СОДЕРЖАНИЕ

Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании

В. И. Ерофеев, А. В. Леонтьева 3

Защита объекта на подвижном основании с помощью управления с упреждением и запаздыванием при ограниченных возмущениях

В. А. Корнеев 18

Гибридная система ориентации для орбитальных космических аппаратов

И. Н. Абезяев 36

Об устойчивости одного перманентного вращения в окрестности равенства Аппельрота

М. А. Новиков 44

Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов

А. О. Ватульян, В. О. Юров 52

Принципиальные вопросы теории комбинированных свободных гироскопов, функционирующих на двух рабочих модах

С. Е. Переляев 64

Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы

М. А. Ильгамов 77

Об оптимальных способах гашения гидроупругих колебаний

Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова 89

Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жесткой внешней средой

В. В. Васильев, В. А. Салов 98

Ползучесть и длительное разрушение цилиндрической оболочки при нестационарном сложном напряженном состоянии в присутствии агрессивной окружающей среды

Ю. Г. Басалов, А. М. Локощенко, Л. В. Фомин 109

Моделирование нормальной контактной жесткости
и демпфирования анизотропного взаимодействия

Чжицян Гао, Вэйпин Фу, Вэнь Ван, Шуанци Ван, Чжифэй Сюэ 121

Аналитическая аппроксимация решения геодезической задачи

П. А. Кучеренко, С. В. Соколов 142

Отклик нелокальных и фазовых запаздываний на нагружения линейного типа
в теориях термоупругих моментных напряжений с учетом диффузии

Раджниш Кумар, Сачин Каушал, Викрам 151

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 3–17

УДК 534.1

ДИСПЕРСИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В БАЛКЕ ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© 2021 г. В. И. Ерофеев[a,*], А. В. Леонтьева[a,]**

[a] *Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук", Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: erof.vi@yandex.ru*

***e-mail: aleonav@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.05.2020 г.
После доработки 07.06.2020 г.
Принята к публикации 25.06.2020 г.

В настоящей работе рассматриваются изгибные волны, распространяющиеся в однородной балке, закрепленной на нелинейно-упругом основании. Динамическое поведение балки определяется теорией Тимошенко. Система уравнений, описывающая изгибные колебания балки, сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений частиц срединной линии балки. Показано, что в случае, если жесткость балки мала по сравнению с линейной жесткостью основания, эволюционное уравнение представляет собой модифицированное уравнение Островского с дополнительным кубично-нелинейным слагаемым. Для эволюционного уравнения найдены точные солитонные решения из класса стационарных волн в виде кинка и антикинка.

Ключевые слова: изгибная волна, балка Тимошенко, нелинейно-упругое основание, эволюционное уравнение, обобщение модифицированного уравнения Островского, нелинейная стационарная волна, дисперсия

DOI: 10.31857/S0572329921030041

1. Введение. В задачах динамики упругих конструкций традиционно уделяется большое внимание распространению изгибных волн в стержнях и стержневых системах. В качестве базовой модели для проведения анализа часто выбирается математическая модель балки, предложенная С.П. Тимошенко [1–30]. Эта модель, уточняющая техническую теорию изгиба стержней, предполагает, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформируемой срединной линии стержня; нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, равны нулю; учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом поперечных сечений [4, 6, 20, 31].

Модель балки Тимошенко занимает особое место в механике: позволяя хорошо описывать многие процессы, происходящие в реальных конструкциях, она остается достаточно простой, доступной для аналитических исследований.

Непрерывное увеличение быстродействия и удельной мощности машин и механизмов, забота о снижении веса конструкции при сохранении ее надежности в работе, а также широкое внедрение в современную технику новых композиционных материа-

лов требуют более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния. Для этого часто оказывается недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности.

Нелинейные искажения, возникающие при распространении интенсивных изгибных волн, могут накапливаться с течением времени и при определенных условиях приведут к сильному укручению волновых фронтов и существенному изменению всего волнового процесса. Это, в свою очередь, может вызвать появление больших напряжений, необратимых деформаций в материале и привести к локальной потере устойчивости. Интерес к изучению нелинейных волновых процессов связан с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций специфических нелинейных режимов. С одной стороны, эффекты формирования нелинейных волн с большими градиентами напряжений и деформаций оказываются нежелательными, поскольку могут приводить к разрушению или пластическому течению материала, но, с другой стороны, – они могут быть полезными и найти применение в технологиях обработки материалов, в дефектоскопии и технической диагностике. Теоретические расчеты параметров нелинейных волн необходимы для изучения свойств новых конструкционных материалов, в частности, измерения нелинейных модулей упругости.

Целью данной работы является исследование влияния нелинейно-упругого основания на распространение изгибных волн в балке Тимошенко в рамках математической модели, сформулированной в [32].

2. Математическая модель. В рамках теории Тимошенко динамическое поведение стержня, закрепленного на нелинейно-упругом основании, описывается системой уравнений [32]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa c_\tau^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_1 w + h_2 w^3 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\kappa c_\tau^2}{r_y^2}\left(\varphi - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.2}$$

где $w(x, t)$ – поперечное смещение частиц срединной линии стержня; $\varphi(x, t)$ – угол отклонения сечения стержня от вертикального положения; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорости распространения сдвиговых волн в неограниченной среде и продольных волн в стержне, соответственно; ρ – плотность материала стержня; μ – модуль сдвига; E – модуль Юнга; $r_y = \sqrt{I_y/F}$ – осевой радиус инерции; I_y – осевой момент инерции (для прямоугольного поперечного сечения $I_y = a^3 b/12$); F – площадь поперечного сечения стержня; κ – поправочный коэффициент, учитывающий отклонение от теории плоских сечений, его величина зависит от способа определения среднего значения для угла сдвига и характера распределения сдвигов по сечению (для стержня прямоугольного сечения $\kappa = 5/6$); h_1, h_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругое основание.

Предполагаем, что балка является бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [33] на основе точного аналитического решения обосновано существование согласованного концевого гасителя изгибных колебаний балки Тимошенко, не дающего отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель балки (2.1), (2.2) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, рассматривать как бегущие изгибные волны.

Система уравнений (2.1), (2.2) сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения частиц w:

$$\left(1+\frac{h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{c_0^2 h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c_0^2 r_y^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{r_y^2}{\kappa c_\tau^2}(c_0^2+\kappa c_\tau^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+$$
$$+\frac{r_y^2}{\kappa c_\tau^2}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+h_1 w+h_2 w^3+\frac{h_2 r_y^2}{\kappa c_\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w^3)-\frac{c_0^2 h_2 r_y^2}{\kappa c_\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w^3)=0 \tag{2.3}$$

В безразмерных переменных уравнение (2.3) принимает вид:

$$(1+m_1)\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}-m_1\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}-(1+m_2)\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial \tau^2}+m_2\frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4}+$$
$$+\frac{m_1}{m_2}W+\frac{m_3}{m_2}W^3+m_3\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(W^3)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(W^3)\right)=0 \tag{2.4}$$

где $W=w/w_0$, $z=x/r_y$, $\tau=c_0 t/r_y$ – безразмерные величины перемещения, координаты и времени, соответственно. Безразмерные комплексы параметров

$$m_1=\frac{h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2},\quad m_2=\frac{c_0^2}{\kappa c_\tau^2},\quad m_3=\frac{h_2 r_y^2 w_0^2}{\kappa c_\tau^2}$$

характеризуют линейную жесткость основания ($m_1>0$), отношение скоростей ($m_2>1$) и нелинейность системы. Для жесткой нелинейности основания параметр $m_3>0$ (по терминологии Рейснера – “упрочняющееся основание” [34]), для мягкой нелинейности – $m_3<0$ (“размягченное” основание [34]). Параметр $m_1\to 0$, если линейная жесткость основания существенно уступает жесткости балки $h_1 \ll \kappa c_\tau^2/r_y^2$. Если линейная жесткость основания существенно превосходит жесткость балки $h_1 \gg \kappa c_\tau^2/r_y^2$, то $m_1\to\infty$. Параметр $m_1\to 1$, если линейная жесткость основания и жесткость балки сопоставимы $h_1\approx \kappa c_\tau^2/r_y^2$.

3. Линеаризованное уравнение. Для изучения дисперсионных свойств системы отбросим нелинейную часть уравнения (2.4) и получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}-\frac{m_1}{1+m_1}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{1}{1+m_1}\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}-\frac{1+m_2}{1+m_1}\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial \tau^2}+\frac{m_2}{1+m_1}\frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4}+\frac{m_1}{m_2(1+m_1)}W=0 \tag{3.1}$$

решение которого ищем в виде бегущей гармонической волны

$$W(z,\tau)=W_0 e^{i(\omega\tau-kz)}+к.с.$$

где W_0 – комплексная амплитуда волны, ω – частота, k – волновое число, *к.с.* – комплексно-сопряженная величина. Уравнение (3.1) принимает вид

$$m_2(\omega^2-k^2)(m_1-m_2\omega^2+k^2)=m_1-m_2\omega^2 \tag{3.2}$$

Дисперсионное уравнение содержит два параметра и имеет четвертый порядок по частоте и волновому числу. Разрешая (3.2) относительно ω, получим

$$\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{2m_2}}\sqrt{k^2(1+m_2)+1+m_1\pm\sqrt{k^4(m_2-1)^2+2k^2(1+m_2-m_1(m_2-1))+(1-m_1)^2}} \tag{3.3}$$

Дисперсионная кривая имеет две ветви, и при ненулевых значениях параметров у каждой ветви существует частота отсечки. Качественно разный вид имеет дисперсионная кривая при различных значениях параметра m_1: $m_1\to 0$, $m_1\to 1$ и $m_1\to\infty$. Зна-

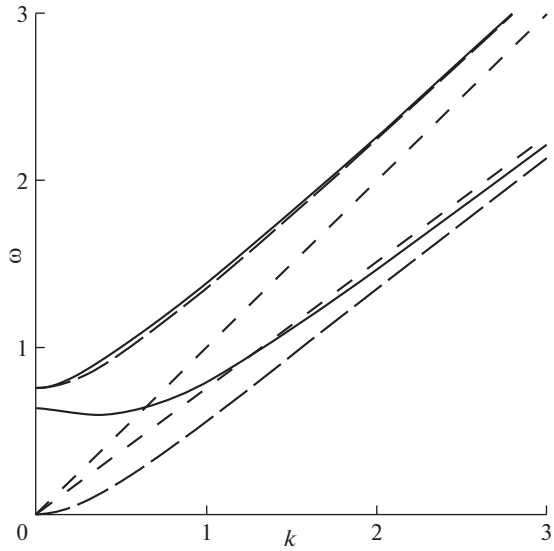


Рис. 1

чение параметра m_2 существенным образом не влияет на вид дисперсионной кривой. При увеличении этого параметра дисперсия смещается в более низкий частотный диапазон.

В отсутствие упругого основания ($m_1 = 0$) уравнение (3.1) является классическим уравнением Тимошенко

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - (1 + m_2)\frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \tau^2} + m_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4} = 0$$

описывающим изгибные колебания балки. Дисперсионные свойства этой модели хорошо изучены, например, в [4, 6, 20, 35].

Зависимости (3.3) в первой четверти при различных значениях параметра m_1 изображены на рис. 1, 2: $m_1 < 1$ (рис. 1, сплошная линия), $m_1 = 0$ (рис. 1, длинный пунктир), $m_1 > 1$ (рис. 2, сплошная линия), $m_1 = 1$ (рис. 2, длинный пунктир). Асимптоты на всех рисунках в статье отмечены коротким пунктиром.

На рисунке при $m_1 < 1$ (рис. 1) частоты отсечек верхней и нижней ветвей, соответственно, равны $\omega = 1/\sqrt{m_2}$ и $\omega = \sqrt{m_1/m_2}$ ($k = 0$). При $m_1 = 0$ нижняя ветвь берет начало в нуле. При $m_1 > 1$ (рис. 2) верхняя и нижняя ветви исходят ($k = 0$) из значений частот $\omega = \sqrt{m_1/m_2}$ и $\omega = 1/\sqrt{m_2}$, соответственно. При $m_1 = 1$ частоты отсечек обеих ветвей совпадают. На бесконечности верхняя и нижняя ветви дисперсионной кривой стремятся к прямым $\omega = k$ и $\omega = k/\sqrt{m_2}$, соответственно. При $m_1 = 0$ на низких частотах вблизи нуля справедливо $\omega = k^2$, а для верхней ветви на низких частотах выполняется $\omega = 1/\sqrt{m_2} + (1 + m_2)k^2/(2\sqrt{m_2})$.

Верхняя ветвь дисперсионной кривой расположена выше своей асимптоты при любых значениях параметра m_1. Расположение нижней ветви кривой относительно своей асимптоты зависит от значения параметра. Нижняя ветвь лежит выше асимптоты при

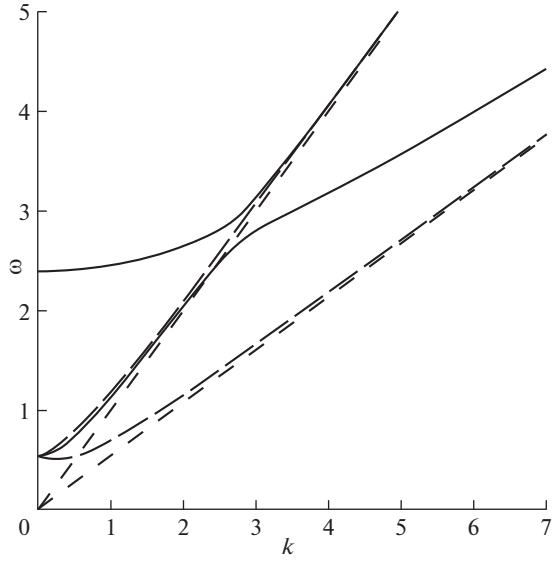


Рис. 2

$m_1 > 1/(m_2 - 1)$ и ниже – при $m_1 = 0$. Если значение параметра находится в интервале $0 < m_1 < 1/(m_2 - 1)$, то у нижней ветви дисперсионной кривой существует точка пересечения со своей асимптотой (k_*, ω_*), где $k_* = \sqrt{m_2}\omega_*$, $\omega_* = \sqrt{m_1/(m_2(1 + m_1 - m_1 m_2))}$. В этом случае ветка расположена ниже асимптоты на частотах $\omega > \omega_*$.

При значении параметра $0 < m_1 < 1 + 1/m_2$ у нижней ветви дисперсионной кривой есть точка минимума, которая расположена ниже частоты отсечки. Минимальное значение частоты и соответствующее значение волнового числа равны $\omega_{\min}^2 = m_1/(m_2 - 1) + 2(\sqrt{1 - m_1 + m_1/m_2} - 1)/(m_2 - 1)^2$, $k_{\min}^2 = m_1/(m_2 - 1) + (1 + m_2)(\sqrt{1 - m_1 + m_1/m_2} - 1)/(m^2 - 1)^2$. На частоте отсечки нижней ветви ненулевое значение волнового числа равно $k = \sqrt{m_1/m_2}$ (при $0 < m_1 \le 1$) или $k = \sqrt{(1 + m_2 - m_1 m_2)/m_2}$ (при $1 \le m_1 < 1 + 1/m_2$).

При любых значениях параметра m_1 нижняя ветвь пересекает асимптоту верхней ветви $\omega = k$, значение частоты при этом равно $\omega = \sqrt{m_1/m_2}$.

Зависимости фазовой $v_{ph} = \omega/k$ и групповой $v_{gr} = d\omega/dk$ скоростей от волнового числа и частоты определяются из выражения (3.3). На рис. 3–6 представлены зависимости $v_{ph}(k)$ (сплошная линия) и $v_{gr}(k)$ (длинный пунктир) при различных значениях параметра m_1: $m_1 = 0$ (рис. 3), $m_1 < 1$ (рис. 4), $m_1 = 1$ (рис. 5), $m_1 > 1$ (рис. 6).

Нижней ветви дисперсионной кривой $\omega(k)$ соответствуют нижние ветви ("1" на рис. 3–6), а верхней – верхние ветви фазовой и групповой скоростей ("2" на рис. 3–6). Для последней пары кривых значения фазовой скорости больше значений групповой скорости при любых значениях волнового числа и всех допустимых значениях частоты.

Кривые фазовой и групповой скоростей нижней пары меняют свое расположение относительно друг друга в зависимости от значений параметра. При $m_1 = 0$ кривая

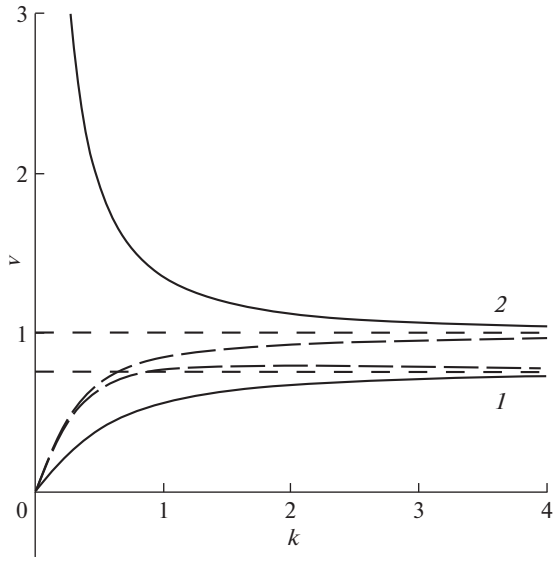


Рис. 3

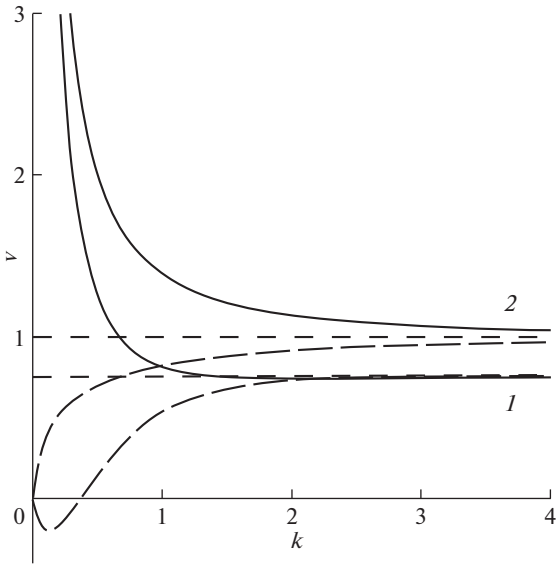


Рис. 4

групповой скорости расположена выше кривой фазовой скорости. При $0 < m_1 < 1 + 1/m_2$ дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет точку минимума, а кривая групповой скорости $v_{gr}(k)$ уходит в отрицательную полуплоскость. При $0 < m_1 < 1/(m_2 - 1)$ кривые фазовой и групповой скоростей пересекаются. При $m_1 > 1/(m_2 - 1)$ фазовая скорость больше групповой во всем диапазоне частот и волновых чисел.

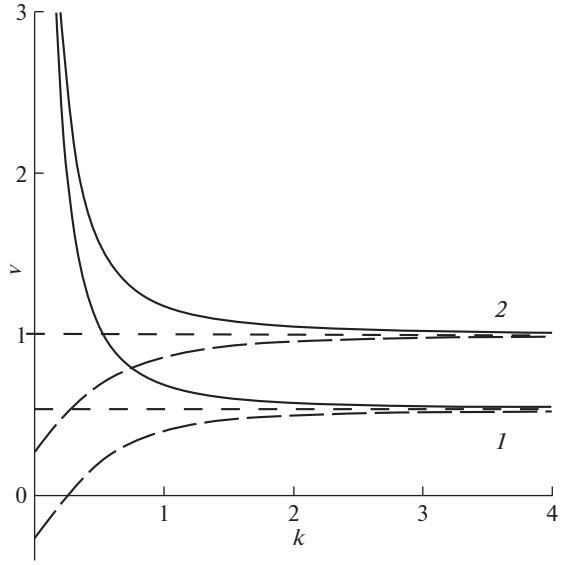


Рис. 5

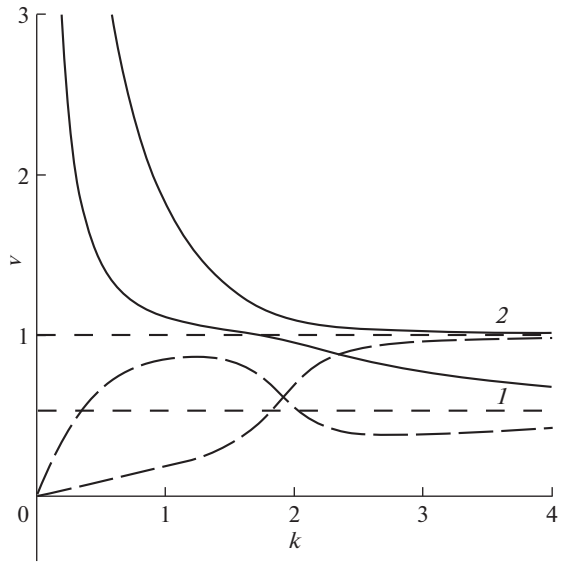


Рис. 6

На бесконечности (при больших значениях частоты или волнового числа) пары кривых “1”, “2” (рис. 3–6) стремятся к значениям $v_{ph} = v_{gr} = 1/\sqrt{m_2}$ и $v_{ph} = v_{gr} = 1$, соответственно.

Кривые фазовой скорости $v_{gr}(k)$ имеют вертикальную асимптоту $k = 0$. Кривые групповой скорости $v_{gr}(k)$ берут свое начало в нуле, за исключением случая, когда

$m_1 = 1$ и кривые на вертикальной оси имеют отметки $v_{gr} = \pm 1/(2\sqrt{m_2})$. Значения частот $\omega = \sqrt{m_1/m_2}$, $\omega = 1/\sqrt{m_2}$ являются точками исхода кривых групповой скорости $v_{gr}(\omega)$ и вертикальными асимптотами кривых фазовой скорости $v_{ph}(\omega)$.

Кривая фазовой скорости "2" лежит выше кривой фазовой скорости "1" при любых значениях частоты, волнового числа и параметра m_1. Кривые групповых скоростей при определенных значениях параметра имеют точку пересечения и кривая "1" оказывается выше кривой "2".

4. Нелинейная стационарная волна. В случае малости жесткости балки по сравнению с линейной жесткостью основания ($m_1 \to \infty$), задача позволяет отследить эволюционные изменения профиля волны. Перейдем в уравнении (2.4) в движущуюся систему координат $\xi = z - c\tau$, $\theta = \varepsilon\tau$, где c – скорость волны, заранее неизвестна, ε – малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси z, медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации.

Учитывая, что нелинейные и дисперсионные слагаемые малы, в нулевом приближении находим скорость c:

$$c^2 = \frac{m_1}{1 + m_1}$$

В первом приближении по малому параметру имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta} + d_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial\xi} + d_2 \frac{\partial^3 W}{\partial\xi^3}\right) - d_3 W - d_4 W^3 = 0 \tag{4.1}$$

где коэффициенты уравнения равны

$$d_1 = \frac{3m_3}{2\varepsilon c(1 + m_1)^2}, \quad d_2 = \frac{m_1 m_2 - (1 + m_1)}{2\varepsilon c(1 + m_1)^3}$$

$$d_3 = \frac{m_1}{2\varepsilon c(1 + m_1)m_2}, \quad d_4 = \frac{m_3}{2\varepsilon c(1 + m_1)m_2}$$

Заметим, что уравнение (4.1) отличается от известного в нелинейной волновой динамике уравнения Островского [36–40] наличием во втором слагаемом кубической нелинейности вместо квадратичной и дополнительным нелинейным слагаемым (последнее слагаемое в уравнении).

Уравнение (4.1) будем классифицировать как модифицированное уравнение Островского с дополнительным нелинейным слагаемым. При этом, естественно назвать уравнение (4.1) без последнего слагаемого модифицированным уравнением Островского, по аналогии, с известными модифицированным уравнением Кортевега–де Вриза (мКдВ) и модифицированным уравнением Бюргерса. Однако понятие "модифицированное" в случае уравнения КдВ имеет несколько иное значение и связано с наличием преобразования Миуры [41], которое переводит решения модифицированного уравнения в решения классического уравнения. Похожих преобразований относительно классических и модифицированных уравнений Бюргерса и Островского пока не найдено.

В [40] показано, что уравнение Островского и его модификации имеют отношение к широкому кругу нелинейных систем, характеризующихся наличием бездисперсионной полосы в спектре частот, разделяющей области с низко- и высокочастотной дисперсиями.

Как и уравнение Островского, модифицированное уравнение Островского не имеет точных решений, но допускает анализ качественными методами исследования ди-

намических систем [39, 40]. Далее увидим, что наличие дополнительного кубично-нелинейного слагаемого позволяет найти точные решения уравнения (4.1) в виде солитонов.

Для стационарных волн $W(\xi, \theta) = W(\chi)$, $\chi = \xi - v\theta$ уравнение (4.1) запишется так:

$$(-vW' + d_1W^2W' + d_2W''')' - d_3W - d_4W^3 = 0 \tag{4.2}$$

где v имеет смысл скорости нелинейной волны. Считаем, что волна распространяется в положительном направлении оси ξ.

Будем искать решение уравнения (4.2) методом простейших уравнений [42], используя в качестве простейшего уравнения – уравнение Риккати с постоянными коэффициентами в виде

$$Y'(\chi) = -Y^2(\chi) + B_0 \tag{4.3}$$

которое имеет решение

$$Y(\chi) = \sqrt{B_0}\,\mathrm{th}(\sqrt{B_0}\chi) \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.2) имеет полюс первого порядка, и поэтому решение типа уединенных волн будем искать в виде

$$W(\chi) = b_0Y(\chi) + b_1 \tag{4.5}$$

где $Y(\chi)$ – решение (4.4) уравнения (4.3).

Подставляя решение (4.5) в уравнение (4.2) и учитывая уравнение Риккати, получаем полином относительно $Y(\chi)$. Приравнивая нулю выражения при одинаковых степенях $Y(\chi)$, получаем систему алгебраических уравнений, из которой находим значения коэффициентов

$$b_0^2 = -\frac{6d_2}{d_1}, \quad b_1 = 0, \quad B_0 = \frac{d_1d_3}{6d_2d_4}$$

Кроме того, находим выражение для скорости нелинейной волны

$$v = -\frac{d_1d_3}{3d_4} + \frac{3d_2d_4}{d_1}$$

Учитывая значения найденных коэффициентов, решение (4.5) принимает вид

$$W(\chi) = \pm\sqrt{-\frac{d_3}{d_4}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{d_1d_3}{6d_2d_4}}\chi\right) \tag{4.6}$$

Будем считать, что $W_1 = W_+$, $W_2 = W_-$ при подстановке b_{0+} и b_{0-}, соответственно. Решения W_1, W_2 отличаются только знаком коэффициента перед гиперболическим тангенсом.

Очевидно, что для существования действительных решений, коэффициенты d_1 и d_2 должны быть разных знаков. Для существования ограниченных действительных решений коэффициенты в парах d_1, d_2 и d_3, d_4 должны быть разных знаков. Профили ограниченных и неограниченных решений $W_1(\chi)$ (сплошная линия) и $W_2(\chi)$ (длинный пунктир) при различных значениях d_1–d_4 изображены на рис. 7 и рис. 8, соответственно. При положительных подкоренных выражениях в (4.6) решение $W_1(\chi)$, как и решение $W_2(\chi)$, является уединенной волной и имеет профиль кинка – плавного перепада между двумя значениями функции (рис. 7). При отрицательных подкоренных выражениях решения $W_1(\chi)$, $W_2(\chi)$ являются периодическими неограниченными (рис. 8). Наибольший интерес представляют ограниченные решения.

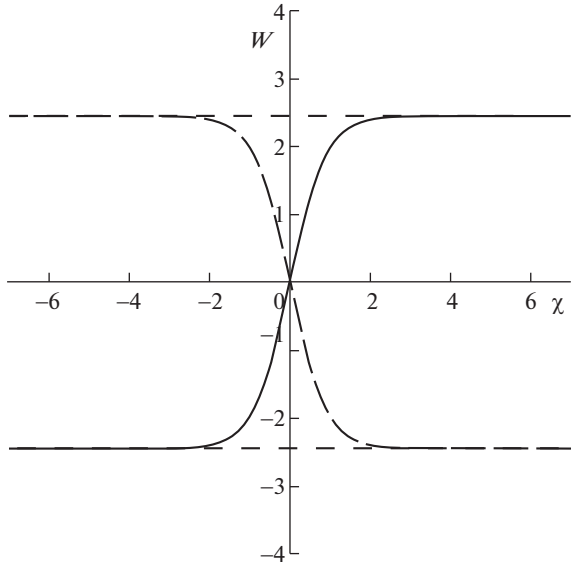


Рис. 7

Решения в виде кинков существуют на плоскости одновременно, причем каждый из кинков является симметричным относительно точки перегиба, совпадающей с началом координат. Один из кинков монотонно возрастающий, другой – монотонно убывающий. Кинки имеют одинаковые амплитуды и ширины: $A = 2\sqrt{-d_3/d_4}$, $\Delta = \sqrt{6d_2d_4/(d_1d_3)}$.

Возвращаясь к безразмерным параметрам задачи, запишем выражения для скорости, амплитуды и ширины волны в виде:

$$v = -\frac{1}{2\varepsilon m_2\sqrt{m_1(1+m_1)}}, \quad A = 2\sqrt{-\frac{m_1}{m_3}}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{2(m_1m_2 - m_1 - 1)}{m_1(1+m_1)}} \tag{4.7}$$

Учитывая, что параметры $m_1 > 0$ и $m_2 > 1$, получаем ограничение на параметр m_3, $m_3 < 0$. При увеличении значения m_1 амплитуда растет, нелинейная скорость падает, причем волна распространяется в отрицательном направлении оси ξ. Ширина фронта волны сначала увеличивается, затем уменьшается. Максимальная ширина фронта волны достигается в точке $(m_1)_{\max} = (1+\sqrt{m_2})/(m_2-1)$ и равна $\Delta_{\max} = \sqrt{2}(\sqrt{m_2}-1)$, минимальная – при $m_1 \to +\infty$ или $m_1 \to 1/(m_2-1)$. При увеличении m_2 точка максимума сдвигается влево, максимальное значение ширины фронта волны при этом увеличивается.

5. Частный случай эволюционного уравнения. Уравнение (4.1) содержит по два дисперсионных и нелинейных слагаемых, отношения их коэффициентов $d_2/d_3 \sim 1/(1+m_1)^2$, $d_1/d_4 \sim 1/(1+m_1)$ показывают, что наибольший вклад в дисперсионный процесс вносит слагаемое с коэффициентом d_3, а главным нелинейным является слагаемое с коэффициентом d_4.

