{z}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = Z_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = \tilde{y}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = Y_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0.$$

Запишем эти равенства, заменив  $n$  на  $n + 1$ :

$$z(x, \varepsilon) = Z_{n+1}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = Y_{n+1}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right). \tag{94}$$

Так как  $Z_{n+1} = Z_n + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ ,  $Y_{n+1} = Y_n + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , то из (94) получаем

$$z(x, \varepsilon) = Z_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0, \tag{95}$$

т.е. справедливы равенства (73) на отрезке  $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$  для  $n \geq 2$ .

При  $n = 2$  равенства (95) принимают вид

$$z = Z_2 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad y = Y_2 + O(\varepsilon^{3/2}),$$

а поскольку

$$Z_2 = Z_1 + O(\varepsilon) = Z_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad Y_2 = Y_1 + O(\varepsilon) = Y_0 + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

то

$$\begin{aligned} z &= Z_1 + O(\varepsilon), \quad y = Y_1 + O(\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0, \\ z &= Z_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad y = Y_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0, \end{aligned}$$

т.е. равенства (73) справедливы на отрезке  $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$  также для  $n = 1$  и для  $n = 0$ .

### 3.4. Система уравнений (1) на отрезке $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$

Рассмотрим теперь систему уравнений (1) на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  с начальными условиями, обеспечивающими гладкое продолжение решения за точку  $\varepsilon\xi_0$ :

$$z(\varepsilon\xi_0, \varepsilon) = \bar{z}(\xi_0, \varepsilon), \quad y(\varepsilon\xi_0, \varepsilon) = \bar{y}(\xi_0, \varepsilon). \tag{96}$$

Для доказательства существования решения этой задачи снова применим метод дифференциальных неравенств. В связи с этим отметим одно очевидное утверждение: если  $F(x, y, z, \varepsilon)$  является неубывающей функцией аргумента  $y$ , а  $f(x, y, z, \varepsilon)$  – неубывающей функцией аргумента  $z$  в области

$$G = \{(x, y, z, \varepsilon) : \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X, \underline{Y}(x, \varepsilon) \leq y \leq \bar{Y}(x, \varepsilon), \underline{Z}(x, \varepsilon) \leq z \leq \bar{Z}(x, \varepsilon), 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \tag{97}$$

(в таком случае говорят, что функции  $F$  и  $f$  удовлетворяют условию квазимонотонности в области  $G$ ), то для выполнения на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  условия  $1^0$  из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{Z}, \underline{Y}) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\bar{Z}, \bar{Y}), \quad M_\varepsilon(\underline{Y}, \underline{Z}) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\bar{Y}, \bar{Z}) \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X. \tag{98}$$

Ниже мы воспользуемся этим утверждением.

Предварительно рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha(x, \varepsilon)$  и  $\beta(x, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} F_y(x, \varepsilon)\alpha + F_z(x, \varepsilon)\beta &= -2A\bar{h}(x)k_0(x, \varepsilon), \\ f_y(x, \varepsilon)\alpha + f_z(x, \varepsilon)\beta &= -B, \end{aligned} \tag{99}$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные положительные числа, обозначения  $F_y(x, \varepsilon)$ ,  $F_z(x, \varepsilon)$ ,  $f_y(x, \varepsilon)$ ,  $f_z(x, \varepsilon)$  имеют тот же смысл, что и ранее, т.е.  $F_y(x, \varepsilon) = F_y(x, Y_n(x, \varepsilon), Z_n(x, \varepsilon), \varepsilon)$  и т.д.,  $n \geq 2$ .

Используя представления (88)–(90) для производных  $F_y, F_z, f_y, f_z$  при  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  и деля обе части первого уравнения в (99) на  $2\bar{h}(x)k_0(x, \varepsilon)$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}_y(x) + \omega(x, \varepsilon)]\alpha - [1 + \omega(x, \varepsilon)]\beta &= -A, \\ [\bar{f}_y(x) + \omega(x, \varepsilon)]\alpha + [\bar{f}_z(x) + \omega(x, \varepsilon)]\beta &= -B. \end{aligned} \tag{100}$$

Отбросив слагаемые  $\omega(x, \varepsilon)$ , которые являются сколь угодно малыми при достаточно большом  $\xi_0$  и достаточно малых  $\varepsilon$ , получим систему уравнений

$$\bar{\varphi}_y(x)\alpha_0 - \beta_0 = -A, \quad \bar{f}_y(x)\alpha_0 + \bar{f}_z(x)\beta_0 = -B.$$

Ее решение имеет вид

$$\alpha_0(x) = -\bar{g}_y^{-1}(x)(\bar{f}_z(x)A + B), \quad \beta_0(x) = -\bar{g}_y^{-1}(x)(-\bar{f}_y(x)A + \bar{\varphi}_y(x)B).$$

Так как  $\bar{g}_y(x) < 0$  (см. (10)),  $\bar{\varphi}_y(x) > 0$  и  $\bar{f}_z(x) > 0$  (в силу условия A9) и  $\bar{f}_y(x) < 0$  (это следует из равенства  $\bar{f}_y(x) = \bar{g}_y(x) - \bar{f}_z(x)\bar{\varphi}_y(x)$ ), то

$$\alpha_0(x) > 0 \quad \text{и} \quad \beta_0(x) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X.$$

Решение  $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon)$  системы (99) отличается от  $\alpha_0(x), \beta_0(x)$  на величины порядка  $O(A + B)\omega(x, \varepsilon)$ , и, следовательно, при любых фиксированных  $A$  и  $B$  для достаточно большого  $\xi_0$  и достаточно малых  $\varepsilon$  справедливы неравенства

$$\alpha(x, \varepsilon) > 0, \quad \beta(x, \varepsilon) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X,$$

причем  $\alpha$  и  $\beta$  можно сделать сколь угодно большими, если взять достаточно большие  $A$  и  $B$ . Отметим также, что так как

$$\omega'(x, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right) \text{ на отрезке } \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X,$$

то

$$\begin{aligned} \alpha'(x, \varepsilon) &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right)(A + B), \\ \beta'(x, \varepsilon) &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right)(A + B), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X. \end{aligned} \tag{101}$$

Нижнее и верхнее решения задачи (1), (96), рассматриваемой на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$ , возьмем в виде ( $n \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} \underline{Z}(x, \varepsilon) &= Z_n(x, \varepsilon) - \beta(x, \varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, & \underline{Y}(x, \varepsilon) &= Y_n(x, \varepsilon) - \alpha(x, \varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \\ \bar{Z}(x, \varepsilon) &= Z_n(x, \varepsilon) + \beta(x, \varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, & \bar{Y}(x, \varepsilon) &= Y_n(x, \varepsilon) + \alpha(x, \varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{102}$$

где  $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon)$  – решение системы уравнений (99) с числами  $A$  и  $B$ , выбор которых уточним ниже. Из представлений (89) и (90) для  $F_y(x, \varepsilon)$  и  $f_z(x, \varepsilon)$  и вида (102) функций  $\underline{Z}, \underline{Y}$  и  $\bar{Z}, \bar{Y}$  следует, что для достаточно большого  $\xi_0$  и достаточно малых  $\varepsilon$  в области  $G$  (см. (97)) выполняются неравенства

$$F_y(x, y, z, \varepsilon) > 0, \quad f_z(x, y, z, \varepsilon) > 0,$$

и, следовательно, функции  $F$  и  $f$  удовлетворяют в области  $G$  условию квазимонотонности. Поэтому условие  $1^0$  из определения нижнего и верхнего решений будет выполнено на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$ , если выполняются неравенства (98).

Для  $L_\varepsilon(\underline{Z}, \underline{Y})$ , используя (75), (101) и (99), получаем

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\underline{Z}, \underline{Y}) &= \varepsilon^2 \frac{d\underline{Z}}{dx} - F(x, \underline{Y}, \underline{Z}, \varepsilon) = \left[ \varepsilon^2 \frac{dZ_n}{dx} - F(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) \right] - \\ &- \varepsilon^2 \beta'(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + \left[ F_y(x, \varepsilon) \alpha(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + F_z(x, \varepsilon) \beta(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} \right] + O((A^2 + B^2) \varepsilon^n) = \\ &= O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right) + O(A + B) \varepsilon^{\frac{n+2}{2}} - 2A \bar{h}(x) k_0(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(A^2 + B^2) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{103}$$

где первое слагаемое в правой части (103) не зависит от  $A$  и  $B$ .

Так как  $k_0(x, \varepsilon) \geq c_0 \sqrt{\varepsilon}$  (см. (83)), то для достаточно большого  $A$  и достаточно малых  $\varepsilon$  третье (отрицательное) слагаемое в правой части (103) является доминирующим и обеспечивает выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{Z}, \underline{Y}) < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \xi_0 \leq x \leq X.$$

Аналогично доказывается, что для достаточно большого  $A$  и достаточно малых  $\varepsilon$  выполняется неравенство

$$L_\varepsilon(\bar{Z}, \bar{Y}) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \xi_0 \leq x \leq X.$$

Рассмотрим выражение для  $M_\varepsilon(\underline{Y}, \underline{Z})$ . Используя (75), (101) и (99), получаем

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\underline{Y}, \underline{Z}) &= \varepsilon \frac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}, \underline{Z}, \varepsilon) = \left[ \varepsilon \frac{dY_n}{dx} - f(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) \right] - \varepsilon \alpha'(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + \\ &+ \left[ f_y(x, \varepsilon) \alpha(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + f_z(x, \varepsilon) \beta(x, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}} \right] + O((A^2 + B^2) \varepsilon^n) = \\ &= O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) + O((A + B)(\exp(-k\xi_0) + \varepsilon)) \varepsilon^{n/2} - B \varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(A^2 + B^2) \varepsilon^n, \end{aligned} \tag{104}$$

где первое слагаемое в правой части (104) не зависит от  $A$  и  $B$ .

Очевидно, что для достаточно большого  $\xi_0$ , достаточно большого  $B$  и достаточно малых  $\varepsilon$  доминирующим слагаемым в правой части (104) является третье (отрицательное) слагаемое, которое обеспечивает выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\underline{Y}, \underline{Z}) < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \xi_0 \leq x \leq X.$$

Аналогично доказывается, что для достаточно большого  $B$  и достаточно малых  $\varepsilon$  выполняется неравенство

$$M_\varepsilon(\bar{Y}, \bar{Z}) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \xi_0 \leq x \leq X.$$

Итак, для достаточно большого  $\xi_0$ , достаточно больших  $A$  и  $B$  и достаточно малых  $\varepsilon$  функции  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  и  $\bar{Z}$ ,  $\bar{Y}$ , удовлетворяют на отрезке  $\varepsilon \xi_0 \leq x \leq X$  условию  $1^0$  из определения 1.

Убедимся в том, что для достаточно малых  $\varepsilon$  эти функции удовлетворяют также условию  $2^0$  из определения 1.

В силу (95)  $z(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) = Z_n(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , а в силу (102)  $\underline{Z}(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) = Z_n(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) - \beta(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) \varepsilon^{\frac{n}{2}}$ . Сравнивая эти два выражения и учитывая, что  $\beta(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) \geq c > 0$ , приходим к неравенству  $\underline{Z}(\varepsilon \xi_0, \varepsilon) < z(\varepsilon \xi_0, \varepsilon)$  для достаточно малых  $\varepsilon$ .

Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств из условия  $2^0$ .

Таким образом, функции  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  и  $\bar{Z}$ ,  $\bar{Y}$ , определенные равенствами (102), где  $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon)$  – решение системы уравнений (99), являются для достаточно большого  $\xi_0$ , достаточно больших  $A$  и

$B$  и достаточно малых  $\varepsilon$  нижним и верхним решениями системы (1), рассматриваемой на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  с начальными условиями (9б).

Следовательно, существует решение  $z(x, \varepsilon)$ ,  $y(x, \varepsilon)$  этой системы, удовлетворяющее на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  неравенствам (74), откуда, учитывая вид (102) функций  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  и  $\overline{Z}$ ,  $\overline{Y}$ , получаем асимптотические равенства для  $n \geq 2$ :

$$z(x, \varepsilon) = Z_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad \varepsilon\xi_0 \leq x \leq X.$$

Таким же образом, как это было сделано в п. 3.3, величины  $O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)$  в этих равенствах можно заменить на  $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$ , а затем доказать справедливость полученных равенств также для  $n = 1$  и  $n = 0$ .

Учитывая, что решение  $z(x, \varepsilon)$ ,  $y(x, \varepsilon)$  системы (1) на отрезке  $\varepsilon\xi_0 \leq x \leq X$  с начальными условиями (9б) является гладким продолжением решения этой системы на отрезке  $0 \leq x \leq \varepsilon\xi_0$  с начальными условиями (2), приходим к заключению: для достаточно малых  $\varepsilon$  задача (1), (2) имеет решение  $z(x, \varepsilon)$ ,  $y(x, \varepsilon)$ , для которого справедливы асимптотические равенства (73).

Тем самым теорема, сформулированная в п. 3.1, полностью доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Матем. сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 147–156.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Высш. школа, 1990.
3. Бутузова М.В. Задача Коши для тихоновской системы в случае кратного корня вырожденного уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 34–45.
4. Бутузов В.Ф. Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 68–80.
5. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 10. С. 1295–1307.
6. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R. On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. 2013. V. 83. P. 1–11.
7. Butuzov V.F. Asymptotics of the solution of a system of singularly perturbed equations in the case of a multiple root of the degenerate equation // Differential Equations. 2014. № 2. P. 177–188.
8. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2016. Т. 207. № 8. С. 73–100.
9. Бутузов В.Ф. Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 21–44.
10. Бутузов В.Ф. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 961–987.
11. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 91–112.
12. Бутузов В.Ф. Асимптотика погранслоного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2019. Т. 210. № 11. С. 76–102.
13. Бутузов В.Ф. О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89.
14. Неведов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. №4. С. 719–722.

---



---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---



---

УДК 517.95

**ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ  
ФУНКЦИЙ ГОРНА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

© 2022 г. С. И. Безродных

119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.  
Переработанный вариант 24.09.2021 г.  
Принята к публикации 07.10.2021 г.

Рассматриваются гипергеометрические ряды Горна двух переменных и соответствующие им системы уравнений с частными производными. Предложен метод нахождения формул аналитического продолжения произвольных рядов такого типа в виде линейных комбинаций других решений той же системы уравнений, которой удовлетворяет исходный ряд. В качестве примера построены формулы продолжения двух рядов из известного списка Горна. Библ. 32.

**Ключевые слова:** гипергеометрические функции многих переменных, ряды Горна, список Горна, аналитическое продолжение.

DOI: 10.31857/S0044466922060047

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Гипергеометрические функции двух и большего числа переменных возникают при конструктивном решении многих задач математической физики (см., например, [1]–[14]). Важные классы таких функций определяются в виде кратных степенных рядов, имеющих конечные области сходимости. В связи с этим вопрос об аналитическом продолжении является одним из центральных в теории гипергеометрических функций и соответствующих им систем уравнений с частными производными (см. [1], [3], [7], [15]–[17]).

Настоящая работа посвящена выводу формул аналитического продолжения для гипергеометрических рядов Горна следующего вида:

$$F^{(M)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) := \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k_1! k_2!} \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \alpha_j k_1 + \beta_j k_2)} \right) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad (1.1)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – комплексные переменные,  $\mathbf{g} := (g_1, g_2, \dots, g_M) \in \mathbb{C}^M$  – комплексный векторный параметр, а  $\mathcal{L}$  – целочисленная  $(2 \times M)$ -матрица

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_M \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_M \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

элементы  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$  которой удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j = -1, \quad \sum_{j=1}^M \beta_j = -1; \quad (1.3)$$

равенства (1.3) гарантируют конечность области сходимости ряда (1.1). Через  $\Gamma(s)$ , как обычно, обозначается гамма-функция (см. [15]).

Отметим, что согласно определению Горна (см. [18], а также [3], [7], [15], [19]) степенной ряд  $\sum \lambda(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}$  называется *гипергеометрическим*, если его коэффициенты  $\lambda(k_1, k_2)$  таковы, что отношения двух соседних  $\lambda(k_1 + 1, k_2)/\lambda(k_1, k_2)$  и  $\lambda(k_1, k_2 + 1)/\lambda(k_1, k_2)$  представляют собой рациио-



нальные функции индексов суммирования  $k_1$  и  $k_2$ . Нетрудно убедиться в том, что коэффициенты ряда (1.1), имеющие вид

$$\Lambda(k_1, k_2) := \frac{1}{k_1!k_2!} \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \alpha_j k_1 + \beta_j k_2)},$$

обладают указанным свойством. Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\Lambda(k_1 + 1, k_2)}{\Lambda(k_1, k_2)} = \frac{P_1(k_1, k_2)}{Q_1(k_1, k_2)}, \quad \frac{\Lambda(k_1, k_2 + 1)}{\Lambda(k_1, k_2)} = \frac{P_2(k_1, k_2)}{Q_2(k_1, k_2)}, \tag{1.4}$$

где  $P_1, P_2, Q_1$  и  $Q_2$  – полиномы следующего вида:

$$P_1(k_1, k_2) = \prod_{j:\alpha_j < 0} ((k_1 + 1)\alpha_j + k_2\beta_j + g_j)_{|\alpha_j|}, \quad Q_1(k_1, k_2) = (k_1 + 1) \prod_{j:\alpha_j > 0} (k_1\alpha_j + k_2\beta_j + g_j)_{\alpha_j}, \tag{1.5}$$

$$P_2(k_1, k_2) = \prod_{j:\beta_j < 0} (k_1\alpha_j + (k_2 + 1)\beta_j + g_j)_{|\beta_j|}, \quad Q_2(k_1, k_2) = (k_2 + 1) \prod_{j:\beta_j > 0} (k_1\alpha_j + k_2\beta_j + g_j)_{\beta_j}, \tag{1.6}$$

записанные с помощью символа Похгаммера  $(a)_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , который выражается через гамма-функцию по формуле (см. [15])

$$(a)_m := \frac{\Gamma(a + m)}{\Gamma(a)} = \frac{(-1)^m \Gamma(1 - a)}{\Gamma(1 - a - m)}, \tag{1.7}$$

и, как известно, является произведением конечного числа сомножителей вида

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_m = \begin{cases} (a)_m = a(a + 1) \cdots (a + m - 1), & m = 1, 2, \dots, \\ (-1)^m [(1 - a)(2 - a) \cdots ((1 - a) - m + 1)]^{-1}, & m = -1, -2, \dots \end{cases} \tag{1.8}$$

Наивысшую из степеней полиномов (1.5), (1.6) называют порядком ряда (1.1). Дж. Горн составил полный перечень рядов вида (1.1) второго порядка. Отметим, что такой перечень, называемый списком Горна, включает 14 так называемых неконфлюэнтных рядов с конечной областью сходимости (см. [1], [15], [16]), для которых выполняются соотношения (1.3).

Согласно общим результатам теории рядов Горна, ряд (1.1) является решением следующей системы уравнений с частными производными (см. [3], [7], [15], [19]):

$$\mathcal{Q}_1(z_1^{-1}u(z_1, z_2)) = \mathcal{P}_1u(z_1, z_2), \quad \mathcal{Q}_2(z_2^{-1}u(z_1, z_2)) = \mathcal{P}_2u(z_1, z_2), \tag{1.9}$$

здесь  $\mathcal{Q}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , – дифференциальные операторы, получаемые подстановкой элементов  $\theta_1 := z_1\partial/\partial z_1$  и  $\theta_2 := z_2\partial/\partial z_2$  алгебры Вейля, вместо аргументов  $k_1$  и  $k_2$  полиномов  $P_j, Q_j$ , определяемых (1.5), (1.6).

В работе рассматривается проблема построения формул аналитического продолжения рядов Горна (1.1) за границу области  $\Omega_0$  его сходимости в виде конечных сумм

$$F^{(M)}(\mathcal{Q}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = \sum \lambda_m u_m(z_1, z_2), \tag{1.10}$$

где  $u_m$  – обобщенные гипергеометрические ряды, являющиеся линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), которой удовлетворяет исходный ряд (1.1), а  $\lambda_m$  – некоторые коэффициенты. При этом предполагается существование такой области  $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ , в которой все ряды  $u_m$  сходятся одновременно, а ее пересечение с дополнением к  $\Omega_0$  непусто, т.е.  $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \setminus \Omega_0) \neq \emptyset$ . Отметим, что представления вида (1.10) являются обобщением классических формул аналитического продолжения функции Гаусса одного переменного на случай двух переменных, а фигурирующие в (1.10) функции  $u_m(z_1, z_2)$  играют для систем (1.9) ту же роль, что и канонические решения Куммера для гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет функция Гаусса; результаты теории функции Гаусса изложены, например, в [1], [15], [17], [20].

Сформулированная задача о построении формул (1.10) является частью общей проблемы аналитического продолжения рядов Горна  $N$  переменных. Для конкретных представителей семейства гипергеометрических функций двух и большего числа переменных вопрос о построении

формул продолжения рассматривался, например, в [1], [4], [17], [21]–[24], где были получены частные, но содержательные результаты.

Важным этапом в решении общей проблемы аналитического продолжения функций Горна произвольного числа переменных являются результаты статей [7], [25]–[27]. В этих работах была решена проблема продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , зависящей от  $N \geq 2$  переменных  $(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ , которая в единичном поликруге  $\mathbb{U}^N = \{|z_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$  представима следующим степенным рядом:

$$F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{\mathbf{k}} k_1! \cdots k_N!} z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}; \tag{1.11}$$

здесь  $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^N k_s$ ,  $a_1, \dots, a_N, b$  и  $c$  – комплексные параметры ( $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ). Отметим, что ряд (1.11) принадлежит к классу Горна гипергеометрических рядов  $N$  переменных (см. [7]). В [25], [7] при произвольном  $N$  найдены формулы аналитического продолжения функции  $F_D^{(N)}$  в окрестности точек

$$\left( \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-p-q} \right)$$

(для любых  $p, q = \overline{0, N}$ ,  $N - p - q \geq 0$ ), а в работах [26], [27] построены формулы продолжения  $F_D^{(N)}$  в окрестность особых гиперплоскостей  $\{z_j = z_k\}$  и любых их пересечений (также при произвольном  $N$ ).

В [28], являющейся развитием исследований [7], [25], предложен весьма общий подход, позволяющий находить формулы аналитического продолжения рядов Горна, зависящих от произвольного числа переменных  $z_1, \dots, z_N$ . В настоящей работе результаты [28] применены для случая рядов Горна (1.1) двух переменных, важного как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Основным результатом следующего разд. 1 является теорема 1, устанавливающая в явном виде формулу продолжения ряда (1.1) по одному из двух переменных  $z_1$  или  $z_2$ . Такая формула дает представления функции  $F^{(M)}(z_1, z_2)$  вне области сходимости ряда (1.1) в виде линейной комбинации конечного числа других рядов Горна двух новых переменных  $w_1, w_2$ , одно из которых равно  $w_1 = 1/z_1$  (или  $w_1 = 1/z_2$ ), а второе имеет вид  $w_2 = z_1^\mu z_2^\nu$ , где  $\mu$  и  $\nu$  ( $\nu \neq 0$ ) – целые числа, выражающиеся через элементы матрицы (1.2). Аналитическое продолжение по двум переменным  $z_1, z_2$  строится путем повторного (возможно, неоднократного) применения теоремы 1 для продолжения по переменному  $w_2$  и новым переменным, которые возникают в результате такого продолжения.

Указанным способом можно, в частности, построить формулы аналитического продолжения всех гипергеометрических рядов второго порядка из списка Горна. В разд. 3 и 4 в качестве примера приложения результатов разд. 2 построены формулы продолжения рядов  $H_3$  и  $H_4$  из этого списка (см. [1], [15], [16]), которые определяются равенствами

$$H_3(a, b, c; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (b)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2} k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{1.12}$$

$$H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (b)_{k_2}}{(c)_{k_1} (d)_{k_2} k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \tag{1.13}$$

(здесь использованы традиционные обозначения, см. [15]). Область сходимости ряда  $H_3$  имеет вид

$$\left\{ |z_1| < \frac{1}{4}, |z_2| < \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} - |z_1| \right)^{1/2} \right\}, \tag{1.14}$$

а ряда  $H_4$  – следующий вид:

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 2|z_1|^{1/2} + |z_2| < 1\}. \tag{1.15}$$

Отметим, что различные аспекты теории функции Горна двух переменных активно развиваются в настоящее время (см., например, исследования авторов работ [29], [30]).

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ДВОЙНОГО РЯДА ГОРНА

### 2.1. Формулы продолжения по одному переменному

В настоящем разделе представлена теорема, которая дает формулу аналитического продолжения рядов (1.1) по одному из двух переменных. Далее потребуются следующие обозначения:

$$I^0(\mathcal{L}) := \{j : \alpha_j = 0\}, \quad I^-(\mathcal{L}) := \{j : \alpha_j < 0\}, \quad I^+(\mathcal{L}) := \{j : \alpha_j > 0\}, \tag{2.1}$$

т.е., например,  $I^-(\mathcal{L})$  – это совокупность номеров  $j$ , которым соответствуют отрицательные элементы первой строки  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$  матрицы  $\mathcal{L}$  (см. (1.2)), с помощью которой определяется ряд (1.1). Для краткости будем опускать аргумент  $\mathcal{L}$  в обозначениях множеств (2.1), писать  $I^0, I^-, I^+$ . Определим также числа  $\sigma_{j,r}^{(s)}$ , выражающиеся через элементы матрицы  $\mathcal{L}$  и параметры  $g_1, \dots, g_M$  ряда (1.1) по формулам

$$\sigma_{j,r}^{(s)} := \begin{cases} g_j + \frac{\alpha_j}{\alpha_s}(1 - g_s) + \frac{1}{\alpha_s}[\alpha_j r_1 - \omega_j^{(s)} r_2], & j \neq s, \\ 1 + \alpha_s^{-1}(1 - g_s + r_1 - \beta_s r_2), & j = s, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\omega_j^{(s)} := \alpha_j \beta_s - \alpha_s \beta_j, \tag{2.3}$$

где  $s \in I^-, j \in \overline{1, M}$ , а компоненты вектора  $\mathbf{r} := (r_1, r_2)$  – целые числа, принимающие значения в диапазоне  $r_j = \overline{0, |\alpha_s| - 1}, j = 1, 2$ .

Введем следующий ряд:

$$\mathcal{F}^{(M)}(\mathfrak{M}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{h}, \mathbf{r}; w_1, w_2) := \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \Xi(k_1, k_2) w_1^{k_1} w_2^{k_2}, \tag{2.4}$$

коэффициенты которого имеют вид

$$\Xi(k_1, k_2) := \frac{1}{(r_1 + \boldsymbol{\kappa} k_1)!(r_2 + \boldsymbol{\kappa} k_2)!} \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(h_j)}{\Gamma(h_j + \lambda_j k_1 + \omega_j k_2)}; \tag{2.5}$$

здесь  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  – комплексные переменные,

$$\mathbf{h} := (h_1, h_2, \dots, h_M) \in \mathbb{C}^M \tag{2.6}$$

есть комплексный векторный параметр,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2, \boldsymbol{\kappa} \geq 1$  – целочисленные параметры, а целые числа  $\lambda_j, \omega_j \in \mathbb{Z}$  образуют  $(2 \times M)$ -матрицу

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_M \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_M \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

причем

$$\sum_{j=1}^M \lambda_j + \boldsymbol{\kappa} = 0, \quad \sum_{j=1}^M \omega_j + \boldsymbol{\kappa} = 0.$$

Следующее утверждение, вытекающее из [28, теорема 2.3], позволяет аналитически продолжить ряд (1.1) по переменному  $z_1$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что параметры ряда (1.1) таковы, что ни одно из следующих чисел не является неположительным целым:*

$$(1 - \sigma_{j,r}^{(s)}) \notin \mathbb{Z}^-, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2), \quad r_k = \overline{0, |\alpha_s| - 1}, \quad k = 1, 2, \quad s, j \in I^-, \tag{2.8}$$

где  $\sigma_{j,r}^{(s)}$  определены в (2.2). Тогда для гипергеометрического ряда (1.1) справедлива следующая формула аналитического продолжения:

$$F^{(M)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = \sum_{s \in I^-} \sum_{n_1, n_2=0}^{|\alpha_s|-1} B_{s,r}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) \mathcal{U}_{s,r}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2); \tag{2.9}$$

здесь функции  $\mathcal{U}_{s,r}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2)$  имеют вид

$$\mathcal{U}_{s,r}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = ((\varepsilon_1 z_1)^{-1+g_s-n} (\varepsilon_{2,s} w_{2,s})^{n_2})^{-1/\alpha_s} \mathcal{F}^{(M)}(\mathfrak{M}^{(s)}, |\alpha_s|; \mathbf{h}_{s,r}, \mathbf{r}; w_1^{(s)}(z_1, z_2), w_2^{(s)}(z_1, z_2), \tag{2.10}$$

где новые переменные  $w_1^{(s)}, w_2^{(s)}$  связаны с  $z_1, z_2$  равенствами

$$w_1^{(s)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(s)}(z_1, z_2) = z_1^{\beta_s} z_2^{|\alpha_s|}, \tag{2.11}$$

функция  $\mathcal{F}^{(M)}$  представляет собой ряд Горна (1.1), (1.2), а  $\mathfrak{M}^{(s)} = \mathfrak{M}^{(s)}(\mathcal{L})$  – следующая целочисленная матрица:

$$\mathfrak{M}^{(s)} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{s-1} & -1 & -\alpha_{s+1} & \dots & -\alpha_M \\ \omega_1^{(s)} & \omega_2^{(s)} & \dots & \omega_{s-1}^{(s)} & \beta_s & \omega_{s+1}^{(s)} & \dots & \omega_M^{(s)} \end{pmatrix}; \tag{2.12}$$

здесь числа  $\omega_j^{(s)} = \alpha_j \beta_s - \alpha_s \beta_j$  определены в (2.3),  $\alpha_j, \beta_j$  – элементы (1.2) матрицы  $\mathcal{L}$ . Набор параметров в (2.10) имеет вид  $\mathbf{h}_{s,r} := (\sigma_{1,r}^{(s)}, \dots, \sigma_{M,r}^{(s)})$ , где  $\sigma_{j,r}^{(s)}$  заданы в (2.2); множители  $\varepsilon_1, \varepsilon_{2,s}$  определяются соотношениями

$$\varepsilon_1 := (-1)^{\theta_1}, \quad \theta_1 := 1 + \sum_{s \in I^-} |\alpha_s|, \quad \varepsilon_{2,s} := (-1)^{\theta_{2,s}}, \quad \theta_{2,s} := \beta_s + \sum_{j \in I^+ \setminus \{s\}} \omega_j^{(s)}. \tag{2.13}$$

Коэффициенты  $B_{s,r}$  в представлении (2.9) имеют вид

$$B_{s,r}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) = \frac{(-1)^{r_1}}{|\alpha_s|} \left( \prod_{j \in I^0 \cup I^+} \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(\sigma_{s,r}^{(j)})} \right) \prod_{j \in I^-} \frac{\Gamma(1 - \sigma_{j,r}^{(s)})}{\Gamma(1 - g_j)}, \tag{2.14}$$

где множества индексов  $I^0(\mathcal{L}), I^+(\mathcal{L}), I^-(\mathcal{L})$  определены в (2.1). Функции  $\mathcal{U}_{s,r}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2)$ , заданные равенствами (2.10), являются линейно независимыми решениями системы (1.9), (1.5), (1.6).

Если требуется построить формулу продолжения по переменному  $z_2$ , то для этого, очевидно, достаточно поменять местами первую и вторую строки матрицы  $\mathcal{L}$ , переобозначить  $\tilde{z}_1 = z_2, \tilde{z}_2 = z_1$ , а затем воспользоваться утверждением теоремы 1. Область сходимости представления (2.9) может быть найдена путем применения результатов [15, п. 5.7.2] к каждому из рядов (2.10) с последующим построением пересечения областей их сходимости. Вид таких областей будет продемонстрирован на примере рядов Горна  $H_3$  и  $H_4$  в разд. 3, 4.

В разд. 3, 4 для нахождения аналитического продолжения рядов (1.12), (1.13) с помощью теоремы 1 будем использовать также следующие обозначения для функций (2.10) и коэффициентов (2.14):  $\mathcal{U}_{s,(n_1,n_2)} = \mathcal{U}_{s,r}, B_{s,(n_1,n_2)} = B_{s,r}$ .

### 2.2. Формула аналитического продолжения функции Фокса–Райта и ее приложение к аналитическому продолжению ряда Горна

Мы не останавливаемся на подробном выводе формул аналитического продолжения, которые устанавливает теорема 1, поскольку она является следствием теоремы 2.3 работы [28], для которой в [28] представлено подробное доказательство. Опишем лишь в общих чертах ход рассуждений. Прежде всего отметим, что применяемый подход использует следующий гипергеометрический ряд одного переменного, введенный Ф. Фоксом (см. [31]) и Е.М. Райтом (см. [32]):

$${}_p\mathcal{F}_q(\mathbf{a}, \mathbf{m}; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, m_1 k) \cdots (a_p, m_p k)}{(b_1, n_1 k) \cdots (b_q, n_q k) k!} z^k, \quad |z| < \rho := \left( \prod_{j=1}^p m_j^{-m_j} \right) \prod_{s=1}^q n_s^{n_s}, \tag{2.15}$$

здесь,  $(\cdot, \cdot)$  – символ Похгаммера, т.е., например,  $(a_1, m_1 k) = (a_1)_{m_1 k} = \Gamma(a_1 + m_1 k) / \Gamma(a_1)$ ; напомним также соотношения (1.8). Функция (2.15) зависит от комплексного переменного  $z \in \mathbb{C}$ , от комплексных параметров  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{C}^q$ , а также от неотрицательных целочисленных параметров  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{Z}_+^q$ , удовлетворяющих условию  $m_1 + \dots + m_p - n_1 - \dots - n_q = 1$ . Нетрудно увидеть, что если  $q = p - 1$  и, кроме того, все числа  $m_j = 1, j = \overline{1, p}$ , и  $n_l = 1, l = \overline{1, q}$ , то  ${}_p \mathcal{F}_q$  совпадает с функцией Похгаммера  ${}_p F_q$  (см. [15, гл. 4]).

Используя тождество  $(a)_{m+n} = (a)_m (a+m)_n$ , можно переписать (1.1) в виде

$$F^{(M)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; \mathbf{z}) := \sum_{k_2=0}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^M \frac{1}{(g_j, \beta_j k_2)} \frac{z_2^{k_2}}{k_2!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j: \alpha_j \neq 0} \frac{1}{(g_j + \beta_j k_2, \alpha_j k_1)} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} \right]. \tag{2.16}$$

С помощью (1.7), (1.8) можно показать, что

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \left( \prod_{j: \alpha_j \neq 0} \frac{1}{(g_j + \beta_j k_2, \alpha_j k_1)} \right) \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} = {}_p \mathcal{F}_q(\{1 - g_j - k_2 \beta_j\}_{j \in I^-}, \{\alpha_j\}_{j \in I^-}; \{g_j + k_2 \beta_j\}_{j \in I^+}, \{\alpha_j\}_{j \in I^+}; (-1)^\varepsilon z_1), \tag{2.17}$$

где  $\varepsilon := \sum_{s \in I^-} |\alpha_s|$ , множества  $I^-$  и  $I^+$  определены в (2.1), а  ${}_p \mathcal{F}_q$  – это ряд (2.15), где  $p$  и  $q$  – соответственно число отрицательных и число положительных элементов первой строки  $(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$  матрицы  $\mathcal{L}$  из (1.2).

Далее, задача заключается в том, чтобы продолжить ряд  ${}_p \mathcal{F}_q$ , фигурирующий в (2.17). Следуя [28], введем гипергеометрическую функцию

$${}_p \Psi_q(\mathbf{a}, \mathbf{m}; n_0, r; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, m_1 k) \cdots (a_p, m_p k)}{(b_1, n_1 k) \cdots (b_q, n_q k) (n_0 k + r)!} z^k. \tag{2.18}$$

Кроме того, определим векторы

$$\mathbf{c}_{\alpha, r} := (1 - c_{\alpha, r}^{(1)}, \dots, 1 - c_{\alpha, r}^{(q)}, \frac{a_\alpha + r}{m_\alpha}), \quad c_{\alpha, r}^{(j)} := \frac{m_\alpha b_j - n_j a_\alpha - n_j r}{m_\alpha}, \quad j = \overline{1, q}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{d}_{\alpha, r} := (1 - d_{\alpha, r}^{(1)}, \dots, 1 - d_{\alpha, r}^{(\alpha-1)}, 1 - d_{\alpha, r}^{(\alpha+1)}, \dots, 1 - d_{\alpha, r}^{(p)}), \tag{2.20}$$

где числа  $d_{\alpha, r}^{(j)}$  имеют вид

$$d_{\alpha, r}^{(j)} := \frac{m_\alpha a_j - m_j a_\alpha - m_j r}{m_\alpha}, \quad j = \overline{1, q} \setminus \{\alpha\}, \tag{2.21}$$

причем  $\alpha = \overline{1, p}$ ,  $r = \overline{0, m_\alpha - 1}$ , кроме того, введем целочисленные векторы

$$\mathbf{n}' := (n_1, \dots, n_q, 1), \quad \mathbf{m}'_\alpha := (m_1, \dots, m_{\alpha-1}, m_{\alpha+1}, \dots, m_p). \tag{2.22}$$

Следующее утверждение, доказанное в [28], устанавливает формулу аналитического продолжения функции  ${}_p \mathcal{F}_q$ , определенной рядом (2.15) в круге  $\{|z| < \rho\}$ .

**Теорема 2.** Если параметры функции  ${}_p \mathcal{F}_q(\mathbf{a}, \mathbf{m}; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z)$  таковы, что ни одно из чисел  $d_{\alpha, r}^{(j)}$ , заданных равенствами (36), не является неположительным целым, т.е.

$$d_{\alpha, r}^{(j)} \notin \mathbb{Z}^-, \quad \alpha, j = \overline{1, p}, \quad r = \overline{0, m_\alpha - 1},$$

то аналитическое продолжение функции  ${}_p \mathcal{F}_q$ , определенной с помощью ряда (30) в область

$$\mathbb{D}_\rho := \{z : |z| > \rho, \arg(-z) < \pi\}, \quad \rho = \left( \prod_{j=1}^p m_j^{-m_j} \right) \prod_{s=1}^q n_s^{n_s},$$

дается формулой

$${}_p\mathcal{F}_q(\mathbf{a}, \mathbf{m}; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{r=0}^{m_\alpha-1} A_{\alpha,r} u_{\alpha,r}(\mathbf{a}, \mathbf{m}; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z), \tag{2.23}$$

где функции  $u_{\alpha,r}$  имеют вид

$$u_{\alpha,r}(\mathbf{a}, \mathbf{m}; \mathbf{b}, \mathbf{n}; z) = (-z)^{-(a_\alpha+r)/m_\alpha} \Psi_p(\mathbf{c}_{r,\alpha}, \mathbf{n}'; m_\alpha, r; \mathbf{d}_{r,\alpha}, \mathbf{m}'_\alpha; 1/z), \tag{2.24}$$

а коэффициенты  $A_{\alpha,r}$  – следующий вид:

$$A_{\alpha,r} = (-1)^r \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j) \prod_{j=1, j \neq \alpha}^p \Gamma(d_{\alpha,r}^{(j)})}{m_\alpha \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j) \prod_{j=1}^q \Gamma(c_{\alpha,r}^{(j)})} \Gamma\left(\frac{a_\alpha + r}{m_\alpha}\right), \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad r = \overline{0, m_\alpha - 1}. \tag{2.25}$$

Функции  $u_{\alpha,r}$  из (2.24) определены с помощью рядов (2.18); в формулах (2.24) и (2.25) фигурируют векторы  $\mathbf{c}_{\alpha,r}$ ,  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{d}_{\alpha,r}$  и  $\mathbf{m}'_\alpha$ , а также числа  $c_{\alpha,r}^{(j)}$  и  $d_{\alpha,r}^{(j)}$ , заданные равенствами (2.19)–(2.21).

Выполняя аналитическое продолжение функции  ${}_p\mathcal{F}_q$ , фигурирующей в (2.17), по формулам (2.23)–(2.25) и подставляя результат в (2.16), после некоторых вспомогательных преобразований приходим к формулам (2.9)–(2.14), которые устанавливает теорема 1 для функции (1.1). Завершающее теорему 1 утверждение о том, что функции  $\mathcal{U}_{s,r}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2)$ , заданные равенствами (2.10), являются линейно независимыми решениями системы (1.9), (1.5), (1.6), устанавливается непосредственной проверкой.

### 2.3. Аналитическое продолжение по двум переменным $z_1$ и $z_2$

Формулы продолжения по двум переменным  $z_1$  и  $z_2$  могут быть получены путем последовательного применения теоремы 1 к ряду (1.1), а также рядам Горна двух переменных, получающихся после такого применения. Обратим внимание на то, что в результате аналитического продолжения по формуле (2.9) возникают ряды (2.4), (2.5), принадлежащие классу Горна, но отличающиеся от исходного ряда (1.1), для которого сформулировано утверждение теоремы 1. Поэтому, если необходимо повторное применение теоремы 1, то, вообще говоря, вначале следует привести ряды (2.4), (2.5) к виду (1.1). Для этого воспользуемся соотношением

$$(r + \varkappa k)! = (2\pi)^{(1-\varkappa)/2} \varkappa^{\varkappa k+r+1/2} k! \prod_{s=0, s \neq \varkappa-r-1}^{\varkappa-1} \Gamma\left(\frac{1+r+s}{\varkappa} + k\right), \tag{2.26}$$

которое вытекает из равенства  $(\varkappa k + r)! = \Gamma(\varkappa k + r + 1)$  и тождества Гаусса–Лежандра для гамма-функции (см. [15, п. 2.1]). Используя равенство (2.26), преобразуем коэффициент (2.5) к виду

$$\Xi(k_1, k_2) = \frac{(2\pi)^{\varkappa-1} \varkappa^{\varkappa(k_1+k_2)-\eta_1-\eta_2-1}}{\prod_{s=0}^{\varkappa-1} [\Gamma(\delta_{\eta_1,s}) \Gamma(\delta_{\eta_2,s})] k_1! k_2!} \left[ \prod_{s=0, s \neq \varkappa-\eta_1-1}^{\varkappa-1} \frac{\Gamma(\delta_{\eta_1,s})}{\Gamma(\delta_{\eta_1,s} + k_1)} \right] \times \left[ \prod_{s=0, s \neq \varkappa-\eta_2-1}^{\varkappa-1} \frac{\Gamma(\delta_{\eta_2,s})}{\Gamma(\delta_{\eta_2,s} + k_2)} \right] \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(h_j)}{\Gamma(h_j + \lambda_j k_1 + \omega_j k_2)}, \tag{2.27}$$

где  $\delta_{r,s} := (1+r+s)/\varkappa$ . Подставляя (2.27) в (2.5), получаем следующее выражение ряда  $\mathcal{F}^{(M)}$  через исходный ряд Горна (1.1):

$$\mathcal{F}^{(M)}(\mathcal{M}, \varkappa; \mathbf{h}, \mathbf{r}; \mathbf{w}) = \mathcal{H}(\varkappa, \mathbf{r}) F^{(M+2\varkappa-2)}(\mathcal{N}; \mathbf{h}'; \varkappa^{-\varkappa} w_1, \varkappa^{-\varkappa} w_2), \tag{2.28}$$

где  $2 \times (M + 2\varkappa - 2)$ -матрица  $\mathcal{N}$ , вектор параметров  $\mathbf{h}'$  длины  $M + 2\varkappa - 2$  и множитель  $\mathcal{H}$  определяются по формулам

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_M \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_M \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

$$h' = (\delta_{r_1,0}, \dots, \delta_{r_1, \kappa-r_1-2}, \delta_{r_1, \kappa-r_1}, \dots, \delta_{r_1, \kappa-1}, \delta_{r_2,0}, \dots, \delta_{r_2, \kappa-r_2-2}, \delta_{r_2, \kappa-r_2}, \dots, \delta_{r_2, \kappa-1}, h_1, \dots, h_M), \tag{2.30}$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) = (2\pi)^{(\boldsymbol{\kappa}-1)} \boldsymbol{\kappa}^{-\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{r}_2)-1} \prod_{s=0}^{\boldsymbol{\kappa}-1} [\Gamma(\delta_{r_1,s})\Gamma(\delta_{r_2,s})]^{-1}, \quad \delta_{r_j,s} = \frac{1+r_j+s}{\boldsymbol{\kappa}}, \quad j = 1, 2. \tag{2.31}$$

Таким образом, применение соотношений (2.28)–(2.31) к функциям (2.10) дает формулы продолжения рядов (1.1) в терминах рядов того же вида.

В следующих разд. 3 и 4 продемонстрировано применение теоремы 1 для аналитического продолжения гипергеометрических рядов (1.12), (1.13), входящих в список Горна (см. [1], [15], [16]).

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА ГОРНА $H_3$

#### 3.1. Аналитическое продолжение ряда $H_3$ в область больших по модулю значений переменного $z_1$

Используя второе равенство (1.7) для символа Похгаммера, перепишем (1.12) в следующем виде:

$$H_3(a, b, c; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-2k_1-k_2)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-k_2)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k_1+k_2)} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{k_1! k_2!}. \tag{3.1}$$

Сравнивая (1.1) и (3.1), находим

$$H_3(a, b, c; z_1, z_2) = F^{(3)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \prod_{j=1}^3 \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \alpha_j k_1 + \beta_j k_2)} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{k_1! k_2!}, \tag{3.2}$$

где  $(2 \times 3)$  матрица  $\mathcal{L}$  и вектор параметров  $\mathbf{g}$  имеют вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) = (1-a, 1-b, c). \tag{3.4}$$

Согласно формуле (2.1), находим подмножества индексов элементов первой строки матрицы (3.3):

$$I^0(\mathcal{L}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{2\}, \quad I^-(\mathcal{L}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathcal{L}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{3\}. \tag{3.5}$$

Поскольку множество  $I^-$  в (3.5) состоит из одного элемента  $s = 1$ , а соответствующий элемент матрицы  $\mathcal{L}$  равен  $\alpha_1 = -2$ , то в формуле продолжения (2.9) для функции  $H_3$  индекс  $s$  принимает лишь одно значение  $s = 1$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  может быть равным 0 или  $|\alpha_1| - 1 = 1$ . Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду  $H_3$ , заданному соотношениями (3.2)–(3.4), будут фигурировать четыре слагаемых вида  $B_{1,(r_1,r_2)} \mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ .

Перейдем к нахождению  $B_{1,(r_1,r_2)}$  и  $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ . Прежде всего, подставляя (3.3), (3.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -2, \quad \omega_3^{(1)} = 1, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 - \frac{a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c - \frac{a}{2}, \tag{3.7}$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = c - \frac{a+1}{2}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = c + \frac{1-a}{2}, \tag{3.9}$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = \frac{-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = c - \frac{a}{2}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.4), (3.5) и (3.7)–(3.10) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} B_{1,(0,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}, & B_{1,(1,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}, \\ B_{1,(0,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= -\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c + \frac{1-a}{2}\right)\Gamma(a)}, & B_{1,(1,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Учитывая (3.3), (3.6), находим матрицу  $\mathfrak{M}^{(1)}$  по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем выражения для новых переменных через  $z_1$  и  $z_2$ :

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{z_1}. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.7)–(3.10), (3.12), (3.13) в (2.10), находим следующие представления для функций  $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ ,  $r_1, r_2 = 0, 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - k_1 + k_2\right)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2} - k_1 + k_2\right)} \frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(c + \frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(c + \frac{1-a}{2} - k_1 + k_2\right)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$



$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) &= (-z_1)^{-\frac{a+2}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b - 2k_2)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - k_1 + k_2\right)} \frac{1}{(2k_1 + 1)!(2k_2 + 1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Преобразуя коэффициенты рядов (3.14)–(3.17) с помощью равенств (1.7) для символа Похгаммера, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** *Аналитическое продолжение ряда Горна  $H_3$ , определенного в области (1.14) равенством (1.12), в область*

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| > \frac{1}{4}, |z_2|(1 + |z_2|) < |z_1|, |\arg(-z_1)| < \pi\} \tag{3.18}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} H_3(a, b, c; z_1, z_2) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) - \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) - \\ &- \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c + \frac{1-a}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) + \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(r_1, r_2)}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2)!} \frac{(b)_{2k_2} \left(1 - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1 + 1)!(2k_2)!} \frac{(b)_{2k_2} \left(\frac{3}{2} - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2 + 1)!} \frac{(1+b)_{2k_2} \left(\frac{1+a}{2} - c\right)_{k_1-k_2}}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{3.22}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+2}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1 + 1)!(2k_2 + 1)!} \frac{(1+b)_{2k_2} \left(1 - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}. \tag{3.23}$$

Ряды (3.20)–(3.23) в области (3.18) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{D}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \left(a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \left(a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + 1\right), & \mathcal{D}_1 &= \left(c + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \left(1 + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right), \\ \mathcal{P}_2 &= \left(a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \left(b + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right), & \mathcal{D}_2 &= \left(c + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \left(1 + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Вид области сходимости (3.18) устанавливается с помощью метода, изложенного в [15, п. 5.7.2]. Остальные утверждения теоремы 3 являются следствием теоремы 1.

Теорема 3 дает представление для ряда Горна  $H_3$  в области (3.18), где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения. Однако в этой области модуль переменного  $|z_2|$

меньше, чем  $|z_1|$ . Для того чтобы снять такое ограничение, в следующем п. 3.2 теорема 1 применена для продолжения по переменному  $z_2$ .

3.2. Аналитическое продолжение ряда  $H_3$  в область больших по модулю значений переменного  $z_2$

Для того чтобы продолжить ряд (3.2) по переменному  $z_2$ , перепишем его в виде

$$H_3(a, b, c; z_1, z_2) = F^{(3)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_2, z_1) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \prod_{j=1}^3 \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \beta_j k_1 + \alpha_j k_2)} \frac{z_2^{k_1} z_1^{k_2}}{k_1! k_2!}, \tag{3.25}$$

где вектор параметров  $\mathbf{g}$  дается формулой (3.4), а матрица  $\mathcal{L}'$  получена из  $\mathcal{L}$  перестановкой строк:

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$I^0(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s = 0\} = \emptyset, \quad I^-(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1, 2\}, \quad I^+(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s > 0\} = \{3\}. \tag{3.27}$$

Заметим, что множество  $I^-$  в (3.27) состоит из двух элементов  $s = 1$  и  $s = 2$ , а соответствующие им элементы первой строки матрицы (3.26) равны  $\alpha_1 = -1$  и  $\alpha_2 = -1$ . Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс  $s$  принимает два значения  $s = 1$  и  $s = 2$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  — только одно значение 0, поскольку  $|\alpha_s| - 1 = 0$ ,  $s = 1, 2$ . Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду (3.25), (3.26), будут фигурировать два слагаемых вида  $B_{s,(0,0)} \mathcal{U}_{s,(0,0)}$ .

Перейдем к нахождению  $B_{s,(0,0)}$  и  $\mathcal{U}_{s,(0,0)}$ . Прежде всего, подставляя (3.4), (3.26) в (2.2), (2.3), находим  $\omega_2^{(1)} = 2$ ,  $\omega_3^{(1)} = -1$ ,  $\omega_1^{(2)} = -2$ ,  $\omega_3^{(2)} = 1$ ,

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 - a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1 + a - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c - a, \tag{3.28}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(2)} = 1 - a + b, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(2)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(2)} = c - b. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.4), (3.27) и (3.28), (3.29) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$B_{1,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}, \quad B_{2,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}. \tag{3.30}$$

Учитывая (4.26), (4.29), (4.30), находим матрицы  $\mathfrak{M}^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ , по формуле (2.12) в виде

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Согласно (2.13), имеют место равенства  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_{2,1} = 1$ ,  $\varepsilon_{2,2} = 1$ . Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}; \quad w_1^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(2)}(z_1, z_2) = z_1. \tag{3.32}$$

Поставляя (3.28)–(3.32) в (2.9), (2.10), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 4.** Если параметры ряда Горна  $H_3$ , определенного в области (1.14) равенством (1.12), таковы, что разность  $a - b$  не является целым числом, то аналитическое продолжение  $H_3$  в область

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1}{4}, |z_2| > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + |z_1|\right)^{1/2}, |\arg(-z_2)| < \pi \right\} \tag{3.33}$$

дается формулой

$$H_3(a, b, c; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2), \tag{3.34}$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(0,0)}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (1+a-c)_{k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2} k_1! k_2!} \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a-b)_{2k_1-k_2} (b)_{k_2}}{(c-b)_{k_1-k_2} k_1! k_2!} z_1^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}. \quad (3.36)$$

Ряды (3.35), (3.36) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{Q}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , даются равенствами (3.24) в области (3.33).

Для того чтобы продолжить ряд Горна в область, где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения, в следующем п. 3.3 дано применение теоремы 1 к функции (3.36).

### 3.3. Аналитическое продолжение ряда $H_3$ в область больших по модулю переменных $z_1, z_2$

Для того чтобы продолжить ряд (3.36) по переменному  $z_1$ , заметим, что

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-b} F^{(3)}\left(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, \frac{1}{z_2}\right), \quad (3.37)$$

где матрица  $\mathfrak{H}$  и вектор параметров  $\mathbf{f}$  имеют вид

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = (1+b-a, c-b, 1-b). \quad (3.38)$$

Согласно формуле (2.21), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3\}, \quad I^-(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{2\}. \quad (3.39)$$

Заметим, что множество  $I^-$  в (3.39) состоит из одного элемента  $s = 1$ , а соответствующий элемент первой строки матрицы  $\mathfrak{H}$ , заданной первым равенством (3.38), равен  $\alpha_1 = -2$ . Поэтому в формуле продолжения (2.29) для функции (3.37) индекс  $s$  принимает лишь одно значение  $s = 1$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  — два значения 0 и  $|\alpha_1| - 1 = 1$ . Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду (3.37), будут фигурировать четыре слагаемых вида  $B_{1,(r_1,r_2)} \mathcal{U}_{s,(r_1,r_2)}$ ,  $r_1, r_2 = 0, 1$ . Перейдем к их нахождению.

Прежде всего, подставляя (3.38), (3.39) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -1, \quad \omega_3^{(1)} = -2, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = c - \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad (3.41)$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = c - \frac{a+b+1}{2}, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad (3.42)$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{3+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = c - \frac{a+b+1}{2}, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = c - \frac{a+b}{2} - 1, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = -b. \quad (3.44)$$

Подставляя (3.38), (3.39) и (3.41)–(3.44) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned}
 B_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) &= \frac{\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\Gamma(a-b)}, & B_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) &= -\frac{\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \\
 B_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) &= -\frac{b\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, & B_{1,(1,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) &= \frac{b\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}-1\right)\Gamma(a-b)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

Учитывая (3.38), (3.40), находим матрицу  $\mathfrak{M}^{(1)}$  по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.
 \tag{3.46}$$

Согласно (2.13), имеют место равенства  $\epsilon_1 = -1, \epsilon_{1,1} = -1$ . Выполняя вычисления по формулам (2.11), находим

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}.
 \tag{3.47}$$

Подставив (3.46), (3.47) в (2.9), (2.10), находим формулу продолжения функции  $\mathcal{U}_{2,(0,0)}$  из (3.36), согласно теореме 1. Подставляя эту формулу в (3.36) и используя теорему 4, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 5.** Если параметры ряда Горна  $H_3$ , определенного в области (1.14) равенством (1.12), таковы, что разность  $a - b$  не является целым числом, то аналитическое продолжение  $H_3$  в область

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| > \frac{1}{4}, |z_2| > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + |z_1|\right)^{1/2}, |\arg(-z_j)| < \pi, j = 1, 2 \right\}
 \tag{3.48}$$

дается формулой

$$\begin{aligned}
 H_3(a, b, c; z_1, z_2) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2) + \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) - \\
 &- \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) + \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) - \\
 &- \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}-1\right)} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(0,0)}, \mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}', \mathbf{g}, z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (1+a-c)_{k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2} k_1! k_2!} \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}},
 \tag{3.50}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}} (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2} \left(\frac{a-b}{2}\right)_{k_1-k_2} \left(1-c+\frac{a+b}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2},
 \tag{3.51}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a-1}{2}} (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2} \left(\frac{1-b+a}{2}\right)_{k_1-k_2} \left(\frac{a+b+3-c}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2},
 \tag{3.52}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a+1}{2}} (-z_2)^{-b-1} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2} \left(\frac{a-b-1}{2}\right)_{k_1-k_2} \left(\frac{a+b+3-c}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}, \quad (3.53)$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}, z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}} (-z_2)^{-b-1} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2} \left(\frac{a-b}{2}\right)_{k_1-k_2} \left(2 + \frac{a+b-c}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}. \quad (3.54)$$

Ряды (3.50)–(3.54) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{D}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , даются равенствами (3.24), в области (3.48).

Теоремы 3, 5 дополняют друг друга и дают представление для ряда Горна  $H_3$  в областях (3.18), (3.48), где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА ГОРНА $H_4$

##### 4.1. Аналитическое продолжение ряда $H_4$ в область больших по модулю значений переменного $z_1$

Используя тождество (1.8) для символа Похгаммера, перепишем (1.13) в следующем виде:

$$H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-2k_1-k_2)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-k_2)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k_1)} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+k_2)} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{k_1! k_2!}. \quad (4.1)$$

Сравнивая (1.1) и (4.1), находим

$$H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = F^{(4)}(\mathfrak{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \prod_{j=1}^4 \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \alpha_j k_1 + \beta_j k_2)} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{k_1! k_2!}, \quad (4.2)$$

где  $(2 \times 4)$ -матрица  $\mathfrak{L}$  и вектор параметров  $\mathbf{g}$  имеют вид

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (1-a, 1-b, c, d). \quad (4.4)$$

Согласно формуле (2.1), находим подмножества индексов элементов первой строки матрицы (4.3):

$$I^0(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{2, 4\}, \quad I^-(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{3\}. \quad (4.5)$$

Поскольку множество  $I^-$  в (4.5) состоит из одного элемента  $s = 1$ , а соответствующий элемент матрицы  $\mathfrak{L}$  равен  $\alpha_1 = -2$ , то в формуле продолжения (2.9) для функции  $H_4$  индекс  $s$  принимает лишь одно значение  $s = 1$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  может быть равным 0 или  $|\alpha_1| - 1 = 1$ . Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду  $H_4$ , заданному соотношениями (4.2)–(4.4), будут фигурировать четыре слагаемых вида  $B_{1,(r_1,r_2)} \mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ .