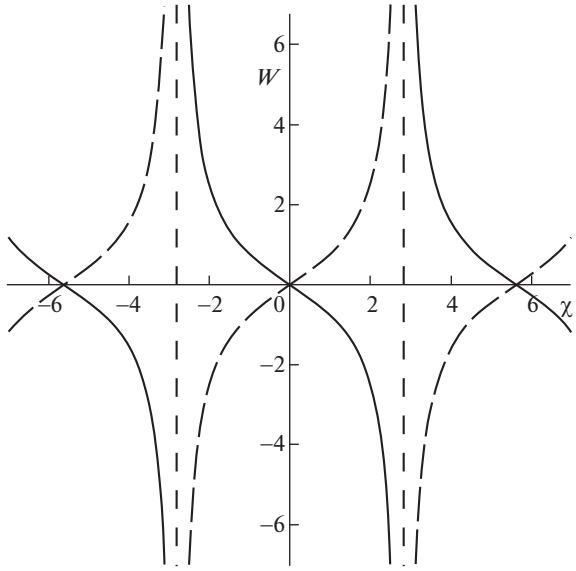


Рис. 8

В частном случае, если в уравнении (4.1) ограничиться отбрасыванием дисперсионного слагаемого ($d_2 = 0$), получим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta} + d_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial\xi}\right) - d_3 W - d_4 W^3 = 0 \tag{5.1}$$

которое в переменных бегущей волны ($W(\xi,\theta) = W(\chi)$, $\chi = \xi - v\theta$) примет вид

$$W_{\chi\chi} + \frac{d_3}{v} W - \frac{d_1}{3v}(W^3)_{\chi\chi} + \frac{d_4}{v} W^3 = 0 \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) описывает колебания ангармонического осциллятора и содержит три типа кубической нелинейности, одна из которых та же, что и в уравнении Дуффинга. Если в уравнении (4.1) пренебречь малыми дисперсионным и нелинейным слагаемыми и положить $d_1 = d_2 = 0$, то в переменных бегущей волны получится само уравнение Дуффинга.

После интегрирования по координате уравнение (5.2) запишется следующим образом

$$\left(\frac{dW}{d\chi}\right)^2 = \frac{(d_1 d_4/(3v^2))W^6 + \left(\left(-d_4 + d_1 d_3/v\right)/(2v)\right)W^4 - \left(d_3/v\right)W^2 + C_0}{(1 - \left(d_1/v\right)W^2)^2}$$

где C_0 – константа интегрирования, имеет смысл полной энергии системы.

Фазовые портреты (W, W_χ) при разных значениях параметра нелинейной жесткости основания m_3 изображены на рис. 9 ($m_3 > 0$) и рис. 10 ($m_3 < 0$). На фазовых плоскостях присутствуют замкнутые траектории. Области движений разделяют две прямые $v - d_1 W^2 = 0$ и две параболы $\left(W_\chi\right)^2 = \left(d_4/(3d_1)\right)W^2 + d_3/(2d_1) + v d_4/(6d_1^2)$ (на рис. 9 отмечены пунктиром). Знак параметра m_3 влияет на существование сепаратрисы, так при положительных значениях параметра она отсутствует на фазовой плоскости. За-

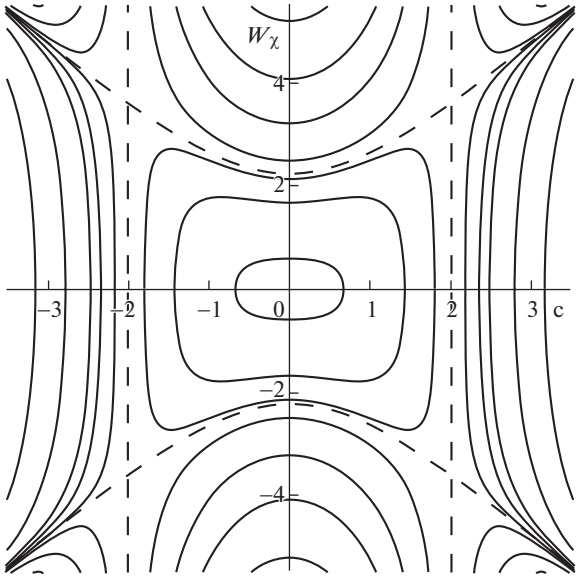


Рис. 9

мкнутые траектории вблизи начала координат имеют эллипсовидную форму, а вблизи асимптот искажаются и имеют форму “бабочки”. При отрицательных значениях параметра, фазовый портрет (рис. 10) аналогичен фазовому портрету осциллятора с кубической нелинейностью (описывается уравнением Дуффинга) в условиях “мягкой пружины”.

6. Заключение. Таким образом, в работе показано, что учет внешнего нелинейно-упругого основания влияет на распространение гармонических и нелинейных волн в балке Тимошенко, совершающей поперечные колебания.

Наличие упругого основания способствует появлению зоны непропускания по частоте при распространении линейных волн. Как и в балке Тимошенко без упругого основания, на низких частотах у обеих ветвей проявляется дисперсия, а на высоких частотах она отсутствует. Однако тип дисперсии зависит от величины линейной жесткости основания. При больших значениях параметра линейной жесткости низкочастотная волна обладает нормальной дисперсией, в то время как у балки Тимошенко в отсутствие упругого основания, низкочастотная ветка имеет аномальную дисперсию. Высокочастотная волна показывает нормальную дисперсию вне зависимости от наличия или отсутствия упругого основания.

При небольших значениях (вблизи единицы) параметра линейной жесткости у длинных волн (длина которых кратно превосходит осевой радиус инерции) фазовая и групповая скорости имеют разные знаки. На небольших промежутках частоты (при любых значениях параметра линейной жесткости) и волнового числа (при больших значениях параметра) большим значениям фазовой скорости соответствуют меньшие значения групповой скорости.

В случае, когда линейная жесткость внешнего основания существенно больше жесткости балки, тип нелинейности (мягкая, жесткая) основания влияет на существование локализованных волн и форму периодических волн, распространяющихся в балке Тимошенко. Нелинейные и дисперсионные процессы, создающие укручение и

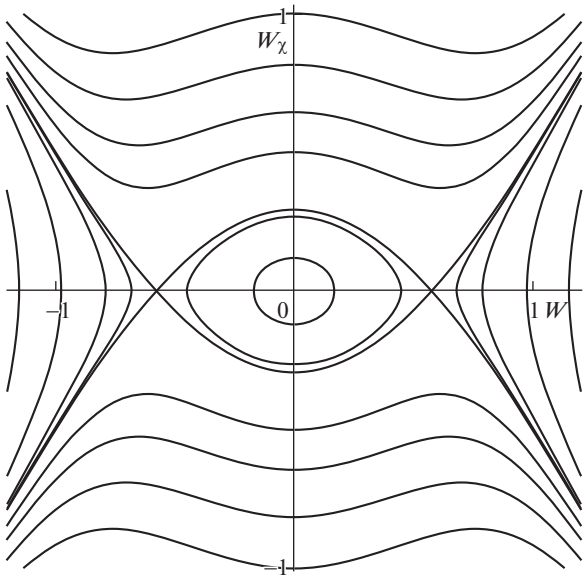


Рис. 10

расплывание волнового фронта, формируют стационарные волны солитонного типа в виде кинка и антикинка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-19-00613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D., Sun C.T.* Moving load on a flexible supported Timoshenko beam // International Journal of Solid and Structures. 1965. V. 1. P. 353–370.
2. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
5. *Abbas B.A.H., Thomas J.* Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation // Journal of Sound and Vibration. 1978. V. 60. № 1. P. 33–44.
6. *Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
7. *Сагомонян А.Я.* Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во МГУ, 1985. 416 с.
8. *Eisenberger M., Clastomik J.* Beams on variable two-parameter elastic foundation // Computers and Structures. 1986. V. 23. P. 351–356.
9. *Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б.* Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 3. С. 475–482.
10. *Yokoyama T.* Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation // Computers and Structures. 1988. V. 28. № 2. P. 207–216.
11. *Kar R.C., Sujata T.* Parametric instability of Timoshenko beam with thermal gradient resting on a variable Pasternak foundation // Computers and Structures. 1990. V. 36. № 4. P. 659–665.
12. *Gutierrez R.H., Laura P.A., Rossi R.E.* Fundamental frequency of vibration of a Timoshenko beam of non-uniform thickness // Journal of Sound and Vibration. 1991. V. 145. P. 241–245.

13. *Lee S.Y., Kuo Y.H., Lin F.Y.* Stability of a Timoshenko beam resting on a Winkler elastic foundation // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 153. № 2. P. 193–202.
14. *Cleghorn W.L., Tabarrok B.* Finite element formulation of tapered Timoshenko beam for free lateral vibration analysis // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 152. P. 461–470.
15. *Felszeghy S.F.* The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load // Journal of Vibration and Acoustics. 1996. V. 118. № 3. P. 277–284.
16. *Kim J.H., Choo Y.S.* Dunamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force // Journal of Sound and Vibration. 1998. V. 216. № 4. P. 623–636.
17. *Lee H.P.* Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass // Applied Acoustics. 1998. V. 55. № 3. P. 203–215.
18. *Suiker A.S.J., de Borst R., Esveld C.* Critical behavior of a Timoshenko beam half plane system under a moving load // Archive of Applied Mechanics. 1998. V. 68. № 3–4. P. 158–168.
19. *Wang C.M., Lam K.Y., He X.O.* Exact solution for Timoshenko beams on elastic foundations using Green's functions // Mechanics of Structures & Machines. 1998. V. 26. P. 101–113.
20. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах / Ред. совет: *Фролов К.В.* (пред.). Т. 1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение. 1999. 504 с.
21. *Wu T.X., Thompson D.J.* A double Timoshenko beam model for vertical vibration analists of railway track at high frequencies // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 224. № 2. P. 329–348.
22. *Chen Y.H., Huang Y.H.* Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. V. 48. № 1. P. 1–18.
23. *Chen Y.H., Huang Y.H., Shih C.T.* Response of an infinite Timoshenko beam on a viscoelastic foundation to a harmonic moving load // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 241. № 5. P. 809–824.
24. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Наука, Физматлит, 2001. 320 с.
25. *Metrikine A.V., Verichev S.N.* Instability of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam // Archive of Applied Mechanics. 2001. V. 71. P. 613–624.
26. *Veritchev S.N.* Instability of a vehicle moving on an elastic structure. The Netherlands: Delft University Press, 2002. 190 p.
27. *Suiker A.S.J.* The mechanical behaviour of ballasted railway tracks. The Netherlands: Delft University Press, 2002. 236 p.
28. *Иванченко И.И.* Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. М.: Наука, 2011. 574 с.
29. *Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В.* Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. Saarbrucken, Deutschland: Lambert Academy Publishing. 2014. 200 с.
30. *Гафуров У.С., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Алгоритм построения поверхностных функций Грина в задаче о нестационарных колебаниях балки Тимошенко с учетом диффузии // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXV международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ, 2019. С. 55–57.
31. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наукова думка, 1975. 563 с.
32. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П.* Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 30–36.
33. *Весницкий А.И., Романов Н.Д.* К построению демпфера гашения изгибных колебаний балки // Прикладная механика. 1988. Т. 26. № 6. С. 122–124.
34. *Reissner E.* On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation // Studies in Appl. Math. 1970. V. XLIX. № 1. P. 45–57.
35. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
36. *Островский Л.А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.

37. *Островский Л.А., Степанянц Ю.А.* Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. М.: Наука, 1993. С. 132–153.
38. *Гандариас М.Л., Брузон М.С.* Симметрийный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 168. № 1. С. 49–64.
39. *Stepanyants Y.A.* On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. V. 28. P. 193–204.
40. *Степанянц Ю.А.* Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения) // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 1. С. 20–42.
41. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2017. 312 с.
42. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 18–35

УДК 62-50

ЗАЩИТА ОБЪЕКТА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ УПРАВЛЕНИЯ С УПРЕЖДЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2021 г. В. А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 03.07.2020 г.
После доработки 13.09.2020 г.
Принята к публикации 24.10.2020 г.

Рассматривается задача построения гарантирующего управления для противоударного изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, которым подвержено основание. Ударное воздействие на основание заранее неизвестно, задается его ускорением, ограниченной знакопостоянной функцией времени фиксированной длительности, интеграл от которой по времени задан. Управление действует между основанием и защищаемым объектом, ограничено по величине, а абсолютное ускорение основания может превышать эту величину только на одном интервале времени. Минимизируемым критерием качества служит максимальное смещение объекта относительно основания. Разработана методика определения среди возмущений указанного класса наихудших возмущений, доставляющих наибольшее значение критерию качества. Предложен эффективный закон управления с оптимизацией момента начала управления, основанный на комбинации двух методов управления, полученных ранее для прямоугольных возмущений и возмущений с неограниченной амплитудой.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее упреждающее управление, запаздывание, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0572329921030077

Введение. Работа посвящена построению способов управления противоударным изолятором при ограниченных наихудших возмущениях. Используется математическая модель системы с одной степенью свободы, которая состоит из основания и защищаемого объекта, находящегося на нем. Рассматривается внешнее воздействие кинематического типа, характеризуемое ускорением основания, описываемым функцией времени. Основание и защищаемый объект движутся вдоль одной прямой, а управляющая сила между основанием и объектом ограничена по величине и создается изолирующим устройством. Впервые задача о минимизации максимума модуля смещения объекта относительно основания при заданном возмущении ставилась в [1–3]. Дальнейшее развитие теория оптимальной противоударной изоляции получила в [4–7]. Изоляция объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора с управлением без упреждения изучалась в [8]. Численное решение этой задачи и построение ее аналитических решений для некоторых заданных возмущений с упреждающим управлением рассмотрены в [9]. В [10, 11] аналитически построено гарантирующее упреждающее управление с одним переключением и временем упреждения, позволяющее вычислять минимальную оценку максимальной величины смещения объекта относительно основания для

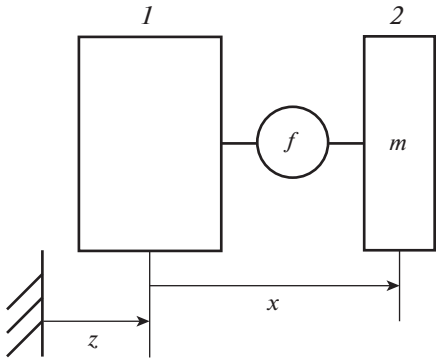


Рис. 1

класса возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой. Для этого же класса возмущений в [12, 13] показано, что, используя упреждение и запаздывание для двух простых управлений, предназначенных для конкретных возмущений, и оптимизируя функционал только по моменту начала управления, можно получить значение критерия качества, близкое к оптимальному. Современное описание проблемы противоударной изоляции, включающее в себя публикации по оптимальному управлению противоударными изоляторами, представлено в [14].

В данной работе для возмущений заданной длительности и ограниченной амплитуды доказано, что при заданном управлении наихудшими возмущениями являются непрерывные прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, начинающиеся либо в момент начала возмущения, либо заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения. Для рассматриваемого класса возмущений используются два управления, полученные в [9, 11] для прямоугольного возмущения и для возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой соответственно. При этом в формулу для управления из [9] подставляется ограничение на амплитуду данной задачи вместо значения амплитуды прямоугольного возмущения. Выбор момента начала действия для этого управления предполагает, что возможно упреждение и запаздывание. Момент начала действия управления выбирается с целью обеспечить минимально возможную величину смещения защищаемого объекта. Проводится сравнение полученных значений критерия качества для управлений из [9, 11] (относительного максимального смещения защищаемого объекта относительно основания). На основе этого сравнения предлагается комбинированное управление, сочетающее достоинства обоих управлений.

1. Механическая система. Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания *1* и объекта *2*, соединенного с основанием с помощью противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и созданного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Основание и объект движутся поступательно вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие на основание задается его ускорением $\ddot{z}$, функцией времени, некоторые свойства которой заранее известны.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = -\frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z} \tag{1.1}$$

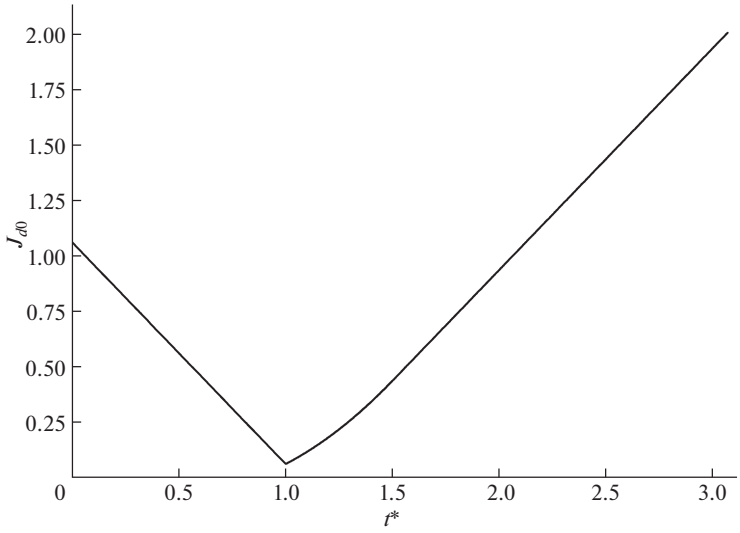


Рис. 2

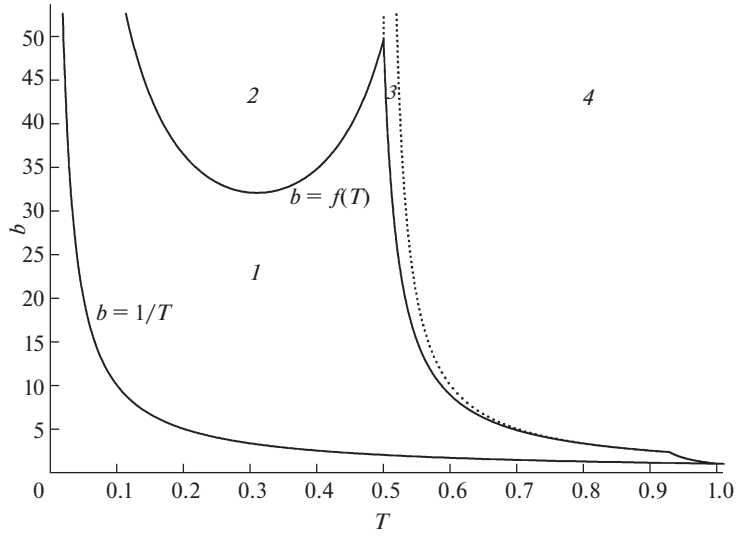


Рис. 3

Далее полагаем, что сила f удовлетворяет ограничению $|f| \le F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \le u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \tag{1.2}$$

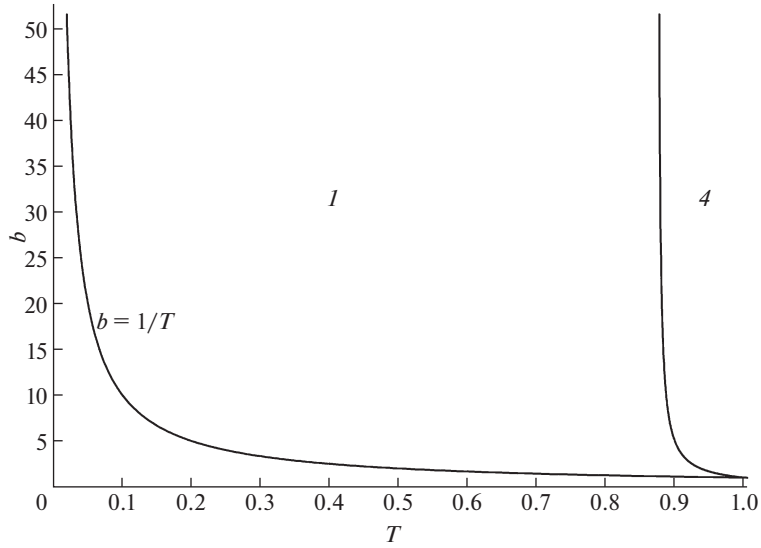


Рис. 4

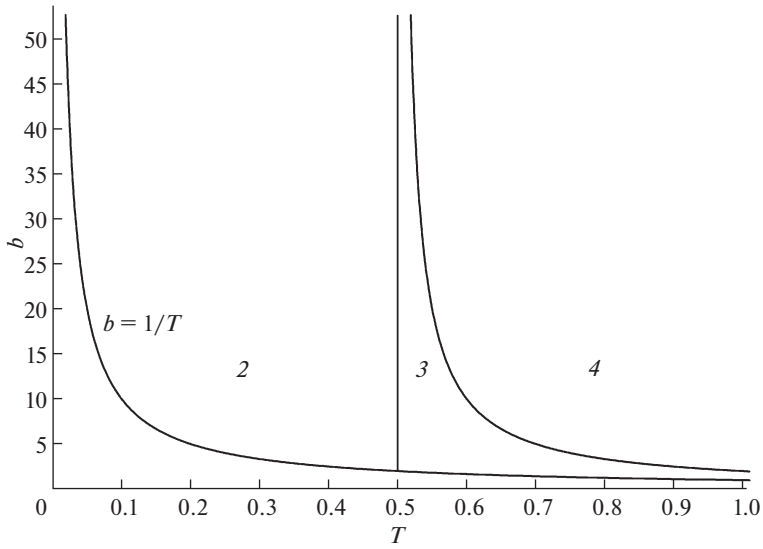


Рис. 5

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению

$$|u(t)| \le u_0, \quad t \in [0, \infty) \tag{1.3}$$

2. Внешние возмущения. Предполагается, что возмущение $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \ge 0 \tag{2.1}$$

где кусочно-непрерывная функция $V(\xi)$ определена для всех вещественных ξ, причем $V(\xi) \equiv 0$ для $\xi < 0$, а $t_0 \ge 0$ – некоторый момент времени, который может быть задан

заранее или подлежать определению. Возмущение V начинает действовать на основание спустя время t_0 после включения системы противоударной изоляции (упреждающее управление).

Будем предполагать, что 1) возмущение $V(\xi)$ действует только в одном направлении и не меняет знака ($V(\xi) \geq 0$), 2) $V(\xi)$ имеет конечную длительность T ($V(\xi) \equiv 0$, если $\xi > T$), 3) $V(\xi)$ имеет ограничение на максимальную величину воздействия, обозначаемое параметром b,

$$V(\xi) \leq b \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi \leq T \tag{2.2}$$

и 4) только на одном интервале, $t_1 < \xi < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(\xi)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(\xi) < u_0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi < t_1 \quad \text{и} \quad t_2 < \xi \leq T$$
$$V(\xi) > u_0 \quad \text{для} \quad t_1 < \xi < t_2$$

Один или оба из интервалов $0 \leq \xi < t_1$ и $t_2 < \xi \leq T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. В случае, когда $V(\xi)$, $0 \leq \xi \leq T$, предполагается известной функцией в каждый момент ξ и удовлетворяющей неравенству $V(\xi) \leq u_0$, оптимальное управление определяется тождеством $u(t) \equiv V(t - t_0)$ и обеспечивает тождественно равное нулю смещение объекта по отношению к основанию. Далее предполагаем выполнение неравенства

$$b > u_0 \tag{2.3}$$

Основными характеристиками ударного воздействия являются его длительность T, максимально возможная величина воздействия b и параметр v_0

$$v_0 = \int_0^T V(\xi) d\xi \tag{2.4}$$

характеризующий значение скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. В [10, 11] рассматривался класс возмущений без ограничений на максимальную величину воздействия $V(\xi)$, а параметры T, v_0 предполагались известными и заданными. Такой класс возмущений обозначим V_T. Класс возмущений с заданной величиной v_0 из (2.4) без ограничений на максимальную величину воздействия $V(t)$ и на максимальную длительность T обозначим V_∞. Этим классам воздействий соответствует значение $b = +\infty$. Введем также классы возмущений V_b и V_{bT} с заданными параметрами b, v_0 и T, b, v_0 соответственно. Необходимым условием существования возмущений из класса V_{bT} служит условие $bT \geq v_0$, поскольку ненулевые значения $V(\xi)$ должны располагаться в прямоугольнике с основанием T и высотой b. Поскольку случай $bT = v_0$ соответствует прямоугольным возмущениям и разобран в [9], будем полагать выполненным неравенство

$$bT > v_0 \tag{2.5}$$

Очевидно, что $V_{bT} \subset V_T \subset V_\infty$, $V_{bT} \subset V_b \subset V_\infty$.

3. Критерий качества. Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subset V_\infty$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать

функционалом J, характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u,t_0) = \max_{V\in\Omega}\max_{t\in R_{0+}}\left|x(t;u,V,t_0)\right|, \quad R_{0+} = [0,+\infty) \tag{3.1}$$

где $x(t;u,V,t_0)$ – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0. Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения. Для случаев когда $\Omega = V_b$, $\Omega = V_{bT}$, $\Omega = V_T$, $\Omega = V_\infty$ для значения функционала из (3.1) введем соответствующие обозначения $J_b(u, t_0)$, $J_{bT}(u,t_0)$, $J_T(u,t_0)$, $J_\infty(u,t_0)$, т.е.

$$J_b(u,t_0) = \max_{V\in V_b}\max_{t\in R_{0+}}\left|x(t;u,V,t_0)\right| \tag{3.2}$$

$$J_{bT}(u,t_0) = \max_{V\in V_{bT}}\max_{t\in R_{0+}}\left|x(t;u,V,t_0)\right| \tag{3.3}$$

$$J_T(u,t_0) = \max_{V\in V_T}\max_{t\in R_{0+}}\left|x(t;u,V,t_0)\right| \tag{3.4}$$

$$J_\infty(u,t_0) = \max_{V\in V_\infty}\max_{t\in R_{0+}}\left|x(t;u,V,t_0)\right| \tag{3.5}$$

4. Задачи оптимизации. Поскольку условия информированности управляющей стороны о внешнем возмущении и множества допустимых законов управления U могут быть различными, то и задачи оптимального управления формулируются по-разному.

Задача 1. Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) найти кусочно-непрерывное управление u^*, удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения t_0^*, которые минимизируют величину (3.1):

$$J(u^*,t_0^*) = \min_{u\in U,t_0} J(u,t_0)$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω. Она обобщает задачу, рассмотренную в [1–3] для заданного возмущения в отсутствие упреждения управления.

Задача 2. Для системы (1.1) при начальных условиях (1.2) и заданном возмущении (2.1) найти кусочно-непрерывное управление u^*, удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения t_0^*, которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания (функционал J):

$$J(u^*,V,t_0^*) = \min_{u,t_0}\max_{t\in[0,\infty)}\left|x(t;u,V,t_0)\right|$$

Задачу 2 можно трактовать как задачу 1, в которой множество допустимых возмущений Ω состоит из одного элемента.

Множество допустимых законов управления может представлять собой параметрическое семейство управлений $u_s(t) \in U_S$, зависящих от параметра $s, s \in S$.

Задача 3. Для заданного класса допустимых управлений $u_s(t) \in U_S$ найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^*, минимизирующие величину (3.1):

$$J(u_s^*,t_0^*) = \min_{t_0,s} J(u_s,t_0), \quad u_s^* = u_s\big|_{s=s^*}$$

Решение задачи 3 дает возможность улучшать качество противоударной защиты путем изменения времени упреждения и параметра при заданном семействе законов управления $u_s(t)$, которое, например, может быть построено на основе оптимального управ-

ления для некоторого возмущения $V \in \Omega$ и представлено аналитическими выражениями. Заметим, что когда множество S состоит из одного элемента задача 3 решается для фиксированного управления, а при заданном управлении $u(t)$ с условием $u(t) \equiv 0$, $t < 0$ в параметрическом семействе управлений $u_c(t) = u(t - c)$, $c \geq 0$ параметр c может играть роль запаздывания для управления $u_c(t)$.

В [10, 11] получено решение $\{u_\tau^*, t_\tau^*\}$ задачи 3 в классе возмущений V_T для управлений из класса $U_\Sigma = \{u_\tau\}$ – параметрического семейства допустимых релейных управлений $u_\tau(t)$ с переключением с $-u_0$ на u_0 в момент времени τ и с u_0 на 0 в момент времени $v_0/u_0 + 2\tau$, где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \leq t < \tau \\ +u_0, & \tau \leq t \leq T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \tag{4.1}$$

$$T_\tau = \frac{v_0}{u_0} + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Соотношение временных отрезков со значениями $\pm u_0$ выбрано таким образом, чтобы обеспечить выполнение соотношения

$$\dot{x}(t; u_\tau, V, t_0) \equiv 0, \quad t \geq \max(t_0 + T, T_\tau)$$

для того чтобы движение объекта относительно основания прекращалось за конечное время и в дальнейшем не возобновлялось при любых возмущениях класса V_T и временах упреждения t_0. Решение $\{u_\tau^*, t_\tau^*\}$ будем использовать для вычисления величины $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$, используемой для сравнения с величиной $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, полученной из решения задачи 3 при $u_{bc}^*(t) = u_b(t - c^*)$, $c^* \geq 0$, где $u_b(t)$ – управление, полученное из решения задачи 2 для прямоугольного возмущения с амплитудой b, а c^* – оптимальное значение параметра c.

5. Определение наихудшего возмущения. Вычисление функционала (3.1) предполагает определение наихудшего возмущения $V \in \Omega \subset V_T$, которое максимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания ($\max_t |x(t; u, V, t_0)|$) при заданных $u(t)$ и t_0.

Лемма 1 (см. [9]). Среди возмущений $V \in V_T$ наихудшее возмущение есть либо $V_\delta(\xi) = v_0\delta(\xi)$ либо $V_{\delta T}(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.

Согласно лемме 1 для нахождения наихудшего возмущения в классе V_T при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить $\max_t |x(t; u, V_\delta, t_0)|$, $\max_t |x(t; u, V_{\delta T}, t_0)|$ и выбрать возмущение, отвечающее большему значению абсолютного отклонения.

Лемма 2. Среди возмущений $V \in V_{bT}$ наихудшее возмущение есть либо

$$V_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ b, & 0 \leq \xi \leq v_0/b \leq T \\ 0, & v_0/b < \xi \end{cases}$$

либо

$$V_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < T - v_0/b \\ b, & T - v_0/b \le \xi \le T \\ 0, & T < \xi \end{cases}$$

Иными словами, при заданном управлении наихудшими возмущениями являются прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, начинающиеся либо в момент начала возмущения, либо заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения.

Примечание. Справедливо равенство $V_1(\xi) = V_0(\xi - T + v_0/b)$.

Согласно лемме 2 для нахождения наихудшего возмущения в классе V_{bT} при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = V_0(t - t_0)$ и $v(t) = V_1(t - t_0)$, для каждого из $\max_t |x(t; u, V_0, t_0)|$, $\max_t |x(t; u, V_1, t_0)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

Доказательство. Введем вспомогательные функции $f_+(t)$ и $f_-(t)$, определенные на полуоси $0 \le t < +\infty$:

$$f_+(t) = \int_0^t (t - \xi)V_0(\xi - t_0)d\xi = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 \\ \dfrac{b(t - t_0)^2}{2}, & t_0 \le t < t_0 + \dfrac{v_0}{b} \\ v_0\left(t - t_0 - \dfrac{v_0}{2b}\right), & t_0 + \dfrac{v_0}{b} \le t \end{cases} \tag{5.1}$$

$$f_-(t) = \int_0^t (t - \xi)V_1(\xi - t_0)d\xi = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 + T - \dfrac{v_0}{b} \\ \dfrac{\left(t - t_0 - T + \dfrac{v_0}{b}\right)^2}{2} b, & t_0 + T - \dfrac{v_0}{b} \le t < t_0 + T \\ v_0\left(t - t_0 - T + \dfrac{v_0}{2b}\right), & t \ge t_0 + T \end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь t_0 – время начала действия возмущения, а T – его длительность.

Для возмущения $v(t) = V(t - t_0)$ длительности T, удовлетворяющего соотношению

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)dt = v_0$$

справедливы неравенства

$$f_-(t) \le \int_{t_0}^{t} (t - \xi)v(\xi)d\xi \le f_+(t) \tag{5.3}$$

Докажем правое неравенство в (5.3) для случая $t_0 = 0$. Рассмотрим некоторую функцию $V(\cdot) \in V_b$, такую что для нее существуют неотрицательные величины t_1, t_2, h и функция $\Delta V(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} 0 \le t_1 \le t_1 + h \le t_2 \le t_2 + h \le T \\ 0 \le \Delta V(t) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le h \\ \Delta V(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \notin [0, h] \\ 0 \le V(t) + \Delta V(t - t_1) \le b \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_1 + h] \\ 0 \le \Delta V(t - t_2) \le V(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_2 + h] \end{gathered} \tag{5.4}$$

Введем функцию $V_\Delta(t)$, $t \in R_{0+}$ соотношениями

$$\begin{gathered} V_\Delta(t) \equiv V(t) \quad \text{при} \quad t \notin (t_1, t_1 + h) \cup (t_2, t_2 + h) \\ V_\Delta(t) = V(t) + \Delta V(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_1 + h] \\ V_\Delta(t) = V(t) - \Delta V(t - t_2) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_2 + h] \end{gathered} \tag{5.5}$$

Значения функции $\Delta V(t)$ по сравнению с $V(t)$ на отрезке $[t_1, t_1 + h]$ увеличены на такие же значения, на которые уменьшены ее значения на отрезке $[t_2, t_2 + h]$. Согласно соотношениям (5.4), (5.5) имеет место включение $V_\Delta(\cdot) \in V_b$ и выполнены равенства

$$\int_0^T V(t)dt = \int_0^T V_\Delta(t)dt = v_0 \tag{5.6}$$

Введем следующие функции

$$I(t) = \int_0^t (t - \xi)V(\xi)d\xi, \quad I_\Delta(t) = \int_0^t (t - \xi)V_\Delta(\xi)d\xi, \quad t \in R_{0+} \tag{5.7}$$

Тогда

$$I_\Delta(t) = \begin{cases} I(t), \quad 0 \le t < t_1, \\ I(t) + \int_{t_1}^t (t - \xi)\Delta V(\xi - t_1)d\xi, \quad t_1 \le t < t_1 + h \\ I(t) + \int_{t_1}^{t_1+h} (t - \xi)\Delta V(\xi - t_1)d\xi, \quad t_1 + h \le t < t_2 \\ I(t) + \int_0^h (t - t_1 - y)\Delta V(y)dy - \int_{t_2}^t (t - \xi)\Delta V(\xi - t_2)d\xi, \quad t_2 \le t < t_2 + h \\ I(t) + (t_2 - t_1)\int_0^h \Delta V(y)dy, \quad t_2 + h \le t \end{cases} \tag{5.8}$$

Покажем, что

$$I_\Delta(t) \ge I(t) \tag{5.9}$$

Согласно (5.8) неравенство (5.9) выполняется для всех $t \in [0, +\infty)\backslash[t_2, t_2 + h)$, так как к $I(t)$ добавляется неотрицательная величина.

Поскольку при $t_1 \le t_2 \le t < t_2 + h$

$$0 \le \int_0^{t-t_2} (t - t_2 - y)\Delta V(y)dy \le \int_0^h (t - t_2 - y)\Delta V(y)dy \le \int_0^h (t - t_1 - y)\Delta V(y)dy$$

то добавляемая величина к $I(t)$ в (5.8) также неотрицательна

$$\int_0^h (t - t_1 - y)\Delta V(y)dy - \int_{t_2}^t (t - \xi)\Delta V(\xi - t_2)d\xi =$$
$$= \int_0^h (t - t_1 - y)\Delta V(y)dy - \int_0^{t-t_2} (t - t_2 - y)\Delta V(y)dy \ge 0$$

Неравенство (5.9) доказано. Нетрудно убедиться, что при кусочно-непрерывной $V(t)$, удовлетворяющей условиям (5.4) и такой что $V(t) \not\equiv 0$, $\Delta V(t) \not\equiv 0$, $t \in R_{0+}$ выполнено строгое неравенство $I_\Delta(t) > I(t)$ при $t \ge t_1 + h$. Таким образом, возможность построения функции приводит к увеличению функции $I(t)$, $t \in R_{0+}$. Невозможность построения $V_\Delta(t)$ для функции $V_0(t)$, $t \in R_{0+}$ доказывает невозможность увеличения функции $I(t)$, $t \in R_{0+}$ и справедливость правого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$. Аналогично доказывается справедливость левого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$, а также справедливость неравенств (5.3) для $t_0 > 0$.

Справедливость правого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$ также легко доказывается следующим способом. Из соотношений

$$I_0(t) = \int_0^t (t - \xi)V_0(\xi)d\xi, \quad 0 \le V_0(\xi) \le b, \quad \int_0^T V_0(\xi)d\xi = v_0, \quad \dot{I}_0 = \int_0^t V_0(\xi)d\xi$$

следует что

$$\dot{I}_0(t) \le \psi(t), \quad I_0(t) \le \int_0^t \psi(\xi)d\xi, \psi(t) = \min\{bt, v_0\}, \quad \int_0^t \psi(\xi)d\xi = f_+(t)\big|_{t_0=0}$$

Запишем решение уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями в следующем виде:

$$x_u(t) = \int_0^t (t - \xi)v(\xi)d\xi - \int_0^t (t - \xi)u(\xi)d\xi$$

Применив к этому выражению неравенство (5.3), получим

$$x_u^-(t) \le x_u(t) \le x_u^+(t)$$
$$x_u^-(t) = f_-(t) - \int_0^t (t - \xi)u(\xi)d\xi \tag{5.10}$$
$$x_u^+(t) = f_+(t) - \int_0^t (t - \xi)u(\xi)d\xi$$

Из этих неравенств и выражений (5.1), (5.2) для функций $f_+(t)$ и $f_-(t)$ вытекает, что при фиксированном $u = u(t)$ в любой момент времени t величина $x_u(t)$ принимает минимальное и максимальное значения при возмущениях $v_-(t) = V_1(t - t_0)$ и $v_+(t) = V_0(t - t_0)$ соответственно. Лемма 2 доказана.

Из (5.10) следует, что максимальное значение, которое может принимать критерий качества J при заданном управлении u и различных возмущениях, определяется выражением

$$J_u^+ = \max\left\{\max_{t\in R_{0+}}\left|x_u^-(t)\right|, \max_{t\in R_{0+}}\left|x_u^+(t)\right|\right\} \tag{5.11}$$

Безразмерные переменные. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}x, \quad t' = \frac{u_0}{v_0}t, \quad t_0' = \frac{u_0}{v_0}t_0, \quad T' = \frac{u_0}{v_0}T, \quad \xi' = \frac{u_0}{v_0}\xi$$

$$v'(t') = \frac{1}{v_0}v\left(\frac{v_0}{u_0}t'\right), \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad b' = \frac{b}{u_0}, \quad J' = \frac{u_0}{v_0^2}J$$

Далее будем использовать безразмерные переменные, опуская штрихи. В безразмерных единицах имеем $u_0 = 1$ и $v_0 = 1$, а неравенства (2.3), (2.5) приобретают соответственно вид

$$b > 1 \tag{5.12}$$

$$bT > 1 \tag{5.13}$$

6. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления для прямоугольного возмущения с дополнительным запаздыванием. Рассмотрим теперь возмущение в виде прямоугольного импульса, задаваемого кусочно-постоянной функцией $V(t)$

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \le t \le \dfrac{v_0}{b} \\ 0, & t > \dfrac{v_0}{b} \end{cases} \tag{6.1}$$

в размерных переменных или

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \le t \le \dfrac{1}{b} \\ 0, & t > \dfrac{1}{b} \end{cases} \tag{6.2}$$

в безразмерных переменных. Для этого возмущения задача 2 решена в [9] с помощью графо-аналитического метода [1, 2]. Оптимальное управление $u(t)$, оптимальное время упреждения t_0 и оптимальное значение критерия качества J определяются соотношениями

$$u_b(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le t_1^r = \dfrac{1}{4}\sqrt{1-b^{-1}}, \quad b > 1 \\ 1, & t_1^r < t \le t_2^r = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-b^{-1}} + 1, \quad b > 1 \\ 0, & t > t_2^r, \quad b > 1 \\ V(t), & t \in [0, +\infty), \quad b \le 1 \end{cases} \tag{6.3}$$

$$t_0^b = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[(1-b^{-1}) + \sqrt{1-b^{-1}}], & b > 1 \\ 0, & b \le 1 \end{cases} \tag{6.4}$$

$$J_r = \begin{cases} \frac{1}{16}(1 - b^{-1}), & b > 1 \\ 0, & b \le 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

Индекс b указывает, что данные соотношения выражены через значение амплитуды возмущения b. Управление (6.3) будем называть b-управлением. Поскольку формулы (6.3)–(6.5) были получены в предположении выполнения равенства

$$bT = 1 \tag{6.6}$$

их можно переписать в следующем виде

$$u_T(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le t_1^r = \frac{1}{4}\sqrt{1-T}, \quad T < 1 \\ 1, & t_1^r < t \le t_2^r = \frac{1}{2}\sqrt{1-T} + 1, \quad T < 1 \\ 0, & t > t_2^r, \quad T < 1 \\ V(t), & t \in [0, +\infty), \quad T \ge 1 \end{cases} \tag{6.7}$$

$$t_0^T = \begin{cases} \frac{1}{2}[(1-T) + \sqrt{1-T}], & T < 1 \\ 0, & T \ge 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

$$J_r = \begin{cases} \frac{1}{16}(1-T), & b > 1 \\ 0, & b \le 1 \end{cases} \tag{6.9}$$

Индекс T указывает, что данные соотношения выражены через значение длительности T. Управление (6.7) будем называть T-управлением. Такое введение различий для управлений u_b, u_T и их упреждающих моментов обусловлено тем, что дальнейшее использование этих управлений для задач гарантированного оценивания (например, в задаче 3), в которых выполнены неравенства $bT > 1$, $b > 1$, приводит к различным результатам. В данной работе изучается эффективность управления u_b с запаздыванием для задачи гарантированного оценивания с построением оптимального момента начала управляющего воздействия.

Введем класс управлений $U_{bC} = \{u_{bc}\}$, описываемый параметрическим семейством допустимых управлений $u_{bc}(t)$, где

$$u_{bc}(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ -1, & c \le t \le c + t_1^r = c + \frac{1}{4}\sqrt{1-b^{-1}} \\ 1, & c + t_1^r < t \le c + t_2^r = c + \frac{1}{2}\sqrt{1-b^{-1}} + 1 \\ 0, & t > c + t_2^r \end{cases} \tag{6.10}$$

$$c \in C, \quad C = [0, +\infty)$$

Равенство $u_{bc}(t) = u_b(t - c)$ означает, что управление $u_{bc}(t)$ представляет собой b-управление с запаздыванием c.

Введем функцию $J_{bc}(t^*)$, определяемую как значение функционала J, отвечающее управлению $u_{bc}(t)$ и возмущению $v(t) = V_0(t - t^*)$, т.е. прямоугольному возмущению с

амплитудой b с началом действия в момент времени t^*. Эта функция задается выражением

$$J_{bc}(t^*)=\begin{cases}9t_1^2+2t_1-t^*+c & \text{при} \quad 0\le t^*<8t_1^2+2t_1+c\\ \dfrac{2t_1^2+2t_1^2b+b(t^*-c)^2-4t_1(t^*-c)b}{2(b-1)} & \text{при} \quad 8t_1^2+2t_1+c\le t^*<t_2-b^{-1}+c\\ t^*-c-9t_1^2-2t_1 & \text{при} \quad t^*\ge t_2-b^{-1}+c\end{cases} \tag{6.11}$$

Функция $J_{bc}(t^*)$ линейно убывает при $t^*\in[0, 8t_1^2+2t_1+c]$ от значения $9t_1^2+2t_1+c$ до значения

$$J_{bc}(8t_1^2+2t_1+c)=t_1^2=\frac{b-1}{16b} \tag{6.12}$$

затем при $t^*\in[8t_1^2+2t_1+c, +\infty)$ монотонно возрастает от значения (6.12) до бесконечности. При этом функция $J_{bc}(t^*)$ на отрезке $[8t_1^2+2t_1+c, t_2-b^{-1}+c]$ растет квадратично до значения

$$J_{bc}(t_2-b^{-1}+c)=7t_1^2=\frac{7(b-1)}{16b} \tag{6.13}$$

а затем линейно до бесконечности. Найдем значения $t^*=t_p$, $T=T_p$, соответствующие значению J_{bc} из (6.13):

$$t_p=2t_1^2+2t_1+c, \quad T_p=1-2t_1^2=\frac{1}{8}(7+b^{-1}), \quad c<t_p<c+\frac{5}{8}$$

Функция $J_{bc}(t^*)$ из (6.11) позволяет оценить влияние ошибки в определении момента удара при расчете упреждающего оптимального управления на величину критерия качества противоударной изоляции. Формула (6.11) является обобщением формулы для величины $J_{b0}(t^*)$, определяемой как максимум модуля отклонения объекта относительно основания для возмущения $v(t)=V_0(t-t^*)$ при управлении $u_b(t)$

$$J_{b0}(t^*)=\begin{cases}9t_1^2+2t_1-t^*, & 0\le t^*<8t_1^2+2t_1\\ \dfrac{2t_1^2+2t_1^2b+bt^{*2}-4t_1t^*b}{2(b-1)}, & 8t_1^2+2t_1\le t^*<t_2-b^{-1}\\ t^*-9t_1^2-2t_1, & t^*\ge t_2-b^{-1}\end{cases} \tag{6.14}$$

Равенство $J_{bc}(t^*)=J_{b0}(t^*-c)$ при $t^*\ge c$ означает, что график функции $J_{bc}(t^*)$ получается смещением графика на величину c вдоль оси абсцисс с доопределением на интервале $[0, c)$ согласно формуле (6.11). При $b\to+\infty$ функция $J_{b0}(t^*)\to J_{d0}(t^*)$, где функция $J_{d0}(t^*)$ предназначена для дельта возмущения и имеет тот же смысл, что и функция $J_{b0}(t^*)$ для ограниченного возмущения. Функция $J_{d0}(t^*)$ задается формулой

$$J_{d0}(t^*)=\begin{cases}17/16-t^*, & 0\le t^*<1\\ (t^{*2}-t^*)/2+1/16, & 1\le t^*<3/2\\ t^*-17/16, & t^*\ge 3/2\end{cases} \tag{6.15}$$

и приведена на рис. 2. Функция $J_{b0}(t^*)$ имеет аналогичный вид. Для решения задачи 3 надо, с учетом леммы 2 о наихудшем возмущении, для заданного T найти минимум по переменным t_0, c величины

$$f_c(t_0, T) = \max[J_{bc}(t_0),\, J_{bc}(t_0 + T - b^{-1})], \quad t_0 \geq 0 \tag{6.16}$$

Минимум величины из (6.16) достигается при выполнении условий

$$c \geq \max[0, T/2 - 9t_1^2 - 2t_1], \quad J_{bc}(t_0) = J_{bc}(t_0 + T - b^{-1}), \quad t_0 \geq 0 \tag{6.17}$$

которые приводят к решению задачи 3 для классов возмущений V_{bT} и управлений U_{bC}:

$$t_c = \begin{cases} c - 1 - T + \dfrac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \dfrac{1}{b} < T \leq \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} \\ c + \dfrac{9}{16} - \dfrac{1}{16b} + \dfrac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \dfrac{T}{2}, & \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} < T \end{cases} \tag{6.18}$$

$$c \geq \max\left[0, \frac{T}{2} - \frac{9}{16} + \frac{1}{16b} - \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2}\right]$$

$$J_{bT}(u_c, t_c) = \begin{cases} \dfrac{25}{16} - \dfrac{41}{16b} + T - \dfrac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \dfrac{1}{b} < T \leq \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} \\ \dfrac{T}{2} - \dfrac{1}{2b}, & \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} < T \end{cases} \tag{6.19}$$

Оптимальное управление в классах управлений $U_{bC} = \{u_{bc}\}$ и возмущений V_{bT} для задачи 3 определяется формулой (6.10) со значением параметра c, удовлетворяющим неравенству из (6.18). Заметим, что значение функционала $J_{bT}(u_c, t_c)$ из (6.19) обеспечивается не единственным образом. Оптимальные минимально возможные момент упреждения t_c^* и величина запаздывания c^* определяются соотношениями

$$t_c^* = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - 1 - T, & \dfrac{1}{b} < T \leq \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} \\ \dfrac{9}{16} - \dfrac{1}{16b} + \dfrac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \dfrac{T}{2}, & \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8b} \leq T < \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ 0, & T \geq \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} 0, & \dfrac{1}{b} < T \leq \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ \dfrac{T}{2} - \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{16b} - \dfrac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2}, & \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} < T \end{cases}$$

При минимально возможных моменте упреждения t_c^* и величине запаздывания c^* оптимальное управление определяется формулой $u_{bc}^*(t) = u_b(t - c^*)$ и справедливо равенство $\min\{t_c^*, c^*\} = 0$, т.е. имеет место либо упреждение, либо запаздывание. При не минимально выбранных моменте упреждения t_c и величине запаздывания c имеем неравенство $\min\{t_c, c\} > 0$. В этом случае при $0 \leq t < \min\{t_c, c\}$ рассматриваемая система бездействует, поскольку значения управления и возмущения имеют нулевые значения.

7. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления, предназначенного для возмущений ограниченной длительности. В безразмерных переменных управление $u_\tau(t)$ из (4.1) приобретает вид

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau \\ +1, & \tau \le t \le T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \qquad (7.1)$$
$$T_\tau = 1 + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Оптимальное управление в классах управлений $U_\Sigma = \{u_\tau\}$ и возмущений V_T для задачи 3 определяется формулой (7.1) со значением параметра τ [10, 11]:

$$\tau^* = \begin{cases} T/2 + 1/4 & \text{при} \quad T \le 1/2 \\ 1/2 \quad \text{при} \quad 1/2 < T \le 7/2 \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1 & \text{при} \quad T > 7/2 \end{cases} \qquad (7.2)$$

а значение функционала и момент упреждения находят как

$$J_\tau = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2 & \text{при} \quad T \le 1/2 \\ T/2 \quad \text{при} \quad 1/2 < T \end{cases}$$
$$t_\tau^* = \begin{cases} T + 1 & \text{при} \quad T \le 1/2 \\ 7/4 - T/2 & \text{при} \quad 1/2 < T \le 7/2 \\ 0 \quad \text{при} \quad T > 7/2 \end{cases} \qquad (7.3)$$

Заметим, что приведенное решение (7.1)–(7.3) задачи 3 при $T > 1/2$ не единственно. Значение функционала $J = T/2$ для этого случая обеспечивается моментом переключения τ и моментом упреждения t_τ, удовлетворяющим соотношениям t_τ^*

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1, 0\} \le \tau \le \sqrt{T/2}$$
$$t_\tau = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2$$

Обозначим через $u_\tau^*(t)$ функцию из (7.1) со значением $\tau = \tau^*$ из (7.2). Введем функцию $J_{b\tau}(t^*)$, определяемую как значение функционала J, отвечающее управлению $u_\tau^*(t)$ и возмущению $v(t) = V_0(t - t^*)$, т.е. прямоугольному возмущению с амплитудой b с началом действия в момент времени t^*. Для вычисления величины $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ необходимо посчитать значение выражения

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \max[J_{b\tau}(t_\tau^*), J_{b\tau}(t_\tau^* + T - b^{-1})]$$

Значение J для класса возмущений V_{bT} при управлении u_τ^* с моментом упреждения t_τ^* для всех $1 < b \le 2$ имеет вид

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{b} < T \le \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{T}{2} - \dfrac{1}{2b} & \text{при} \quad \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2} < T \end{cases} \qquad (7.4)$$

Значение J для класса возмущений V_{bT} при управлении u_τ^* с моментом упреждения t_τ^* для всех $b > 2$ имеет более сложный вид

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \begin{cases} \left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{1}{4}\right)^2 & \text{при} \quad \dfrac{1}{b} < T \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \quad \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < T \le \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{T}{2} - \dfrac{1}{2b} \quad \text{при} \quad \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2} < T \end{cases} \tag{7.5}$$

8. Качество изоляции при комбинированном способе управления. Значения функционалов $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ из (6.19), (7.4), (7.5) представляют собой функции от параметров b, T, заданные в области

$$G_{bT} = \{b, T : b > 1, Tb > 1\}$$

Введем для значений $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ другие обозначения, отражающие эту зависимость

$$J_-(b,T) = J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*), J_+(b,T) = J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$$

Вычисления показывают, что равенство $J_-(b,T) = J_+(b,T)$ достигается при $1/b < T < 1$ на кривой l, описываемой функцией $b = f(T)$, $0 < T \le 1$, где

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{38 + 59T - 41T^2 + 2\sqrt{361 + 528T + 536T^2 - 320T^3 + 272T^4}}{4T(T+1)(T^2 - 7T + 4)} \\ \text{при} \quad 0 < T \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{29 + 400T + 32\sqrt{79 - 70T + 8T^2}}{160T - 135 + 256T^2} \quad \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < T \le \dfrac{13}{14} \\ \dfrac{1}{8T - 7} \quad \text{при} \quad \dfrac{13}{14} \le T \le 1 \end{cases}$$

При этом кривая l стремится к плюс бесконечности при $T \to +0$, лежит выше кривой $b = 1/T$ при $0 < T < 1$ и пересекается с ней в точке $T = 1$, $b = 1$. Кривые l и $b = 1/T$ изображены сплошными линиями на рис. 3. Кривая l делит область G_{bT} на две подобласти G_-, G_+, располагающиеся ниже и выше кривой l соответственно. При этом в нижней области G_- выполнено неравенство $J_- < J_+$, а в верхней области G_+ выполнено неравенство $J_- > J_+$. Зададим функцию $J_{comb}(b,T)$ соотношением

$$J_{comb}(b,T) = \min\{J_-(b,T), J_+(b,T)\}, \quad (b,T) \in G_{bT}$$

и поясним как эта функция вычисляется. Дополнительно область G_+ на рис. 3 разделена двумя пунктирными линиями l_1, l_2, задаваемыми формулами

$$l_1 : T = \frac{1}{2}, \quad b \ge \frac{229 + 32\sqrt{46}}{9} \approx 49.55939549$$

$$l_2 : b = \frac{2}{2T - 1}, \quad \frac{1}{2} < T \le \frac{13}{14}$$

Линия l_1 имеет общую точку с кривой l:

$$T = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{229 + 32\sqrt{46}}{9}$$

а кривая l_2 имеет общую точку с кривой l:

$$T = \frac{13}{14}, \quad b = \frac{7}{3}$$

В каждой из четырех областей, помеченных на рис. 3, значение $J_{comb}(b,T)$ вычисляется по своей формуле с соответствующим индексом. То есть области со значением индекса i (i = 1, 2, 3, 4) соответствует своя функция $J_i(b,T)$. Функции $J_i(b,T)$ имеют следующий вид

$$\begin{gathered} J_1 = \frac{25}{16} - \frac{41}{16b} + T - \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} \\ J_2 = \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ J_3 = \frac{1}{4} \\ J_4 = \frac{T}{2} - \frac{1}{2b} \end{gathered} \tag{8.1}$$

Функция $J_{comb}(b,\ T)$ представляет собой значение функционала (3.3) при использовании в качестве управления и момента упреждения величин u_{bc}^*, t_c^*. в области G_- и при использовании в качестве управления и момента упреждения величин u_τ^*, t_τ^* в области G_+. Такой способ управления с моментом упреждения назовем комбинированным управлением.

На рис. 4 изображено разбиение области G_{bT} на две подобласти, которые фигурируют в формуле (6.19). Цифры 1 и 4, которыми помечены эти области, означают, что функционал $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$ имеет значения J_1 и J_4 из (8.1) в соответствующих подобластях.

На рис. 5 изображено разбиение области G_{bT} на три подобласти, которые фигурируют в формулах (7.4), (7.5). Цифры 2–4, которыми помечены эти области, означают что функционал $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ имеет значения J_2, J_3, J_4 из (8.1) в соответствующих подобластях.

Вычисления показывают, что применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 10% по сравнению со значением функционала J_-, полученным для управления u_{bc}^* и момента упреждения t_c^*. Применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 700% по сравнению со значением функционала J_+, полученным для управления u_τ^* и момента упреждения t_τ^*. Действительно, наихудшие значения относительной разности решений демонстрируют следующие пределы

$$\lim_{b\to+\infty} \left.\frac{J_- - J_{comb}}{J_{comb}}\right|_{T=1/5} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{J_1 - J_2}{J_2}\right|_{T=1/5} = 0.1$$

$$\lim_{b\to2+0} \left.\frac{J_+ - J_{comb}}{J_{comb}}\right|_{T=1/2} = \lim_{b\to2+0} \left.\frac{J_3 - J_1}{J_1}\right|_{T=1/2} = 7.0$$

Заключение. Рассмотрена задача изоляции объекта на подвижном основании, которое подвержено однонаправленным возмущениям ограниченной длительности и амплитуды с заданным интегралом от возмущения. Для этой модели изучалась возможность применения управления, предназначенного для прямоугольного возмущения с оптимизацией начала его действия, а также управления, предназначенного для ударов

с неограниченной амплитудой, но с ограниченной длительностью. Было показано, что при больших длительностях возмущения предложенные управления и значения функционалов совпадают, а при относительно небольших длительностях возмущений первое управление предпочтительнее использовать для небольших амплитуд возмущения, а при относительно больших амплитудах возмущения предпочтительнее использовать второе управление. На основе этих двух управлений было построено комбинированное управление, сочетающее преимущества обоих управлений.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.

2. *Гурецкий В.В.* О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11–21.

3. *Sevin E. and Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971, 162 c.

4. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976, 320 с.

5. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983, 256 с.

6. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001, 440 p.

7. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.

8. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 147–168.

9. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 48–63.

10. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады РАН. 2018. Т. 445. № 4. С. 381–385.

11. *Корнеев В.А.* Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89–97.

12. *Корнеев В.А.* Оптимизация управления с упреждением и запаздыванием в задаче противоударной защиты объекта на подвижном основании // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 30–38.

13. *Корнеев В.А.* Использование постоянного управления с упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 147–158.

14. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N, Brennan M., Tang B.* Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Appl. Mech. Rev. 2019. V. 71. № 6.
https://doi.org/10.1115/1.4044190

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 36–43

УДК 62.503

ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА ОРИЕНТАЦИИ ДЛЯ ОРБИТАЛЬНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

© 2021 г. И. Н. Абезяев

Акционерное общество "Военно-промышленная корпорация "Научно-производственное объединение машиностроения", Московская область, Реутов, Россия

e-mail: iabezyaev@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.07.2020 г.
После доработки 13.08.2020 г.
Принята к публикации 17.09.2020 г.

Пространственный 3D-гирокомпас, разработанный автором для управления угловым положением орбитального космического аппарата (КА), предоставляет возможность создания на его основе системы ориентации, работающей как от прибора ориентации по Земле (ПОЗ), так и от астродатчика (АД), или какого-либо другого датчика без изменения основной структуры алгоритма. Такую систему можно назвать гибридной системой ориентации (ГСО). Разработка ГСО актуальна в связи с ростом требований Заказчика к универсализации разработок систем управления КА. Применение ГСО позволяет снизить нагрузку на бортовой вычислитель, упростить наземную отработку системы управления КА, улучшить качество управления КА в полете вследствие уменьшения разветвленности алгоритмов ориентации. В работе приведены рабочие алгоритмы, дан вывод основных соотношений, приведены результаты моделирования.

Ключевые слова: гирокомпас, система, ориентация, орбитальное гирокомпасирование, астроориентация, космический аппарат, стабилизация, программные повороты

DOI: 10.31857/S0572329921030028

1. Определение ГСО. 3D-гирокомпас [1] позволяет КА выполнять пространственные программные повороты как в режиме гирокомпасирования, т.е. непосредственно в процессе определения угловой ориентации КА относительно орбитальной системы координат (ОСК), так и в автономном режиме (при отключенном контуре коррекции). В структуру ОГК входят блок гироскопических датчиков угловых скоростей (БИУС), чувствительные элементы которого располагаются по связанным осям КА, двухкоординатный прибор ориентации по Земле (ПОЗ) или датчик горизонта, и исполнительные органы (ИО) – маховики, гиродины, реактивные двигатели. Принцип действия ОГК основан на поиске и определении курсовой ориентации путем индикации орбитальной угловой скорости КА при условии, что вертикальная ориентация аппарата предварительно построена.

Система астроориентирования (САО) отличается от ОГК тем, что вместо ПОЗ в систему добавляется астродатчик (АД), при этом полный вектор ориентации КА определяется сразу по его показаниям.

Для обеспечения необходимой функциональности и точности ориентирования обе системы ОГК и САО нуждаются в навигационно-баллистическом обеспечении (НБИ).

В настоящее время при разработке систем управления угловым движением системы ОГК и САО разрабатываются самостоятельно. Для каждой из систем разрабатываются свои алгоритмы, свое программное обеспечение, свои контрольные задачи, свои программы наземной экспериментальной отработки. В связи с этим возникает вопрос создания системы ориентации, где был бы возможен переход от ОГК к САО и наоборот только путем переключения датчиков ПОЗ или АД без изменения основного алгоритма. Такую систему назовем гибридной системой ориентации.

2. Принцип построения ГСО на базе 3D-гирокомпаса. Введем системы координат: $X_{ro}Y_{ro}Z_{ro}$ – инерциальная система координат (ИСК), X_{ro} – лежит в плоскости экватора Земли и направлена в точку весеннего равноденствия, Z_{ro} – совпадает с осью мира и направлена на север Земли, Y_{ro} – дополняет систему до правой; $X_oY_oZ_o$ – орбитальная система координат (ОСК), X_o – проходит через центр масс КА, лежит в плоскости орбиты, перпендикулярна оси Y_o и направлена в сторону движения КА, ось Y_o проходит через центр масс Земли и центр масс КА и направлена от Земли в сторону КА, ось Z_o дополняет систему координат до правой; XYZ – связанные оси КА (ССК) в номинальном положении совпадают с осями ОСК, ось X – крен, ось Y – курс, ось Z – тангаж; $X_pY_pZ_p$ – программная система координат (ПСК), в номинальном положении оси совмещены с осями ССК.