Перейдем к нахождению  $B_{1,(r_1,r_2)}$  и  $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ . Прежде всего, подставляя (4.3), (4.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -2, \quad \omega_3^{(1)} = -1, \quad \omega_4^{(1)} = 2, \quad (4.6)$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 - \frac{a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c - \frac{a}{2}, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = c - \frac{a+1}{2}, \quad \sigma_{4,(1,0)}^{(1)} = d, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = c - \frac{a+1}{2}, \quad \sigma_{4,(0,1)}^{(1)} = d + 1, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = \frac{-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = c - \frac{a}{2} - 1, \quad \sigma_{4,(1,1)}^{(1)} = d + 1. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.4), (4.5) и (4.7)–(4.10) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned}
 B_{1,(0,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}, & B_{1,(1,0)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}, \\
 B_{1,(0,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= -\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}, & B_{1,(1,1)}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) &= \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - 1\right)\Gamma(a)}.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Учитывая (4.3), (4.6), находим матрицу  $\mathfrak{M}^{(1)}$  по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
 \tag{4.12}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем выражения переменных

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{z_1}.
 \tag{4.13}$$

Подставляя (4.7)–(4.10), (4.12), (4.13) в (2.10), находим следующие представления для функций  $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ ,  $r_1, r_2 = 0, 1$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\
 &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+2k_2)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\
 &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+2k_2)} \frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)} \times \\
 &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{1+a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1+d)}{\Gamma(1+d+2k_2)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{a+2}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{2} - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)} \times \\
 &\times \frac{\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - 1 - k_1 - k_2\right)} \frac{\Gamma(1+d)}{\Gamma(1+d+2k_2)} \frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Преобразуя коэффициенты рядов (4.14)–(4.17) с помощью тождества (1.8) для символа Похгаммера, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 6.** Аналитическое продолжение ряда Горна  $H_4$ , определенного в области (1.15) равенством (1.13), в область

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 1 + \frac{|z_2|}{2} < |z_1|^{1/2}, |\arg(-z_1)| < \pi \right\}, \quad (4.18)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) - \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) - \\ &- \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) + \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c - \frac{a}{2} - 1\right)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(r_1, r_2)}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2} (b)_{2k_2} \left(1 - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(d)_{2k_2} (2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2} (b)_{2k_2} \left(\frac{3}{2} - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(d)_{2k_2} (2k_1 + 1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2} (1+b)_{2k_2} \left(\frac{3+a}{2} - c\right)_{k_1+k_2}}{(1+d)_{2k_2} (2k_1)!(2k_2 + 1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+2}{2}} z_2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2} (1+b)_{k_2} \left(2 - c + \frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(1+d)_{2k_2} (2k_1 + 1)!(2k_2 + 1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{k_2}. \quad (4.23)$$

Ряды (4.19)–(4.23) в области (4.18) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{D}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \left( a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \left( a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + 1 \right), \quad \mathcal{D}_1 = \left( c + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \left( 1 + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right), \\ \mathcal{P}_2 &= \left( a + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \left( b + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right), \quad \mathcal{D}_2 = \left( d + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \left( 1 + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Теорема 6 дает представление для ряда Горна  $H_4$  в области (4.18), где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения. Однако в этой области модуль переменного  $|z_2|$  меньше, чем  $|z_1|$ . Для того чтобы снять такое ограничение, в следующем п. 4.2 теорема 1 применена для продолжения  $H_4$  по переменному  $z_2$ , а затем – по переменному  $z_1$ .

#### 4.2. Аналитическое продолжение ряда $H_4$ в область больших по модулю значений переменного $z_2$

Для того чтобы продолжить ряд (4.2) по переменному  $z_2$ , перепишем его в виде

$$H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = F^{(4)}(\mathcal{L}; \mathbf{g}; z_2, z_1) \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \prod_{j=1}^4 \frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j + \beta_j k_1 + \alpha_j k_2)} \frac{z_2^{k_1} z_1^{k_2}}{k_1! k_2!}, \quad (4.25)$$

где вектор параметров  $\mathbf{g}$  дается формулой (4.4), а матрица  $\mathcal{L}'$  получена из  $\mathcal{L}$  перестановкой строк:

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$\Gamma^0(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3\}, \quad \Gamma^-(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1, 2\}, \quad \Gamma^+(\mathcal{L}') := \{s : \alpha_s > 0\} = \{4\}. \tag{4.27}$$

Заметим, что множество  $\Gamma^-$  в (4.27) состоит из двух элементов  $s = 1$  и  $s = 2$ , а соответствующие им элементы первой строки матрицы  $\mathcal{L}$  равны  $\alpha_1 = -1$  и  $\alpha_2 = -1$ . Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс  $s$  принимает два значения  $s = 1$  и  $s = 2$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  принимают только нулевое значение, поскольку  $|\alpha_s| - 1 = 0$ ,  $s = 1, 2$ . Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду  $H_4$ , заданному равенствами (4.25), (4.26), будут фигурировать два слагаемых вида  $B_{s,(0,0)} \mathcal{U}_{s,(0,0)}$ .

Перейдем к нахождению этих величин. Прежде всего, подставляя (4.26), (4.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = 2, \quad \omega_3^{(1)} = 1, \quad \omega_4^{(1)} = -2, \tag{4.28}$$

$$\omega_1^{(2)} = -2, \quad \omega_3^{(2)} = 1, \quad \omega_4^{(2)} = 0, \tag{4.29}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 - a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1 - b + a, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d - a, \tag{4.30}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(2)} = 1 + b - a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(2)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(2)} = c, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(2)} = d - b. \tag{4.31}$$

Подставляя (4.4), (4.27) и (4.30), (4.31) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$B_{1,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)}, \quad B_{2,(0,0)}(\mathcal{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(a-b)}{\Gamma(d-b)\Gamma(a)}. \tag{4.32}$$

Учитывая (4.26), (4.29), (4.30), находим вид матриц  $\mathfrak{M}^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ , по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}; \quad w_1^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(2)}(z_1, z_2) = z_1. \tag{4.34}$$

Поставляя (4.27)–(4.34) в (2.8), (2.9), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 7.** Если параметры ряда Горна  $H_4$ , определенного в области (1.15) равенством (1.13), таковы, что разность  $a - b$  не является целым числом, то аналитическое продолжение  $H_4$  в область

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1}{4}, |z_2| > 1 + 2|z_1|^{1/2}, |\arg(-z_2)| < \pi \right\} \tag{4.35}$$

дается формулой

$$H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) + \frac{\Gamma(d)\Gamma(a-b)}{\Gamma(d-b)\Gamma(a)} \mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2), \tag{4.36}$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(0,0)}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (1+a-d)_{2k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2} (c)_{k_1} k_1! k_2!} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{4.37}$$

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2} (1+b-d)_{k_2}}{(1+b-a)_{k_2-2k_1} (c)_{k_1} k_1! k_2!} z_1^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}. \tag{4.38}$$



Ряды (4.37), (4.38) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{Q}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , даются равенствами (4.24) в области (4.35).

Для того чтобы продолжить ряд Горна  $H_4$  в область, где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения, в следующем п. 4.3 теорема 1 применена к функции (4.38).

4.3. Аналитическое продолжение ряда  $H_4$  по двум переменным  $z_1, z_2$

Для нахождения формул продолжение ряда (4.38) по переменному  $z_1$  заметим, что

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-b} F^{(4)}\left(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, \frac{1}{z_2}\right), \tag{4.39}$$

где матрица  $\mathfrak{H}$  и вектор параметров  $\mathbf{f}$  имеют вид

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = (1 + b - a, c, 1 - b, d - b). \tag{4.40}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3, 4\}, \quad I^-(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{2\}. \tag{4.41}$$

Заметим, что множество  $I^-$  в (4.41) состоит из одного элемента  $s = 1$ , а соответствующий элемент матрицы  $\mathcal{L}$  равен  $\alpha_1 = -2$ . Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс  $s$  принимает лишь одно значение  $s = 1$ , а каждый из двух индексов  $r_1$  и  $r_2$  принимает значение 0 и  $|\alpha_{r_1}| - 1 = 1$ . Таким образом, в формуле (2.9) будут фигурировать четыре слагаемых вида  $B_{s,(r_1,r_2)} \mathcal{U}_{s,(r_1,r_2)}$ . Перейдем к нахождению этих величин.

Прежде всего, подставляя (4.40), (4.41) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = 1, \quad \omega_3^{(1)} = -2, \quad \omega_4^{(1)} = -2, \tag{4.42}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = c + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d - b, \tag{4.43}$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = c + \frac{b-a-1}{2}, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = 1 - b, \quad \sigma_{4,(1,0)}^{(1)} = d - b, \tag{4.44}$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{3+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = c + \frac{b-a+1}{2}, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{4,(0,1)}^{(1)} = d - b - 1, \tag{4.45}$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = c + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{4,(1,1)}^{(1)} = d - b - 1. \tag{4.46}$$

Подставляя (4.40), (4.41) и (4.43)–(4.46) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$B_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) = -\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c + \frac{b-a-1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \tag{4.47}$$

$$B_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) = \frac{b(1+b-d)\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c + \frac{b-a+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,1)}(\mathfrak{H}, \mathbf{f}) = \frac{b(d-b-1)\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a-b)}.$$

Учитывая (4.40), (4.42), находим матрицу  $\mathfrak{M}^{(1)}$  по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), находим

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2^2}. \tag{4.49}$$

Подставив (4.48), (4.49) в (2.10), находим формулу продолжения функции  $\mathcal{U}_{2,(0,0)}$  из (4.36), согласно теореме 1. Подставляя эту формулу в (4.36) и используя теорему 7, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 8.** Если параметры ряда Горна  $H_4$ , определенного в области (1.15) равенством (1.13), таковы, что ни одно из чисел  $a - b, c + (b - a \pm 1)/2$  не является целым, то аналитическое продолжение  $H_4$  в область

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| > \frac{1}{4}, |z_2| > 1 + 2|z_1|^{1/2}, |\arg(-z_j)| < \pi, j = 1, 2 \right\} \tag{4.50}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) - \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a-1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) + \\ &+ \frac{b(d-b-1)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a+1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) + \\ &+ \frac{b(1+b-d)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2), \end{aligned} \tag{4.51}$$

где функции  $\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2)$ ,  $\mathcal{U}_{1,(r_1, r_2)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2)$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2} (1+a-d)_{2k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2} (c)_{k_1} k_1! k_2!} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{4.52}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}} (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2} (1+b-d)_{2k_2}}{\left(1 + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1)! (2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}, \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{b-a-1}{2}} (-z_2)^{-b} \times \\ &\times \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2} (1+b-d)_{2k_2}}{\left(1 + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a-1}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1+1)! (2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathcal{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) &= (-z_1)^{\frac{b-a+1}{2}} (-z_2)^{-b-1} \times \\ &\times \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2} (2+b-d)_{2k_2}}{\left(\frac{3+b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a+1}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1)! (2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{F}; \mathbf{f}; z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}} (-z_2)^{-b-1} \times \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2} (2+b-d)_{2k_2}}{\left(1 + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1+1)! (2k_2+1)! z_1^{k_1} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{k_2}} \cdot \quad (4.56)$$

Ряды (4.52)–(4.56) являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), где дифференциальные операторы  $\mathcal{Q}_j$  и  $\mathcal{P}_j$ ,  $j = 1, 2$ , даются равенствами (4.24) в области (4.50).

Теоремы 6, 8 дополняют друг друга и дают представление для ряда Горна  $H_4$  в областях (4.18), (4.50), где обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут принимать большие по модулю значения.

Представления функций  $H_3$  и  $H_4$ , найденные в теоремах 3–8, демонстрируют, что теорема 1 является основой эффективного метода построения формул аналитического продолжения общих рядов Горна (1.1). Полученные в результате применения теоремы 1 формулы дают эффективный алгоритм для вычисления функций Горна вне области сходимости степенного ряда (1.1), которым исходно определяются такие функции. Таким образом, результаты настоящей работы могут быть востребованы в задачах математической физики, при решении которых возникают ряды вида (1.1) или системы уравнений с частными производными (1.9).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. New York: John Willey & Sons, Inc, 1976.
2. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Aspects of Mathematics. V. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
3. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Ремах В.С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 3–82.
4. *Akerblom N., Flohr M.* Explicit formulas for the scalar modes in Seiberg–Witten theory with an application to the Argyres–Douglas point // J. High Energy Phys. 2005. V. 2. № 057. P. 24.
5. *Holzappel R.-P., Uludag A.M., Yoshida M.* Arithmetic and geometry around hypergeometric functions. Progr. Math. V. 260. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.
6. *Тарасов О.В.* Применение функциональных уравнений для вычисления фейнмановских интегралов // Теор. и матем. физ. 2019. Т. 200. № 2. С. 324–342.
7. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.
8. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Application of hypergeometric functions of two variables in wireless communication theory // Lobachevskii J. of Math. 2019. V. 40. № 7. P. 938–953.
9. *Berge J., Massey R., Baghi Q., Touboul P.* Exponential shapelets: basis functions for data analysis of isolated feature // Month. Notices Royal Astron. Soc. 2019. 486(1). P. 544–559.
10. *Безродных С.И., Власов В.И.* Асимптотика задачи Римана–Гильберта для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1898–1914.
11. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2098–2121.
12. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: *Blümlein J., Schneider C.* (eds) Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria). Springer, Cham, 2021.
13. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert problem for the Somov model of magnetic reconnection of long shock waves // Math. Notes. 2021. V. 110. Iss. P. 853–871.
14. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1873–1893.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
16. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian hypergeometric series. Chichester: Ellis Horwood, 1985.
17. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergéométriques et hypersphérique. Paris: Gauthier–Villars, 1926.
18. *Horn J.* Über die konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen. Math. Ann. 1889. V. 34. P. 544–600.

19. *Садьков Т.М., Цих А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
20. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
21. *Olsson O.M.* Integration of the partial differential equations for the hypergeometric function  $F_1$  and  $F_D$  of two and more variables // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5. № 420. P. 420–430.
22. *Srivastava H.M.* A note on certain hypergeometric differential equations // *Math. Vesnik.* 1972. V. 9. № 24. P. 101–107.
23. *Sud A.R., Sud K.K.* Analytic continuation of the Lauricella function // *J. Math. Phys.* 1978. V. 19. № 12.
24. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
25. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Lauricella function  $F_D^{(N)}$  with arbitrary number of variables // *Integral Transforms and Special Functions.* 2018. V. 29. № 1. P. 21–42.
26. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function  $F_D^{(N)}$  for large in modulo variables near hyperplanes  $\{z_j = z_j\}$  // *Integral Transforms and Special Functions.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1929206>
27. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function  $F_D^{(N)}$  for variables close to unit near hyperplanes  $\{z_j = z_j\}$  // *Integral Transforms and Special Functions.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1939329>
28. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // *Integral Transforms and Spec Functions.* 2020. V. 31. № 10. P. 788–803.
29. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions  $H_5(a, b, c; w, z)$  and  $H_5^c(a; c; w, z)$  // *Integral Transforms and Special Functions.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1938026>
30. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions  $H_6(a, b, b', w, z)$  and  $H_8^{(c)}(a, b; w, z)$  // *Integral Transforms and Special Functions.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.2017427>
31. *Fox F.* The asymptotic expansion of hypergeometric functions // *Proc. London Math. Soc.* 1928. V. 27. № 2. P. 389–400.
32. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of hypergeometric functions // *Proc. London Math. Soc.* 1935. V. 10. № 4. P. 286–293.

---



---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---



---

УДК 517.9

**ВОПРОС СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ  
РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО  
БЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ В ПОЛЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ  
ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА<sup>1)</sup>**

© 2022 г. А. Л. Бекларян<sup>1,\*</sup>, Л. А. Бекларян<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup> 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, Центральный экономико-математический институт РАН, Россия<sup>2</sup> 101000 Москва, Мясницкая ул., 20, Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Россия

\*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

\*\*e-mail: abeklaryan@hse.ru

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.

Переработанный вариант 15.01.2022 г.

Принята к публикации 15.01.2022 г.

Установлено существование семейства ограниченных солитонных решений для конечно-разностного аналога волнового уравнения с нелинейным потенциалом общего вида. Доказательство проводится в рамках формализма, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между солитонными решениями бесконечномерной динамической системы и решениями семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. При доказательстве существования ограниченных солитонных решений ключевым является наличие теоремы существования и единственности солитонных решений в случае квазилинейного потенциала. Другим важным обстоятельством для рассматриваемого класса систем уравнений является наличие у них ряда симметрий вследствие малой размерности (одномерности) пространства в каждой точке решетки. Библ. 18. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, солитонные решения, нелинейный потенциал.**DOI:** 10.31857/S0044466922060035

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для уравнений математической физики, являющихся уравнениями Эйлера–Лагранжа соответствующих вариационных задач, важный класс решений – это решения типа бегущей волны (солитонные решения) (см. [1], [2]). В ряде моделей такие решения хорошо приближаются решениями типа бегущей волны для конечно-разностных аналогов исходных уравнений, которые взамен непрерывной среды описывают взаимодействие сгустков среды, помещенных в вершинах решетки (см. [1], [3]). Возникающие системы относятся к классу бесконечномерных динамических систем. К наиболее широко рассматриваемым классам подобных задач относятся бесконечномерные системы с потенциалами Френкеля–Конторовой (периодические и медленно растущие потенциалы) и Ферми–Паста–Улама (потенциалы экспоненциального роста), широкий обзор которых приведен в [4].

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \phi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где потенциал  $\phi(\cdot)$  задается гладкой периодической функцией. Уравнение (1) является системой с потенциалом Френкеля–Конторовой (см. [3]). Такая система является конечно-разностным аналогом нелинейного волнового уравнения, моделирует поведение счетного числа шаров массы  $m$ , помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной, и описывает распространение продольных волн в бесконечном однородном абсолютно упругом стержне.

---

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 19-01-00147).

**Определение 1.**  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  называется решением системы (1), если для любого  $i \in \mathbb{Z}$  функция  $y_i(\cdot)$  непрерывно дифференцируема, ее производная является абсолютно непрерывной функцией и почти всюду удовлетворяет системе (1).

Изучение таких систем с различными потенциалами является одним из интенсивно развивающихся направлений в теории динамических систем. Для них центральной задачей является изучение солитонных решений (решений типа бегущей волны) как одного из наблюдаемых классов волн.

**Определение 2.** Будем говорить, что решение  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  системы (1), определенное для всех  $t \in \mathbb{R}$ , имеет *тип бегущей волны* (является солитонным решением), если существует  $\tau > 0$ , не зависящая от  $t$  и  $i$ , что при всех  $i \in \mathbb{Z}$  и  $t \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t).$$

Константу  $\tau$  будем называть *характеристикой* бегущей волны.

Таким образом, для рассматриваемого конечно-разностного аналога волнового уравнения изучение солитонных решений сводится к исследованию пространства решений краевой задачи

$$m\ddot{y}_i(t) = y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t) + \phi(y_i(t)), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t), \quad \tau \geq 0, \tag{3}$$

с линейными нелокальными краевыми условиями.

Фазовым пространством системы уравнений (2) является пространство бесконечных последовательностей

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2 = \overline{\prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}_q^2}, \quad \mathbb{R}_q^n = \mathbb{R}^2, \quad \kappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2, \quad \kappa = \{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})', \tag{4}$$

со стандартной тихоновской топологией. В пространстве  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2$  определим семейство гильбертовых подпространств  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2$ ,  $\mu \in (0, 1)$ :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2 = \left\{ \kappa : \kappa \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2; \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbb{R}^2}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|\kappa\|_{\mathbb{Z}2\mu} = \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbb{R}^2}^2 \mu^{2|i|} \right]^{1/2}.$$

Определим линейный оператор  $\mathbb{A}$ , оператор сдвига  $\mathbb{T}$  и нелинейный оператор  $\mathbb{F}$ , действующие непрерывно из пространства  $\mathcal{H}^2$  в себя по следующему правилу: для любых  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\kappa \in \mathcal{H}^2$

$$(\mathbb{A}\kappa)_i = (x_{i2}, m^{-1} [x_{(i+1)1} - 2x_{i1} + x_{(i-1)1}])', \quad (\mathbb{T}\kappa)_i = (\kappa)_{i+1}, \quad (\mathbb{F}(\kappa))_i = (0, m^{-1}\phi(x_{i1}))'.$$

Заметим, что оператор сдвига  $\mathbb{T}$  *перестановочен* с операторами  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{F}$ , что свойственно моделям, описывающим процессы в однородных средах.

Система (2), (3), задающая солитонные решения, может быть переписана в следующей операторной форме:

$$\dot{\kappa} = \mathbb{A}\kappa + \mathbb{F}(\kappa), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\kappa(t + \tau) = \mathbb{T}\kappa(t), \tag{6}$$

и является краевой задачей с линейными нелокальными краевыми условиями. Краевые условия (6) означают, что *сдвиг решения по времени равен сдвигу по пространству*.

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала и, далее, методами теории возмущений установление факта существования солитонных решений для близких потенциалов. Другим часто применяемым способом является использование наличия симметрий у исходных уравнений. Важным является не только вопрос существования солитонных решений, но и вопрос их единственности. Для этого одним из подходов служит локализация решений в пространстве бесконечно дифференцируемых или аналитических функций. Как правило, в пространстве бесконечно дифференцируе-

мых функций удается показать существование решения, а в пространстве аналитических функций показать их единственность (см. [4]).

В представленной работе используются возможности иного подхода и созданного на его основе формализма (см. [5]–[8]). В рамках такого подхода предлагается локализация солитонных решений заданием их асимптотики как по пространству (параметризованное семейство бесконечномерных фазовых пространств в форме гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^2, \mu}^2$ ,  $\mu \in (0, 1)$ ), так и по времени. Возможности такого подхода основаны на существовании взаимно однозначного соответствия солитонных решений для бесконечномерных динамических систем с решениями семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (см. [7], [9]–[12]).

В случае рассматриваемой задачи солитонные решения, решения системы (2), (3), находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1} [z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi(z_1(t))]. \tag{8}$$

Связь между этими решениями имеет следующий вид:

$$z_1(t) = y_0(t), \quad z_2(t) = \dot{y}_0(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Для изучения вопросов существования и единственности солитонных решений предлагается локализация решений индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (в случае рассматриваемой задачи это уравнения (7), (8)) в пространствах функций, мажорируемых функциями заданного экспоненциального роста с показателем экспоненты в качестве параметра:

$$\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ z(\cdot) : z(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \tag{10}$$

$$\|z(\cdot)\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mu \in (0, +\infty).$$

Такой подход оказывается особенно успешным для систем с потенциалами Френкеля–Контровой. При описании процессов в неоднородных средах условие коммутативности правой части системы в операторной форме и оператора сдвига нарушается. В этом случае пространство солитонных решений оказывается тривиальным. Вместе с тем в рамках развиваемого формализма удается получить “правильное” расширение понятия бегущей волны (солитонного решения) в виде решений типа квазибегущих волн (см. [13], [14]).

При минимальных ограничениях на потенциал  $\phi(\cdot)$  в виде наличия условия Липшица (квазилинейные потенциалы) отмеченная задача была исследована в монографии [8]. Соответствующую константу Липшица для потенциала  $\phi(\cdot)$  будем обозначать через  $L_\phi$ .

Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных  $\tau \in (0, +\infty)$  и  $\mu \in (0, 1)$ :

$$C_\phi \tau (2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \tag{11}$$

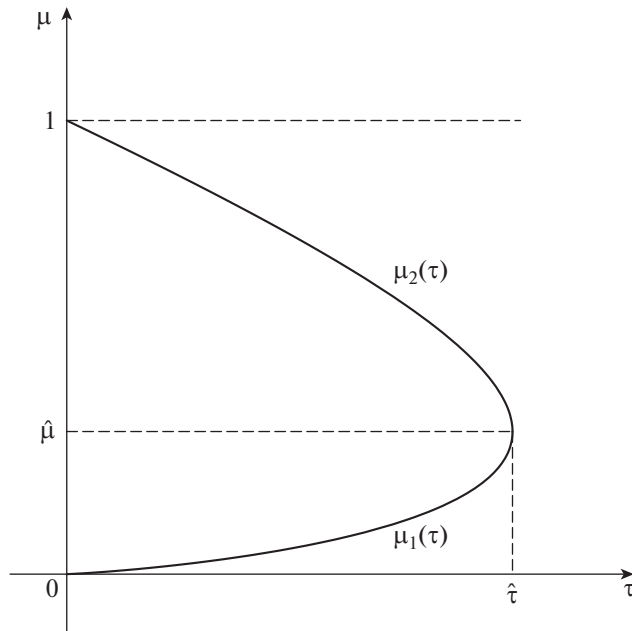
где

$$C_\phi = \max \left\{ 1; 2m^{-1} \sqrt{L_\phi^2 + 2} \right\}.$$

Множество решений уравнения (11) описывается функциями  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$ , представленными на фиг. 1. Для величины  $\hat{\tau}$  имеет место некоторая абсолютная оценка  $\hat{\tau} \leq (2C_\phi)^{-1}$  и, в частности,  $\hat{\tau} \leq 1/2$ .

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированных функционально-дифференциальных уравнений (7), (8).

**Теорема 1** (см. [8]). *Пусть потенциал  $\Phi$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_\Phi$ . Тогда при любых начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{t} \in \mathbb{R}$ , и характеристиках  $\tau > 0$ , удовлетворяющих условию  $0 < \tau < \hat{\tau}$  в пространстве  $L_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$  для системы функционально-дифферен-*



Фиг. 1. Графики функций  $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$ .

циальных уравнений (7), (8), существует и причем единственное решение  $(z_1(t), z_2(t)), t \in \mathbb{R}$ , такое, что оно удовлетворяет начальным условиям  $z_1(\bar{t}) = a, z_2(\bar{t}) = b$ . Такое решение, как элемент пространства  $\mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ , непрерывно зависит от начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}$ , а также массы  $m$ , характеристики  $\tau$  и потенциала  $\Phi(\cdot)$ .

Теорема 1 не только гарантирует существование решения, но и задает ограничение его возможного роста по времени  $t$ . Очевидно, что при каждом  $0 < \tau < \hat{\tau}$  пространства  $\mathcal{L}_{(\sqrt[\mu_2(\tau)-\varepsilon]}^2) C^{(0)}(\mathbb{R})$  при малых  $\varepsilon > 0$  намного уже, чем пространства  $\mathcal{L}_{(\sqrt[\mu_1(\tau)+\varepsilon]}^2) C^{(0)}(\mathbb{R})$ . Теорема гарантирует существование решения в более узких пространствах и единственность в более широких пространствах.

Теорема 1 допускает переформулировку в терминах решений типа бегущей волны (солитонных решений) для исходного волнового уравнения (в терминах системы (2), (3)).

**Теорема 2** (см. [8]). Пусть потенциал  $\Phi$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_\Phi$ . Тогда при любых начальных данных  $\bar{t} \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}, \bar{t} \in \mathbb{R}$ , и характеристиках  $\tau > 0$ , удовлетворяющих условию  $0 < \tau < \hat{\tau}$ , для исходной системы дифференциальных уравнений (2) существует единственное решение  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  типа бегущей волны (солитонное решение) с характеристикой  $\tau$  такое, что оно удовлетворяет начальным условиям  $y_{\bar{t}}(\bar{t}) = a, \dot{y}_{\bar{t}}(\bar{t}) = b$ . Для любого параметра  $\mu, \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$  значения вектор-функции

$$\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty}$$

при любом  $t \in \mathbb{R}$  принадлежат пространству  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2$ , а функция

$$\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$$

принадлежит пространству  $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$ . Такое решение непрерывно зависит от начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}$ , а также от массы  $m$ , характеристики  $\tau$  и потенциала  $\Phi(\cdot)$ .

Среди солитонных решений важный класс составляют ограниченные солитонные решения, соответствующие ограниченным решениям индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. В [15] для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейной правой частью получена теорема существования ограниченного



решения. В ней представлены условия нового типа, использующие средние по некоторому периоду для правых частей функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Такие условия являются новыми и для обыкновенных дифференциальных уравнений. На их основе получен результат о существовании ограниченного солитонного решения для систем с квазилинейным потенциалом, а также осуществлена численная реализация таких солитонных решений (см. [16]). Более того, в рамках такого подхода в [17] получена теорема существования ограниченного решения для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с сильно нелинейной правой частью.

Вместе с тем условия из упомянутой работы [17] оказываются неприменимыми при изучении ряда систем и, в частности, для конечно-разностного волнового уравнения с нелинейным потенциалом. Причина в том, что у таких систем, а также индуцированных ими функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, имеется ряд симметрий вследствие малой размерности (одномерности) пространства в каждой точке решетки, которые препятствуют реализации нужных условий из отмеченной работы.

В свою очередь, наличие симметрий, поведение векторного поля для такого индуцированно-функционально-дифференциального уравнения точечного типа, наличие теорем существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных данных и параметров (теоремы 1 и 2) позволяют установить существование семейства ограниченных солитонных решений (решения системы (2), (3)) и в случае нелинейных потенциалов общего вида.

Отмеченный подход был реализован в [18], где для конечно-разностного аналога волнового уравнения с квадратичным потенциалом описаны семейства ограниченных решений. Большинство приведенных там предварительных результатов получены без учета конкретного вида нелинейного потенциала. Поэтому представленный подход носит универсальный характер и может быть применен к изучению широкого класса систем с нелинейным потенциалом, что и будет продемонстрировано далее.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим солитонные решения системы (решения системы (2), (3)) с нелинейным потенциалом общего вида. В рамках данной задачи установим ряд универсальных свойств, присущих таким системам. Соответствующее индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа имеет вид

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1} [z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi(z_1)]. \quad (13)$$

*Справедливо соответствие:* ограниченному солитонному решению (решению системы (2), (3)) соответствует решение индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13) с ограниченной первой координатой  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и наоборот.

**Утверждение 1.** *Точки замкнутого множества*

$$S = \{z : z = (z_1, z_2)', (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2; z_2 = 0, \Phi(z_1) = 0\} \quad (14)$$

*и только они задают стационарные решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13).*

Для изучения иных решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения с условием ограниченности по первой координате построим семейство вспомогательных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Для любого  $\Delta > 0$  определим потенциал  $\Phi_\Delta$ :

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \Phi(-\Delta), & \text{если } \xi < -\Delta, \\ \Phi(\xi), & \text{если } \xi \in \Delta, \\ \Phi(\Delta), & \text{если } \xi > \Delta. \end{cases} \quad (15)$$

Константа Липшица для такой функции  $\Phi_\Delta$  равна константе Липшица для функции  $\Phi|_{[-\Delta, \Delta]}$ , как ограничения потенциала  $\Phi$  на интервал  $[-\Delta, \Delta]$ . Будем обозначать ее через  $L_{\Phi_\Delta}$ . Очевидно, что

$L_{\Phi_\Delta}$  является монотонно возрастающей по параметру  $\Delta > 0$ . Рассмотрим вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1} [z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))]. \tag{17}$$

По аналогии с уравнением (11) рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных  $\tau \in (0, +\infty)$  и  $\mu \in (0, 1)$

$$C_{\Phi_\Delta} \tau (2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \tag{18}$$

где

$$C_{\Phi_\Delta} = \max \left\{ 1; 2m^{-1} \sqrt{L_{\Phi_\Delta}^2 + 2} \right\}$$

и  $C_{\Phi_\Delta}$  является монотонно возрастающей по параметру  $\Delta > 0$ .

Решение уравнения (18) описывается функциями  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$ . Качественное поведение функций  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$  такое же, как поведение функций  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$  на фиг. 1, а величина  $\hat{\tau}$  заменяется соответствующей величиной  $\hat{\tau}_\Delta$ , которая является монотонно убывающей по параметру  $\Delta > 0$ .

Для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) также верна теорема 1, в которой следует потенциал  $\Phi$  заменить на  $\Phi_\Delta$ , функции  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$  заменить на функции  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$ , а величину  $\hat{\tau}$  — на  $\hat{\tau}_\Delta$ . Всякое решение  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , вспомогательного функционально-дифференциального уравнения (16), (17) со свойством ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13) с нелинейным потенциалом и тем же условием ограниченности по первой координате. Таким образом, в силу сформулированного выше правила согласования, нам достаточно установить существование решений вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17), удовлетворяющих свойству ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Определим множества

$$B = \{a : \Phi(a) = 0\}, \quad D = \mathbb{R} \setminus B, \tag{19}$$

$$B^\Delta = \{a : \Phi_\Delta(a) = 0\}, \quad D^\Delta = \mathbb{R} \setminus B^\Delta. \tag{20}$$

Очевидно, что множество  $S$  совпадает с естественным вложением множества  $B$  в  $\mathbb{R}^2$ . В силу непрерывности потенциалов  $\Phi(\cdot)$ ,  $\Phi_\Delta(\cdot)$ , множества  $B$ ,  $B^\Delta$  являются замкнутыми, а множества  $D$ ,  $D^\Delta$  открытыми. Тогда открытые множества  $D$ ,  $D^\Delta$  состоят из объединения не более чем счетного числа открытых интервалов, т.е.

$$D = \bigcup_{i \in I} d_i, \quad d_i = (\alpha_i, \beta_i), \quad i \in I, \tag{21}$$

$$D^\Delta = \bigcup_{i \in I^\Delta} d_i^\Delta, \quad d_i^\Delta = (\alpha_i^\Delta, \beta_i^\Delta), \quad i \in I^\Delta, \tag{22}$$

где  $I$ ,  $I^\Delta$  — конечные или счетные наборы индексов. Очевидно, что значение потенциалов  $\Phi$ ,  $\Phi_\Delta(\cdot)$  соответственно на каждом из интервалов  $d_i$ ,  $i \in I$ ,  $d_i^\Delta$ ,  $i \in I^\Delta$ , знакопостоянны. В зависимости от знака значения потенциалов все индексы  $I$ ,  $I^\Delta$  можем разбить на два подмножества  $I_-$ ,  $I_+$ ,  $I_-^\Delta$ ,  $I_+^\Delta$  и соответственно  $I = I_- \cup I_+$ ,  $I^\Delta = I_-^\Delta \cup I_+^\Delta$ . Элементы множеств индексов  $I_-$ ,  $I_-^\Delta$ ,  $I_+$ ,  $I_+^\Delta$  будем обозначать через  $i_-$ ,  $i_+$  соответственно. Заметим, что всякий конечный интервал  $d_{i_-}$ ,  $i_- \in I_-$  ( $d_{i_+}$ ,  $i_+ \in I_+$ ), начиная с некоторого большого значения  $\Delta > 0$ , совпадает с каким-либо из интервалов  $d_{i_-}^\Delta$ ,  $i_- \in I_-^\Delta$  ( $d_{i_+}^\Delta$ ,  $i_+ \in I_+^\Delta$ ).

**Лемма 1.** Решения  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) инвариантны относительно сдвига по времени.

Доказательство данного свойства инвариантности является следствием автономности рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

**Лемма 2.** Если  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17), то  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$ ,  $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , также является решением.

Это свойство инвариантности может быть получено непосредственной проверкой.

**Лемма 3.** Пусть  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17). Рассматриваемое решение при прохождении замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$  фазового пространства имеет монотонно возрастающее поведение координаты  $z_1(t)$ . Аналогично, при прохождении замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$  фазового пространства имеется монотонно убывающее поведение координаты  $z_1(t)$ .

Доказательство утверждения непосредственно следует из вида правой части первого уравнения (16).

**Утверждение 2.** Пусть  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17). Если рассматриваемое решение является периодическим, то найдется момент  $\hat{t}$ , при котором выполняется условие  $z_2(\hat{t}) = 0$ .

Доказательство данного утверждения непосредственно следует из леммы 3.

**Лемма 4.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ ,  $a(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17), для которого существует момент  $\hat{t}$  со свойством  $z_2(\hat{t}) = 0$ . Тогда фазовый портрет такого решения симметричен относительно горизонтальной оси  $z_2 = 0$ . Более того, для такого решения каждая пара отмеченных симметричных точек задается в терминах самого решения следующим образом:  $(z_1(\hat{t} + t), z_2(\hat{t} + t))'$ ,  $(z_1(-\hat{t} - t), -z_2(-\hat{t} - t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Пусть решение  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет всем условиям из леммы, т.е. найдется такое  $\hat{t}$ , что  $z_2(\hat{t}) = 0$ . Так как решения инвариантны относительно сдвига по времени (лемма 2, то не нарушая общности, можем положить  $\hat{t} = 0$ . По лемме 2  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$ ,  $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , также является решением. Заметим, что при этом  $\hat{z}_1(0) = z_1(0)$ ,  $\hat{z}_2(0) = -z_2(0) = 0$ . Тогда по теореме существования и единственности решения в пространстве функций  $\mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  следует, что решения  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , совпадают. Тогда для любого  $t \in \mathbb{R}$  из условия  $z_1(t) = \hat{z}_1(t)$ ,  $z_2(t) = \hat{z}_2(t)$  следует, что  $z_1(t) = z_1(-t)$ ,  $z_2(t) = -z_2(-t)$ . Полученные результаты и доказывают лемму, и фазовый портрет такого решения будет симметричен относительно горизонтальной оси  $z_2 = 0$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ ,  $a(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Такое решение является периодическим, но не стационарным, тогда и только тогда, когда найдутся  $\hat{t} \neq 0$  с условием  $z_2(\hat{t}) = 0$ , и минимальное значение таких  $\hat{t}$  не равно нулю. Такое минимальное значение равно полупериоду решения.

**Доказательство.** Если решение является периодическим, то значение периода обозначим через  $2\hat{t}$ . По лемме 4 справедливы условия  $z_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$ . Так как  $\hat{t}$  равно значению минимального полупериода, то для всех  $t \in [0, \hat{t}]$  должны выполняться условия  $z_2(t) = -z_2(-t) \neq 0$ . Тогда из непрерывности решения и условия симметрии решения относительно оси  $z_2 = 0$  следует, что  $z_2(\hat{t}) = 0$ .

Доказательство проведем от обратного. Пусть найдется точка  $\hat{t}$ , для которой выполняется условие  $z_2(\hat{t}) = 0$ . С одной стороны, в силу условия симметрии  $z_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$ , из леммы 4 следует, что имеет место условие  $z_2(\hat{t}) = -z_2(-\hat{t})$ . С другой стороны, имеет место и условие симметрии  $z_1(\hat{t}) = z_1(-\hat{t})$ , что ведет к выполнению равенства  $(z_1(\hat{t}), z_2(\hat{t})) = (z_1(-\hat{t}), z_2(-\hat{t}))$ . Следова-

тельно, такое решение является периодическим, а минимальное значение таких  $\hat{t}$  равно полупериоду решения.

**Лемма 6.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a (z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)$ . Тогда справедливо одно из следующих условий.

(а) Либо решение периодическое с полупериодом  $\hat{t}$ , для которого выполняется одно из условий:

1)  $z_1(\hat{t}) \leq z_1(t) \leq a$ ,  $t \in [-\hat{t}, \hat{t}]$ , и при  $t \in [0, -\hat{t}]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая, а при  $t \in [0, \hat{t}]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая;

2)  $a \leq z_1(t) \leq z_1(\hat{t})$  при  $t \in [-\hat{t}, \hat{t}]$ , и при  $t \in [0, -\hat{t}]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая, а при  $t \in [0, \hat{t}]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая.

(б) либо решение не периодическое и выполняется одно из условий:

1)  $z_1(t) \leq a$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и при  $t \in (-\infty, 0)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая, а при  $t \in (0, \infty)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая;

2)  $a \leq z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и при  $t \in (-\infty, 0)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая, а при  $t \in (0, \infty)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая.

**Доказательство.** В силу леммы 3, леммы 4 (наличие симметрии для такого решения) и леммы 5, решение имеет следующее поведение.

*Случай периодического решения.* При положительных моментах времени полупериода ( $t \in [0, \hat{t}]$ ) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$  и выполняется первое двойное неравенство. Если при  $t \in [0, \hat{t}]$  решение находится в замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$ , то выполняется второе двойное неравенство. Соответствующие условия монотонности решения следуют из вида правой части уравнения (16).

*Случай неперодического решения.* При положительных моментах времени ( $t > 0$ ) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$ , а при отрицательных моментах времени ( $t < 0$ ) решение находится в замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$ , либо с точностью до наоборот. Так как в условиях первого расположения в замкнутой нижней полуплоскости имеет место ограничение  $z_2 \leq 0$ , то в силу первого уравнения (16) оно будет монотонно убывающим и будет выполняться ограничение  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t < 0$ . Точно так же в замкнутой верхней полуплоскости имеет место ограничение  $z_2 \geq 0$  и в силу первого уравнения (16) оно будет монотонно возрастающим, и будет выполняться соотношение  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t > 0$ . Следовательно, первая координата решения удовлетворяет ограничению  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t \in \mathbb{R}$ . Точно так же в условиях второго способа расположения решения можно показать, что первая координата решения удовлетворяет ограничению  $z_1(t) \geq z_1(0)$  при  $t \in \mathbb{R}$  и соответствующим условиям монотонности.

**Утверждение 3.** Любые два периодических не стационарных решения либо не имеют точек пересечения для внутренних областей, которые они выделяют, либо эти области вложены одна в другую. Для периодического решения и внутренней области, которую она выделяет, всякое решение с начальным условием, принадлежащим этой области, также является периодическим.

Данное утверждение следует из теоремы существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных данных.

Сформулируем результат, устанавливающий знак производной  $\dot{z}_2(0)$  для решения  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)$ .

**Лемма 7.** Пусть  $\Delta > 0$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a (z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)$ . Тогда

1) если  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ , то выполняется условие  $\dot{z}_2(0) < 0$ ;

2) если  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ , то выполняется условие  $\dot{z}_2(0) > 0$ .

**Доказательство.** В силу уравнения (17) и леммы 4 для рассматриваемого решения выполнено условие  $z_1(\tau) = z_1(-\tau)$ . Поэтому справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(0) &= m^{-1} [z_1(-\tau) - 2z_1(0) + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(z_1(0))] = \\ &= m^{-1} [z_1(-\tau) - 2a + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(a)] = m^{-1} [2z_1(\tau) - 2a + \Phi_\Delta(a)]. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть  $i- \in I_-^\Delta$  ( $i+ \in I_+^\Delta$ ). В силу непрерывной зависимости решения системы (16), (17) от начальных значений  $(a, 0)$  и характеристики  $\tau$  (теорема 1) для любых  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $[\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $[\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ) решения на интервале  $[0, 2\tau]$  будут равномерно ограниченными при всех начальных значениях

$$a \in [\alpha, \beta]. \tag{24}$$

Из системы (16), (17) следует, что

$$\ddot{z}_1(t) = m^{-1} [z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))] \tag{25}$$

и, учитывая равномерную ограниченность рассматриваемого семейства решений, и соответственно первой координаты  $z_1(t), t \in [0, 2\tau]$ , а также условие  $\dot{z}_1(0) = z_2(0) = 0$ , при малых значениях  $\tau$  получим соотношение  $|z_1(\tau) - a| = o(\tau^2)$ . Подставив полученное соотношение в равенство (23), получим

$$\dot{z}_2(0) = m^{-1} [o(\tau^2) + \Phi_\Delta(a)]. \tag{26}$$

Докажем п. 1). Пусть  $a \in [\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ . При таких  $a$  значение потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  отрицательное. Поэтому при достаточно малых характеристиках  $\tau$  выполняется неравенство  $\dot{z}_2(0) < 0$ . Из последнего неравенства и начального условия  $z_2(0) = 0$  следует, что при малых  $t > 0$  выполняется условие  $z_2(t) < 0$ , а при малых  $t < 0$  — условие  $z_2(t) > 0$ . Если решение не периодическое, то дополнительно будут выполняться более сильные соотношения:  $z_1(t) < a$  при  $t < 0$  и монотонно возрастает,  $z_1(t) < a$  при  $t > 0$  и монотонно убывает. Если решение периодическое, то имеют место оценки  $z_1(t) \leq a$ .

Покажем, что условие  $\dot{z}_2(0) < 0$  будет выполняться при всех характеристиках  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ . Докажем от противного. Пусть найдется  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ , при котором для решения выполняется условие  $\dot{z}_2(0) = 0$ , а  $\underline{\tau}$  — нижняя грань таких значений. Очевидно, что  $\underline{\tau} \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ .

Из равенства (23) и отрицательности значения потенциала будет следовать условие  $z_1(\underline{\tau}) > a$ . Это противоречит непрерывной зависимости решения системы (16), (17) от начальных данных и характеристики  $\tau$  (теорема 1), которая нарушается при значении характеристики, равной  $\underline{\tau}$ . Следовательно,  $\dot{z}_2(0) < 0$  будет выполняться при всех характеристиках  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ . Так как это справедливо для всех интервалов  $[\alpha, \beta]$  таких, что  $[\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ , то условие их п. 1) будет выполняться для всех  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ .

Точно так же доказывается п. 2).

В действительности мы можем получить более сильную оценку для производной  $\dot{z}_2(0)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\Delta > 0$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  — нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Тогда

1) если  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ , то выполняется условие  $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$ ;

2) если  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ , то выполняется условие  $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$ .

**Доказательство.** Докажем п. 1). Для рассматриваемых  $a$  по лемме 6 имеет место оценка  $z_1(0) < a$ . Тогда из соотношения (23) и отрицательности потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  будет следовать оценка  $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$ .

Докажем п. 2). Для рассматриваемых  $a$  по предложению 1 имеет место оценка  $z_1(0) > a$ . Тогда из соотношения (23) и положительности потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  будет следовать оценка  $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$ . Следствие доказано.

Опишем характер точек пересечения периодического нестационарного решения с горизонтальной осью  $z_1$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  – периодическое нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с полупериодом  $\hat{t} \neq 0$ . Тогда

1)  $B \neq \emptyset$  и при некоторых  $\bar{t}, i- \in I_-^\Delta, i+ \in I_+^\Delta$  будут выполняться равенства  $(z_1(\bar{t}), z_2(\bar{t}))' = (a, 0)'$ ,  $(z_1(\bar{t} + \hat{t}), z_2(\bar{t} + \hat{t})) = (b, 0)'$ , а также либо включения  $z_1(\bar{t}) \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $z_1(\bar{t} + \hat{t}) \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ , либо включения  $z_1(\bar{t}) \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $z_1(\bar{t} + \hat{t}) \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ;

2) взаимное расположение интервалов  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  такое, что  $\beta_{i+}^\Delta \leq \alpha_{i-}^\Delta$ .

**Доказательство.** Очевидно, что для такого периодического решения при любом  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$  выполняется условие  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ . По утверждению 3 через каждые начальные значения  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in [a, b]$  (либо  $\bar{a} \in [b, a]$ ) проходит периодическое решение. Множество таких решений индуцирует отображение интервала  $[a, b]$  (либо  $\bar{a} \in [b, a]$ ) в себя. В силу теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости от начальных условий такое отображение является гомеоморфизмом и имеет неподвижную точку, что и означает условие  $B \cap [a, b] \neq \emptyset$  ( $B \cap [b, a] \neq \emptyset$ ). Остальные условия п. 1) следуют из периодичности решения и леммы 7.

Взаимное расположение интервалов из п. 2) следует из леммы 7.

Сформулируем результат о пучке периодических решений.

**Лемма 9.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  – периодическое нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$  ( $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ ). Тогда для любого  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $\bar{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ) решение  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(\bar{z}_1(0), \bar{z}_2(0))' = (\bar{a}, 0)'$  также является периодическим.

**Доказательство.** Очевидно, что для такого периодического решения при любом  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$  выполняется условие  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ . По утверждению 3 через каждые начальные значения  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, a)$  ( $\bar{a} \in [a, \beta_{i+}^\Delta)$ ) проходит периодическое решение. Остается установить этот факт для решений с начальными значениями  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in (a, \beta_{i-}^\Delta)$ , ( $\bar{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, a)$ ).

Доказательство проведем для случая  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ . Пусть  $\hat{a}$  – верхняя грань таких значений, что через каждое  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in (\hat{a}, \beta_{i-}^\Delta)$  проходит периодическое решение. Если  $\hat{a} = \beta_{i-}^\Delta$ , то все доказано. Остается рассмотреть случай, когда  $\alpha_{i-}^\Delta < \hat{a} < \beta_{i-}^\Delta$ .

Предположим, что решение  $(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))'$  с начальными значениями  $(\hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0))' = (\hat{a}, 0)'$  также является периодическим с полупериодом  $\hat{t}$ . Тогда найдется монотонно убывающая последовательность  $\alpha_{i-}^\Delta < \bar{a}^k < \beta_{i-}^\Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что она стремится к значению  $\hat{a}$ , и решения  $(\bar{z}_1^k(\cdot), \bar{z}_2^k(\cdot))'$  с начальными значениями  $(\bar{z}_1^k(0), \bar{z}_2^k(0))' = (\bar{a}^k, 0)'$  не являются периодическими.

В силу п. б) леммы 6 и п. 1) леммы 7 найдется малое  $\varepsilon > 0$ , что для таких решений при значениях  $k$ , больших некоторого достаточно большого значения  $\underline{k}$ , будут выполняться условия  $\bar{z}_1^k(2\hat{t}) < \hat{a} - \varepsilon$ . Тогда в окрестности периодического решения  $(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))'$  нарушается условие непрерывной зависимости решений от начальных данных. Следовательно, такого периодического решения нет.

Предположим, что решение  $(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))'$  с начальными значениями  $(\hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0))' = (\hat{a}, 0)'$  не является периодическим. В силу п. б) леммы 6 и п. 1) леммы 7 для такого решения будут выпол-

няться условия  $\hat{z}_1(t) \leq \hat{a}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и такое решение при  $t > 0$  монотонно убывает. Тогда в окрестности неперриодического решения  $(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))'$  также нарушается условие непрерывной зависимости решений от начальных данных. Следовательно, условие  $\alpha_{i-}^\Delta < \hat{a} < \beta_{i-}^\Delta$  не выполнимо, и  $\hat{a} = \beta_{i-}^\Delta$ .

Доказательство для случая  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  проводится аналогичным образом. Лемма доказана.

**Следствие 2.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  – периодическое нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с полупериодом  $\hat{t}$ . Тогда справедливы условия 1) и 2) леммы 8. Для любого  $a' \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $a' \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ) существует периодическое решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  с начальными данными  $(z_1(\bar{t}), z_2(\bar{t}))' = (a', 0)'$  и полупериодом  $\hat{t}_a$  такое, что  $(z_1(\bar{t} + \hat{t}_a), z_2(\bar{t} + \hat{t}_a))' = (b', 0)'$ ,  $b' \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ , ( $b' \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ), и такое соответствие точек интервала  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  точкам интервала  $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  задает гомеоморфизм.

Доказательство следствия непосредственно следует из лемм 1, 8, 9, а также теоремы существования и единственности решения системы (16), (17) и их непрерывной зависимости от начальных данных.

Теперь мы можем уточнить утверждения леммы 8.

**Лемма 10.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  – периодическое нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с полупериодом  $\hat{t} \neq 0$ . Тогда

1)  $B \neq \emptyset$  и при некоторых  $\bar{t}, i- \in I_-^\Delta, i+ \in I_+^\Delta$  будут выполняться равенства  $(z_1(\bar{t}), z_2(\bar{t}))' = (a, 0)'$ ,  $(z_1(\bar{t} + \hat{t}), z_2(\bar{t} + \hat{t}))' = (b, 0)'$ , а также либо включения  $z_1(\bar{t}) \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $z_1(\bar{t} + \hat{t}) \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ , либо включения  $z_1(\bar{t}) \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $z_1(\bar{t} + \hat{t}) \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ;

2) взаимное расположение интервалов  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  такое, что  $\beta_{i+}^\Delta \leq \alpha_{i-}^\Delta$ ;

3) для любого  $(\bar{a}, 0)'$ ,  $\bar{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $\bar{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ) решение  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(\bar{z}_1(0), \bar{z}_2(0))' = (\bar{a}, 0)'$  также является периодическим;

4)  $\alpha_{i+}^\Delta = -\infty, \beta_{i-}^\Delta = +\infty$ .

**Доказательство.** Доказательства пунктов 1) и 2) следуют из леммы 8, п. 3) – из леммы 9. Остается показать справедливость п. 4).

Предположим, что значение  $\alpha_{i+}^\Delta$  конечно. Тогда в окрестности стационарного решения  $(\alpha_{i+}^\Delta, 0)'$  нарушается непрерывная зависимость от начальных значений. Аналогично проводится доказательство и для значения  $\beta_{i-}^\Delta$ . Лемма доказана.

Опишем свойства как периодических, так и неперриодических пучков решений.

**Лемма 11.** Пусть  $\Delta > 0$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ , а  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – нестационарное решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(\bar{z}_1(0), \bar{z}_2(0))' = (\bar{a}, 0)'$ .

Если  $\bar{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ , то

1) либо для любого  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является нестационарным периодическим с полупериодом  $\hat{t}_a$ , и выполняются условия  $\dot{z}_2(0) < 0$ ,  $z_1(\hat{t}_a) \leq z_1(t) \leq a$ ,  $t \in [-\hat{t}_a, \hat{t}_a]$ , причем при  $t \in [0, -\hat{t}_a]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая, а при  $t \in [0, \hat{t}_a]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая;

2) либо для любого  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является неперриодическим, и выполняется условие  $\dot{z}_2(0) < 0$ ; для  $t \in (-\infty, 0)$  выполнены оценки  $z_2(t) > 0$ ,  $z_1(t) < a$  и первая координата  $z_1(t)$  монотонно возрастает; для  $t \in (0, \infty)$  выполнены оценки  $z_2(t) < 0$ ,  $z_1(t) < a$  и первая координата  $z_1(t)$  монотонно убывает.

Если  $\bar{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_+^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ , то

1) либо для любого  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является нестационарным периодическим с полупериодом  $\hat{t}_a$ , и выполняются условия  $\dot{z}_2(0) > 0$ ,  $a \leq z_1(t) \leq z_1(\hat{t}_a)$  при  $t \in [-\hat{t}_a, \hat{t}_a]$ , причем, при  $t \in [0, -\hat{t}_a]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая, а при  $t \in [0, \hat{t}_a]$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая;

2) либо для любого  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является непериодическим, и выполняется условие  $\dot{z}_2(0) > 0$ ; для  $t \in (-\infty, 0)$  выполнены оценки  $z_2(t) < 0$ ,  $z_1(t) > a$  и первая координата  $z_1(t)$  монотонно убывает; для  $t \in (0, \infty)$  выполнены оценки  $z_2(t) > 0$ ,  $z_1(t) > a$  и первая координата  $z_1(t)$  монотонно возрастает.

Доказательство непосредственно следует из лемм 6 и 9.

Теперь мы можем описать качественное поведение непериодических решений  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Предложение 1.** Пусть заданы  $\Delta > 0$  и  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ ,  $a (\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – непериодическое решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными данными  $(\bar{z}_1(0), \bar{z}_2(0))' = (\bar{a}, 0)'$ .

1) Если  $\bar{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$ , то при любых  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является непериодическим, по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ , выполняются соотношения  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = \alpha_{i-}^\Delta$ , а также соотношения  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0$  при конечном  $\alpha_{i-}^\Delta$ . В случае конечности одной из величин  $\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta$  граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  со свойствами

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{z}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \alpha_{i-}^\Delta, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{z}_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} z_1(t) = \beta_{i-}^\Delta, \tag{27}$$

и в случае конечности величины  $\alpha_{i-}^\Delta (\beta_{i-}^\Delta)$  имеют место свойства

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{z}_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = 0 \quad \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{z}_2(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} z_2(t) = 0 \right). \tag{28}$$

2) Если  $\bar{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ , то при любых  $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  является непериодическим, по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ , и выполняются соотношения  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = \beta_{i+}^\Delta$ , а также соотношения  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0$  при конечном  $\beta_{i+}^\Delta$ . В случае конечности одной из величин  $\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta$  граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  со свойствами

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{z}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \alpha_{i+}^\Delta, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{z}_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} z_1(t) = \beta_{i+}^\Delta, \tag{29}$$

и в случае конечности величины  $\alpha_{i+}^\Delta (\beta_{i+}^\Delta)$  имеют место свойства

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{z}_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = 0 \quad \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{z}_2(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} z_2(t) = 0 \right). \tag{30}$$

**Доказательство.** Сформулируем ряд утверждений относительно качественного поведения решений. Пусть заданы  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$  ( $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ ).

**Утверждение (i).** Пусть решение с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$  ( $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ ) по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ). Тогда для такого решения справедливы утверждения доказываемого предложения.



Доказательство утверждения (i). Рассматриваемое решение будет удовлетворять всем условиям монотонности из леммы 6. Тогда функция  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , монотонна на полупрямых  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $t \in (0, +\infty)$  и соответственно конечные пределы  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  существуют и при  $\alpha_{i-}^\Delta = -\infty$  ( $\beta_{i+}^\Delta = +\infty$ ) имеет место равенство  $A = -\infty$  ( $A = +\infty$ ). Наличие сепаратрис с отмеченными свойствами является следствием теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных. Остается рассмотреть случай конечного  $\alpha_{i-}^\Delta$  ( $\beta_{i+}^\Delta$ ). Если для такого решения вторая координата  $z_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , окажется ограниченной, то утверждения о предельных переходах будет следовать из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа и теоремы о продолжении решения до непродолжаемого, основанной на ней.

Покажем ограниченность координаты  $z_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Мы уже отмечали, что функция  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , монотонна на полупрямых  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $t \in (0, +\infty)$  и соответственно пределы  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  существуют. При больших  $|t| > N$  величина  $[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau)]$  будет сколь угодно малой. Если  $A \neq \alpha_{i-}^\Delta$  при  $i- \in I_-^\Delta$  ( $A \neq \beta_{i+}^\Delta$  при  $i+ \in I_+^\Delta$ ), то потенциал  $\Phi_\Delta(z_1(t))$  при больших  $|t| > N$  не равен нулю и в силу системы (16), (17) условия  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  при  $i- \in I_-^\Delta$  ( $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  при  $i+ \in I_+^\Delta$ ) нарушаются. Следовательно,  $A = \alpha_{i-}^\Delta$  при  $i- \in I_-^\Delta$  и  $A = \beta_{i+}^\Delta$  при  $i+ \in I_+^\Delta$ . Поэтому при больших  $|t| > N$  правая часть уравнения (17) будет сколь угодно малой и в силу уравнения (16) при  $|t| > N$  значения  $z_2(t)$  будут не только ограниченными, но будут удовлетворять также и условию  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0$ .

Наличие сепаратрис с отмеченными свойствами является следствием теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных. Качественное поведение решений, описанное в предложении 1, показано на фиг. 2. Утверждение (i) доказано.

Остается показать, что решения с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$  ( $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ ) по первой координате  $z_1$  не покидают интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ . Сформулируем результат о структуре решений, если известен характер одного из рассматриваемых решений.

**Утверждение (ii).** Пусть задано решение  $(\tilde{z}_1(\cdot), \tilde{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными значениями

$$(\tilde{z}_1(0), \tilde{z}_2(0))' = (\tilde{a}, 0)', \quad \tilde{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta), \quad i \in I_-^\Delta \quad (\tilde{a} \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta), \quad i \in I_+^\Delta).$$

Если решение по первой координате  $\tilde{z}_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i \in I_-^\Delta$  ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i \in I_+^\Delta$ ), которому принадлежит  $\tilde{a}$ , тогда для любого  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \tilde{a})$  ( $a \in [\tilde{a}, \beta_{i-}^\Delta)$ ) решения  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  также не покидают интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i \in I_-^\Delta$ , ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i \in I_+^\Delta$ ). Если решение по первой координате  $z_1$  покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i \in I_-^\Delta$ , ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i \in I_+^\Delta$ ), тогда для любого  $a \in [\tilde{a}, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \tilde{a}]$ ) решение с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  также покидают интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i \in I_-^\Delta$ , ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i \in I_+^\Delta$ ).