Уравнения движения 3D-гирокомпаса имеют вид [1]:

$$\begin{pmatrix}\dot\gamma\\ \dot\psi\\ \dot\vartheta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \vartheta & -\psi\\ -\vartheta & 0 & \gamma\\ \psi & -\gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \omega_{zp}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\varepsilon\\ -k_2\lambda\\ k_3\mu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \omega_{zp}\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \omega_{zp}\end{pmatrix}=\mathbf{M_p}\begin{pmatrix}\omega_{xo}\\ \omega_{yo}\\ \omega_{zo}\end{pmatrix}+\mathbf{M_{p\gamma}M_{p\vartheta}}\begin{pmatrix}0\\ \dot\psi_p\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{M_{p\gamma}}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot\vartheta_p\end{pmatrix}+\mathbf{E}\begin{pmatrix}\dot\gamma_p\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{M_p}=\mathbf{M_{p\gamma}M_{p\vartheta}M_{p\psi}} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon=\gamma_{hs}-\gamma_p-\gamma=\gamma_{sp}-\gamma \tag{2.4}$$

$$\lambda=\varepsilon M_{11}+\mu M_{13} \tag{2.5}$$

$$\mu=\vartheta_{hs}-\vartheta_p-\vartheta=\vartheta_{sp}-\vartheta \tag{2.6}$$

где обозначено: ψ, ϑ, γ, $\dot\psi$, $\dot\vartheta$, $\dot\gamma$ – углы и угловые скорости стабилизации ССК относительно ПСК по курсу, тангажу и крену; γ_{hs}, ϑ_{hs} – сигналы ПОЗ в каналах крена и тангажа ψ_p, ϑ_p, γ_p, $\dot\psi_p$, $\dot\vartheta_p$, $\dot\gamma_p$ – программные углы и соответствующие им программные скорости КА относительно ОСК по курсу, тангажу и крену; γ_{sp}, ϑ_{sp}, ψ_{sp} – сигнал разностей показаний ПОЗ и заданных программных углов; $\mathbf{M_{p\psi}}$, $\mathbf{M_{p\vartheta}}$, $\mathbf{M_{p\gamma}}$ – матрицы плоских программных поворотов КА по курсу, тангажу и крену; M_{11}, M_{13} – элементы матрицы $\mathbf{M_p}$; p, q, r – абсолютные угловые скорости ССК относительно ИСК; ω_{xp}, ω_{yp}, ω_{zp} – программные угловые скорости КА относительно ИСК; k_1, k_2, k_3 – коэффициенты коррекции; $\omega_{xo}=\dot\Omega\sin i\cos u-i'\sin u$, $\omega_{yo}=\dot\Omega\sin i\sin u+i'\cos u$, $\omega_{zo}=$ $=-\dot\Omega\cos i-\omega_o$ ($\dot\Omega$ – угловая скорость линии узлов, угловая скорость i' и угол i – наклона плоскости орбиты к плоскости экватора Земли, u – аргумент широты, $\omega_o=\dot u$ – орбитальная угловая скорость.

На исполнительные органы (ИО) подаются сигналы ψ, ϑ, γ, $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\gamma}$ для стабилизации КА относительно ПСК по углу и угловой скорости.

Заметим, что уравнения (2.1)–(2.6) в каналах крена и тангажа построены в форме следящей системы с заданными программными положениями ϑ_p, γ_p, $\dot{\vartheta}_p$, $\dot{\gamma}_p$. Канал курса достраивается до заданного программного положения методом гирокомпасирования. Отсюда следует, что если бы в канале курса был датчик, прямым образом измеряющий курсовое положение КА, то, по аналогии с каналами крена и тангажа, корректирующий сигнал 3D-гирокомпаса по курсу можно было бы представить в виде:

$$L_\psi = +k_2(\psi_D - \psi_p - \psi) \tag{2.7}$$

т.е. точно так же как и в каналах крена и тангажа:

$$L_\gamma = +k_1(\gamma_D - \gamma_p - \gamma) \tag{2.8}$$

$$L_\vartheta = +k_3(\vartheta_D - \vartheta_p - \vartheta) \tag{2.9}$$

где ψ_D, ϑ_D, γ_D – сигналы некоего позиционного датчика выдающего точные значения углового положения КА по курсу, крену и тангажу относительно ОСК.

При этом уравнение (2.1) трансформируется в уравнение аналогичного вида:

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vartheta & -\psi \\ -\vartheta & 0 & \gamma \\ \psi & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{xp} \\ \omega_{yp} \\ \omega_{yp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\gamma \\ L_\psi \\ L_\vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_{xp} \\ \omega_{yp} \\ \omega_{zp} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

где L_ψ, L_ϑ, L_γ соответствуют (2.7)–(2.9).

Покажем, что в этом случае “модернизированный” в канале курса 3D-гирокомпас сохраняет свойства управления программными поворотами КА.

Для этого в (2.10) положим

$$\vartheta = \dot{\vartheta} = \gamma = \dot{\gamma} = \psi = \dot{\psi} = 0 \tag{2.11}$$

что означает завершение процесса стабилизации в установившемся программном положении КА.

Необходимо так же, что бы сигналы коррекции (2.7)–(2.9), отвечающие за программное положение КА по углу, в установившемся программном положении, приняли нулевые значения:

$$L_\psi = L_\vartheta = L_\gamma = 0 \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11), (2.12) в (2.10), получаем достаточное условие устойчивости программного положение КА:

$$(p \;\; q \;\; r)^{\mathrm{T}} = (\omega_{xp} \;\; \omega_{yp} \;\; \omega_{zp})^{\mathrm{T}}$$

Таким образом, 3D-гирокомпас путем замены ПОЗ на трехкоординатный позиционный датчик и изменения знака в контуре коррекции по курсу на положительный ($+k_2$), достаточно просто трансформируется, например, в систему астроориентации КА с возможностью неограниченных программных поворотов. При этом базовый алгоритм ориентации (2.1)–(2.6) остается практически неизменным, за исключением замены датчика ориентации и изменения знака корректирующего сигнала в канале курса.

По определению, которое дано выше, полученная система ориентации является гибридной.

3. Практическая реализация. Построим ГСО на примере переключения 3D-гирокомпаса из режима гирокомпасирования в режим астроориентации. Для этого, по определению ГСО, нам нужно заменить ПОЗ на АД и подставить в (2.7)–(2.9) значе-

ния Эйлеровых углов ориентации КА относительно ОСК вместо $\gamma_{hs}, \vartheta_{hs}$, λ, и поменять знак k_2 в канале курса. Это достаточно просто сделать, рассчитав по показаниям АД, а так же по заданным программному положению КА относительно ОСК и данным НБИ, матрицу ориентации КА относительно ОСК. После этого вычислить по ее элементам углы ориентации КА относительно ОСК – ψ_D, ϑ_D, γ_D и подставить в уравнения (2.4)–(2.6). Однако удобнее в сигналах коррекции (2.7)–(2.9) вычислять не сами углы, а сразу разностные углы $\mathbf{M_{ro}} = \mathbf{CM_pA}$ между ССК и ПСК, что не противоречит (2.4)–(2.6):

$$\psi^*_{sp} = \psi_D - \psi_p, \quad \gamma^*_{sp} = \gamma_D - \gamma_p, \quad \vartheta^*_{sp} = \vartheta_D - \vartheta_p$$

сигналы коррекции примут вид:

$$L_\psi = +k_2(\psi^*_{sp} - \psi) \tag{3.1}$$

$$L_\gamma = +\, k_1(\gamma^*_{sp} - \gamma) \tag{3.2}$$

$$L_\vartheta = +k_3(\vartheta^*_{sp} - \vartheta) \tag{3.3}$$

Для вычисления ψ^*_{sp}, ϑ^*_{sp}, γ^*_{sp} найдем матрицу показаний АД ($\mathbf{M_{ro}}$) через матрицы последовательных переходов: ИСК в ОСК (матрица $\mathbf{A}$), ОСК в ПСК (матрица $\mathbf{M_p}$), ПСК в ССК (матрица $\mathbf{C}$), тогда $\mathbf{M_{ro}} = \mathbf{CM_pA}$, откуда:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M_{ro}A^TM_p^T}$$

и далее:

$$\psi^*_{sp} = -\mathrm{arctg}\frac{c_{13}}{c_{11}} \tag{3.4}$$

$$\vartheta^*_{sp} = \quad \arcsin c_{12} \tag{3.5}$$

$$\gamma^*_{sp} = -\mathrm{arctg}\frac{c_{32}}{c_{22}} \tag{3.6}$$

Алгоритм САО, построенный на базе 3D-гирокомпаса, совместно с (2.2), (2.3), (2.10) и (3.4)–(3.6) принимает окончательный вид:

$$\begin{pmatrix}\dot\gamma\\ \dot\psi\\ \dot\vartheta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \vartheta & -\psi\\ -\vartheta & 0 & \gamma\\ \psi & -\gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \omega_{zp}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1(\gamma^*_{sp} - \gamma)\\ k_2(\psi^*_{sp} - \psi)\\ k_3(\vartheta^*_{sp} - \vartheta)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\omega_{xp}\\ \omega_{yp}\\ \omega_{zp}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

САО (3.7) практически не отличается от 3D-гирокомпаса (2.1), за исключением замены датчиков ориентации:

$$\gamma_{sp} \to \gamma^*_{sp}, \quad \vartheta_{sp} \to \vartheta^*_{sp}, \quad \lambda \to \psi^*_{sp} - \psi$$

и изменения знака коррекции ($-k_2$) в канале курса на положительный ($+k_2$).

Необходимо отметить, что номиналы коэффициентов коррекции k_1, k_2, k_3 в структурах 3D-гирокомпаса и для САО могут быть как одинаковыми, так и отличными, что не меняет сущности ГСО.

На рис. 1 показана сравнительная ориентация КА в режиме программных поворотов с применением 3D-гирокомпаса (*a*) и с применением САО (*b*). Повороты выполняются на одинаковые программные углы $\psi_p = 70°$, $\vartheta_p = -20°$, $\gamma_p = 30°$, в обеих системах выбраны одинаковые номиналы коэффициентов коррекции:

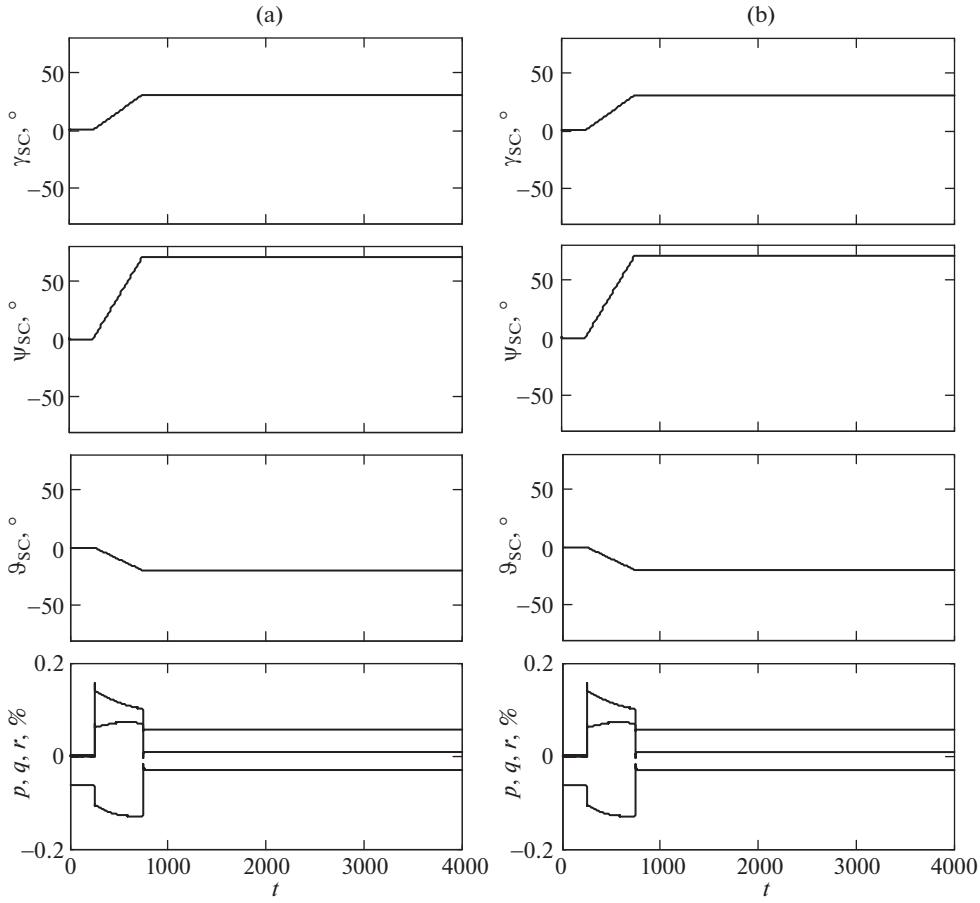


Рис. 1

– 3D-гирокомпас $k_1 = 0.01$ с$^{-1}$, $k_2 = -0.02$ с$^{-1}$, $k_3 = 0.03$ с$^{-1}$

– САО $k_1 = 0.01$ с$^{-1}$, $k_2 = +0.02$ с$^{-1}$, $k_3 = 0.03$ с$^{-1}$

В качестве ИО применены гиродины с кинетическим моментом $H = 60$ нмс, масса КА 1200 кг, орбита круговая, $\omega_o = 0.0011$ с$^{-1}$.

На рисунках показаны угловые положения КА (ψ_{sc}, ϑ_{sc}, γ_{sc}) – ССК относительно ОСК и абсолютные угловые скорости ССК относительно ИСК (p, q, r). Из приведенных графиков следует, что переходные процессы при выполнении программных поворотов в обеих системах практически идентичны.

4. Автономный режим. Свойство универсальности ГСО наглядно проявляется в автономном режиме ориентации, т.е. при отключенных контурах коррекции $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. В этом случае системы САО и 3D-гирокомпас становятся не отличимыми, так как левые и правые части их алгоритмов совпадают абсолютно. На рис. 2 иллюстрируется возможность обеих систем в этом режиме. В исходном положении отключаются коэффициенты коррекции $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ и задаются программные повороты КА на углы 360° по каждой оси ориентации. Результаты поворота (как для 3D-гирокомпаса, так и для САО) совпадают. Поворот показан в форме косинуса угла

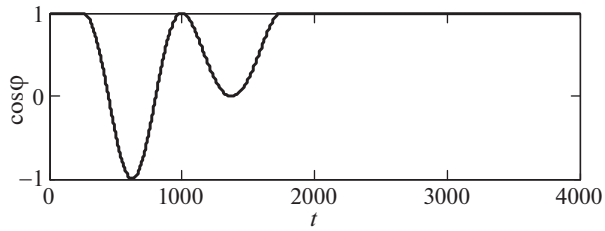


Рис. 2

поворота КА относительно вектора конечного поворота. Из приведенного графика следует, что КА, выполнив программные повороты относительно осей курса, крена и тангажа на 360° приходит в исходное положение относительно ОСК ($\cos\varphi = 1$).

Таким образом, поведение 3D-гирокомпаса и САО в автономном режиме неотличимы.

5. Свойство невозмущенности. На рис. 3 иллюстрируется еще одно свойство ГСО, которое назовем свойством невозмущенности.

На этом рисунке показан программный поворот КА, так же как и ранее, на углы $\psi_p = 70°$, $\vartheta_p = -20°$ и $\gamma_p = 30°$ (начальные условия нулевые). В течение времени $t_1 = 500$ с программный поворот выполняется в режиме коррекции от датчиков внешней информации (безразлично АД или ПОЗ). В момент времени $t_1 = 500$ с, т.е. непосредственно в процессе выполнения программного поворота, контур коррекции отключается ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$) внезапно или специально, и система начинает работать автономно. Из переходных процессов следует, что в программном движении системы ничего не изменилось, КА продолжает движение и завершает программный поворот на заданные углы ориентации, “не замечая” отключения корректирующих сигналов и не испытывая при этом никаких дополнительных возмущений. Более того, в этом состоянии система ориентации КА может выполнять полетную программу еще длительное время (сотни минут), ограниченное только медленно нарастающей потерей точности ориентации из-за собственного дрейфа гироскопических измерителей. В момент времени $t_2 = 2500$ с (см. рис. 3) вновь задействован устойчивый режим коррекции ($k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq 0$). Из графиков переходных процессов видно, что в движении КА практически ничего не произошло – КА продолжает миссию, не “замечая” в своем движении произошедшего в системе изменения.

Следует отметить, что ни в момент отключения коррекции, ни после, точность ориентации КА практически не ухудшается. Весьма, полезное для практики свойство ГСО, входящее в понятие “сбоеустойчивость”.

В случае отказа датчика ориентации радикальным средством для поддержания устойчивой ориентации КА является одномоментное переключение ГСО на другой тип датчика. Возможны меры временного характера: полное отключение контура коррекции, отключение обратных связей по углу, замена “живого” сигнала датчика его математическим аналогом, с дальнейшим принятием мер по устранению неисправности. Во всех перечисленных случаях ориентация КА относительно ОСК не будет нарушена на достаточно длительном интервале времени.

6. Выводы Рассмотрена система ориентации орбитального КА, названная гибридной (ГСО). Система базируется на алгоритме 3D-гирокомпаса, который отличается универсальностью по отношению к выбору датчиков ориентации, что позволяет строить на его основе различные по существу системы ориентации подобным образом.

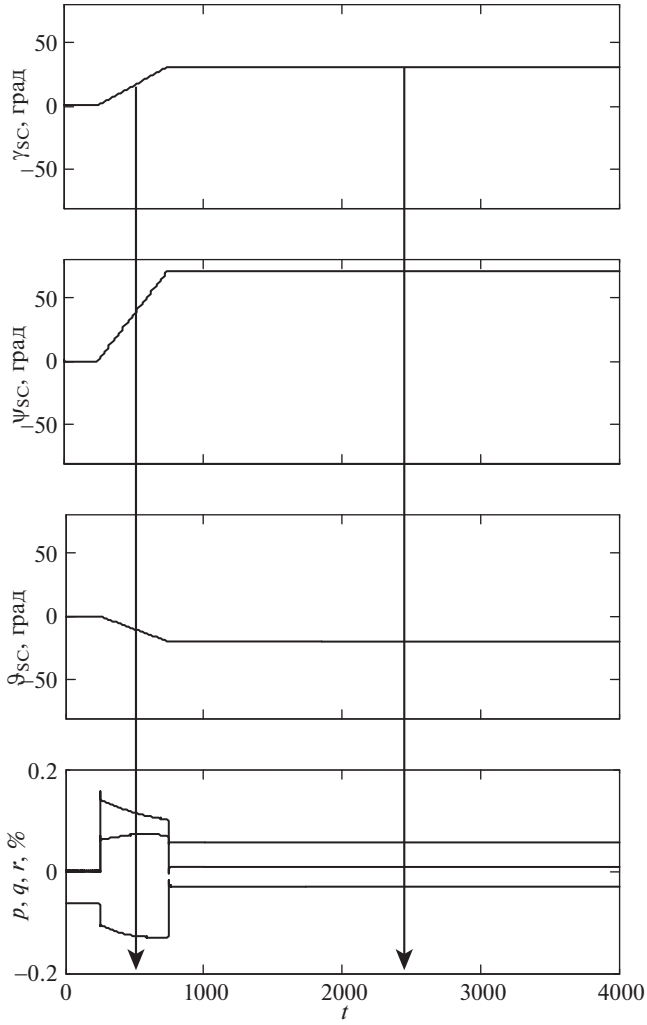


Рис. 3

Универсальность ГСО достигается тем, что переход из одной системы в другую осуществляется только переключением датчиков ориентации и изменением знака коррекции в канале курса без изменения основного алгоритма. Показана эффективность работы алгоритма в среде 3D-гирокомпаса с переключением на систему астроориентации и обратным переключением в среду гирокомпасирования. Показано свойство невозмущённости (сбоеустойчивости) программной ориентации КА при отключении контура коррекции ГСО от датчика внешней информации.

Предложенный принцип построения ГСО позволяет упростить наземную отработку системы управления КА и улучшить качество управления КА в полетных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абезяев И.Н.* Гирокомпас для орбитального космического аппарата // Патент 2597018 РФ. М.: ФИПС. 2016. Бюл. № 24.
2. *Боярчук К.А., Виленский В.В., Гришин В.Ю., Еремеев П.Н., Зайцев С.Э., Зимин С.Н., Морозова Л.М., Рябиков В.С., Салихов Р.С.* Система ориентации и стабилизации КА “Кондор-Э” // Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXVIII Академических чтений по космонавтике. 2014. Т. 22. С. 408–424.
3. *Абезяев И. Н., Андреяненкова А.В., Величко П.Е., Поцеловкин А.И., Фокин Д.В.* Способ восстановления курсовой ориентации космического аппарата с использованием орбитального гирокомпаса // Инженерный журнал: наука и инновации. М.: МГТУ, 2017. № 5(65). С. 1–8.
4. *Abezyaev I.N., Velichko P.E., Karpunin A.A., Potselovkin A.I., Tytkov I.P.* Development of the algorithm of the spacecraft programmed yaw turns with the use of orbital gyrocompass // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2171. № 1. P. 060009.
5. *Ткаченко А.И.* Определение ориентации космического аппарата с помощью построителя вертикали // Космічна наука і технологія. 2016. Т. 22. № 2. С. 22–28.
6. *Major F.G.* The Mechanical Gyrocompass //Quo Vadis: Evolution of Modern Navigation. New York, NY: Springer, 2014. P. 259–285.
7. *Reid D.B.* Orbital gyrocompass evolution // GON Intertial Sensors and Systems (ISS). 2016. V. 20. P. 149–170.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 44–51

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ПЕРМАНЕНТНОГО ВРАЩЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАВЕНСТВА АППЕЛЬРОТА

© 2021 г. М. А. Новиков

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: nma@icc.ru

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.
После доработки 03.02.2020 г.
Принята к публикации 12.02.2020 г.

В механических автономных консервативных системах, допускающих частный интеграл, иногда имеются стационарные движения, существующие как с частным интегралом, так и без него. Рассматривается система, в которой при выполнении равенства Аппельрота существует интеграл Гесса и выделено стационарное движение, имеющее место и без равенства Аппельрота. В статье вторым методом Ляпунова проведено исследование устойчивости такого стационарного движения. Установлено, что граница области достаточных условий устойчивости не совпадает с границей области необходимых условий устойчивости.

Ключевые слова: стационарное движение, общий интеграл, частный интеграл, связка интегралов, устойчивость движения

DOI: 10.31857/S0572329921030090

1. Введение. Более полное изучение свойств механических автономных консервативных систем можно осуществить при нахождении наибольшего числа первых интегралов. В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки [1, 2] кроме трех известных общих интегралов: полной энергии, кинетического момента и Пуассона, в [2] приведены случаи существования частных интегралов. Одним из них является интеграл Гесса, существующий только при выполнении равенства Аппельрота [2].

В консервативных системах важной характеристикой считается существование стационарных движений, которые отыскиваются методом Рауса–Ляпунова [3, 11]: составлением связки из первых интегралов. Иногда найденные по полной связке известных первых интегралов стационарные движения совпадают с такими же стационарными движениями, составленными для неполной связки без учета какого-либо первого интеграла. Особое значение имеет игнорирование частного интеграла.

Хотя этот вопрос недостаточно изучен, он представляет интерес исследования устойчивости по Ляпунову [12–16] найденных стационарных движений и устойчивости в окрестности этого интеграла, когда не существует частный интеграл.

2. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная механическая автономная консервативная система [1, 2], описываемая дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered} OA\dot{p} = (B - C)qr + z_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ B\dot{q} = (C - A)rp - z_0\gamma_3 + x_0\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ C\dot{r} = (A - B)rq - x_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x_0 \neq 0 \neq z_0$; A, B, C – моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, z_0 – координаты центра масс в подвижных осях; γ_1, γ_2, γ_3 – проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ.

Для системы (2.1) известны три первых общих интеграла [2]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = \text{const}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

При выполнении равенства Аппельрота [2]:

$$AC(x_0^2 + z_0^2) = B(Ax_0^2 + Cz_0^2) \tag{2.2}$$

система (2.1) допускает частный линейный интеграл Гесса, заданный в аналитическом виде

$$V_3 = Ax_0p + Cz_0r = 0 \tag{2.3}$$

В статье [16] приведены некоторые стационарные движения системы (2.1). Одним из них является перманентное вращение:

$$\begin{gathered}
p_0 = \frac{-z_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(A-C)x_0z_0}}; \quad q_0 = 0 \\
r_0 = \frac{x_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C(A-C)x_0z_0}} \\
\gamma_{10} = \frac{-Cz_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad \gamma_{20} = 0 \\
\gamma_{30} = \frac{Ax_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad A > C, \quad x_0z_0 > 0
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Отметим сразу, что для системы (2.1) стационарное движение (2.4) может существовать и без участия интеграла (2.3), что соответствует невыполнению равенства (2.2).

Ставится цель исследования вторым методом Ляпунова устойчивости перманентного вращения (2.4) в малой окрестности соотношения (2.2), когда не выполняется равенство Аппельрота. Это выражается условием

$$B = \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2} + b \tag{2.5}$$

при достаточно малых отличных от нуля вещественных величинах b. Здесь предварительно не оговаривается знак b.

3. Необходимые условия устойчивости. Получаемые достаточные условия следует в дальнейшем сопоставлять с необходимыми условиями устойчивости стационарного движения (2.4). Для этого введем отклонения:

$$x_1 = \mathrm{p} - \mathrm{p}_0, \quad x_2 = \mathrm{q}, \quad x_3 = \mathrm{r} - \mathrm{r}_0$$
$$x_4 = \gamma_1 - \gamma_{10}, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \gamma_{30}$$

Матрица линейной правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения будет следующей

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(B-C)r_0}{A} & 0 & 0 & \frac{z_0}{A} & 0 \\ \frac{(C-A)r_0}{B} & 0 & \frac{(C-A)p_0}{B} & \frac{-z_0}{B} & 0 & \frac{x_0}{B} \\ 0 & \frac{(A-B)p_0}{C} & 0 & 0 & \frac{-x_0}{C} & 0 \\ 0 & -\gamma_{30} & 0 & 0 & r_0 & 0 \\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & -r_0 & 0 & p_0 \\ 0 & \gamma_{10} & 0 & 0 & -p_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получение необходимых условий устойчивости опирается на характеристическое уравнение матрицы D_1 [12–15], которое имеет вид

$$f(\lambda) = \det(D_1 - \lambda E) = \lambda^2 f_1(\lambda) = 0$$

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 + a_4\lambda^2 + a_2 \tag{3.1}$$

где

$$a_4 = \frac{F_4}{ABC(A-C)x_0z_0\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad a_2 = \frac{F_2}{A^2BC^2(A-C)x_0^2z_0^2(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}$$

$$F_4 = A^2\left[AB + (A-C)(B-C)\right]x_0^4 + AC\left[B + 2(A-C)\right]x_0^2z_0^2 + \\ + C^2\left[BC + (A-C)(A-B)\right]z_0^4$$

$$F_2 = (Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(B-C)x_0^2 - C(A-B)z_0^2]\varphi(A, C, x_0, z_0)$$

$$\varphi(A, C, x_0, z_0) = A^3x_0^4 - 4AC(A-C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4$$

Вычисления определителей матриц, подстановки, замены переменных и факторизация символьных выражений были проведены на персональном компьютере системой аналитических вычислений “Mathematica”.

Многочлены F_4, F_2 выделены отдельно, чтобы освободиться от выражений с знаменателями.

Нельзя исключать из анализа нулевые корни уравнения (3.1). Вместе с тем из вида матрицы D_1 не допускается возможность возникновения всех нулевых корней уравнения (3.1). Тогда для отсутствия отличных от нуля вещественных корней уравнения $f_1(\lambda) = 0$ необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

$$\text{I.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 > 0 \tag{3.2}$$

$$\text{II.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 \le 0, \quad a_4^2 < 4a_2 \tag{3.3}$$

$$\text{III.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 = 0 \tag{3.4}$$

Отдельно для существования дополнительных нулевых корней вводится случай

$$\text{IV.} \quad a_2 = 0; \quad a_4 > 0 \tag{3.5}$$

Проверка перечисленных условий осуществляется вычислением знаков выражений F_2, F_4.

При подстановке (2.5) в выражения F_2, F_2, $a_4^2 - 4a_2$ запишем

$$F_4 = ba_{41} + a_{40}, \quad F_2 = b(Ax_0^2 + Cz_0^2)\varphi(A, C, x_0, z_0)$$

$$a_4^2 - 4a_2 = \frac{a_{02}b^2 + a_{01}b + a_{00}}{AB^2C(Ax_0^2 + Cz_0^2)x_0^2z_0^2}$$

где

$$a_{41} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(2A - C)x_0^2 - C(A - 2C)z_0^2]$$

$$a_{40} = AC[A^2x_0^4 + 2(A^2 - AC + C^2)x_0^2z_0^2 + C^2z_0^4] > 0$$

$$a_{02} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)\ [AC\,(x_0^2 + z_0^2)^2 - 12\,(A - C)^2\ x_0^2z_0^2]$$

$$a_{01} = 2(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2[A^2Cx_0^4 + (A + C)(-6A^2 + 13AC + AC^2)x_0^2 + AC^2z_0^4]$$

$$a_{00} = AC[(Ax_0^2 + Cz_0^2)^4 - 12(A - C)^2(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)(x_0^2 + z_0^2)x_0^2z_0^2]$$

Кроме того запишем необходимые условия существования твердого тела [1]:

$$A + B > C, \quad A + C > B, \quad B + C > A$$

Здесь первое неравенство выполняется тождественно ввиду $A > C$. Из второго неравенства следует ограничение

$$b < \frac{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{3.6}$$

Последнее неравенство сводится к

$$b > \frac{A(A - 2C)x_0^2 - C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{3.7}$$

Очевидно, в правой части (3.7) возможен любой знак выражения.

4. Достаточные условия устойчивости. Наиболее эффективным способом получения достаточных условий устойчивости является второй метод Лянунова [12]. Построение знакоопределенных функций Ляпунова будем выполнять методом Четаева [13] – составлением связок из первых интегралов возмущенного движения.

Общие интегралы возмущенного движения запишутся:

$$V_{01} = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2(Ap_0x_1 + Cr_0x_3 + x_0x_4 + z_0x_6) = \text{const}$$

$$V_{11} = Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + A(\gamma_{10}x_1 + p_0x_4) + C(\gamma_{30}x_3 + r_0x_6) = \text{const}$$

$$V_{21} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2(\gamma_{10}x_4 + \gamma_{30}x_6) = 0$$

Равенство Аппельрота и частный интеграл Гесса здесь могут не выполняться, и поэтому не учитываются. При анализе связки интегралов значительно проще и эффективнее предварительное исключение интегралов с фиксированными константами (в данном случае интеграл Пуассона). Для этого из интеграла $V_{21} = 0$ запишем решение

$$x_6 = -\gamma_{30} + \gamma_{30}\sqrt{1 - \frac{(x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10}x_4)}{\gamma_{30}^2}}$$

Для анализа многочленов нужно освободиться от иррациональности разложением подкоренного выражения в ряд Маклорена

$$x_6 = -\gamma_{30}\left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{8} + \frac{k^3}{16} + \cdots\right), \quad k = \frac{(x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10}x_4)}{\gamma_{30}^2}$$

Из оставшихся интегралов с подставленной переменной x_6 составим связку

$$K(x, \alpha) = \alpha_0 V_{01} + \alpha_1 V_{11} \tag{4.1}$$

Чтобы не вводить дробные множители полагаем

$$\alpha_0 = \sqrt{AC(A-C)x_0 z_0}; \quad \alpha_1 = 2\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

Квадратичная часть составленной связки интегралов будет представлена квадратичной формой от оставшихся пяти переменных $K^{(2)}(x) = x'Mx$, $x \in R^5$ с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & 0 \\ m_{14} & 0 & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{25} & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

где

$$m_{11} = \sqrt{A^3C(A-C)x_0z_0}, \quad m_{14} = A\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{22} = B\sqrt{AC(A-C)x_0z_0}, \quad m_{25} = B\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{33} = \sqrt{AC^3(A-C)x_0z_0}, \quad m_{34} = \frac{C^2z}{Ax_0}\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{44} = (x_0^2 + z_0^2)\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A^3(A-C)x_0^5z_0}}, \quad m_{55} = (x_0^2 + z_0^2)\sqrt{\frac{AC(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{(A-C)x_0z_0}}$$

На главной диагонали матрицы M находятся только положительные элементы. Согласно [17] по критерию Сильвестра для положительной определенности $K^{(2)}(x)$ необходимо и достаточно положительности всех главных миноров матрицы M. Для краткости обозначим их как $J(i_1, i_2, \cdots, i_s)$, состоящие из $i_1, i_2, \cdots, i_s$, $(s \geq 1)$ строк и столбцов. Тогда для миноров матрицы M можно составить тождества: $J(1,2,3,4) = m_{22}J(1,3,4)$, $J(1,2,3,4,5) = J(1,3,4)J(2,5)$.