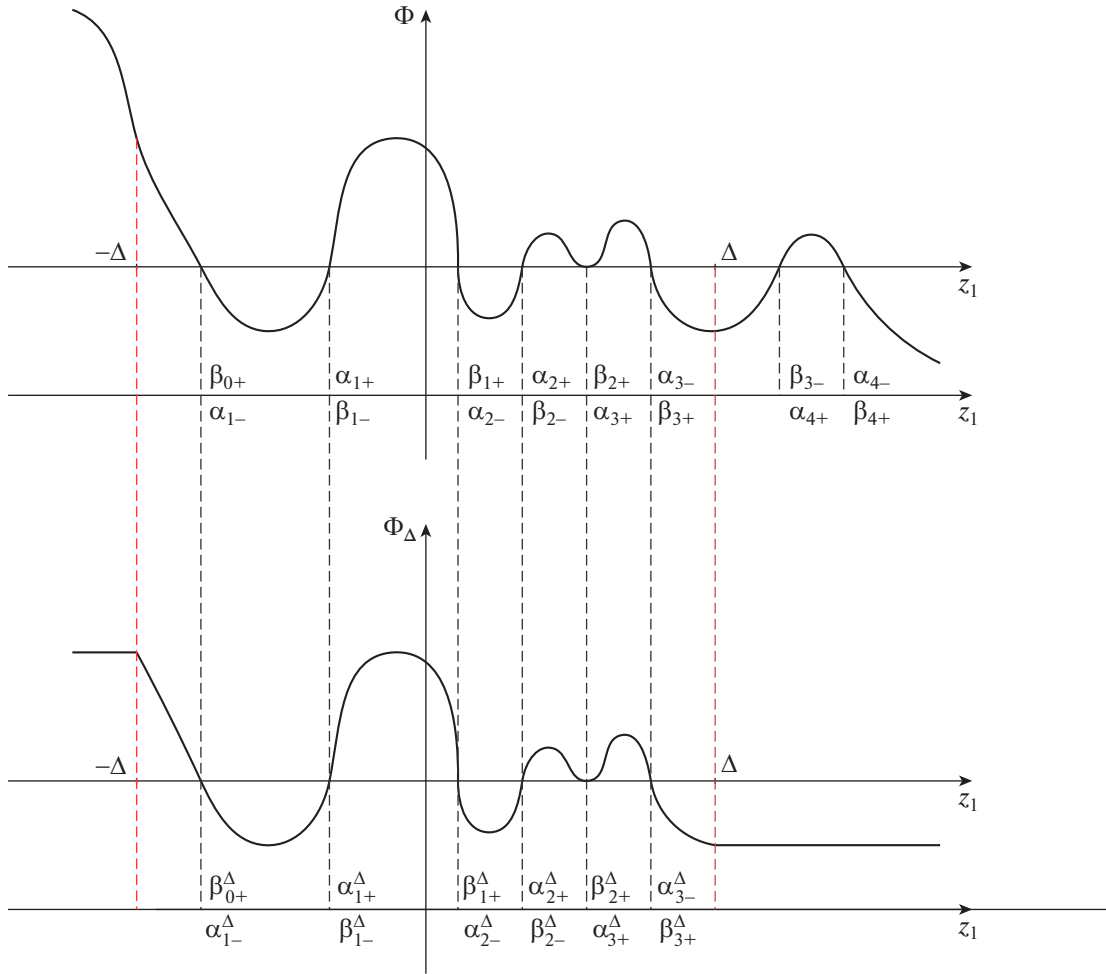
Доказательство утверждения (ii) следует из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теперь мы можем окончательно сформулировать результат о структуре решений с начальными данными  $(a, 0)'$ , где  $a$  принадлежит интервалам  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ ,  $i- \in I_-^\Delta$  ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ,  $i+ \in I_+^\Delta$ ).

**Утверждение (iii).** В условиях доказываемого предложения всякое решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными условиями

$$(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)', \quad a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta), \quad i \in I_-^\Delta \quad (a \in (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta), \quad i \in I_+^\Delta)$$

не покидает замыкание интервала  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  ( $(\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta)$ ).



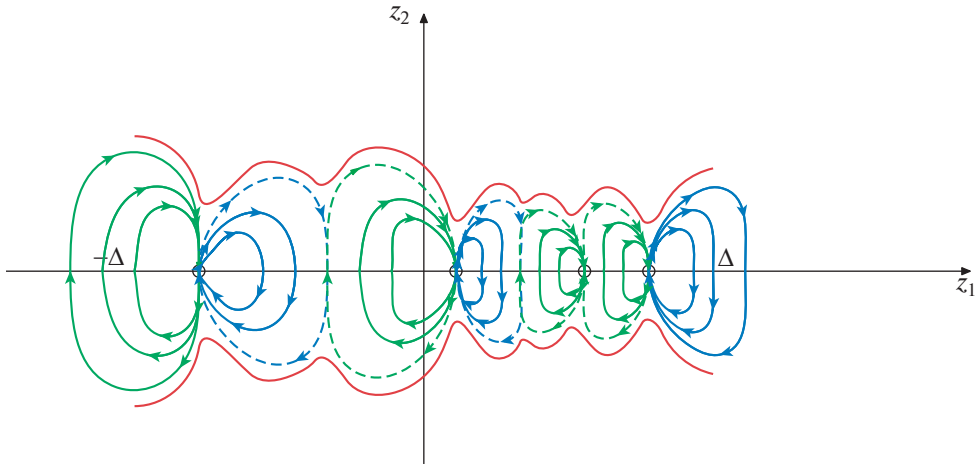
Фиг. 2. Графики потенциалов  $\Phi$  и  $\Phi_\Delta$ .

Доказательство утверждения (iii). Для определенности будем рассматривать случай  $i- \in I_-^\Delta$ . Предположим, что при каком-либо  $\tilde{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  решение по первой координате  $z_1$  покидает рассматриваемый интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ . В утверждении (ii) описан характер целого семейства решений, связанного с таким решением. Через  $\underline{a}$  обозначим минимальное среди таких  $\tilde{a}$ .

Если  $\underline{a} = \alpha_{i-}^\Delta$ , то в силу неперриодичности решений с начальными данными  $(a, 0)$ ,  $a \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  в окрестности стационарного решения  $(\alpha_{i-}^\Delta, 0)$  нарушается непрерывная зависимость от начальных значений.

Если  $\underline{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ , то по утверждению (ii) при каждом  $\tilde{a} \in (\underline{a}, \beta_{i-}^\Delta)$  решение по первой координате  $z_1$  также покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ , а при каждом  $\tilde{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \underline{a})$  решение по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  и его поведение описано в пункте (i).

В случае, если само решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (\underline{a}, 0)'$  по первой координате  $z_1$  также покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ , то в окрестности такого решения нарушается непрерывная зависимость от начальных значений. Остается рассмотреть случай, когда решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (\underline{a}, 0)'$  по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $(\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$ . В окрестности такого решения также нарушается непрерывная зависимость от начальных значений. Следовательно,  $\underline{a} = \beta_{i-}^\Delta$  и при всех  $\tilde{a} \in (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta)$  решение по



**Фиг. 3.** Качественная картина ограниченных решений для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$ .

первой координате  $z_1$  не покидает рассматриваемый интервал. Такое же утверждение может быть доказано и для случая  $i+ \in I_+^\Delta$ .

Завершим доказательство предложения. По утверждению (iii) решения с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  не покидают интервал, которому принадлежит  $a$ . Тогда, в силу утверждения (i), для таких решений справедливы все утверждения доказываемого предложения.

Дадим комментарий к фиг. 3. Малыми кругами обозначены стационарные решения, имеющие гиперболический тип. Крестиками обозначены стационарные решения, являющиеся стоками и истоками для одних и тех же решений и имеющие также гиперболический тип. Штриховыми линиями обозначены сепаратрисы, а коричневым цветом обозначены решения, неограниченные по первой координате  $z_1$ .

### 3. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем предложение об отсутствии при любом  $\Delta > 0$  решения, ограниченного по первой координате  $z_1$ , для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$ .

**Предложение 2.** Если нули нелинейного потенциала  $\Phi$  отсутствуют, т.е.  $V = \emptyset$ , то при любом  $\Delta > 0$  для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$  для любых  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$  и  $\mu, \mu^\tau \in (\mu_{\Delta_1}(\tau), \mu_{\Delta_2}(\tau))$  не существует решения  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ , ограниченного по первой координате  $z_1$  с условием ограниченности  $|z_1(t)| < \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Так как отсутствуют нули у нелинейного потенциала  $\Phi$ , то такой потенциал знакопостоянный. Тогда при любом  $\Delta > 0$  имеется либо единственный интервал  $(\alpha_-^\Delta, \beta_-^\Delta)$ ,  $\alpha_-^\Delta = -\infty$ ,  $\beta_-^\Delta = +\infty$  в случае отрицательного потенциала, либо единственный интервал  $(\alpha_+^\Delta, \beta_+^\Delta)$ ,  $\alpha_+^\Delta = -\infty$ ,  $\beta_+^\Delta = +\infty$  в случае положительного потенциала.

Рассмотрим случай отрицательного нелинейного потенциала  $\Phi$ . По лемме 10 в силу условия  $V = \emptyset$  у вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$  не существует периодического решения. Предположим, что у вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$  при некоторых  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$  и  $\mu, \mu^\tau \in (\mu_{\Delta_1}(\tau), \mu_{\Delta_2}(\tau))$  существует ре-

шение  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ , ограниченное по первой координате  $z_1$  с условием ограниченности  $|\bar{z}_1(t)| < \Delta, t \in \mathbb{R}$ . В силу уравнения (16) найдутся  $\bar{a}, \bar{t} \in \mathbb{R}$ , такие, что  $(\bar{z}_1(\bar{t}), \bar{z}_2(\bar{t}))' = (\bar{a}, 0)'$ . Для данного решения в силу предложения 1 должны выполняться условия  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \bar{z}_1(t) = \alpha_-^\Delta = -\infty$ , что противоречит ограниченности решения по первой координате. Следовательно, такого ограниченного решения не существует. Точно так же доказательство проводится и в случае положительного нелинейного потенциала  $\Phi$ .

Сформулируем результат о существовании ограниченного по первой координате решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения.

**Теорема 3.** Пусть задано  $\Delta > 0$  и  $B \cap [-\Delta, \Delta] \neq \emptyset$ . Тогда для любых  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$  и  $\mu, \mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$  решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13) с нелинейным потенциалом и начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  существует и единственно при всех таких  $a$ , что

$$a \in \left[ \left( \bigcup_{i \in I_-^\Delta, -\Delta \leq \alpha_{i-}^\Delta} (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta) \right) \cup \left( \bigcup_{i \in I_+^\Delta, \beta_{i+}^\Delta \leq \Delta} (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta) \right) \cup B \right] \cap [-\Delta, \Delta],$$

и такое решение по первой координате  $z_1$  удовлетворяет условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** В силу лемм 8 и 10, а также предложения 1, для соответствующего вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16), (17) с начальными условиями

$$(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)',$$

$$a \in \left[ \left( \bigcup_{i \in I_-^\Delta, -\Delta \leq \alpha_{i-}^\Delta} (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta) \right) \cup \left( \bigcup_{i \in I_+^\Delta, \beta_{i+}^\Delta \leq \Delta} (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta) \right) \cup B \right] \cap [-\Delta, \Delta]$$

существует решение, которое удовлетворяет условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . Начальные условия  $(a, 0)'$ , совпадающие с множеством  $B \cap [-\Delta, \Delta]$ , задают фазовый портрет стационарных решений и также удовлетворяют условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что все рассмотренные решения будут одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13) с нелинейным потенциалом. Теорема доказана.

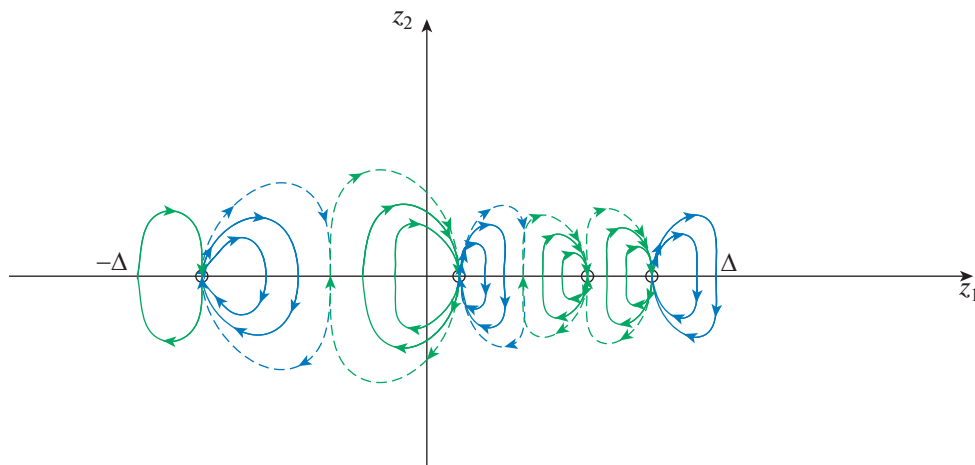
Дадим комментарий к фиг. 4. На фиг. 4 по сравнению с фиг. 3 сохранены только те ограниченные по координате  $z_1$  решения, которые принадлежат цилиндру  $\{(z_1, z_2) : z_1 \in [-\Delta, \Delta]\}$ , так как только такие решения вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейным потенциалом  $\Phi_\Delta$  являются одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с нелинейным потенциалом общего вида.

Теперь мы можем привести эквивалентную переформулировку теоремы 3 о существовании решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (системы (12), (13)), ограниченного по первой координате. Такая переформулировка примет форму основного результата о существовании ограниченных солитонных решений для исходного волнового уравнения (для системы (2), (3)).

**Теорема 4.** Пусть задано  $\Delta > 0$  и  $B \cap [-\Delta, \Delta] \neq \emptyset$ . Тогда для системы (2), (3) с нелинейным потенциалом  $\Phi$  общего вида для любых  $\tau, 0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$  и  $\mu, \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$  существует и единственное солитонное решение  $\alpha(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$  с характеристикой  $\tau$  и начальными данными

$$(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)',$$

$$a \in \left[ \left( \bigcup_{i \in I_-^\Delta, -\Delta \leq \alpha_{i-}^\Delta} (\alpha_{i-}^\Delta, \beta_{i-}^\Delta) \right) \cup \left( \bigcup_{i \in I_+^\Delta, \beta_{i+}^\Delta \leq \Delta} (\alpha_{i+}^\Delta, \beta_{i+}^\Delta) \right) \cup B \right] \cap [-\Delta, \Delta],$$



**Фиг. 4.** Качественная картина ограниченных решений для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с нелинейным потенциалом  $\Phi$  общего вида.

которое при любом  $t \in \mathbb{R}$  принадлежит пространству  $\mathcal{K}_{z_{2\mu}}^2$ , функция  $\rho(t) = \|\alpha(t)\|_{2\mu}$  принадлежит пространству  $\mathcal{L}_{\mu}^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$  и такое солитонное решение ограничено с условием ограниченности  $|y_0(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** По теореме 3 для каждого рассматриваемого начального данного  $(a, 0)'$  существует, причем единственное, решение  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (12), (13) с нелинейным потенциалом  $\Phi$  общего вида, с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  и условием ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . В силу соотношений (9) решению  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  соответствует солитонное решение  $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$ , системы (2), (3) с нелинейным потенциалом  $\Phi$  общего вида, характеристикой  $\tau$ , начальными условиями  $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$  и условием ограниченности  $|y_0(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toda M. Theory of nonlinear lattices. Berlin: Springer, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83219-2>
2. Miwa T., Jimbo M., Date E. Solitons: differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras. Cambridge Univer. Press, UK, 2000.
3. Frenkel Y.I., Contorova T.A. On the theory of plasti deformation and twinning // J. Exp. Theor. Phys. 1938. V. 8. P. 89–95.
4. Pustyl'nikov L.D. Infinite-dimensional non-linear ordinary differential equations and the KAM theory // Rus. Math. Surveys. 1997. V. 52. P. 551–604. <https://doi.org/10.1070/RM1997v052n03ABEH001810>
5. Beklaryan L.A. A boundary value problem for a differential equation with deviating argument // Dokl. Akad. Nauk. SSSR 1986. V. 291. P. 19–22.
6. Beklaryan L.A. A differential equation with deviating argument as an infinite-dimensional dynamical system // Rep. Appl. Math., Akad. Nauk SSSR, Vychisl. Tsent. Moscow, 1989.
7. Beklaryan L.A. Introduction to the theory of functional differential equations and their applications. Group approach // J. of Math. Sci. 2006. V. 13. P. 2813–2954. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0145-3>
8. Beklaryan L.A. Introduction to the theory of functional differential equations. Group approach. Moscow: Factorial Press, 2007.
9. Keener J.P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. on Appl. Math. 1987. V. 47. P. 556–572. <https://doi.org/10.1137/0147038>

10. *Zinner B.* Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation // *J. of Different. Equat.* 1992. V. 96. P. 1–27.  
[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(92\)90142-A](https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90142-A)
11. *Mallet-Paret J.* The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems // *J. of Dynamic. and Different. Equations* 1999. V. 11. P. 49–127.  
<https://doi.org/10.1023/A:1021841618074>
12. *Van Vleck E.S., Mallet-Paret J., Cahn J.W.* Traveling wave solutions for systems of ODEs on a two-dimensional spatial lattice // *SIAM J. on Appl. Math.* 1998. V. 59. P. 455–493.  
<https://doi.org/10.1137/S0036139996312703>
13. *Beklaryan L.A.* Quasitravelling waves // *Sbornik: Mathematics.* 2010. V. 201. P. 1731–1775.  
<https://doi.org/10.1070/SM2010v201n12ABEH004129>
14. *Beklaryan L.A.* Quasi-travelling waves as natural extension of class of traveling waves // *Tambov Univer. Rep. Ser. Natural and Technic. Sci.* 2014. V. 19. P. 331–340.
15. *Beklaryan L.A.* A new approach to the question of the existence of bounded solutions of functional differential equations of point type // *Izvestiya: Mathematics* 2020. V. 84. P. 209–245.  
<https://doi.org/10.1070/IM8896>
16. *Beklaryan A.L.* Numerical methods for constructing solutions of functional differential equations of pointwise type // *Adv. Systems Sci. Appl.* 2020. V. 20. P. 56–70.  
<https://doi.org/10.25728/assa.2020.20.2.878>
17. *Beklaryan L.A., Beklaryan A.L.* On the existence of periodic and bounded solutions for functional differential equations of pointwise type with a strongly nonlinear righthand side // *Lobachevskii J. of Math.* 2020. V. 41. P. 2136–2142.  
<https://doi.org/10.1134/S1995080220110062>
18. *Beklaryan L.A., Beklaryan A.L.* The question of the existence of bounded soliton solutions in the problem of longitudinal vibrations of an elastic infinite rod in a field with a strongly nonlinear potential // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2021. V. 61. P. 2024–2039.  
<https://doi.org/10.31857/S0044466921120061>

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.957

### О РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА<sup>1)</sup>

© 2022 г. А. В. Домрин<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 119992 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова  
450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, ИМ с ВЦ УФИЦ РАН  
119992 Москва, Воробьевы горы, 1, ЦФПМ МГУ, Россия

\*e-mail: domrin@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.  
Переработанный вариант 15.11.2021 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Показано, что любое вещественно-аналитическое решение продолжается до глобально-мероморфной функции от пространственной переменной  $x$  при каждом фиксированном значении временной переменной  $t$ . Во вполне фокусирующем случае показано также, что любое локальное вещественно-аналитическое решение продолжается вещественно-аналитически в некоторую (зависящую от решения) максимальную полосу, параллельную оси  $x$ . Библ. 25.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение Шрёдингера, вещественно-аналитические решения, аналитическое продолжение.

DOI: 10.31857/S0044466922060072

#### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  обозначим через  $M_{nk}$  множество всех комплексных  $n \times k$ -матриц или, эквивалентно, множество всех линейных операторов  $\mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Нас интересуют свойства вещественно-аналитических ( $= \mathbb{C}^0$ ) решений  $u : \Omega \rightarrow M_{nk}$  матричного нелинейного уравнения Шрёдингера

$$iu_t = u_{xx} + uAu^*Bu, \quad (1.1)$$

где  $x, t$  – вещественные переменные, нижние индексы  $x$  и  $t$  означают частные производные по этим переменным, через  $A = A^* \in M_{kk}$  и  $B = B^* \in M_{nn}$  обозначены заданные (произвольные) невырожденные эрмитовы матрицы,  $\Omega \subset \mathbb{R}_{xt}^2$  – открытое множество, а  $u^* : \Omega \rightarrow M_{kn}$  означает отображение, эрмитово сопряженное к  $u$ .

Заметим, что базисы в пространствах  $\mathbb{C}^k$  и  $\mathbb{C}^n$  можно выбрать состоящими из собственных векторов матриц  $A$  и  $B$ , что делает сами эти матрицы диагональными:  $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , где  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . В частности, при  $n = k = 1$ , полагая  $\lambda := \alpha_1\beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , можно записать (1.1) в виде одного скалярного уравнения на функцию  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$iu_t = u_{xx} + \lambda|u|^2u. \quad (1.2)$$

Это уравнение было впервые изучено методом обратной задачи теории рассеяния в [1]. Различают его фокусирующий случай  $\lambda > 0$  (отвечающий притягивающей нелинейности) и дефокусирующий случай  $\lambda < 0$  (отталкивающая нелинейность). При  $n = 2$  и  $k = 1$ , полагая  $\lambda_j := \alpha_i\beta_j$ ,

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00474).

$j = 1, 2$ , получаем (1.1) в виде системы двух уравнений на компоненты  $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  вектора  $u = (u_1, u_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,

$$\begin{aligned} iu_{1t} &= u_{1xx} + (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2)u_1, \\ iu_{2t} &= u_{2xx} + (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2)u_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

известной как система Манакова [2] или векторное нелинейное уравнение Шрёдингера. Случай  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  называется вполне фокусирующим, а случай  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  – вполне дефокусирующим.

Изучению матричного нелинейного уравнения Шрёдингера (1.1), а особенно его частных случаев (1.2) и (1.3), и свойств его решений различных классов посвящена обильная литература. О физических приложениях и об анализе специальных решений см. [3]–[5] и ссылки там. Метод обратной задачи теории рассеяния применительно к (1.2) занимает половину классической книги [6], а его распространение на общее уравнение (1.1) с быстроубывающими граничными условиями описано в [7], [8]. Наконец, различные классы решений уравнения (1.2) и его обобщения на случай многих пространственных переменных изучаются с точки зрения уравнений с частными производными в [9], [10], хотя для общего уравнения (1.1) результатов этого направления известно мало.

Нетрудно заметить, что большинство физически интересных решений являются вещественно-аналитическими по  $x$  и  $t$  (таковы, в частности, многосолитонные решения, аномальные волны, бризеры, конечнозонные решения) и у них нет особенностей, кроме полюсов, даже при комплексных значениях  $x$  и  $t$ . Но следующая теорема влечет, что класс вещественно-аналитических решений еще намного богаче.

**Теорема 1.** Для любых чисел  $x_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  и произвольных  $\mathbb{C}^\omega$ -функций  $\varphi_0, \varphi_1 : (t_1, t_2) \rightarrow M_{nk}$ , на некотором открытом множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , содержащем  $\{x_0\} \times (t_1, t_2)$ , существует единственное  $\mathbb{C}^\omega$ -решение  $u : \Omega \rightarrow M_{nk}$  уравнения (1.1) такое, что  $u(x_0, t) = \varphi_0(t)$  и  $u_x(x_0, t) = \varphi_1(t)$  для всех  $t \in (t_1, t_2)$ .

Доказательство теоремы 1 дано в разд. 2 ниже и состоит по существу в применении теоремы Коши–Ковалевской с  $x$  в качестве временной переменной. Взять  $t$  в качестве временной переменной нельзя, так как ни условия, ни заключение теоремы Коши–Ковалевской в этом случае не будут выполнены, что было известно еще С.В. Ковалевской на примере уравнения теплопроводности. Приведем ее классический результат (см. [11, с. 22–24], [12]), служащий парадигмой для наших теорем 2 и 3. Задача Коши  $u_t = u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$  с заданной  $\mathbb{C}^\omega$ -функцией  $u_0 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  в качестве начального условия имеет  $\mathbb{C}^\omega$ -решение  $u(x, t)$  в окрестности начала координат  $(0, 0) \in \mathbb{R}_{xt}^2$  тогда и только тогда, когда существует целая функция  $U_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ , удовлетворяющая оценке  $|U_0(z)| \leq Ae^{B|z|^2}$  при некоторых  $A, B > 0$  и всех  $z \in \mathbb{C}$  и такая, что  $U_0(x) = u_0(x)$  при  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Поскольку столь сильное ограничение на начальное условие может показаться неожиданным, дадим набросок доказательства необходимости. Так как  $\partial_t^m u = \partial_x^{2m} u$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ , то  $u(0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} ((2m)!/m!)c_{2m}t^m$ , если  $u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ . По неравенствам Коши для  $u(0, t)$ ,  $|c_{2m}| \leq M(\delta)(m!/(2m!))\delta^{-m}$  при некотором  $\delta > 0$  и всех  $m \in \mathbb{N}$ . Но тогда радиус сходимости ряда  $\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}x^{2m}$  по формуле Коши–Адамара равен  $\infty$  (а требуемая оценка для модуля суммы этого ряда вытекает из формул для порядка и типа целой функции; см., например, [13, § 15, п. 47]). Заменяя  $u$  на  $u_x$ , получаем то же заключение и для нечетной части  $\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}x^{2m+1}$  начального условия. В частности, мы видим, что всякое локальное  $\mathbb{C}^\omega$ -решение уравнения  $u_t = u_{xx}$  (а также  $iu_t = u_{xx}$ , с тем же доказательством) аналитически продолжается до  $\mathbb{C}^\omega$ -решения в некоторую горизонтальную полосу на  $\mathbb{R}_{xt}^2$ , параллельную оси  $x$ .

На примере уравнения теплопроводности хорошо иллюстрируется также эффект аналитического сглаживания, которым обладает уравнение (1.2). А именно, решение задачи Коши  $u_t = u_{xx}$ ,



$u(x, 0) = u_0(x)$  с периодическими граничными условиями обычным методом разделения переменных имеет вид

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Даже при небольшой регулярности начального условия, скажем, при  $u_0 \in L^1(0, 2\pi)$ , последовательность его коэффициентов Фурье равномерно ограничена,  $|c_n| < M$ , и тогда ряд для  $u(x, t)$  сходится равномерно на компактах в полупространстве  $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} t > 0\}$ . Значит, его сумма голоморфна в этом полупространстве и, в частности, решение  $u(x, t)$  вещественно-аналитично на открытой полуплоскости  $\Pi := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ . То же самое верно и для решения на  $\mathbb{R}_x^1$ , заданного формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) d\xi,$$

если только начальное условие  $u_0(x)$  принадлежит  $L^1(e^{\alpha x^2} dx)$  при некотором  $\alpha > 0$ . Этот факт был отмечен Вейерштрассом в 1874 г. (в связи с упомянутым выше результатом Ковалевской) и использован им в 1881 г. для доказательства знаменитой теоремы о равномерном приближении полиномами на отрезке.

Указанный факт полностью справедлив для линейного уравнения Шрёдингера  $i u_t = u_{xx}$  (см., например, [9, лемма 2.2.4 и § 2.5]) и частично для нелинейного уравнения Шрёдингера (1.2) (см. [14, теорема 1.1]; см. также [9, замечание 5.7.6]): если  $u_0 \in H^2(\mathbb{R}_x^1) \cap L^2(e^{x^2} dx)$ , то при каждом  $R > 0$  найдется такое  $T > 0$ , что классическое решение  $u(x, t)$  задачи Коши  $u(x, 0) = u_0(x)$  для уравнения (1.2) вещественно-аналитично по  $x$  и  $t$  на прямоугольнике  $(-R, R) \times (0, T) \subset \mathbb{R}_{xt}^2$ . Здесь  $H^2$  означает соболевское пространство. Таким образом, если начальное условие достаточно гладкое (примерно  $C^1$ ) и убывает достаточно быстро при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то решение задачи Коши для (1.2) мгновенно становится вещественно-аналитическим. (Это еще одна причина для изучения класса вещественно-аналитических решений: в него попадает решение любой задачи Коши, как только время сдвинулось с начального момента.) Для уравнения (1.1) с любыми  $n, k$  этот факт пока не установлен, хотя в [15] проведена подготовка для некоторого класса систем, содержащего (1.3).

Наши результаты о свойствах вещественно-аналитических решений уравнения (1.1) с любыми натуральными  $n$  и  $k$  содержатся в следующих двух теоремах. Они не вытекают из результатов об аналитическом сглаживающем эффекте, но и не влекут их.

**Теорема 2.** Для любого  $C^0$ -решения  $u(x, t)$  уравнения (1.1) в окрестности точки  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$  можно указать такое число  $\delta > 0$  и такое мероморфное  $M_{nk}$ -значное отображение  $U(x, t)$  на области  $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta\}$ , что  $U(x, t) = u(x, t)$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  в  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 3.** Пусть все собственные значения матриц  $A$  и  $B$  одного знака. Тогда для любого  $C^0$ -решения  $u(x, t)$  уравнения (1.1) в окрестности точки  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$  существует единственная максимальная полоса  $\Pi(u) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a(u) < t < b(u)\}$ , где  $-\infty \leq a(u) < t_0 < b(u) \leq +\infty$ , и  $C^0$ -решение  $U(x, t)$  уравнения (1.1) на полосе  $\Pi(u)$  такое, что  $U(x, t) = u(x, t)$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Таким образом, по теореме 2 все  $C^0$ -решения уравнения (1.1) аналитически продолжаются в область комплексных значений  $x$  и  $t$ , причем глобально мероморфно по  $x$ . О характере продолжения по  $t$  в общем случае ничего сказать нельзя, т.к. за счет выбора функций  $\varphi_0, \varphi_1$  в теореме 1 можно построить  $C^0$ -решение, продолжение которого на комплексные значения  $x$  и  $t$  имеет любую наперед заданную особенность по  $t$  при данном  $x$ . Во вполне фокусирующем случае теорема 3 гарантирует продолжение любого  $C^0$ -решения до  $C^0$ -решения в некоторой полосе, параллельной оси  $x$ , совсем как для уравнения теплопроводности в упомянутом выше результате

С.В. Ковалевской. Для остальных случаев уравнения (1.1) (вполне дефокусирующего и смешанных) это утверждение также будет верно, но только если допустить полюсы у продолженного в полосу решения (это вытекает из теоремы 2).

Отметим еще, что утверждение теоремы 3 неулучшаемо в следующем смысле. Для любых  $a, b, -\infty \leq a < b \leq +\infty$ , существует  $\mathbb{C}^\omega$ -решение  $u(x, t)$  вполне фокусирующего уравнения (1.1) на полосе  $\Pi = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b\}$ , не допускающее  $\mathbb{C}^\omega$ -продолжения ни через одну граничную точку этой полосы. Такое решение можно построить с помощью теоремы 1 (для этого, согласно теореме 2, достаточно, чтобы хотя бы одна из функций  $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$  на интервале  $a < t < b$  не допускала даже мероморфного продолжения в окрестности точек  $t = a$  и  $t = b$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}_t^1$ ).

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Полагая  $u(x, t) = p(x, t) + iq(x, t)$ , перепишем (1.1) в виде следующей системы на вещественные  $n \times k$ -матричнозначные функции  $p$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -q_t + R(p, q, p^T, q^T), \\ q_{xx} &= p_t + S(p, q, p^T, q^T), \end{aligned}$$

где  $R$  и  $S$  – полиномы с вещественными матричными коэффициентами. К этой системе применима теорема Коши–Ковалевской (см. [16, гл. I, § 7]), согласно которой для любой точки  $t_0 \in (t_1, t_2)$  и любых вещественно-аналитических  $M_{nk}$ -значных функций  $p_0(t), p_1(t), q_0(t), q_1(t)$ , заданных в окрестности точки  $t_0$ , единственное решение указанной системы с начальными условиями

$$\begin{aligned} p(x_0, t) &= p_0(t), & \partial_x p(x_0, t) &= p_1(t), \\ q(x_0, t) &= q_0(t), & \partial_x q(x_0, t) &= q_1(t), \end{aligned}$$

задаваемое формальными степенными рядами с  $M_{nk}$ -значными коэффициентами от  $x - x_0$  и  $t - t_0$ , является сходящимся в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ . Если при этом начальные условия – вещественные матрицы, то все коэффициенты указанных степенных рядов также вещественные матрицы, а значит,  $p(x, t)$  и  $q(x, t)$  – вещественные  $M_{nk}$ -значные функции при всех вещественных значениях  $x$  и  $t$  вблизи точки  $(x_0, t_0)$ . Применив эти соображения к начальным функциям  $p_j(t) = \operatorname{Re} \varphi_j(t)$  и  $q_j(t) = \operatorname{Im} \varphi_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , во всех точках  $t_0$  интервала  $(t_1, t_2)$  и взяв объединение полученных окрестностей точек  $(x_0, t_0)$  в качестве  $\Omega$ , приходим к требуемому заключению.

## 3. ПОДГОТОВКА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 2

### 3.1. Представление нулевой кривизны

Хорошо известен следующий факт (см., например, [17, п. 1.61]). Пусть  $U$  и  $V$  – гладкие  $gl(N, \mathbb{C})$ -значные функции на односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}_{xt}^2$  (или голоморфные функции на односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{C}_{xt}^2$ ). Тогда система

$$E_x = UE, \quad E_t = VE \tag{3.1}$$

имеет гладкое (или голоморфное) обратимое решение  $E : \Omega \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$  в том и только том случае, когда всюду на  $\Omega$  выполнено условие совместности

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и далее через  $[U, V] := UV - VU$  обозначается коммутатор матриц. В дальнейшем мы полагаем  $N = n + k$  и записываем элементы из  $gl(N, \mathbb{C})$  в виде блочных матриц:

$$gl(N, \mathbb{C}) = M_{NN} = \begin{pmatrix} M_{nn} & M_{nk} \\ M_{kn} & M_{kk} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Вводя дополнительный *спектральный параметр*  $z \in \mathbb{C}$ , рассмотрим в качестве  $U(x, t, z)$  и  $V(x, t, z)$  следующие полиномы степеней 1 и 2 по  $z$ :

$$U(x, t, z) = az + q(x, t) \quad \text{и} \quad V(x, t, z) = bz^2 + F_1q(x, t)z + F_2q(x, t) \quad (3.4)$$

с постоянными диагональными матрицами  $a, b$  и блочно-внедиагональной относительно разложения (3.3) матрицей  $q(x, t)$  вида

$$a = b = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_k \end{pmatrix}, \quad q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ v(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

причем матричнозначные полиномы

$$F_1q = \frac{q}{2i}, \quad F_2q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} uv & -u_x \\ v_x & -vu \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

от  $q$  и  $q_x$  подобраны так, чтобы левая часть уравнения (3.2) не зависела от  $z$ . Тогда условие совместности (3.2) вспомогательной линейной системы (3.1) записывается в виде следующей системы из двух матричнозначных уравнений на компоненты  $u, v$  матрицы  $q$ :

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} - 2uvu &= 0 \in M_{nk}, \\ iv_t - v_{xx} + 2vuv &= 0 \in M_{kn}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если мы дополнительно наложим на эти компоненты условие (в котором переменные  $x$  и  $t$  считаются комплексными, отсюда сопряжение в правой части)

$$-2v(x, t) := Au^*(\bar{x}, \bar{t})B \quad (3.8)$$

и заменим  $t$  на  $-t$ , то каждое из двух уравнений системы (3.7) принимает вид (1.1) (здесь важны эрмитовость и обратимость матриц  $A$  и  $B$ ). Таким образом, уравнение (1.1) представлено как условие совместности вспомогательной линейной системы (3.1), заданной равенствами (3.4)–(3.6), (3.8). Это представление (или его аналоги) используется во всех работах, изучающих матричное нелинейное уравнение Шрёдингера (1.1) и его частные случаи (1.2), (1.3) методом обратной задачи теории рассеяния (см. [1]–[8]).

### 3.2. Условие невырожденности

Одним из результатов локального голоморфного варианта метода обратной задачи теории рассеяния [18], [19] является следующий факт. Все локальные голоморфные решения  $q(x, t)$  условия совместности (3.2) вспомогательной линейной системы (3.1), заданной равенствами (3.4) с произвольными постоянными диагональными матрицами  $a, b \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$  и внедиагональной  $\text{gl}(N, \mathbb{C})$ -значной функцией  $q(x, t)$ , а также надлежащим обобщением равенств (3.6) на этот случай, допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций от  $x \in \mathbb{C}$ , если выполнено условие невырожденности:

$$\text{диагональные матрицы } a \text{ и } b \text{ имеют простой спектр.} \quad (3.9)$$

(Напомним, что матрица имеет простой спектр, если все ее собственные значения различны.) В случае невыполнения условия (3.9), к приведенному выше утверждению имеются контр-примеры, например, система Дринфельда–Соколова [20], [21], ассоциированная с уравнениями Лакса  $L_t = [P, L]$ , где  $L = \partial^4 + u_2(x, t)\partial^2 + u_1(x, t)\partial + u_0(x, t)$  и  $P = L_+^{1/2}$ . Для этой системы  $a = \text{diag}(1, -1, i, -i)$  и  $b = a^2 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ .

В нашем случае матриц  $a = b$ , заданных равенством (3.5), условие невырожденности (3.9) выполнено тогда и только тогда, когда  $n = k = 1$ . Поэтому теорема 2 была до сих пор доказана [22] только в скалярном случае  $n = k = 1$ .

### 3.3. Ключевое алгебраическое свойство

Несмотря на невыполнение условия невырожденности (3.9) для интересующих нас матриц (3.5), рассуждения из [18], [19] могут быть проведены с надлежащими модификациями, если вместо всех внедиагональных голоморфных  $\text{gl}(N, \mathbb{C})$ -значных функций  $q(x, t)$  рассматривать только

блочно-внедиагональные (как и указано в (3.5)) и воспользоваться следующим алгебраическим свойством (3.10) матрицы  $a$  из (3.5).

Обозначим через  $D := M_{nn} \oplus M_{kk}$  и  $W := M_{nk} \oplus M_{kn}$  векторные пространства всех блочно-диагональных и блочно-внедиагональных  $N \times N$ -матриц относительно разложения (3.3). Они являются инвариантными подпространствами линейного оператора  $\mathcal{A} : \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ , заданного формулой  $\mathcal{A}(X) := [a, X]$ , причем  $\mathcal{A} \equiv 0$  на подпространстве  $D$  и

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix}$$

на подпространстве  $W$ . В частности,

$$\text{линейный оператор } \mathcal{A} : W \rightarrow W \text{ обратим.} \tag{3.10}$$

Это свойство многократно применяется в следующем пункте и еще дважды – в следующем разделе для проверки выполнения условий леммы 3.

### 3.4. Формальные калибровочные преобразования

Пусть  $\mathbb{O}(x_0)$  есть множество всех  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ -значных голоморфных ростков в точке  $x_0 \in \mathbb{C}$ , а  $\mathcal{D}(x_0)$  и  $\mathcal{N}(x_0)$  – его подмножества, состоящие из всех  $D$ -значных (т.е. блочно-диагональных) и  $W$ -значных (т.е. блочно-внедиагональных) ростков соответственно. Для любой матрицы  $X \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  обозначим через  $X_d$  ее блочно-диагональную часть (проекцию на  $D$  в разложении  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) = D \oplus W$ ), а через  $X_{od} := X - X_d$  ее блочно-внедиагональную часть.

Обсудим вопрос о приведении первого уравнения  $E_x = UE$  системы (3.1) к блочно-диагональному виду с помощью замены неизвестной функции  $E$  на новую неизвестную функцию  $F = \Phi E$  для некоторой  $GL(N, \mathbb{C})$ -значной функции  $\Phi(x, z)$ . В этом случае новое уравнение принимает вид  $F_x = VF$ , где  $V = \Phi_x \Phi^{-1} + \Phi U \Phi^{-1}$ . Нам будет удобно считать зависимость от спектрального параметра  $z$  формальной, введя следующую терминологию.

Назовем *связностью* любой формальный ряд Лорана вида  $U(x, z) = az + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)z^{-k}$ , где матрица  $a$  задана формулой (3.5) и  $u_k \in \mathbb{O}(x_0)$  для всех  $k$ . *Калибровочным преобразованием* называется любой ряд вида

$$\Phi(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)z^{-(k+1)},$$

где  $\varphi_k \in \mathbb{O}(x_0)$  для всех  $k \geq 0$ . Такие преобразования образуют группу относительно обычного умножения формальных степенных рядов от  $1/z$ . По определению, действие элемента  $\Phi$  этой группы переводит связность  $U$  в связность  $V := \Phi_x \Phi^{-1} + \Phi U \Phi^{-1}$ . Это определение равносильно дифференциальному уравнению  $\Phi_x = V\Phi - \Phi U$  или равенству  $\partial_x - V = \Phi(\partial_x - U)\Phi^{-1}$  дифференциальных операторов первого порядка. Из последнего равенства легко вывести групповое свойство: если  $\Phi$  переводит  $U$  в  $V$ , а  $\Psi$  переводит  $V$  в  $W$ , то действие ряда  $\Psi\Phi$  переводит  $U$  в  $W$ , а действие обратного ряда  $\Phi^{-1}$  переводит  $V$  в  $U$ .

**Лемма 1.** Пусть  $q \in \mathcal{N}(x_0)$ . Тогда для любого набора блочно-диагональных ростков  $\kappa_j \in \mathcal{D}(x_0)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и любого набора блочно-диагональных матриц  $C_j \in D$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) существует единственный формальный степенной ряд вида

$$\Phi(x, z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)z^{-j} \text{ с } \varphi_j \in \mathbb{O}(x_0) \text{ (} j = 1, 2, \dots \text{),}$$

удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\partial_x \Phi(x, z) = (az + q(x))\Phi(x, z) - \Phi(x, z) \left( az + \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k(x)z^{-k} \right) \tag{3.11}$$

и нормировочному условию  $\{\varphi_j(x_0)\}_d = C_j$  при  $j = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Сравнение коэффициентов при степенях  $z$  в левой и правой частях уравнения (3.11) дает равенства  $0 = [a, \varphi_1] + q$  (при  $z^0$ ) и  $\varphi'_j = [a, \varphi_{j+1}] + q\varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j$  (при  $z^{-j}$ ,  $j \geq 1$ ). Полагая  $D_j := (\varphi_j)_d$  и  $N_j := (\varphi_j)_{od}$ , запишем эти равенства в виде

$$0 = [a, N_1] + q, \tag{E_{od}^0}$$

$$D'_j = (qN_j)_d - \sum_{k=1}^{j-1} D_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j, \tag{E_d^j}$$

$$N'_j = [a, N_{j+1}] + qD_j + (qN_j)_{od} - \sum_{k=1}^{j-1} N_k \varkappa_{j-k}. \tag{E_{od}^j}$$

Свойство (3.10) позволяет нам последовательно найти (т.е. выразить через  $q$ ,  $\varkappa_j$  и  $C_j$ ) ростки  $N_1(x) = -\mathcal{A}^{-1}q(x)$  из  $(E_{od}^0)$ ,  $D_1(x) = C_1 + \int_{x_0}^x ((q(s)N_1(s))_d - \varkappa_1(s))ds$  из  $(E_d^1)$ ,  $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N'_1 - qD_1 - (qN_1)_{od})$  из  $(E_{od}^1)$ ,  $D_2$  из  $(E_d^2)$ ,  $N_3$  из  $(E_{od}^2)$  и т.д.

**Лемма 2.** *Всякое калибровочное преобразование связности  $U_0(x, z) \equiv az$  в себя блочно-диагонально и не зависит от  $x$ .*

**Доказательство.** Уравнения  $(E_{od}^0)$ ,  $(E_d^j)$  и  $(E_{od}^j)$  с  $q \equiv 0$  и  $\varkappa_j \equiv 0$  принимают вид

$$0 = [a, N_1], \quad D'_j = 0, \quad N'_j = [a, N_{j+1}].$$

Отсюда в силу (3.10) по индукции вытекает, что  $N_j \equiv 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots$ . Так как  $D'_j = 0$ , то оставшиеся матрицы  $D_j$  не зависят от  $x$ .

### 3.5. Классы Жевре

Построенные в п. 3.4 калибровочные преобразования, как правило, расходятся (имеют нулевой радиус сходимости) как степенные ряды от  $1/z$ . Удобный способ количественно измерять скорость этой расходимости доставляется понятием класса Жевре.

Для каждого  $\alpha \geq 0$  будем обозначать через  $\text{Gev}_\alpha$  и называть классом Жевре  $\alpha$  множество всех формальных степенных рядов вида  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k z^{-(k+1)}$  с  $\varphi_k \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$  таких, что ряд  $\sum_{k=0}^\infty (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$  имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь  $|\cdot|$  означает любую норму на  $\text{gl}(N, \mathbb{C})$ , обладающую свойством  $|AB| \leq |A||B|$ . Обозначим через  $\text{Gev}_\alpha^{od}$  множество всех блочно-внедиагональных  $\varphi \in \text{Gev}_\alpha$ , т.е. таких, что  $\varphi_k \in \mathcal{W}$  для всех  $k \geq 0$ . Кроме того, при  $\alpha \geq 0$  и  $A > 0$  обозначим через  $G_\alpha(A)$  множество всех формальных степенных рядов  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k z^{-(k+1)}$  с  $\varphi_k \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$  таких, что  $\|\varphi\|_{\alpha, A} := \sum_{k=0}^\infty (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$ . Тогда ясно, что  $G_\alpha(A)$  есть банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_{\alpha, A}$ , изометрически изоморфное пространству  $l_1$ , и что для всех  $\alpha \geq 0$  выполнено равенство

$$\text{Gev}_\alpha = \bigcup_{A>0} G_\alpha(A).$$

Устанавливать принадлежность формальных степенных рядов тем или иным классам Жевре мы будем с помощью следующей леммы.

**Лемма 3.** *Пусть даны целые числа  $m, \nu \geq 1$  и зависящее от параметра  $z \in \mathbb{C}$  дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = z^m Ay + \sum_{k=0}^{m-1} z^k B_k(x, y) \tag{3.12}$$

на  $\mathbb{C}^\nu$ -значную голоморфную функцию  $y(x)$  в окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{C}$ , где  $A : \mathbb{C}^\nu \rightarrow \mathbb{C}^\nu$  есть обратимый линейный оператор, а каждое  $B_k(x, y)$  есть полином от компонент вектора  $y$  с  $\mathbb{C}^\nu$ -значными

коэффициентами, голоморфными в точке  $x_0$ . Тогда это уравнение имеет единственное формальное решение вида

$$y(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)z^{-k}$$

с  $\mathbb{C}^V$ -значными коэффициентами, голоморфными в точке  $x_0$ . При этом все  $\mathbb{C}^V$ -значные ростки  $a_k(x)$  голоморфны в некоторой общей для них окрестности точки  $x_0$ ,  $a_0(x) \equiv 0$ , и формальный ряд  $y(x_0, \cdot)$  принадлежит классу Жевре  $\text{Gev}_{1/m}$ .

Эта лемма является частным случаем результата Я. Сибуя об асимптотике решений сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [23, теорема А.5.4.1] или [24, теорема XII-5-2]). Ее короткое прямое доказательство приведено в [19, § 5.2].

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Применяя лемму 1 с  $\kappa_j \equiv 0$  и  $C_j = 0$  при всех  $j \in \mathbb{N}$ , мы видим, что для любого ростка  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  существует единственное формальное решение

$$\mu(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x)z^{-(k+1)}, \quad m_k \in \mathbb{O}(x_0),$$

дифференциального уравнения  $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$  такое, что все коэффициенты  $m_k(x_0)$  формального степенного ряда

$$Lq(z) := \mu(x_0, z) - I \tag{4.1}$$

блочно-внедиагональны (т.е. принадлежат  $W$ ). Ряд  $Lq(z)$  называется локальными данными рассеяния голоморфного блочно-внедиагонального ростка  $q(x)$  в точке  $x_0$ . Наше доказательство теоремы 2 устроено как серия лемм о свойствах отображения  $q \mapsto Lq$  и обратного к нему.

**Лемма 4.**  $Lq \in \text{Gev}_1^{od}$  для всех  $q \in \mathcal{N}(x_0)$ .

**Доказательство.** Полагая в равенствах  $(E_{od}^0)$ ,  $(E_d^j)$  и  $(E_{od}^j)$ , эквивалентных уравнению (3.11),  $D_j \equiv 0$  для всех целых  $j \geq 1$ , можно последовательно найти  $N_1 = -\mathcal{A}^{-1}q$  из  $(E_{od}^0)$ ,  $\kappa_1 = (qN_1)_d$  из  $(E_d^1)$ ,  $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N_1 - (qN_1)_{od})$  из  $(E_{od}^1)$ ,  $\kappa_2 = (qN_2)_d$  из  $(E_d^2)$ ,  $N_3$  из  $(E_{od}^2)$  и т.д. Это означает, что для любого  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  существует единственное калибровочное преобразование  $M(x, z)$  некоторой блочно-диагональной связности (в наших обозначениях равной  $az + \kappa(x, z)$ , где  $\kappa(x, z) := \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j(x)z^{-j}$ ) в связность  $az + q(x)$  такое, что формальный степенной ряд  $M(x, z) - I$  блочно-внедиагонален для всех  $x$  из той окрестности точки  $x_0$ , в которой определен росток  $q$ . Покажем, что

$$Lq(z) = M(x_0, z) - I. \tag{4.2}$$

Действительно, существует блочно-диагональное калибровочное преобразование  $\delta(x, z)$  связности  $U_0(x, z) \equiv az$  в связность  $az + \kappa(x, z)$  (оно строится отдельно на каждом блоке). Тогда  $\Delta(x, z) := \delta^{-1}(x, z)M^{-1}(x, z)\mu(x, z)$  есть калибровочное преобразование связности  $U_0(x, z) \equiv az$  в себя, а все такие преобразования блочно-диагональны и не зависят от  $x$  по лемме 2. Из равенства  $\mu = M\delta\Delta = \delta\Delta + (M - I)\delta\Delta$  в силу блочной диагональности  $\delta\Delta$  и блочной внедиагональности  $M - I$  вытекает, что  $\mu_d = \delta\Delta$  и  $\mu_{od} = (M - I)\delta\Delta$ . Отсюда получаем равенство  $\mu_{od} = (M - I)\mu_d$ , которое при  $x = x_0$  превращается в (4.2).

Покажем теперь, что  $M(x_0, \cdot) - I \in \text{Gev}_1$ . Рассмотрим блочно-внедиагональный степенной ряд  $N(x, z) := M(x, z) - I$ . Уравнение (3.11) для  $M(x, z)$ , имеющее вид  $M_x = (az + q)M - M(az + \kappa)$ , переписывается в терминах  $N(x, z)$  так:  $N_x = z\mathcal{A}N + q(I + N) - (I + N)\kappa$ . Взяв блочно-диагональные части, получим  $0 = (qN)_d - \kappa$ . Подставляя теперь  $\kappa = (qN)_d$  в блочно-внедиагональные части, получаем уравнение вида (3.12), которому удовлетворяет  $N$ :

$$N_x = z\mathcal{A}N + q + (qN)_{od} - N(qN)_d,$$

где  $\mathcal{A}N = [a, N]$ , как в п. 3.3. Применив лемму 3 с  $m = 1$  (для чего надо записать все компоненты матрицы  $N$  в один вектор  $y \in \mathbb{C}^V$  и воспользоваться свойством (3.10) оператора  $\mathcal{A}$ ), получим, что  $N(x_0, \cdot) \in \text{Gev}_1$ .

**Лемма 5.** *Отображение  $L : \mathcal{N}(x_0) \rightarrow \text{Gev}_1^{od}$  инъективно.*

**Доказательство.** Зададим матрицы  $q_j, m_{jk} \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$  формулами  $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x - x_0)^j$  и  $\mu(x, z) = I + \sum_{j,k=0}^{\infty} m_{jk}(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ . Сравнение коэффициентов при  $(x - x_0)^j z^0$  в равенстве  $\mu_x = [az, \mu] + q\mu$  дает набор уравнений

$$[a, m_{j0}] + q_j = 0, \quad j \geq 0, \tag{4.3}$$

а сравнение коэффициентов при  $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$  в том же равенстве дает

$$(j + 1)m_{j+1,k} = [a, m_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^j q_s m_{j-s,k}, \quad j, k \geq 0. \tag{4.4}$$

Пусть нам известны коэффициенты  $m_{0k} \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$  формального ряда  $Lq(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{0k} z^{-(k+1)}$ . Задача состоит в том, чтобы выразить через них матрицы  $m_{j0} \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$ , в терминах которых можно найти  $q_j = [m_{j0}, a]$  согласно (4.3). На шаге 1 мы находим  $q_0 = [m_{00}, a]$  из (4.3) и замечаем, что равенства (4.4) с  $j = 0$  выражают набор всех  $m_{1k}$  через набор всех  $m_{0k}$  и  $q_0$ . Это позволяет нам на шаге 2 найти  $q_1 = [m_{10}, a]$  из (4.3) и выразить все  $m_{2k}$  через уже известные матрицы  $m_{1k}, m_{0k}, q_0, q_1$  посредством равенств (4.4) с  $j = 1$ . Продолжая таким образом, получаем явные формулы для всех коэффициентов  $q_j$  ростка  $q(x)$  через коэффициенты  $m_{0k}$  формального ряда  $Lq(z)$ , чем и доказана инъективность отображения  $L$ .

Для формулировки следующей леммы определим отображение  $B : \text{Gev}_1 \rightarrow \mathcal{N}(x_0)$  по формуле

$$B\varphi(x) := \text{res}[\gamma_-(x, z), a], \quad \text{где} \quad \text{res} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \right\} := c_{-1} \tag{4.5}$$

означает вычет формального ряда Лорана, а через  $\gamma_-(x, \cdot) \in I + \text{Gev}_1$  обозначено единственное решение задачи Римана

$$e^{a(x-x_0)z}(I + \varphi(z))^{-1} = \gamma_-^{-1}(x, z)\gamma_+(x, z) \tag{4.6}$$

(см. [18, § 5] или [19, § 4, особенно п. 4.3 и равенство (4.8)]). Указанное решение существует для всех  $x$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ , имеет вид  $\gamma_-(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)z^{-(j+1)}$  для некоторых ростков  $g_j \in \mathcal{O}(x_0)$  и является (согласно лемме 4.9 работы [19]) калибровочным преобразованием связности  $U_0(x, z) = az$  в связность  $U(x, z) = az + B\varphi(x)$ , причем  $\gamma_-(x_0, z) = I + \varphi(z)$ .

**Лемма 6.** *Имеем  $LB\varphi = \varphi$  для всех  $\varphi \in \text{Gev}_1^{od}$ . В частности, отображение  $L : \mathcal{N}(x_0) \rightarrow \text{Gev}_1^{od}$  биективно и обратным к нему является сужение отображения  $B : \text{Gev}_1 \rightarrow \mathcal{N}(x_0)$  на  $\text{Gev}_1^{od}$ .*

**Доказательство.** Положим  $q(x) := B\varphi(x)$ . Тогда  $\gamma_-(x, z)$  является калибровочным преобразованием связности  $U_0(x, z) := az$  в связность  $U(x, z) := az + q(x)$ . Обозначая через  $\mu(x, z)$  калибровочное преобразование из определения (4.1) формального степенного ряда  $Lq(z)$ , мы видим из группового свойства, что  $\Delta(x, z) := \gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z)$  является калибровочным преобразованием связности  $U_0(x, z)$  в себя. Но все такие преобразования по лемме 2 блочно-диагональны и не зависят от  $x$ . В частности, при  $x = x_0$  равенство  $\gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z) = \Delta(x, z)$  принимает вид

$$I + Lq(z) = (I + \varphi(z))\Delta(z)$$

для блочно-диагонального степенного ряда  $\Delta(z) := \Delta(x_0, z)$ . Отделяя здесь блочно-диагональные и внедиагональные части и пользуясь (впервые в этом рассуждении) блочной внедиагональностью  $\varphi(z)$ , мы получаем равенства  $I = \Delta(z)$  и  $Lq(z) = \varphi(z)\Delta(z)$ , влекущие требуемое равенство  $Lq(z) = \varphi(z)$ .

Тем самым доказана сюръективность  $L$  как отображения  $\mathcal{N}(x_0) \rightarrow \text{Gev}_1^{od}$ . Вместе с леммой 5 это влечет, что указанное отображение биективно, причем  $L$  и  $B$  суть обратные друг к другу биекции между множествами  $\mathcal{N}(x_0)$  и  $\text{Gev}_1^{od}$ .

**Лемма 7.** Пусть  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  и  $Lq \in \text{Gev}_\alpha$  при некотором  $\alpha < 1$ . Тогда существует такая глобально-мероморфная функция  $Q : \mathbb{C}_x^1 \rightarrow W$ , что  $Q(x) = q(x)$  для всех  $x$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Доказательство.** Если росток  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  таков, что формальный ряд  $\varphi := Lq$  принадлежит  $\text{Gev}_\alpha$  при каком-то  $\alpha < 1$ , то задача Римана (4.6) из определения ростка  $B\varphi$  подпадает под условия теоремы 3(B) из [18] (или теоремы 4(B) из [19]) с  $m = 1$  и  $\Omega = \mathbb{C}_x^1$ . По указанной теореме,  $\gamma_-(x, z)$  является глобально-мероморфной функцией от  $x \in \mathbb{C}$  со значениями в банаховом пространстве  $G_1(A)$  для любого  $A > 0$ . Отсюда вытекает глобальная мероморфность всех коэффициентов  $g_j(x)$  разложения  $\gamma_-(x, z) = \sum_{j=0}^\infty g_j(x)z^{-(j+1)}$ , а значит, и глобальная мероморфность  $\text{gl}(N, \mathbb{C})$ -значной функции  $B\varphi(x) = [g_0(x), a]$ , определенной равенством (4.5). Но так как по лемме 6 имеем  $BLq = q$  для всех  $q \in \mathcal{N}(x_0)$ , то росток построенной функции  $Q(x) := B\varphi(x) = BLq(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_x^1)$  в точке  $x_0$  совпадает с исходным ростком  $q(x)$ .

**Лемма 8.** Пусть  $q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$  и задача Коши  $q(x, t_0) = q_0(x)$  для уравнения (3.2) с полиномами  $U, V$  вида (3.4)–(3.6) или, что то же самое, для системы (3.7) на компоненты  $u, v$  матрицы  $q$  имеет локальное голоморфное решение  $q(x, t)$  в окрестности точки  $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ . Тогда  $Lq_0 \in \text{Gev}_{1/2}$ .

**Доказательство.** Будем обозначать через  $\mathbb{O}(x_0, t_0)$  множество всех голоморфных  $\text{gl}(N, \mathbb{C})$ -значных ростков в точке  $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ , а через  $\mathcal{N}(x_0, t_0)$  подмножество всех блочно-внедиагональных ростков. Сначала рассмотрим произвольный росток  $q \in \mathcal{N}(x_0, t_0)$ . По лемме 1, при каждом фиксированном  $t$ , близком к  $t_0$ , существует единственный формальный степенной ряд  $\mu(x, t, z) = I + \mu_1(x, t)z^{-1} + \mu_2(x, t)z^{-2} + \dots$  с коэффициентами из  $\mathbb{O}(x_0, t_0)$  такой, что  $\mu_x = (az + q)\mu - \mu az$  и ряд  $\mu(x, t, z) - I$  блочно-внедиагонален. (Отметим, что голоморфность всех  $\mu_k(x, t)$  по  $t$  ясна из доказательства леммы 1 и что формальный ряд  $\mu(x_0, t_0, z) - I$  по определению совпадает с данными рассеяния  $Lq_0(z)$  ростка  $q_0(x) := q(x, t_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ .) Положим

$$V(x, t, z) := bz^2 + F_1(q)(x, t)z + F_2(q)(x, t). \tag{4.7}$$

Это полином степени 2 от  $z$  с коэффициентами из  $\mathbb{O}(x_0, t_0)$ .

Покажем, что если росток  $q \in \mathcal{N}(x_0, t_0)$  удовлетворяет уравнению (3.2) как в условии леммы, то формальный ряд Лорана  $\tilde{V} := -\mu^{-1}\mu_t + \mu^{-1}V\mu$  имеет вид

$$\tilde{V}(x, t, z) = bz^2 + \sum_{k=-\infty}^1 \varphi_k(t)z^k \tag{4.8}$$

для некоторых блочно-диагональных ростков  $\varphi_k \in \mathbb{O}(t_0)$ . Действительно, вводя в рассмотрение полиномы  $U(x, t, z) := az + q(x, t)$  и  $\tilde{U}(x, t, z) := az$  степени 1 от  $z$  с коэффициентами из  $\mathbb{O}(x_0, t_0)$ , мы можем переформулировать определение ряда  $\mu(x, t, z)$  так:  $\mu(x, t, z)$  есть калибровочное преобразование связности  $\tilde{U}(x, t, z)dx + \tilde{V}(x, t, z)dt$  в связность  $U(x, t, z)dx + V(x, t, z)dt$  в том же смысле, что и в п. 3.4. С другой стороны, выполнение уравнения (3.2) для ростка  $q \in \mathcal{N}(x_0, t_0)$  эквивалентно тому, что связность  $U dx + V dt$  плоская:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad \text{в окрестности точки } (x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2.$$

Так как кривизна связности меняется ковариантным образом при калибровочных преобразованиях (в том числе и формальных), то получаем отсюда равенство  $\tilde{U}_t - \tilde{V}_x + [\tilde{U}, \tilde{V}] = 0$ , т.е.  $\tilde{V}_x = [az, \tilde{V}]$ . Подставляя разложение  $\tilde{V}(x, t, z) = \sum_{k=-\infty}^2 \varphi_k(x, t)z^k$  в равенство  $\tilde{V}_x = [az, \tilde{V}]$ , приходим к системе

$$(\partial_x \varphi_k)_d = 0, \quad (\partial_x \varphi_k)_{od} = [a, (\varphi_{k-1})_{od}] \quad \text{для всех целых } k \leq 2,$$



откуда убывающей индукцией по  $k$ , начиная с уже известного коэффициента  $\varphi_2(x, t) \equiv b$ , убеждаемся, что все матрицы  $\varphi_k(x, t)$  блочно-диагональны и не зависят от  $x$ , чем и доказано утверждение (4.8).