Проведенные вычисления получают:

$$J(1) = m_{11} > 0, \quad J(1,2) = m_{11}m_{22} > 0, \quad J(1,2,3) = m_{11}m_{22}m_{33} > 0$$

$$J(1,\ 3,\ 4) = -\sqrt{\frac{C^3(A-C)^3(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)z_0}{Ax_0^3}}(A^3x_0^4 - C^3z_0^4)$$

$$J(2,\ 5) = B\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}[AC(x_0^2 + z_0^2) - B(Ax_0^2 + Cz_0^2)]$$

Окончательно для положительной определенности $K^{(2)}(x)$ необходимо и достаточно положительности $J(1, 3, 4) > 0$, $J(2, 5) > 0$, что выражается:

$$B < \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{4.2}$$

$$A^3x_0^4 < C^3z_0^4 \tag{4.3}$$

Таким образом, при условиях (4.2), (4.3) и $b < 0$ перманентное вращение (2.4) устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости [12].

Легко показать, что при выполнении (4.2), (4.3) и $b < 0$ имеет место $a_2 > 0$, $a_4 > 0$. Действительно, для значений $A^3x_0^4 < C^3z_0^4$ запишем $\varphi(A, C, x_0, z_0) = (A^3x_0^4 - C^3z_0^4) - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2$, и полученное выражение будет отрицательным как сумма двух отрицательных величин. Для значений $z_0^2 > \sqrt{A^3/C^3}x_0^2$ имеет место $F_4 > A\{B[A^2 + C^2 + (A - C)^2 + (A - C)\sqrt{AC}] + (A - C)^2\sqrt{AC}\}x_0^4 > 0$ как сумма всех положительных слагаемых. Можно отметить, условия (4.2) и (4.3) при $b < 0$ относятся к ситуации (3.2).

5. О необходимых условиях устойчивости для $b > 0$. Установленные ранее достаточные условия устойчивости перманентного вращения (2.4) получены на основе второго метода Ляпунова только для значений $b < 0$. Возможно достаточные условия устойчивости при $b > 0$ тоже существуют. Только их искать следует другим способом, в частности, используя известные теоремы Г.В. Каменкова [14, 15]. Предварительно следует проверить возможность существования необходимых условий устойчивости. Из неравенств (3.6), (3.7) составим:

$$\max\left[0; \frac{A(A - 2C)x_0^2 - C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right] < b < \frac{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2}$$

$$A^3x_0^4 - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4 > 0$$

относящиеся к необходимым условиям существования твердого тела. Легко показать, что тогда будет обеспечено выполнение $F_2 > 0$, что эквивалентно $a_2 > 0$. Далее при имеющихся здесь ограничениях $x_0^2 > \frac{C}{A^2}[2(A - C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^2$ установим знак коэффициента $a_{41} > \frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A}[3A^2 - 4AC + 2C^2 + (2A - C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^4$. Как легко видеть, он получен положительным как сумма положительно определенной квадратичной формы рациональной части выражения и положительного иррационального слагаемого в квадратной скобке. Так как функция F_4 по переменной b возрастает и $a_{40} > 0$, то при положительных b и условиях (3.6), (3.7) многочлен F_4 всюду принимает положительные значения, соответственно, $a_4 > 0$.

Вместе с тем рассмотрим знак выражения F_4 при $\varphi(A, C, x_0, z_0) = 0$. Из последнего равенства выразим $x_0^2 = \frac{C}{A^2}[2(A - C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^2$ и подставим в F_4, которое примет вид

$$\begin{gathered}\frac{C^2}{A^2}\{B[(A - C)(17A^2 - 23AC + 10C^2) + 2C^3 + \\ + (A - C)(9A - 4C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}] + \\ + (A - C)^2[(5A^2 - 11AC + 8C^2) + 2(A - 2C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]\}z_0^4\end{gathered} \tag{5.1}$$

Для рассматриваемых соотношений моментов инерции $A > C$ коэффициент при величине B положительный как сумма трех положительных слагаемых: положительно определенной квадратичной формы рациональной части, положительного слагаемого и положительной иррациональной части. Первое слагаемое в последней квадратной скобке представляет положительно определенную квадратичную форму рациональной части. Иррациональная часть содержит знакопеременное выражение при $A > C$. Можно проверить, что $(5A^2 - 11AC + 8C^2)^2 - 4(A - 2C)^2(4A^2 - 7AC + 4C^2) = 9A^2(A - C)^2 > 0$. Тогда выражение во второй квадратной скобке (5.1) принимает знак рациональной части, т.е. положительно.

Таким образом, в этом случае имеем $F_4 > 0$, откуда следует $a_4 > 0$.

Следовательно, при $b > 0$ возможны только случаи (3.2) и (3.5) необходимых условий устойчивости.

Обращение в нуль выражения (5.1) возможно только при $z_0 = 0$, из чего непосредственно следует $x_0 = 0$, что не допустимо для стационарного движения (2.4).

Установление достаточных условий устойчивости описанным в [14, 15] способом для символьных выражений оказалось невозможным ввиду недостатка имеющихся вычислительных ресурсов (оперативной памяти и быстродействия), и их исследование здесь не проведено. Осуществление в символьном виде линейного ортогонального, затем нелинейного нормализующего преобразований переменных, классификация элементарных делителей матрицы D_1 и последующий анализ подсистемы с критическими переменными представляется неразрешимой задачей, даже в настоящее время. В численном виде такая задача решается без затруднений.

6. Заключение. Составленные в статье достаточные условия устойчивости перманентного вращения (2.4) установлены только для отрицательных отклонений $\left(B - \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right)$. Эти условия относятся к случаю существования наименьшего числа нулевых корней характеристического уравнения для линейной правой части системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1), когда $a_2 > 0$, $a_4 > 0$. Ввиду $AC(A - C)x_0^2 z_0^2 \neq 0$ достаточные условия устойчивости яляются только частью необходимых, не достигая границы области устойчивости, устанавливаемой необходимыми условиями.

Для положительных отклонений $\left(B - \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right)$, хотя и не удалось получить достаточные условия устойчивости (2.5), составлены только необходимые условия, возможные при $a_2 \geq 0$, $a_4 > 0$. Случаи существования необходимых условий устойчивости (3.3) и (3.4) здесь оказались не существующими.

Подробное изложение выкладок показало, что устойчивость перманентного вращения (2.4) существует как при положительных, так и отрицательных значениях x_0, z_0.

Следует отметить, что устойчивость перманентного вращения (2.4) при несуществовании частного интеграла Гесса системы (2.1) достигается на членах второго порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.

2. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.

3. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. L.: McMillan, 1877. 108 p.

4. *Routh E.J.* The advanced part of a treatiseon the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.

5. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд -во АН СССР, 1954. С. 276–319.

6. *Кузьмин П.А.* Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения // Труды межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движений и аналитической механике. Казань, 1964. С. 93–98.

7. *Иртегов В.Д.* Стационарные движения уравновешенного твердого тела и их устойчивость в центральном поле сил тяготения // Труды казанского авиационного института. Казань, 1964. Вып. 83. С. 3–15.

8. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и дисспативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 1–132.

9. *Карапетян А.В., Рубановский В.Н.* Об устойчивости консервативных и дисспативных механических систем // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 43–49.

10. *Карапетян А.В., Рубановский В.Н.* О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с первыми интегралами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1986. Вып. 17. С. 91–99.

11. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал, 1998. 165 с.

12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.

13. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

14. *Каменков Г.В.* Устойчивость движения, колебания, аэродинамика.Т. 1. М.: Наука, 1971. 255 с.

15. *Каменков Г.В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. Т. 2. М.: Наука, 1972. 213 с.

16. *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 3. С. 28–37.

17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 52–63

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2021 г. А. О. Ватульян[a,b,*], В. О. Юров[a,b,]**

[a] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

[b] *Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия*

**e-mail: vatulyan@aaanet.ru*

***e-mail: vitja.jurov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.
После доработки 08.12.2020 г.
Принята к публикации 27.12.2020 г.

Рассмотрена задача об определении переменных характеристик упругого стержня, изготовленного из функционально-градиентного материала по данным акустического зондирования. В качестве дополнительной информации используются амплитудно-частотные характеристики стержня при продольных и изгибных колебаниях. Сформулирована система нелинейных интегральных уравнений, решение которой строится на основе итерационной схемы. Представлены условия, при которых реконструкция осуществляется единственным образом, приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача, балка, неоднородность, единственность, итерационный процесс, вычислительный эксперимент, слабая постановка, интегральные уравнения первого рода

DOI: 10.31857/S0572329921040139

Введение. В последнее время объектами исследования в механике стали объекты и материалы, переменностью свойств которых для адекватного прогноза на воздействие различного типа пренебрегать нельзя. Здесь в первую очередь отметим задачи геофизики и горной механики, биомеханики тканей, задачи о деформировании элементов конструкций из композиционных и функционально-градиентных материалов [1]. Для таких объектов развиты и совершенствуются способы осреднения [2], согласно которым вычисляются параметры однородного тела, однако иногда расчет на основе осредненных моделей может дать весьма отдаленные от наблюдаемых в эксперименте результаты [3].

Функционально-градиентные структуры в последние годы становятся распространенными элементами конструкций и часто вытесняют слоистые композиты и покрытия. Технологические аспекты изготовления таких элементов с заданным градиентом свойств по одной координате достаточно сложны и на практике не всегда удается достичь заданных функциональных зависимостей (степенных, экспоненциальных), задаваемых в теоретической модели. В связи с этим важным этапом является идентификация градиентных свойств готовых изделий на основе одного из неразрушающих методов, прежде всего акустических и тепловых, что требует решения ряда обратных задач. Заметим, что существует достаточное число работ и монографий, в которых обратные задачи (ОЗ) для операторов второго порядка базируются на спектральных по-

становках типа обратной задачи Штурма–Лиувилля, в которых основная информация, по которой осуществляется реконструкция, базируется на знании двух спектров (упомянем лишь [4, 5]). К сожалению, для реальных конструкций возможно измерить лишь несколько первых резонансных частот, что в значительной степени снижает эффективность спектральных подходов. Для реальных стержневых систем значительно более простым является измерение амплитудно-частотной характеристики при различных видах силового воздействия в некотором частотном диапазоне.

В настоящей работе изложены основные аспекты исследования ОЗ для стержневых структур, в которых определяются две функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга и плотности из анализа амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) консольно защемленного стержня [1, 6, 7]. Отметим также довольно подробную статью [8], в которой изучается обширный класс обратных задач для балочных структур, в первую очередь связанный с идентификацией дефектов. Особенностью задач такого типа является их сильная нелинейность и некорректность [9], невозможность построения решения прямых задач в аналитическом виде, что затрудняет построение операторных уравнений в ОЗ. При определении же нескольких функций, характеризующих неоднородность, трудности значительно возрастают. При формировании итерационных процессов необходимо задавать различные режимы нагружения и реализовывать решение классических некорректных задач для систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

В настоящей работе обсуждены новые аспекты исследования таких задач, которые возникли в последнее время, обсуждены некоторые вспомогательные вопросы колебаний неоднородных структур, вопросы единственности, сформированы итерационные схемы, представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задач. Рассмотрим закрепленный на конце $x = 0$ упругий стержень длины l постоянного поперечного сечения с переменными свойствами (упругий модуль $E = E(x)$ и плотность $\rho = \rho(x)$ – есть произвольные положительные функции координаты x). Будем считать, что в нем приложенной к торцу стержня $x = l$ нагрузкой можно возбудить два типа колебаний – продольные и изгибные.

Сформулируем соответствующие краевые задачи.

Задача 1. Рассмотрим задачу об установившихся продольных колебаниях под действием силы амплитуды P; в этом случае краевая задача принимает вид

$$\left(E(x)u'(x,\omega)\right)' + \rho(x)\omega^2 u(x,\omega) = 0 \tag{1.1}$$

$$u(0,\omega) = 0 \qquad E(l)Fu'(l,\omega) = P \tag{1.2}$$

где $u(x,\omega)$ – амплитуда продольных смещений стержня.

Задача 2. Сформулируем задачу об изгибных колебаниях в рамках модели Эйлера–Бернулли, уравнение имеет вид [5]:

$$\left(E(x)Iw''(x,\omega)\right)'' - \rho(x)\omega^2 Fw(x,\omega) = 0 \tag{1.3}$$

где $F = \int_F dF$ – площадь поперечного сечения, $I = \int_F x_3^2 dF$ – момент инерции, $w(x,\omega)$ – амплитуда поперечных смещений нейтральной оси стержня.

Будем считать, что на конце $x = l$ действует сосредоточенный момент амплитуды M и граничные условия в задаче имеют вид:

$$w(0,\omega) = w'(0,\omega) = 0, \quad E(l)Iw''(l,\omega) = M, \quad (E(x)Iw''(x))'(l,\omega) = 0 \tag{1.4}$$

Далее будем рассматривать задачу о воздействии сосредоточенным моментом, которая описывается граничными условиями (1.4).

Ранее в [1] достаточно подробно исследованы задачи о раздельном восстановлении одной из функций – модуля упругости $E = E(x)$ или плотности $\rho = \rho(x)$ из анализа

АЧХ при продольных или изгибных колебаниях стержня при условии, что другая известна. Также имеется работа [6], где исследована задача о нахождении двух функций, характеризующих неоднородность свойств, при действии поперечной силы на конце. В настоящей работе исследуется иной способ возбуждения снятия АЧХ.

Приведем краевые задачи (1.1)–(1.2) и (1.3)–(1.4) к безразмерному виду, введя безразмерную координату $\xi = xl^{-1}$, безразмерные параметры и функции

$$g(\xi) = E(\xi l)E_0^{-1}, \quad r(\xi) = \rho(\xi l)\rho_0^{-1}, \quad \varkappa^2 = \rho_0\omega^2 l^2 E_0^{-1} \tag{1.5}$$

(здесь E_0, ρ_0 – соответственно характерное значение модуля Юнга и плотности; далее всюду вместо ξ будем употреблять x. В постановке ОЗ будем считать дополнительно, что известны границы изменения искомых функций $g_- \le g(x) \le g_+$, $r_- \le r(x) \le r_+$. Краевая задача для продольных колебаний имеет вид

$$\left(g(x)u'(x,\lambda)\right)' + \lambda r(x)u(x,\lambda) = 0 \tag{1.6}$$

$$u(0,\lambda) = 0, \quad g(1)u'(1,\lambda) = 1, \quad \lambda = \varkappa^2 \tag{1.7}$$

Здесь в силу линейности задачи о нахождении смещения амплитуда приложенной безразмерной силы положена равной 1.

Безразмерная форма краевой задачи об изгибных колебаниях имеет вид

$$\left(g(x)w''(x,\lambda)\right)'' - \gamma\lambda r(x)w(x,\lambda) = 0 \tag{1.8}$$

$$w(0,\lambda) = w'(0,\lambda) = 0, \quad g(1)w''(1,\lambda) = 1, \quad \left(g(x)w''(x,\lambda)\right)'(1) = 0 \tag{1.9}$$

Здесь также в силу линейности задачи о нахождении деформационных характеристик амплитуда приложенного безразмерного момента положена равной 1 и введено обозначение безразмерного параметра $\gamma = Fl^2 I^{-1}$. Отметим, что для кругового цилиндра радиуса a находим, что $\gamma = 4l^2/a^2$ и при обычно принимаемых в теории стержней соотношениях $a/l \le 1/5$ получим, что $\gamma \ge 100$.

Далее сформулируем обратную задачу об определении двух функций $g(x)$ и $r(x)$.

Формулировка ОЗ. Будем считать, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках вида

$$u(1,\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [0,\lambda_1] \tag{1.10}$$

$$w'(1,\lambda) = \varphi(\lambda), \quad \lambda \in [0,\lambda_2] \tag{1.11}$$

Итак, обратная задача состоит в определении 4 функций $u(x,\lambda)$, $w(x,\lambda)$, $g(x)$, $r(x)$, удовлетворяющих двум дифференциальным уравнениям (1.6) и (1.8) и дополнительным граничным условиям.

Опишем классы функций $g, r \in M$, для которых будут отыскиваться искомые решения. Наибольший интерес с точки зрения приложений вызывает два случая, где M представляет собой конус положительных а) бесконечно дифференцируемых M_1 или б) кусочно-постоянных функций M_2.

Прежде, чем приступать к исследованию ОЗ, отметим возможные пути решения прямой задачи. При заданных произвольных законах изменения $g(x)$, $r(x)$ краевая задача (1.6)–(1.7) может быть исследована лишь численно различными способами. Наиболее часто ранее это осуществлялось на основе сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (например, такая схема реализована в [6]) и анализе дис-

кретной задачи; на основе анализа разностной схемы [1]. Приведем вид соответствующих интегральных уравнений второго рода

$$u(x,\lambda) = \int_0^x g^{-1}(\xi)d\xi + \lambda\int_0^x g^{-1}(\xi)d\xi\int_\xi^1 r(\eta)u(\eta,\lambda)d\eta \tag{1.12}$$

$$w(x,\lambda) = \int_0^x (x-\xi)g^{-1}(\xi)d\xi + \gamma\lambda\int_0^x (x-\eta)g^{-1}(\eta)\int_\eta^1 (\xi-\eta)\, r(\xi)w(\xi,\lambda)d\xi d\eta \tag{1.13}$$

В последнее время гораздо чаще используется метод пристрелки, не требующий сведения к интегральному уравнению.

Приведем далее некоторые результаты о свойствах решения исследуемых краевых задач при переменных характеристиках.

2. Некоторые свойства решений. *2.1. Исследование свойств решения* краевой задачи (1.6)–(1.7). Решение краевой задачи (1.6)–(1.7) в общей ситуации, когда модуль и плотность переменны, представимо в виде ряда

$$u(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\lambda^j \tag{2.1}$$

С помощью решения простых краевых задач (или интегральных уравнений вида (1.12), (1.13)) для коэффициентов разложения можно найти следующие рекуррентные соотношения для произвольных положительных суммируемых $g(x)$ и $r(x)$

$$a_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{2.2}$$

$$a_j(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)}\int_\xi^1 r(\eta)a_{j-1}(\eta)d\eta, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Перечислим некоторые свойства коэффициентов разложений: 1) $a_j(x) > 0$; 2) $a_j(x) \in C[0, 1]$ независимо от гладкости $g(x)$ и монотонно возрастают

$$\|a_0\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)}\right| = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} = d_0$$

$$\|a_j\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)}\int_\xi^1 r(\eta)a_{j-1}(\eta)d\eta\right| \le d_1\|a_{j-1}\|_{C[0,1]}$$

$$d_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)}\int_\xi^1 r(\eta)d\eta \le d_0 r_0, \quad r_0 = \int_0^1 r(\xi)d\xi \tag{2.4}$$

3) ряд (2.3) сходится для $d_1\lambda < 1$, что позволяет оценить снизу первое собственное значение задачи; 4) $u(x,\lambda) > 0$ монотонно возрастает по каждому аргументу; 5) для $\lambda < d_1^{-1}$ $t(x,\lambda) = g(x)u'(x,\lambda) > 0$ монотонно убывает по x и монотонно возрастает по λ; 6) $f(\lambda)$ монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция.

Отметим, что гладкость функции $r(x)$ не влияет на свойства 1–6, а в случае, когда известна дополнительная информация об ограниченности искомых функций $g_- \le g(x) \le g_+$, $r_- \le r(x) \le r_+$, величина d_1 оценивается следующим образом $d_1 \le c$, $c = r_+ g_-^{-1}/2$.

Перечисленные выше свойства важны при изучении решений прямой задачи при малых значениях спектрального параметра λ (в диапазоне до первого резонанса).

2.2. Исследование свойств решения краевой задачи (1.8)–(1.9). Аналогично изложенному в предыдущем пункте построению приведем решение краевой задачи (1.8)–(1.9) для переменных $g(x)$ и $r(x)$ в виде ряда по степеням $\lambda = \varkappa^2$

$$w(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x)\lambda^j \tag{2.5}$$

Последовательное решение простых краевых задач, формируемых при одинаковых степенях λ, дает следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$b_0(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)}{g(\xi)}d\xi \tag{2.6}$$

$$b_j(x) = \gamma\int_0^x (x-\eta)g^{-1}(\eta)\int_\eta^1 (\xi-\eta)\,r(\xi)b_{j-1}(\xi)d\xi d\eta, \quad j = 1, 2\ldots \tag{2.7}$$

Легко устанавливаются следующие свойства: 1) $b_j(x) > 0$; 2) $b_j(x) \in C^1[0,1]$ независимо от гладкости $g(x)$ и монотонно возрастают, причем оценка в пространстве непрерывных функций дает

$$\|b_0\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \frac{(x-\xi)}{g(\xi)}d\xi\right| = \int_0^1 \frac{(1-\xi)d\xi}{g(\xi)} = c_0 = d_0 - m_0, \quad m_0 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{g(\xi)}$$

$$\|b_j\|_{C[0,1]} \le \gamma c_1 \|b_{j-1}\|_{C[0,1]}, \quad \text{причем} \quad c_1 = \int_0^1 (1-\eta)g^{-1}(\eta)\int_\eta^1 (\xi-\eta)\,r(\xi)d\xi d\eta \tag{2.8}$$

3) ряд (2.5) сходится при $\gamma c_1\lambda < 1$; 4) $w(x,\lambda) > 0$ монотонно возрастает по каждому аргументу; 5) $\varphi(\lambda)$ монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция.

Из анализа решений двух краевых задач вытекает важное необходимое свойство согласованности дополнительной информации (1.10), (1.11) в ОЗ

$$u(1,0) = f(0) = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} = \varphi(0) = w'(1,0) \tag{2.9}$$

Из этого равенства вытекает ограничение на все возможные решения $g(x)$ в виде интегрального равенства $f(0) = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)}$. Кроме того, в силу граничных условий $u(0,\lambda) = w(0,\lambda) = 0$ следует, что определить $r(0)$ не удастся с достаточной точностью, поэтому будем далее считать дополнительно, что известна величина $r(0) = r_0$.

Получим некоторые оценки решений на основе оценок ядер интегральных операторов в (1.12), (1.13) в $C[0, 1]$, учитывая описанные выше свойства положительности

$$\|u\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x g^{-1}(\xi)d\xi + \lambda\int_0^x g^{-1}(\xi)d\xi\int_\xi^1 r(\eta)u(\eta,\lambda)d\eta\right| \le d_0 + \lambda d_1\|u\|_{C[0,1]}$$

откуда получим оценку $\|u\|_{C[0,1]} \le d_0(1-\lambda d_1)^{-1}$ для малых λ. Она может быть конкретизирована при наличии информации об ограничениях сверху и снизу для искомых функций следующим образом $\|u\|_{C[0,1]} \le g_-^{-1}(1-\lambda c)^{-1}$.

Аналогично имеем $\|w\|_{C[0,1]} \le c_0 + \gamma\lambda c_1 \|w\|_{C[0,1]}$, откуда $\|w\|_{C[0,1]} \le c_0(1-\lambda\gamma c_1)^{-1}$, причем уточненная оценка дает $\|w\|_{C[0,1]} \le \frac{1}{2} g_-^{-1}(1-\lambda c/\alpha)^{-1}$.

2.3. Формулировка канонических систем. Сведем рассматриваемые краевые задачи к каноническим системам дифференциальных уравнений 1-го порядка. Введем компоненты вектора $X_1 = u$, $X_2 = gu'$. Тогда для продольных колебаний каноническая система имеет вид

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \quad A = \{a_{ij}\}, \quad a_{12} = g^{-1}(x), \quad a_{21} = -\lambda r(x) \tag{2.10}$$

с граничными условиями

$$X_1(0,\lambda) = 0, \quad X_2(1,\lambda) = 1 \tag{2.11}$$

Соответственно дополнительное условие в ОЗ имеет вид

$$X_1(1,\lambda) = f(\lambda) \tag{2.12}$$

Для задачи об изгибных колебаниях введем компоненты вектора

$$Y_1 = w, \quad Y_2 = w', \quad Y_3 = gw'', \quad Y_4 = (gw'')' \tag{2.13}$$

Тогда для изгибных колебаний каноническая система имеет вид

$$\mathbf{Y}' = B\mathbf{Y}, \quad B = \{b_{ij}\}, \quad b_{12} = 1, \quad b_{23} = g^{-1}(x), \quad b_{34} = 1, \quad b_{41} = \gamma\lambda r(x) \tag{2.14}$$

с граничными условиями

$$Y_1(0,\lambda) = 0, \quad Y_2(0,\lambda) = 0, \quad Y_3(1,\lambda) = 1, \quad Y_4(1,\lambda) = 0 \tag{2.15}$$

Соответственно дополнительное условие для этой задачи имеет вид

$$Y_2(1,\lambda) = \varphi(\lambda) \tag{2.16}$$

Отметим, что все остальные элементы матриц A, B – нулевые.

2.4. Слабая постановка задач. В дальнейших рассуждениях важную роль играет слабая постановка. Введем для задачи 1 пробную функцию $v \in C^1[0,1]$, $v(0) = 0$. Умножая уравнение (1.6) на v, интегрируя по частям и используя соответствующие граничные условия, получим равенство

$$v(1,\lambda) = \int_0^1 g(\xi)u'(\xi,\lambda)v'(\xi,\lambda)d\xi - \lambda\int_0^1 r(\xi)u(\xi,\lambda)v(\xi,\lambda)d\xi \tag{2.17}$$

Если в (2.17) положить $v = u$, то получим нелинейное интегральное уравнение вида

$$f(\lambda) = \int_0^1 g(\xi)u'^2(\xi,\lambda)d\xi - \lambda\int_0^1 r(\xi)u^2(\xi,\lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0,\lambda_1] \tag{2.18}$$

Аналогично для задачи 2 введем пробную функцию $z \in C^2[0,1]$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$. Умножая уравнение (1.8) на z, интегрируя дважды по частям и используя соответствующие граничные условия, получим равенство

$$z'(1,\lambda) = \int_0^1 g(\xi)w''(\xi,\lambda)z''(\xi,\lambda)d\xi - \gamma\lambda\int_0^1 r(\xi)u(\xi,\lambda)z(\xi,\lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0,\lambda_2]. \tag{2.19}$$

Полагая в этом равенстве $z = w$, получим следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 g(\xi)w''^2(\xi,\lambda)d\xi - \gamma\lambda\int_0^1 r(\xi)w^2(\xi,\lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0,\lambda_2] \tag{2.20}$$

Равенства (2.18), (2.20) можно трактовать как систему нелинейных интегральных уравнений типа Урысона для нахождения функций g, r (при этом, конечно, считается, что можно по заданным g, r определить u, w, решая краевые задачи для канонических систем, либо систему интегральных уравнений).

3. Исследование единственности ОЗ. Важным вопросом для рассматриваемой проблемы является проблема единственности. Отметим, что вопрос о единственности восстановления двух функций для оператора теплопроводности обсуждался в литературе [11–13]; некоторые идеи могут быть использованы при анализе исследуемой ОЗ в совершенно иной ситуации. Изучим вопрос о единственности задачи об определении законов неоднородности при малых значениях λ, когда справедливы разложения (2.1) и (2.5). Пусть решение сформулированной ОЗ существует и задача (1.6)–(1.11) имеет два решения $g_1(x)$, $r_1(x)$, $u_1(x,\lambda)$, $w_1(x,\lambda)$ и $g_2(x)$, $r_2(x)$, $u_2(x,\lambda)$, $w_2(x,\lambda)$. Введем следующие обозначения $Z_1(x,\lambda) = u_1(x,\lambda) - u_2(x,\lambda)$, $Z_2(x,\lambda) = g_1(x)u_1'(x,\lambda) - g_2(x)u_2'(x,\lambda)$, $G(x) = g_1(x) - g_2(x)$, $R(x) = r_1(x) - r_2(x)$. Сформируем краевые задачи для каждого набора функций, вводя дополнительно вспомогательные функции и вектор $\mathbf{Z}(x, \lambda) = (Z_1(x, \lambda), Z_2(x,\lambda))$.