По самому определению ряда  $\tilde{V}$ , блочно-внедиагональный ряд  $N(t, z) := \mu(x_0, t, z) - I$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $N_t = V(I + N) - (I + N)\tilde{V}$ . Отделяя в этом равенстве блочно-диагональные части, имеем  $0 = V_d + (V_{od}N)_d - \tilde{V}$ . Подставляя теперь  $\tilde{V} = V_d + (V_{od}N)_d$  в блочно-внедиагональные части, получаем уравнение вида (3.12), которому удовлетворяет  $N(t, z)$ :

$$N_t = VN - NV_d + V_{od} - (I + N)(V_{od}N)_d.$$

Чтобы проверить, что это уравнение действительно имеет вид (3.12) (с переменной  $t$  вместо  $x$  и после записи всех матричных элементов  $N$  в один вектор  $y \in \mathbb{C}^v$ ), заметим следующее. Во-первых, как разность между  $VN - NV_d$  и  $[bz^2, N]$ , так и выражение  $V_{od}$  являются полиномами степени не выше 1 от  $z$ , коэффициенты которых зависят голоморфно от  $t$  и полиномиально от  $N$ . Во-вторых, линейный оператор  $\mathcal{A}N = [b, N]$  на пространстве  $\mathcal{W}$  обратим согласно (3.10). Поэтому выполнены условия леммы 3 с  $m = 2$ , которая и дает, что формальный ряд  $Lq_0(z) = N(t_0, z)$  принадлежит классу  $\text{Gev}_{1/2}$ .

Теорема 2 вытекает из лемм 7 и 8. Действительно, пусть  $u(x, t)$  – любое  $\mathbb{C}^0$ -решение уравнения (1.1) в окрестности точки  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ . Подставляя в степенные ряды для всех компонент отображения  $u(x, t)$  комплексные значения переменных  $x$  и  $t$ , можно считать  $u(x, t)$  голоморфной  $M_{nk}$ -значной функцией в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  в  $\mathbb{C}^2$ . Тогда, согласно (3.8), блочно-внедиагональная функция

$$q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, -t) \\ v(x, -t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad -2v(x, -t) = Au^*(\bar{x}, -\bar{t})B, \tag{4.9}$$

является голоморфным решением системы (3.7) в окрестности  $(x_0, -t_0)$  в  $\mathbb{C}$ . По лемме 8 имеем  $Lq(z, -t) \in \text{Gev}_{1/2}$  для всех  $t \in \mathbb{C}$ , близких к  $t_0$ . Тогда по лемме 7 функция  $Q(x, -t) = BLq(x, -t)$  глобально мероморфна по  $x \in \mathbb{C}^1$  при каждом  $t \in \mathbb{C}$  вблизи  $t_0$  и совпадает с  $q(x, -t)$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$ . Из определения (4.5) отображения  $B$  видно, что функция  $Q(x, -t)$  мероморфна на  $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta\}$  как функция двух переменных. Записав теперь

$$Q(x, -t) = \begin{pmatrix} 0 & U(x, t) \\ V(x, t) & 0 \end{pmatrix},$$

получаем искомое мероморфное продолжение  $U(x, t)$  исходной функции  $u(x, t)$ .

### 5. ПОДГОТОВКА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 3

Фиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Будем называть голоморфный блочно-внедиагональный росток  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  симметричным, если матрица  $q(x)$  косоэрмитова для всех  $x \in \mathbb{R}$ , близких к  $x_0$ . Это эквивалентно тому, что  $q(\bar{x})^* = -q(x)$  для всех  $x \in \mathbb{C}$ , близких к  $x_0$ .

**Лемма 9.** Если росток  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  симметричен, то формальный степенной ряд  $(I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z)) \in I + \text{Gev}_1$  блочно-диагонален.

**Доказательство.** Применим к дифференциальному уравнению  $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ , входящему в определение (4.1) ряда  $Lq(z) = \mu(x_0, z) - I$ , операцию эрмитова сопряжения и заменим в полученном равенстве переменные  $x, z$  на  $\bar{x}, \bar{z}$  соответственно. В силу косоэрмитовости матрицы  $a$  и симметричности  $q(x)$  полученное равенство можно переписать в виде  $v_x = azv - (az + q(x))v$ , означаяшем, что ряд  $v(x, z) := \mu(\bar{x}, \bar{z})^*$  является калибровочным преобразованием связности  $U(x, z) := az + q(x)$  в связность  $U_0(x, z) := az$ . Тогда калибровочное преобразование  $v(x, z)\mu(x, z)$  переводит  $U_0$  в себя. По лемме 2 оно блочно-диагонально. При  $x = x_0$  получаем, что ряд  $v(x_0, z)\mu(x_0, z) = (I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z))$  блочно-диагонален. Принадлежность этого

ряда множеству  $I + \text{Gev}_1$  вытекает из леммы 4 и замкнутости  $I + \text{Gev}_1$  относительно умножения (см. [18, лемма 2] или [19, лемма 4.2]).

**Лемма 10.** Пусть росток  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  симметричен и  $Lq \in \text{Gev}_\alpha$  для некоторого  $\alpha < 1$ . Тогда найдется блочно-диагональный ряд  $r \in I + \text{Gev}_1$  такой, что ряд  $f(z) := (I + Lq(z))r^{-1}(z) \in I + \text{Gev}_1$  удовлетворяет равенству  $f(\bar{z})^* f(z) = I$ .

**Доказательство.** Ясно, что ряд  $\delta(z) := (I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z))$  удовлетворяет равенству  $\delta(\bar{z})^* = \delta(z)$ , т.е. оба блока блочно-диагональной (по лемме 9) матрицы  $\delta(z)$  суть формальные степенные ряды от  $z^{-1}$  с эрмитовыми коэффициентами и со свободным членом  $I$ . По лемме 2 работы [18] (или лемме 4.2 работы [19]) векторное пространство  $\mathbb{C}I + G_1(A)$  является при каждом  $A > 0$  банаховой алгеброй относительно нормы  $\|\lambda I + \phi\| := |\lambda| + A\|\phi\|_{1,A}$  и обычного умножения формальных степенных рядов. Выберем  $A > 0$  столь малым, что  $\|\delta - I\|_{1,A} < 1$  (это возможно в силу условия  $Lq \in \text{Gev}_\alpha$ ,  $\alpha < 1$ , и леммы 4 работы [18]) и, пользуясь голоморфным функциональным исчислением в банаховых алгебрах (см., например, [25, теорема 10.27]), применим отдельно к каждому из двух диагональных блоков матрицы  $\delta(z) - I$  голоморфную функцию  $F(w) = (1 + w)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^\infty C_{1/2}^k w^k$ , где  $|w| < 1$  и  $C_\beta^k := \beta(\beta - 1)\dots(\beta - k + 1)/k!$  для любого  $\beta \in \mathbb{C}$  (при подстановке  $\delta(z) - I$  вместо  $w$  ряд сойдется по норме пространства  $\mathbb{C}I + G_1(A)$ ). Получим блочно-диагональный ряд  $r \in I + \text{Gev}_1$  со свойствами  $r(\bar{z})^* = r(z)$  и  $r(z)^2 = \delta(z)$ . Перепишем последнее равенство в виде  $\delta(z) = r(\bar{z})^* r(z)$ . Тогда формула  $(I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z)) = \delta(z)$  принимает вид  $f(\bar{z})^* f(z) = I$  для  $f := (I + Lq)r^{-1} \in I + \text{Gev}_1$ , что и требовалось.

**Лемма 11.** Пусть росток  $q \in \mathcal{N}(x_0)$  симметричен и  $Lq \in \text{Gev}_\alpha$  для некоторого  $\alpha < 1$ . Тогда глобальное мероморфное продолжение  $Q : \mathbb{C}_x^1 \rightarrow W$  ростка  $q$ , существующее по лемме 7, не имеет полюсов на вещественной оси  $\mathbb{R}_x^1$ .

**Доказательство.** Согласно формуле  $Q = BLq$  из доказательства леммы 7 и определению (4.5) отображения  $B$ , функция  $Q(x)$  голоморфна в каждой точке  $x \in \mathbb{C}$ , для которой задача Римана (4.6) разрешима. С другой стороны, разрешимость (4.6) при заданном значении  $x \in \mathbb{C}$  вытекает из разрешимости при том же  $x$  задачи Римана

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \tilde{\gamma}^{-1}(x, z) \tilde{\gamma}_+(x, z), \tag{5.1}$$

полученной из (4.6) заменой ряда  $I + Lq(z)$  в левой части на ряд  $f(z) := (I + Lq(z))r^{-1}(z)$  из леммы 10. (Действительно, так как блочно-диагональный ряд  $r^{-1}(z)$  коммутирует с диагональной матрицей  $e^{a(x-x_0)z}$ , то (5.1) можно записать в виде  $r(z)e^{a(x-x_0)z}(I + Lq(z))^{-1} = \tilde{\gamma}^{-1}(x, z)\tilde{\gamma}_+(x, z)$ , откуда после умножения слева на  $r^{-1}(z)$  ясно, что ряды  $\gamma_- := \tilde{\gamma}_- r$  и  $\gamma_+ := \tilde{\gamma}_+$  образуют решение (4.6).) Поэтому достаточно доказать разрежимость задачи Римана (4.6) для всех  $x \in \mathbb{R}^1$ . Это и делается далее.

Будем обозначать через  $\{\cdot\}_+$  и  $\{\cdot\}_-$  положительную и отрицательную части ряда Лорана:

$$\left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \right\}_+ := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \quad \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \right\}_- := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$$

и введем обозначение  $E_0(x, z) := e^{a(x-x_0)z}$ . Согласно сказанному в [18, § 5], для разрешимости изучаемой нами задачи Римана (5.1) достаточно, чтобы был обратим оператор  $X := I + T^{-1}M^{-1}K$ , стоящий в левой части равенства (11) работы [18], где  $T\phi := \{\phi E_0\}_-$ ,  $M\phi := \phi f^{-1}$ ,  $K\phi := \{\{\phi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$ . Отметим, что в силу леммы 6 работы [18],  $X$  есть фредгольмов оператор индекса 0 на банаховом пространстве  $G_1(A)$  для надлежащего  $A > 0$  (где можно считать  $2B_0 < A < A_0$ , см. выбор  $B, A_1, A_2$  сразу после доказательства леммы 7 работы [18]). Согласно альтернативе Фредгольма (см., например, [25, теорема 4.25]), этот оператор обратим тогда и только тогда, когда имеет нулевое ядро. Поэтому достаточно проверить, что если  $\phi \in G_1(A)$  и  $X\phi = 0$ , то  $\phi = 0$ .

Для этой проверки заметим, что из равенства  $(I + T^{-1}M^{-1}K)\varphi = 0$  вытекает  $(MT + K)\varphi = 0$ . Но выражение  $(MT + K)\varphi = \{\varphi E_0\}_- f^{-1} + \{\{\varphi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$  совпадает с  $\{\varphi E_0 f^{-1}\}_-$ . Поэтому равенство  $(MT + K)\varphi = 0$  означает, что формальный ряд Лорана  $E(z) := \varphi(z)E_0(z)f^{-1}(z)$  (корректно определенный в силу указанного выше выбора  $A$ ) содержит только неотрицательные степени  $z$ . Значит, это верно и для сопряженного ряда  $E(\bar{z})^* = f^{-1}(\bar{z})^* E_0(\bar{z})^* \varphi(\bar{z})^*$  и для их произведения

$$E(z)E(\bar{z})^* = \varphi(z)E_0(z)\{f(\bar{z})^* f(z)\}^{-1} E_0(\bar{z})^* \varphi(\bar{z})^*,$$

которое в силу свойств  $f(\bar{z})^* f(z) = I$  и  $E_0(\bar{z})^* E_0(z) = I$  равно  $\varphi(z)\varphi(\bar{z})^*$  и, тем самым, содержит только отрицательные степени  $z$ . Следовательно,  $\varphi(z)\varphi(\bar{z})^* \equiv 0$ . Подставляя  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-k-1}$ ,  $\varphi_k \in \text{gl}(N, \mathbb{C})$ , и приравнивая коэффициент при  $z^{-2}$  нулю, получаем  $\varphi_0 \varphi_0^* = 0$ , откуда  $\varphi_0 = 0$ . Тем же рассуждением по индукции выводим, что все матрицы  $\varphi_k$  равны 0, что и требовалось.

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Сделаем замену неизвестной функции в уравнении (1.1) по формуле  $u(x, t) = B_1 \tilde{u}(x, t) A_1$ , где  $A_1 \in \text{GL}(k, \mathbb{C})$ ,  $B_1 \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ . Подставляя это выражение для  $u(x, t)$  в (1.1) и сокращая на  $B_1$  слева и на  $A_1$  справа, получим для  $\tilde{u}(x, t)$  опять уравнение вида (1.1), но с новыми матрицами  $\tilde{A} = A_1 A A_1^*$  и  $\tilde{B} = B_1^* B B_1$ . Во вполне фокусирующем случае, когда все собственные значения эрмитовых матриц  $A$  и  $B$  можно считать положительными, легко подобрать эрмитовы матрицы  $A_1, B_1$  так, что  $\tilde{A} = 2I_k$  и  $\tilde{B} = I_n$ . Тогда, обозначая новую неизвестную функцию опять через  $u(x, t)$ , мы получаем, что матрица  $q(x, t)$ , заданная равенством (4.9), косоэрмитова для всех  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  в окрестности точки  $(x_0, -t_0)$ . В частности, росток  $q_0(x) := q(x, -t_1) \in \mathcal{N}(x_0)$  симметричен при любом выборе  $t_1 \in \mathbb{R}$  вблизи  $t_0$ . Применяя к этому ростку лемму 11, видим, что (существующее по теореме 2) глобальное мероморфное продолжение  $U(x, t)$  исходного решения  $u(x, t)$  не имеет полюсов на  $\mathbb{R}_x^1$  при любом выборе  $t \in \mathbb{R}$  вблизи  $t_0$ . Тем самым получено продолжение исходного ростка  $u(x, t)$  до  $\mathcal{C}^\omega$ -решения  $U(x, t)$  уравнения (1.1) на некоторой полосе  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0 < t < b_0\}$ . Остается взять в качестве  $a(u)$  точную нижнюю грань всех возможных  $a_0$ , а в качестве  $b(u)$  — точную верхнюю грань всех возможных  $b_0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
2. Манаков С.В. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // Ж. эксперим. и теор. физ. 1973. Т. 65. С. 505–516.
3. Makhankov V.G. Soliton phenomenology. Dordrecht: Kluwer, 1990.
4. Наянов В.И. Многополевые солитоны. М.: Физматлит/Наука, 2006.
5. Liu W.M., Kengne E. Schrödinger equations in nonlinear systems. Singapore: Springer, 2019.
6. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
7. Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D. Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
8. Yang J. Nonlinear waves in integrable and non-integrable systems. Philadelphia: SIAM, 2010.
9. Cazenave T. Semilinear Schrödinger equations. Providence: AMS, 2003.
10. Tao T. Nonlinear dispersive equations. Providence: AMS, 2006.
11. von Kowalevsky S. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen // J. reine angew. Math. 1875. В. 80. S. 1–32.
12. Le Roux J. Sur les intégrales analytiques de l'équation  $\partial^2 z / \partial x^2 = \partial z / \partial x$  // Bull. Sci. Math. 1895. V. 19. P. 127–128.
13. Шабат А.Б. Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. М.: Наука, 1985.
14. Hayashi N., Kato K. Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations // Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 273–300.

15. *Hoshino G.* Space-time analytic smoothing effect for a system of nonlinear Schrödinger equations with non pseudo-conformally invariant interactions // Commun. PDE. 2017. V. 42. P. 802–819.
16. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
17. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
18. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. АН Сер. матем. 2010. Т. 74. вып. 3. С. 23–44.
19. *Домрин А.В.* Голоморфные решения солитонных уравнений // Труды Моск. матем. общ. 2021. Т. 82. С. 227–312.
20. *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки техн. Современ. пробл. мат. Т. 24. С. 81–180. М.: ВИНТИ, 1984.
21. *Домрин А.В.* О голоморфных решениях уравнений типа Кортевега–де Фриза // Труды Моск. матем. общ. 2012. Т. 73. С. 241–257.
22. *Домрин А.В.* О вещественно-аналитических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера // Труды Моск. матем. общ. 2014. Т. 75. С. 205–218.
23. *Sibuya Y.* Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation. Providence: AMS, 1990.
24. *Hsieh P.-F., Sibuya Y.* Basic theory of ordinary differential equations. Berlin: Springer, 1999.
25. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.

---

---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---

---

УДК 517.95

**О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ  
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ<sup>1)</sup>**© 2022 г. А. В. Калинин<sup>1,2,\*</sup>, А. А. Тюхтина<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> 603022 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ННГУ, Россия<sup>2</sup> 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, ИПФ РАН, Россия

\*e-mail: avk@mm.unn.ru

\*\*e-mail: kalinmm@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.12.2021 г.  
Переработанный вариант 20.01.2022 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Рассматривается начально-краевая задача для системы нелинейных интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения. Доказывается теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи. На основании свойств полугрупп изотонных операторов, действующих в условно-полных решетках, устанавливается стабилизация решения задачи при  $t \rightarrow \infty$ . Библ. 17.

**Ключевые слова:** система уравнений переноса излучения, нелинейные интегродифференциальные уравнения, полугруппы изотонных операторов.

**DOI:** 10.31857/S0044466922060102**1. ВВЕДЕНИЕ**

Исследование нелинейных процессов переноса излучения приводит к необходимости изучения краевых и начально-краевых задач для нелинейных интегродифференциальных уравнений с частными производными. Вопросы физического, математического и численного моделирования процессов переноса излучения рассматриваются, в частности, в [1]–[7].

В работе [8] изучается нелинейная стационарная система, включающая кинетическое уравнение переноса излучения и уравнения статистического равновесия, возникающие при исследовании модели двухуровневого атома в предположении полного перераспределения излучения по частоте [1]–[3]. Получены строгие результаты о существовании и единственности решения краевой задачи, предложен и обоснован линеаризирующий итерационный алгоритм ее решения.

Соответствующая нестационарная нелинейная система интегродифференциальных уравнений переноса излучения изучалась в работах [9]–[13]. Обсуждались вопросы корректности постановки смешанной задачи для рассматриваемой системы, была установлена стабилизация при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи при произвольных начальных условиях.

В соответствии с физическим смыслом, решения уравнений теории переноса излучения должны быть неотрицательными функциями. В этом случае естественно возникают упорядоченные функциональные пространства, определяемые конусом неотрицательных функций, и при изучении задач возможно применение теории порядковых структур. Как показано в работе [13], вопросы порядковой и метрической стабилизации решений нестационарных задач могут исследоваться на основе общих подходов, связанных со свойствами полугрупп изотонных операторов, действующих в полных и условно полных решетках [14]–[17].

В настоящей работе развиваются результаты работ [9]–[13]. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений, содержащая нестационарное уравнение переноса излучения и систему стационарности для модели двухуровневого атома. Изучается корректность постановки

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательным математическим центром “Математика технологий будущего” (Соглашение № 075-02-2022-883).

начально-краевой задачи для этой системы, исследуется поведение решения задачи при  $t \rightarrow \infty$  с использованием методов теории упорядоченных пространств.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения, соответствующую модели двухуровневого атома [3], [4]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi(x, \nu, \omega, t)}{\partial t} + (\omega, \nabla) \psi(x, \nu, \omega, t) + hv_{12} \frac{\kappa(\nu)}{4\pi} (B_{12} C_1(x, t) - B_{21} C_2(x, t)) \psi(x, \nu, \omega, t) = hv_{12} \frac{\kappa(\nu)}{4\pi} A_{21} C_2(x, t), \tag{2.1}$$

$$\left( C_{12} n_e(x) + B_{12} \int_I \int_{\Omega} \frac{\kappa(\nu)}{4\pi} \psi(x, \nu, \omega, t) d\omega d\nu \right) C_1(x, t) = C_2(x, t) \left( A_{21} + C_{21} n_e(x) + B_{21} \int_I \int_{\Omega} \frac{\kappa(\nu)}{4\pi} \psi(x, \nu, \omega, t) d\omega d\nu \right), \tag{2.2}$$

$$C_1(x, t) + C_2(x, t) = f(x). \tag{2.3}$$

Здесь  $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\omega \in \Omega = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \mathbb{R}^3 : \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\}$ ;  $\nu \in I = [0, \nu_0]$ ;  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ .

Функция  $\psi$  – удельная интенсивность излучения,  $C_1$  и  $C_2$  – пространственные плотности атомов среды, находящихся в основном и в возбужденном состоянии соответственно. Подробная информация о физическом смысле функций и коэффициентов приводится в работах [3], [4].

Пусть  $G$  – выпуклое ограниченное множество с гладкой границей  $\partial G$ , имеющей всюду внешнюю нормаль  $n(x)$  ( $x \in \partial G$ ), и диаметром  $d > 0$ . Система (2.1)–(2.3) дополняется граничным условием

$$\psi(x, \nu, \omega, t) = 0, \quad x \in \partial G, (\omega, n(x)) < 0, \quad \omega \in \Omega, \quad \nu \in I, \quad t \in [0, T], \tag{2.4}$$

соответствующим отсутствию внешнего потока частиц, падающего на границу области, и начальным условием

$$\psi(x, \nu, \omega, 0) = \psi^0(x, \nu, \omega). \tag{2.5}$$

Предполагается, что  $h, \nu_{12}, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}, A_{21}, \nu_0, c$  – заданные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$B_{12} C_{21} - B_{21} C_{12} > 0; \tag{2.6}$$

$n_e(x), f(x), x \in G, \kappa(\nu), \nu \in I$  – заданные функции, измеримые и неотрицательные почти всюду в своих областях определения, удовлетворяющие условиям

$$\text{esssup } n_e = n_e^* < \infty, \quad \text{esssup } f = f^* < \infty, \quad \text{esssup } \kappa(\nu) = \kappa^* < \infty, \quad \int_I \kappa(\nu) d\nu = 1. \tag{2.7}$$

Определим характеристику  $\{l_\omega\}$  дифференциального оператора  $\partial/c\partial t + (\omega, \nabla)$  системой уравнений

$$cdt = \frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} = \frac{d\omega_1}{0} = \frac{d\omega_2}{0} = \frac{d\omega_3}{0} = \frac{d\nu}{0}$$

и обозначим через  $1/c(d/d\tau)_\omega$  оператор дифференцирования вдоль характеристики  $\{l_\omega\}$ :

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \psi(\xi, \nu, \omega, t) = \frac{1}{c} \frac{d\psi(x + c\omega(\tau - t), \nu, \omega, \tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t}.$$

Пусть  $\mathcal{D} = G \times I \times \Omega$ . Для произвольного измеримого подмножества  $\Pi$  евклидова пространства через  $K_\infty(\Pi)$  обозначим конус неотрицательных функций в  $L_\infty(\Pi)$ ;  $D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$  – класс

функций  $\psi \in L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$ , абсолютно непрерывных вдоль почти каждой характеристики  $\{l_\omega\}$  в  $D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$  и таких, что

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \psi \in L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]),$$

$$\mathfrak{M}_T = D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T]),$$

$$\mathfrak{K}_T = K_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times K_\infty(G \times [0, T]) \times K_\infty(G \times [0, T]).$$

Аналогичные классы впервые были введены в работе В.С. Владимирова [6] для стационарных задач теории переноса и использовались при изучении нестационарных задач в [9], [13].

Предполагается, что начальная функция  $\psi_0(x, v, \omega)$  принадлежит классу  $K_\infty(\mathcal{D})$ .

Решением задачи (2.1)–(2.5) называется функция  $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$ , удовлетворяющая системе (2.1)–(2.3) и начальным и краевым условиям (2.4), (2.5) почти всюду, дифференциальный оператор  $d/cdt + (\omega, \nabla)$  в (2.1) понимается как оператор  $1/c (d/d\tau)_\omega$  дифференцирования вдоль характеристики  $\{l_\omega\}$ .

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты системы удовлетворяют условиям (2.6), (2.7). Тогда при любой начальной функции  $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$  и любом  $T > 0$  решение  $\Phi \in \mathfrak{M}_T$  задачи (2.1)–(2.5) существует, единственно и непрерывно зависит от начальной функции  $\psi_0$ . Кроме того, имеет место включение  $\Phi \in \mathfrak{M}_T \cap \mathfrak{K}_T$ .

Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{R}_{12}(\psi)(x, t) = C_{12}n_e(x) + B_{12}J(\psi)(x, t), \quad \mathfrak{R}_{21}(\psi)(x, t) = A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}J(\psi)(x, t), \quad (2.8)$$

$$J(\psi)(x, t) = \int \int_{\Omega} \frac{\kappa(v)}{4\pi} \psi(x, v, \omega, t) d\omega dv, \quad \mathfrak{R}(\psi) = \mathfrak{R}_{12}(\psi)(x, t) + \mathfrak{R}_{21}(\psi)(x, t), \quad (2.9)$$

$$\mathfrak{F}(C)(x, v, t) = hv_{12} \frac{\kappa(v)}{4\pi} (B_{12}C_1(x, t) - B_{21}C_2(x, t)), \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{P}(C)(x, v, t) = hv_{12} \frac{\kappa(v)}{4\pi} A_{21}C_2(x, t). \quad (2.11)$$

В работах [9], [13] подобные обозначения использовались для исследования других классов нестационарных задач теории переноса излучения. Систему (2.1)–(2.3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \psi(x, v, \omega, t) + \mathfrak{F}(C)(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) = \mathfrak{P}(C)(x, v, t), \quad (2.12)$$

$$C_1(x, t) = f(x) \frac{\mathfrak{R}_{21}(\psi)(x, t)}{\mathfrak{R}(\psi)(x, t)}, \quad C_2(x, t) = f(x) \frac{\mathfrak{R}_{12}(\psi)(x, t)}{\mathfrak{R}(\psi)(x, t)}. \quad (2.13)$$

Функция  $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$  является решением задачи (2.1)–(2.5) тогда и только тогда, когда  $\psi \in D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$  – решение задачи (2.12), (2.4), (2.5), где  $C_1, C_2$  в (2.12) определяются по формулам (2.13).

Дифференциальные свойства функционального класса  $D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$  позволяют определить для любого  $T > 0$  однопараметрические семейства операторов

$$\gamma_t : D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \rightarrow L_\infty(\mathcal{D}), \quad t \in [0, T],$$

имеющие смысл “следа” функции  $\psi \in D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$  на множестве  $\mathcal{D} \times \{t\}$ .

Если  $\psi$  – решение задачи (2.12), (2.4), (2.5) из класса  $D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \cap K_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])$ , то значение следа  $\gamma_t \psi$  не зависит от  $T \geq t$  и лежит в  $K_\infty(\mathcal{D})$  при всех  $t \in [0, T]$ .

Определим семейство  $\{U_t\}$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ , операторов  $U_t : K_\infty(\mathcal{D}) \rightarrow K_\infty(\mathcal{D})$  соотношением  $U_t \psi_0 = \gamma_t \psi$  для всех  $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$ , где  $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathfrak{K}_T$  – решение задачи (2.1), (2.2)–(2.5) с начальным условием  $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$ . Введенное семейство операторов в силу независимости коэффициентов системы (2.1), (2.2), (2.3) от времени обладает полугрупповыми свойствами и называется разрешающей полугруппой задачи (2.1)–(2.5).

Множество  $K_\infty(\mathcal{D})$  является условно полной решеткой [14] с отношением частичного порядка  $\succ$ , где  $\psi_1 \succ \psi_2$  тогда и только тогда, когда  $\psi_1(x, v, \omega) \geq \psi_2(x, v, \omega)$  почти всюду в  $\mathcal{D}$ . Формула

$$E[\psi] = \frac{1}{c} \int_I \int_\Omega \int_G \psi(x, v, \omega) dx d\omega dv, \quad \psi \in K_\infty(\mathcal{D}), \tag{2.14}$$

определяет функционал  $E : K_\infty(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющий условиям

$$E[\psi_1] + E[\psi_2] = E[\psi_1 \vee \psi_2] + E[\psi_1 \wedge \psi_2];$$

$E[\psi_1] > E[\psi_2]$  при  $\Phi_1 \succ \Phi_2$ ,  $\Phi_1 \neq \Phi_2$ , и является, поэтому, положительной оценкой на  $K_\infty(\mathcal{D})$  (см. [14]), превращающей  $K_\infty(D)$  в метрическое пространство с функцией расстояния

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = E[\psi_1 \vee \psi_2] - E[\psi_1 \wedge \psi_2] = \frac{1}{c} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_1(\mathcal{D})}.$$

Справедлива

**Теорема 2.** Пусть коэффициенты системы (2.1), (2.2), (2.3) удовлетворяют условиям (2.6), (2.7). Тогда существует единственная стационарная траектория  $\psi_\infty(t) = \psi_\infty \in K_\infty(\mathcal{D})$ ,  $0 \leq t < \infty$ , относительно разрешающей полугруппы операторов  $\{U_t\}$  задачи (2.1), (2.2)–(2.5). Для любых  $\psi \in K_\infty(\mathcal{D})$  справедлива оценка

$$\rho(U_t \psi, \psi_\infty) \leq \gamma \exp\{-\mu t\}$$

при  $t \geq T_0$ , где положительные постоянные  $\gamma, \mu, T_0$  не зависят от выбора  $\psi \in K_\infty(\mathcal{D})$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Положим  $\varphi_0(x, v, \omega, t) = e^{-\alpha t} \psi(x, v, \omega, t)$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\varphi = \{\varphi_0, C_1, C_2\}$ .

Система (2.12), (2.13) примет вид

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \varphi_0(x, v, \omega, t) + (\alpha + \mathcal{F}(C)(x, v, t)) \varphi_0(x, v, \omega, t) = e^{-\alpha t} \mathcal{P}(C)(x, v, t), \tag{3.1}$$

$$C_1(x, t) = f(x) \frac{\mathcal{R}_{21}(e^{\alpha t} \varphi_0)(x, t)}{\mathcal{R}(e^{\alpha t} \varphi_0)(x, t)}, \quad C_2(x, t) = f(x) \frac{\mathcal{R}_{12}(e^{\alpha t} \varphi_0)(x, t)}{\mathcal{R}(e^{\alpha t} \varphi_0)(x, t)}. \tag{3.2}$$

Система (3.1), (3.2) рассматривается при начальных и граничных условиях

$$\varphi_0(x, v, \omega, 0) = \psi^0(x, v, \omega), \quad \varphi_0(x, v, \omega, t) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (\omega, n(x)) < 0. \tag{3.3}$$

Пусть  $\{l_\omega\} = \{(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$  – характеристика, проходящая в момент времени  $\tau = t$  через точку  $(x, v, \omega)$ . Обозначим через  $t_\omega^-(x, t)$  момент пересечения характеристикой границы области  $\mathcal{D} \times [0, T]$  такой, что либо  $t_\omega^-(x, t) = 0$ , либо  $t_\omega^-(x, t)$  соответствует пересечению той части  $\partial G \times I \times \Omega \times [0, T]$ , где  $(\omega, n(x)) < 0$ . Тогда

$$g_0(x, v, \omega, t) = \varphi_0(x + c\omega(t_\omega^-(x, t) - t), v, \omega, t_\omega^-(x, t)) \equiv \begin{cases} 0, & t_\omega^-(x, t) > 0, \\ \psi_0(x - c\omega t, v, \omega), & t_\omega^-(x, t) = 0. \end{cases}$$

Разрешая уравнение (3.1) как линейное относительно  $\varphi_0(x, v, \omega, t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, v, \omega, t) = & g_0(x, v, \omega, t) \exp \left\{ - \int_{t_\omega^-(x, t)}^t (\alpha + c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s - t), v, s)) ds \right\} + \\ & + \int_{t_\omega^-(x, t)}^t e^{-\alpha \tau} c\mathcal{P}(C)(x + c\omega(\tau - t), v, \tau) \exp \left\{ \int_t^\tau (\alpha + c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s - t), v, s)) ds \right\} d\tau. \end{aligned} \tag{3.4}$$



Система уравнений (3.2), (3.4) эквивалентна при заданных условиях на коэффициенты и на рассматриваемом классе функций  $\varphi \in \mathfrak{M}_T$  системе с начальными и граничными условиями (3.1)–(3.3).

Пусть  $\mathcal{L}_T = L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T])$ . Введем операторы

$$\begin{aligned} A_0 : \mathcal{L}_T &\rightarrow D_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]), & A_i : \mathcal{L}_T &\rightarrow \mathcal{L}_\infty(G \times [0, T]), & i = 1, 2, \\ A : \mathcal{L}_T &\rightarrow \mathfrak{M}_T \subset \mathcal{L}_T, & \mathcal{L}\varphi &= \{A_0\varphi, A_1\varphi, A_2\varphi\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

операторы  $A_0\varphi, A_i\varphi$  ( $i = 1, 2$ ) совпадают с правыми частями уравнений (3.4), (3.2) соответственно.

Положим

$$M = \max \left\{ \|\Psi_0\|_{L_\infty(\mathcal{D})}, \|f\|_{L_\infty(G)} \right\}, \quad \alpha = 2c(b + Ma),$$

где  $b = h\nu_{12}\kappa^*A_{21}(4\pi)^{-1}$ ,  $a = h\nu_{12}\kappa^*(B_{12} + B_{21})(4\pi)^{-1}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A_B$  – сужение оператора  $A$  на замкнутое множество  $B(\mathcal{D} \times [0, T])$ ,

$$B(\mathcal{D} \times [0, T]) = \left\{ \varphi = \{\xi, \eta_1, \eta_2\} \in \mathcal{K}_T : \|\xi\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} \leq M, \eta_1 + \eta_2 = f \right\},$$

$R(A_B)$  – множество значений оператора  $A_B$ . Тогда  $R(A_B) \subset B(\mathcal{D} \times [0, T])$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi = \{\varphi_0, C_1, C_2\} \in B(\mathcal{D} \times [0, T])$ .

Так как

$$\mathcal{F}(C)(x, \nu, t) = h\nu_{12} \frac{\kappa(\nu) A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e(x)}{4\pi \mathcal{R}(e^{\alpha t} \varphi_0)(x, t)} \geq 0,$$

из (3.2), (3.4) вытекает неотрицательность вектора  $A\varphi$ . Из (3.2) следует, что  $A_1\varphi + A_2\varphi = f$ . Далее, ввиду (3.4) и явного вида  $\mathcal{F}(C), \mathcal{P}(C)$  имеем

$$A_0\varphi_0(x, \nu, \omega, t) \leq \max \left\{ M, \left\| \frac{ce^{-\alpha t} \mathcal{P}(C)}{\alpha + c\mathcal{F}(C)} \right\|_{L_\infty(G \times [0, T])} \right\} \leq \max \left\{ M, \frac{cb}{\alpha} M \right\},$$

т.е.  $A_0\varphi_0(x, \nu, \omega, t) \leq M$  почти всюду.

**Лемма 2.** Существует единственное решение задачи

$$\varphi(x, \nu, \omega, t) = A_B\varphi(x, \nu, \omega, t), \quad \varphi \in B(\mathcal{D} \times [0, T]). \tag{3.6}$$

**Доказательство.** Покажем, что при достаточно больших  $k$  отображение  $A_B^k = \underbrace{A_B \cdot \dots \cdot A_B}_B$  будет сжимающим на  $B(\mathcal{D} \times [0, T])$ . Пусть

$$\varphi^{(i)} = \{\varphi_0^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\} \in B(\mathcal{D} \times [0, T]), \quad i = 1, 2,$$

и пусть  $J_i = J(e^{\alpha t} \varphi_0^{(i)})$ ,  $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}(\varphi_0^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ . Используя (3.4) и явный вид  $\mathcal{R}_{12}, \mathcal{R}_{21}$ , получаем

$$A_1\varphi^{(1)} - A_1\varphi^{(2)} = f \frac{(A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e)(J_2 - J_1)}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

$$\left| A_1\varphi^{(1)} - A_1\varphi^{(2)} \right| \leq Mpe^{\alpha t} \left| \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} \right|,$$

где  $p = (A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e^*)A_{21}^{-2}$ ,

$$A_2\varphi^{(1)} - A_2\varphi^{(2)} = A_1\varphi^{(2)} - A_1\varphi^{(1)}, \quad \left| A_2\varphi^{(1)} - A_2\varphi^{(2)} \right| \leq Mpe^{\alpha t} \left| \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} \right|.$$

Пусть, далее,  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(C^{(i)})$ ,  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(C^{(i)})$ . Из (3.4) вытекает справедливость равенства [15]

$$A_0\varphi^{(1)}(x, v, \omega, t) - A_0\varphi^{(2)}(x, v, \omega, t) = \int_{\bar{t}_\omega(x,t)}^t (ce^{-\alpha\tau}(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau) + cA_0\varphi^{(2)}(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau)(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau)) \times \exp\left\{\int_t^\tau (\alpha + c\mathcal{F}_1(x + c\omega(s - t), v, s))ds\right\} d\tau.$$

Следовательно,

$$\left|A_0\varphi^{(1)}(x, v, \omega, t) - A_0\varphi^{(2)}(x, v, \omega, t)\right| \leq \left\|\frac{ce^{-\alpha t}(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + cA_0\varphi^{(2)}(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)}{\alpha + c\mathcal{F}_1}\right\|_{L_\infty(G \times I \times [0, T])} \leq c \frac{b + Ma}{\alpha} \|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\|_{L_\infty(G \times [0, T])}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|A_0\varphi^{(1)} - A_0\varphi^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} &\leq \frac{1}{2} \|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\|_{L_\infty(G \times [0, T])} \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T}, \\ \|A_0^k\varphi^{(1)} - A_0^k\varphi^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} &\leq \frac{1}{2^k} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T}, \\ \|A_i^k\varphi^{(1)} - A_i^k\varphi^{(2)}\|_{L_\infty(G \times [0, T])} &\leq Mpe^{\alpha T} \|A_0^{k-1}\varphi^{(1)} - A_0^{k-1}\varphi^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} \leq \frac{Mpe^{\alpha T}}{2^{k-1}} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T}, \\ \|A^k\varphi^{(1)} - A^k\varphi^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} &\leq \frac{1}{2^k} (1 + 4Mpe^{\alpha T}) \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T}. \end{aligned}$$

Согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (3.6) имеет единственное решение  $\varphi \in B(\mathcal{D} \times [0, T])$ .

Поскольку  $A : \mathcal{L}_T \rightarrow \mathfrak{M}_T$ , решение задачи (3.6) лежит в  $\mathfrak{M}_T$  и является решением задачи (3.1)–(3.3). Следовательно, решение задачи (2.1)–(2.5) существует.

**Лемма 3.** *Решение задачи (2.1)–(2.5) единственное и непрерывно зависит от начальных условий.*

**Доказательство.** Пусть  $\Phi^{(i)} = \{\psi^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\} \in \mathfrak{M}_T$ ,  $i = 1, 2$  – решения задачи (2.1)–(2.5) с начальными условиями

$$\psi^{(i)}(x, v, \omega, 0) = \psi_0^{(i)}(x, v, \omega), \quad i = 1, 2,$$

причем  $\Phi^{(1)} \in \mathcal{H}_T$ . Положим  $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$ ,  $C = C_2^{(1)} - C_2^{(2)} = C_1^{(2)} - C_1^{(1)}$ ,  $\psi_0 = \psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}$ .

Тогда справедливы равенства

$$\frac{1}{c} \left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \psi(x, v, \omega, t) + \mathcal{F}(C^1)(x, v, t)\psi(x, v, \omega, t) = K(x, v, \omega, t)C(x, t), \tag{3.7}$$

$$C(x, t) = H(x, t) \int_t^\tau \int_\Omega \frac{\kappa(v)}{4\pi} \psi(x, v, \omega, t) d\omega dv, \tag{3.8}$$

где

$$K(x, v, \omega, t) = hv_{12} \frac{\kappa(v)}{4\pi} (A_{21} + (B_{12} + B_{21})\psi^{(2)}(x, v, \omega, t)),$$

$$H(x, t) = \frac{B_{12}f(x) - (B_{12} + B_{21})C_2^{(2)}(x, t)}{\mathfrak{R}(C^{(1)})(x, t)}.$$

Проинтегрировав равенство (3.7), получим

$$\begin{aligned} \psi(x, v, \omega, t) - \psi_0(x, v, \omega) + c \int_{\bar{t}_\omega(x,t)}^t \mathcal{F}(C^{(1)})(x + c\omega(\tau - t), v, \tau) \psi(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau) d\tau = \\ = c \int_{\bar{t}_\omega(x,t)}^t K(x + c\omega(\tau - t), \tau) C(x + c\omega(\tau - t), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Пусть  $\Delta(t) = \|\psi(x, v, \omega, t)\|_{L_\infty(\mathcal{G})}$ . Тогда

$$\Delta(t) \leq \Delta(0) + \beta \int_{\bar{t}_\omega(x,t)}^t \Delta(\tau) d\tau,$$

где

$$\beta = c \left( \|\mathcal{F}(C^1)\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} + \|H\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} \|K\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} \right).$$

По лемме Гронуолла заключаем, что

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} \leq e^{\beta T} \|\psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G})}, \tag{3.9}$$

$$\|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} = \|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])} \leq e^{\beta T} \|\psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G})} \|H\|_{L_\infty(\mathcal{G} \times [0, T])}. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) вытекает, в частности, единственность решения задачи (2.1)–(2.5). Кроме того, из (3.7) получаем

$$\left\| \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) \right\|_{L_\infty(\mathcal{G})} \leq \beta e^{\beta T} \|\psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}\|_{L_\infty(\mathcal{G})}.$$

Таким образом, решение задачи (2.1)–(2.5) непрерывно зависит от начальных данных.

#### 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП ИЗОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Доказательство теоремы о стабилизации решений рассматриваемой смешанной задачи основано на свойствах полугрупп изотонных операторов, действующих в условно полных решетках. Приведем без доказательств необходимые в дальнейшем результаты. Подробное изложение рассматриваемых вопросов содержится в [12], [13].

Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустое частично упорядоченное множество с отношением порядка  $\prec$ , являющееся полной решеткой [14];  $U = \{U_t\}, t \geq 0$  – однопараметрическое семейство изотонных операторов, обладающее полугрупповыми свойствами:

$$U_0 \equiv E \text{ – тождественный оператор,}$$

$$U_{t+s} = U_t U_s,$$

$$U_t u \prec U_s v \quad \text{при} \quad u \prec v \quad \text{для всех} \quad t, s \geq 0, \quad u, v \in \mathfrak{M};$$

здесь  $U$ -траекторией называется функция  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{M}$  такая, что  $u(t + s) = U_t u(s), t, s \geq 0$ ;  $U$ -траектория называется стационарной, если

$$u(t) = u(0), \quad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Элемент  $u(0) \in \mathfrak{M}$ , удовлетворяющий (4.1) при всех  $t \geq 0$ , называется стационарной точкой полугруппы  $U$ .

**Теорема 3.** Пусть  $U = \{U_t\}, t \geq 0$ , – полугруппа изотонных операторов  $U_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ . Тогда множество стационарных траекторий  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{M}$  и множество  $P = \{\xi \in \mathfrak{M} : U_t \xi = \xi, t \geq 0\}$  соответствующих стационарных точек полугруппы  $U$  непусто и  $\inf P \in P, \sup P \in P$ .

Теорема является прямым следствием следующего утверждения [17].

**Теорема 4.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – полная решетка,  $\mathfrak{A}$  – семейство изотонных коммутирующих операторов  $A : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ . Тогда множество  $P$  общих неподвижных точек семейства операторов  $\mathfrak{A}$  непусто и является полной подрешеткой решетки  $\mathfrak{M}$ .

Изотонный оператор  $A : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  будем называть оператором класса  $C(\mathfrak{M}, \prec)$ , если для любых последовательностей

$$\xi_1 \prec \xi_2 \prec \dots \prec \xi_n \prec \dots \quad \eta_1 \succ \eta_2 \succ \dots \succ \eta_n \succ \dots \tag{4.2}$$

элементов из  $\mathfrak{M}$  выполняются равенства

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{A\xi_n\} = A \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\xi_n\}, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \{A\eta_n\} = A \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\eta_n\}.$$

Полугруппа  $U = \{U_t\}$ ,  $t \geq 0$ , изотонных операторов  $U_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  называется полугруппой класса  $\zeta(\mathfrak{M}, \prec)$ , если  $U_t \in C(\mathfrak{M}, \prec)$  при всех  $t \geq 0$ .

**Теорема 5.** Пусть  $U = \{U_t\}$ ,  $t \geq 0$ , – полугруппа класса  $\zeta(\mathfrak{M}, \prec)$ ;  $P \in \mathfrak{M}$  – множество стационарных точек. Тогда порядковый интервал

$$\langle \inf P, \sup P \rangle = \{ \xi \in \mathfrak{M} : \inf P \prec \xi \prec \sup P \}$$

является притягивающим множеством для всех траекторий, т.е.

$$\inf P \prec \liminf_{t \rightarrow \infty} \{U_t \xi\} \prec \limsup_{t \rightarrow \infty} \{U_t \xi\} \prec \sup P$$

при всех  $\xi \in \mathfrak{M}$ , в частности, если множество  $P$  стационарных точек полугруппы  $U$  состоит из одного элемента  $u_\infty = \inf P = \sup P$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеет место порядковая стабилизация всех траекторий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{U_t \xi\} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{U_t \xi\} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \{U_t \xi\} = u_\infty \quad \text{при всех } \xi \in \mathfrak{M}.$$

Положительной оценкой на полной решетке  $\mathfrak{M}$  называется функционал  $l : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющий при всех  $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$  условиям

$$l(\xi) + l(\eta) = l(\sup\{\xi, \eta\}) + l(\inf\{\xi, \eta\}), \quad l(\xi) < l(\eta) \quad \text{при } \xi \prec \eta, \quad \xi \neq \eta.$$

Положительный функционал  $l : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$  превращает решетку  $\mathfrak{M}$  в метрическую решетку с функцией расстояния  $d(\xi, \eta) = l(\sup\{\xi, \eta\}) - l(\inf\{\xi, \eta\})$  [17].

Если положительная оценка  $l : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$  удовлетворяет следующему условию непрерывности: для любых последовательностей  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty, \{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  элементов из  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющих (4.2), выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l(\xi_n) = l\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\xi_n\}\right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} l(\eta_n) = l\left(\inf_{n \in \mathbb{N}} \{\eta_n\}\right), \tag{4.3}$$

то метрическая решетка  $\mathfrak{M}$  является метрически полной.

Оператор  $A : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  является оператором класса  $C(\mathfrak{M}, \prec)$  тогда и только тогда, когда  $A$  метрически непрерывен.

**Теорема 6.** Пусть  $U = \{U_t\}$ ,  $t \geq 0$ , – полугруппа изотонных операторов,  $P \subset \mathfrak{M}$  – множество стационарных точек полугруппы,  $l : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$  – положительная оценка, удовлетворяющая условию непрерывности (4.3), и для каждого  $t \geq 0$  оператор  $U_t : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  метрически непрерывен. Тогда порядковый интервал, т.е.  $\langle \inf P, \sup P \rangle$  является метрически притягивающим множеством для всех траекторий, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(U_t \xi, \langle \inf P, \sup P \rangle) = 0$$

при всех  $\xi \in \mathfrak{M}$ , в частности, если множество стационарных точек полугруппы  $U$  состоит из одного элемента  $u_\infty = \inf P = \sup P$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеет место метрическая стабилизация всех траекторий:  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(U_t \xi, u_\infty) = 0$  при всех  $\xi \in \mathfrak{M}$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – условно полная решетка,  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$  – полная подрешетка в  $\mathfrak{M}$ ;  $l : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  – положительная оценка на  $\mathfrak{M}$ ,  $U = \{U_t\}$ ,  $t \geq 0$ , – полугруппа операторов, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) существует  $T_1 > 0$  такое, что  $U_t \xi \in \mathfrak{M}_0$  при всех  $\xi \in \mathfrak{M}$ ,  $t \geq T_1$ ;
- 2) при любых  $\xi, \eta \in \mathfrak{M}_0$  таких, что  $\xi \prec \eta$  при всех  $t \geq 0$ , выполнено  $U_t \xi \prec U_t \eta$ ;
- 3) существуют постоянные  $T_2 > 0$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  такие, что при любых  $\xi, \eta \in \mathfrak{M}_0$ ,  $\xi \prec \eta$

$$l(U_{T_2} \eta) - l(U_{T_2} \xi) \leq \gamma(l(\eta) - l(\xi)).$$

Тогда существует единственная стационарная траектория  $u_\infty(t) = u_\infty \in \mathfrak{M}_0$ ,  $t \geq 0$ , а также существуют постоянные  $\mu > 0$ ,  $T_0 > 0$ ,  $M > 0$  такие, что

$$d(U_t \xi, u_\infty) \leq M \exp\{-\mu t\} \quad \text{при} \quad t \geq T_0.$$

### 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть  $\{U_t\}$ ,  $U_t : K_\infty(\mathfrak{D}) \rightarrow K_\infty(\mathfrak{D})$ ,  $U_t \psi_0 = \gamma_t \psi$  – разрешающая полугруппа операторов задачи (2.1)–(2.5). Докажем, что для нее выполнены условия теоремы 7.

Будет использоваться следующее утверждение [13].

**Лемма 4.** Пусть  $E$  – банахова решетка с нормой  $\|\cdot\|$ , монотонной относительно упорядоченности  $\prec$ , и конусом  $E^+$  положительных элементов,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|$ . Пусть  $A : E \rightarrow E$  – оператор и  $\{B_\lambda\} \in \mathcal{L}^+(E)$ ,  $\lambda \in (0, \infty)$ , – однопараметрическое семейство операторов со спектральными радиусами  $\rho(B_\lambda)$ , удовлетворяющими условию  $\sup \rho(B_\lambda) = \beta < 1$ . Тогда если  $|A(y_1) - A(y_2)| \prec B_\lambda(|y_1 - y_2|)$  для всех  $y_i \in E$  таких, что  $\|y_i\| \leq \lambda$ ,  $i = 1, 2$ , то уравнение

$$y = A(y) \tag{5.1}$$

имеет не более одного решения  $y \in E$ . Если, кроме того,  $A : E \rightarrow E$  оставляет инвариантным некоторое замкнутое множество  $Y \in E$ , то решение уравнения (5.1) существует и лежит в  $Y$ .

Пусть  $M_1 = hv_{12}k^*f^*A_{21}(4\pi^{-1})$ ,  $\tau_0 = dc^{-1}$ . Определим полную подрешетку

$$K_0 = \{\psi \in K_\infty(\mathfrak{D}) : \psi \prec M_1\}.$$

**Лемма 5.** При любых  $\psi_0 \in K_\infty(\mathfrak{D})$  имеет место включение

$$U_t \psi_0 \in K_0, \quad t > \tau_0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathcal{K}_T$  – решение задачи (2.1)–(2.5). Тогда верно

$$\begin{aligned} \psi(x, v, \omega, t) = & g_0(x, v, \omega, t) \exp \left\{ - \int_{t_\omega^-(x, t)}^t c \mathcal{F}(C)(x + c\omega(s - t), v, s) ds \right\} + \\ & + \int_{t_\omega^-(x, t)}^t c \mathcal{P}(C)(x + c\omega(\tau - t), v, \tau) \exp \left\{ \int_t^\tau c \mathcal{F}(C)(x + c\omega(s - t), v, s) ds \right\} d\tau, \end{aligned} \tag{5.2}$$

при этом имеем

$$0 \leq \mathcal{F}(C)(x, v, t) \leq bpf^*, \quad 0 \leq \mathcal{P}(C)(x, v, t) \leq bpf^*, \quad x \in G, \quad v \in I, \quad t \geq 0.$$

Так как  $|t - t_\omega^-(x, t)| \leq dc^{-1} = \tau_0$ , то  $t_\omega^-(x, t) > 0$  при  $t > \tau_0$ . Следовательно, справедливо неравенство

$$\psi(x, v, \omega, t) \leq M_1, \quad t > \tau_0,$$

что и следовало доказать.

Пусть  $\psi_0^1, \psi_0^2 \in K_0, \psi_0^1 \succ \psi_0^2, \Phi^{(i)} = \{\psi^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathfrak{K}_T, i = 1, 2$  – решения задачи (2.1)–(2.5) с начальными условиями

$$\psi^{(i)}(x, v, \omega, 0) = \psi_0^i(x, v, \omega), \quad i = 1, 2.$$

Положим  $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}, C = C_1^{(1)} - C_1^{(2)}, \psi_0 = \psi_0^1 - \psi_0^2$ . Тогда справедливы равенства

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \psi(x, v, \omega, t) + \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) = K(x, v, \omega, t) C(x, t), \tag{5.3}$$

$$C(x, t) = H(x, t) \int_t^x \int_\Omega \frac{\kappa(v)}{4\pi} \psi(x, v, \omega, t) d\omega dv, \tag{5.4}$$

где

$$K(x, v, \omega, t) = hv_{12} \frac{\kappa(v)}{4\pi} (A_{21} + (B_{12} + B_{21}) \psi^{(2)}(x, v, \omega, t)),$$

$$H(x, t) = f(x) \frac{A_{21} B_{21} + (B_{12} C_{21} - B_{21} C_{12}) n_e(x)}{\mathcal{R}(C^{(1)})(x, t) \mathcal{R}(C^{(2)})(x, t)},$$

$$0 \leq K \leq q = hv_{12} \frac{\kappa(v)}{4\pi} (A_{21} + (B_{12} + B_{21}) M_1), \quad 0 \leq \mathcal{F}(C^{(1)}) \leq bp, \quad 0 \leq H \leq f^* p.$$

**Лемма 6.** При любых  $\psi_0^1, \psi_0^2 \in K_0$  таких, что  $\psi_0^1 \succ \psi_0^2$ , выполнено соотношение

$$U_t \psi_0^1 \succ U_t \psi_0^2, \quad t \geq 0. \tag{5.5}$$

**Доказательство.** Пусть  $\xi = e^{-\alpha t} \psi, \eta = e^{-\alpha t} C$ , где  $\alpha = c q p f^*$ . Тогда

$$\frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\tau} \right)_\omega \xi(x, v, \omega, t) + (\alpha + \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t)) \xi(x, v, \omega, t) = G(x, v, \omega, t) \eta(x, t), \tag{5.6}$$

$$\eta(x, t) = H(x, t) \int_t^x \int_\Omega \frac{\kappa(v)}{4\pi} \xi(x, v, \omega, t) d\omega dv. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.6) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \xi(x, v, \omega, t) = & g_0(x, v, \omega, t) \exp \left\{ - \int_{\bar{t}_\omega(x, t)}^t (\alpha + c \mathcal{F}(C^{(1)})(x + c\omega(s - t), v, s)) ds \right\} + \\ & + \int_{\bar{t}_\omega(x, t)}^t c K(x + c\omega(\tau - t), v, \omega, \tau) \eta(x + c\omega(\tau - t), \tau) \times \\ & \times \exp \left\{ \int_t^\tau (\alpha + c \mathcal{F}(C^{(1)})(x + c\omega(s - t), v, s)) ds \right\} d\tau. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Пусть  $\Phi = \{\xi, \eta\}$ . Систему (5.7), (5.8) можно представить в виде

$$A\Phi = \Phi, \tag{5.9}$$

где оператор  $A : L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T]) \rightarrow L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T])$  ставит в соответствие вектору  $\Phi$  вектор из правых частей уравнений (5.8) и (5.7).

Пространство  $L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T])$  является банаховой решеткой относительно порядка, порожденного конусом  $K_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times K_\infty(G \times [0, T])$ .

Положим

$$B(\Phi) = \left\{ \int_{\bar{t}_\omega(x, t)}^t \eta(x + c\omega(\tau - t), \tau) d\tau, \int_t^x \int_\Omega \frac{\kappa(v)}{4\pi} \xi(x, v, \omega, t) d\omega dv \right\}.$$

Оператор  $B : L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T]) \rightarrow L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T])$  оставляет инвариантным конус  $K_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times K_\infty(G \times [0, T])$  и справедливы оценки

$$\|B^{2k-1}\| \leq \frac{\tau_0^{k-1}}{(k-1)!} \max\left\{1, \frac{\tau_0}{k}\right\}, \quad \|B^{2k}\| \leq \frac{\tau_0^k}{k!} \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому спектральный радиус  $\rho(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}$  равен нулю.

Для любых  $\Phi_1, \Phi_2 \in L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times L_\infty(G \times [0, T])$  выполняется неравенство

$$|A(\Phi_1) - A(\Phi_2)| \prec \beta B(|\Phi_1 - \Phi_2|), \quad \beta = \max\{q, f^*p\}.$$

Кроме того, оператор  $A$  оставляет инвариантным замкнутое множество

$$S = \{\xi, \eta\} \in K_\infty(\mathcal{D} \times [0, T]) \times K_\infty(G \times [0, T]) : \|\xi\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])} \leq \|\Psi_0\|_{L_\infty(\mathcal{D} \times [0, T])}\}.$$

Таким образом, для операторов  $A$  и  $B_\lambda = \beta B, \lambda \geq 0$  выполнены условия леммы 4 и  $\psi \geq 0, C \geq 0$ , т.е.  $\psi^{(1)} \succ \psi^{(2)}$ .

**Лемма 7.** Пусть  $\psi_0^i \in K_0, i = 1, 2, \psi_0^1 \succ \psi_0^2, \psi_0^1 \neq \psi_0^2$ . Тогда

$$\rho(U_{2\tau_0}\psi_0^1, U_{2\tau_0}\psi_0^2) \leq \gamma\rho(\psi_0^1, \psi_0^2), \tag{5.10}$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $\psi_0^1, \psi_0^2$ .

**Доказательство.** Из уравнения (5.3) вытекает справедливость неравенства [13]

$$\begin{aligned} \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \int_{\omega} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\omega} \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt &\geq \int_{\mathcal{D}} (\psi(x, v, \omega, 2\tau_0) - \psi(x, v, \omega, 0)) dx dv d\omega + \\ &+ \varepsilon \int_{\mathcal{D}} \psi_0(x, v, \omega) dx dv d\omega + c\varepsilon \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} K(x, v, \omega, t) C(x, t) dx dv d\omega dt, \end{aligned} \tag{5.11}$$

где  $\varepsilon = \exp(-k^*f^*B_{12}h\nu_{12}d(4\pi)^{-1})$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \int_{\omega} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\omega} \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt &= \\ = \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \int_{\omega} K(x, v, \omega, t) C(x, t) dx dv d\omega dt - \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} (\psi(x, v, \omega, 2\tau_0) - \psi_0(x, v, \omega)) dx dv d\omega &\leq \frac{1-\varepsilon}{c} \int_{\mathcal{D}} \psi_0(x, v, \omega) dx dv d\omega + \\ + \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \int_{\omega} K(x, v, \omega, t) C(x, t) dx dv d\omega dt - \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt. \end{aligned}$$

Используя явный вид  $\mathcal{F}(C^{(1)}), K$  и  $C$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \int_{\omega} K(x, v, \omega, t) C(x, t) dx dv d\omega dt &= h\nu_{12} \int_0^{2\tau_0} \int_G \frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x, t)\mathcal{R}_2(x, t)} J(\psi)(x, t) \times \\ &\times \int_{\Gamma} \int_{\Omega} \frac{\kappa(v)}{4\pi} (A_{21} + (B_{12} + B_{21})\psi^{(2)}(x, v, \omega, t)) d\omega dv dx dt = \\ &= h\nu_{12} \int_0^{2\tau_0} \int_G \frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x, t)\mathcal{R}_2(x, t)} J(\psi)(x, t) (A_{21} + (B_{12} + B_{21})J(\psi^{(2)})(x, t)) dx dt, \\ g(x) &= A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e(x), \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt = hv_{12} \int_0^{2\tau_0} \int_G \frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x, t)} J(\psi)(x, t) dx dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} K(x, v, \omega, t) C(x, t) dx dv d\omega dt - \int_0^{2\tau_0} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x, v, t) \psi(x, v, \omega, t) dx dv d\omega dt = \\ & = hv_{12} \int_0^{2\tau_0} \int_G \frac{g(x)f(x)J(\psi)(x, t)}{\mathcal{R}_1(x, t)\mathcal{R}_2(x, t)} (-B_{12} + B_{21})J(\psi)(x, t) - (C_{12} + C_{21})n_e(x) dx dt \leq 0, \\ & \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} \psi(x, v, \omega, 2\tau_0) dx dv d\omega \leq \frac{1-\varepsilon}{c} \int_{\mathcal{D}} \psi_0(x, v, \omega) dx dv d\omega \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что справедливо неравенство (5.10), где  $\gamma = 1 - \varepsilon$ .