Тогда имеем для первой задачи

$$\mathbf{Z}' = A^{(1)}\mathbf{X}^{(1)} - A^{(2)}\mathbf{X}^{(2)} = A^{(1)}\mathbf{Z} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = (A^{(1)} - A^{(2)})\mathbf{X}^{(2)} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{Z}(1,\lambda) = 0, \quad Z_1(0,\lambda) = 0 \tag{3.2}$$

Для второй задачи введем

$$W_1(x,\lambda) = w_1(x,\lambda) - w_2(x,\lambda), \quad W_2(x,\lambda) = w_1'(x,\lambda) - w_2'(x,\lambda),$$

$$W_3(x,\lambda) = g_1(x)w_1''(x,\lambda) - g_1(x)w_2''(x,\lambda),$$

$$W_4(x,\lambda) = (g_1(x)w_1''(x,\lambda) - g_1(x)w_2''(x,\lambda))$$

Операторное уравнение имеет вид (3.3) для вектора

$$\mathbf{W}(x,\lambda) = (W_1(x,\lambda), W_2(x,\lambda), W_3(x,\lambda), W_4(x,\lambda))$$

$$\mathbf{W}'(x,\lambda) = B^{(1)}\mathbf{W}(x,\lambda) + \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = (B^{(1)} - B^{(2)})\mathbf{W}^{(2)} \tag{3.3}$$

$$W_1(0,\lambda) = W_2(0,\lambda) = 0, \quad W_2(1,\lambda) = W_3(1,\lambda) = W_4(1,\lambda) = 0 \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение подмножество функций $M^* \subset M$, состоящих из ограниченных функций $y(\xi)$, определенных на отрезке [0, 1], разность любых двух из них $s(\xi) = y_1(\xi) - y_2(\xi)$ обладает следующим свойством. Отрезок [0, 1] может быть разбит на конечное число отрезков первого или второго типа, причем отрезком первого типа называется такой, на котором $s(\xi) = 0$, а отрезком второго типа назовем такой, на котором $s(\xi)$ знакопостоянна. Отметим, что наиболее простыми представителями классов таких функций являются полиномы, кусочно-постоянные функции и тригонометрические полиномы. Для определенности и простоты рассуждений будем считать, что число отрезков разбиения не более m. Соответственно, предположим далее при исследовании единственности, что искомые функции $g, r \in M^*$. Для каждой из функций g, r осуществим соответствующее разбиение; отрезки разбиения могут не совпадать. Построим объединение таких отрезков, их будет не более $2m$, обозначим их Δ_j, соответственно $\cup\Delta_j = [0,1]$. В этом случае правые части операторных уравнений (3.1) и (3.3) представимы в виде конечных сумм

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^{(j)}, \quad \mathbf{H} = \sum \mathbf{H}^{(j)}$$

где носитель соответствующей функции локализован на отрезке Δ_j. В силу линейности этих уравнений можно отыскивать решение краевых в виде сумм

$$\mathbf{Z} = \sum \mathbf{Z}^{(j)}, \quad \mathbf{W} = \sum \mathbf{W}^{(j)}$$

и для каждого из векторов $\mathbf{Z}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$ получим аналогичную краевую задачу. Осуществим следующее построение. Используя условие ортогональности [10], интегрируя по частям и используя граничные условия, получим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\begin{gathered}\int_0^1 G_j(\xi)K_{11}(\xi,\lambda)d\xi - \lambda\int_0^1 R_j(\xi)K_{12}(\xi,\lambda)d\xi = 0\\ \int_0^1 G_j(\xi)K_{21}(\xi,\lambda)d\xi - \gamma\lambda\int_0^1 R_j(\xi)K_{22}(\xi,\lambda)d\xi = 0, \quad \lambda \in [0,\lambda_*]\end{gathered} \tag{3.5}$$

где λ_* таково, что выполняется неравенство $1 - \lambda_* c/\alpha > 0$, $\alpha = 4/\gamma < 1$, $c = r_+ g_-^{-1}/2$. Отметим, что ядра интегральных операторов неотрицательны в этом диапазоне, представимы в форме

$$\begin{gathered}K_{11}(\xi,\lambda) = u_1'(\xi,\lambda)u_2'(\xi,\lambda), \quad K_{12}(\xi,\lambda) = u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\\ K_{21}(\xi,\lambda) = w_1''(\xi,\lambda)w_2''(\xi,\lambda), \quad K_{22}(\xi,\lambda) = w_1(\xi,\lambda)w_2(\xi,\lambda)\end{gathered} \tag{3.6}$$

и обладают следующими свойствами $K_{12}(0,\lambda) = K_{22}(0,\lambda) = K_{22}'(0,\lambda) = 0$.

Рассмотрим последовательно различные ситуации. Каждый из отрезков разбиения для искомых функций является либо отрезком первого типа, либо второго.

1. Пусть Δ_j отрезок первого типа для обеих функций. Тогда правые части соответствующих краевых задач для $\mathbf{Z}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$ равны нулю, в силу единственности решения прямых задач для нерезонансных диапазонов имеется только нулевое решение для однородных задач и единственность доказана.

2. Пусть Δ_j отрезок первого типа для одной функции и второго для другой (для определенности положим, что внутри отрезка Δ_j $G_j > 0$, $R_j = 0$). Тогда получим из (3.5) $\int_0^1 G_j(\xi)K_{11}(\xi,\lambda)d\xi = 0$, что противоречит положительности интеграла, и утверждение доказано.

3. Пусть Δ_j отрезок второго типа для обеих функций. Здесь надо рассмотреть два случая, когда внутри отрезка Δ_j a) $G_jR_j < 0$ и b) $G_jR_j > 0$

В случае варианта a) подынтегральные функции в ИУ (3.5) положительны, а сумма интегралов равна нулю; приходим к противоречию, которое и доказывает единственность.

Рассмотрим теперь детально вариант b). Из (3.5) имеем равенства

$$\begin{gathered}\int_0^1 G_j(\xi)u_1'(\xi,\lambda)u_2'(\xi,\lambda)d\xi = \lambda\int_0^1 R_j(\xi)u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda)d\xi\\ \int_0^1 G_j(\xi)K_{21}(\xi,\lambda)d\xi = \gamma\lambda\int_0^1 R_j(\xi)K_{22}(\xi,\lambda)d\xi\end{gathered} \tag{3.7}$$

Для определенности будем считать, что внутри отрезка Δ_j $G_j > 0$, $R_j > 0$. Используя (3.7), построим следующие оценки левых и правых частей. Для оценки снизу используем свойства решений прямой задачи и неравенства

$$u(x,\lambda) \geq u(x,0) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \geq \frac{x}{g_+}$$
$$w(x,\lambda) \geq w(x,0) = \int_0^x \frac{(x-\xi)}{g(\xi)} d\xi \geq \frac{x^2}{2g_+} \tag{3.8}$$

откуда имеем следующую оценку левых частей в (3.7)

$$\int_0^1 G_j(\xi) u_1'(\xi,\lambda) u_2'(\xi,\lambda) d\xi \geq g_+^{-2} p_j \quad \text{и} \quad \int_0^1 G_j(\xi) w_1''(\xi,\lambda) w_2''(\xi,\lambda) d\xi \geq g_+^{-2} p_j, \quad p_j = \int_0^1 G_j(\xi) d\xi$$

Правые части оцениваются сверху с учетом оценок в 2.2

$$\lambda \int_0^1 R_j(\xi) u_1(\xi,\lambda) u_2(\xi,\lambda) d\xi \leq \lambda \max R_j \left| u_1(\xi,\lambda) u_2(\xi,\lambda) \right| \leq$$
$$\leq \lambda \max R_j g_-^{-2} (1-\lambda c)^{-2}$$

$$\gamma\lambda \int_0^1 R_j(\xi) w_1(\xi,\lambda) w_2(\xi,\lambda) d\xi \leq \gamma\lambda \max R_j \left| w_1(\xi,\lambda)\, w_1(\xi,\lambda) \right| \leq$$
$$\leq \gamma\lambda \max R_j g_-^{-2} (1-\lambda c/\alpha)^{-2}/4$$

Исходя из полученных оценок, получим систему неравенств

$$p_j^*(1-\lambda c)^2 \leq \lambda R_{j0}$$
$$\alpha p_j^*(1-\lambda c/\alpha)^2 \leq \lambda R_{j0}, \quad p_j^* = p_j g_+^{-2} g_-^2 \tag{3.9}$$

Исходя из постановки задачи, эти неравенства должны выполняться при всех $\lambda \in [0, \lambda_*]$. Отметим, что $p_j^* > 0$ и (3.9) приводит к неравенству $((1-\lambda c)^2 - \lambda t)(\alpha(1 - \lambda c/\alpha)^2 - \lambda t) \geq 0$, $t = p_j^{*-1} R_{j0} > 0$. Вместе с тем легко доказать противоположное неравенство $((1-\lambda c)^2 - \lambda t)(\alpha(1-\lambda c/\alpha)^2 - \lambda t) \leq 0$, которое вытекает из неравенства $\alpha(1-\lambda c/\alpha)^2 \leq (1-\lambda c)^2$, справедливого для $0 < \lambda < \alpha/c$. Отсюда следует, что выполнение (3.9) возможно лишь при $p_j = R_{j0} = 0$, что и доказывает единственность решения задачи в этом случае. Таким образом, единственность установлена.

4. Нахождение начального приближения и формулировка итерационного процесса. Отметим, что сформулированная ОЗ нелинейна и одним из методов построения решения является формирование итерационного процесса. Способы его построения на основе метода линеаризации достаточно хорошо разработаны на примере ОЗ для одной функции [1]; в настоящем исследовании приведем вид операторных уравнений, которые вытекают из построенных ранее схем для общих коэффициентных ОЗ в теории упругости. Кратко схема выглядит следующим образом. Формируется некоторое начальное приближение (в качестве такового можно, например, выбрать те постоянные значения, которые фигурируют в ограничениях, можно выбирать средневзвешенные таким образом, чтобы удовлетворялось интегральное условие на податливость). Обычно такие начальные приближения выбираются среди функций простой структуры – постоянных или линейных из условия минимума функционала невязки на компактном множестве. Далее решается прямая задача для выбранного начального приближения, находится соответствующая АЧХ. На основе сравнения найденной и за-

данной функции формируется система операторных уравнений для поправок, которая легко получается из слабой постановки.

Введем последовательность функций

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_n, \quad w_n = w_{n-1} + \Delta w_n,$$
$$g_n = g_{n-1} + \Delta g_n, \quad r_n = r_{n-1} + \Delta r_n, n = 1, 2 \ldots$$

Если известны приближения порядка $n-1$, то стандартным образом согласно [10] из условий разрешимости или из слабой постановки получается следующая система интегральных уравнений Фредгольма первого рода с непрерывными ядрами для поправок на n-той итерации

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi) u_{n-1}^{'2}(\xi,\lambda) d\xi - \lambda \int_0^1 \Delta r_n(\xi) u_{n-1}^2(\xi,\lambda) d\xi = -\left(f(\lambda) - f_{n-1}(\lambda)\right), \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \tag{4.1}$$

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi) w_{n-1}^{''}(\xi,\lambda) d\xi - \gamma\lambda \int_0^1 \Delta r_n(\xi) w_{n-1}^2(\xi,\lambda) d\xi = \left(\varphi(\lambda) - \varphi_{n-1}(\lambda)\right), \quad \lambda \in [0, \lambda_2]$$

Система (4.1) решается на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова, итерационный процесс останавливается при достижении определенного значения функционала невязки или по достижении некоторого числа итераций.

5. Вычислительные эксперименты. Проведена серия вычислительных экспериментов по оценке степени эффективности предложенных численных схем. Во-первых, проведено сравнение эффективности точности квадратурных формул. Отмечено, что применение квадратурных формул более высокого порядка значительно повышают точность решения ОЗ в условиях, когда информация об амплитудно-частотных характеристиках задана в нескольких точках. Результаты апробированы на монотонных (убывающих, возрастающих) и немонотонных функциях, причем результаты восстановления при задании АЧХ в 3 и 11 точках различаются мало (частотный диапазон выбран до первого резонанса.

Результаты построения АЧХ для функций $g(x) = 1 + 0.4x^2$, $r(x) = 1 - 0.4x^2$ представлены ниже.

Проведен ряд вычислительных экспериментов по реконструкции двух функций.

1. Возрастающие функции $g(x) = 0.9 + 0.4x^2$, $r(x) = 0.9 + 0.4x^3$ с начальным приближением $g_0(x) = 1.033$, $r_0(x) = 1$ при следующих значениях параметров

$$N_x = 20, \quad M_{1\text{к}} = 10, \quad \mathrm{c}_1 = 1.1, \quad \mathrm{d}_1 = 1.3$$
$$M_{2\text{к}} = 10, \quad \mathrm{c}_2 = 0.05, \quad \mathrm{d}_2 = 0.25$$

На рис. 2 изображены точные функции (сплошная линия), результат восстановления после 28 итераций (тире) и после 53 итераций (точки). Рисунок справа демонстрирует изменение функционала невязки с ростом итераций.

2. Убывающие функции $g(x) = 1 - 0.4x^2$, $r(x) = 1 - 0.4x^3$ при выборе начального приближения $g_0(x) = 0.866$, $r_0(x) = 0.9$.

На рис. 3. изображены точные функции (сплошная линия), результат после 29 итераций (тире), после 59 итераций (точки); график справа демонстрирует изменение функционала невязки в зависимости от числа итераций.

3. Немонотонные функции $g(x) = r(x) = 1 + 0.2\cos(2\pi x)$ с выбором начального приближения вида $g_0(x) = r_0(x) = 1$

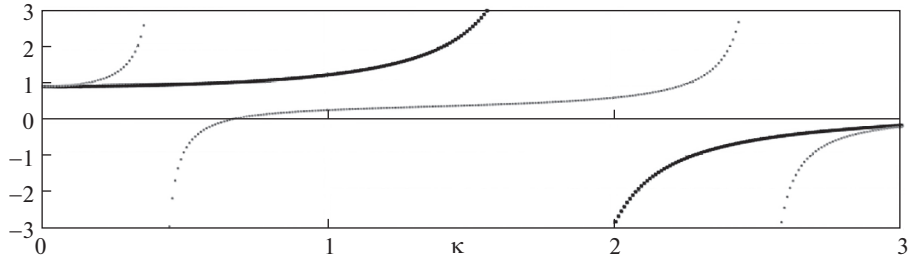


Рис. 1. АЧХ задач: 1. продольные колебания (черный цвет) 2. изгибные колебания (серый цвет)

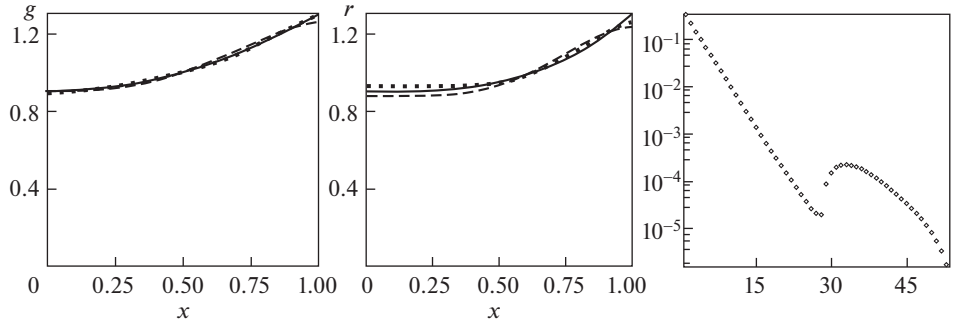


Рис. 2. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

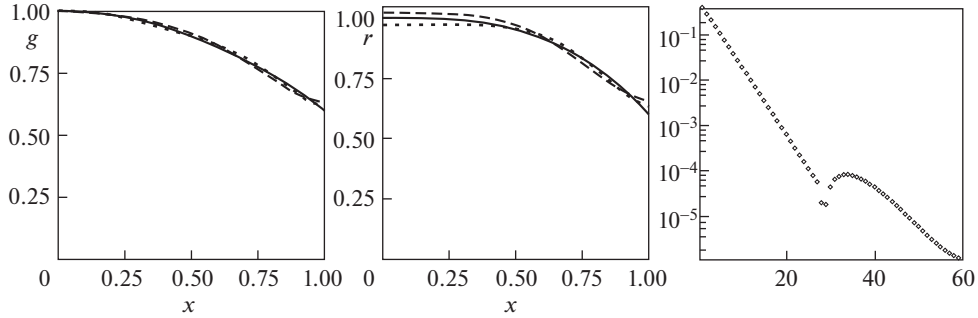


Рис. 3. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

На рис. 4 изображены точные функции (сплошная линия), результат итерационного восстановления после 31 итерации (точки). Правый график демонстрирует изменение невязки на итерациях. Недостаточная точность восстановления функции $r(x)$ при малых значениях аргумента связана с тем, что значение $r(0)$ не задавалось априори. В тех вычислительных экспериментах, в которых такая информация задавалась, результаты реконструкции плотности значительно лучше.

Заключение. Обсуждены вопросы нахождения двух переменных характеристик неоднородного упругого стержня – плотности и модуля Юнга, проведено исследование

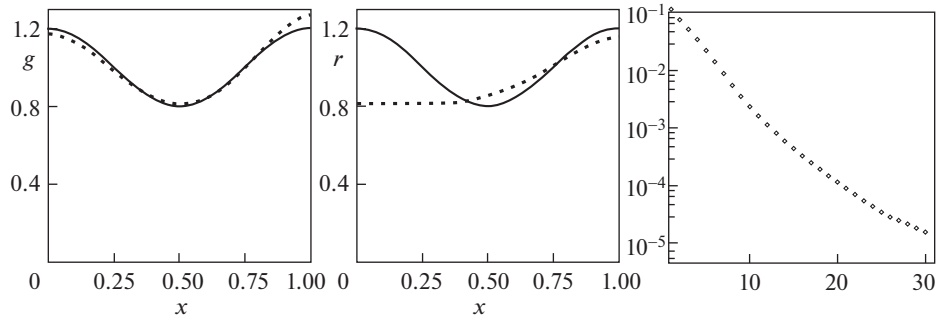


Рис. 4. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

единственности решения, представлены способ формирования итерационных процессов и результаты вычислительных экспериментов для различных типов функций-возрастающих, убывающих, немонотонных.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

3. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.

4. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

5. *Глэдвелл Г.М.Л.* Обратные задачи теории колебаний. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 608 с.

6. *Ватульян А.О., Бочарова О.В.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.

7. *Ватульян А.О.* Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН. 2005. Т. 405. № 3. С. 343–345.

8. *Perkowski Z., Czabak M.* Description of behaviour of timber-concrete composite beams includinginterlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem // Eng. Struct. 2019. V. 194. P. 230–250.

9. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

10. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.

11. *Гласко В.Б., Осколков И.Н.* О регуляризации задачи термодефектоскопии // ЖВММФ. 1994. Т. 34. № 6. С. 926–935.

12. *Денисов А.М.* Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами // ЖВММФ. 1982. Т. 22. № 4. С. 858–864.

13. *Музылёв Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // ЖВММФ. 1980. Т. 20. № 2. С. 388–400.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 64–76

УДК 531

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОМБИНИРОВАННЫХ СВОБОДНЫХ ГИРОСКОПОВ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА ДВУХ РАБОЧИХ МОДАХ

© 2021 г. С. Е. Переляев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail:pers2030@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.08.2020 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Изложены принципиальные вопросы теории новых гироскопических датчиков на основе упругого осесимметричного резонатора – волнового твердотельного гироскопа (ВТГ), в полусферическом кварцевом резонаторе которого одновременно могут возбуждаться и существовать различные рабочие формы (моды) стоячих волн упругих колебаний. В предлагаемом исследовании рассматриваются принципиальные вопросы теории новых гироскопических инерциальных датчиков ориентации семейства “обобщенный” маятник Фуко. Описан принципиальный физический эффект, лежащий в основе функционирования таких приборов, входящих в рассматриваемый класс свободных гироскопов. Представлены прикладные аспекты реализации фундаментальной теории нового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко в высокоточных инерциальных датчиках ориентации, функционирующих одновременно на двух рабочих модах колебаний. Предложены основные способы реализации двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко в современных инженерно-конструкторских решениях точных волновых твердотельных гироскопах нового поколения.

Ключевые слова: классический маятник Фуко, идеальный двухмерный осциллятор, полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп), теория инерциальных датчиков ориентации, “обобщенный” неуправляемый маятник Фуко

DOI: 10.31857/S0572329921040115

1. Введение. Опыты, проведенные в 1851 году французским механиком и астрономом Леоном Фуко [1], а также опыты его многочисленных последователей дали только качественные результаты, подтверждающие с достаточной по тем временам точностью факт вращения Земли с угловой скоростью 11 град/ч относительно местной (Пантеон, г. Париж) вертикали (погрешность составляла по тем временам весьма небольшую величину порядка 1 град/ч). Математическое исследование основных источников погрешностей классического неуправляемого маятника Фуко и новое аналитическое доказательство вращения Земли дал в своей докторской диссертации в 1879 году нидерландский физик-экспериментатор Хайкес Каммерлинг-Оннес [2]. Известно, что математический осциллятор с двумя степенями свободы, выполняющий в современных гироскопах роль маятника Фуко, обычно реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение

относительно абсолютного (инерциального) пространства. В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве принципиальные вопросы теории нового датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического неуправляемого маятника Фуко.

В данной работе впервые рассмотрены принципиальные вопросы теории функционирования многомодовых ВТГ, в которых одновременно производится возбуждение и поддержание сразу нескольких рабочих мод (форм) упругих колебаний кромки осесимметричного резонатора (например, второй и третьей).

2. Основные сведения из механики новых гироскопических систем. В современной практике мировой гироскопии появился целый класс новых приборов, в которых фактически реализована идея “обобщенного” маятника Фуко: струнный гироскоп [3], кольцевой гироскоп [4], полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп) [5–11, 15], ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором [12–14], “квапазон” [17], сферический кварцевый резонатор [18]. Все указанные выше новые инерциальные датчики ориентации весьма успешно конкурируют с классическими гироскопами, однако их теория существенно отличается от фундаментальной теории известных симметричных и несимметричных механических гироскопов [19]. Например, кинетический момент, который в механических гироскопах всегда стремились сделать как можно большим, в перечисленных выше новых датчиках должен быть равен нулю [16]. Математический маятник (осциллятор) с двумя степенями свободы, играющий в этих новых приборах роль “обобщенного” маятника Фуко, как правило, реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии инерциального датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно неподвижного пространства. Исключение составляет струнный гироскоп, однако отношение угловой скорости (прецессии) формы колебаний относительно упругого тела к угловой скорости тела относительно пространства является строго постоянной величиной, зависящей от номера формы (моды) рабочих колебаний и почти независящей от свойств самого упругого материала.

Эта известная постоянная получила название масштабного коэффициента прецессии инерциального датчика, или коэффициента Брайана, по имени первого исследователя колебаний упругой оболочки [20]. Основой волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) является прецессия механической стоячей волны на кромке полусферической кварцевой оболочки, скорость которой оказалась пропорциональной скорости вращения основания прибора. При этом эти скорости оказались связаны постоянным коэффициентом Брайана, не зависящим от измеряемой угловой скорости. В публикации [21] рассмотрен подробный вывод основных уравнений новых гироскопических датчиков на примере тонкого упругого кольца. Представлены дифференциальные уравнения колебаний такого кольца в своей плоскости и показано, что эти уравнения допускают точное аналитическое решение в виде гармонической волны. При произвольных начальных условиях эти общие аналитические решения определяют в горизонтальной плоскости (x, y) эллипс. В случае, когда эллипс вырождается в отрезок прямой, общее аналитическое решение определяет в тонком вибрирующем кольце механическую стоячую волну. В случае противоположного вырождения, когда эллипс превращается в окружность, общее решение определяет в тонком упругом кольце бегущую волну, которая не обладает необходимыми инерционными свойствами. Если угловая скорость основания кольца $\omega \neq 0$, то прямолинейных колебаний в плоскости (x, y) идеальный двухмерный осциллятор в общем случае не имеет. Иными словами, во вращающемся упругом кольце стоячие механические волны невозможны. Однако в этом случае в кольце существуют такие колебания, которые в некоторой вращающей-

ся системе координат имеют вид стоячих волн. Такие волны принято называть “прецессирующими” волнами. В публикации [11] подробно изложены принципиальные теоретические основы эксперимента Линча–Скотта и представлен вывод важной для целей современной прикладной гироскопии формулы:

$$\varphi = -\frac{2}{\kappa^2 + 1}\int \omega(t)dt \tag{2.1}$$

здесь κ – номер моды (формы) колебаний, $\kappa = 2, 3, 4 \ldots$; $\omega(t)$ – угловая скорость вращения основания (произвольная функция). Следует отметить, что в современных датчиках ВТГ возбуждается одна из рабочих мод (форм) колебаний резонатора, например, вторая ($\kappa = 2$).

Формула (2.1) представляет обобщение результата Брайана для тонкого упругого кольцевого резонатора. Эффект Брайана [20], как эффект прецессии стоячей волны при вращении резонатора с постоянной угловой скоростью, является эффектом расщепления двукратных частот, поэтому этот эффект имеет малое отношение к тому, что экспериментально было открыто Линчем-Скоттом [15] в 1982 году и использовано в известном патенте Линча [9]. Хотя авторы патента ошибочно и сослались на формулу Брайана [20], на самом деле, в подтверждение своей идеи они привели результат эксперимента, в котором поворот первоначально неподвижного вибрирующего резонатора ВТГ на угол $\varphi = 90$ град., вызывал поворот стоячей волны на угол $\varphi_b = 30$ град., относительно кромки самого резонатора без каких-либо изменений самой формы стоячей волны. Тем самым была установлена важная для целей практического применения в принципиально новых гироскопах следующая экспериментальная формула:

$$\varphi_b = -1/3(\varphi) \tag{2.2}$$

Полученная в эксперименте формула (2.2) связывает уже не постоянные скорости поворота резонатора, а сами углы поворота при явно непостоянных угловых скоростях. Изложенное выше можно суммировать в виде теоремы.

Теорема 1. Какой бы ни была зависимость угловой скорости тонкого упругого кольца от времени (в классе дифференцируемых на бесконечном полуинтервале функций), существует и единственная вращающаяся относительно кольца система координат, в которой при определенных начальных условиях колебания кольца представляют собой механические стоячие волны [21].

Скорость такой системы координат выражается формулой (2.1). Частным случаем из нее вытекает известный результат Брайана [20], установленный им только для постоянной угловой скорости ($\dot{\omega} = 0$) осесимметричного резонатора:

$$\omega_b = -\frac{2}{1 + k^2}\omega \tag{2.3}$$

Заметим, что выражение, верное для стационарного случая, как правило, не бывает верным для нестационарного. Формула (2.1) описывает новый физический эффект, не замеченный Брайаном, и впервые установленный экспериментально, авторами известного патента “Vibratory rotational sensor” [9]. Следует заметить, что формулу (2.1) ввиду ее точного характера можно сколько угодно раз аналитически дифференцировать.

В частности, можно отметить, что ускорение механической стоячей волны пропорционально угловому ускорению самого упругого вибрирующего кольца:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = \frac{2}{\kappa^2 + 1}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \tag{2.4}$$

Поскольку ускорение тонкого упругого кольца пропорционально приложенному к нему моменту внешних сил M ($I\ddot{\omega} = M$), то можно объективно утверждать, что этот

момент вызывает не только ускорение кольца, но и ускорение прецессирующей стоячей волны.

Все сказанное выше позволяет определить обсуждаемый здесь физический эффект в неравномерно вращающемся кольце как эффект инертности упругих волн в нем.

Эффект (2.1), который установлен [11] для общего вида уравнения колебаний без каких-либо приближений, с различной степенью точности верен и для произвольных упругих тел, обладающих осевой симметрией. Различие будет состоять только в величине масштабного коэффициента, равного для кольца $2/(\kappa^2+1)$. Можно показать, что для кварцевой полусферы имеем следующую известную формулу прецессии угла волны

$$\varphi_b = -0.312\int_0^t \omega(t)dt \tag{2.5}$$

что соответствует повороту осей колебаний механической стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 28.1 град. или относительно инерциального пространства на угол 61.9 град при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90 град.

В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве, все принципиальные вопросы теории подобного высокоточного датчика инерциальной информации, могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот класс приборов может быть назван “обобщенным” маятником Фуко [21]. Многие исследователи предполагают, что Земля не вовлекает плоскость колебаний маятника во вращение вокруг местной вертикали. Между тем благодаря нелинейным эффектам неуправляемый маятник Фуко обладает собственной скоростью прецессии вокруг местной вертикали, поэтому необходимо контролировать его собственную прецессию, без чего невозможно осуществлять достоверные и точные измерения угловой скорости вращения Земли.

3. Теория функционирования двухмодового интегрирующего свободного гироскопа типа “обобщенный” маятник Фуко. Общая математическая модель осциллирующей системы, которая показывает пространственное движение, обнаруженное Фуко, излагается в соответствие с фундаментальной теорией, достаточно строго изложенной в известной публикации [22]. Данная теория касается большинства современных вибрирующих (осциллирующих) гироскопических механических систем (в частности ВТГ), которые функционируют, как правило, на одной основной (второй) иногда третьей рабочей моде колебаний. Предлагается рассмотреть основы теории принципиально новых комбинированных инерциальных датчиков ориентации, которые функционируют одновременно на двух (n = 2, 3) или даже трех рабочих модах колебаний кромки полусферы резонатора ВТГ. Применительно к идеальной осемметричной полусфере волнового твердотельного гироскопа рассмотрим по аналогии с [21, 22] дифференциальные уравнения пространственных движений в горизонтальной плоскости кромки резонатора, описывающие динамику двух идеальных двухмерных неуправляемых осцилляторов на двух (n = 2, 3) основных рабочих модах (формах) колебаний механических стоячих волн:

$$\ddot{x}_n + \Omega_n^2 x_n - 2c\omega\dot{y}_n = 0 \quad (n = 2,3) \tag{3.1}$$

$$\ddot{y}_n + \Omega_n^2 y_n + 2c\omega\dot{x}_n = 0 \quad (n = 2,3) \tag{3.2}$$

Здесь переменные x_n и y_n представляют собой текущие координаты двух осциллирующих точек в заданных декартовых системах координат (см. рис. 1. и рис. 2.), которые

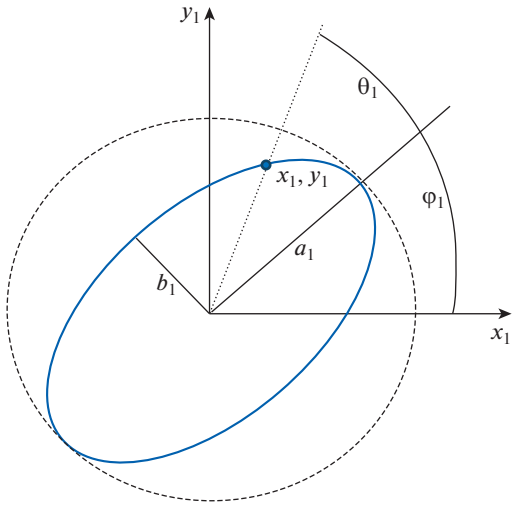


Рис. 1. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_1, y_1) второй моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора

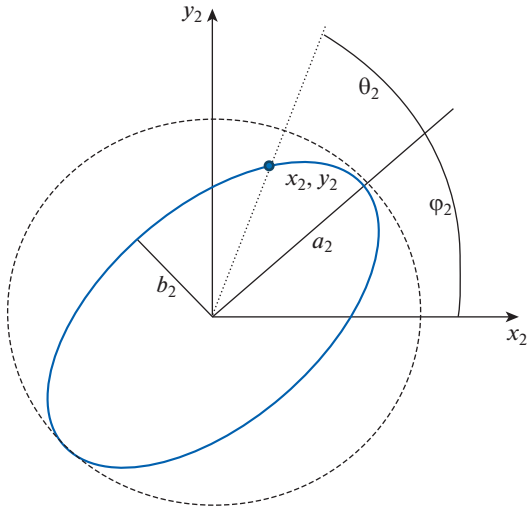


Рис. 2. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_2, y_2) третьей моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора

являются наглядными геометрическими интерпретациями двух орбит эллиптических вибраций.

Рабочие моды (формы) колебаний этих двух осцилляторов условно обозначены $n = 2, 3$. Они соответствуют двум основным ($n = 2, 3$) рабочим модам или формам механических стоячих волн упругих колебаний кромки полусферического резонатора, как это показано ниже на рис. 3. На каждом рассматриваемом эллипсе имеем соответ-

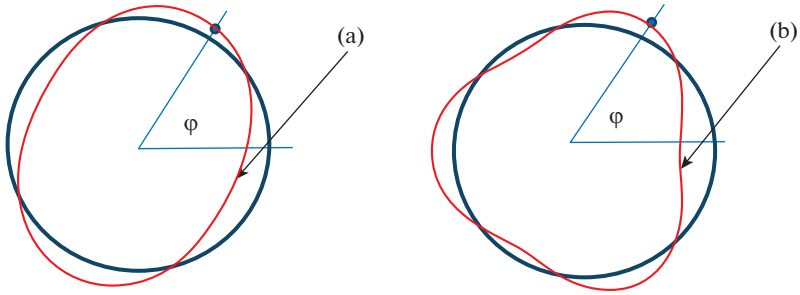


Рис. 3. Рабочие формы (моды) колебаний механической стоячей волны осесимметрического резонатора ВТГ: (a) 2-я мода (форма); (b) 3-я мода (форма).

ственно две точки $a_{(n)}$, которые имеют определенные амплитуды колебаний и расположены на продольных осях двух вибрирующих элементов одного комбинированного свободного двухмодового гироскопа; θ_1, θ_2 – углы, которые характеризуют направления (фазы) вибраций в системе координат осесимметричного резонатора; φ_1, φ_2 – углы наклона больших полуосей эллипсов к осям x_1 и x_2 (определяют текущие местоположения двух рассматриваемых форм (мод) механических стоячих волн колебаний на кромке осциллирующего полусферического резонатора, в которых наблюдаются его радиальные отклонения от окружности); Ω_n – рабочие частоты колебаний (вибраций) двух идеальных осцилляторов; c – постоянный коэффициент, который зависит от заданной моды и соответствующего данной моде колебаний коэффициента Брайана комбинированного свободного гироскопа; ω – произвольная угловая скорость основания двухмодового гироскопа, которая измеряется в плоскости нормальной горизонтальной системе координат OXY.

Существенная особенность дифференциальных уравнений (3.1)–(3.2) наличие известных гироскопических членов, представляющих собой составляющие $2c\omega\dot{x}_n, 2c\omega\dot{y}_n$ ускорения Кориолиса на горизонтальные оси OXY указанных выше идеальных двухмерных осцилляторов. Заметим, что эти составляющие полностью соответствуют гироскопическим членам классического неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. Можно привести пример целого класса гироскопов, идеальное пространственное движение которых достаточно точно характеризуется системой дифференциальных уравнений вида (3.1)–(3.2). Все такие инерциальные датчики ориентации обладают гироскопическим эффектом, обнаруженным Фуко. Ниже представим обобщающий анализ одного нового типа комбинированных инерциальных датчиков – волновых твердотельных гироскопов (ВТГ), которые функционируют не на одной рабочей моде, а как минимум на двух модах (формах) (см. рис. 3) резонансных колебаний полусферы одновременно. Имея на входе такого идеального свободного ВТГ нулевую угловую скорость ($\omega = 0$) движения основания прибора в пространстве, перемещения двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такого комбинированного осциллятора, можно наглядно представить двумя эллипсами, которые могут быть определены на основании аналитических решений дифференциальных уравнений вида (3.1)–(3.2). Это легко проверить, подставив в них следующие обобщающие аналитические выражения:

$$x_{(n)} = a_{(n)}(t)\cos(n\theta_{(n)})\cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t)\sin(n\theta_{(n)})\sin(n\varphi_{(n)}) \tag{3.3}$$

$$y_{(n)} = a_{(n)}(t)\cos(n\theta_{(n)})\sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t)\sin(n\theta_{(n)})\cos(n\varphi_{(n)}) \tag{3.4}$$

Выражения (3.3)–(3.4) определяют мгновенное положение двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на орбитальных траекториях двух вибрирующих эллипсов, при этом скорости перемещения каждой из двух точек по указанным траекториям будут равны

$$\dot{x}_{(n)} = \Omega_n(-a_{(n)}(t)\sin(n\theta_{(n)})\cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t)\cos(n\theta_{(n)})\sin(n\varphi_{(n)})) \tag{3.5}$$

$$\dot{y}_{(n)} = \Omega_n(-a_{(n)}(t)\sin(n\theta_{(n)})\sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t)\cos(n\theta_{(n)})\cos(n\varphi_{(n)})) \tag{3.6}$$

Здесь параметры $a_{(n)}, b_{(n)}$ – являются переменными, называемыми амплитудами и квадратурами рабочих колебаний двух гармонических осцилляторов, которые определяют основные динамические характеристики свободного движения неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. При этом $a_{(n)}, b_{(n)}$ – непосредственно определяют формы эллипсов колебаний, а углы $\theta_{(n)}$ – их ориентацию на горизонтальной плоскости OXY; углы $\theta_{(n)(0)}$ – являются начальными значениями (основные фазы) двух орбитальных углов $\theta_{(n)}$, которые определяют положения двух материальных точек на двух вибрирующих эллипсах.

Все эти рассматриваемые параметры представлены на рис. 1 и рис. 2, на которых наглядно отображены основные орбитальные элементы комбинированного (двухмодового) свободного (неуправляемого) волнового твердотельного гироскопа. В приведенных выше обобщающих аналитических решениях (3.3)–(3.4) и (3.5)–(3.6) нижний индекс $(n) = 2, 3$ задает соответственно вторую ($n = 2$) и третью ($n = 3$) рабочую моду колебаний стоячих волн двух идеальных двухмерных осцилляторов. В формулах (3.5)–(3.6) орбитальные углы $\theta_{(n)}$ определяются следующим известным аналитическим выражением:

$$\theta_{(n)} = \Omega_n t + \theta_{(n)(0)}$$

В частности, два орбитальных угла $\theta_{(n)}$ измеряются на соответствующих окружностях радиуса $a_{(n)}$ каждой заданной рабочей моды стоячих волн колебаний. Основные параметры этих двух орбит $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ тесно связаны с нормированными энергиями колебаний $E_{(n)}$ и соответствующими кинетическими моментами $H_{(n)}$ [22] двух рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов следующими соотношениями:

$$a_{(n)} = [E_{(n)} + \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)}]^{1/2}/\Omega_n \quad (n) = 2, 3 \tag{3.7}$$

$$b_{(n)} = [E_{(n)} - \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)}]^{1/2}/\Omega_n \quad (n) = 2, 3 \tag{3.8}$$

При этом постоянные энергии $E_{(n)}$ этих двух комбинированных осцилляторов их кинетические моменты $H_{(n)}$ могут быть выражены простыми аналитическими выражениями:

$$E_{(n)} = [\Omega_n^2(x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) + (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2)]/2 \quad (n) = 2, 3 \tag{3.9}$$

$$H_n = (x_{(n)}\dot{y}_{(n)} - y_{(n)}\dot{x}_{(n)}) \quad (n) = 2, 3 \tag{3.10}$$

Данные параметры $E_{(n)}$ и $H_{(n)}$, для рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов колебаний вида (3.1)–(3.2), являются постоянными величинами и поэтому их можно довольно просто выразить через введенные выше параметры – амплитуд $a_{(n)}$ и квадратур $b_{(n)}$ второй и третьей рабочих мод колебаний комбинированного гироскопа:

$$E_{(n)} = \Omega_n^2(a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2)/2 \quad (n) = 2, 3 \tag{3.11}$$

$$H_n = \Omega_n(a_{(n)}b_{(n)}) \quad (n) = 2, 3 \tag{3.12}$$

На основании выражений (3.11)–(3.12) можно сделать следующий важный вывод о том, что движения двух материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по траекториям двух вибрирующих эллипсов переходят в движения, которые описываются двумя прямыми линиями, тогда и только тогда, когда для заданных выше двух рабочих мод колебаний идеальных осцилляторов выполняются два безусловных требования: $b_{(2)} = 0$ и $b_{(3)} = 0$. Последнее означает, что при выполнении этих двух основных требований кинетические моменты H_n двух идеальных осцилляторов также будут строго равны нулю ($H_n \equiv 0$).

Искомые углы $2\varphi_{(n)}$ и $3\varphi_{(n)}$ наклона продольных осей двух указанных выше вибрирующих эллипсов определяются следующими аналитическими выражениями:

$$\sin(n\varphi_{(n)}) = [\Omega_n^2 x_{(n)} y_{(n)} + \dot{x}_{(n)}\dot{y}_{(n)}]/[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)}] \quad (n) = 2,3 \tag{3.13}$$

$$\cos(n\varphi_{(n)}) = [\Omega_n^2(x_{(n)}^2 - y_{(n)}^2) + (\dot{x}_{(n)}^2 - \dot{y}_{(n)}^2)]/2[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)}] \quad (n) = 2,3 \tag{3.14}$$

Можно показать, что соответствующие углы $n\varphi_{(n)}$ наклона двух рассматриваемых эллипсов колебаний на второй ($n = 2$) и третьей ($n = 3$) рабочих модах функционирования идеальных двухмерных осцилляторов являются постоянными для движений, которые задаются дифференциальными уравнениями (3.1)–(3.2) только для частного случая, когда входная угловая скорость основания двухмодового гироскопа равна нулю ($\omega = 0$).

Наконец орбитальные углы $\theta_{(n)}$ двух эллиптических траекторий соответствующих двум рабочим модам ($n = 2, 3$) механических стоячих волн колебаний могут быть представлены следующими аналитическими выражениями:

$$\sin(n\theta_{(n)}) = -\Omega_n(x_{(n)}\dot{x}_{(n)} + y_{(n)}\dot{y}_{(n)})/\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \quad (n) = 2,3 \tag{3.15}$$

$$\cos(n\theta_{(n)}) = [\Omega_n^2(x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) - (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2)]/\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \quad (n) = 2,3 \tag{3.16}$$

Следует заметить, что эти два орбитальных угла не являются строго постоянными, однако можно отметить, что их значения увеличиваются со временем строго по линейному закону.

Здесь следует рассмотреть важные для практических реализаций конкретных комбинированных двухмодовых свободных гироскопов следующие прикладные аспекты.

Случай 1: Входная угловая скорость не равна нулю ($\omega \neq 0$). В данном случае решения уравнений (3.1)–(3.2) не являются периодическими с частотами Ω_n и орбиты двух рассматриваемых материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) больше не являются эллипсами.

Случай 2: Входная угловая скорость основания ω относительно абсолютно точных величин рабочих частот Ω_n $((n) = 2,3)$ идеальных двухмерных осцилляторов является относительно малой величиной. В данном случае внешний вид двух таких орбит почти точно соответствует двум эллипсам, которые медленно прецессируют, а колебания самих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на этих орбитах будут почти периодическими.

В данном случае целесообразно определить основные параметры $a_{(n)}, b_{(n)}, \varphi_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$, как осциллирующие на двух основных рабочих модах орбитальные элементы, по аналогии с орбитальными элементами, используемыми в классической небесной механике. Важно отметить, что применительно к гармоническим двухмерным осцилляторам, предлагается определять не мгновенные положения материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на соответствующих эллипсах, движение по орбитам которых проис-

ходит с частотами на много превышающими частоту измеряемой каждым таким осциллятором входной угловой скорости основания прибора, а непосредственно сами орбитальные элементы. Соответственно, вместо непосредственного решения исходных дифференциальных уравнений второго порядка (3.1)–(3.2), при действии на вход двух осцилляторов переменной угловой скорости $\omega \neq 0$, предлагается воспользоваться решением орбитальных уравнений первого порядка относительно переменных $a_{(n)}, b_{(n)}, \varphi_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$.

Используя указанные орбитальные параметры, которые заданы выражениями (3.7)–(3.8), (3.13)–(3.14) и (3.15)–(3.16) можно показать, что новые дифференциальные уравнения для медленных переменных $a_{(n)}, b_{(n)}, \varphi_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$ имеют следующие аналитические выражения:

$$\dot{a}_{(n)} = -2\omega_{(n)} b_{(n)} \sin(n\theta_{(n)})/n \quad n = 2,3 \tag{3.17}$$

$$\dot{b}_{(n)} = 2\omega_{(n)} a_{(n)} \sin(n\theta_{(n)})/n \quad (n) = 2,3 \tag{3.18}$$

$$\dot{\varphi}_{(n)} = 2\omega_{(n)}(b_{(n)}^2 \cos^2(\theta_{(n)}) - a_{(n)}^2 \sin^2(\theta_{(n)})/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) \quad (n) = 2,3 \tag{3.19}$$

$$\dot{\theta}_{(n)} = -2\omega_{(n)} a_{(n)} b_{(n)} \cos\left(n\theta_{(n)}\right)/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) + \Omega_{(n)} \quad (n) = 2,3 \tag{3.20}$$

Здесь во всех дифференциальных уравнениях (3.17)–(3.20) входная угловая скорость ω соответствует выражению

$$\omega_{(n)} = nk_b\omega$$

где k_b – коэффициент Брайана, n – номер (2,3) рассматриваемой моды (формы) колебаний.

Дифференциальные уравнения (3.17)–(3.20) являются точными и явно зависят от входной угловой скорости ω основания комбинированного двухмодового инерциального датчика. Следует отметить, что здесь величина входной угловой скорости ω не имеет каких-либо абсолютных ограничений. Обычно (во многих реальных практических ситуациях) входная угловая скорость ω намного меньше, чем рабочие частоты $\Omega_{(n)}$ рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов. Более того, как выше отмечалось в таких инерциальных датчиках величины квадратур второй ($b_{(2)}$) и третьей ($b_{(3)}$) рабочих мод колебаний этих двухмерных осцилляторов абсолютно точно поддерживаются нулевыми ($b_{(n)} = 0$). Поэтому на основании точного уравнения (3.20) имеем следующие выражения:

$$\dot{\theta}_{(n)} \approx \Omega_n, \quad \theta_{(n)} \approx \Omega_n t + \theta_{(n)(0)}$$

Можно также отметить, что правые части всех четырех дифференциальных уравнений (3.17)–(3.20) являются практически периодическими с периодами пропорциональными двум рабочим модам колебаний рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов.

Более того, за полные периоды T_2 и T_3 колебаний на второй Ω_2 ($T_2 = 2\pi/\Omega_2$) и третьей Ω_3 ($T_3 = 2\pi/\Omega_3$) резонансных частотах (соответствующих двум рабочим модам) все орбитальные параметры, за исключением двух орбитальных углов $\theta_{(2)}$ и $\theta_{(3)}$, остаются практически постоянными величинами. Поэтому приближенные решения уравнений (3.17)–(3.19) в течение указанных полных периодов определяются следующими выражениями:

$$a_{(n)}\left(t+T\right) \approx a_n\left(t\right) - \omega_{(n)} b_{(n)}\left(t\right) / \int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)})dt \tag{3.21}$$

$$b_{(n)}(t+T) \approx b_n(t) + \omega_{(n)}a_{(n)}(t)/\int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)})dt \tag{3.22}$$

$$\varphi_{(n)}(t+T) \approx \varphi_n(t) + \frac{2\omega_{(n)}}{(a^2_{(n)}(t) - b^2_{(n)}(t))}\int_t^{t+T} (b^2_{(n)}\cos^2(\theta_{(n)}) - (b^2_{(n)}\sin^2(\theta_{(n)}))dt \tag{3.23}$$

Одновременно имеем

$$\int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)})dt = 0, \quad \int_t^{t+T} \sin^2\theta_{(n)}dt = \int_t^{t+T} \cos^2\theta_{(n)}dt = 1/2$$

Поэтому очевидно, что уравнения (3.21)–(3.23) становятся равными следующим выражениям:

$$a_{(n)}(t+T) \approx a_n(t)$$

$$b_{(n)}(t+T) \approx b_n(t)$$

$$\varphi_{(n)}(t+T) \approx \varphi_n(t) + \frac{\omega_{(n)}(b^2_{(n)}(t) - a^2_{(n)}(t))}{(a^2_{(n)}(t) - b^2_{(n)}(t))}$$

Аналогичные результаты могут быть получены при решении следующих более простых дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{a}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{b}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}_{(n)}(t) = -\omega_{(n)}, \quad \dot{\theta}_{(n)} = \Omega_n \tag{3.24}$$

Таким образом, что касается долговременного функционирования рассматриваемого двухмодового ($n = 2, 3$) гироскопа – идеального осциллятора класса неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко, то есть исследуя изменения основных орбитальных параметров $\dot{a}_{(n)}, \dot{b}_{(n)}, \dot{\varphi}_{(n)}$ и $\dot{\theta}_{(n)}$ на достаточно большом общем числе периодов наблюдения T_n, то можно заметить, что все указанные выше переменные достаточно точно соответствуют дифференциальным уравнениям вида (3.24). Данные уравнения описывают два вибрирующих эллипса, которые имеют постоянные формы ($a_{(n)} = b_{(n)} = \text{const}$) и прецессируют с постоянной угловой скоростью. Поскольку системы координат, в которых прецессируют указанные эллипсы, обычно фиксируются относительно измерительных (приборных) осей комбинированного гироскопа, то в инерциальном пространстве (неподвижных звезд) оба представленных эллипса прецессируют с нулевой угловой скоростью и остаются неподвижными. Тем самым подтверждается наличие известных гироскопических членов Кориолиса в исходных дифференциальных уравнениях вида (3.1)–(3.2), описывающих поведение “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко.

4. Способ определения углов поворота двухмодового гироскопа. Для реализации нового способа функционирования двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко необходимо в каждой конкретной конструкции нового волнового твердотельного гироскопа организовать достаточно точный съем первичной информации перемещений двух материальных точек, которые показаны на рис. 1. и рис. 2.

В предлагаемом новом способе необходимо вычислять нормированные энергии $E_{(n)}$ ($n = 2, 3$) и/или амплитуды $a_{(n)}$ колебаний двух осцилляторов и их кинетические моменты H_n ($n = 2, 3$) и/или квадратуры $b_{(n)}$ колебаний в соответствии с формулами (3.9) и (3.10). Определив полные энергии колебаний и их кинетические моменты можно достаточно точно контролировать по формулам (3.7) и (3.8) соответствующие амплитуды и квадратуры двух рабочих мод (форм) колебаний механических стоячих волн.

Отметим, что все вычисления по указанным выше формулам основываются только на точных измерениях переменных $x_{(n)}(t)$ и $y_{(n)}(t)$, а также, соответственно, их первых производных $\dot{x}_{(n)}(t)$ и $\dot{y}_{(n)}(t)$, которые задают положение волны на кромке резонатора. Этих первичных данных полностью достаточно для определения двух искомых углов $2\varphi_2$ и $3\varphi_3$ наклона рассматриваемых эллипсов колебаний (см. рис. 1 и рис. 2) в соответствие с исходными формулами (3.13) и (3.14), что и представляет собой конечную цель нового способа реализации "обобщенного" неуправляемого маятника Фуко – комбинированного (двухмодового) свободного (интегрирующего) ВТГ. При произвольных начальных условиях аналитические выражения (3.3)–(3.4) определяют в горизонтальной плоскости (x, y) два вибрирующих эллипса, которые соответствуют двум рабочим модам (формам) колебаний.

В случае, когда эллипсы вырождаются в отрезки прямых, решения (3.3)–(3.4) определяют в рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторах механические стоячие волны, которые обладают важными инерционными свойствами. В случае противоположного вырождения, когда соответствующие эллипсы превращаются в окружности, формулы (3.3)–(3.4) определяют в этих же осцилляторах бегущие волны, которые не обладают необходимыми инерционными свойствами. Исходя из этого, для самых простых прикладных способов реализации двухмодовых свободных ВТГ, достаточно поддерживать заданные амплитуды $a_{(n)} = \text{const}$ и нулевые квадратуры $b_{(n)} = 0$ в узлах двух форм колебаний кромки полусферического резонатора ВТГ.

Можно показать, что для режима свободной волны и применительно к третьей моде (форме стоячей волны) колебаний для высокодобротной кварцевой полусферы, имеем следующую формулу прецессию угла волны:

$$\varphi_b = -0.248\int_0^t \omega(t)\,dt$$

что соответствует повороту осей колебаний стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 22.32 град. или относительно инерциального пространства на угол 67.68 град. при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90 град.

В данном способе реализации режима измерения углов поворота основания двухмодового инерциального датчика относительно исходного (начального) положения необходимы два независимых канала съема первичной информации измерения положения механической стоячей волны колебаний и определения произвольных поворотов основания в соответствии с формулами преобразований (3.13)–(3.14), поэтому точность предлагаемого способа реализации нового двумодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза превышает точность классического одномодового ВТГ.

Что касается прикладных аспектов реализации теории интегрирующих гироскопов на базе новых конструкций [23, 24] двухмодовых волновых твердотельных гироскопов, то следует отметить, что в уравнениях (3.1)–(3.2) следует, вместо входной угловой скорости ω, ввести общий параметр $nk_b\omega$, где n – номер рассматриваемой моды (формы) колебаний, k_b – коэффициент Брайана конкретной реализации обобщенного маятника Фуко.

5. Заключение. Выполненные в данной работе теоретические исследования функционирования новых двухмодовых инерциальных датчиков ориентации позволяют сформулировать следующие основные результаты:

1. Теория двумодовых инерциальных датчиков ориентации позволяет синтезировать точную математическую модель функционирования новых свободных гироскопов семейства "обобщенный" неуправляемый маятник Фуко.

2. Математическая модель двумодового ВТГ обычно используется для изучения перемещений кромки высокодобротного полусферического резонатора одновременно на второй и третьей рабочих модах (формах) упругих колебаний и создания методов точного съема первичной информации о положении механической стоячей волны.

3. Два одновременно функционирующих канала инерциальной информации повышают точность предлагаемого способа реализации двухмодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза по сравнению с точностью классического одномодового ВТГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foucault L.* Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // C.r. Acad. sci. Paris, 1851. V. 32. P. 135–138.
2. *Kamerlingh Onnes H.* Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Ph. D. Disertation. Groningen, Netherlands, 1879.
3. *Quick W.H.* Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. № 3. P. 523–534.
4. *Stiles J.C.* Vibrating ring gyro // U.S. Patent. No. 3, 924, 475. 1975.
5. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic Gyro Fabrication and Testing, Delco Electronics Division, report R77-64, August 1977.
6. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic Vibration Bell Gyro // US Patent. No. 4, 157, 041. 1979.
7. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Joint Services Data Exchange for Inertial Systems. Los Angeles. 1982. P. 432–433.
8. *Loper E.J., Lynch D.D.* Projected system performance based on recent HRG test results // IEEE/AIAA 5th Digital Avionics Systems Conference, 31 Oct. 3 Nov. 1983. P. S83–105.
9. *Loper E.J., Lynch D.D.* Vibratory rotational sensor. EU Patent, No. 0141621 A2. 1984.
10. *Lynch D.D.* Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd Saint-Petersburg Interv. Conf. On Gyroscopic Technology and Navigation. St.-Petersburg, 1995. P. 26–34.
11. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
12. *Burdess J.S.* The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // Proc. Inst. Mech. Engrs. (London). 1986. V. 200. № C4. P. 271–280.
13. *Koning M.G.* Vibrating Cylinder Gyroscope and Method // US Patent. No. 4, 793, 195. 1988.
14. *Fox C.H.J.* Vibrating cylinder rate gyro, theory of operation and error analysis // DGON Symposium Gyro Technology. Stuttgart, 1988. P. 5.0–5.23.
15. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // Aviation Week and Space Technology. 25 October 1982. P. 64–72.
16. *Журавлев В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
17. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3nd Saint-Petersburg Intern. Conf. On Integrated Navigation Systems. St.-Petersburg, 1996. Pt. 1. P. 143–149.
18. *Zhuravlev V., Perelyaev S., Borodulin D.* The Generalized Foucault Pendulum is a 3D Integrating Gyroscopes Using the Three-Dimensional Precession of Standing Waves in a Rotating Spherically Symmetric Elastic Solid // 2019 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS 2019). IEEE, 2019. P. 59–70.
19. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
20. *Bryan G.H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Vol VII. Nov. 24. 1890. P. 101–111.

21. *Журавлев В.Ф.* Принципиальные вопросы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный маятник Фуко” // Проблемы механики. Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского / Под ред. *Д.М. Климова*. М.: Физмазлит, 2003. С. 369–386.
22. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope // IEEE Transactions on Automatic Control. 1978. V. AC-23. № 4. P. 545–556.
23. *Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Волновой твердотельный гироскоп – инерциальный датчик нового поколения // Материалы XXIV Санкт-Петербургской межд. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО Концерн “ЦНИИ Электроприбор”, 2017. С. 287–290.
24. *Журавлев В.Ф., Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Миниатюрный волновой твердотельный гироскоп нового поколения для бескарданных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов // XXVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: Концерн “ЦНИИ Электроприбор”, 2019. С. 250–254.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 77–88

УДК 534.113

ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

© 2021 г. М. А. Ильгамов[a,b,c,*]

[a] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

[b] *Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

[c] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

** e-mail: ilgamov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 23.08.2020 г.
После доработки 04.09.2020 г.
Принята к публикации 29.10.2020 г.

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, рассматривается в статической и динамической постановках. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений.

Ключевые слова: стержень, давление, продольная сила, изгиб, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329921040061

1. Введение. Как известно, устойчивость прямолинейной формы консольного стержня зависит от поведения продольной сжимающей силы. Имеется качественная разница в задаче его устойчивости при сжимающих силах неизменного направления и с поворотом направления в соответствии с ориентацией концевого поперечного сечения. “Е.Л. Николаи был, по всей вероятности, первым, кто рассмотрел задачу об устойчивости упругой системы, нагруженной следящими силами .... В работе 1928 г. [1] исследуется устойчивость прямолинейной формы гибкого стержня, один конец которого защемлен, а другой – нагружен сжимающей силой .... Было установлено, что не существует никаких иных форм равновесия, кроме прямолинейной” – так начинается глава об устойчивости равновесия упругих систем при наличии следящих сил в книге [2]. В ней и в [3] излагается история этой задачи и ее особенности. К первым исследованиям в этом направлении относятся работы [4–6]. Динамический подход к задаче был предложен в [1–3] и далее развит в [7] и в последующих работах.

В уравнении изгибного движения стержня в одной из главных плоскостей инерции

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \tag{1.1}$$

x, t – продольная координата и время, F, D, ρ – площадь поперечного сечения, изгибная жесткость, плотность материала, P, q – продольная сжимающая сила и поперечная распределенная сила, w – прогиб. В статической постановке задачи из (1.1) и соответствующих граничных условий получается, что ни при каких значениях сжимающей следящей силы P не существует криволинейных форм равновесия стержня. Рассмотрение задачи в динамической постановке дает значение критической следящей силы стержня [2, 3]

$$P_* \approx 2\pi^2 D\big/L^2 \tag{1.2}$$

что в восемь раз выше, чем статическая критическая сила неизменного направления. При достижении значения силы (1.2) стержень совершает неограниченно возрастающие изгибные колебания. Во всех указанных работах сжимающая сила P считается постоянной или медленно возрастающей. В них не рассматривается влияние боковой силы q на стержень, зависящей от его изгиба.

Начиная с обобщающих работ по теории тонких пластин и оболочек [8, 9] до недавней монографии [10] поперечная распределенная сила принимается равной $q = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 – избыточные давления на поверхности, перпендикулярные плоскости изгиба. Эти давления p_1 и p_2 положительны, если общее давление превышает атмосферное давление p_0, отрицательны при меньшем значении общего давления, чем p_0. Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, появляющейся при изгибе стержня и цилиндрическом изгибе пластины, приводит к выражению [11, 12]

$$q = p_1 - p_2 + p_m F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad p_m = \frac{p_1 + p_2}{2} \tag{1.3}$$

Распределенная поперечная сила $p_m F(\partial^2 w/\partial x^2)$ при $p_m > 0$ направлена в сторону вогнутости, при $p_m < 0$ (вакуумирование) – в сторону выпуклости. Из (1.1), (1.3) при $p_1 = p_2$ ($p_m = p$) и условиях свободного опирания обоих концов стержня следует статическое критическое значение [13, 14]

$$(P - pF)_* = \pi^2 D\big/L^2 \tag{1.4}$$

Таким образом, окружающее давление в этом примере приводит к увеличению критического значения сжимающей силы. При вакуумировании ($p < 0$) происходит его уменьшение. Это увеличение объясняется тем, что поперечная распределенная сила q (при $p > 0$) стремится уменьшить прогиб (рис. 1, а). Происходит увеличение эффективной изгибной жесткости. Если сила P возникает в результате действия давления p на торцевое сечение площадью F ($P = pF$), то стержень не теряет устойчивость прямолинейной формы. Этот результат, следующий из простейшей теории изгиба, согласуется с выводом об устойчивости упругой полосы под всесторонним давлением, полученным впервые в [15] исходя из соотношений теории упругости. Устойчивость стержня при гидростатическом давлении рассмотрена в [13]. Соответствующий обзор работ в этом направлении содержится в [14]. Поведение вращающегося консольного вала, находящегося под переменным по длине давлением, изучено в [16], а динамика трубчатого консольного стержня с истекающей жидкостью – в [17].

Насколько известно, влияние давления на боковую поверхность консольного стержня до сих пор изучено недостаточно. В данной статье рассматривается статическая и динамическая устойчивость консольного стержня в случае, когда кроме давле-

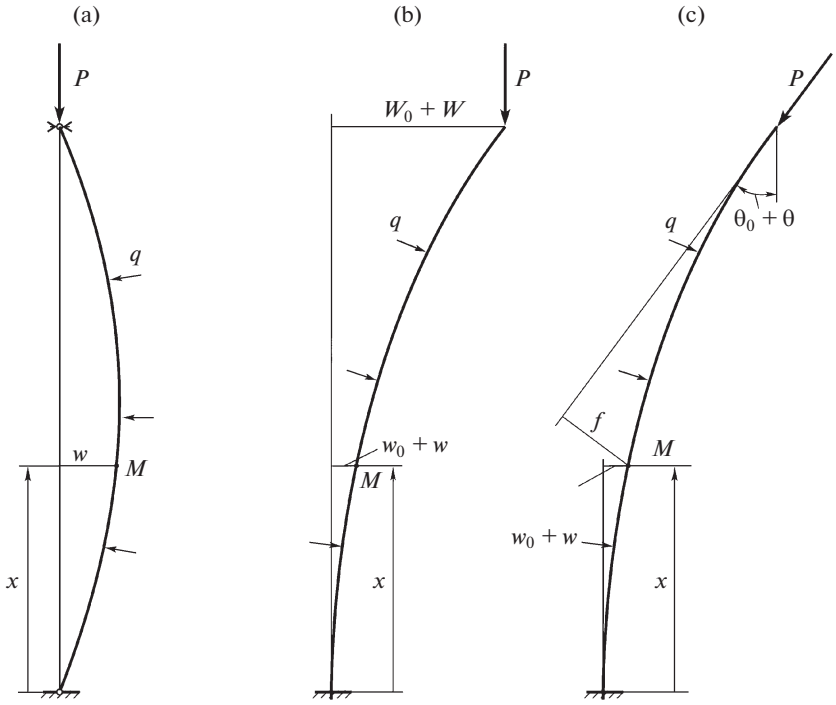


Рис. 1. Схема нагружения стержня

ния на его поверхность действует сжимающая сила неизменного направления или следящая сила.

2. Постановка задачи. Линейная задача о продольном изгибе консольного стержня под действием сжимающей силы рассматривается в случае всестороннего давления на его боковую поверхность. Сечение его имеет форму круга или прямоугольника. Собственный вес стержня не учитывается. За начальное принимается некоторое отклоненное от прямой состояние, определяемое прогибом $w_0(x)$. Предполагается, что в начальном состоянии под атмосферным давлением p_0, действующим на боковую поверхность и концевое сечение стержня, отсутствуют напряжения. Избыточное давление p является равномерным по всей поверхности стержня и не зависит от его деформации, на концевое сечение стержня p не действует. Таким образом, в выражении (1.3) $p_1 = p_2 = p$. Тогда распределенная поперечная сила в соответствии с (1.3) и с учетом начального прогиба w_0 равна

$$q = pF\frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

и при $p > 0$ направлена в сторону вогнутости, так как площадь вогнутой стороны меньше площади выпуклой стороны поверхности стержня.