Из доказанных лемм 5–7 при  $T_0 = 2\tau_0$  на основании теоремы 7 следует теорема 2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев В.В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехтеоритиздат, 1956.
2. *Белл Д., Глестон С.* Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
3. *Михалас Д.* Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
4. *Иванов В.В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука, 1969.
5. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
6. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1961. Вып. 61. С. 2–158.
7. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ, 2006.
8. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. С. 1071–1080.
9. *Морозов С.Ф., Сумин В.И.* Нелинейные интегродифференциальные системы уравнений нестационарного переноса // Сиб. матем. журнал. 1978. Т. 19:4. С. 842–848.
10. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* О разрешимости “в целом” нелинейной задачи переноса излучения // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 3. С. 482–494.
11. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* О стабилизации решения нелинейной системы переноса излучения в двухуровневом приближении // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 343–346.
12. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Задача Коши для одного нелинейного интегродифференциального уравнения переноса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 677–686.
13. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений // Сиб. матем. журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1052–1066.
14. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Мир, 1984.
15. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
16. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
17. *Tarski A.A.* A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 2. P. 285–309.



---

---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---

---

УДК 519.642

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ  
К ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**© 2022 г. В. Л. Литвинов<sup>1,\*</sup>, К. В. Литвинова<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup> 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия<sup>2</sup> 443100 Самара, ул. Молодогвардейская, 244, СамГТУ, Россия

\*e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

\*\*e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.  
Переработанный вариант 30.01.2022 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок. Метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление внешней среды и жесткость основания колеблющегося объекта. Решение приводится в безразмерных переменных с точностью до значений второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях каната грузоподъемной установки, обладающего изгибной жесткостью, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз. Библ. 22.

**Ключевые слова:** резонансные свойства, колебания систем с подвижными границами, законы движения границ, интегродифференциальные уравнения, амплитуда колебаний.

DOI: 10.31857/S0044466922060126

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Среди всего множества задач динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальными являются задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. В технике широко распространены системы, границы которых подвижны (канаты грузоподъемных установок [1]–[8], гибкие передаточные звенья [4], [6], [9], бурильные колонны [10], твердотопливные стержни [10], [11] и др.). Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики о динамике одномерных объектов переменной длины. В математической постановке это сводится к новым задачам математической физики – к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных диапазонах изменения обоих аргументов. Наличие подвижных границ вызывает значительные трудности при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1]–[10], [12]–[18].

Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [19], [20], заключающийся в подборе новых переменных, оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [21] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, использованный в [22], заключающийся в замене геометрической переменной чисто мнимой, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить методологию теории функций комплексного переменного для решения. Однако точные

методы решения ограничены волновым уравнением и относительно простыми граничными условиями.

Из приближенных методов наиболее эффективным является метод Канторовича – Галеркина [10], [14], а также метод построения решений интегродифференциальных уравнений, описанный в данной статье. Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Построение интегродифференциальных уравнений движения объектов переменной длины основано на прямом интегрировании дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой переменной.

В тривиальных случаях методы интегральных уравнений не имеют преимуществ перед методом дифференциальных уравнений применительно к исследованию колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы [4], [6]. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющимся под действием движущихся нагрузок и т.д. Эти методы могут быть весьма плодотворными применительно к динамике канатов переменной длины и другим механическим объектам с движущимися границами.

В данной работе метод построения решений интегродифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [5], [7], [11], сопротивление внешней среды [11] и жесткость основания (подложки) объекта [4], [6]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда на границах действуют внешние возмущения. При фиксированной длине объекта построенные интегродифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма II рода.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид [9]

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau). \quad (1)$$

Граничные условия

$$Y_{ji} [U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, 2}. \quad (2)$$

Начальные условия

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi). \quad (3)$$

Здесь  $U(\xi, \tau)$  – функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия,  $\tau$  – безразмерное время,  $\xi$  – безразмерная пространственная координата;  $L$  – линейный однородный дифференциальный оператор по  $\xi$  второго либо четвертого порядка;  $Y_{ji}$  – линейные однородные дифференциальные операторы по  $\xi$  до второго порядка включительно;  $\varphi(\xi, \tau)$  – заданные функции класса  $C$ ;  $\Phi_0(\xi)$ ,  $\Phi_1(\xi)$ ,  $F_{ji}(\tau)$  – заданные функции класса  $C^2$ ;  $\ell_j(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau$  – равномерный закон движения границы;  $\varepsilon$  – малый параметр ( $\varepsilon = V/a$ ,  $V$  и  $a$  – заданные скорости движения границы и распространения колебаний соответственно).

Движение границ по закону  $\ell_j(\varepsilon\tau)$  соответствует режиму медленного движения.

Дифференциальное уравнение (1) и граничные условия (2) описывают широкий ряд математических моделей для анализа одномерных краевых задач с движущимися границами с учетом действия сил сопротивления внешней среды, жесткости подложки и изгибной жесткости объекта, когда внешние возмущения действуют на границах.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях, в уравнение (1) вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (4)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \tag{5}$$

при этом функция  $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \tag{6}$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i; \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases}$$

При подстановке (4) в уравнение (1) с учетом (5), (6), функция  $V(\xi, \tau)$  находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau), \tag{7}$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \tag{8}$$

В работе [6] получено интегродифференциальное уравнение, соответствующее задаче (7), (8), в виде

$$V(\xi, \tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta, \tag{9}$$

где  $K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau)$  – симметричное по  $\xi$  и  $\zeta$  ядро, зависящее от времени через параметр  $\varepsilon\tau$ .

**Теорема 1.** В интервале времени  $\Delta\tau$ , соизмеримом с единицей, уравнение колебаний объекта с фиксированным параметром  $l = l(\tau_0) = \text{const}$  отличается от соответствующего уравнения колебаний объекта с переменным параметром  $l = l(\tau)$  членами, пропорциональными множителю  $\varepsilon$ , при условии ограниченности производной ядра  $K(x, s, l)$  по параметру  $l(\tau)$ .

**Доказательство.** Разложим правую часть уравнения

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\tau)} K(\xi, \zeta, l(\tau)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta \tag{10}$$

по параметру  $l(\tau)$  в окрестности некоторого фиксированного значения безразмерной длины  $l(\tau_0)$  в ряд Тейлора.

Полагая

$$l(\tau_0 + \Delta\tau) = l(\tau_0) + \Delta l(\tau) + \dots,$$

получаем

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta - \\ & - \Delta l(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \varphi(l(\tau_0), \tau)] + \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta \right\} - \\ & - \frac{(\Delta l(\tau))^2}{2!} \left[ \frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем считать, что функция  $l(\tau)$  является функцией медленного времени  $l = l(\tau_1)$ ,  $\tau_1 = \varepsilon\tau$ , т.е. является функцией времени, производная которой по времени пропорциональна некоторому малому параметру  $\varepsilon$ . Дифференциал длины объекта  $\Delta l(\tau_1)$  в соответствии с правилом дифференцирования функции медленного времени [4], [6] вычисляется по формуле  $\Delta l(\tau_1) = \varepsilon \frac{dl(\tau_1)}{d\tau_1} \Delta\tau$ .

Выберем интервал времени  $\Delta\tau$  в виде

$$\Delta\tau = \theta(\tau), \tag{12}$$

где  $\theta(\tau)$  – некоторая функция порядка единицы.

Подставляя (12) в (11), найдем, что в интервале времени  $\Delta\tau$ , имеющем порядок единицы, разложение (11) имеет вид

$$\begin{aligned}
 V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta - \\
 & - \varepsilon l'(\tau) \theta(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \varphi(l(\tau_0), \tau)] + \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta \right\} - \\
 & - \varepsilon^2 l'^2(\tau) \frac{\theta(\tau)}{2!} \left[ \frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Принимая во внимание условие теоремы об ограниченности производной ядра  $K(x, s, l)$  по параметру  $l(\tau)$  и сравнивая (13) и (10), находим, что уравнение с фиксированным параметром  $l = l(\tau_0) = \text{const}$  отличается от уравнения с переменным параметром в интервале  $\Delta\tau \sim 1$  членами, пропорциональными множителю  $\varepsilon$ . Это завершает доказательство теоремы.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи (9) будем искать в виде ряда:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \tag{14}$$

где  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  – собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta, \tag{15}$$

где  $\varepsilon\tau$  рассматривается как параметр;  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи.

Решение (14) является точным в случае, если границы неподвижны.

Собственные функции  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  удовлетворяют граничным условиям (8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Используя результаты [6], разложим симметричное по  $\xi$  и  $\zeta$  ядро в ряд по собственным функциям  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ :

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \tag{16}$$

где  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  – определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)} = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\xi d\zeta. \tag{17}$$

Продифференцируем ряд (14) по времени:

$$V_{\tau}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon X_{n\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) \right].$$

После повторного дифференцирования получим

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_n''(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + 2\varepsilon X_{n\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n'(\tau) + \varepsilon^2 X_{n\tau\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) \right\}. \tag{18}$$

Подставим ряды (14), (16), (18) в уравнение (9) с учетом ортогональности функций  $X_n(\xi, \epsilon\tau)$  на интервале  $[\ell_1(\epsilon\tau); \ell_2(\epsilon\tau)]$  с весом  $g(\xi)$  и замены

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\epsilon\tau) F_{kr}(\tau), \tag{19}$$

где

$$Q_{nkr}(\epsilon\tau) = - \int_{\ell_1(\epsilon\tau)}^{\ell_2(\epsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \epsilon\tau) X_n(\xi, \epsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\epsilon\tau)}^{\ell_2(\epsilon\tau)} X_n^2(\xi, \epsilon\tau) g(\xi) d\xi.$$

Заметим, что если разложить функцию  $H(\xi, \tau)$  в ряд Фурье:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \epsilon\tau),$$

где

$$\varphi_n(\tau) = \int_{\ell_1(\epsilon\tau)}^{\ell_2(\epsilon\tau)} H(\xi, \tau) X_n(\xi, \epsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\epsilon\tau)}^{\ell_2(\epsilon\tau)} X_n^2(\xi, \epsilon\tau) g(\xi) d\xi,$$

здесь  $g(\xi)$  – весовая функция, то замену можно произвести в более простом виде:

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) - \varphi_n(\tau).$$

При резонансных явлениях амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому нерезонансными членами рядов (14), (18) в связи с их малостью, пренебрегают. В этом случае получим расщепленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [10]

$$A_{1n}(\epsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\epsilon A_{2n}(\epsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \epsilon^2 A_{3n}(\epsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\epsilon\tau)\omega_{0n}^2(\epsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n(\tau) = & E_n(\tau) - 2\epsilon \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m B_{nkr}(\epsilon\tau) F_{kr}'(\tau) - \epsilon^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{nkr}(\epsilon\tau) F_{kr}(\tau) - \\ & - \omega_{0n}^2(\epsilon\tau) A_{1n}(\epsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\epsilon\tau) F_{kr}(\tau). \end{aligned}$$

Здесь  $A_{1n}(\epsilon\tau)$ ,  $A_{2n}(\epsilon\tau)$ ,  $A_{3n}(\epsilon\tau)$ ,  $B_{nkr}(\epsilon\tau)$ ,  $C_{nkr}(\epsilon\tau)$ ,  $E_n(\tau)$  определены в работе [10].

Коэффициенты взаимовлияния между отдельными уравнениями входят в систему (20) с малым параметром. В дальнейшем под точностью порядка  $\epsilon^2$  будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с  $\epsilon^2$  и членами вида  $\epsilon F_{ji}'(\epsilon\tau)$ , которые несмотря на малость порядка  $\epsilon$  на резонансные свойства влияют как члены порядка  $\epsilon^2$ . Система (20) с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^2$  будет иметь вид

$$A_{1n}(\epsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\epsilon A_{2n}(\epsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\epsilon\tau)\omega_{0n}^2(\epsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{21}$$

где

$$\theta_n(\tau) = \omega_{0n}^2(\epsilon\tau) A_{1n}(\epsilon\tau) \varphi_n(\tau) + E_n(\tau).$$

С учетом (5), (14), (19) решение (4) будет иметь вид:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \epsilon\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau) \left[ D_{kr}(\xi, \epsilon\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nkr}(\epsilon\tau) X_n(\xi, \epsilon\tau) \right]. \tag{22}$$

**Теорема 2.** *Решение задачи (1)–(3) можно представить в форме*

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \tag{23}$$

**Доказательство.** Величины  $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$ , определяемые выражением

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi,$$

являются для функции  $-D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$  коэффициентами разложения в ряд Фурье по системе ортогональных с весом  $g(\xi)$  собственных функций  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[\ell_1(\varepsilon\tau), \ell_2(\varepsilon\tau)]$ , т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = -D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau).$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках равенства (22) равно нулю. Теорема доказана.

Для упрощения введем в уравнение (23) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp \left[ - \int_0^{\tau} \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau \right].$$

Тогда уравнение (21) не будет содержать члена с  $y'(\tau)$ :

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)].$$

Начальные условия для функций  $y_n(\tau)$  находятся из условий (3) как решения уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(0) X_n(\xi, \ell_j(0)) = \Phi_0(\xi); \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{y_n'(0) X_n(\xi, \ell_j(0)) + \varepsilon X_{n_c}(\xi, \ell_j(0)) \ell_j'(0) y_n(0)\} = \Phi_1(\xi).$$

Если в начальный момент движения скорость изменения длины объекта  $\ell_j'(0)$  равна нулю, то из (24) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(0) X_n(\xi, \ell_j(0)) = \Phi_0(\xi); \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(0) X_n(\xi, \ell_j(0)) = \Phi_1(\xi). \tag{25}$$

Принимая во внимание, что  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  образуют ортогональную с весом  $g(\xi)$  систему функций, из (25) получаем для функций  $y_n(0)$ ,  $y_n'(0)$  следующие выражения:

$$y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi, \ell_j(0)) \Phi_0(\xi) g(\xi) d\xi; \quad y_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi, \ell_j(0)) \Phi_1(\xi) g(\xi) d\xi. \tag{26}$$

Из (26) следует, что  $y_n(0)$  и  $y_n'(0)$  являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по функциям  $X_n(\xi, \ell_j(0))$  начальных условий (3).

Вопрос о сходимости рядов (18), (23), по крайней мере, в моменты времени, близкие к начальному, может быть разрешен на основании быстроты сходимости разложений (25), т.е. быстроты убывания коэффициентов  $y_n(0)$  и  $y_n'(0)$ . Из теории рядов Фурье известно, что порядок убывания коэффициентов разложения зависит от гладкости функций, разлагаемых в ряды. Поэтому при достаточной гладкости функций  $\Phi_0(\xi)$ ,  $\Phi_1(\xi)$ , определяющих начальные условия, вопрос о сходимости рядов (18), (23) решается положительно.

Заметим, что начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому принимаются в виде

$$y_n(0) = 0; \quad y'_n(0) = 0.$$

Пусть

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \tag{27}$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m}, \tag{28}$$

где  $B_{ji}$  – постоянные величины;  $W_0(\tau)$ ,  $W_{ji}(\tau)$  – монотонно возрастающие функции;  $B_0(\xi)$  – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Равенства (27), (28) можно принять в следующих случаях:

- 1) все внешние возмущения  $\varphi(\xi, \tau)$ ;  $F_{ji}(\tau)$  равны нулю, кроме какого-то одного;
- 2) производные функций  $W_0(\tau)$ ,  $W_{ji}(\tau)$  равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;
- 3) резонансные области нагрузок  $\varphi$ ,  $F_{ji}$  не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

Используя математические выкладки, изложенные в работе [10], получаем следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей  $n$ -й динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \tag{29}$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}; \quad F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w'_n(\zeta)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau;$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta).$$

#### 4. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ УСТАНОВКИ

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания каната грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором шарнирно закреплен груз. С помощью приведенной модели можно рассчитывать резонансные свойства несущих звеньев широко-го круга грузоподъемных машин.

Уравнение, учитывающее изгибную жесткость и натяжение колеблющегося звена, имеет вид (см. [10])

$$U_{tt}(x, t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t) = 0. \tag{30}$$

Граничные условия

$$U(0, t) = 0; \quad U_{xx}(0, t) = 0; \tag{31}$$

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t); \quad U_x(l_0(t), t) = 0. \tag{32}$$

В задаче (30)–(32) используются следующие обозначения:  $U(x, t)$  – поперечное смещение точки звена с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $I$  – осевой момент инерции сечения каната;  $\rho$  – линейная плотность массы;  $a = \sqrt{T/\rho}$  – минимальная скорость распространения волн;  $T$  – сила натяжения;  $l_0(t) = L_0 - v_0 t$  – закон движения границы каната,  $L_0$  – первоначальная длина каната,  $v_0$  – скорость движения границы;  $W_0(z)$  – функция класса  $C^2$ ;  $B$ ,  $\omega_0$  – постоянные величины;  $E$  – модуль упругости материала каната.

Введем в задачу (30)–(32) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x/a; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad U(x, t) = BV(\xi, \tau).$$

Тогда задача примет вид

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta^2 V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \tag{33}$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \tag{34}$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = \cos W(\tau); \quad V_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \tag{35}$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI \omega_0^2}{\rho a^4}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad \varepsilon = -v_0/a.$$

Заметим, что значение величины  $\beta$  в технических задачах обычно не превосходит 0.25.

Интегрируя уравнение (33) по  $\xi$  и освобождаясь от неоднородностей в граничных условиях, по аналогии с (4)–(6) получено интегродифференциальное уравнение поперечных колебаний каната переменной длины в виде:

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta. \tag{36}$$

Ядро уравнения (36) в рассматриваемом случае будет определяться функцией

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \begin{cases} \left( \frac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{\beta} \right)^2 \left( \frac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{3} + \frac{\xi - \zeta}{2} \right), & \zeta \leq \xi, \\ \left( \frac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{3} + \frac{\zeta - \xi}{2} \right), & \zeta \geq \xi. \end{cases} \tag{37}$$

Функция (37) также симметрична относительно аргументов  $\xi$  и  $\zeta$  и зависит от времени через содержащийся в ней параметр  $\varepsilon\tau$ . При фиксированном  $l(\varepsilon\tau) = \text{const}$  функция (37) совпадает с функцией влияния прогибов каната постоянной длины.

Таким образом, задача (33)–(35) сводится к интегродифференциальному уравнению (36) с симметричным, изменяющимся во времени ядром (37) и переменными во времени пределами интегрирования.

Решение задачи (36) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной выше.

В результате для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -й динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \quad F_n(\varepsilon\zeta) = Q_{n21}(\varepsilon\zeta) \sqrt{\omega_{0n}^3(\varepsilon\zeta) A_{1n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma,$$

где  $\gamma$  – постоянная величина.



**Таблица 1.** Зависимость амплитуды колебаний  $A_n$  от  $\epsilon$  и  $\beta$  при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

Мода	$\beta \setminus \epsilon$	0.02	0.04	0.06	0.08
1	0.01	17.3	10.7	8.8	6.7
	0.2	14.1	9.2	7.3	5.4
2	0.01	12.5	7.7	5.1	4.2
	0.2	9.3	5.4	4.3	3.7

При действии на систему гармонического возмущения с частотой  $\omega_0$ , когда  $W(\tau) = \tau$ , на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс. Точка резонансной области  $\tau_0$ , в которой  $\Phi'_n(\tau_0) = 0$ , приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\epsilon} \left[ \sqrt{\frac{2\beta^2}{-1 + \sqrt{1 + 4\beta^2}}} \cdot \pi n - 1 \right].$$

Для исследования явления прохождения через резонанс необходимо найти значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , при которых квадрат амплитуды

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\epsilon \tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\epsilon \zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\epsilon \zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\} \quad (38)$$

имеет максимум.

С помощью разработанного программного комплекса численно исследована зависимость максимальной амплитуды поперечных колебаний каната при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах от относительной скорости движения границы при различных значениях безразмерного коэффициента, характеризующего жесткость объекта (см. табл. 1).

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- при уменьшении  $\epsilon$  амплитуда колебаний увеличивается;
- при  $\epsilon \rightarrow 0$  амплитуда колебаний стремится к бесконечности;
- с увеличением номера моды и изгибной жесткости объекта максимальная амплитуда колебаний уменьшается.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближенный метод построения решений интегродифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с подвижными границами в линейной постановке, описываемой уравнениями гиперболического типа. Данный метод позволяет учесть влияние на систему сил сопротивления внешней среды, изгибной жесткости и жесткости подложки объекта. Решение задачи сводится к получению квадратурных формул амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -й динамической моде. Вышеуказанные результаты позволяют на этапе проектирования предотвратить возможность высокоамплитудных колебаний в механических объектах с подвижными границами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.
2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. № 1. P. 66–78.
3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Engng. 2006. № 2. P. 173–178.
4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 290 с.

5. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. С. 161–165.
6. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
7. Liu Z., Chen G. Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости // J. Vibr. Engng. 2007. № 1. P. 57–60.
8. Palm J. et al. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method // V Intern. Conference on Comput. Methods in Marine Engng. 2013.
9. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Ж. Средневолжского матем. общества. 2014. Т. 16. № 1. С. 83–88.
10. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография / В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
11. Лежнева А.А. Свободные изгибные колебания балки переменной длины // Ученые записки. Пермь: Пермск. Ун-т, 1966. № 156. С. 143–150.
12. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. № 1–2. P. 1–14.
13. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance // J. Sound Vib. 2006. № 4–5. P. 1073–1093.
14. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механ. твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
15. Berlioz A., Lamarque C.-H. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable // J. of Sound and Vibration. 2005. V. 279. P. 619–639.
16. Sandilo S.H., van Horssen W.T. On variable length induced vibrations of a vertical string // J. of Sound and Vibration. 2014. V. 333. P. 2432–2449.
17. Zhang W., Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002. V. 37. P. 505–526.
18. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation // Struct. Control Health Monit. 2010. V. 17. P. 386–403.
19. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
20. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самарского гос. техн. университета. Сер. “Физ.-матем. науки”. 2012. V. 3(28). P. 145–151.
21. Весницкий А.И. Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. V. 10. P. 1538–1542.
22. Барсуков К.А., Григорян Г.А. К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофиз. 1976. V. 2. P. 280–285.

---

---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---

---

УДК 517.956

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ  
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ<sup>1)</sup>**

© 2022 г. А. Б. Муравник

117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Российский университет дружбы народов, Россия

e-mail: amuravnik@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.  
Переработанный вариант 12.01.2022 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Дифференциально-разностные уравнения (и функционально-дифференциальные уравнения в целом) находят приложения в областях, не покрываемых классическими моделями математической физики: модели нелинейной оптики, неклассические диффузионные модели (учитывающие инерционный характер этого физического явления), биоматематические приложения, теория многослойных пластин и оболочек. Это обусловлено нелокальной природой функционально-дифференциальных уравнений: в отличие от классических дифференциальных уравнений, связывающих все производные неизвестной функции (включая ее саму) в одной и той же точке (что является определенной редукцией математической модели), они допускают связь указанных членов уравнения в разных точках, тем самым принципиально повышая общность модели. В настоящей работе исследуется задача Дирихле в полупространстве для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с нелокальными потенциалами: дифференциальные операторы действуют на неизвестную (искомую) функцию в одной точке, а потенциал — в другой. Для случая интегрируемых краевых данных (а именно в этом случае допустимы только решения с конечной энергией) строится интегральное представление решения и доказывается его гладкость вне граничной гиперплоскости, а также его равномерное стремление к нулю при неограниченном возрастании времени-подобной переменной. Библ. 24.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностные уравнения, эллиптические задачи, нелокальные потенциалы, суммируемые краевые данные.

DOI: 10.31857/S0044466922060138

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Эллиптические дифференциально-разностные уравнения, т.е. уравнения, в которых на неизвестную функцию действуют, кроме дифференциальных операторов, еще и операторы сдвига, активно исследуются в настоящее время (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Это обусловлено как принципиальной новизной приложений таких уравнений, так и качественно новыми эффектами, возникающими в (исследуемом) нелокальном случае (см., например, [2]–[11]).

Для задач в ограниченных областях для эллиптических дифференциально-разностных уравнений к настоящему времени построена глубокая и полная теория (см., например, [1], [12]–[15] и имеющуюся там библиографию). Случай неограниченной области пока изучен в гораздо меньшей степени. Так, в [16] (см. также имеющуюся там библиографию) задача Дирихле в полуплоскости изучена для случая, когда (эллиптический) дифференциально-разностный оператор представляет собой суперпозицию дифференциального и разностного оператора. В [17], [18] начато исследование уравнений, содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, т.е. эллиптических уравнений с нелокальными потенциалами — рассмотрен двумерный случай, т.е. задача Дирихле в полуплоскости. В настоящей работе мы переходим к многомерному

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00288 А).

случаю, а именно, в полупространстве  $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$  рассматриваем задачу Дирихле (с суммируемой краевой функцией) для уравнения

$$u_{x_1 x_1}(x, y) - au(x_1 + h, x_2, \dots, x_n, y) + \sum_{j=2}^n u_{x_j x_j}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0. \quad (1.1)$$

При условии, что

$$0 < a \leq 2h^2, \quad (1.2)$$

доказывается разрешимость указанной задачи в смысле обобщенных функций (точнее, в смысле Гельфанда—Шилова), строится интегральное представление ее решения формулой Пуассоновского типа и доказывается его бесконечная дифференцируемость вне гиперплоскости  $\{y = 0\}$ , а также его равномерное стремление к нулю (вместе со всеми его производными) при  $y \rightarrow \infty$ .

## 2. ОПЕРАЦИОННАЯ СХЕМА

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим краевое условие

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Будем использовать классическую операционную схему Гельфанда—Шилова (см., например, [19, § 10]): к задаче (1.1), (2.1) (формально) применим преобразование Фурье по ( $n$ -мерной) переменной  $x$ . Получим следующую начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} = (|\xi|^2 + a \cos h\xi_1 + ia \sin h\xi_1) \hat{u}, \quad y \in (0, +\infty), \quad (2.2)$$

$$\hat{u}(0; \xi) = \hat{u}_0(\xi). \quad (2.3)$$

Отметим, что эта задача не является задачей Коши, поскольку порядок уравнения равен двум, а начальное условие только одно.

Таким образом, (2.2) – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от  $n$ -мерного параметра  $\xi$ ) с характеристическим уравнением  $\pm p(\cos \theta + i \sin \theta)$ , где

$$\begin{aligned} \rho = \rho(\xi) &= \left[ (|\xi|^2 + a \cos h\xi_1)^2 + a^2 \sin^2 h\xi_1 \right]^{1/4} = \\ &= (|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2 \cos^2 h\xi_1 + a^2 \sin^2 h\xi_1)^{1/4} = (|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2)^{1/4}, \end{aligned}$$

а

$$\theta = \theta(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}.$$

Решим задачу (2.2), (2.3) так, как это сделано в [17, разд. 1], и выберем произвольные постоянные таким образом, чтобы после (формального) применения обратного преобразования Фурье к полученному решению чисто мнимая часть обратилась в ноль (это возможно, потому что количество начальных условий меньше, чем порядок уравнения). Получим свертку краевой функции с функцией

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi, \quad (2.4)$$

где

$$G_{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}(\xi) = \rho(\xi) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \theta(\xi). \quad (2.5)$$

**Замечание 1.** Применяя в настоящем разделе прямое и обратное преобразования Фурье, мы не заботимся о сходимости интегралов и о законности изменения порядка интегрирования, поскольку (в полном со-

ответствии с общей схемой [19, § 10]) имеем дело с решениями в смысле обобщенных функций. В следующем разделе мы имеем дело и с обычными функциями, но каждое утверждение этого раздела строго доказывается отдельно.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА ПУАССОНА

Чтобы оценить функцию  $G_1(\xi)$  снизу, учтем, что значения арктангенса лежат в интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Значит,  $|\theta(\xi)| < \frac{\pi}{4}$ , т.е.  $\cos \theta(\xi) > 0$  и  $\cos 2\theta(\xi) > 0$ . Следовательно,  $\cos \theta(\xi)$  можно представить в виде  $\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta(\xi)}{2}}$ , а  $\cos 2\theta(\xi)$  – в виде  $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta(\xi)}}$ . Теперь, поскольку

$$2\theta(\xi) = \arctan \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1},$$

имеем равенство

$$\tan 2\theta(\xi) = \frac{a \sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}. \tag{3.1}$$

Положительность последнего знаменателя обеспечивается условием (1.2). Действительно, он ограничен снизу функцией одной переменной  $f(\xi_1) = \xi_1^2 + a \cos h\xi_1$ . Ее производная  $f'(\xi_1)$  равна

$$2\xi_1 - ah \sin h\xi_1 = \xi_1 \left( 2 - ah^2 \frac{\sin h\xi_1}{h\xi_1} \right),$$

а значит, неотрицательна на  $[0, +\infty)$ . Следовательно,  $f(\xi_1)$  – неубывающая на положительной полуоси функция. Поэтому на указанной полуоси она ограничена снизу величиной  $f(0) = a > 0$ . Наконец, поскольку  $f(\xi_1)$  – четная функция, последняя оценка остается справедливой на всей оси.

Из этой положительности мы делаем вывод, что

$$\begin{aligned} \cos 2\theta(\xi) &= \left( 1 + \frac{a^2 \sin^2 h\xi_1}{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2} \right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2}}{\sqrt{[|\xi|^2 + a \cos h\xi_1]^2 + a^2 \sin^2 h\xi_1}} = \\ &= \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\sqrt{|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2}} = \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда

$$\cos \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)} \right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$G_1(\xi) = \rho(\xi) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\rho^2(\xi) + |\xi|^2 + a \cos h\xi_1}{2}}. \tag{3.3}$$

Поскольку

$$\rho^4(\xi) = |\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h\xi_1 + a^2 \geq |\xi|^4 - 2a|\xi|^2 + a^2 = (|\xi|^2 - a)^2,$$

неравенство  $\rho^2(\xi) \geq |\xi|^2 - a$  выполнено при условии, что  $|\xi| \geq \sqrt{a}$ . Значит, при  $|\xi| \geq \sqrt{a}$  подкоренное выражение в (3.3) ограничено снизу функцией  $\frac{|\xi|^2 - a + |\xi|^2 - a}{2} = |\xi|^2 - a$ .

Справедлива

**Лемма 1.** Функция (2.4) корректно определена в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  вместе со всеми своими производными и является классическим решением уравнения (1.1) в этом полупространстве (в смысле определения, данного в [20, разд. 3]).

**Доказательство.** Используя полученную выше оценку подкоренного выражения в (3.3), заключаем, что для любого положительного  $y$  модуль подынтегральной функции в (2.4) мажорируется интегрируемой функцией  $e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}}$  во внешности шара радиуса  $\sqrt{a}$  с центром в начале координат; внутри этого шара она мажорируется тождественной единицей. Таким образом, функция  $\mathcal{E}(x, y)$  корректно определена в  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ . Формально дифференцируя функцию  $\mathcal{E}(x, y)$  под знаком интеграла (по любой переменной и сколько угодно раз), мы получаем только дополнительные подынтегральные сомножители не более, чем полиномиального роста по  $\xi$ , которые не имеют особенностей. Абсолютная сходимость полученных интегралов обосновывается точно так же, как и в случае самой функции  $\mathcal{E}(x, y)$ , только мажоранты заменяются на  $a^{m/2}$  и  $|\xi|^{m/2} e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}}$  соответственно (здесь  $m$  – порядок производной). Следовательно, указанное выше формальное дифференцирование под знаком интеграла законно и все производные функции  $\mathcal{E}(x, y)$  тоже корректно определены в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ .

Теперь мы можем вычислить лапласиан функции (2.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x_j x_j}(x, y) &= - \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi, \quad j = \overline{1, n}, \\ \mathcal{E}_y(x, y) &= - \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi, \\ \mathcal{E}_{yy}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_1^2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} G_2^2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Далее, учитывая равенства (3.1), (3.2), получаем соотношения

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi) [\cos^2 \theta(\xi) - \sin^2 \theta(\xi)] = \rho^2(\xi) \cos 2\theta(\xi) = |\xi|^2 + a \cos h\xi_1$$

и

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = 2\rho^2(\xi) \cos^2 \theta(\xi) \sin^2 \theta(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\theta(\xi) \rho^2(\xi) \tan 2\theta(\xi) \cos 2\theta(\xi) = a \sin h\xi_1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{x_j x_j}(x, y) + \mathcal{E}_{yy}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + |\xi|^2 + a \cos h\xi_1 \right) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi - \\ &\quad - a \int_{\mathbb{R}^n} \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi = \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} (\cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] \cos h\xi_1 - \sin[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] \sin h\xi_1) d\xi = \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[(x \cdot \xi + h\xi_1) - yG_2(\xi)] d\xi = \\ &= a \int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi = a\mathcal{E}(x_1 + h, x', y), \end{aligned}$$

где  $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , что и завершает доказательство.

**Замечание 2.** Если положить  $a = 0$  (т.е. вместо дифференциально-разностного уравнения рассмотреть классическое дифференциальное уравнение), то соотношение (2.4) дает хорошо известное ядро Пуассона

$$\frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

для задачи Дирихле в полупространстве для уравнения Лапласа.

#### 4. СВЕРТКА С СУММИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Используя мажоранты подынтегральной функции в (2.4) и ее производных, найденные в разд. 3, и обозначая через  $B(r)$  шар радиуса  $r$  с центром в начале координат, находим мажоранты самой функции  $\mathcal{E}(x, y)$  и ее производных:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} \cos[x \cdot \xi - yG_2(\xi)] d\xi \right| &= \left| \int_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m d\xi \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}} d\xi \right| = C(a) + C(a, y). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

**Теорема 1.** Если  $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , то функция

$$u(x, y) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi \tag{4.1}$$

является классическим решением уравнения (1.1).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в условиях теоремы оценки, найденные выше, влекут за собой законность дифференцирования под знаком интеграла в (4.1); далее применяется лемма 1.

**Замечание 3.** По построению функции  $\mathcal{E}(x, y)$  (см. разд. 2) и согласно [19, § 10, теорема 1], функция (4.1) удовлетворяет задаче (1.1), (2.1) в смысле Гельфанда–Шилова (см. [19, § 10]). А именно, это — обобщенная функция ( $n$ -мерной) переменной  $x$ , зависящая от параметра  $y$  и дифференцируемая по этому параметру на положительной полуоси (см., например, [21, § 9, разд. 5]), уравнение (1.1) понимается как соотношение между обобщенными функциями переменной  $x$ , выполняющееся для каждого положительного значения параметра  $y$ , а краевое условие (2.1) понимается как предельное соотношение в топологии пространства обобщенных функций переменной  $x$  при стремлении вещественного параметра  $y$  к нулю справа (см., например, [21, § 9, разд. 4]). По переменной  $y$  порядок уравнения (1.1) равен двум, но [19, § 10, теорема 1] остается применимой, поскольку она верна не только для систем, но и для уравнений, а уравнение (1.1) можно свести к системе уравнений первого порядка по  $y$  подобно тому, как это сделано в [22, Ch. 2, § 5, разд. 2]. Задача (1.1), (2.1) не эквивалентна указанному примеру из [22], потому что задача в этом примере имеет два крайних условия, а не одно, но эта разница не влияет на разрешимость. Таким образом, теорема 1 устанавливает гладкость указанного решения задачи (1.1), (2.1) вне граничной гиперплоскости.

#### 5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ

Ограничение (1.2) позволяет исследовать поведение найденного решения и при  $y \rightarrow \infty$ . Точнее, справедлива

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 функция (4.1) и каждая ее производная бесконечно дифференцируемы в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  и каждая из этих функций стремится к нулю при  $y \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $x$  из  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** В разд. 3 доказано, что условие (1.2) обеспечивает выполнение оценки  $\xi_1^2 + a \cos h\xi_1 \geq a$ . Тогда  $|\xi|^2 + a \cos h\xi_1 \geq a$ . С другой стороны,

$$\rho(\xi) \geq \left[ (|\xi|^2 + a \cos h\xi_1)^2 \right]^{1/4} = \sqrt{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1} = \sqrt{|\xi|^2 + a \cos h\xi_1},$$

потому что последнее подкоренное выражение положительно в силу условия (1.2) и положительности постоянной  $a$ .

Значит,  $\rho^2(\xi) > a$ , т.е.  $G_1(\xi) \geq \sqrt{\frac{a+a}{2}} = \sqrt{a}$  и, следовательно, справедлива следующая оценка:

$$|\mathcal{E}(x, y)| \leq \int_{B(2\sqrt{a})} e^{-y\sqrt{a}} d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}} d\xi = C(a)e^{-y\sqrt{a}} + \text{const} \int_{2\sqrt{a}}^{\infty} \rho^{n-1} e^{-y\sqrt{\rho^2 - a}} d\rho.$$

Подстановка  $\tau = \rho - \sqrt{a}$  сводит последний интеграл к виду

$$\int_{\sqrt{a}}^{\infty} (\tau + \sqrt{a})^{n-1} e^{-y\sqrt{\tau^2 + 2\sqrt{a}\tau}} d\tau,$$

что оценивается сверху выражением

$$\int_0^{\infty} (2\tau)^{n-1} e^{-y\tau} d\tau = \frac{2^{n-1}}{y^n} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z} dz = \frac{\text{const}}{y^n}.$$

Отсюда вытекает итоговая оценка

$$|\mathcal{E}(x, y)| \leq \text{const} \left( e^{-y\sqrt{a}} + \frac{1}{y^n} \right)$$

и, соответственно,

$$|u(x, y)| \leq \text{const} \|u_0\|_1 \left( e^{-y\sqrt{a}} + \frac{1}{y^n} \right),$$

где постоянная зависит только от параметра  $a$ .

Тем самым утверждение теоремы доказано для самой функции  $u(x, y)$ .

Для ее производных это утверждение доказывается точно так же; единственное отличие заключается в том, что подинтегральные функции умножаются на функции вида  $|\xi|^m$ , но это не изменяет итоговую оценку.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так же, как и в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений, задачи в полупространстве для дифференциально-разностных эллиптических уравнений естественным образом разделяются на два типа: задачи с ограниченными краевыми данными и задачи с интегрируемыми краевыми данными. Такое разделение обосновано тем, что в указанных двух случаях решения обладают принципиально разными качественными свойствами. В частности, только в задачах первого типа возможна стабилизация по Репникову–Эйделману, т.е. ситуация, в которой решение может иметь предел (причем не обязательно нулевой) при стремлении времени-подобной переменной к бесконечности, а может и не иметь его (в зависимости от поведения средних от краевой функции). В задачах второго типа решение всегда стремится к нулю, и исследование в основном сосредоточено на скорости этого стремления.

Специфика дифференциально-разностных уравнений – в том, что в каждом из этих двух случаев имеет смысл отдельно рассматривать уравнения, содержащие суперпозицию дифференциальных операторов и операторов сдвига (для таких уравнений задачи второго типа рассмотрены в [20], [23], [24]), и уравнения, содержащие их сумму. Задача второго типа для модельного уравнения с суммой исследована в настоящей работе.

Отметим, что для задач второго типа (случай интегрируемых краевых данных) все результаты получены для произвольного количества пространственноподобных (тангенциальных) независимых переменных. Для задач первого типа (случай ограниченных краевых данных) все известные на сегодня результаты достигнуты только в полуплоскости (т.е. для случая одной тангенциальной переменной); многомерный случай требует дополнительного исследования.

Автор выражает глубокую благодарность участникам Второй международной конференции “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ” (Долгопрудный, июнь–июль 2021 г.) за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие дальнейшему развитию полученных результатов и их лучшему пониманию и изложению.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5. С. 3–112.
2. *Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механ. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
3. *Razgulin A.V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proc. SPIE. 1993. V. 2039. P. 342–352.
4. *Vorontsov M.A., Firth W.J.* Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. № 4. P. 2891–2906.
5. *Vorontsov M.A., Iroshnikov N.G., Abernathy R.L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos Solitons Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.
6. *Skubachevski A.L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 327–360.
7. *Варфоломеев Е.М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // Современная матем. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 5–36.
8. *Solonukha O.V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional differential equations // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 869–893.
9. *Иванова Е.П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Современная матем. Фундаментальные направления. 2016. Т. 59. С. 74–96.
10. *Onanov G.G., Skubachevski A.L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 192–207.
11. *Skubachevski A.L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem // Math. Nachr. 2018. V. 291. № 17–18. P. 2660–2692.
12. *Gurevich P.L.* Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups // J. Math. Sci. (N.Y.) 2012. V. 182. № 3. P. 255–440.
13. *Skubachevski A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
14. *Skubachevski A.L.* Nonclassical boundary value problems. I // J. Math. Sci. (N.Y.) 2008. V. 155. № 2. P. 199–334.
15. *Skubachevski A.L.* Nonclassical boundary value problems. II // J. Math. Sci. (N.Y.) 2010. V. 166. № 4. P. 377–651.
16. *Muravnik A.B.* Nonlocal problems and functional-differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modelling // Math. Model. Nat. Phenom. 2019. V. 14. № 6. Article № 601.
17. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
18. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Var. Elliptic Equ., Published online: 28 Dec 2020. <https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372>
19. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи матем. наук. 1953. Т. 8. № . С. 3–54.
20. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимск. матем. ж. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
21. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ, 1984.
22. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
23. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 5. С. 764–770.
24. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 1. С. 90–98.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ

© 2022 г. А. Ашыралыев<sup>1,2,3,\*</sup>, Ч. Ашыралыев<sup>4,5,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 34353 Кафедра математики, Бахчешехир университет, Стамбул, Турция

<sup>2</sup> 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

<sup>3</sup> 050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, Институт математики и математического моделирования, Казахстан

<sup>4</sup> 29100 Кафедра инженерной математики, Университет Гюмюшхане, Гюмюшхане, Турция

<sup>5</sup> 100174 Студенческий городок, Ташкент, Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан

\*e-mail: aallaberen@gmail.com

\*\*e-mail: charyar@gmail.com

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.  
Переработанный вариант 24.12.2021 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В данной работе исследуются краевые задачи с интегральным типом нелокальности по времени для параболического уравнения. Установлены корректно поставленность этих дифференциальных и разностных проблем в гильбертовых пространствах. Представлены числовые иллюстрации в тестовом примере. Библи. 33. Табл. 1.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, локальные и нелокальные задачи, разностные схемы, устойчивость, гильбертово пространство.

DOI: 10.31857/S0044466922060023

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи физики и прикладных наук сводятся к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнения параболического типа. Приближенные решения локальных и нелокальных краевых задач для параболических уравнений были широко исследованы многими авторами (см., например, [1]–[32] и ссылки, указанные в них).

В статье [19] рассмотрена однозначная разрешимость нелокальной по времени краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) &= \int_0^T a(s)Bu(s)ds + \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

для параболического уравнения в гильбертовом пространстве  $H$  с позитивными самосопряженными операторами  $A$  и  $B$ . Здесь  $f : (0, T) \rightarrow H$  и  $a : [0, T] \rightarrow R^1$  – заданные функции,  $\varphi \in H$  – известный элемент,  $B$  является ограниченным и  $D(B) = H$ .

В данной статье исследуется корректность нелокальной по времени краевой задачи (1.1) для параболического уравнения. Приведены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы первого и второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи (1.1) и установлены теоремы об устойчивости этих разностных схем. Представлены числовые иллюстрации в тестовом примере.

2. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

**Лемма 1.** Для всех значений  $t \geq 0$  имеют место оценки:

$$\|e^{-At}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad t \|Ae^{-At}\|_{H \rightarrow H} \leq 1. \tag{2.1}$$

**Лемма 2.** Предположим, что условие

$$\int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{H \rightarrow H} < 1 \tag{2.2}$$

выполнено. Тогда оператор  $I - \int_0^T a(s)Be^{-As} ds$  имеет обратный  $Q$  и последующая оценка

$$\|Q\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - \int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{H \rightarrow H}} = M_{a,b} \tag{2.3}$$

выполнена.

Доказательства этих оценок основаны на спектральном представлении самосопряженного положительно-определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Здесь и далее  $M$  указывает на положительные константы, которые время от времени могут изменяться. Если константа зависит только от  $a$ , то мы будем писать  $M_a$ .

**Лемма 3.** Для решения задачи (1.1) имеем следующую формулу:

$$u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds, \tag{2.4}$$

$$u(0) = Q \left[ \int_0^T a(s) \left[ \int_0^s Be^{-A(s-\sigma)}f(\sigma)d\sigma \right] ds + \varphi \right]. \tag{2.5}$$

**Доказательство.** При гладких данных существует единственное решение проблемы (см. [5]):

$$u_t(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad \text{элемент } u(0) \text{ задан} \tag{2.6}$$

и для решения имеет место формула (2.4). Применяя эту формулу и нелокальное условие

$$u(0) = \int_0^T a(s)Bu(s)ds + \varphi,$$

убеждаемся в том, что

$$u(0) = \int_0^T a(s)B \left[ e^{-As}u(0) + \int_0^s e^{-A(s-\sigma)}f(\sigma)d\sigma \right] ds + \varphi.$$

По лемме 2 оператор  $I - \int_0^T a(s)Be^{-As} ds$  имеет обратную  $Q = \left( I - \int_0^T a(s)Be^{-As} ds \right)^{-1}$ . Отсюда следует и формула (2.5). Лемма 3 доказана.

Обозначим через  $C_0^\alpha([0, T], H)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , банахово пространство, полученное пополнением множества гладких  $H$ -значных функций  $\varphi(t)$ , определенных на  $[0, T]$  в норме

$$\|\varphi\|_{C_0^\alpha([0, T], H)} = \|\varphi\|_{C([0, T], H)} + \sup_{0 \leq t < \tau \leq T} \frac{(t + \tau)^\alpha \|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)\|_H}{\tau^\alpha}.$$

Здесь  $C([0, T], H)$  обозначает банахово пространство всех абстрактных непрерывных функций  $\varphi(t)$ , определенных на  $[0, T]$  со значениями в  $H$  и нормой

$$\|\varphi\|_{C([0, T], H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(t)\|_H.$$

**Теорема 1.** *Предположим, что выполнены условия лемм 1 и 2. Пусть  $\varphi \in D(A)$  и  $f(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $[0, T]$ . Тогда существует единственное решение  $u(t)$  задачи (1.1) и для решения выполняются неравенства устойчивости*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq M_{a,b} \left[ \|\varphi\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \right] \quad (2.7)$$

и

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|Au(t)\|_H \leq M_{a,b} \left[ \|A\varphi\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H \right]. \quad (2.8)$$

**Доказательство.** Применяя формулу (2.4) и оценку (2.1), для всех  $t \in (0, T]$  получаем

$$\|u(t)\|_H \leq \|u(0)\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H. \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.5), неравенство треугольника и оценки (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|u(0)\|_H \leq C_a \left[ \|B\|_{H \rightarrow H} T \int_0^T |a(s)| ds \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right] \leq M_{a,b} \left[ \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right]. \quad (2.10)$$

Следовательно, оценка (2.7) следует из (2.9) и (2.10). Теперь получим оценку (2.8). По формуле (2.4) и интегрированием по частям получаем

$$Au(t) = Ae^{-At}u(0) + f(t) - e^{-At}f(0) - \int_0^t e^{-A(t-s)} f'(s) ds. \quad (2.11)$$

Применяя эту формулу и оценку (2.1), получаем оценку

$$\|Au(t)\|_H \leq \|Au(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|f(0)\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H \quad (2.12)$$

для всех  $t \in (0, T]$ .

По формуле (2.5) и интегрированием по частям получаем

$$Au(0) = QA\varphi + Q \left\{ \int_0^T a(s)B \left( (I - e^{-As})f(s) + \int_0^s e^{-A(s-\sigma)} (f(\sigma) - f(s)) d\sigma \right) ds \right\}. \quad (2.13)$$

По этой формуле и оценкам (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|Au(0)\|_H \leq C_a \|A\varphi\|_H + C_a \|B\|_{H \rightarrow H} \left[ \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \right]. \quad (2.14)$$

Комбинируя оценки (2.12) и (2.14), получаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|Au(t)\|_H \leq M_{a,b} \left[ \|A\varphi\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H \right]. \quad (2.15)$$

Тогда оценка для  $\|u'(t)\|_H$  следует из уравнения (1.1) и оценки (2.15). Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены условия лемм 1 и 2. Пусть  $f(t) \in C_0^\alpha([0, T], H)$  и  $\varphi \in D(A)$ . Тогда краевая задача (1.1) корректна в пространстве Гёльдера  $C_0^\alpha([0, T], H)$ . Для решения краевой задачи  $u(t)$  в  $C_0^\alpha([0, T], H)$  коэцитивное неравенство*

$$\|u'\|_{C_0^\alpha([0, T], H)} + \|Au\|_{C_0^\alpha([0, T], H)} \leq \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], H)} + M_{a,b} \|A\varphi\|_H \quad (2.16)$$

выполнено.

**Доказательство.** Применяя формулу (2.14) и оценки (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|Au(0)\|_H \leq M_a \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|B\|_{H \rightarrow H} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], H)} + \|A\varphi\|_H \right].$$

Отсюда и из корректности начальной задачи (2.6) в  $C_0^\alpha([0, T], H)$  статьи [1] следует оценка (2.16). Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Отметим, что корректность краевой задачи (1.1) теоремы 2 в произвольном банаховом пространстве  $E$  выполняется при предположении  $I - \int_0^T a(s)Be^{-As} ds$  имеет ограниченный обратный в  $E$ .

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЭРЦИТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Пусть  $C_\tau(H) = C([0, T]_\tau, H)$ ,  $C_\tau^\alpha(H) = C_0^\alpha([0, T]_\tau, H)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , — банаховы пространства всех сеточных функций  $w_\tau = \{w_k\}_{k=0}^N$  со значением в  $H$  и определенных на  $[0, T]_\tau = \{t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N, N\tau = T\}$  соответствующими нормами

$$\|w_\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{0 \leq k \leq N} \|w_k\|_H, \quad \|w_\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \sup_{1 \leq k < k+n \leq N} (N-n)^{-\alpha} (k)^\alpha \|w_{k+n} - w_k\|_H + \|w_\tau\|_{C_\tau(H)}.$$

Для приближения краевых задач ((1)) представим соответствующие разностные схемы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k &= \varphi_k, \quad \varphi_k = f(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \\ u_0 &= \frac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_iBu_i\tau + \varphi \end{aligned} \tag{3.1}$$

первого порядка точности и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} &= \varphi_k, \quad \varphi_k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}\right), \quad 1 \leq k \leq N, \\ u_0 &= \frac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_iBu_i\tau + \varphi \end{aligned} \tag{3.2}$$

второго порядка точности. Здесь  $a_i = a(t_i)$ ,  $t_i = i\tau$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $N\tau = T$ . Из положительности оператора  $A$  следует, что существуют ограниченные операторы шага  $R = R(\tau A)$ ,  $P = P(\tau A)$  этих разностных схем на всем пространстве  $H$ , определяемые формулами

$$R = \begin{cases} (I + \tau A)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.1),} \\ \left(I - \frac{\tau A}{2}\right)\left(I + \frac{\tau A}{2}\right)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.2),} \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} (I + \tau A)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.1),} \\ \left(I + \frac{\tau A}{2}\right)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.2).} \end{cases}$$

**Лемма 4.** Для всех  $k = 1, \dots, N$  оценки

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|(I - R)R^{k-1}P\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{k} \tag{3.3}$$

выполнены.

**Лемма 5.** Предположим, что

$$\left[ \frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{H \rightarrow H} < 1. \tag{3.4}$$

Тогда оператор

$$I - \frac{a_0B + a_NBR^N}{2} \tau - \sum_{i=1}^{N-1} a_iR^iB\tau$$

имеет обратную  $Q_\tau$  и последующая оценка

$$\|Q_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - \left[ \frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{H \rightarrow H}} = M_{a,b} \tag{3.5}$$

выполнена.

Доказательства этих оценок основываются на спектральном представлении самосопряженных положительно-определенных операторов в гильбертовом пространстве.

**Лемма 6.** Для решения разностных схем (3.1) и (3.2) имеем следующую формулу:

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{i=1}^k R^{k-i} P \varphi_i \tau, \tag{3.6}$$

$$u_0 = Q_\tau \left[ \frac{\tau a_N}{2} B \sum_{i=1}^N R^{N-i} P \varphi_i \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \tau a_i B \sum_{j=1}^i R^{i-j} P \varphi_j \tau + \varphi \right]. \tag{3.7}$$

**Доказательство.** Для решения разностных схем

$$\frac{1}{\tau} (u_k - u_{k-1}) + A u_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 - \text{заданный элемент}, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\tau} (u_k - u_{k-1}) + A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 - \text{заданный элемент} \tag{3.9}$$

имеем формулу (3.6). Применяя эту формулу и нелокальное условие

$$u_0 = \frac{a_0 B u_0 + a_N B u_N}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_i B u_i \tau + \varphi,$$

имеем

$$u_0 = \frac{\tau a_0}{2} B u_0 + \frac{\tau a_N}{2} B \left[ R^N u_0 + \sum_{i=1}^N R^{N-i} P \varphi_i \tau \right] + \sum_{i=1}^{N-1} \tau a_i B \left[ R^i u_0 + \sum_{j=1}^i R^{i-j} P \varphi_j \tau \right] + \varphi.$$

По лемме 5 оператор  $I - \frac{a_0 B + a_N B R^N}{2} \tau - \sum_{i=1}^{N-1} a_i R^i B \tau$  имеет обратную  $Q_\tau$ . Отсюда следует формула (3.7). Лемма 6 доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $\tau$  – достаточно малое число. Тогда разностные схемы (3.1) и (3.2) устойчивы в  $C_\tau(H)$  и  $C_\tau^\alpha(H)$  и для решений разностных схем (3.1) и (3.2) в  $C_\tau(H)$  и  $C_\tau^\alpha(H)$  справедливы следующие неравенства устойчивости:

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(H)} \leq M_{a,b} \left[ \|\varphi\|_H + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)} \right], \tag{3.10}$$

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leq M_{a,b} \left[ \|\varphi\|_H + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right]. \tag{3.11}$$

**Доказательство.** Неравенства устойчивости

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(H)} \leq \left[ \|u_0\|_H + T \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)} \right], \tag{3.12}$$

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leq M \left[ \|\varphi\|_H + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \tag{3.13a}$$

для решения разностных схем (3.8) и (3.9) в  $C_\tau(H)$  и  $C_\tau^\alpha(H)$  были доказаны ранее (см. [2]). Используя формулу (3.7) и оценку (3.3), получаем оценки

$$\|u_0\|_H \leq M_{a,b} \left[ \|\varphi\|_H + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)} \right], \tag{3.14}$$

$$\|u_0\|_H \leq M_{a,b} \left[ \|\varphi\|_H + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \tag{3.15}$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2) в  $C_\tau(H)$  и  $C_\tau^\alpha(H)$ . Следовательно, оценки (3.10) и (3.11) вытекают из оценок (3.12)–(3.15). Теорема 3 доказана.

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве  $C([0, T], H)$  непрерывных со значением в  $H$  функций, определенных на  $[0, T]$ , не является корректно поставленным для общего положительного оператора  $A$  и пространства  $H$ , то корректность разностных схем (3.1) и (3.2) в норме  $C_\tau(H)$  не имеет места равномерно относительно  $\tau > 0$ . Это означает, что коэрцитивная норма

$$\|u^\tau\|_{K_\tau(H)} = \|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(H)} + \|\{A\tilde{u}_k\}_1^N\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к  $\infty$  при  $\tau \rightarrow +0$ . Здесь и в будущем мы полагаем

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} u_k & \text{для разностной схемы (3.1),} \\ \frac{u_k + u_{k-1}}{2} & \text{для разностной схемы (3.2).} \end{cases}$$

Исследование разностных схем (3.1) и (3.2) в норме  $C_\tau(H)$  позволяет установить порядок роста этой нормы к  $\infty$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\tau$  – достаточно малое число. Тогда для решения разностных схем (3.1) и (3.2) имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости

$$\|u^\tau\|_{K_\tau(H)} \leq M_{a,b} [\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{H \rightarrow H}|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)} + \|A\varphi\|_H].$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\|u^\tau\|_{K_\tau(H)} \leq M [\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{H \rightarrow H}|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)} + \|Au_0\|_H]$$

для решения разностных схем (3.8) и (3.9) в  $C_\tau(H)$  работы [2] и оценки

$$\|Au_0\|_H \leq M_{a,b} [\|A\varphi\|_H + \min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{H \rightarrow H}|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(H)}]$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2) в  $C_\tau(H)$ . Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $\tau$  – достаточно малое число и  $\varphi \in D(A)$ . Тогда для решения разностных схем (3.1) и (3.2) выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в  $C_\tau^\alpha(E)$

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \|\{A\tilde{u}_k\}_1^N\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leq \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} + M_{a,b} \|A\varphi\|_H.$$

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы основано на теореме о корректности в  $C_\tau^\alpha(E)$  разностных схем (3.8) и (3.9) статей [2] и [11] и оценки коэрцитивной устойчивости

$$\|Au_0\|_E \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} + M \|A\mu\|_E$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2). Теорема 5 доказана.

**Замечание 2.** Переходя к пределу для  $\tau \rightarrow 0$  в (5), мы можем получить корректность нелокальной краевой задачи (1.1) в  $C_0^\alpha([0, T], H)$  теоремы 4.

**Замечание 3.** Отметим, что оценка устойчивости, оценка почти коэрцитивной устойчивости и оценка коэрцитивной устойчивости разностных схем (3.1) и (3.2) теорем 3–5 в произвольном банаховом пространстве  $E$  верны при предположении, что

$$I - \frac{a_0 B + a_N B R^N}{2} \tau - \sum_{i=1}^{N-1} a_i R^i B \tau$$

имеет ограниченный обратный в  $E$ .

## 4. ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим приложения результатов теорем 3 и 4 для нелокальных краевых задач для параболических уравнений и теорем 6–8 для решений разностных схем для приближенных решений этих параболических уравнений.

Во-первых, рассматривается нелокальная краевая задача для одномерного параболического уравнения

$$\begin{aligned} v_t - (a(x)v_x)_x + \delta v &= f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ v(0, x) &= \int_0^T \alpha(s) Bv(s, x) ds + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ v(t, 0) &= v(t, l), \quad v_x(t, 0) = v_x(t, l), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $0 < a \leq a(x)$ ,  $a(l) = a(0)$  и  $\delta$  – положительная константа. В условиях совместности задача (4.1) имеет единственное решение  $v(t, x)$  для гладких функций  $a(x)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $f(t, x)$ ,  $(t, x) \in (0, T) \times (0, l)$ . Это позволяет сводить смешанную задачу (4.10) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве  $H = L_2[0, l]$ .

Известно, что дифференциальное выражение

$$Az = -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{dz(x)}{dx} \right) + \delta z(x) \quad (4.2)$$

определяет самосопряженный положительно-определенный оператор  $A$  с области определения

$$D(A) = \{z : z, z'' \in L_2(0, l), z(0) = z(l), z'(0) = z'(l)\}. \quad (4.3)$$

Применяя результаты теорем 3 и 4, мы можем получить утверждения об устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

**Теорема 6.** *Предположим, что  $\varphi(x) \in W_2^2(0, l)$  и  $f(t, x) \in C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))$  и условие  $\int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{L_2(0, l) \rightarrow L_2(0, l)} < 1$  выполнено. Тогда задача (4.1) имеет единственное решение  $u \in C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))$  и для решения нелокальной краевой задачи (4.1) следующие оценки устойчивости:*

$$\|u\|_{C([0, T], L_2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[ \|\varphi\|_{L_2(0, l)} + \|f\|_{C([0, T], L_2(0, l))} \right], \quad (4.4)$$

$$\|u_t\|_{C([0, T], L_2(0, l))} + \|u\|_{C([0, T], W_2^2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[ \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)} + \|f_t\|_{C([0, T], L_2(0, l))} + \|f(0)\|_{L_2(0, l)} \right] \quad (4.5)$$

и оценки коэрцитивной устойчивости

$$\|u_t\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))} + \|u\|_{C_0^\alpha([0, T], W_2^2(0, l))} \leq M_{a, b, q, \delta} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)} + \frac{M_{a, b, q, \delta}}{\alpha(1 - \alpha)} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(0, l))} \quad (4.6)$$

выполнены.

Здесь пространство Соболева  $W_2^2(0, l)$  определяется как множество всех функций  $v(x)$ , определенных на  $(0, l)$ , таких что как  $v(x)$ ,  $v'(x)$ , так и  $v''(x)$  локально интегрируемы в  $L_2(0, l)$ , снабженные нормой

$$\|v\|_{W_2^2(0, l)} = \left( \int_0^l |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_0^l |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_0^l |v''(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Кроме того, пусть  $L_{2h} = L_2[0, l]_h$  и  $W_{2h}^2 = W_2^2[0, l]_h$  – нормированные пространства всех сеточных функций  $\gamma^h(x) = \{\gamma_n\}_{n=0}^M$  определенных на  $[0, l]_h = \{x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = l\}$  с нормами

$$\|\gamma^h\|_{L_{2h}} = \left( \sum_{x \in [0, l]_h} |\gamma^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$$



и

$$\|\gamma^h\|_{W_{2h}^2} = \|\gamma^h\|_{L_{2h}} + \left( \sum_{x \in (0,l)_h} |(\gamma^h)_{xx,j}|^2 h \right)^{1/2},$$

соответственно. Кроме того, введем разностный оператор  $A_h^x$  определенной формулой

$$A_h^x u^h(x) = \left\{ -\frac{1}{h} \left( a_{n+1} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} - a_n \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right) + \delta u_n \right\}_1^{M-1}, \tag{4.7}$$

действующие в пространстве сеточных функций  $u^h(x) = \{u_n\}_{n=0}^M$  определенных на  $[0, l]_h$  удовлетворяющих условиям  $u_M = u_0, u_1 - u_0 = u_M - u_{M-1}$ . Для численного решения  $\{u_k^h(x)\}_{k=0}^N$  нелокальной краевой задачи (4.1), представляем разностные схемы первого и второго порядка точности по  $t$

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left( a_{n+1} \frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} \right) + \delta u_n^k = f_n^k, \\ & f_n^k = f(t_k, x_n), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, M-1}, \\ & u_n^0 = \varphi_n, \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0, M}, \\ & u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0, N}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2h} \left( a_{n+1} \frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} \right) - \frac{1}{2h} \left( a_{n+1} \frac{u_{n+1}^{k-1} - u_n^{k-1}}{h} - a_n \frac{u_n^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h} \right) + \delta \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} = f_n^k, \\ & f_n^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k \in \overline{1, N}, \quad n \in \overline{1, M-1}, \\ & u_n^0 = \varphi_n, \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0, M}, \\ & u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0, N}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

соответственно. Применяя результаты теорем 3, 4 и 5, можно получить результаты устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (4.8) и (4.9).

**Теорема 7.** Пусть  $\tau$  и  $h$  являются достаточно малыми числами и условие

$$\left[ \frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{L_{2h} \rightarrow L_{2h}} < 1$$

выполнено. Тогда решения разностных схем (4.8) и (4.9) удовлетворяют оценку устойчивости

$$\left\| \{u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right],$$

оценку почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{h + \tau} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right]$$

и оценку почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right].$$

Во-вторых, пусть  $\Omega$  – единичный куб в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  ( $0 < x_k < 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ ) с границей  $S$  и  $\tilde{\Omega} = \Omega \cup S$ . В  $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ . В  $[0, T] \times \tilde{\Omega}$  рассмотрим нелокальную краевую задачу для многомерного параболического уравнения

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} &= f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) &= \int_0^T \alpha(s)Bu(s, x)ds + \varphi(x), \quad x \in \tilde{\Omega}, \\ u(t, x) &= 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Задача (4.10) имеет единственное гладкое решение  $u(t, x)$  для гладких функций  $a_r(x) \geq a > 0$  ( $x \in \Omega$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in \tilde{\Omega}$ ) и  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ ). Это позволяет свести смешанную задачу (4.10) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве  $H = L_2(\Omega)$  всех интегрируемых функций, определенных на  $\Omega$ , с нормой

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{x \in \Omega} \dots \int |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$$

с самосопряженным положительно-определенным оператором  $A^x$ , определяемым формулой

$$A^x u(x) = - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \quad (4.11)$$

с областью определения

$$D(A^x) = \left\{ u(x) : u(x), u_{x_r}(x), (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\Omega), 1 \leq r \leq n, u(x) = 0, x \in S \right\}.$$

Применяя результаты теорем 1, 2, 3 и теоремы о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической задачи в  $L_2(\tilde{\Omega})$  (см. [19]), можно получить результаты устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

**Теорема 8.** *Предположим, что  $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$  и  $f(t, x) \in C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))$  и условие  $\int_0^T |a(s)| ds \|B\|_{H \rightarrow H} < 1$  выполнено. Тогда задача (4.10) имеет единственное решение  $u \in C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))$  и решение нелокальной краевой задачи (4.10) удовлетворяет следующим оценкам устойчивости:*

$$\|u\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[ \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \right], \quad (4.12)$$

$$\|u_t\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} + \|u\|_{C([0, T], W_2^2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \left[ \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_t\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} + \|f(0)\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad (4.13)$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\|u_t\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))} + \|u\|_{C_0^\alpha([0, T], W_2^2(\Omega))} \leq M_{a, b, q, \delta} \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{M_{a, b, q, \delta}}{\alpha(1 - \alpha)} \|f\|_{C_0^\alpha([0, T], L_2(\Omega))}. \quad (4.14)$$

Здесь пространство Соболева  $W_2^2(\Omega)$  определяется как множество всех функций  $u$ , определенных на  $\Omega$  таких, что  $u$  и все функции производной в частных производных второго порядка  $u_{x_r}$ ,  $r = 1, \dots, n$ , все интегрируемы в  $L_2(\Omega)$ , снабжены нормой

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left( \int_{x \in \Omega} \dots \int \sum_{r=1}^n |u_{x_r}|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{1/2}.$$

Численное решение задачи (4.10) проводилось в два этапа. На первом этапе определяется сетка

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n), 0 \leq m_r \leq M_r, h_r M_r = L, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, \quad S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

и сеточный оператор  $A_h^x$  формулой

$$A_h^x u^h(x) = -\sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{\bar{x}_r}^h)_{x_r, j_r}, \quad (4.15)$$

действующий в пространстве сеточных функций  $u^h(x)$ , удовлетворяющих условиям  $u^h(x) = 0$  для всех  $x \in S_h$ . С помощью  $A_h^x$  мы приходим к нелокальной краевой задаче

$$\begin{aligned} v_t^h(t, x) + A_h^x v^h(t, x) &= f^h(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v^h(0, x) &= \int_0^T \alpha(s) B_h v^h(s, x) ds + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{aligned} \quad (4.16)$$

для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

На втором этапе задача (4.16) заменяется разностными схемами первого и второго порядка точности по  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) &= \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) &= f^k(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) &= \frac{a(0)Bu_0^h(x) + a(T)u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{1}{2}A_h^x u_k^h(x) + \frac{1}{2}A_h^x u_{k-1}^h(x) &= \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) &= f^k\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x\right), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) &= \frac{a(0)Bu_0^h(x) + a(T)u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \end{aligned} \quad (4.18)$$

соответственно. Чтобы сформулировать результат устойчивости, введем пространство  $L_{2h} = L_2(\Omega_h)$  всех сеточных функций  $\varphi^h(x) = \varphi(hm_1, \dots, hm_n)$ , определенных на  $x \in \tilde{\Omega}_h$ , снабженных нормой

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left( \sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2}.$$

Применяя результаты теорем 1, 2, 3 и теоремы о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической разностной задачи в  $L_{2h}$  (см. [33]), можно получить результаты устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

**Теорема 9.** Пусть  $\tau$  и  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$  – достаточно малые числа и условие

$$\left[ \frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{L_{2h} \rightarrow L_{2h}} < 1$$

выполнено. Тогда для решения разностных схем (4.17) и (4.18) выполнены оценка устойчивости

$$\left\| \{u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right],$$

оценка почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{|h| + \tau} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right],$$

**Таблица 1.** Погрешность и порядок приближения для разностных схем (4.17) и (4.18)

$N = M$	Погрешность для (4.17)	Порядок приближения для (4.17)	Погрешность для (4.18)	Порядок приближения для (4.18)
20	$2.13 \times 10^{-2}$	–	$3.10 \times 10^{-4}$	–
40	$1.05 \times 10^{-2}$	1.0161	$7.66 \times 10^{-5}$	2.0196
80	$5.24 \times 10^{-3}$	1.0069	$1.92 \times 10^{-5}$	1.9953
160	$2.61 \times 10^{-3}$	1.0034	$4.80 \times 10^{-6}$	2.0009

оценка коэцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^h - u_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leq M_{a,b,q,\delta} \left[ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right].$$

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Теперь применим разностные схемы первого и второго порядка точности к нелокальной краевой задаче

$$\begin{aligned} u_t(t, x) - (2 - \sin x)^2 u_{xx}(t, x) - 2(2 - \sin x) \cos x u_x(t, x) + u(t, x) &= f(t, x), \\ f(t, x) &= e^{-t} \left[ (2 - \sin x)^2 \sin x - 2(2 - \sin x) \cos^2 x \right], \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) &= \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-s} u(s, x) ds + \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sin x \left[ 1 + \frac{1}{8} (e^{-2} - 1) \right], \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) &= 0, \quad u(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

для одномерного параболического уравнения с использованием разностных схем (4.17) и (4.18).

Точное решение задачи:  $u(t, x) = \exp(-t) \sin x$ . Набор семейства узлов сетки  $[0, 1]_\tau \times [0, \pi]_h$  в зависимости от параметров  $\tau$  и  $h$  определяется в виде

$$[0, 1]_\tau \times [0, \pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = \tau k, 0 \leq k \leq N, \tau N = 1, x_n = hn, 0 \leq n \leq M, hM = \pi\}.$$

Для численного решения разностных схем применяется модифицированный метод исключения Гаусса для системы уравнений с матричными коэффициентами.

Для сравнения приближенного решения с точным решением ошибка вычисляется по формуле

$$E_N^M = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left( \sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{1/2}.$$

В табл. 1 представлена ошибка между точным решением и решениями разностных схем (4.17) и (4.18) и порядок соответствующих приближений.

Ошибки разностных схем представлены в табл. 1 для  $N, M, 40, 80, 160$  соответственно. Из табл. 1 видно, что порядок точности сходится к единице для разностной схемы (4.17) и к двум для разностной схемы (4.18).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследуются нелокальные по времени задачи параболического типа. Приведены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы первого и второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи и установлены теоремы об устойчивости этих разностных схем. Цифровые иллюстрации описаны в тестовом примере.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sobolevskii P.E.* Coercivness inequalities for abstract parabolic equations // *Soviet Math. (Doklady)*. 1964. V. 5. P. 894–897.
2. *Sobolevskii P.E.* The coercive solvability of difference equations // *Soviet Math. (Doklady)*. 1971. V. 201. № 5. P. 1063–1066.
3. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P.E.* Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations // *Abstract and Applied Analysis*. 2001. V. 6. № 1. P. 53–61.
4. *Ashyralyev A., Karatay I., Sobolevskii P.E.* Well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2004. V. 2004. № 2. P. 273–286.
5. *Gulin A.V., Morozova V.A.* On the stability of a nonlocal finite–difference boundary value problem // *Differ. Equ.* 2003. V 39. 2. P. 962–967.
6. *Gulin A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A.* On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem // *Differ. Equ.* 2001. V. 37. № 7. P. 970–978.
7. *Ashyralyev A., Piskarev S. and Wei S.* On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in  $L_p([0, 1], E)$  spaces // *Numerical Functional Analysis & Optimization*. 2002. V. 23. № 7–8. P. 669–693.
8. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations // *J. of Math. Sci.* 2004. V. 122. № 2. P. 3013–3054.
9. *Ashiraliev A., Sobolevskii P.E.* Difference schemes of a high order of accuracy for parabolic equations with the variable coefficients // *Dokl. Akad. Nauk Ukrainian SSR, Ser. A Fiz.-Math. and Tech. Sciences*. 1988. V. 6. P. 3–7.
10. *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Exponentially convergent parallel discretization methods for the first order evolution equations. Preprint Institut fur Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS, Berlin, 2000).
11. *Gavrilyuk I.P.* Strongly  $p$ -positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space // *J. of Math. Analysis and Applicat.* 1999. V. 236. № 2. P. 327–349.
12. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, 2004.
13. *Ashyralyev C.* Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. V. 43. № 8. P. 5369–5379.
14. *Ashyralyev C., Gonenc A.* Crank-Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions // *International Journal of Applied Mathematics*. 2021. V. 34. № 2. P. 273–282.
15. *Ashyralyev C.* The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 2020. V. 46. № 2. P. 346–359.
16. *Wang Y.G., Oberguggenberger M.* Nonlinear parabolic equations with regularized derivatives // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1999. V. 233. № 2. P. 644–658.
17. *Beyn W.J., Garay B.M.* Estimates of variable stepsize Runge Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data // *Applied Numerical Mathematics*. 2002. V. 41. № 3. P. 369–400.
18. *Rautmann R.* H2,  $r$ -convergent approximation schemes to the Navier-Stokes equations // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 1997. V. 30. № 4. P. 1915–1926.
19. *Starovoitov V.N.* Unique solvability of linear time-nonlocal parabolic problem // *Sib. Mat. Zurn.* 2021. V. 620. № 2. P. 417–421.
20. *Shelukhin V.V.* A problem with time-averaged data for nonlinear parabolic equations // *Sib. Math. J.* 1991. V. 32. № 2. P. 309–320.
21. *Shelukhin V.V.* A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time // *Sib. Math. J.* 1993. V. 34. № 2. P. 369–384.
22. *Kozhanov A.I.* Solvability of boundary value problems for linear parabolic equations with an integral condition in a time variable // *Math. Notes NEFU*. 2014. V. 21. № 4. P. 17–25.
23. *Rossovskii L.E., Hanalyev A.R.* Coercive solvability of Nonlocal Boundary-Value Problems for Parabolic Equations // *J. Math. Sci.* 2019. V. 239. P. 855–866.
24. *Buranay S.C., Arshad N.* Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons // *Advances in Difference Equations*. 2020. V. 2020. № 309. P. 1–24.
25. *Buranay S.C., Matan A.H., Arshad N.* Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation // *Fractal and Fractions*. 2021. V. 5. № 19. P. 1–26.
26. *Erdogan A.S.* Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions // *International Journal of Applied Mathematics*. 2021. V. 34. № 2. P. 401–410.
27. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R.P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation // *Appl. Comput. Math.* 2020. V. 19. № 2. P. 175–204.

28. *Iskenderov N.Sh., Allahverdiyeva S.I.* An inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 2. P. 226–237.
29. *Ashyraliyev M.* On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition // International Journal of Applied Mathematics. 2021. V. 34. № 2. P. 363–376.
30. *Ashyraliyev M., Ashyralyeva M.A., Ashyralyev A.* A note on the hyperbolic-parabolic identification problem with involution and Dirichlet boundary condition // Bull. of the Karaganda University-Mathematics. 2020. V. 99. № 3. P. 120–129.
31. *Ashyralyev A., Ashyraliyev M., Ashyralyeva M.A.* Identification problem for telegraph-parabolic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. № 8. P. 1294–1305.
32. *Sadybekov M.A.* Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2018. V. 2018. № 1. P. 1–10.
33. *Соболевский П.Е.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство ВГУ, Воронеж, 1975.

---

---

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА**

---

---

УДК 517.95

**НЕСЖИМАЕМЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ПРОТИВОТОКАМИ  
ПРИ ЗАДАННОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ<sup>1)</sup>**© 2022 г. Тэ Ха Чжун<sup>1</sup>, С. И. Безродных<sup>2,\*</sup>, В. Б. Заметаев<sup>1,2</sup><sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия<sup>2</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

\*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru, chzhun.th@phystech.edu

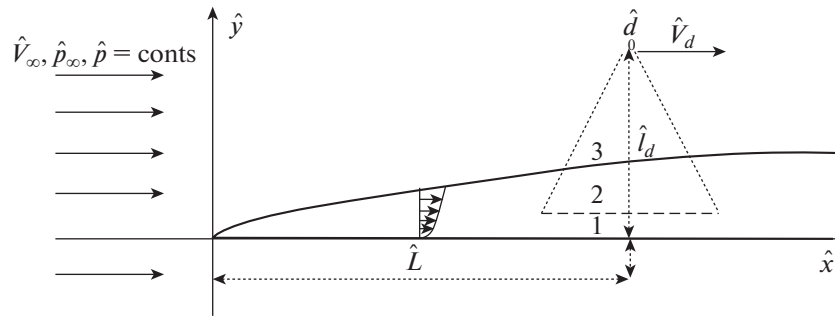
Поступила в редакцию 03.12.2021 г.  
Переработанный вариант 22.12.2021 г.  
Принята к публикации 28.12.2021 г.

Рассматривается двумерное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской поверхности при больших числах Рейнольдса. В рамках асимптотической теории изучается влияние тела, движущегося вниз по потоку с малой по отношению к пластине скоростью, на пограничный слой Блазиуса. Исследован частный случай, в котором внешнее малое тело, моделируемое потенциальным диполем, движется с постоянной скоростью вниз по потоку. Данная задача является формально нестационарной на неподвижной пластине, однако в результате перехода в подвижную систему координат, связанную с диполем, описывается стационарными уравнениями вязкого подслоя, но на движущейся вверх по потоку стенке. Предложен оригинальный метод решения подобных задач, содержащих противотоки, а именно, около поверхности выделяется слой текущей вверх по потоку жидкости, в то время как выше него жидкость в пограничном слое течет вниз по потоку. Удалось найти точное аналитическое решение линейной задачи при малых интенсивностях потенциального диполя и численное решение нелинейной задачи при больших значениях интенсивности. Решения содержат замкнутые и разомкнутые отрывные области вблизи линии нулевой продольной скорости даже в линейном приближении. Найденные решения позволяют уточнить методику измерения параметров пограничного слоя на сплошных и перфорированных стенках аэродинамических труб с помощью термоанемометров, приемников давления и других датчиков, установленных на подвижном координатном устройстве. Библ. 11. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** ламинарный пограничный слой, отрыв, асимптотический метод.**DOI:** 10.31857/S0044466922060059**1. ВВЕДЕНИЕ**

Задача о движении обтекаемой стенки по потоку или против потока в стационарном пограничном слое является частным случаем нестационарного отрыва пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Широкий класс плоских отрывных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости описан в [1], где, в частности, изложены основы асимптотической теории отрыва стационарного и нестационарного пограничных слоев и подробно описан случай стенки, движущейся вниз по потоку. В деталях изложено формирование особенности Мура–Рота–Сирса в решении уравнений пограничного слоя при воздействии на него неблагоприятного, тормозящего градиента давления. Похожая задача была рассмотрена и в [2], где величину неблагоприятного градиента давления можно было регулировать. При изменении величины действующего на пограничный слой давления поток тормозился внутри слоя вплоть до нулевого значения в некоторой точке. Причем удалось найти решение задачи с более слабой особенностью “кромочного” типа, нежели особенность Мура–Рота–Сирса, далее которой вниз по потоку решение не существует. Течение около стенки, движущейся вверх по потоку, в сверхзвуковом пограничном слое было исследовано численно в [3]. Применение асимптотических “многопалубных” разложений при исследовании задач гидродинамической устойчивости подробно описано в [4]. В [5] изучено воздействие скачка уплотнения, движущегося вверх по по-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-20006) в МФТИ. Компьютерная поддержка обеспечена в ФИЦ ИУ РАН.



Фиг. 1. Схема течения.

току (а в системе координат, движущейся со скачком, стенка соответственно движется вниз по потоку), на ламинарный пограничный слой. Исследование [3] повторено в работе [6] в несколько более широких рамках. Анализ отрывных течений в канале с подвижной стенкой с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений выполнен в [7]. Численный расчет полных уравнений Навье–Стокса для чисел Маха больше единицы в случае подвижного скачка уплотнения, падающего на пограничный слой вязкого совершенного газа, выполнен в работе [8]. Подобные расчеты являются убедительным средством проверки и подтверждения результатов применения асимптотических теорий. Дальнейшее развитие теории отрывных течений на подвижной стенке было предложено в [9], где также рассматривалась поверхность, движущаяся вверх по потоку.

В настоящей работе рассматривается ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое около стенки, движущейся вверх по потоку. А именно, изучено влияние заданных малых внешних возмущений давления на пограничный слой, содержащий противотоки. Предполагается, что на пограничный слой действует возмущение давления, источник которого является локальным, регулируется по величине и движется вниз по потоку.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве базового течения в исследовании рассматривается двумерное ламинарное обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. На расстоянии  $\hat{L}$  от передней кромки пластины и на высоте  $\hat{l}_d = \hat{L} \cdot l$  выше обтекаемой поверхности расположено малое тело, движущееся вниз по потоку с заданной постоянной скоростью  $\hat{V}_d = \hat{V}_\infty u_w$ , где  $\hat{V}_\infty$  – скорость внешнего потока (фиг. 1).

Малое тело, создающее возмущение давления в потоке и соответственно на обтекаемой поверхности, заменим потенциальным диполем интенсивности  $\hat{d} = \hat{V}_\infty \hat{L}^2 m$ . Комплексный потенциал  $w$  такого течения хорошо известен и имеет вид

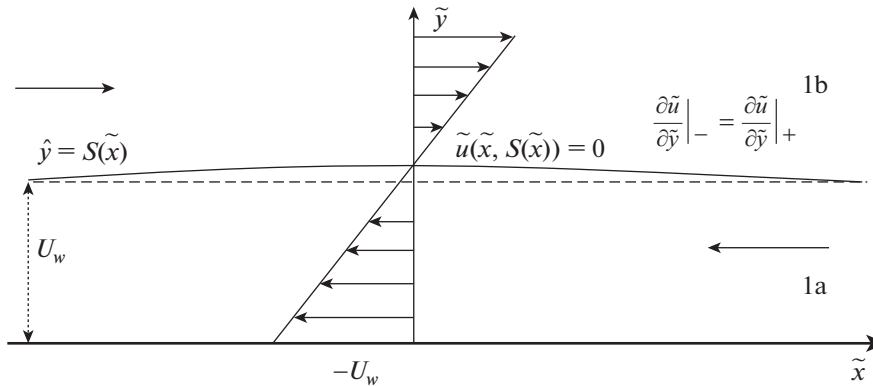
$$w = \hat{V}_\infty \hat{z} + \frac{\hat{d}}{\hat{z} - (\hat{L} + i\hat{l}_d)} + \frac{\hat{d}}{\hat{z} - (\hat{L} - i\hat{l}_d)}, \quad \hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}.$$

А выражение для давления на обтекаемой поверхности пластины, введенное по формуле  $\hat{p} = \hat{p}_\infty + \rho \hat{V}_\infty^2 \bar{p}$ , в безразмерных координатах  $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\hat{x}/\hat{L}, \hat{y}/\hat{L}\}$  следует из уравнения Бернулли

$$\bar{p} = m \cdot 2 \frac{(\bar{x} - 1)^2 - l^2}{((\bar{x} - 1)^2 + l^2)^2} - m^2 \cdot 2 \left[ \frac{(\bar{x} - 1)^2 - l^2}{((\bar{x} - 1)^2 + l^2)^2} \right]^2.$$

Далее в работе будем изучать режимы течения при малых высотах диполя над пластиной  $l \rightarrow 0$ , но, конечно, выше пограничного слоя, развивающегося вдоль обтекаемой поверхности вследствие действия сил вязкости. Если задать интенсивность диполя  $m = l^{8/3} m_1$  такую, чтобы влияние возмущения давления было сопоставимо с вязкими и инерционными эффектами в вязком пристенном подслое пограничного слоя, и задать высоту положения диполя над по-





Фиг. 2. Противотоки в вязком подслое, разделенные неизвестной границей.

верхностью, большей по сравнению с размерами области взаимодействия  $Re^{-3/8} \ll l \ll 1$ ,  $Re = \hat{\rho} \hat{V}_\infty \hat{L} / \mu \rightarrow \infty$  (область 3, фиг. 1), то индуцированным давлением, обусловленным вытеснением вязкого подслоя, можно пренебречь и считать возмущение давления заданным исключительно диполем

$$p = l^{2/3} m_1 p_d(\tilde{x}) + \dots, \quad p_d = \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \tag{2.1}$$

В (2.1) введена новая нормированная продольная координата  $\tilde{x}$ , связанная с исходной по формуле  $\bar{x} = 1 + l\tilde{x}$ , а также из разложения давления отброшены члены более высокого порядка малости по параметру  $l$ .

При переходе в систему координат, движущуюся вместе с диполем вниз по потоку с малой постоянной скоростью  $u_w$ , заданное распределение давления (2.1) не изменится в главном приближении, так как нестационарные поправки к нему окажутся малыми. Однако при этом давление (2.1) будет воздействовать уже на вязкий пристенный подслоя (область 1, фиг. 1), развивающийся на стенке, которая движется против потока со скоростью  $-u_w$ . При ненулевой интенсивности диполя наблюдатель, движущийся вместе с ним, увидит вблизи обтекаемой стенки стационарное возмущенное течение с противотоками, качественно изображенное на фиг. 2.

Асимптотика решения уравнений Навье–Стокса в вязком подслое 1a–1b на дне пограничного слоя Блазиуса вблизи точки  $\bar{x} = 1$ ,  $u'_{BLAS}(0) = \lambda$  ищется при  $l \rightarrow 0$ ,  $Re \rightarrow \infty$  в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1 + l\tilde{x}, & \bar{y} &= l^{1/3} Re^{-1/2} \lambda^{-1/3} \tilde{y}, \\ \bar{u} &= l^{1/3} \lambda^{2/3} \tilde{u} + \dots, & \bar{v} &= l^{-1/3} Re^{-1/2} \lambda^{1/3} \tilde{v} + \dots, & \bar{p} &= l^{2/3} \tilde{p} + \dots, \\ u_w &= \lambda^{2/3} l^{1/3} U_w, & m &= \lambda^{4/3} l^{8/3} M. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В результате подстановки (2.2) в уравнения Навье–Стокса задача в вязком подслое (область 1, фиг. 1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, & \tilde{v}(\tilde{x}, 0) &= 0, & \tilde{u}|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} &= \tilde{y} + A(\tilde{x}) + \dots, & \tilde{u}|_{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} &= -U_w + \tilde{y} + \dots, \\ \tilde{p} &= M \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Задача (2.3) содержит два независимых параметра:  $M$  – интенсивность диполя,  $U_w$  – скорость стенки. Искомая функция  $A(\tilde{x})$  – это второй член координатного разложения решения при  $\tilde{y} \rightarrow +\infty$  (называемый толщиной вытеснения вязкого подслоя), а  $\tilde{p}$  – давление, заданное диполем. Уравнения вязкого подслоя (2.3) являются уравнениями параболического типа, однако из-за наличия противотоков начальные условия должны быть заданы с двух сторон: при  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$  и  $\tilde{x} \rightarrow -\infty$ . Соответственно использовать традиционный метод для решения системы (2.3) не удастся.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОТИВОТОКАМИ

Обозначим через  $\tilde{y} = S(\tilde{x})$  заранее неизвестную кривую, в каждой точке которой горизонтальная скорость принимает нулевое значение. Таким образом, кривая  $S(\tilde{x})$  делит исходную область на две подобласти 1a и 1b (см. фиг. 2), причем в области 1a,  $\tilde{y} \in [0; S(\tilde{x})]$ , поток движется только в отрицательном направлении оси  $O\tilde{x}$ , а в области 1b,  $\tilde{y} \in [S(\tilde{x}); +\infty)$ , — только в положительном направлении. В результате в случае заданного давления и известной функции  $S(\tilde{x})$  можно сформулировать следующие краевые задачи в каждой из введенных областей по отдельности:

$$\begin{aligned} \text{1a: } \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} = -U_w + \tilde{y}, \quad S|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} = U_w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{1b: } \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) &= 0, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) = \tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x})), \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} = 1, \quad \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} = -U_w + \tilde{y}, \quad S|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} = U_w, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x}))$  — вертикальная скорость на линии раздела, найденная из расчета течения в области 1a. Отметим, что на линии  $\tilde{y} = S(\tilde{x})$  справедливо дополнительное краевое условие, связывающее касательные напряжения снизу и сверху от искомой кривой (в нашем случае имеет место равенство этих величин, поскольку иначе на данной линии будет приложена касательная сила, что не физично). В выбранных переменных указанное краевое условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{-} = \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{+}. \quad (3.3)$$

Задача (2.3) при нулевой интенсивности диполя ( $M = 0$ ) допускает точное решение вида  $\tilde{u} = -U_w + \tilde{y}$ ,  $\tilde{v} = \tilde{p} = S - U_w = A = 0$ . Если диполь имеет отличную от нуля малую интенсивность, то он слабо возмущает само течение и границу между областями 1a и 1b. Далее построим решение линеаризованной задачи при условии малой интенсивности диполя. Такое решение может быть выписано в замкнутом аналитическом виде и, таким образом, является удобным для проверки численного решения нелинейной задачи.

Введем функцию тока  $\Psi: \tilde{u} = \partial \Psi / \partial \tilde{y}$ ,  $\tilde{v} = -\partial \Psi / \partial \tilde{x}$  и в качестве первого шага построим решение задачи с диполем малой интенсивности при  $M \rightarrow 0$ . Функция тока  $\Psi$  представляется в виде ряда по  $M$ , а скорость движения стенки  $U_w$  фиксирована. В случае решения линейной задачи граница раздела противотоков  $\tilde{y} = S(\tilde{x})$  сносится на линию  $\tilde{y} = U_w$ , и задача сильно упрощается, позволяя применить для решения операционный метод

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\tilde{y}^2}{2} - U_w \tilde{y} + M \cdot \Psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + M^2 \cdot \Psi_2(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots, \quad S(\tilde{x}) = U_w + M \cdot S_1(\tilde{x}) + \dots, \\ A(\tilde{x}) &= M \cdot A_1(\tilde{x}) + \dots, \quad p = M \cdot p_1, \quad p_1 = \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в уравнения и граничные условия (2.3) и отбросив квадратичные по  $M$  члены, получим следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} (\tilde{y} - U_w) \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{dp_1}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \tilde{y}^3}, \\ \Psi_1(\tilde{x}, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}} \right|_{|\tilde{x}| \rightarrow \pm\infty} = 0, \\ S_1(\tilde{x}) &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, U_w), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где поправка  $S_1(\tilde{x})$  находится из условия равенства нулю горизонтальной скорости на линии раздела противотоков. Линейную задачу (3.5) будем решать методом преобразования Фурье. Применяя это преобразование и обозначая фурье-образы искомых функций через

$$\hat{\Psi}_1(\alpha, \tilde{y}) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i\alpha\tilde{x}} d\tilde{x} \quad \text{и} \quad \tilde{S}_1(\alpha) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tilde{x}) e^{-i\alpha\tilde{x}} d\tilde{x},$$

получим краевую задачу в областях 1a и 1b

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_1''' - i\alpha(\tilde{y} - U_w)\hat{\Psi}_1' + i\alpha\hat{\Psi}_1 &= i\alpha\hat{p}_1, \\ \hat{\Psi}_1(\alpha, 0) = 0, \quad \hat{\Psi}_1'(\alpha, 0) = 0, \quad \hat{\Psi}_1''(\alpha, \tilde{y}) \Big|_{\tilde{y} \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\hat{S}_1 = -\hat{\Psi}_1'(\alpha, U_w).$$

Решая ее, находим искомые фурье-образы функций тока и скоростей по формулам

$$\hat{\Psi}_1(\alpha, \tilde{y}) = \kappa\hat{p}_1 \int_0^{\tilde{y}} J_A(\alpha, \eta) d\eta, \quad \hat{\Psi}_1'(\alpha, \tilde{y}) = \kappa\hat{p}_1 J_A(\alpha, \tilde{y}), \tag{3.7}$$

$$\hat{S}_1 = -\kappa\hat{p}_1 J_A(\alpha, U_w), \quad \hat{A}_1 = \kappa\hat{p}_1 \left[ J_A(\alpha, U_w) + \frac{1}{3}(i\alpha)^{-1/3} \right]. \tag{3.8}$$

В (3.7), (3.8) использованы следующие вспомогательные функции и константы:

$$J_A(\alpha, \tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} Ai\left((i\alpha)^{1/3}(\xi - U_w)\right) d\xi, \quad \kappa = \frac{(i\alpha)^{2/3}}{Ai'(-i\alpha)^{1/3}U_w}.$$

Здесь  $Ai(z)$  – функция Эйри (см. [10]), а через  $\tilde{P}_1, \tilde{S}_1, \tilde{A}_1$  обозначены образы возмущений давления, границы противотоков и толщины вытеснения. Применение обратного преобразования Фурье к (3.7), (3.8) позволит получить линейные возмущения решения, удобные для проверки точности численного метода.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Выполним следующие преобразования координат и искомых скоростей, которые упрощают численное решение рассматриваемой задачи (3.1)–(3.3):

$$x = \tilde{x}, \quad Y = \frac{\tilde{y}}{S(\tilde{x})}, \quad U = S(x) \cdot \tilde{u}, \quad V = \tilde{v} - S'(x)Y \cdot \tilde{u}. \tag{4.1}$$

После преобразований (4.1) структура областей в вязком подслое существенно упрощается, так как граница раздела разнонаправленных потоков (областей 1a и 1b) в новых координатах проходит по прямой линии  $Y = 1$ , а задача (3.1)–(3.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{1a: } U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U(x, 0) &= -S(x) \cdot U_w, \quad V(x, 0) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad U \Big|_{x \rightarrow +\infty} = -SU_w + S^2 Y, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$p = M \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{1b: } U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U(x, 1) = 0, \quad V(x, 1) &= V^-(x, 1), \quad \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y \rightarrow +\infty} = S^2(x), \quad U \Big|_{x \rightarrow -\infty} = -SU_w + S^2 Y, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_- = \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_+. \tag{4.4}$$

В вязком подслое была введена равномерная прямоугольная сетка с координатами  $\{x_i \in [-20; 20], i = 1, \dots, Nx; Y_j \in [0; 1], j = 1, \dots, Ny_a\}$  в области 1a и  $\{x_i \in [-20; 20], i = 1, \dots, Nx;$

$Y_j \in [1; 1]$ ,  $j = 1, \dots, Ny_b$  в области 1b. Для некоторой заданной сеточной функции формы границы раздела  $\{S_i, i = 1, \dots, Nx\}$  численное решение задачи (4.2)–(4.4) проводилось в два этапа. На первом этапе решалась краевая задача (4.2) в области 1a, где поток направлен в отрицательном направлении вдоль оси  $Ox$ . Для ее решения использовалась разностная схема, аналогичная предложенной в [11]:

$$U_i^j \left( \frac{-3U_i^j + 4U_{i+1}^j - U_{i+2}^j}{x_{i+2} - x_i} \right) + V_i^j \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{Y_{j+1} - Y_{j-1}} = -S_i^2 \left( \frac{dp}{dx} \right)_i + \frac{1}{S_i} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{(Y_{j+1} - Y_j)^2} + \frac{S_i'}{S_i} (U_i^j)^2, \\ j = 2, \dots, Ny_a - 1; \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{-3U_i^{j-1} + 4U_{i+1}^{j-1} - U_{i+2}^{j-1}}{x_{i+2} - x_i} + \frac{-3U_i^j + 4U_{i+1}^j - U_{i+2}^j}{x_{i+2} - x_i} \right) + \frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{Y_j - Y_{j-1}} = 0, \quad j = 2, \dots, Ny_a,$$

$$U_i^1 = -S_i \cdot U_w, \quad V_i^1 = 0, \quad U_i^{Ny_a} = 0, \quad i = Nx - 2, \dots, 1.$$

Начальные условия для (4.5) задавались в сечениях  $x = x_{Nx}$  и  $x = x_{Nx-1}$ :  $U_N^j = -S_N U_w + S_N^2 Y_j$ ,  $U_{N-1}^j = -S_{N-1} U_w + S_{N-1}^2 Y_j$ ,  $j = 2, \dots, Ny_a - 1$ , затем решение искалось маршевым способом, используя метод Ньютона в каждом сечении  $x = x_i$ . Производная  $S_i'$  аппроксимировалась с помощью центральных разностей со вторым порядком точности.

Далее полученные из решения задачи (4.5) значения вертикальной скорости на границе раздела  $Y = 1 \{V_i^{Ny_a}, i = 1, \dots, Nx\}$  использовались в качестве граничных условий для численного решения задачи (4.3) в области 1b, где поток направлен в положительном направлении вдоль оси  $Ox$ . Для решения краевой задачи (4.3) применялся маршевый метод слева направо, использующий аналогичную разностную схему из [11]:

$$U_i^j \frac{U_{i-2}^j - 4U_{i-1}^j + 3U_i^j}{x_i - x_{i-2}} + V_i^j \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{Y_{j+1} - Y_{j-1}} = -S_i^2 \left( \frac{dp}{dx} \right)_i + \frac{1}{S_i} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{(Y_{j+1} - Y_j)^2} + \frac{S_i'}{S_i} (U_i^j)^2, \\ j = 2, \dots, Ny_b - 1; \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{U_{i-2}^{j-1} - 4U_{i-1}^{j-1} + 3U_i^{j-1}}{x_i - x_{i-2}} + \frac{U_{i-2}^j - 4U_{i-1}^j + 3U_i^j}{x_i - x_{i-2}} \right) + \frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{Y_j - Y_{j-1}} = 0, \quad j = 2, \dots, Ny_b,$$

$$U_i^1 = 0, \quad V_i^1 = V_i^{Ny_a}, \quad \frac{U_i^{Ny_b-2} - 4U_i^{Ny_b-1} + 3U_i^{Ny_b}}{Y_{Ny_b} - Y_{Ny_b-2}} = S_i^2, \quad i = 3, \dots, Nx.$$

Начальные условия для задачи (4.6) задавались в сечениях  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :  $U_1^j = -S_1 U_w + S_1^2 Y_j$ ,  $U_2^j = -S_2 U_w + S_2^2 Y_j$ ,  $j = 2, \dots, Ny_b - 1$ .

После решения задач (4.5) и (4.6) при заданной форме границы можно вычислить значения касательных напряжений ниже и выше границы раздела противотоков  $Y = 1$  и их невязку:

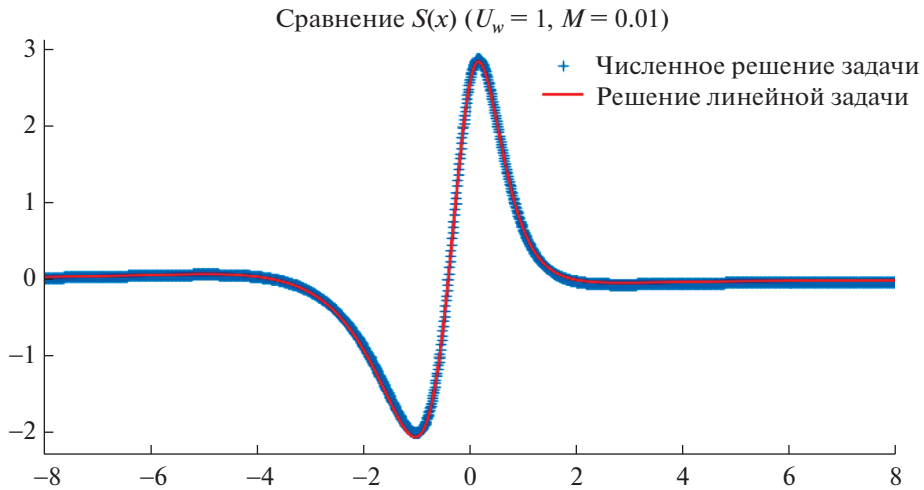
$$\left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} = \frac{U_i^{Ny_a-2} - 4U_i^{Ny_a-1} + 3U_i^{Ny_a}}{Y_{Ny_a} - Y_{Ny_a-2}}, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+} = \frac{-3U_i^1 + 4U_i^2 - U_i^3}{Y_3 - Y_1}, \quad i = 3, \dots, Nx - 2, \quad (4.7)$$

$$F_i = \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} - \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+}, \quad i = 3, \dots, Nx - 2. \quad (4.8)$$

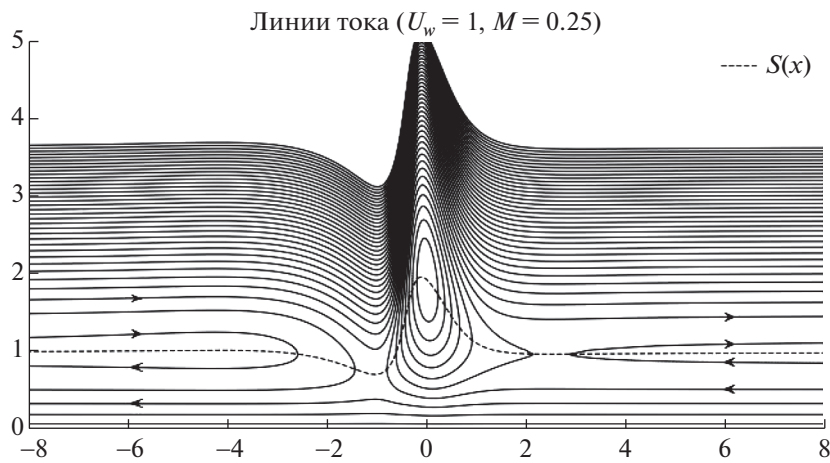
Из условия непрерывности касательного напряжения на границе раздела противотоков (4.4) следует, что величина (4.8) должна обращаться в нуль в каждой точке сетки. В результате в качестве второго этапа расчета можно сформулировать систему неявных уравнений для нахождения искомой формы границы  $\{S_i, i = 3, \dots, Nx - 2\}$ :

$$F_i(S_3, \dots, S_{Nx-2}) = \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} - \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+} = 0, \quad i = 3, \dots, Nx - 2. \quad (4.9)$$

Для того чтобы решить систему нелинейных неявных уравнений (4.9) методом Ньютона, возникает нетривиальный вопрос о способе вычисления матрицы Якоби. В работе предлагается по-



Фиг. 3. Сравнение аналитического решения линейной задачи и численного решения нелинейной задачи.



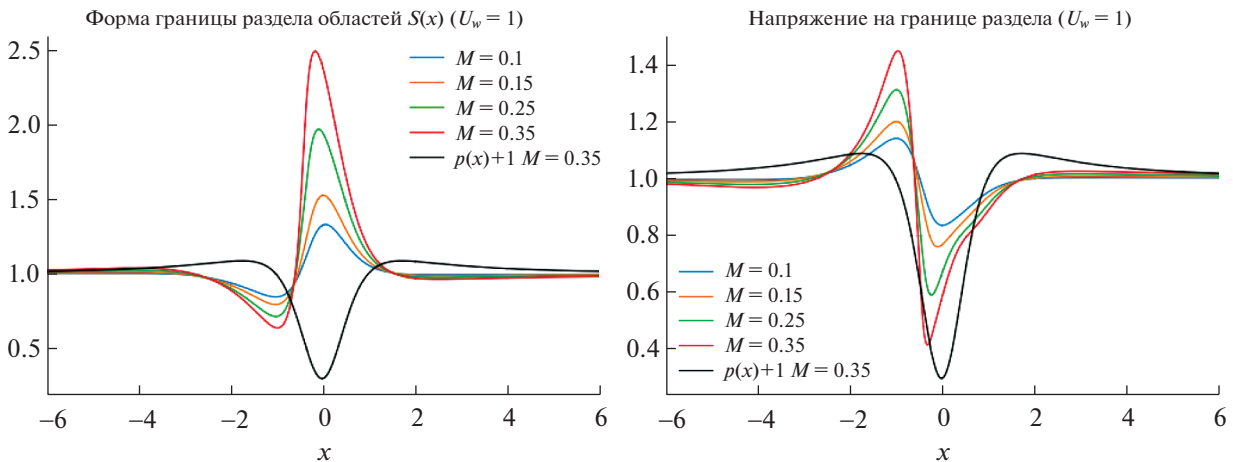
Фиг. 4. Картина линий тока при  $U_w = 1, M = 0.25$ .

точечно возмущать границу  $S_i$  малым возмущением  $\delta$  и для каждой возмущенной в одной точке границы вычислять вектор невязки (4.9). Разница между возмущенным вектором невязки и невозмущенным вектором невязки (4.9), деленная на  $\delta$ , даст столбец матрицы Якоби. Повторение указанной операции для всех  $i$  позволит полностью заполнить матрицу Якоби на текущей итерации метода Ньютона. При описанном выше способе итерационная формула метода Ньютона будет иметь вид

$$W(\bar{S}^{(k)}) \cdot \Delta \bar{S}^{(k)} = -\bar{F}(\bar{S}^{(k)}), \tag{4.10}$$

где  $\bar{S}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{Nx-2}^{(k)}]^T$  – вектор значений сеточной функции формы границы на  $k$ -й итерации метода Ньютона,  $\Delta \bar{S}^{(k)} = \bar{S}^{(k+1)} - \bar{S}^{(k)}$ ,  $\bar{F}(\bar{S}^{(k)}) = [F_3(\bar{S}^{(k)}), \dots, F_{Nx-2}(\bar{S}^{(k)})]^T$  – вектор значений невязок (4.8),  $W(\bar{S}^{(k)})$  – матрица Якоби. Компоненты матрицы Якоби  $W(\bar{S}^{(k)})$  вычислялись следующим образом:

$$W_{nm}(\bar{S}^{(k)}) = \frac{F_{2+n}(\bar{S}_{2+m}^{(k)}) - F_{2+n}(\bar{S}^{(k)})}{\delta}, \quad n, m = 1, \dots, Nx - 4, \tag{4.11}$$



Фиг. 5. Результаты расчетов для значений параметров  $U_w = 1$ ,  $M = 0.1; 0.15; 0.25; 0.35$ .

где  $F_{2+n}(\bar{S}^{(k)})$  – значение невязки в точке  $x = x_{2+n}$  для невозмущенной границы  $\bar{S}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{2+m}^{(k)}, \dots, S_{Nx-2}^{(k)}]^T$  из (4.8),  $F_{2+n}(\bar{S}_{2+m}^{(k)})$  – значение невязки в точке  $x = x_{2+n}$ , вычисленное для формы границы, возмущенной в точке  $x = x_{2+m}$ :  $\bar{S}_{2+m}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{2+m}^{(k)} + \delta, \dots, S_{Nx-2}^{(k)}]^T$ .

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

С помощью предложенной схемы были выполнены расчеты для различных значений параметра  $M$ . Сравнение численного решения для  $M = 0.01$  с решением линейной задачи (3.8) показало хорошее совпадение результатов (фиг. 3).

Также была проведена серия расчетов для значений параметров  $M = 0.1, 0.15, 0.25, 0.35$ , проявляющих нелинейный режим течения. Были построены картины линий тока в вязком подслое (область 1), на которых вблизи линии нулевой скорости видны замкнутая и две разомкнутые висячие отрывные зоны (фиг. 4). Из расчетов следует, что поперечный размер замкнутой висячей зоны отрыва существенно нарастает с увеличением значения параметра  $M$ .

Кроме того, численное решение показало заметное уменьшение касательного напряжения и увеличение значения вертикальной скорости в некоторой точке на линии раздела противотоков  $\tilde{y} = S(\tilde{x})$  с ростом интенсивности диполя  $M$  (фиг. 5). В этой же точке заметно нарастала производная функции  $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ , а сама точка формировалась на фоне падающего давления, что свидетельствует о формировании особенности нового типа.

## 6. ВЫВОДЫ

Исследована детальная структура течения в вязком подслое с противотоками при заданном градиенте давления. Получены картины висячей замкнутой и двух разомкнутых отрывных зон для всех рассчитанных режимов. В отличие от течений на неподвижной стенке, в которых отрывы присоединены к поверхности, линия нулевой продольной скорости в изученных режимах находится внутри потока и, как следствие, отрывные зоны висячие. Отметим, что для любого  $M > 0$  топологическая картина линий тока неизменна и отлична от невозмущенного течения, что подтверждается решением линейной задачи.

Обнаружен значительный вертикальный рост замкнутой зоны отрыва при увеличении заданного давления. Выявлено формирование сингулярности в картине течения вблизи точки минимума напряжения на границе раздела противотоков: с ростом заданного давления, вертикальная скорость заметно возрастает, наклон границы раздела противотоков также заметно возрастает, напряжение трения убывает до малых величин. Заданный градиент давления имеет отрицательную величину в изучаемой точке, что предполагает формирование особенности нового типа. Эта особенность, по-видимому, отлична от сингулярностей, исследованных Гольдштейном и Рубаном.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л., Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений. Под ред. Сычева В.В. М.: Физматлит, 1987.
2. Timoshin S. Concerning marginal singularities in the boundary-layer flow on a downstream-moving surface // J. of Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 171–194.
3. Жук В.И. О локальных рециркуляционных зонах в сверхзвуковом пограничном слое на движущейся поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 5. С. 249–255.
4. Жук В.И. Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.
5. Ruban A., Araki D., Yapalparvi R., Gajjar J. On unsteady boundary-layer separation in supersonic flow. Part 1. Upstream moving separation point // J. of Fluid Mech. 2011. V. 678. P. 124–155.
6. Yapalparvi R., Van Dommelen L. Numerical solution of unsteady boundary-layer separation in supersonic flow: Upstream moving wall // J. of Fluid Mech. 2012. V. 706. P. 413–430.
7. Timoshin S.N., Thapa P. On-wall and interior separation in a two-fluid boundary layer // J. Engng. Math. 2019. V. 199. P. 1–21.
8. Егоров И.В., Илюхин И.М., Нейланд В.Я. Моделирование взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем над движущейся стенкой // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XIV Всероссийской школы-конференции молодых ученых (Новосибирск–Шерегеш, 28 февраля–6 марта 2020 г.). Новосибирск: Параллель, 2020. С. 67–68.
9. Сычев Вик.В. О ламинарном отрыве на медленно движущейся вверх по потоку поверхности // Уч. зап. ЦАГИ. 2016. Т. 47. Вып. 3. С. 1–26.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Физматлит, 1979.
11. Kravtsova M.A., Zametaev V.B., Ruban A.I. An effective numerical method for solving viscous-inviscid interaction problems // Philosophic. Transact. 2005. V. 363. № 1830. P. 1157–1167.

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА**

---



---

УДК 517.958

## О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. В. В. Веденяпин<sup>1,\*</sup>, В. И. Парёнкина<sup>2,\*\*</sup>, С. Р. Свирщевский<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ФИЦ ИПМ, Россия

<sup>2</sup> 141014 Мытищи, М.о., ул. Веры Волошиной, 24, Московский гос. обл. ун-т, Россия

\*e-mail: vicveden@yahoo.com

\*\*e-mail: vi.parenkina@mgou.ru

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.

Переработанный вариант 17.11.2021 г.

Принята к публикации 24.12.2021 г.

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия. Библ. 40.

**Ключевые слова:** уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона.

**DOI:** 10.31857/S0044466922060163

### 1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$  – функция распределения частиц по пространству  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , по скоростям  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , массам  $m \in \mathbb{R}$  и заряду  $e \in \mathbb{R}$  в момент времени  $t \in \mathbb{R}$ . Это означает, что число частиц в объеме  $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$  равно  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ . Рассмотрим действие:

$$S = -c \int mf(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d^3 x d^3 v dm de dt - \frac{1}{c} \int ef(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) A_\mu u^\mu d^3 x d^3 v dm de dt + \\ + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1.1)$$

где  $c$  – скорость света,  $u^0 = c$  и  $u^i = v^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – трехмерная скорость,  $x^0 = ct$  и  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – координата,  $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$  – метрика ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ),  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  есть 4-потенциал электромагнитного поля,  $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \partial A_\nu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\mu - \partial A_\mu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\nu$  – электромагнитные поля,  $R$  – полная кривизна,  $\Lambda$  – лямбда-член Эйнштейна,  $k_1 = -c^3/16\pi\gamma$  и  $k_2 = -1/16\pi c$  – константы [1]–[4],  $g$  – определитель метрики  $g_{\mu\nu}$ ,  $\gamma$  – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1.1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям  $g_{\mu\nu}$  и  $A_\mu$ . Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5]–[11]. При варьировании (1.1) по  $g_{\mu\nu}$  получим уравнение Эйнштейна

$$k_1 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu d^3 v dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (1.2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [9]–[11] в менее общем виде



без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5]–[15]. Если использовалась функция распределения от 4-мерного импульса, что приводило к необходимости использовать дельта функцию  $\delta((mc)^2 - g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu)$ , что неудобно, а уравнения движения, приводящие к уравнению типа Власова, также оказывались неудовлетворительными.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1.1) по  $A_\mu$  и называется уравнением Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d^3 v dm de. \tag{1.3}$$

Покажем, что вид действия (1.1) является более общим, чем в [1]–[4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде  $\delta$  – функции для одной частицы:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'(t)) \delta(m - m') \delta(e - e'). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в действие (1.1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1]–[4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\mathbf{x}, t) u^\mu dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4 x. \tag{1.5}$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (1.4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1]–[4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1.1).

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАННЫХ ПОЛЯХ, УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (1.5), относительно замены  $t = \phi(\lambda)$ , где  $\lambda$  – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1]–[4]. Перепишем первые два слагаемых из действия (1.5) в виде

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu w^\mu d\lambda. \tag{2.1}$$

Варьируя по  $x(\lambda)$  и учитывая, что  $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , получаем уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$cm \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{g_{\mu\nu} w^\nu}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} + \frac{e}{c} A_\mu \right] = cm \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} w^\alpha w^\beta + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} w^\nu. \tag{2.2}$$

Учитывая, что величина  $I = g_{\eta\xi} \frac{\partial x^\eta}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial \lambda}$  является интегралом движения по  $\lambda$  для уравнения (2.2) (обоснование этого см. в [9], [10]) приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\eta}^\mu \frac{dx^\eta}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2} \sqrt{I} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{2.3}$$

где  $\Gamma_{\nu\eta}^\mu$  – символ Кристоффеля:

$$\Gamma_{\nu\eta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \left( \frac{\partial g_{\xi\eta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\xi\nu}}{\partial x^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\xi} \right).$$

Уравнение (2.3) отличается от приведенных в руководствах [1]–[4] наличием  $\sqrt{I}$  в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени  $ds = d\lambda\sqrt{I}$ . Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (2.3), которая обладает симметрией при замене  $\mathbf{x} \rightarrow \alpha\mathbf{x}$ ,  $\lambda \rightarrow \alpha\lambda$ , что позволяет понизить ее порядок. Для этого перепишем уравнение (2.3) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} &= w^\mu, \\ \frac{dw^\mu}{d\lambda} &= -\Gamma_{\nu\eta}^\mu w^\nu w^\eta + \frac{e\sqrt{I}}{mc^2} F_\nu^\mu w^\nu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Избавляемся от  $\lambda$ , поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (2.4). Так как  $x^0 = ct$  пропорционально времени, обозначим  $\frac{w^\mu}{w^0} = \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{u^\mu}{c}$ .

При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения на  $\frac{du^0}{dx^0}$  и написать уравнения на трехмерные переменные  $x^i, v^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Здесь по-прежнему  $\mathbf{u} = (c, \mathbf{v})$ . Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра  $\lambda$  и собственного времени  $s$ . Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к времени  $t$  необходимо, так как наша цель получить замкнутую систему уравнений для полей и частиц, а значит, получить уравнение на функцию распределения  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ , которая была в уравнениях для полей. Тогда имеем

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i, \quad \frac{dv^i}{dt} = G^i, \quad (2.5)$$

где через  $G^i$  обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma_{\nu\eta}^i u^\nu u^\eta + \frac{v^i}{c} \Gamma_{\eta\nu}^0 u^\eta u^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2} \left[ F_\nu^i u^\eta - \frac{v^i}{c} F_\eta^0 u^\eta \right],$$

а  $J = g_{\nu\xi} u^\nu u^\xi$ ,  $u^0 = c$ ,  $u^i = v^i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия в форме Вейнберга–Фока.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля (его также называют уравнением переноса или уравнением неразрывности) для функции распределения  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e, t)$  для системы (2.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(G^i f)}{\partial v^i} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6), (1.2) и (1.3) образуют систему уравнений для гравитации и электродинамики Власова–Максвелла–Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистских электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они 1) позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова–Максвелла) и гравитации (уравнение Власова–Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

### 3. ОБЩИЙ ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ [6], [7]

Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:  $\frac{dx}{dt} = v(x)$ ,  $x \in R^n$ ,  $v(x) \in C^1(R^n)$ . Перепишем ее для  $x = (q, p)$ ,  $q \in R^m$ ,  $p \in R^{n-m}$ :

$$\frac{dq}{dt} = w(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q, p).$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения  $f(t, q, p)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w_i f)}{\partial q_i} + \frac{\partial(g_j f)}{\partial p_j} = 0. \tag{3.1}$$

Выполним гидродинамическую подстановку  $f(t, q, p) = \rho(q, t)\delta(p - Q(q, t))$ . Здесь  $\delta$  – это дельта-функция Дирака, сама эта функция есть предел Максвелловского распределения, когда температура стремится к нулю,  $\rho(q, t)$  – это аналог плотности, а  $Q(q, t)$  – аналог макроскопического импульса. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} \delta(p - Q(q, t)) - \rho(q, t) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_i} \frac{\partial Q_i(q, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial(w_i(q, p) f)}{\partial q_i} &= \frac{\partial(w_i(q, Q) \rho(q, t))}{\partial q_i} \delta(p - Q(q, t)), \\ &- \rho(q, t) w_i(q, Q(q, t)) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_k} \frac{\partial Q_k(q, t)}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial(g_j(q, p) f)}{\partial p_j} &= \rho(q, t) g_j(q, Q(q, t)) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

Собирая множители при дельта-функции и ее производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_i(q, Q))}{\partial q_i} &= 0, \\ \rho(q, t) \left( \frac{\partial Q_j(q, t)}{\partial t} + w_i(q, Q(q, t)) \frac{\partial Q_j(q, t)}{\partial q_i} - g_j(q, Q(q, t)) \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эта система является точным следствием уравнения Лиувилля (3.1): можно называть ее *гидродинамическим следствием* уравнения Лиувилля порядка  $(m, n - m)$ . Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [4], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [6]. Слово “точное” означает, что если  $\rho(q, t)$  и  $Q(q, t)$  удовлетворяют системе уравнений (3.2), то функция  $f(t, q, p) = \rho(q, t)\delta(p - Q(q, t))$  удовлетворяет уравнению (3.1). Это также означает, что подстановка максвелловского распределения дает приближенные следствия, либо какой-то набор частных решений: например, Больцман изучал эти решения для простейшего варианта уравнения (3.1), уравнения переноса для свободного движения. Второе из уравнений (3.2) имеет ясный геометрический смысл: оно описывает движение  $m$ -мерных поверхностей в  $n$ -мерном пространстве в силу исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в Эйлеровых координатах. Получающаяся система квазилинейных уравнений не общая, а в терминологии Куранта и Гильберта называется системой уравнений с одинаковой главной частью. Эта система обладает следующими замечательными свойствами.

1. В случае линейной исходной системы ОДУ решение системы с одинаковой главной частью можно искать в виде  $Q_k(t, q) = \lambda_k^a(t) q_a$ , линейном по координатам  $q$ . Получается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в матричном виде на матрицу  $\lambda_k^a(t)$ .

2. Для гамильтоновых систем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(q, p)$$

из нее получается уравнение Гамильтона–Якоби двумя шагами. Первый шаг от уравнения Лиувилля к гидродинамическому следствию порядка  $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ , как это было сделано выше. Второй

шаг: в случае гамильтоновых систем проходит дальнейшая подстановка в (3.1) для импульсов  $Q_k(t, q)$  в виде градиента функции:  $Q_k(t, q) = \frac{\partial W}{\partial q_k}$ . В результате получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(q, t) \nabla_i W(q, Q))}{\partial q_i} = 0,$$

$$\rho(q, t) \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial W(q, t)}{\partial t} + H(q, \nabla W) \right) = 0.$$

Отсюда получаем, что там, где плотность  $\rho$  равна нулю, оба уравнения исчезают. А там, где плотность не равна нулю, функция  $\frac{\partial W(q, t)}{\partial t} + H(q, \nabla W) = f(t)$  зависит только от времени [17]–[20].

Замена  $W(q, t) = Z(q, t) + g(t)$ , где  $\frac{dg}{dt} = f(t)$ , приводит к уравнению Гамильтона–Якоби:  $\frac{\partial Z(q, t)}{\partial t} + H(q, \nabla Z) = 0$  [17]–[20].

Этот переход от уравнения Лиувилля к уравнению Гамильтона–Якоби имеет длинную историю. Второй шаг – переход от гидродинамических уравнений к уравнениям типа Гамильтона–Якоби в частном случае гамильтониана  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$  возник в работах Маделунга по квантовой механике [16]. А в общем случае гамильтоновых систем такой переход изучался в работах И.С. Аржаных, К.С. Долматова, В.В. Козлова [17]–[20]. Первый шаг, связавший гидродинамические системы с уравнением Лиувилля и уравнениями Гамильтона–Якоби, был проведен в работах [21]–[26] после того, как на одной из своих лекций В.В. Козлов вывел уравнения Гамильтона–Якоби из второго из уравнений (3.2) в гамильтоновом случае. В.В. Козлов назвал эти нижние уравнения (3.2) уравнениями Лэмба [17]–[20]. Один из авторов (В.В. Веденяпин) предположил, что эти уравнения Лэмба получаются из уравнений Лиувилля гидродинамической подстановкой, и это предположение подтвердилось [21]–[26]. Все это мы применим в дальнейшем в релятивистском и нерелятивистском случае.

#### 4. ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ И УРАВНЕНИЮ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Для вывода уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна в форме Гамильтона–Якоби нужно вывести его в импульсах (гидродинамическая форма получится и для скоростей, и для импульсов). Для этого вернемся к исходному действию и перепишем его, но нужно воспользоваться трехмерными импульсами. Для этого действие (2.1) перепишем через время: когда мы получали уравнение движения частицы в скоростях, то нужно было действовать через внешний параметр  $\lambda$ , чтобы использовать символы Кристофеля. А при получении канонических уравнений движения необходимо обычное время:

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu dt.$$

Мы получим уравнение движения:

$$-cm \frac{d}{dt} \left[ \frac{g_{\beta\alpha} u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c} A_i \right] = -cm \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi} v^\eta v^\xi}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} u^\mu u^\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^i} u^\mu$$

Латинские индексы  $i, j, k \dots$  пробегает значения 1, 2, 3, а греческие  $\mu, \nu \dots$  пробегает значения 0, 1, 2, 3. Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc \frac{g_{\mu\alpha} u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c} A_\mu. \quad (4.1)$$

Здесь выражение для  $q_0$  получается формальным дифференцированием по  $v_0 = c$ .

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы  $p_\mu = q_\mu - \frac{e}{c} A_\mu = -mc \frac{g_{\mu\alpha} u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}$ : формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона–Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу  $g^{\mu\beta}$ , получаем

$$p^\beta = -mc \frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим  $\beta$ -ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение  $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$  и его решение относительно  $p_0$ :  $p_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $a = g^{00}$ ,  $b = 2p_i g^{0i}$ ,  $c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$ . Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c},$$

в формулу (4.1) при  $\mu = 0$  (ср. [1]–[4]).

Уравнение для полей останется тем же самым (1.2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}, m, e) d\mathbf{q} dm de = f(t, x, p, m, e) d\mathbf{p} dm de$ . Каждая из трех этих величин это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных:

$$k_1 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = c \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, q, m, e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}} u^\mu u^\nu d^3 q dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g},$$

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, q, m, e) d^3 q dm de.$$

Или

$$k_1 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = c \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, q, m, e)}{2} \frac{c p^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2} d^3 q dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g},$$

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e \frac{c p^\mu}{p^0} f(t, \mathbf{x}, q, m, e) d^3 q dm de.$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы  $p^\mu$  во втором должны быть выражены через канонические импульсы  $q_\mu$ .

Уравнение движения для частиц получаем уже в гамильтоновой форме, где функция Гамильтона  $H = -c \frac{\partial L}{\partial u^0} = -c q_0$ . Эта формула получается из-за того, что лагранжиан для действия  $S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu dt$  есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера  $u^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - L = 0$ . Так как по определению  $H = u^i \frac{\partial L}{\partial u^i} - L$ , получаем  $c \frac{\partial L}{\partial u^0} + H = 0$ . Здесь имеется в виду суммирование по  $i = 1, 2, 3$  и по  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Отсюда находим выражения для скоростей  $u^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} = u^i(q) = -c \frac{\partial q_0}{\partial q^i}$ .

Выписывая через этот гамильтониан по общей схеме разд. 3 уравнение Лиувилля гидродинамической подстановкой  $f(t, x, qm, e) = \rho(x, t, m, e)\delta(q - Q(q, t, m, e))$ , получаем гидродинамические уравнения. Подстановкой  $Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$  или  $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha$  получаем затем уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}A_\beta\right)g^{\alpha\beta} = (mc)^2.$$

Мы также должны написать уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(\nabla W)\rho) = 0.$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона–Якоби–Власова–Максвелла–Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку  $f(t, x, q, m, e) = \rho(x, t, m, e)\delta(q - Q(q, t, m, e))$ :

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = c\int m \frac{\rho(t, x, m, e)}{2} \frac{cP^\mu P^\nu}{(P^0)(mc)^2} dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g},$$

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e \frac{cP^\mu}{P^0} \rho(t, x, m, e) dmde.$$

Здесь макроскопические импульсы  $P^\mu$  и  $P_\mu$  связаны обычными соотношениями  $P_\mu = g_{\mu\nu}P^\nu$ .

При этом в форме Гамильтона–Якоби нужно учитывать, что  $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha$ . Мы получили уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным, так и в редукции к уравнениям Гамильтона–Якоби. Рассмотрим примеры специальных релятивистских систем.

**Пример 1.** Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -cm \int \left( \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c} \right) dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \int U dxdt.$$

Варьируя по координатам  $x(t)$ , получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [1]–[4]

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S = -c \int m \left( \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c} \right) f(x, v, t, m) dv dm dxdt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \int U dxdt.$$

Варьируя его по потенциалу  $U$ , получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, x, v, m, e) dv dmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби и получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m \rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}, \end{aligned}$$

где  $v_i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq_i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$ .

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда  $\rho = \rho(t, r, m)$ ,  $U = U(t, r)$ ,  $W = W(t, r, m, e)$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{c W' x^i}{r \sqrt{(mc)^2 + (W')^2}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + c \sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + U &= 0, \\ 3 \frac{U'}{r} + \left( \frac{U'}{r} \right)' &= 4\pi \gamma \int m \rho d m d e - \frac{c^2 \Lambda}{2}. \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $r$ . Космологическим решениям соответствует случай, когда  $\rho$  не зависит от пространственной переменной  $x$ :  $\rho = \rho(m, t)$ . Тогда последнее уравнение дает решение

$$U = -\frac{\beta(t)}{r} + \frac{\alpha(t)}{6} r^2,$$

здесь  $\alpha(t) = 4\pi \gamma \int m \rho d m d e - \frac{c^2 \Lambda}{2}$ .

Из первого уравнения системы – уравнения неразрывности – получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0.$$

Величина  $H(m, t)$  называется постоянной Хаббла (и обычно полагают, что она не зависит от  $m$ ). Получаем уравнение на  $S$ :

$$3\varphi + r\varphi' = 3H,$$

где  $\varphi(r) = \frac{W' c}{r \sqrt{(W')^2 + (mc)^2}}$ .

Решая уравнение относительно  $\varphi$ , получаем

$$\varphi = H + \frac{B(m, t)}{r^3}.$$

Мы получили систему уравнений типа Гурса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho &= 0, \\ \frac{W' c}{r \sqrt{(W')^2 + (mc)^2}} &= H + \frac{B(m, t)}{r^3}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + c \sqrt{(mc)^2 + (W')^2} - \frac{\beta(t)}{r} + \frac{\alpha(t)}{6} r^2 &= 0. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} \left( 1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1 \right).$$

При этом потенциал вносится в действие под корень

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} + U dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x, q, t) = c \sqrt{((mc)^2 + q^2) \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right)},$$

и систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c \sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int \frac{m\rho(m, x, t)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2 + U}} dm - \frac{c^2 \Lambda}{2}, \end{aligned}$$

где  $v_i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq_i \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$ .

Уже из вида уравнений видно, что ускоренное расширение в первом случае можно в принципе устроить за счет лямбда-члена, а во втором — нет из-за положительности корня в уравнении Гамильтона—Якоби.

В следующем разделе мы применим эту технологию в нерелятивистском случае.

### 5. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕТИКА И ГИДРОДИНАМИКА: ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Применим этот способ в нерелятивистском случае для вывода уравнений Власова—Пуассона и, как следствие, уравнений гравитационной газодинамики заряженных частиц, действуя по той же схеме. Нерелятивистский случай соответствует действию [5]—[7]:

$$\begin{aligned} S &= \int \left[ \frac{mv^2}{2} - e\phi - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) dx d\mathbf{v} dm de dt + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\phi)^2 dx dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Варируя по  $\phi$  и по  $U$ , получаем дважды уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Действие для одной частицы следует при выборе  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(e - q)\delta(m - M)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{y}'(t))$ . Здесь  $M$ ,  $q$ ,  $\mathbf{y}(t)$  — это масса, заряд и координата одной частицы. Рассмотрим для такой функции распределения первое слагаемое в (3.1), получим стандартное действие:

$$S_1 = \int \left[ \frac{m(y')^2}{2} - q\phi(\mathbf{y}, t) - MU(\mathbf{y}, t) \right] dt.$$

Варируя, как обычно, в механике, получаем уравнение Ньютона:

$$M\mathbf{y}'' + M \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} + q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (возвращаемся к  $(e, m)$  для заряда и массы и к  $x$  вместо  $y$  для координаты):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (5.3)$$



Система (5.2), (5.3) и есть система уравнений Власова–Пуассона–Пуассона с лямбда-членом [38].

Получим точное гидродинамическое следствие этой системы, предполагая гидродинамический вид функции распределения [4]–[11]:  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, e, m) = \rho(t, \mathbf{x}, e, m)\delta(v - w(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, e, m))$ . Слово “точное” означает, что если мы возьмем вместо этого распределения максвелловское, то получим приближенное следствие. Тогда верно следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) &= 0, \\ \frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} &= 0, \\ \Delta \varphi &= -4\pi \int e \rho dm de, \\ \Delta U &= 4\pi \gamma \int m \rho dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Такую систему можно назвать системой Власова–Лэмба–Пуассона–Пуассона. Пусть скорость имеет вид градиента некоторой функции  $W$ :  $w_k(t, \mathbf{x}, e, m) = \frac{\partial W(t, \mathbf{x}, e, m)}{\partial x_k}$ .

Тогда получаем систему, которая является также точным следствием уравнения Власова–Пуассона–Пуассона (5.2), (5.3), где появляется уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Delta W + \frac{\partial \rho}{\partial x^k} \frac{\partial W}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial W}{\partial x^i} \right)^2 + u + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} \varphi &= 0, \\ \Delta \varphi &= -4\pi \int e \rho dm de, \\ \Delta U &= 4\pi \gamma \int m \rho dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда функции  $\rho = \rho(t, r, e, m)$ ,  $W = W(t, r, e, m)$ ,  $U = U(r, t)$ ,  $\varphi = \varphi(r, t)$ . Получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{3W'}{r} + r \left( \frac{W'}{r} \right)' \right) + \rho' W' &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} (W')^2 + U + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} \varphi &= 0, \\ \frac{3\varphi'}{r} + r \left( \frac{\varphi'}{r} \right)' &= -4\pi \int e \rho dm de, \\ \frac{3U'}{r} + r \left( \frac{U'}{r} \right)' &= 4\pi \gamma \int m \rho dm de - \frac{c^2 \Lambda}{2}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что плотность не зависит от пространственной координаты:  $\rho(t, m, e)$  (однородность по пространству). Такие решения называются космологическими решениями, так как на очень больших масштабах предполагается, что плотность от пространственной координаты вообще не зависит [1]–[4].

Тогда последнее уравнение дает решение

$$U = -\frac{a(t)}{r} + \frac{b(t)}{6} r^2,$$

где  $b(t) = 4\pi \gamma \int m \rho dm de - \frac{c^2 \Lambda}{2}$ .

Аналогично

$$\varphi(r, t) = -\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6} r^2,$$

где  $d(t) = -4\pi \int e r d m d e$ .

Из первого уравнения системы, уравнения неразрывности, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$

где  $H(m, e, t)$  – постоянная Хаббла, и обычно полагают, что она зависит только от времени. Слово “постоянная” употребляется по традиции со времен Хаббла, так как она меняется медленно. Но именно ее зависимость от времени и других параметров (как масса или аналоги зарядов какой-то другой материи, которую сейчас принято называть темной или темной энергии) имеет особую актуальность в связи с ускоренным расширением Вселенной. Получаем уравнение на  $W$ :

$$3\psi + r\psi' = 3H(t, m, e),$$

где  $\psi(r, t) = \frac{W'(t, r, m, e)}{r}$ .

Решая уравнение относительно  $\psi$ , получаем

$$\psi = H + \frac{B(m, e, t)}{r^3}.$$

Значит,  $W' = Hr + \frac{B}{r^2}$  и  $W = \frac{Hr^2}{2} - \frac{B}{r}$ .

Подставляя все во второе уравнение, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Hr^2}{2} - \frac{B}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( Hr + \frac{B}{r^2} \right)^2 - \frac{a(t)}{r} + \frac{b(t)}{6} r^2 + \frac{e}{m} \left( -\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6} r^2 \right) = 0.$$

Из второго слагаемого находим  $B(m, e, t) = 0$ .

Собирая коэффициенты при  $r^{-1}$ , получаем  $a(t) + \frac{q}{M} c(t) = 0$ .

Собирая коэффициенты при  $r^2$ , получаем уравнение на  $H$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} H + H^2 + \frac{b(t)}{3} + \frac{e}{m} \frac{d(t)}{3} = 0.$$

Получаем систему уравнений на плотность  $\rho(m, t)$  и постоянную Хаббла  $H(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} H + H^2 + \frac{4\pi\gamma \int m r d m d e}{3} - \frac{c^2 \Lambda}{6} - \frac{e}{m} \frac{4\pi\gamma \int e r d m d e}{3} &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Таким образом получается еще одна возможность объяснить загадочное ускоренное расширение Вселенной [39], [40] наряду с лямбда-членом. Из уравнений хорошо видно, что они работают в одинаково правильном направлении, создавая недостающее отталкивание. В случае заряженных частиц это равенство нулю последнего слагаемого в левой части означает нейтральность. Пусть

$$\eta(t) = \frac{4\pi\gamma \int m r d m d e}{3} - \frac{e}{m} \frac{4\pi\gamma \int e r d m d e}{3}.$$

После этого, если  $H$  зависит только от времени, можно перейти к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + 3H\eta &= 0, \\ \frac{dH}{dt} + H^2 + \eta - \frac{c^2\Lambda}{6} &= 0. \end{aligned}$$

Фазовые траектории этой системы были исследованы в [38].

Мы видим, что нам несколько раз пришлось решить уравнение Пуассона  $\Delta u = \text{const}$ , что показывает не только эквивалентность введения лямбда-члена с какой-то субстанцией типа заряда  $e$ , удовлетворяющей этому уравнению, но и обосновывает потенциал Гурздяна

$U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$  как альтернативное объяснение темной энергии [35]–[37]. Было бы хорошо объяснить расширенное ускорение без введения дополнительных предположений типа лямбда-члена или квадратичного потенциала, и насколько уравнение Эйнштейна (1.2) предоставляет такую возможность обоими слагаемыми в правой части – это предмет дальнейших рассмотрений.

Мы получили нерелятивистский аналог уравнений Фридмана, обобщающий решение Милна–МакКри [33], [34] в различных направлениях: ввели лямбда-член, обосновали их модель, выведя из системы Власова–Пуассона, ввели отталкивание субстанции по аналогии с кулоновским, перешли к уравнению Гамильтона–Якоби, поставили вопрос о зависимости постоянной Хаббла от массы и заряда субстанции.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5]–[15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации, и уравнение электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Представляет значительный интерес исследовать различные классы решений полученных уравнений, как это делалось в [27]–[31]. Особый интерес должно представлять асимптотическое поведение решений уравнений Власова, и тут могла бы помочь его аналогия с уравнением Лиувилля [30]–[32]. Мы показали также, что полученные уравнения типа Власова должны быть применены к объяснению эволюции Вселенной, так как именно из уравнения Власова–Пуассона следуют нерелятивистские аналоги решений Фридмана, решения Милна–МакКри [33], [34]. При этом они являются точным следствием уравнения Власова–Пуассона, поэтому получаются без эвристических предположений работ [33], [34] и обосновывают и обобщают их. Эти решения позволили выяснить роль лямбда-члена, его эквивалентность потенциалу Гурздяна  $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$  и эквивалентность этого любой однородной субстанции, связанной с решением уравнения Пуассона  $\Delta u = \text{const}$ . Правая часть уравнения Эйнштейна дает надежду на объяснение ускоренного расширения Вселенной без этих дополнительных предположений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теор. и матем. физ. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.

6. Ведыняпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Ведыняпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations (Elsevier Insights, 2011).
9. Ведыняпин В.В. Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 188. 20 с.
10. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D. 2020. V. 29. № 1. 23 p.
11. Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 с.
12. Cercignani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. Choquet-Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.
14. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 150, 561–583 (1992).
15. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.
17. Аржаных И.С. Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.; англ. пер.: Arzhanykh I.S., Momentum fields, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971. 222 pp.
18. Долматов К.И. Поле импульсов аналитической динамики, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Ташкент. 1950. 84 с.
19. Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. 10–22; англ. пер.: Kozlov V.V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems // Moscow Univ. Mech. Bull., 38:6 (1983), 9–23.
20. Козлов В.В. Общая теория вихрей. Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998. 239 с.
21. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995. 429 с.; англ. пер.: V.V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics, Ergeb. Math.Grenzb. (3), 31, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+378 pp.
22. Ведыняпин В.В., Аджиев С.З., Казанцева В.В. Энтропия по Больцмана и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // СМФН. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.
23. Ведыняпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем. Нелинейная динам., 11:2 (2015), 279–286.
24. Ведыняпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка. Докл. АН, 461:2 (2015), 136–139; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Fimin N.N. The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution. Dokl. Math., 91:2 (2015), 154–157.
25. Ведыняпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. АН, 449:5 (2013), 521–526; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Negmatov M.A. On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method. Dokl. Math., 87:2 (2013), 240–244.
26. Ведыняпин В.В., Фимин Н.Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби. Докл. АН, 446:2 (2012), 142–144; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Fimin N.N. The Liouville equation, the hydrodynamic substitution, and the Hamilton–Jacobi equation. Dokl. Math., 86:2 (2012), 697–699.
27. Ведыняпин В.В. Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АН СССР, 290:4, 777–780; англ. пер.: Vedenyapin V.V. Boundary value problems for the steady-state Vlasov equation. Soviet Math. Dokl., 34:2 (1987), 335–338.
28. Ведыняпин В.В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача. Докл. АН СССР, 323:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: Vedenyapin V.V. On the classification of steady-state solutions of Vlasov’s equation on the torus, and a boundary value problem. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 45:2 (1992), 459–462.
29. Архипов Ю.Ю., Ведыняпин В.В. О классификации и устойчивости стационарных решений уравнения Власова на торе и в граничной задаче // Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимировича, Тр. МИАН, 203, Наука, М., 1994, 13–20; англ. пер.: Arkhipov Yu. Yu., Vedenyapin V.V. On the classification and

- stability of steady-state solutions of Vlasov's equation on a torus and in a boundary value problem // Proc. Steklov Inst. Math., 203 (1995).
30. *Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали по Больцману. Докл. АН, 422:2 (2008), 161–163; англ. пер.: Vedenyapin V.V. Time averages and Boltzmann extremals. Dokl. Math., 78:2 (2008), 686–688.
  31. *Аджиев С.З., Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.
  32. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
  33. *Milne E.A.* Relativity, Gravitation and World-Structure (Oxford Univ. Press, 1935).
  34. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 5, 73 (1934).
  35. *Gurzadyan V.G.* The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory 105, 42 (1985).
  36. *Gurzadyan V.G.* On the common nature of Dark Energy and Dark Matter // Eur. Phys. J. Plus 134, 14 (2019).
  37. *Gurzadyan V.G., Stepanyan A.* The cosmological constant derived via galaxy groups and clusters // Eur. Phys. J. C 79, 169 (2019).
  38. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov-Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 136. № 670 (2021).
  39. *Чернин А.Д.* Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
  40. *Лукаш В.Н., Рубаков В.А.* Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.

ИТЕРАЦИИ ЧЕРНОВА КАК МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ  
АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ© 2022 г. Р. Ш. Кальметьев<sup>1,\*</sup>, Ю. Н. Орлов<sup>1,\*\*</sup>, В. Ж. Сакбаев<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: kalmetev@gmail.com

\*\*e-mail: ov3159f@yandex.ru

\*\*\*e-mail: fumi2003@mail.ru

Поступила в редакцию 02.12.2021 г.  
Переработанный вариант 27.12.2021 г.  
Принята к публикации 15.01.2022 г.

Изучаются композиции независимых случайных аффинных преобразований функций на конечномерном линейном пространстве, представляющие собой некоммутативный аналог случайных блужданий. Установлены условия на итерации независимых случайных аффинных преобразований, достаточные для сходимости к группе, разрешающей задачу Коши для эволюционного уравнения сдвига вдоль усредненного векторного поля, и достаточные для сходимости к полугруппе, разрешающей задачу Коши для уравнения Фоккера–Планка. Приведены численные оценки отклонения случайных итераций от решений предельной задачи. Сформулированы и исследованы начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений, описывающие эволюцию функционалов от предельных случайных процессов. Библ. 22. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** случайный линейный оператор, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, уравнение Фоккера–Планка.

**DOI:** 10.31857/S0044466922060114

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются композиции независимых случайных аффинных преобразований аргумента функций на конечномерном линейном пространстве, представляющие собой некоммутативный аналог случайных блужданий. Такие модели естественно возникают в задачах квантовой механики для систем, находящихся в случайных нестационарных полях. Усредненная динамика квантовых систем имеет как теоретический, так и практический интерес с точки зрения анализа средних значений наблюдаемых. В частности, важно представлять, в какой мере усреднение решений некоторого эволюционного уравнения с нестационарными параметрами связано с решением уравнения, усредненного по этим параметрам. Использование для этой цели процедуры усреднения с помощью построения эквивалентных по Чернову полугрупп является весьма эффективным методом, который был развит в [1]–[3].

В [4] были рассмотрены случайные сдвиги в пространстве бозонных когерентных состояний и показано, что их усреднение с помощью теоремы Чернова также является когерентным состоянием, которое генерируется усредненным оператором сдвига. Физическая интерпретация этого результата состояла в том, что эволюция квантового осциллятора или цепочки осцилляторов с переменной частотой может рассматриваться как результат последовательно применяемых операторов сдвига, среднее значение которых и генерирует наблюдаемое в данный момент состояние. Тем самым метод построения средней полугруппы на основе теоремы Чернова (см. [5]) может служить основой для разработки приближенной итерационной вычислительной процедуры, сходящейся к решению рассматриваемой эволюционной задачи. Когерентные, а также сжатые состояния в последнее время активно применяются не только в моделях квантовой оптики, но и в моделях высокотемпературной сверхпроводимости (см. [6]) и в задаче о поляроне в биологических структурах (см. [7], [8]). Отметим, что основной моделью в указанных работах (см. [6]–[8]) является гамильтониан Фрелиха (см. [9]) в сверхпроводимости, описывающий взаимодействие операторов рождения-уничтожения электронов с фотонами, спектр которого точ-

но исследовать пока не удастся. Решение этой задачи представляется в виде действия произведения операторов Гейзенберга и операторов сдвига на вакуумное состояние гамильтониана. Поэтому анализ таких операторных конструкций с точки зрения применения теоремы Чернова является теоретически важным, а получаемые на его основе приближенные методы, сходящиеся к точному решению, такие как усреднение по Фейнману—Чернову, могут быть практически востребованными.

В [10] авторы рассмотрели обобщенные когерентные состояния, которые генерируются неклассическими коммутационными соотношениями. Такие соотношения возникают при анализе моделей комбинационного рассеяния в квантовой оптике при диагонализации полиномиальных гамильтонианов с полным набором законов сохранения (см. [11]). Тем самым анализ композиций преобразований, моделирующих эволюцию состояний квантовых систем, является актуальной задачей. В настоящей работе мы представим некоторые новые результаты об усреднении случайных аффинных преобразований и приведем примеры вычислительных экспериментов в качестве иллюстрации приложения развиваемого метода.

Влияние нестационарных случайных воздействий на эволюцию квантовых и классических систем изучалось в ряде работ (см., например, [1], [2], [12]–[14]). Представляет интерес описание характеристик предельного поведения случайных композиций, указанных выше, при стремлении к бесконечности числа итераций. Предельные теоремы, описывающие асимптотику распределения произведения большого числа независимых случайных матриц, изучались в [15]–[19].

В [2], [3], [12], [20] получены предельные теоремы типа закона больших чисел и центральной предельной теоремы, описывающие сходимость случайных композиций по вероятности и по распределению. В [12] получены теоремы типа закона больших чисел, утверждающие сходимость по распределению последовательности произведений случайных матриц к детерминированной предельной матрице. В статье [12] установлены предельные теоремы, описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных линейных преобразований конечномерного евклидова пространства.

Подчеркнем, что, в отличие от [12], в [2] была доказана сходимость по вероятности последовательности случайных композиций к предельной полугруппе, что позволяет дать оценку вероятности отклонения в форме неравенства Чебышёва. Отметим, что результаты работ [2], [3], [20] представляют предельные теоремы, описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных преобразований бесконечномерных банаховых пространств.

В настоящей работе мы распространяем полученные в [12] результаты на случай аффинных преобразований, а также исследуем уравнение Фоккера—Планка, порождаемое случайными аффинными преобразованиями евклидова пространства. Полученные здесь результаты развивают идеи работ [13], [21], в которых изучались случайные ортогональные преобразования пространства  $E$  на случайные аффинные преобразования. Установлены условия на итерации независимых случайных групп аффинных преобразований, достаточные для сходимости к группе, разрешающей задачу Коши для эволюционного уравнения сдвига вдоль усредненного векторного поля. Установлены условия, достаточные для сходимости последовательности композиций случайных аффинных преобразований аргумента к полугруппе, разрешающей задачу Коши для уравнения Фоккера—Планка. Приведены численные оценки отклонения случайных итераций от решений предельной задачи.

## 2. УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть  $E = \mathbb{R}^d$  — конечномерное евклидово пространство,  $B(E)$  — банахово пространство линейных преобразований пространства  $E$ . Пусть  $G(E)$  — группа аффинных преобразований пространства  $E$ ;  $\mathbf{F} \in G(E)$  — аффинное преобразование пространства  $E$ . Тогда оператор  $\hat{U}_{\mathbf{F}}$ , определенный на пространстве  $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$  равенством  $\hat{U}_{\mathbf{F}}u(x) = u(\mathbf{F}x)$ ,  $x \in E$ , при любом  $u \in \mathcal{H}$  является ограниченным линейным оператором в пространстве  $\mathcal{H}$ . Поскольку якобиан преобразования  $\mathbf{F}$  отличен от нуля и от бесконечности, то для любого  $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$  выполняются условие  $u \circ \mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d)$  и равенство  $\|u \circ \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} = |\det(\mathbf{F}^{-1})|^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}$ .

Каждое аффинное преобразование  $F \in G(E)$  допускает единственное представление в виде  $F = S_h \circ L$ , где  $L \in B(E)$  – невырожденный линейный оператор в пространстве  $E$ ,  $S_h$  – оператор сдвига аргумента на вектор  $h \in E$ .

Случайным аффинным преобразованием  $F$  будем называть упорядоченную пару  $(L, h)$  независимых случайных величин, где  $L$  – случайная величина со значениями в пространстве  $B(E)$ ,  $h$  – случайная величина со значениями в пространстве  $E$ . При этом  $F(\omega) = S_{h(\omega)} \circ L(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , где  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  – вероятностное пространство элементарных событий.

Случайной величиной со значениями в пространстве  $B(E)$  называется слабо измеримое отображение  $\xi: \Omega \rightarrow B(E)$ , т.е. измеримое в том смысле, что для любых  $x, y \in E$  комплекснозначная функция  $\Omega \ni \omega \rightarrow (x, \xi y)_E \in \mathbb{C}$  является измеримой. Если пространство  $E$  сепарабельно, то из слабой измеримости отображения  $\xi: \Omega \rightarrow B(E)$  следует его сильная измеримость. Последнее означает, что для любого  $x \in E$  вектор-функция  $\xi x: \Omega \rightarrow E$  является измеримым отображением. Кроме того, из слабой измеримости отображения  $\xi: \Omega \rightarrow B(E)$  следует измеримость функции  $\Omega \ni \omega \rightarrow \|\xi\|_E \in \mathbb{R}$  (см. [13]).

Если случайный оператор  $L: \Omega \rightarrow B(E)$  удовлетворяет условию  $\int_{\Omega} \|L(\omega)\|_{B(E)} d\mu(\omega) < \infty$ , то для любых  $x, y \in E$  числовая функция  $\Omega \ni \omega \rightarrow (x, Ly) \in \mathbb{C}$  интегрируема. Следовательно, определена ограниченная полуторалинейная форма  $\beta(x, y) = \int_{\Omega} (Lx, y)_E d\mu(\omega)$ ,  $x, y \in E$ , и ассоциированный с формой ограниченный линейный оператор  $\bar{L}$ .

Случайным вектором пространства  $E$  называется слабо измеримое отображение  $h: \Omega \rightarrow E$ . Для сепарабельного пространства  $E$  слабая измеримость равносильна измеримости.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  – аффинное преобразование пространства  $E$ , представимое в виде композиции  $F = S_h \circ L$  оператора сдвига  $S_h$  на вектор  $h \in E$  и невырожденного линейного преобразования  $L$ . Тогда на пространстве  $\mathcal{H} = L_2(E)$  определено ограниченное линейное преобразование  $U_F$ , действующее по правилу  $U_F u(x) = u(Fx)$ ,  $x \in E$ , норма которого допускает оценку  $\|U_F\|_{\mathcal{H}} = |\det(F^{-1})|^{1/2}$ .

**Доказательство.** Поскольку преобразование сдвига аргумента на фиксированный вектор  $h$  является унитарным в пространстве  $\mathcal{H}$ , то для любого  $u \in \mathcal{H}$  выполняется равенство  $\|U_F u\|_{\mathcal{H}} = \|u \circ L\|_{\mathcal{H}} = |\det(L^{-1})|^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}} = |\det(F^{-1})|^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F: \Omega \rightarrow G(E)$  – случайная величина со значениями в группе аффинных преобразований пространства  $E$ . Тогда, если  $\int_{\Omega} |\det(F^{-1})|^{1/2} d\mu(\omega) < +\infty$ , то отображение  $U_F: \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$  является случайным оператором, математическое ожидание которого  $U_F$  существует и определяется равенством

$$MU_F u = \int_{\Omega} u \circ F(\omega) d\mu(\omega) \in \mathcal{H} \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_d\}$  – стандартный ортонормированный базис евклидова пространства  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $x_j = (e_j, x)$ ,  $x \in E$ ,  $j \in \overline{1, d}$ . Если  $u, v \in C_0^\infty(E)$ , то  $(u, U_F v)$  – непрерывная функция от  $d$  случайных величин  $(Fx, e_1), \dots, (Fx, e_d)$ , и потому функция  $(u, U_F v): \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  измерима. Поскольку пространство  $C_0^\infty(E)$  плотно в  $L_2(E)$ , то функция  $(u, U_F v): \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  является измеримой для любых  $u, v \in L_2(E)$ .

Интегрируемость случайной величины  $(u, U_F v)$  при произвольном выборе  $u, v \in L_2(E)$  следует из оценки  $|(u, U_F v)| \leq \|v\| \|u \circ F\| \leq \|u\| \|v\| |\det F^{-1}|^{1/2}$  и теоремы о мажорированной сходимости. Поэтому полуторалинейная форма  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \rightarrow \beta_F(u, v) = \int_{\Omega} (u \circ F(\omega), v) d\mu(\omega)$  определена и ограничена. Следовательно, математическое ожидание  $MU_F$ , определяемое интегралом Петтиса по мере  $\mu$  от случайной операторнозначной функции  $U_F$ , является с ней ограниченным линейным оператором  $MU_F \in B(\mathcal{H})$ , ассоциированным с формой  $\beta_F$ .



## 3. ИТЕРАЦИИ ФЕЙНМАНА–ЧЕРНОВА

Пусть  $\mathbf{F}$  – случайное аффинное преобразование пространства  $E$ , представимое в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{S}_h \circ \mathbf{L}$ , где  $\mathbf{S}_h$  – оператор сдвига на случайный вектор  $h \in E$ ,  $\mathbf{L}$  – случайный невырожденный линейный оператор. Далее будут рассматриваться такие и только такие случайные линейные операторы  $\mathbf{L}: \Omega \rightarrow B(E)$ , значения которых допускают полярное разложение в композицию самосопряженного преобразования  $\Lambda$  и ортогонального преобразования  $V$ . Кроме того, случайные величины  $\Lambda$ ,  $V$  и  $\mathbf{S}_h$  в представлении  $\mathbf{F} = \mathbf{S}_h \mathbf{V} \Lambda$  являются независимыми случайными операторами, причем случайный оператор  $\Lambda$  принимает значения в конусе положительных самосопряженных операторов в пространстве  $E$ , случайный оператор  $V$  – в группе ортогональных преобразований пространства  $E$ , а случайный оператор  $\mathbf{S}_h$  – в группе сдвигов вдоль векторов пространства  $E$ .

Со случайным преобразованием  $\mathbf{F} = \mathbf{S}_h \circ \mathbf{L}$  свяжем однопараметрическое семейство преобразований

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{S}_{th} \mathbf{V}^t \circ \Lambda^t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) дробная степень положительного оператора  $\Lambda$  определяется его спектральным разложением.

Ортогональный оператор  $V$  допускает спектральное разложение вида  $V = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} d\mathbf{E}(\lambda)$ . Дробная степень такого оператора  $V$  определяется равенством  $V^t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\mathbf{E}(\lambda)$ . Тогда при  $t \in \mathbb{R}$  операция возведения в степень  $t$  однозначно определена.

Дробные степени положительного самосопряженного и унитарного операторов в равенстве (3.1) удобно представить в форме экспоненциальных функций от оператора

$$\Lambda^t = \exp(t \ln \Lambda), \quad V^t = \exp(t \ln V), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Здесь логарифмом положительного оператора  $\Lambda$  называется самосопряженный оператор с вещественным спектром, определяемый в силу спектральной теоремы однозначно. Логарифмом ортогонального оператора  $V$  называется косимметрический оператор  $\ln V \in B(E)$ , мнимая часть собственных значений которого лежит в промежутке  $(-\pi, \pi]$ , такой, что  $V = \exp(\ln V)$ . Существование и единственность оператора  $\ln V$  следуют из того факта, что оператор  $V$  допускает разложение пространства  $E$  в прямую сумму не более чем двумерных инвариантных подпространств, при том, что в одномерном подпространстве оператор  $V$  действует как тождественный, а в двумерном – как оператор поворота на некоторый угол из промежутка  $(-\pi, \pi]$ .

Пусть  $\{\mathbf{F}_k\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований, каждое из которых представимо в виде

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{S}_{h_k} \mathbf{V}_k \Lambda_k,$$

где при каждом  $k \in \mathbb{N}$  случайные величины  $h_k$ ,  $\mathbf{V}_k$ ,  $\Lambda_k$  являются независимыми.

Тогда для каждого  $k \in \mathbb{N}$  определено однопараметрическое семейство аффинных преобразований  $\mathbf{F}_k(t) = \mathbf{S}_{th_k} \mathbf{V}_k^t \Lambda_k^t$ ,  $t \geq 0$ ,  $t \in [0, 1)$ .

Следовательно, определена последовательность *итераций Фейнмана–Чернова* независимых случайных аффинных преобразований

$$\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n) = \mathbf{S}_{(t/n)h_n} \mathbf{V}_n^{t/n} \Lambda_n^{t/n} \circ \dots \circ \mathbf{S}_{(t/n)h_1} \mathbf{V}_1^{t/n} \Lambda_1^{t/n}, \quad t \in [0, 1). \quad (3.3)$$

Композиции независимых случайных аффинных преобразований  $\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n)$  пространства  $E$  сопоставим случайное линейное преобразование  $\mathbf{U}_{\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n)}$  пространства  $\mathcal{H} = L_2(E)$ , действующее по правилу

$$\mathbf{U}_{\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n)} u(x) = u(\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n)x). \quad (3.4)$$

Далее с помощью теоремы Чернова будет дано описание предельного (при  $n \rightarrow \infty$ ) поведения таких композиций.

4. УСРЕДНЕННОЕ ПО ЧЕРНОВУ АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В этом разделе будет установлена сходимость последовательности итераций семейств независимых случайных аффинных преобразований к группе сдвигов вдоль векторного поля, определяемого усредненным аффинным преобразованием.

В [2] были доказаны утверждения о математическом ожидании композиции независимых случайных линейных операторов. Применительно к рассматриваемым нами композициям эти утверждения формулируются следующим образом.

**Лемма 2** (см. [2]). Пусть  $\{F_k\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований пространства  $E$ . Тогда для всех  $t \geq 0, n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $U_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} = U_{F_n(t/n)} \circ \dots \circ U_{F_1(t/n)}$ .

Следовательно, для математического ожидания композиции справедливо равенство

$$G_n(t) = M[U_{F_n(t/n)} \circ \dots \circ U_{F_1(t/n)}] = (M[U_{F(t/n)}])^n = (M[U_{S_{(t/n)h} \circ V^{t/n} \circ \Lambda^{t/n}}])^n, \quad t \in [0, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$G(t) = M[U_{F^t}] = M[U_{S_{th} \circ V^t \circ \Lambda^t}], \quad t \in [0, 1).$$

**Лемма 3** (см. [2]). Если  $A(\omega) = V(\omega) \circ \Lambda(\omega), \omega \in \Omega$ , где  $V, \Lambda$  – независимые случайные операторы со значениями в пространстве  $B(E)$ , то  $M(A) = M(V) \circ M(\Lambda)$ .

Следовательно, функция  $G$  задается равенством

$$G(t) = M[U_{S_{th}}] \circ M[U_{V^t}] \circ M[U_{\Lambda^t}], \quad t \in [0, 1). \tag{4.1}$$

На основании лемм 2 и 3 докажем сходимость итераций (3.4) к полугруппе. Проверим выполнение условий теоремы Чернова для функции (4.1).

По построению  $G(0) = I$ . Оператор-функция (4.1) сильно непрерывна как композиция трех сильно непрерывных оператор-функций; сильная непрерывность каждой из трех компонент композиции (4.1) имеет место, поскольку является интегралом по вероятностной мере от функции, значениями которой являются сильно непрерывные оператор-функции. Норма среднего значения случайной оператор-функции допускает оценку

$$\|G(t)\|_{B(H)} = \|M[U_{S_{th}}] \circ M[U_{V^t}] \circ M[U_{\Lambda^t}]\|_{B(H)} \leq \|M[U_{\Lambda^t}]\|_{B(H)} = M\left(\left|\det((\Lambda^t)^{-1})\right|^{1/2}\right).$$

Тогда в силу неравенства Гёльдера и с учетом нормированности вероятностной меры  $\mu$  получим оценку

$$M\left(\left|\det((\Lambda)^{-1})\right|^{t/2}\right) \leq \left(M\left(\left|\det((\Lambda)^{-1})\right|^{1/2}\right)\right)^t = \left(M\left(\left|\det(F^{-1})\right|^{1/2}\right)\right)^t.$$

Таким образом, условие теоремы Чернова

$$\|G(t)\|_{B(H)} \leq \left(M\left(\left|\det(F^{-1})\right|^{1/2}\right)\right)^t \quad \forall t \in [0, 1) \tag{4.2}$$

на нормы значений операторнозначной функции  $G$  выполнено.

Для производной композиции операторнозначных функций (4.1) в силу правила Лейбница имеем

$$G'(t)|_{t=0} = (M[U_{\Lambda^t}])'|_{t=0} + (M[U_{V^t}])'|_{t=0} + (M[U_{S_{th}}])'|_{t=0}.$$

**Лемма 4** (см. [2]). Пусть  $h$  – случайный вектор пространства  $E$ , обладающий математическим ожиданием  $Mh = \bar{h} \in E$ . Тогда  $(M[U_{S_{th}}])'|_{t=0}u = (\bar{h}, \nabla u) \forall u \in H^1 = W_2^1(E)$ .

**Лемма 5.** Пусть отображение  $U: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow B(E)$  имеет вид  $\exp(tA(\omega)), t \geq 0$ , где  $A: \Omega \rightarrow B(E)$  – случайный линейный оператор, принимающий значения в шаре радиуса  $\rho \in (0, +\infty)$  пространства  $B(E)$ , который имеет среднее значение

$$M(A) = \int_{\Omega} A(\omega)d\mu(\omega) = \bar{A}.$$

Тогда для любого  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  выполняется равенство

$$Mu(\exp(t\mathbf{A})x) = u(x) + t(\nabla u(x), M(\mathbf{A})x) + r(t), \quad (4.3)$$

где остаток  $r(t)$  допускает оценку  $\|r(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Ct^2\rho^2 \exp(2t\rho)$ .

**Доказательство.** Действительно, поскольку  $\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \alpha(t)$ , где  $\|\alpha(t)\|_{B(E)} = o(t) \leq t^2\rho^2 e^{\rho t}$  при  $t \rightarrow 0$ , то согласно формуле Тейлора для функции  $u(\exp(t\mathbf{A})x)$  имеем

$$Mu(\exp(t\mathbf{A})x) = M[u((\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \alpha(t))x)] = M\left[u(x) + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}(t\mathbf{A}_{jk}x_k + o(t))\right) + o(t)\right].$$

Поэтому в силу предположений леммы 1)–3) о случайном операторе  $A$  справедливо равенство

$$Mu(\exp(t\mathbf{A})x) = u(x) + t(\nabla u(x), M(\mathbf{A})x) + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Оценим  $L_2$ -норму остаточного члена в формуле Тейлора. Поскольку  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , то существует постоянная  $c > 0$ , ограничивающая сверху абсолютное значение функции  $u$  и всех ее частных производных не выше второго порядка. Кроме того, носитель функции  $u$  заключен в шаре некоторого радиуса  $r_0$  пространства  $E$ , поэтому носитель функции  $u \circ \exp(t\mathbf{A})$  заключен в шаре радиуса  $r_t = r_0 \exp(t\rho)$ . Из представления остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа следует, что квадрат его  $L_2$ -нормы не превосходит произведения меры Лебега носителя на квадрат супремума по носителю дифференциала второго порядка, откуда следует оценка остаточного члена из утверждения леммы.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{F}$  – случайное аффинное преобразование пространства  $E$ , представимое в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{S}_h \circ \mathbf{L} = \mathbf{S}_h \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}$ , где операторнозначные случайные величины  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{S}_h$  являются независимыми случайными операторами и принимают значения в конусе положительных самосопряженных операторов в пространстве  $E$ , в группе ортогональных преобразований пространства  $E$  и в группе сдвигов вдоль постоянного вектора в пространстве  $E$  соответственно. Пусть  $Mh = \bar{h} \in E$ . Пусть случайный оператор  $\mathbf{A} = \ln(\mathbf{\Lambda}) + \ln(\mathbf{V})$  (см. (3.2)) принимает значения в некотором шаре пространства  $B(E)$  и  $M\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} \in B(E)$ . Тогда для любого  $T > 0$  и любого  $u \in \mathcal{H}$  выполняется равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|(M[\mathbf{U}_{\mathbf{F}_n(t/n) \circ \dots \circ \mathbf{F}_1(t/n)}] - \mathbf{W}(t))u\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

где  $\mathbf{W}$  – полугруппа, порождаемая решениями задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} u = (\bar{h} + \bar{\mathbf{A}}x, \nabla u), \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (4.4)$$

Для доказательства теоремы 2 остается проверить условие теоремы Чернова о том, что оператор  $\mathbf{H}: u \rightarrow (\bar{h} + \bar{\mathbf{A}}x, \nabla u)$  является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Поскольку векторное поле  $\mathbf{a}(x) = \bar{h} + \bar{\mathbf{A}}x$  непрерывно дифференцируемо и равномерно липшицево на пространстве  $E$ , то оно задает поток  $g_t, t \in \mathbb{R}$ , непрерывно дифференцируемых преобразований пространства  $E$ . Следовательно, для любого  $u_0 \in C_0^\infty(E)$  задача Коши (4.4) имеет единственное классическое решение  $u(t, x) = u_0(g_{-t}(x))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . При этом для каждого  $t \in \mathbb{R}$  справедлива оценка  $\|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} = \exp(-\text{Tr}(\bar{\mathbf{A}}t)) \|u_0\|_{\mathcal{H}}$ . Поэтому отображение  $C_0^\infty \ni u_0 \rightarrow u(t, \cdot) \in C_0^\infty$  допускает единственное продолжение по непрерывности на пространство  $\mathcal{H}$ . Следовательно, оператор  $\mathbf{H}$  является генератором сильно непрерывной группы  $\exp(\mathbf{H}t)u(x) = u(g_{-t}(x))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathcal{H}$ .

## 5. ФЕЙНМАНОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПОЛУГРУПП

В этом разделе устанавливается сходимость последовательности итераций семейств случайных блужданий под действием независимых случайных аффинных преобразований к полугруппе, разрешающей уравнение Фоккера–Планка.

**Лемма 6.** Пусть отображение  $U: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow B(E)$  имеет вид  $\exp(\sqrt{t}A(\omega))$ ,  $t \geq 0$ , где  $A: \Omega \rightarrow B(E)$  – случайный линейный оператор, принимающий значения в шаре радиуса  $\rho \in (0, +\infty)$  пространства  $B(E)$ , для которого выполняются следующие условия:

- 1)  $M(A) = \int_{\Omega} A(\omega) d\mu(\omega) = 0$ ,
- 2)  $M(A^*A) = \int_{\Omega} (A(\omega))^* A(\omega) d\mu(\omega)$ .

Тогда для любого  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  выполняется равенство

$$Mu(\exp(\sqrt{t}A)x) = u(x) + \frac{1}{2}t(\nabla u(x), M(A^2)x) + \frac{1}{2}t \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} M(A_{ki}A_{lj})x_i x_j + r(t), \tag{5.1}$$

где остаток  $r(t)$  допускает оценку  $\|r(t)\|_{\mathcal{B}C} \leq Ct^{3/2} \exp\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\rho\right)$ .

**Доказательство.** Действительно, поскольку  $\exp(\sqrt{t}A) = I + \sqrt{t}A + \frac{1}{2}tA^2 + \alpha(t)$ , где  $\|\alpha(t)\|_{B(E)} = o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , то согласно формуле Тейлора для функции  $u(\exp(\sqrt{t}A)x)$  имеем

$$\begin{aligned} Mu(\exp(\sqrt{t}A)x) &= M \left[ u \left( \left( I + \sqrt{t}A + \frac{1}{2}tA^2 + \alpha(t) \right) x \right) \right] = \\ &= M \left[ u(x) + \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \left( \sqrt{t}A_{jk}x_k + \frac{t}{2}A_{jl}A_{lk}x_k + o(t) \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} (tA_{ki}x_i A_{lj}x_j + o(t)) + o(t) \right]. \end{aligned}$$

Поэтому в силу предположений 1), 2) о случайном операторе  $A$  справедливо равенство

$$Mu(\exp(\sqrt{t}A)x) = u(x) + \frac{1}{2}t(\nabla u(x), M(A^2)x) + \frac{1}{2}t \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} M(A_{ki}A_{lj})x_i x_j + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Оценим  $L_2$ -норму остаточного члена в формуле Тейлора. Поскольку  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , то существует постоянная  $c > 0$ , ограничивающая сверху абсолютное значение функции  $u$  и всех ее частных производных не выше третьего порядка. Кроме того, носитель функции  $u$  заключен в шаре некоторого радиуса  $r_0$  пространства  $E$ , поэтому носитель функции  $u \circ \exp(\sqrt{t}A)$  заключен в шаре радиуса  $r_t = r_0 \exp(\sqrt{t}\rho)$ . Из представления остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа следует, что квадрат его  $L_2$ -нормы не превосходит произведения меры Лебега носителя на квадрат супремума по носителю дифференциала третьего порядка, откуда следует оценка остаточного члена из утверждения леммы.

По произвольному случайному линейному оператору  $A$  в пространстве  $E$ , удовлетворяющему условиям леммы 6, определим на пространстве  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  билинейную форму

$$\beta(u, v) = \int_E \beta_{ijkl} x_i x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_l} v dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где коэффициенты  $\beta$  определяются равенствами  $M(A_{ij}A_{kl}) = \int_{\Omega} A_{ij}(\omega)A_{kl}(\omega) d\mu(\omega) = \beta_{ijkl} \in \mathbb{R}$  при всех  $i, j, k, l \in \overline{1, d}$ .

**Лемма 7.** Пусть случайный оператор  $A$  в пространстве  $E$  удовлетворяет условиям леммы 6 и условиям

- 1)  $M(A^*A) \in B(E)$ ,
- 2) для любого единичного вектора  $e \in E$  выполняется условие  $\inf_{\|f\|=1} \int_{\Omega} |(A(\omega)e, f)|^2 \geq \gamma$  при некотором  $\gamma > 0$ .

Пусть случайный вектор  $h$  обладает нулевым математическим ожиданием и невырожденным ковариационным оператором  $D \in B(E)$ .

Тогда полуторалинейная форма  $\beta(u, v) = \int_E \int_\Omega h_k h_l \partial_{x_k} u \partial_{x_l} v + \int_E \int_\Omega \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_{lj} d\mu(\omega) x_i x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_l} v dx$  является положительно-определенной и мажорирует квадратичную форму  $u \rightarrow \|u\|_{W_2^1(E)}^2$ .

**Доказательство.** Для любого  $u \in C_0^\infty(E)$  выполняется

$$\beta(u, u) = (\nabla u, \mathbf{D}\nabla u) + \int_E \int_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega) dx \geq 0.$$

Заметим, что

$$\int_E \int_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega) dx \geq \int_E \|x\|^2 \int_\Omega (\mathbf{A}^* e_x, \nabla u)^2 d\mu(\omega) dx, \quad e_x = \frac{1}{\|x\|} x.$$

Поэтому в силу условия 2) выполнена оценка

$$\int_E \int_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega) dx \geq \gamma \int_E \|x\|^2 \|\nabla u(x)\|^2 dx.$$

Следовательно,

$$\beta(u, u) \geq (\mathbf{D}\nabla u, \nabla u) + \gamma \int_E \|x\|^2 \|\nabla u(x)\|^2 dx \geq d_1 \|\nabla u\|^2 \quad \forall u \in W_2^1(E),$$

где  $d_1$  – наименьшее собственное значение оператора  $\mathbf{D}$ . Таким образом, полуторалинейная форма  $\beta$  мажорирует квадратичную форму  $u \rightarrow \|\nabla u\|_{L_2(E)}^2$ ,  $u \in W_2^1(E)$ . Лемма 7 доказана.

Определим линейный оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  в пространстве  $L_2(E)$ , ассоциированный с замыканием положительно определенной полуторалинейной формы  $\beta(u, v) = \int_E (\beta_{ijkl} x_i x_j + \mathbf{D}_{k,l}) \partial_{x_k} u \partial_{x_l} v dx$  на плотном в  $\mathcal{H} = L_2(E)$  подпространстве  $C_0^\infty(E)$ . Поскольку полуторалинейная форма  $\beta$  является положительной, то соответствующий ей оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  является положительным самосопряженным, а оператор  $-\hat{\mathbf{L}}$  является генератором сжимающей полугруппы самосопряженных сжатий в пространстве  $L_2(E)$ .

**Лемма 8.** Пусть выполнены условия леммы 7. Тогда квадратичная форма оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  мажорирует квадратичную форму оператора  $\hat{\mathbf{K}}$ , задаваемого на пространстве  $C_0^\infty(E)$  равенством  $\hat{\mathbf{K}}u = (x, \mathbf{B}\nabla u)_{\mathbb{R}^d}$ , где  $\mathbf{B} = \mathbf{M}(\mathbf{A}^2)$ .

Действительно, для любого  $v \in W_{2,0}^1(E)$  и для любого  $p > 1$  справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |(\hat{\mathbf{K}}v, v)| &= |(x, \mathbf{B}\nabla v)_{\mathbb{R}^d}, v| \leq \|\mathbf{B}\|_{B(E)} \|(x, \nabla v)\|_{L_2(E)} \|v\|_{L_2(E)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{M}(\mathbf{A}^2)\|_{B(E)} \left( \frac{1}{\gamma} \beta(v, v) + (v, v) \right) \leq C \|\mathbf{M}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})\|_{B(E)} ((1/p)(\mathbf{L}v, v) + p(v, v)). \end{aligned}$$

**Лемма 9.** Пусть выполнены условия лемм 6 и 7. Тогда задача Коши

$$\frac{d}{dt} u(t) = \hat{\mathbf{H}}u(t), \quad t > 0, \tag{5.2}$$

$$u(+0) = u_0, \tag{5.3}$$

где оператор  $\hat{\mathbf{H}}$  задан на области определения оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  дифференциальным выражением

$$\hat{\mathbf{H}}u = \mathbf{M}(\mathbf{A}_{jl} \mathbf{A}_{lk}) x_k \partial_j u + \mathbf{M}(\mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_{lj} + h_k h_l) x_i x_j \partial_i \partial_k u,$$

имеет единственное решение  $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$  при произвольном  $u_0 \in \mathcal{H}$ .

**Доказательство.** Самосопряженный неположительный оператор  $-\hat{\mathbf{L}}$  является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы в пространстве  $\mathcal{H}$ . Поскольку  $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{K}}$  и квадратичная форма оператора  $\hat{\mathbf{L}} + \mathbf{I}$  мажорирует квадратичную форму оператора  $\hat{\mathbf{K}}$ , то применима теорема о возмущении генератора полугруппы (см. [22]). Следовательно, оператор  $\hat{\mathbf{H}}$  является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве  $\mathcal{H}$ , откуда и следует утверждение леммы.

**Теорема 3.** Пусть отображение  $U: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow B(E)$  имеет вид  $\exp(\sqrt{t}A(\omega))$ ,  $t \geq 0$ , где  $A: \Omega \rightarrow B(E)$  – случайный линейный оператор, для которого выполняются условия лемм 6 и 7. Пусть  $\mu(\{\omega: |\det(A)| = 1\}) = 1$ ;  $h$  – случайный вектор пространства  $E$  с нулевым математическим ожиданием и невырожденным ковариационным оператором  $D$ ; величины  $h$  и  $A$  являются независимыми. Пусть  $\Phi(t) \equiv F(\sqrt{t}) = S_{\sqrt{th}} e^{\sqrt{t}A}$ ,  $t \geq 0$  – однопараметрическое семейство случайных аффинных преобразований.

Пусть  $\{\Phi_n\}$  – последовательность однопараметрических семейств независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований, распределение каждого из которых совпадает с распределением  $\Phi$ .

Тогда, если  $u \in L_2(E)$ , то последовательность функций  $\{v_n\}: \mathbb{N} \rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ , определяемых равенствами  $v_n(t, x) = Mu(\Phi_n(t/n) \dots \Phi_1(t/n)x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяет условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|v_n(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

при любых  $T > 0$ . Здесь функция  $v$  является решением начально-краевой задачи (5.2), (5.3).

**Доказательство.** Из лемм 3 и 6 следует, что оператор-функция  $\bar{\Phi}(t)$ ,  $t \geq 0$ , действующая в пространстве  $L_2(E)$  по правилу

$$\bar{\Phi}(t)u(x) = M(u(\Phi(t)x)), \quad x \in E,$$

при каждом  $t \geq 0$ , удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова. В частности,

$$\|\bar{\Phi}(t)\|_{B(\mathcal{H})} = \|\bar{F}(\sqrt{t})\|_{B(\mathcal{H})} \leq \left( M(|\det(A^{-1})|)^{1/2} \right)^{\sqrt{t}} \quad \forall t \geq 0$$

согласно (4.2), потому  $\|\bar{\Phi}(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$  в силу условий теоремы 3.

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|(\bar{\Phi}(t/n))^n u - \exp(t\hat{H})u\|_{L_2(E)} = 0 \tag{5.4}$$

при любых  $T > 0$  и  $u \in L_2(E)$ . Остается заметить, что в силу независимости случайных преобразований

$$\Phi_1(t/n), \dots, \Phi_n(t/n)$$

при всех  $t \geq 0$  и всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$M(u(\Phi_n(t/n) \dots \Phi_1(t/n)x)) = (\bar{\Phi}(t/n))^n u(x), \quad x \in E,$$

что в соответствии с (5.4) и доказывает утверждение теоремы 3.

### 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

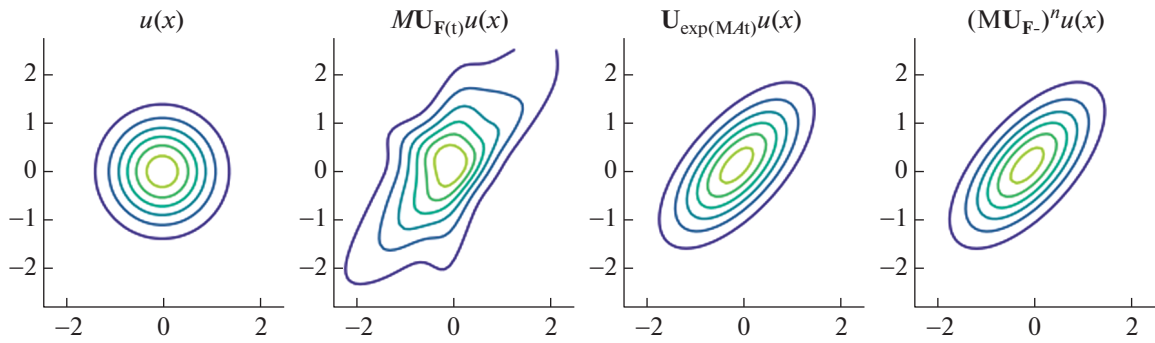
В качестве элемента пространства  $\mathcal{H}$  возьмем функцию

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

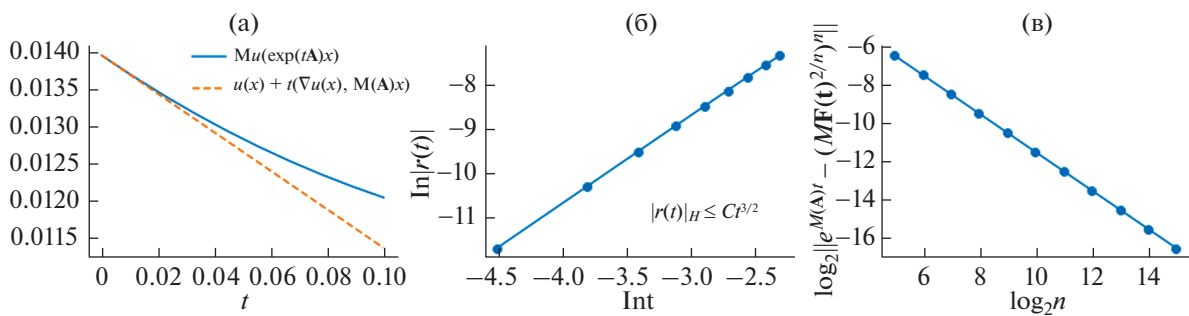
Сгенерируем набор  $m$  равномерно распределенных матриц  $A_{d \times d}$ , так что  $\bar{A} = MA = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m A_k$ .

В примерах, представленных в статье,  $d = 2$ ,  $m = 6$ .

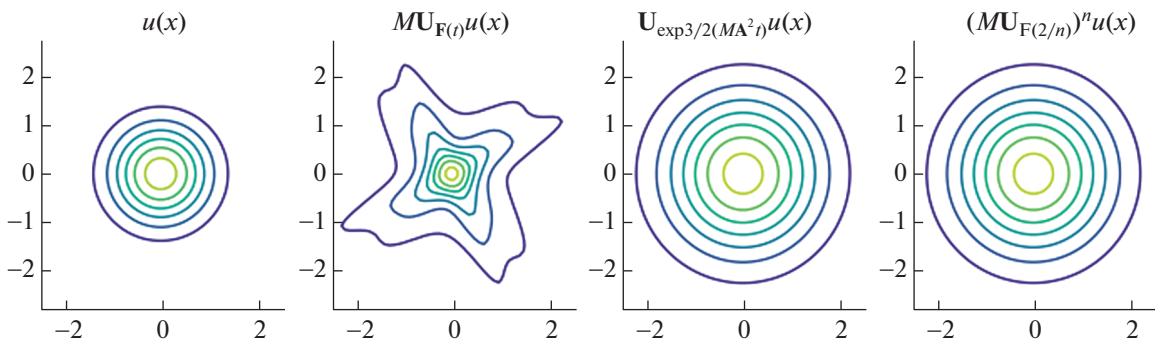
Случайное линейное преобразование  $A$  моделируется с помощью дискретного равномерного распределения на конечном множестве элементарных событий  $\Omega$ , которое представляет собой набор линейных преобразований  $A_k$ .



Фиг. 1. Линии уровня функций  $u(x)$ ,  $MU_{F(t)}u(x)$ ,  $U_{\exp(MAt)}u(x)$  и  $(MU_{F_{1/n}})^n u(x)$ .



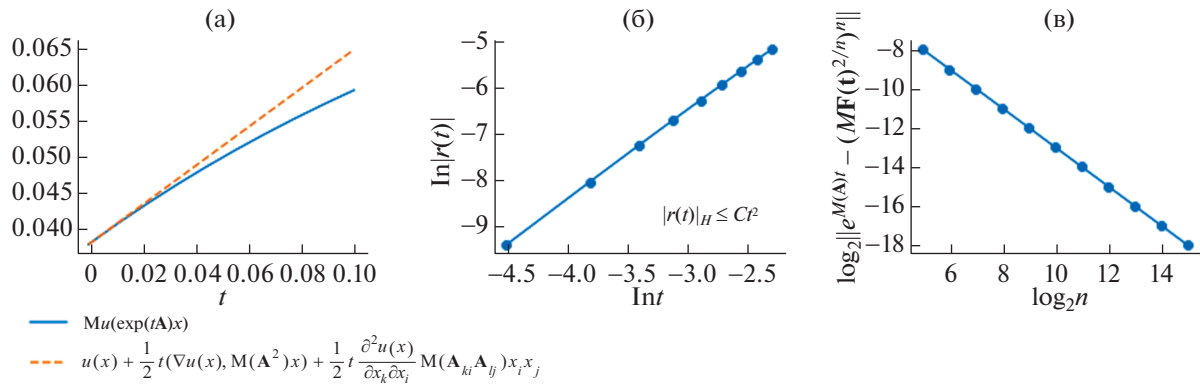
Фиг. 2. (а) – Графики  $Mu(\exp(tA)x)$  и  $u(x) + t(\nabla u(x), M(A)x)$ , (б) – зависимость остаточного члена  $r$  от  $t$ , (в) – зависимость нормы разности операторов  $e^{M(A)t}$  и  $(MF(t)/n)^n$ .



Фиг. 3. Линии уровня функций  $u(x)$ ,  $MU_{F(t)}u(x)$ ,  $U_{\exp^{1/2}(MA^2 t)}u(x)$  и  $(MU_{F(2/n)})^n u(x)$ .

Строим операторы  $F_k(t) = e^{tA_k}$ , так что  $MF = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m F_k(t)$ . Зададим далее последовательность  $n$  итераций в соответствии с (3.3),  $n = 1, \dots, 2^{16}$ . Для фиксированного момента  $t$  вычисляем  $e^{M(A)t}$  и  $(MF(t/n))^n$  и строим зависимость нормы разности. Результаты расчетов приведены на фиг. 1 и 2.

Аналогично строится алгоритм численного моделирования для леммы 7. Отличие от леммы 5 состоит в том, что теперь рассматривается оператор  $F_k(t) = e^{\sqrt{t}A_k}$ , а последовательность  $A_k$  центрирована:  $MA = 0$ . Дополнительным элементом численного моделирования является вычисление оператора  $e^{M(1/2A^2)t}$ . Результаты представлены на фиг. 3 и 4.



**Фиг. 4.** (а) – Графики  $Mu(\exp(\sqrt{t}A)x)$  и  $u(x) + \frac{1}{2}t(\nabla u(x), M(A^2)x) + \frac{1}{2}t \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} M(A_{ki}A_{lj})x_i x_j$ , (б) – зависимость остаточного члена  $r$  от  $t$ , (в) – зависимость нормы разности операторов  $e^{\frac{M(A^2)t}{2}}$  и  $(MF(t/n))^n$ .

При этом также была проверена оценка остаточного члена в формулах (4.3) и (5.1) и для более высоких размерностей, вплоть до шести. Полученные численные оценки порядков малости остаточных членов  $r(t)$  для уравнений (4.3) и (5.1) согласуются с утверждениями лемм 5 и 6.

На фиг. 1 и 3 по осям везде отложены компоненты двумерного вектора  $x$  и изображены линии уровня соответствующих функций.

Из фиг. 1 следует, что в то время, как  $MU_{F(t)}u(x)$  имеет достаточно сложную структуру, в результате действия операторов  $U_{\exp(MA_t)}$  и  $(MU_F^{1/n})^n$  на функцию  $u(x)$  линии уровня  $x^2 = \text{const}$ , представляющие собой окружности, переходят в близкие эллипсы, что иллюстрирует возможность генерации групп усредненных случайных аффинных преобразований с помощью итераций Чернова. Аналогично фиг. 3 иллюстрирует возможность генерации операторов группы  $U_{\exp(\frac{1}{2}(MA^2)t)}$  для случайного линейного оператора  $A$  с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией с помощью итераций Чернова  $(MU_F(t/n))^n$ , где  $F(t) = \exp(\sqrt{t}A)$ .

Все необходимые производные рассчитываются по аналитическим формулам, получаемым с помощью автоматического символьного дифференцирования.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе установлена сходимость последовательности итераций семейств независимых случайных аффинных преобразований к группе сдвигов вдоль векторного поля, определяемого усредненным аффинным преобразованием. Используя этот результат, мы показали, что последовательность итераций семейств случайных блужданий под действием независимых аффинных преобразований сходится к полугруппе, которая разрешает соответствующее уравнение Фоккера–Планка. Доказанные в работе теоремы 2 и 3 обосновывают применение численного алгоритма, вычисляющего итерации Фейнмана–Чернова композиций независимых случайных аффинных преобразований для решения соответствующих эволюционных задач. Приведенные численные примеры носят методологический характер. Они показывают, что разрабатываемый подход может быть полезным при решении как классических, так и квантовых кинетических уравнений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
2. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Тр. МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.



3. Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Докл. АН. 2021. Т. 498. № 1. С. 31–36.
4. Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Chernoff equivalence for shift operators, generating coherent states in quantum optics // Lobachevskii J. of Math. 2018. V. 39. № 6. P. 742–746.
5. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
6. Lakhno V.D. Translation-invariant bipolarons and the problem of high temperature superconductivity // Solid State Commun. 2012. V. 152. P. 621.
7. Lakhno V.D., Sultanov V.B. On the possibility of bipolaronic states in DNA // Mol. Biophys. 2011. V. 56. P. 210.
8. Каширина Н.И., Лахно В.Д. Континуальная модель одномерного биполярона Холстейна в ДНК // Матем. биол. и биоинф. 2014. Т. 9. С. 430.
9. Fröhlich H. On the Theory of superconductivity: The one dimensional case // Proceed. of the Royal Soc. A. 1954. V. 223. P. 296–305.
10. Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Generalized Coherent States Representation // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 11. P. 2608–2614.
11. Orlov Yu.N., Vedenyapin V.V. Special polynomials in problems of quantum optics // Modern Phys. Lett. B. 1995. V. 9. № 5. P. 291–298.
12. Berger M.A. Central limit theorem for products of random matrices // Trans. AMS. 1984. V. 285. № 2. P. 777–803.
13. Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Случайные процессы на группе ортогональных матриц и описывающие их эволюционные уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1741–1756.
14. Bonaccorci S., Cottini F., Mugnolo D. Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs // Appl. Math. Optim. 2021. <https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w>
15. Furstenberg H. Non-commuting random products // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 108. № 3. P. 377–428.
16. Тутубалин В.Н. Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. № 2. С. 319–326.
17. Тутубалин В.Н. О предельных теоремах для произведения случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10. № 1. С. 19–32.
18. Летчиков А.В. Условная предельная теорема для произведений случайных матриц // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 65–84.
19. Протасов В.Ю. Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 1. С. 105–132.
20. Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Shmidt E.V. Operator Approach to Weak Convergence of Measures and Limit Theorems for Random Operators // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 10. P. 2413–2426.
21. Замана К.Ю. Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций // Уфимский матем. ж. 2021. Т. 13. № 4. С. 23–41.
22. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1973.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 517.958

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА  
И ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА<sup>1)</sup>© 2022 г. Д. С. Широков<sup>1,2</sup><sup>1</sup> 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Россия<sup>2</sup> 127051 Москва, Большой Каретный пер., 19, Институт проблем передачи информации  
им. А.А. Харкевича РАН, Россия  
e-mail: dm.shirokov@gmail.comПоступила в редакцию 15.11.2021 г.  
Переработанный вариант 24.12.2021 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В работе применяется гиперболическое сингулярное разложение при исследовании уравнений Янга–Миллса с  $SU(2)$  калибровочной симметрией и уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом (или евклидовом) пространстве произвольной конечной размерности и сигнатуры. Предъявлен явный вид всех постоянных решений системы уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли  $SU(2)$ . Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений. Библ. 34.

**Ключевые слова:** уравнения Янга–Миллса, уравнения Янга–Миллса–Прока, гиперболическое сингулярное разложение, сингулярное разложение,  $SU(2)$ , постоянные решения, псевдоевклидово пространство.

**DOI:** 10.31857/S004446692206014X

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена новая формулировка гиперболического сингулярного разложения для произвольной вещественной (или комплексной) матрицы с использованием матриц из псевдоортогональной группы  $O(p, q)$  (или псевдоунитарной группы  $U(p, q)$  соответственно). Предыдущие версии гиперболического сингулярного разложения работали в общем случае только с использованием гиперобменных матриц (hyperexchange matrices), которые не образуют группу, см. работы [2]–[4] и обсуждение этих работ в [1]. В настоящей работе мы применяем гиперболическое сингулярное разложение в новой формулировке при исследовании уравнений Янга–Миллса с  $SU(2)$  калибровочной симметрией и уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  произвольной размерности и сигнатуры.

Уравнения Янга–Миллса были предложены Ч. Янгом и Р. Миллсом в 1954 г. [5] как математическое обобщение уравнений Максвелла на неабелевы случаи. Впоследствии (1960–1970 гг.) была построена теория, согласно которой данные уравнения описывают электрослабые взаимодействия в случае группы Ли  $SU(2) \times U(1)$  и сильные взаимодействия в случае группы Ли  $SU(3)$ . Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные взаимодействия, являются частным случаем уравнений Янга–Миллса для абелевой группы Ли  $U(1)$ . В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением случая группы Ли  $SU(2)$ . Отметим классические работы по некоторым известным классам частных решений уравнений Янга–Миллса [6]–[11] и обзор [12].

В одной из предыдущих работ автора [13] была решена задача о предъявлении явного вида всех постоянных решений уравнений Янга–Миллса с  $SU(2)$  калибровочной симметрией с произвольным током в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  произвольной конечной размерности с помощью обычного сингулярного разложения.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-00043), <https://rscf.ru/project/21-71-00043/>.

В настоящей работе решается задача о предъявлении явного вида всех постоянных решений уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли  $SU(2)$  в произвольном псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  (или евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) с помощью гиперболического сингулярного разложения, являющегося обобщением обычного сингулярного разложения. Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений, при этом в качестве нулевого приближения берутся постоянные решения.

### 1. УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Пусть  $p, q$  – целые неотрицательные числа и  $n = p + q$  – натуральное число. Рассмотрим псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^{p,q}$  (или, как частный случай, евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  при  $n = p$  и  $q = 0$ ) с декартовыми координатами  $x^\mu, \mu = 1, \dots, n$ . Метрика пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$  задается диагональной матрицей

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q), \quad p + q = n. \quad (1.1)$$

Частные производные обозначаем через  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ . Предполагаем, что все рассматриваемые далее функции от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$  являются достаточно гладкими.

Пусть  $G$  есть полупростая группа Ли, а  $\mathfrak{g}$  есть вещественная алгебра Ли группы Ли  $G$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  является вещественным векторным пространством размерности  $N$  с базисом  $\tau^1, \dots, \tau^N$ . Умножение элементов  $\mathfrak{g}$  задается скобкой Ли  $[A, B] = -[B, A]$ , которая удовлетворяет тождеству Якоби. Умножение базисных элементов задается при помощи вещественных структурных констант  $c_l^{rs} = -c_l^{sr}$  ( $r, s, l = 1, \dots, N$ ) алгебры Ли  $\mathfrak{g}$

$$[\tau^r, \tau^s] = c_l^{rs} \tau^l. \quad (1.2)$$

Предполагается, что элементы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и группы Ли  $G$  представляются квадратными матрицами соответствующего размера. Скобка Ли задается коммутатором  $[A, B] = AB - BA$ , где в правой части мы используем матричное умножение.

Через  $\mathfrak{gT}_b^a$  обозначим множество тензорных полей (псевдо)евклидова пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$  типа  $(a, b)$  и ранга  $a + b$  со значениями в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ .

Рассмотрим следующие уравнения в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$ :

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu, \quad (1.4)$$

где  $A_\mu \in \mathfrak{gT}_1^1$ ,  $J^\nu \in \mathfrak{gT}^1$ ,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{gT}_2^2$ ,  $\rho$  есть вещественная константа (константа связи). Эти уравнения называются *уравнениями Янга–Миллса* (системой уравнений Янга–Миллса). Обычно предполагается, что  $A_\mu, F_{\mu\nu}$  – неизвестные, а  $J^\nu$  – известный заданный вектор со значениями в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . Говорят, что уравнения (1.3), (1.4) определяют *поле Янга–Миллса*  $(A_\mu, F_{\mu\nu})$ , где  $A_\mu$  есть *потенциал* и  $F_{\mu\nu}$  есть *напряженность* поля Янга–Миллса. Вектор  $J^\nu$  называется *неабелевым током* (в случае абелевой группы  $G$  вектор  $J^\nu$  называется *током*).

Заметим, что уравнения Янга–Миллса (1.4) могут быть получены стандартным способом из вариационного принципа. Рассмотрим действие  $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx$  для лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{tr}(F^2), \quad F^2 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

где  $F_{\mu\nu}$  являются компонентами 2-формы кривизны по отношению к связности  $A_\mu$ , т.е. связаны по определению уравнениями (1.3). При варьировании действия получаем уравнения (1.4) с нулевым током ( $J^\nu = 0$ ). Ток  $J^\nu$  в уравнениях (1.4) появляется при добавлении в лагранжиан (1.5)

дополнительных слагаемых, связанных с другими (например, скалярными или спинорными) полями.

Компоненты кососимметрического тензорного поля  $F_{\mu\nu}$ , определенные уравнением (1.3), можно подставить во второе уравнение (1.4) и получить одно уравнение второго порядка для ко-векторного потенциала поля Янга–Миллса

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]) - \rho[A_\mu, \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]] = J^\nu. \quad (1.6)$$

Посмотрим на уравнения (1.3), (1.4) с другой точки зрения. Пусть  $A_\mu \in \mathfrak{g}T_1$  есть произвольный ко-вектор со значениями в  $\mathfrak{g}$ , который гладко зависит от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Через  $F_{\mu\nu}$  обозначим выражение

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] \quad (1.7)$$

и через  $J^\nu$  обозначим выражение

$$J^\nu := \partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}].$$

Можем проверить, что

$$\partial_\nu J^\nu - \rho[A_\nu, J^\nu] = 0. \quad (1.8)$$

Это тождество называется *неабелевым законом сохранения* (в случае абелевой группы Ли  $G$  имеем обычный закон сохранения  $\partial_\nu J^\nu = 0$ , т.е. дивергенция вектора  $J^\nu$  равна нулю). Следовательно, неабелев закон сохранения (1.8) является следствием уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4).

Рассмотрим тензорные поля  $A_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$ ,  $J^\nu$ , которые удовлетворяют уравнениям Янга–Миллса (1.3), (1.4). Возьмем скалярное поле со значениями в группе Ли  $S = S(x) \in G$  и рассмотрим преобразованные тензорные поля

$$\begin{aligned} A'_\mu &= S^{-1} A_\mu S - S^{-1} \partial_\mu S, \\ F'_{\mu\nu} &= S^{-1} F_{\mu\nu} S, \\ J'^\nu &= S^{-1} J^\nu S. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Эти тензорные поля удовлетворяют тем же самым уравнениям Янга–Миллса

$$\begin{aligned} \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - \rho[A'_\mu, A'_\nu] &= F'_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu F'^{\mu\nu} - \rho[A'_\mu, F'^{\mu\nu}] &= J'^\nu, \end{aligned}$$

т.е. уравнения (1.3), (1.4) инвариантны по отношению к преобразованиям (1.9). Преобразование (1.9) называется *калибровочным преобразованием* (или *калибровочной симметрией*), а группа Ли  $G$  называется *калибровочной группой* уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4).

## 2. СЛУЧАЙ ГРУППЫ ЛИ SU(2)

Далее в настоящей работе будем рассматривать частный случай группы Ли SU(2), который важен при описании слабых взаимодействий. В предлагаемой далее теореме 1 о симметрии SU(2)-уравнений Янга–Миллса существенным образом используется двулистное накрытие ортогональной группы SO(3) спинорной группой Spin(3)  $\cong$  SU(2). Таким образом, предлагаемые в данной работе методы напрямую не работают для другого, важного с физической точки зрения, случая группы Ли SU(3).

Будем рассматривать специальную унитарную группу

$$G = \text{SU}(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = I, \det A = 1\}, \quad \dim G = 3, \quad (2.1)$$

и соответствующую алгебру Ли антиэрмитовых матриц с нулевым следом

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A, \text{tr} A = 0\}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее единичную матрицу соответствующего размера обозначаем через  $I$ . Как известно, матрицы Паули  $\sigma^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

удовлетворяют соотношениям

$$(\sigma^a)^\dagger = \sigma^a, \quad \text{tr} \sigma^a = 0, \quad \{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}I, \quad [\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_c^{ab}\sigma^c,$$

где  $\epsilon_c^{ab} = \epsilon^{abc}$  есть полностью антисимметричный единичный тензор (символ Леви-Чивиты),  $\epsilon^{123} = 1$ . В качестве базиса алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  можем взять

$$\tau^1 = \frac{1}{2i}\sigma^1, \quad \tau^2 = \frac{1}{2i}\sigma^2, \quad \tau^3 = \frac{1}{2i}\sigma^3. \quad (2.4)$$

Для элементов базиса имеем

$$(\tau^a)^\dagger = -\tau^a, \quad \text{tr} \tau^a = 0, \quad [\tau^a, \tau^b] = \epsilon_c^{ab}\tau^c, \quad (2.5)$$

т.е. структурными константами алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  в данном случае выступают символы Леви-Чивиты.

Запишем разложение потенциала и тока Янга–Миллса по базису алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$A^\mu = A_a^\mu \tau^a, \quad J^\mu = J_a^\mu \tau^a, \quad A_a^\mu, J_a^\mu \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Здесь и далее латинские индексы пробегает значения  $a = 1, 2, 3$  (так как размерность группы Ли  $SU(2)$  равна 3), греческие индексы пробегает значения  $\mu = 1, 2, \dots, n$  (так как размерность псевдоевклидова пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$  равна  $p + q = n$ ).

Левая часть уравнений Янга–Миллса (1.6) при подстановке (2.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \tau^a \partial_\mu (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho \partial_\mu (A_a^\mu A_b^\nu) [\tau^a, \tau^b] - \rho \eta_{\mu\alpha} A_a^\alpha (\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu) [\tau^a, \tau^b] + \\ & \quad + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu [\tau^c, [\tau^a, \tau^b]] = \\ & = \tau^a \partial_\mu (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho \epsilon_c^{ab} \tau^c (\partial_\mu (A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha} A_a^\alpha (\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ & \quad + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab} [\tau^c, \tau^d] = \\ & = \tau^a \partial_\mu (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho \epsilon_c^{ab} \tau^c (\partial_\mu (A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha} A_a^\alpha (\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ & \quad + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} \tau^k. \end{aligned}$$

В итоге уравнения (1.6) принимают вид

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\partial^\mu A_k^\nu - \partial^\nu A_k^\mu) - \rho \epsilon_k^{ab} (\partial_\mu (A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha} A_a^\alpha (\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ & \quad + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} = J_k^\nu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система (2.7) является системой  $3n$  уравнений ( $k = 1, 2, 3, \nu = 1, 2, \dots, n$ ) для  $3n$  функций  $A_k^\nu$  и  $3n$  функций  $J_k^\nu$ . Будет удобно воспринимать систему уравнений (2.7) как систему уравнений для элементов двух матриц  $A = (A_k^\mu)$  и  $J = (J_k^\nu)$  размера  $n \times 3$ . Далее мы будем часто считать, что матрица тока  $J$  задана либо зависит от неизвестной матрицы потенциала  $A$  некоторым заданным образом (например, в случае уравнений Янга–Миллса–Прока имеем  $J = -m^2 A$ ).

**Теорема 1.** Система уравнений (2.7) инвариантна относительно преобразований вида

$$A \rightarrow \hat{A} = QA, \quad J \rightarrow \hat{J} = QJ, \quad Q \in O(p, q), \quad (2.8)$$

и преобразований вида

$$A \rightarrow A' = AP + \Omega, \quad J \rightarrow J' = JP, \quad P = \begin{pmatrix} p_a^a \\ p_b^b \end{pmatrix} \in SO(3), \quad (2.9)$$

где

$$\Omega = \Omega(P) = (\omega_d^\mu), \quad \omega_d^\mu = \frac{1}{8} \delta_{ac} \epsilon_d^{bk} (p_k^c \partial^\mu p_b^a - p_k^a \partial^\mu p_b^c).$$

**Доказательство.** Инвариантность первого типа имеет место в силу инвариантности уравнений Янга–Миллса относительно псевдоортогональных замен координат пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$ . А именно, рассмотрим преобразование координат  $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = q_\nu^\mu x^\nu$ , где  $Q = (q_\nu^\mu) \in O(p, q)$ . Величины  $A^\mu$ ,  $J^\mu$ , входящие в уравнения (1.6), являются тензорными, т.е. преобразуются по правилу

$$A^\mu \rightarrow \hat{A}^\mu = q_\nu^\mu A^\nu = q_\nu^\mu A_a^\nu \tau^a = \hat{A}_a^\mu \tau^a, \quad A_a^\nu \rightarrow \hat{A}_a^\nu = q_\mu^\nu A_a^\mu,$$

$$J^\mu \rightarrow \hat{J}^\mu = q_\nu^\mu J^\nu = q_\nu^\mu J_a^\nu \tau^a = \hat{J}_a^\mu \tau^a, \quad J_a^\nu \rightarrow \hat{J}_a^\nu = q_\mu^\nu J_a^\mu.$$

Получаем инвариантность уравнений (2.7) при преобразовании (2.8).

Система уравнений Янга–Миллса инвариантна относительно калибровочных преобразований (1.9). Интересующие нас величины преобразуются по правилам

$$A_\mu^i = S^{-1} A_\mu^i S - S^{-1} \partial_\mu S, \quad J^\nu = S^{-1} J^\nu S.$$

По теореме о двулистном накрытии группы  $SO(3)$  спинорной группой  $Spin(3) \cong SU(2)$  имеем

$$S^{-1} \tau^a S = p_b^a \tau^b, \quad S \in SU(2), \quad P = (p_b^a) \in SO(3). \tag{2.10}$$

Для каждой матрицы  $P \in SO(3)$  существуют ровно две матрицы  $\pm S \in SU(2)$ , связанные формулой (2.10) (см., например, [14]–[16]).

Для преобразованного тока получаем

$$J^\mu = S^{-1} J_a^\mu \tau^a S = J_a^\mu S^{-1} \tau^a S = J_a^\mu p_b^a \tau^b = J_b^\mu \tau^b, \quad J_b^\mu = J_a^\mu p_b^a.$$

Для потенциала преобразование содержит также слагаемое со спиновой связностью  $C_\mu = -S^{-1} \partial_\mu S$ . Можем воспользоваться выражением для этой величины из работ [17], [18]

$$C_\mu = -S^{-1} \partial_\mu S = \frac{1}{4} (\partial_\mu h^a) h_a, \quad h^a := S^{-1} \tau^a S = p_b^a \tau^b$$

и получить

$$C_\mu = -S^{-1} \partial_\mu S = \frac{1}{4} \partial_\mu (p_b^a \tau^b) \delta_{ac} p_k^c \tau^k = \frac{1}{8} \delta_{ac} \epsilon_d^{bk} (p_k^c \partial_\mu p_b^a - p_k^a \partial_\mu p_b^c) \tau^d = \omega_{\mu d} \tau^d,$$

где мы воспользовались тем, что  $P^T P = I$ , т.е.

$$p_b^a p_k^c \delta_{ac} = \delta_{bk}, \quad (\partial_\mu p_b^a) p_k^c \delta_{ac} + p_b^a (\partial_\mu p_k^c) \delta_{ac} = 0.$$

Получаем инвариантность уравнений (2.7) по отношению к преобразованию (2.9). Теорема доказана.

Если совместить два преобразования из предыдущей теоремы, то получим инвариантность по отношению к преобразованию

$$A \rightarrow QAP + \Omega, \quad J \rightarrow QJP, \quad Q \in O(p, q), \quad P \in SO(3), \quad \Omega = \Omega(P). \tag{2.11}$$

Умножение матрицы слева на псевдоортогональную матрицу и справа на ортогональную матрицу позволяет преобразовать ее к каноническому виду с большим количеством нулей. Для этого воспользуемся новой формулировкой гиперболического сингулярного разложения, предложенной в [1].

### 3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Приведем формулировку гиперболического сингулярного разложения для произвольной вещественной матрицы, предложенную в [1]. Данная теорема обобщает результаты работ [2]–[4], где вместо псевдоортогональных матриц использовались гиперобменные матрицы, которые не образуют группу. Через  $O$  здесь и далее обозначаем нулевые блоки матриц соответствующих размеров.

**Теорема 2** (гиперболическое сингулярное разложение, см. [1]). *Зафиксируем матрицу (1.1). Для произвольной вещественной матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times N}(\mathbb{R})$  существуют матрицы  $R \in O(N)$  и  $L \in O(p, q)$  такие, что*

$$L^T A R = \Sigma^A, \quad \Sigma^A = \left. \begin{array}{cccc} X_x & O & O & O \\ O & O & I_d & O \\ O & O & O & O \\ \hline O & Y_y & O & O \\ O & O & I_d & O \\ O & O & O & O \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \in \text{Mat}_{n \times N}(\mathbb{R}), \quad (3.1)$$

где первый блок матрицы  $\Sigma^A$  имеет  $p$  строк, а второй блок имеет  $q$  строк,  $X_x$  и  $Y_y$  есть диагональные матрицы соответствующих размеров  $x$  и  $y$  со всеми положительными, однозначно определенными диагональными элементами (с точностью до перестановки),  $I_d$  есть единичная матрица размера  $d$ .

Более того, выбирая  $R$ , можно менять местами столбцы матрицы  $\Sigma^A$ . Выбирая  $L$ , можно менять строки в каждом из блоков, но не между блоками. Таким образом, мы можем всегда разместить диагональные элементы матриц  $X_x$  и  $Y_y$  в порядке убывания.

Имеем

$$d = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^T \eta A), \quad x + y = \text{rank}(A^T \eta A),$$

$x$  есть число положительных собственных значений матрицы  $A^T \eta A$ ,  $y$  есть число отрицательных собственных значений матрицы  $A^T \eta A$ .

Будем называть матрицу  $\Sigma^A$  (3.1) каноническим видом матрицы  $A$ , а элементы диагональных блоков  $X$  и  $Y$  гиперболическими сингулярными значениями. Далее считаем, что элементы каждого из этих блоков упорядочены в порядке убывания.

В [1] представлен также алгоритм вычисления матриц  $\Sigma^A$ ,  $L$  и  $R$ . Гиперболические сингулярные значения есть квадратные корни из модулей собственных значений матрицы  $A^T \eta A$ . Столбцы матрицы  $R$  есть собственные векторы матрицы  $A^T \eta A$ . Столбцы матрицы  $L$  есть собственные векторы матрицы  $\eta A A^T$  (в случае  $d = 0$ ) и собственные и присоединенные векторы матрицы  $\eta A A^T$  (в случае  $d \neq 0$ ). Матрицы  $L$  и  $R$  определяются неоднозначно.

Отметим, что стандартное сингулярное разложение является частным случаем гиперболического сингулярного разложения. В случае  $n = p$  и  $q = 0$  параметр  $d$  всегда равен нулю  $d = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^T A) = 0$ . В данном частном случае получаем классическую теорему о сингулярном разложении. Сингулярное разложение было впервые открыто независимо Э. Бельтрами [19] в 1873 г. и К. Жорданом [20], [21] в 1874 г. Далее приведем современную формулировку этой теоремы, которую можно найти, например, в [22], [23].

**Теорема 3** (сингулярное разложение). *Для произвольной вещественной матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times N}(\mathbb{R})$  существуют такие ортогональные матрицы  $Q \in O(n)$  и  $P \in O(N)$ , что*

$$L^T A R = D,$$

где

$$D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_s) \in \text{Mat}_{n \times N}(\mathbb{R}), \quad s = \min(n, N), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s \geq 0.$$

Числа  $\mu_1, \dots, \mu_s$  называются сингулярными значениями, они являются квадратными корнями из собственных значений матрицы  $A^T A$ . Столбцы матрицы  $R$  называются правыми сингулярными векторами и являются собственными векторами для матрицы  $A^T A$ , а столбцы матрицы  $L$  называются левыми сингулярными векторами и являются собственными векторами для матрицы  $A A^T$ .

В общем случае, рассматривая систему уравнений Янга–Миллса (2.7) и выбирая нужным образом матрицы  $Q \in O(p, q)$  и  $P \in SO(3)$  в преобразовании (2.11), можно локально (в окрестности

каждой точки  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ) преобразовать матрицу тока  $J$  к каноническому виду из теоремы 2 (в случае евклидова пространства – из теоремы 3). В теоремах 2 и 3 берем в качестве матриц  $R$  и  $L$  матрицы  $P \in SO(3)$  и  $Q^T \in O(p, q)$  из преобразования (2.11) соответственно. Заметим, что мы всегда можем выбрать матрицу  $R$  из специальной ортогональной группы  $SO(3)$ . Если матрица  $R$  из теорем 2 и 3 имеет определитель, равный  $-1$ , то можно поменять знак у всех столбцов матриц  $L$  и  $R$  одновременно, и определитель станет равным  $+1$ . Матрица  $A$  при этом будет не обязательно канонического вида, так как преобразование (2.11) содержит матрицу  $\Omega$ , зависящую от матрицы  $P$ .

Обсудим также частный случай системы уравнений Янга–Миллса (1.6) для постоянных (не зависящих от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ) решений. В данном случае система (1.6) приобретает вид

$$[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] = \frac{1}{\rho^2} J^\nu. \quad (3.2)$$

Уравнения (2.7) приобретают вид

$$\rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} = J_k^\nu. \quad (3.3)$$

Рассмотрим (глобальные) преобразования, аналогичные калибровочным преобразованиям (1.9), но с матрицей  $S \in SU(2)$ , не зависящей от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ :

$$A'_\mu = S^{-1} A_\mu S, \quad F'_{\mu\nu} = S^{-1} F_{\mu\nu} S, \quad J'^\nu = S^{-1} J^\nu S. \quad (3.4)$$

В преобразованиях (2.9) и (2.11) получаем  $\Omega = 0$ , они становятся глобальными симметриями. Пользуясь глобальной симметрией

$$A \rightarrow QAP, \quad J \rightarrow QJP, \quad Q \in O(p, q), \quad P \in SO(3), \quad (3.5)$$

можем привести матрицы  $A$  и  $J$  к каноническому виду одновременно. Это доказывается в работе [13], там же дано общее решение системы уравнений Янга–Миллса для постоянных решений (3.3) в случае евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  и произвольного тока  $J$  с помощью обычного сингулярного разложения. В случае псевдоевклидова пространства аналогичную задачу можно решить, используя гиперболическое сингулярное разложение, это будет сделано в одной из следующих работ.

Отметим, что случай нулевого тока для постоянных решений уравнений Янга–Миллса рассмотрен в работах [24], [25]. Решения в виде плоских волн уравнений  $SU(2)$  Янга–Миллса в произвольном псевдоевклидовом пространстве представлены в работе [26], данные решения сводятся к обсуждаемой задаче о постоянных решениях. Некоторые частные классы решений уравнений Янга–Миллса в формализме алгебр Клиффорда и алгебр Атьи–Келера, связанные с постоянными решениями, представлены в [17], [27], [28].

В данной работе найдем все постоянные решения системы уравнений  $SU(2)$  Янга–Миллса–Прока, которую можно интерпретировать как систему уравнений Янга–Миллса с током, зависящим от потенциала.

#### 4. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ $SU(2)$ ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА

Уравнения Прока были предложены в работе [29] в 1936 г. как обобщение уравнений Максвелла. Данные уравнения отличаются от уравнений Максвелла наличием слагаемого с квадратом массы. Предполагается, что уравнения Прока описывают массивные частицы со спином 1. Уравнения Янга–Миллса–Прока являются естественным аналогом уравнений Прока в неабелевом случае, т.е. являются обобщением уравнений Янга–Миллса и уравнений Прока одновременно, и рассматриваются, например, в работах [30], [31].

Система уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  (или, в частном случае, евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) имеет вид

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}] + m^2 A^\nu = 0. \quad (4.2)$$



Данные уравнения отличаются от уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4) наличием слагаемого  $m^2 A^v$  с массой  $m \in \mathbb{R}$ . Имеем  $A_\mu \in \mathfrak{g}T_1$ ,  $J^v \in \mathfrak{g}T^1$ ,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{g}T_2$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ . Если масса равна нулю  $m = 0$ , то уравнения (4.1), (4.2) совпадают с уравнениями Янга–Миллса (1.3), (1.4) с нулевым током  $J^v = 0$ . Будем далее рассматривать случай  $m \neq 0$ .

Лагранжиан поля Янга–Миллса–Прока имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu a} + \frac{1}{2} m^2 A_a^v A_{va}, \tag{4.3}$$

где компоненты  $F^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu} \tau^a$  имеют вид (4.1). При варьировании действия  $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx$  получаем уравнения (4.2).

Для потенциала  $A^\mu$  из уравнений (4.1), (4.2) получаем условие обобщенной калибровки

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.4}$$

Заметим, что данное условие является аналогом неабелева закона сохранения (1.8) для уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4). Уравнения Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) можно интерпретировать как уравнения Янга–Миллса с током  $J^v = -m^2 A^v$ , зависящим от потенциала. Подставляя  $J^v = -m^2 A^v$  в (1.8), получаем (4.4).

Подставляя (4.1) в (4.2), получаем

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^v - \partial^v A^\mu - \rho[A^\mu, A^v]) - \rho [A_\mu, \partial^\mu A^v - \partial^v A^\mu - \rho[A^\mu, A^v]] + m^2 A^v = 0, \tag{4.5}$$

что, с учетом (4.4), можно переписать в виде

$$\partial_\mu \partial^\mu A^v - 2\rho[A^\mu, \partial_\mu A^v] + \rho[A_\mu, \partial^v A^\mu] + \rho^2[A_\mu, [A^\mu, A^v]] + m^2 A^v = 0. \tag{4.6}$$

Заметим, что система уравнений (4.1), (4.2) не является калибровочно инвариантной относительно преобразований (1.9) (так же как не являются калибровочно инвариантными уравнения Прока [29], являющиеся обобщением уравнений Максвелла). Однако система уравнений Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) инвариантна относительно глобального (не зависящего от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ) преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = S^{-1} A_\mu S, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = S^{-1} F_{\mu\nu} S, \quad S \in G. \tag{4.7}$$

При отыскании постоянных решений уравнений Янга–Миллса–Прока, получаем систему уравнений

$$[A_\mu, [A^\mu, A^v]] = -\lambda A^v, \quad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} > 0, \tag{4.8}$$

которую можно интерпретировать как систему уравнений Янга–Миллса для постоянных решений с током  $J^v = -\lambda A^v$ , зависящим от потенциала  $A^v$ .

Далее будем рассматривать случай группы Ли  $G = \text{SU}(2)$  и соответствующей (вещественной) алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ . Фиксируя базис алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  (2.4), перепишем систему уравнений (4.6) в виде

$$\partial_\mu \partial^\mu A_k^v - 2\rho \epsilon_k^{ab} A_a^\mu \partial_\mu A_b^v + \rho \epsilon_k^{ab} \eta_{\mu\alpha} A_a^\alpha \partial^v A_b^\mu + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^v \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} + m^2 A_k^v = 0. \tag{4.9}$$

Система уравнений для постоянных решений (4.8) примет вид

$$\eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^v \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} = -\lambda A_k^v, \quad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} > 0. \tag{4.10}$$

Система уравнений (4.10) инвариантна относительно преобразования

$$A \rightarrow QAP, \quad Q \in \text{O}(p, q), \quad P \in \text{SO}(3), \tag{4.11}$$

где ортогональная матрица  $P = (p_b^a) \in \text{SO}(3)$  связана с матрицей  $S \in \text{SU}(2)$  из глобального преобразования (4.7) как двулистное накрытие

$$S^{-1}\tau^a S = p_b^a \tau^b.$$

Матрица  $Q = (q_v^\mu) \in \text{O}(p, q)$  соответствует замене координат  $x^\mu \rightarrow q_v^\mu x^v$  пространства  $\mathbb{R}^{p, q}$  (аналогично тому, как это было для уравнений Янга–Милса в теореме 1).

После нахождения всех решений системы (4.10) можно вычислить компоненты напряженности

$$F^{\mu\nu} = -\rho[A^\mu, A^\nu] = -\rho[A_a^\mu \tau^a, A_b^\nu \tau^b] = -\rho A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_c^{ab} \tau^c = F_c^{\mu\nu} \tau^c \quad (4.12)$$

и инвариант  $F^2$ :

$$F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\rho^2}{2} \sum_{\mu < \nu} \eta^{\mu\nu} \eta^{\nu\nu} (F_c^{\mu\nu})^2 I_2. \quad (4.13)$$

Сформулируем и докажем теорему о всех решениях системы (4.10), т.е. всех постоянных решениях системы уравнений Янга–Милса–Прока в случае группы Ли  $\text{SU}(2)$ .

**Теорема 4.** Любое решение  $A = (A_a^\mu)$  системы уравнений Янга–Милса–Прока (4.10) в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p, q}$  (или евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) может быть приведено за счет выбора матриц  $Q \in \text{O}(p, q)$  и  $P \in \text{SO}(3)$  в симметрии (4.11) к решению одного из следующих трех видов:

1) в случаях  $\mathbb{R}^{p, q}$ ,  $p \geq 3$ ,  $q \geq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a := \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad (4.14)$$

т.е.

$$A_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} & \text{при } \mu = a = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

со следующими ненулевыми компонентами напряженности:

$$F^{12} = -F^{21} = -\frac{\rho\lambda}{2} \tau^3, \quad F^{23} = -F^{32} = -\frac{\rho\lambda}{2} \tau^1, \quad F^{31} = -F^{13} = -\frac{\rho\lambda}{2} \tau^2, \quad (4.15)$$

и инвариантом

$$F^2 = -\frac{3\rho^2\lambda^2}{8} I_2 \neq 0; \quad (4.16)$$

2) в случаях  $\mathbb{R}^{p, q}$ ,  $p \geq 2$ ,  $q \geq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \sqrt{\lambda}, \quad (4.17)$$

т.е.

$$A_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\lambda} & \text{при } \mu = a = 1, 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

со следующими ненулевыми компонентами напряженности:

$$F^{12} = -F^{21} = -\rho\lambda\tau^3, \tag{4.18}$$

и инвариантом

$$F^2 = -\frac{\rho^2\lambda^2}{2} I_2 \neq 0; \tag{4.19}$$

3) в случаях  $\mathbb{R}^{p,q}$ ,  $p \geq 0, q \geq 0$ :

$$A = 0, \quad F = 0, \quad F^2 = 0 \quad \forall \lambda > 0. \tag{4.20}$$

**Доказательство.** Пользуемся инвариантностью уравнений (4.10) относительно преобразований (4.11) и гиперболическим сингулярным разложением (теорема 2). Заметим, что мы всегда можем выбрать матрицу  $P$  из специальной ортогональной группы  $SO(3)$ . Если эта матрица имеет определитель, равный  $-1$ , то можем поменять знак у всех столбцов матриц  $P$  и  $Q$  одновременно, и определитель станет равным  $+1$ .

Пусть элементы матрицы  $A$  удовлетворяют системе уравнений (4.10) в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  (или евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ). Тогда существуют матрицы  $P \in SO(3)$  и  $Q \in O(p,q)$  (или  $Q \in O(n)$  соответственно) такие, что матрица  $QAP$  имеет канонический вид

$$\left( \begin{array}{cccc} X_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot$$

Система (4.10) приобретает новый вид с неизвестными – гиперболическими сингулярными значениями матрицы  $A$  (элементами диагональных блоков  $X$  и  $Y$ ). Далее требуется рассмотреть различные случаи канонического вида матрицы  $A$  в зависимости от значений параметров  $x, y$  и  $d$  и решить соответствующие системы уравнений. Элементы каждого из диагональных блоков  $X$  и  $Y$  считаем положительными и упорядоченными в порядке убывания. Всего имеется 20 различных случаев для значений параметров  $(d, x, y)$  матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} &(0, 3, 0), \quad (0, 0, 3), \quad (0, 2, 1), \quad (0, 1, 2), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 2), \quad (0, 1, 1), \\ &(0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 0, 0), \quad (1, 2, 0), \quad (1, 0, 2), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 1, 0), \\ &(1, 0, 1), \quad (1, 0, 0), \quad (2, 1, 0), \quad (2, 0, 1), \quad (2, 0, 0), \quad (3, 0, 0). \end{aligned}$$

В первом случае ( $d = 0, x = 3, y = 0$ ) в системе уравнений (4.10) остаются только диагональные ненулевые слагаемые, а значит,  $\mu = \alpha = a = c, v = b = k$  и произведение двух символов Леви-Чивиты дает  $-1$ . Получаем следующую систему уравнений, где положительные элементы диагонального блока  $X$ , упорядоченные в порядке убывания, обозначены через  $a_1, a_2$  и  $a_3$  соответственно:

$$a_1(a_2^2 + a_3^2) = \lambda a_1, \quad a_2(a_1^2 + a_3^2) = \lambda a_2, \quad a_3(a_1^2 + a_2^2) = \lambda a_3, \quad a_1, a_2, a_3, \lambda > 0. \tag{4.21}$$

Данная система имеет только решение

$$a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \tag{4.22}$$

Во втором, третьем и четвертом случаях получаем следующие системы соответственно, каждая из которых не имеет решений:

$$\begin{aligned} -a_1(a_2^2 + a_3^2) &= \lambda a_1, & -a_2(a_1^2 + a_3^2) &= \lambda a_2, & -a_3(a_1^2 + a_2^2) &= \lambda a_3, & a_1, a_2, a_3, \lambda > 0; \\ a_1(a_2^2 - a_3^2) &= \lambda a_1, & a_2(a_1^2 - a_3^2) &= \lambda a_2, & a_3(a_1^2 + a_2^2) &= \lambda a_3, & a_1, a_2, a_3, \lambda > 0; \\ -a_1(a_2^2 + a_3^2) &= \lambda a_1, & a_2(a_1^2 - a_3^2) &= \lambda a_2, & a_3(a_1^2 - a_2^2) &= \lambda a_3, & a_1, a_2, a_3, \lambda > 0. \end{aligned}$$

В пятом случае ( $d = 0, x = 2, y = 0$ ) получаем систему для двух диагональных элементов  $a_1, a_2$  блока  $X$ :

$$a_1 a_2^2 = \lambda a_1, \quad a_2 a_1^2 = \lambda a_2, \quad a_1, a_2, \lambda > 0, \quad (4.23)$$

с общим решением

$$a_1 = a_2 = \sqrt{\lambda}. \quad (4.24)$$

В шестом и седьмом случае имеем следующие системы соответственно, каждая из которых не имеет решений:

$$\begin{aligned} -a_1 a_2^2 &= \lambda a_1, & -a_2 a_1^2 &= \lambda a_2, & a_1, a_2, \lambda > 0; \\ a_1 a_2^2 &= \lambda a_1, & -a_2 a_1^2 &= \lambda a_2, & a_1, a_2, \lambda > 0. \end{aligned}$$

В восьмом и девятом случае имеем следующую систему на единственный ненулевой элемент  $a_1$  матрицы  $A$ , не имеющую решений:

$$0 = \lambda a_1, \quad a_1, \lambda > 0. \quad (4.25)$$

В десятом случае  $d = x = y = 0$  имеем тривиальное решение  $A = 0$  при любом  $\lambda > 0$ .

В случаях 11–13 получаем соответственно системы

$$\begin{aligned} a_1 a_2^2 &= \lambda a_1, & a_2 a_1^2 &= \lambda a_2, & a_1^2 + a_2^2 &= \lambda, & a_1, a_2, \lambda > 0; \\ -a_1 a_2^2 &= \lambda a_1, & -a_2 a_1^2 &= \lambda a_2, & -(a_1^2 + a_2^2) &= \lambda, & a_1, a_2, \lambda > 0; \\ -a_1 a_2^2 &= \lambda a_1, & a_2 a_1^2 &= \lambda a_2, & a_1^2 - a_2^2 &= \lambda, & a_1, a_2, \lambda > 0, \end{aligned}$$

не имеющие решений. В оставшихся случаях 14–20 также получаются противоречивые системы.

Для полученных трех типов решений вычисляем компоненты напряженности, используя (4.12), и инвариант  $F^2$ , используя (4.13). Теорема доказана.

## 5. НЕПОСТОЯННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ $SU(2)$ ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА В ВИДЕ РЯДА ИЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В теореме 4 мы предъявили явный вид всех постоянных решений уравнений  $SU(2)$  Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) в произвольном псевдоевклидовом (или евклидовом) пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Полученные постоянные решения уравнений позволяют построить непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока в виде ряда из теории возмущений. А именно, разложим решение уравнений (4.1), (4.2) по малому параметру  $\varepsilon \ll 1$ :

$$A^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A^{\mu k} = A^{\mu 0} + \varepsilon A^{\mu 1} + \varepsilon^2 A^{\mu 2} + \dots = (A_a^{\mu 0} + \varepsilon A_a^{\mu 1} + \varepsilon^2 A_a^{\mu 2} + \dots) \tau^a, \quad (5.1)$$

где в качестве нулевого приближения  $A^{\mu 0}$  берем постоянные (не зависящие от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ) решения уравнений Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2). Подставляя (5.1) в уравнения (4.6), получаем уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q^{\mu \nu k} = 0,$$

где  $Q^k$  – некоторые дифференциальные выражения, зависящие от  $A^0, \dots, A^k$  для каждого  $k = 0, 1, \dots$ . Так как  $A^0$  – постоянные решения уравнений (4.6), то легко проверить, что

$$Q^0 = [A_\mu^0, [A^0, A^0_\nu]] + \lambda A^0_\nu = 0.$$

Далее получим систему линейных уравнений в частных производных  $Q^1 = 0$  с постоянными коэффициентами (зависящими от  $A^0$ ) для отыскания  $A^1$ . Найдя решения этой системы, можно подставить их  $A^1$  и решения  $A^0$  в систему  $Q^2 = 0$ . Получим систему линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (зависящими от  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ) для отыскания  $A^2$ . Далее подставим решения в  $Q^3 = 0$  и так далее. Продолжая процесс, мы находим  $A^k$  для всех  $k = 0, 1, \dots$  и таким образом, находим непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока в виде ряда (5.1).

Такой алгоритм нахождения непостоянных решений сводит задачу о решении системы нелинейных (кубических) уравнений Янга–Миллса–Прока к решению систем линейных уравнений в частных производных.

Обсудим более подробно систему для первого приближения  $Q^1 = 0$ . Чтобы получить явный вид этой системы, положим  $A^\mu = A^0_\mu + \epsilon A^1_\mu(x) = (A^0_\mu + \epsilon A^1_\mu(x))\tau^a$ , причем  $\epsilon^2 = 0$ . Можем так подобрать матрицы  $P \in SO(3)$  и  $Q \in O(p, q)$  в симметрии (4.11), что матрица, составленная из  $A^0_\mu$ , является диагональной (см. теорему 4). Получаем систему из  $3n$  линейных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \partial^\mu u_k^\nu - 2\rho \epsilon_k^{ab} h_a^\mu \partial_\mu u_b^\nu + \rho \epsilon_k^{ab} \eta_{\mu\alpha} h_a^\alpha \partial^\nu u_b^\mu + \\ & + \rho^2 \eta_{\mu\alpha} \epsilon_d^{ab} \epsilon_k^{cd} (h_c^\alpha h_a^\mu u_b^\nu + h_c^\alpha u_a^\mu h_b^\nu + u_c^\alpha h_a^\mu h_b^\nu) + m^2 u_k^\nu = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

для неизвестных функций  $u_a^\mu := A^1_\mu(x)$  с известными постоянными коэффициентами  $h_a^\mu := A^0_\mu$ , зависящими от параметра  $\lambda = \frac{m^2}{\rho^2}$ . Данные коэффициенты  $h_a^\mu$  есть элементы одной из диагональных матриц (4.14), (4.17) или полностью нулевой матрицы (4.20) в зависимости от типа постоянных решений.

В случае нулевой матрицы имеем  $h_a^\mu = 0$  и получаем следующую систему для первого приближения

$$\partial_\mu \partial^\mu u_k^\nu + m^2 u_k^\nu = 0. \tag{5.3}$$

Заметим, что уравнения (5.3) являются уравнениями Клейна–Гордона–Фока для каждой из компонент  $u_k^\nu$ .

В случае решения (4.14) можем подставить в систему (5.2) выражения

$$h_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} & \text{при } \mu = a = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В случае решения (4.17) можем подставить в систему (5.2) выражения

$$h_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\lambda} & \text{при } \mu = a = 1, 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Получающиеся системы уравнений с неизвестными функциями  $u_a^\mu$  можно исследовать с помощью известных численных методов и методов теории линейных уравнений в частных производных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, как методы вычислительной математики (сингулярное разложение и гиперболическое сингулярное разложение) могут быть полезны при исследовании уравнений Янга–Миллса и уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли  $SU(2)$ , важном при описании электрослабых взаимодействий. Предъявлены классификация и явный вид всех постоянных решений системы уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли  $SU(2)$ . Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений. Представляется интересным дальнейшее изучение получившихся линейных систем уравнений для первого приближения. Результаты могут иметь применение при описании физического вакуума [32]–[34].

Заметим, что методы, рассматриваемые в настоящей работе, напрямую не переносятся на случай группы Ли  $SU(3)$ , важный для описания сильных взаимодействий, так как в работе существенным образом используется двулистное накрытие ортогональной группы  $SO(3)$  спинорной группой  $SU(2)$ . Перенос методов на случай группы Ли  $SU(3)$  представляется интересным вопросом для дальнейших исследований.

Автор благодарен организаторам международной конференции “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021”, г. Долгопрудный, и участникам этой конференции за полезные обсуждения.

Автор признателен Н.Г. Марчуку за полезные обсуждения. Автор благодарен анонимным рецензентам за полезные замечания и комментарии по улучшению статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shirokov D.S.* A note on the hyperbolic singular value decomposition without hyperexchange matrices // *J. Comp. Appl. Math.* 2021. V. 391. № 113450.
2. *Bojanczyk A.W., Onn R., Steinhardt A.O.* Existence of the hyperbolic singular value decomposition // *Linear Algebra Appl.* 1993. V. 185. P. 21–30.
3. *Levy B.C.* A note on the hyperbolic singular value decomposition // *Linear Algebra Appl.* 1998. V. 277. P. 135–142.
4. *Zha H.* A note on the existence of the hyperbolic singular value decomposition // *Linear Algebra Appl.* 1996. V. 240. P. 199–205.
5. *Yang C.N., Mills R.L.* Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // *Phys. Rev.* 1954. V. 96. P. 191–195.
6. *Wu T.T., Yang C.N.* Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations // in *Properties of Matter Under Unusual Conditions*, edited by H. Mark and S. Fernbach, Interscience New York. 1968.
7. *'t Hooft G.* Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories // *Nucl. Phys. B.* 1974. V. 79. P. 276–284.
8. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.* Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations // *Phys. Lett. B.* 1975. V. 59. P. 85.
9. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* A new classical solution of the Yang–Mills field equations // *Phys. Lett. B.* 1976. V. 65. P. 163.
10. *Witten E.* Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang–Mills Theory // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38. P. 121.
11. *Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu.* Construction of instantons // *Phys. Lett. A.* 1978. V. 65. P. 185–187.
12. *Actor A.* Classical solutions of  $SU(2)$  Yang–Mills theories // *Rev. Mod. Phys.* 1979. V. 51. P. 461–525.
13. *Shirokov D.S.* On constant solutions of  $SU(2)$  Yang–Mills equations with arbitrary current in Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  // *J. Nonlinear Math. Phys.* 2020. V. 27 № 2. P. 199–218.
14. *Shirokov D.S.* On some relations between spinor and orthogonal groups // *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* 2011. V. 3. № 3. P. 212–218.
15. *Шировов Д.С.* Теорема о норме элементов спинорных групп // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2011. Т. 1. № 22. С. 165–171.
16. *Шировов Д.С.* Использование обобщенной теоремы Паули для нечетных элементов алгебры Клиффорда для анализа связей между спинорными и ортогональными группами произвольных размерностей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2013. Т. 1. № 30. С. 279–287.
17. *Shirokov D.S.* Covariantly constant solutions of the Yang–Mills equations // *Adv. Appl. Clifford Alg.* 2018. V. 28. № 53.
18. *Marchuk N.G., Shirokov D.S.* Local Generalization of Pauli’s Theorem // *Azerb. J. Math.* 2020. V. 10. № 1. P. 38–56.

19. *Beltrami E.* Sulle funzioni bilineari // *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Università.* 1873. V. 11.
20. *Jordan C.* Memoire sur les formes bilineaires // *J. Math. Pures Appl., Deuxieme Serie.* 1874. V. 19. P. 35–54.
21. *Jordan C.* Sur la reduction des formes bilineaires // *Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris.* 1874. V. 78. P. 614–617.
22. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. Upper Saddle River: Prentice Hall. 1977.
23. *Golub G., Loan C.V.* Matrix computations. MD, USA: Johns Hopkins University Press Baltimore. 1996.
24. *Schimming R.* On constant solutions of the Yang–Mills equations // *Arch. Math.* 1988. V. 24. P. 65–73.
25. *Schimming R., Mundt E.* Constant potential solutions of the Yang–Mills equation // *J. Math. Phys.* 1992. V. 33. P. 4250.
26. *Марчук Н.Г., Широков Д.С.* О некоторых уравнениях, моделирующих уравнения Янга–Миллса // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* 2020. Т. 51. № 4. С. 676–685.
27. *Марчук Н.Г.* Об одном полевом уравнении, порождающем новый класс частных решений уравнений Янга–Миллса // *Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимировича, Тр. МИАН. МАИК, М., 2014.* Т. 285. С. 207–220.
28. *Shirokov D.S.* On solutions of the Yang–Mills equations in the algebra of h-forms // *Journal of Physics: Conference Series (International Conference “Marchuk Scientific Readings 2021” (MSR-2021) 4-8 October 2021, Novosibirsk, Russian Federation).* IOP Publishing, 2021. V. 2099. № 012015.
29. *Proca A.* Wave theory of positive and negative electrons // *J. Phys. Radium.* 1936. V. 7. P. 347–353.
30. *Marchuk N.G., Shirokov D.S.* Constant Solutions of Yang–Mills Equations and Generalized Proca Equations // *J. Geom. Symmetry Phys.* 2016. V. 42. P. 53–72.
31. *Dzhunushaliev V., Folomeev V.* Dirac star with SU(2) Yang–Mills and Proca fields // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 101. № 024023.
32. *Jackiw R.* Quantum meaning of classical field theory // *Rev. Mod. Phys.* 1977. V. 49. P. 681–706.
33. *Mayer D., Viswanathan K.S.* A note on the vacuum structure of an SU(2) Yang–Mills theory // *Commun. Math. Phys.* 1979. V. 67. P. 199–203.
34. *Nian J., Qian Y.* A topological way of finding solutions to the Yang–Mills equation // *Commun. Theor. Phys.* 2020. V. 72. № 085202.

## DIFFRACTION OF SOUND PLANE WAVES BY A STRIP WITH MIXED SOFT–HARD FACES<sup>1)</sup>

© 2022 г. F. Hacivelioglu

*Department of Mathematics, Gebze Technical University, Gebze, Kocaeli 41400, Turkey*  
*e-mail: f.dagidir@gtu.edu.tr*

Поступила в редакцию 24.09.2021 г.  
Переработанный вариант 24.09.2021 г.  
Принята к публикации 11.02.2022 г.

**Дифракция звуковых плоских волн на полосе со смешанными мягкими и жесткими гранями.** С использованием метода Винера–Хопфа исследуется решение задачи о дифракции в полосе с мягкими и жесткими граничными условиями. Изучено влияние несимметричных краевых условий на дважды дифрагированное поле, создаваемое на верхней границе полосы. Представлены численные результаты для различных параметров задачи.

**Ключевые слова:** краевые условия Дирихле, вторичная дифракция, мягкие и жесткие граничные условия, смешанная краевая задача, условия Неймана, спектральный итерационный метод, метод Винера–Хопфа.

**DOI:** 10.31857/S0044466922060084

---

<sup>1)</sup>Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.