Рассматриваются случаи сжимающей силы неизменного направления (рис. 1, b) и следящей силы (рис. 1, c). В первом случае вертикально направленная сила P создает изгибающий момент $P(W_0 + W - w_0 - w)$ относительно точки M с направлением по часовой стрелке. Здесь W_0, W – начальное и текущее перемещение конца $x = L$. Так же

направлен изгибающий момент от распределенной силы q (2.1) на длине $L - x$ относительно точки M. Поэтому вместо коэффициента P во втором члене уравнения (1.1) принимаем $P + pF$ (при таком рассуждении правая часть (1.1) равна нулю). Кроме того, вертикально направленная сила P дает на $x = L$ перерезывающую силу $P\sin(\theta_0 + \theta) \approx \approx P(\theta_0 + \theta) = P(\partial(w_0 + w)/\partial x)$ (рис. 1, b). Она равна внутренней перерезывающей силе $D\partial^3 w/\partial x^3$. Уравнение (1.1) с учетом сказанного запишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma^2 \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\omega^2 \partial t^2} = 0$$
$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha^2 = \frac{pFL^2}{D}, \quad \beta^2 = \frac{PL^2}{D}, \quad \omega^2 = \frac{D}{\rho FL^4}, \quad \gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 \tag{2.2}$$

Безразмерный параметр α характеризует влияние давления окружающей среды на изгиб стержня. Для прямоугольного и кругового поперечных сечений

$$\alpha^2 = 12\frac{p}{E}\left(\frac{L}{h}\right)^2, \quad \alpha^2 = 16\frac{p}{E}\left(\frac{L}{d}\right)^2 \tag{2.3}$$

где h, d – толщина и диаметр. Параметр β характеризует влияние сжимающей силы на изгиб.

Граничные условия имеют вид

$$w = 0 \quad (\xi=0), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi=0)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \xi} = 0 \quad (\xi = 1), \quad \frac{\partial^3 w}{\partial^3 \xi} = -\beta^2 \frac{\partial (w_0 + w)}{\partial \xi} \quad (\xi = 1) \tag{2.4}$$

Если как обычно не учитывать поперечную силу q (2.1) от всестороннего давления на боковую поверхность стержня, то в уравнении (2.2) будет $\gamma = \beta$.

В случае следящей силы (рис. 1, c) изгибающий момент равен $-Pf$, где расстояние $f = w/\cos(\theta_0 + \theta) + [L - x - (w_0 + w)\mathrm{tg}(\theta_0 + \theta)] \approx w + L - x$. Приравнивая $-P(w + L - x)$ внутреннему изгибающему моменту $D\partial^2 w/\partial x^2$ и продифференцировав по x это равенство два раза и с учетом инерционной силы, получаем уравнение (1.1). Так же как в предыдущем случае поведения силы P выражение изгибающего момента имеет переменный по x член $-P(w_0 + w)$. Направление изгибающего момента от распределенной силы q не меняется. Поэтому в (1.1) вместо коэффициента P имеем $P - pF$. Следовательно, в уравнении (2.2) будет тот же коэффициент $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$. При этом на конце $x = L$ изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю. Поэтому граничные условия (2.4) сохраняют свой вид за исключением последнего условия, где необходимо положить правую часть равной нулю.

В некоторых работах (например, в [2, 3]) вместо последних двух условий (2.4) ставятся кинематические уравнения: $w(1) = W$, $(dw/d\xi)_{\xi = 1} = \Phi$, где W, Φ – отклонение и угол поворота нагруженного конца стержня.

3. Сжимающая сила неизменного направления. Для простоты примем функцию начального отклонения в виде

$$w_0 = W_0 \xi \tag{3.1}$$

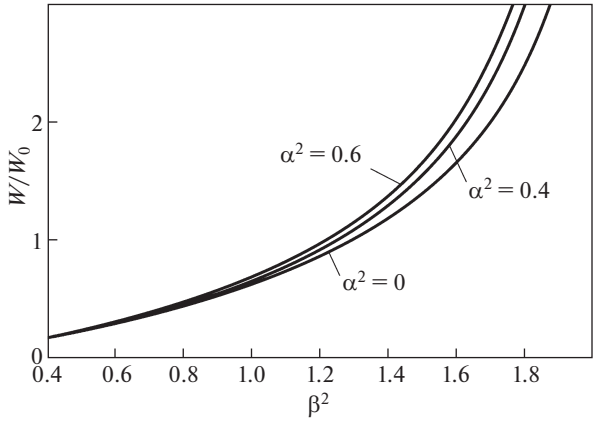


Рис. 2. Зависимость относительного прогиба верхнего торца стержня W/W_0 от безразмерного параметра сжимающей нагрузки неизменного направления β^2

Тогда в статической постановке уравнение (2.2) имеет решения

$$\begin{gathered} w = C_0 + C_1\xi + C_2 \sin\gamma\xi + C_3 \cos\gamma\xi \quad (\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 > 0) \\ w = C_0 + C_1\xi + C_2 \mathrm{sh}\gamma\xi + C_3 \mathrm{ch}\gamma\xi \quad (\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 > 0) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Определив константы первого решения (3.2) по условиям (2.4), находим

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2 (\sin\gamma - \gamma\xi\cos\gamma - \sin\gamma(1-\xi))}{\gamma(\beta^2\cos\gamma - \alpha^2)} \tag{3.3}$$

Дополнительный прогиб верхней точки ($\xi = 1$, $w = W$) равен

$$\frac{W}{W_0} = \frac{\beta^2 (\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)}{\gamma(\beta^2\cos\gamma - \alpha^2)} \tag{3.4}$$

В отсутствии избыточного давления ($\alpha = 0$, $\gamma = \beta$) из (3.4) следует

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\beta}\mathrm{tg}\beta - 1 \tag{3.5}$$

С возрастанием параметра нагрузки β прогиб увеличивается. При $\beta = \pi/2$ решение (3.5) неограниченно возрастает. Это дает известное критическое значение сжимающей силы [1–3]

$$P_* = \frac{\pi^2 D}{4L^2} \tag{3.6}$$

Изменение отношения W/W_0 по β^2 при заданных значениях α^2 по формуле (3.4) показано на рис. 2. Как видно, чем больше α^2 (давление p), тем быстрее возрастает прогиб при увеличении β^2 (сжимающей силы). Критическое значение параметра β^2 определяется из уравнения

$$\cos\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \alpha^2/\beta^2 \tag{3.7}$$

На рис. 3 сплошной линией приведена зависимость $\beta^2(\alpha^2)$ по (3.7).

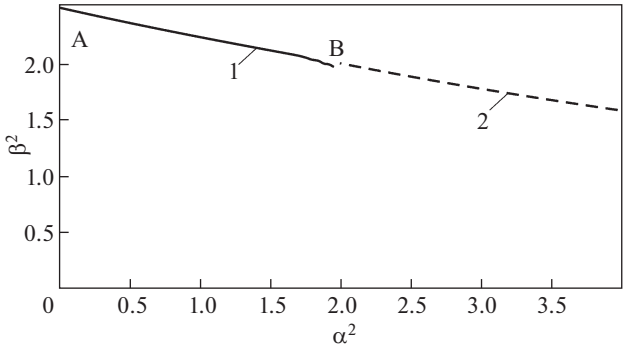


Рис. 3. Взаимная зависимость безразмерных параметров давления α^2 и сжимающей нагрузки β^2

При малых значениях α^2 по сравнению с $(\pi/2)^2$ приняв $\beta^2 = (\pi/2)^2 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll (\pi/2)^2$ и учитывая $\cos\sqrt{(\pi/2)^2 - \varepsilon - \alpha^2} \approx \sin((\alpha^2 + \varepsilon) / \pi) \approx (\alpha^2 + \varepsilon)/\pi$, получаем уравнение $\varepsilon^2 - (\pi/2)^2\varepsilon + \pi(4 - \pi)(\alpha/2)^2 = 0$, откуда определяются

$$\varepsilon \approx \frac{\pi(4-\pi)\alpha^2}{\pi^2 - 4\alpha^2}, \quad \beta_*^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi(4-\pi)\alpha^2}{\pi^2 - 4\alpha^2} \tag{3.8}$$

В этом случае вместо (3.6) критическое значение сжимающей силы равно

$$P_* = \beta_*^2 D/L^2 \tag{3.9}$$

При $\alpha^2 = \beta^2$ уравнение (2.2) $d^4w/d\xi^4 = 0$ рассматривается совместно с условиями (2.4), которые остаются без изменения. Константы решения

$$w = C_0 + C_1\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3$$

этого уравнения равны $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -3$, $C_3 = W_0\beta^2/(2 - \beta^2)$. Дополнительный прогиб

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2}{2-\beta^2}\left(\xi^2 - \frac{\xi^3}{3}\right) \tag{3.10}$$

плавно возрастает при увеличение β^2. Критическое значение его равно 2. Соответствующая сила равна

$$P_* = 2D/L^2 \tag{3.11}$$

Это предельное уменьшение силы P_* из-за действия бокового избыточного давления при $\beta > \alpha$. На рис. 3 значению (3.11) соответствует точка B. Таким образом, при повышении избыточного давления p и соответствующего параметра α^2 от нуля до $\alpha^2 = 2$ параметр β^2 снижается от $(\pi/2)^2$ (точка A) до 2 (точка B). Соответствующие значения P_* даются формулами (3.6) и (3.11).

Критическое значение избыточного давления p_* для стального стержня круглого сечения ($\alpha^2 = 2$, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $L/d = 200$) в соответствии с (2.3) равно $p_* = 2.5$ МПа (25 атм).

Так как p представляет собой избыточное давление, то вакуумированию соответствуют отрицательные значения параметра α^2 в уравнениях (3.7), (3.8). При этом абсолютное значение отрицательного давления p должно быть меньше атмосферного давления p_0. Другое ограничение состоит в неравенстве $P > |p|F$ ($\beta^2 > |\alpha^2|$, $\gamma^2 > 0$). Тогда справедливыми остаются первое решение (3.1) и последующие выражения.

При $\alpha = 0$, $\gamma = \beta$ имеем те же результаты (3.5), (3.6). Как видно из рис. 3, при $\alpha^2 < 0$ критическое значение сжимающей силы P_* возрастает. Этот эффект объясняется тем, что при $p < 0$ направление распределенной поперечной силы q (2.1) меняет знак. Теперь она направлена в сторону выпуклости.

Удовлетворение второго решения (3.2) при начальном прогибе (3.1) условиям (2.4) дает

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2(\mathrm{sh}\gamma - \gamma\xi\mathrm{ch}\gamma - \mathrm{sh}\gamma(1-\xi))}{\gamma(\beta^2\mathrm{ch}\gamma - \alpha^2)} \tag{3.12}$$

Следующее из (3.12) уравнение устойчивости представим в двух видах

$$\alpha^2 - \beta^2\,\mathrm{ch}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 0, \quad \gamma^2 - \beta^2(\mathrm{ch}\,\gamma - 1) = 0 \tag{3.13}$$

Первый из них является аналогом уравнения (3.7) и может быть анализирован, как (3.7). В частности, можно вывести приближенное соотношение $\beta^2(\alpha^2)$ при малом отличии β^2 от 2 (точка B на рис. 3). В этом случае надо принять $\beta^2 = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 2$.

Второй вид (3.13) предпочтительнее в том отношении, что можно задаваться значением γ и находить β^2. После этого определяется соответствующее значение $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2$. Так построена часть кривой правее точки B на рис. 3. При значениях α^2 и β^2, не сильно отличающихся от 2 (точка B), и соответственно $\gamma \le 2$, используя разложение $\mathrm{ch}\gamma = 1 + (\gamma^2/2) + (\gamma^4/24)$, из второго уравнения (3.13) получаем явные связи

$$\beta^2 = \frac{24}{12 + \gamma^2}, \quad \alpha^2 = 12\left(\frac{2}{\beta^2} - 1\right) + \beta^2 \tag{3.14}$$

Пусть $\gamma = 1$, тогда по (3.14) $\beta^2 = 24/13$, $\alpha^2 = 37/13$. Эти приближенные значения практически не отличаются от данных по точным уравнениям (3.13). Критические значения сжимающей силы и избыточного давления равны

$$P_* = \frac{24D}{13L^2}, \quad p_* = \frac{37D}{13L^2} \tag{3.15}$$

На рис. 3 построена штриховая кривая по (3.14). Участок A – B соответствует преобладающей сжимающей силе, участок правее точки B – преобладающему давлению.

4. Сжимающая следящая сила. Решения уравнения (2.2) для этого случая имеют тот же вид (3.2). Примем также выражение (3.1). Рассмотрим первое решение (3.2). В последнем из условий (2.4) правая часть равняется нулю. Из этих условий находим

$$\begin{gathered} C_0 + C_3 = 0, \quad C_1 + \gamma C_2 = 0 \\ C_2 \sin\gamma + C_3 \cos\gamma = 0 \\ C_2 \cos\gamma - C_3 \sin\gamma = 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Отсюда следует $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$. Поэтому согласно первому решению (3.2) $w = 0$. Этот результат не меняется и при отрицательном значении α^2 (при вакуумировании). Второе решение (3.2) при удовлетворении граничным условиям также обращается в нуль.

Таким образом, учет влияния окружающего давления на стержень не приводит к изменению классического результата об отсутствии отклоненного равновесного состояния стержня при действии следящей силы [1–3].

Как известно [1–3, 5, 7], для суждения об устойчивости консольного стержня в случае следящей сжимающей силы требуется рассмотрение его динамики. Принимаем $w = W(\xi)\exp(i\Omega t)$. Из (2.2) следует

$$\frac{d^4W}{d\xi^4} + \gamma^2\frac{d^2W}{d\xi^2} - \mu^2 W = 0, \quad \mu^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.2) имеет вид

$$W = C_0\sin\gamma_1\xi + C_1\cos\gamma_1\xi + C_2\mathrm{sh}\gamma_2\xi + C_3\mathrm{ch}\gamma_2\xi$$
$$\gamma_{1,2} = \frac{\gamma}{2}\left(\pm 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{\gamma}\right)^2}\right) \tag{4.3}$$

Такое решение рассмотрено в [6, 7]. Удовлетворение (4.3) условиям (2.4) с нулевой правой частью в четвертом условии приводит к системе четырех уравнений относительно констант. Соответствующее трансцендентное уравнение позволяет установить значение нагрузки, когда параметр $\mu = \Omega/\omega$ становится комплексным. Если он имеет отрицательную мнимую часть, то $\exp(i\Omega t)$ неограниченно возрастает со временем. При этом критическое значение следящей силы в отсутствии давления определяется формулой (1.2). С учетом обозначений (2.2) имеем $\gamma_*^2 = P_* L^2/D$.

Так как при одновременном действии следящей силы и бокового давления $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$, то можно записать $\beta_*^2 = \gamma_*^2 + \alpha^2$ или

$$P_* \approx \frac{2\pi^2 D}{L^2} + pF \tag{4.4}$$

Таким образом, при действии на стержень избыточного бокового давления критическое значение следящей силы возрастает. Наоборот, при вакуумировании поверхности стержня это значение уменьшается.

До сих пор все результаты относились к постановке задачи, где на верхний срез стержня избыточное давление p не действует. Если это допущение снять и принять, что следящая сила возникает в результате действия давления p, то $P = pF$ или $\beta^2 = \alpha^2$. Поэтому $\gamma^2 = 0$. Пример такой постановки задачи рассматривается далее.

В случае постановки задачи согласно рис. 1, а имеем $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$. Так как при силе сжатия $P = pF$ и $\alpha^2 = \beta^2$, $\gamma^2 = 0$, то не происходит потери устойчивости стержня. Это известный результат, отмеченный во введении к статье.

5. Совместное действие давления, сил неизменного и изменяющегося направления. Если на верхний торец стержня действует одновременно вертикальная сила P_1 и следящая сила P_2, можно предположить, что при преобладающем действии первой из них

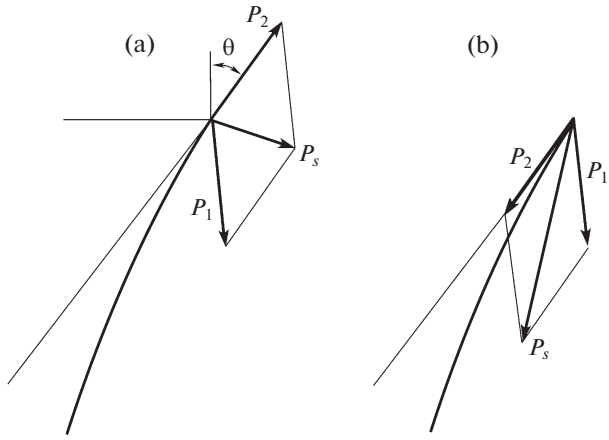


Рис. 4. Схема совместного действия сжимающих сил неизменного и изменяющегося направления

поведение стержня будет ближе к случаю на рис. 1, b. В противном случае возможна реализация поведения в случае рис. 1, c.

Статический изгиб описывается уравнением (2.2) без последнего члена, в котором $\gamma^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2$, где $\beta_1^2 = P_1L^2/D$, $\beta_2^2 = P_2L^2/D$, $\alpha^2 = pFL^2/D$. В последнем из граничных условий (2.4) вместо β^2 будет β_1^2. Вместо (3.3) теперь решение имеет вид

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta_1^2\left(\sin\gamma - \gamma\xi\cos\gamma - \sin\gamma(1-\xi)\right)}{\gamma(\beta_1^2\cos\gamma + \beta_2^2 - \alpha^2)}, \quad \gamma^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2 \tag{5.1}$$

При $\beta_2 = 0$ отсюда следует решение (3.3). Более подробно рассмотрим случай $\alpha = 0$. Решение (5.1) неограниченно возрастает при

$$\cos\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} = -\beta_2^2/\beta_1^2 \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) справедливо в пределах $-1 < \beta_2^2/\beta_1^2 < 1$. Следовательно, следящая сила P_2 должна быть меньше силы P_1. Будем считать, что сила P_1 только сжимающая ($\beta_1^2 > 0$), а P_2 может быть как сжимающей ($\beta_2^2 > 0$), так и растягивающей ($\beta_2^2 < 0$). Интервал $-1 < \beta_2^2/\beta_1^2 < 0$ соответствует растягивающей силе P_2 ($\beta_2^2 < 0$). Если, например, $\beta_2^2/\beta_1^2 = -1/2$, то из уравнения (5.2) следует $\beta_1^2 = 2\pi^2/9$. Таким образом, критическое значение сжимающей силы неизменного направления равно

$$P_{1*} = \frac{2\pi^2 D}{9L^2} \tag{5.3}$$

Оно меньше, чем значение (3.6) в отсутствие растягивающей следящей силы P_2. При $\beta_2^2/\beta_1^2 = -1/\sqrt{2}$ имеем $\beta_1^2 = 0.213\pi^2$, т.е. с увеличением растягивающей силы P_2 критическое значение сжимающей силы P_{1*} уменьшается.

Интервал $\beta_2^2/\beta_1^2 > 0$ соответствует сжимающей следящей силе P_2. Если $\beta_2^2/\beta_1^2 = 1/2$, то из уравнения (5.2) получаем $\beta_1^2 = 8\pi^2/27$ и

$$P_{1*} = \frac{8\pi^2 D}{27L^2} \tag{5.4}$$

Это значение больше, чем критическое значение (3.6) при $P_2 = 0$ (числовой коэффициент в (5.4) равен 0.296 против 0.25 в (3.6)).

Предельное увеличение при $\beta_2^2/\beta_1^2 = 1$ достигает $\beta_1^2 = \pi^2/2$. Таким образом при равенстве сжимающих сил P_1 и P_2 критическое значение

$$P_{1*} = \frac{\pi^2 D}{2L^2} \tag{5.5}$$

в два раза выше, чем в отсутствии следящей силы.

Эти результаты, на первый взгляд парадоксальные, объясняются тем, что при $P_1 > 0$, $P_2 < 0$ их равнодействующая P_s создает больший изгибающий момент за счет увеличения соответствующего плеча (рис. 4, a). Наоборот, при $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ их равнодействующая P_s создает меньший изгибающий момент за счет резкого уменьшения плеча (рис. 4, b).

Отметим, при $\alpha = 0$ приходим к задаче, рассмотренной в книге [3]. В ней предполагается, что сжимающая сила прикладывается под углом θ, отличным от dw/dx при $\xi = 1$. Определяется то значение θ, когда стержень теряет устойчивость.

В общем случае из (5.1) следует уравнение устойчивости

$$\cos\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2} = -\frac{\beta_2^2 - \alpha^2}{\beta_1^2} \tag{5.6}$$

которое справедливо в интервале $-\beta_1^2 \le \beta_2^2 - \alpha^2 \le \beta_1^2$.

В частном случае $\beta_2^2 - \alpha^2 = -\beta_1^2/2$ из (5.6) следует $\beta_1^2 = 2\pi^2/9$. Критическое значение силы P_{1*} дается формулой (5.3). Следовательно, для реализации этого варианта требуется меньшее значение растягивающей следящей силы ($\beta_2^2 < 0$), чем в рассмотренном выше случае (при $\alpha = 0$), если окружающее давление положительно ($\alpha^2 > 0$). Наоборот, при вакуумировании ($\alpha^2 < 0$) растягивающая сила P_2 должна быть выше для достижения значения (5.3).

В качестве примера одновременного действия положительных сил P_1 и P_2 можно привести схему, где сила P_1 создается весом шара радиуса R из материала с плотностью ρ. Она равна $P_1 = (4\pi/3)R^3 g\rho$, где g – гравитационное ускорение. Следящая сила представляет собой равнодействующую давления на поверхность шара за вычетом площади поперечного сечения стержня. Она равна $P_2 = pF$, где F – площадь сечения стержня.

Так как в данном примере $\beta_2^2 = \alpha^2$, то из (5.6) следует $\cos\beta_1 = 0$, $\beta_1 = \pi/2$. Поэтому критическое значение P_{1*} определяется формулой (3.6). Таким образом, данная постановка задачи не приводит к какой-либо зависимости изгиба и устойчивости от избы-

точного давления p. С учетом изгибной жесткости стержня $D = \pi E d^4/64$ выражение (3.6) дает

$$P_{1*} = \frac{\pi^3 E d^4}{256 L^2} \tag{5.7}$$

Для указанного выше шара связь между входными параметрами имеет вид

$$\frac{R^3 L^2}{d^4} \approx \frac{E}{34 g \rho} \tag{5.8}$$

При $L = 0.1$ м, $d = 0.001$ м, $R = 0.02$ м, $E = 2 \times 10^{11}$ кг/м · с^2, $\rho = 7.8$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2 условие (5.8) выполняется. Критическое значение силы веса равно $P_{1*} = 2.42$ кг · м/с^2.

Если $\beta_2^2 - \alpha^2 = -\beta_1^2$ ($\gamma^2 = 0$), то будет иметь место решение (3.10), где вместе β^2 следует подставить β_1^2.

Уравнение (5.6) позволяет анализировать варианты упругой устойчивости консольного стержня в зависимости от внешних сил.

6. Заключение. 1. Известные особенности устойчивости прямолинейной формы консольного стержня еще более усложняются при действии на его боковую поверхность избыточного давления. Это давление может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на прямолинейную форму стержня. Эти эффекты тесно связаны с направлением сил и граничными условиями.

2. В отличие от случая двухопорного стержня положительное избыточное давление на поверхность консольного стержня уменьшает критическое значение сжимающей силы неизменного направления, а вакуумирование – увеличивает.

3. Действие избыточного давления на поверхность консольного стержня не вносит изменения в известный результат об отсутствии равновесного отклоненного положения под действием сжимающей следящей силы. Происходит стабилизация динамического поведения при действии положительного избыточного давления и дестабилизация при вакуумировании.

4. При одновременном действии сжимающей силы неизменного направления и сжимающей следящей силы происходит уменьшение критического значения первой из них. В случае растягивающей следящей силы это значение увеличивается, что объясняется изменением направления их равнодействующей.

5. Действие окружающего избыточного давления приводит к большему разнообразию упругого поведения стержня. Например, при следящей силе, возникающей в результате действия давления не только на боковую поверхность, но и на торцевое сечение стержня исчезает влияние этого давления на изгиб и устойчивость.

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантом РФФИ (№ 18-01-00150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. 582 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
3. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Физматлит, 1967. 420 с.
4. *Pfluger A.* Stabilitats probleme der Elostostatik. Berlin: Springer-Verlag, 1950. 217 p.

5. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Гостехиздат, 1973. 400 с.
6. *Beck M.* Die Knicklast des einseitig eingespanten tangential gedruckten Stabes // Zeitschr. Angew Math. Phys. 1952. V. 3. № 3. P. 225–228.
7. *Дейнеко К.С., Леонов М.Л.* Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня // ПММ. 1955. Т. 19. № 6. С. 738–744.
8. *Rayleigh Strutt J.W.* The Theory of Sound. Vol. 1. London: Macmillan, 1894. 500 p. = *Стретт Дж.В.* Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
9. *Love A.* A Treafise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p. = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
10. *Shen H.Sh.* Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
11. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и плёнки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
12. *Ильгамов М.А.* Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 5. С. 598–604.
13. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // J. Appl. Mech. 1946. V. 13. P. 198–200.
14. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. M.: Nauka, 1998. 209 p.
15. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
16. *Newland D.E.* Whirling of a cantilever elastic shaft subjected to external pressure // J. Mech. Eng. Sci. 1972. V. 14. № 1. P. 11–18.
17. *Ilgamov M.A., Tang D., Dowell E.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids Struct. 1994. № 8. P. 139–156.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 89–97

УДК 539.3

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СПОСОБАХ ГАШЕНИЯ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

© 2021 г. Н. В. Баничук[a], С. Ю. Иванова[a,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail syuivanova@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.
После доработки 28.11.2020 г.
Принята к публикации 03.12.2020 г.

Рассматривается проблема активного подавления колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке идеальной жидкости. Уравнение динамики панели включает реакцию жидкости и внешнее механическое воздействие, служащее для реализации процесса демпфирования. Выводятся условия экстремальности гашения поперечных колебаний и оценивается эффективность оптимального распределения прикладываемых к панели усилий и оптимальной временной программы функционирования внешнего воздействия.

Ключевые слова: гидроупругая вибрация, гашение колебаний, оптимизация демпфирующих воздействий

DOI: 10.31857/S0572329921040036

1. Введение. Изучение процессов подавления колебаний связано с исследованием движения материалов с большой транспортной скоростью. Примеры таких процессов возникают в промышленности при производстве бумаги, стальных и текстильных полотен и др. Поэтому проблема подавления колебаний механических систем представляет не только теоретический, но и значительный прикладной интерес. Для систем с распределенными параметрами колебания и динамическая устойчивость изучались как в рамках самосопряженных (консервативных), так и несамосопряженных (неконсервативных) задач. Ранее возникающие в этом направлении вопросы рассматривались в работах [1–3]. Значительное внимание при этом уделялось проблемам колебаний деформируемых систем, взаимодействующих с жидкостью или газом (см., например, [4–6]). Отметим здесь задачи о гидроупругих взаимодействиях, основанные на точных выражениях для реакции жидкости [7–11]. Проблемы оптимизации движущихся упругих и вязкоупругих материалов, взаимодействующих с идеальной жидкостью, исследовались в [12–14].

Данная работа посвящена отысканию оптимальных способов подавления возникающих поперечных колебаний панели, движущейся в потоке идеальной жидкости, и оценке эффективности оптимальных распределений прикладываемых к панели усилий и оптимальных временных программ приложения внешних демпфирующих воздействий.

2. Уравнение поперечных колебаний панели в потоке идеальной жидкости. В безразмерных переменных $x' = x/l$, $t' = t/\tau$ (l – половина длины пролета, τ – характерное время) уравнение поперечных колебаний движущейся поступательно и взаимодействующей с потоком жидкости панели записывается в безразмерном виде [15]

$$L(w) \equiv \alpha^2 (1 + r_m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa (1 + r_m r_v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\ + [\kappa^2 (1 + r_m r_v^2) - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{2.1}$$

с учетом безразмерных параметров

$$\alpha = \frac{1}{\tau C}, \quad \beta = \frac{D}{mC^2 l^2} = \frac{D}{l^2 T}, \quad \kappa = \frac{V_0}{C} \\ r_m = \frac{m_a}{m}, \quad r_v = \frac{v_\infty}{V_0}, \quad \gamma = \frac{l_0}{m} \rho_f \tag{2.2}$$

причем $C = \sqrt{T/m}$ – характерная размерная скорость, $w(x,t)$ – поперечное перемещение, m – масса, приходящаяся на единицу площади панели, T – величина натяжения, D – изгибная жесткость, $g(x,t)$ – прикладываемое поперечное управляющее воздействие, V_0 – поступательная скорость панели, v_∞ – скорость потока на бесконечности, Ω – заданная область: $\Omega = \{(x,t) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le t \le t_f\}$. Механическое воздействие, подавляющее поперечные колебания, задается в форме

$$g(x,t) = \nu(x) f(t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{2.3}$$

где $\nu(x)$ задает геометрию прикладываемого воздействия, а $f(t)$ – временная программа силового воздействия на панель.

3. Задача оптимизации. Рассматриваемая ниже задача оптимального подавления поперечных колебаний движущейся панели заключается в минимизации энергетического (квадратичного) функционала

$$J_g = \int_{-1}^{1} \left\{ \alpha_1 w^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\}_{t=t_f} dx \tag{3.1}$$

характеризующего качество процесса демпфирования колебаний при ограничении на демпфирующее воздействие

$$J_\mu = \int_\Omega g^2(x,t)\, d\Omega \le M_0 \tag{3.2}$$

записываемом для удобства при помощи введения вспомогательной неизвестной θ в виде строгого равенства [16]

$$J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0 \tag{3.3}$$

где $M_0 > 0$ – заданная положительная константа, а $\alpha_1 \ge 0$ и $\alpha_2 \ge 0$ – заданные параметры.

При этом рассматриваются следующие начальные и граничные условия:

$$(w)_{t=0} = g_1(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = g_2(x), \quad x \in [-1,1] \tag{3.4}$$

$$(w)_{x=-1} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=-1} = 0, \quad (w)_{x=1} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=1} = 0, \quad t \in [0, t_f] \tag{3.5}$$

в которых t_f – безразмерное время окончания процесса демпфирования колебаний, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные начальные возмущения.

Необходимые условия оптимальности процесса демпфирования колебаний сводятся к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu\left(2\int\limits_{\Omega} g\delta g d\Omega + 2\theta\delta\theta\right) = 0 \tag{3.6}$$

где μ – множитель Лагранжа, а вариации δJ_g, δJ_a даются выражениями

$$\delta J_a = \int\limits_{\Omega} v\left[L(\delta w) - \delta g\right] d\Omega \tag{3.7}$$

$$\delta J_g = 2\int\limits_{-1}^{1}\left[\alpha_1 w\delta w + \alpha_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]_{t=t_f} dx \tag{3.8}$$

Здесь $v = v(x,t)$ – введенная сопряженная переменная, удовлетворяющая по определению следующим граничным и начальным условиям:

$$(v)_{x=-1} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=-1} = 0, \quad (v)_{x=1} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=1} = 0 \tag{3.9}$$

$$(v)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1+r_m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=t_f}, \quad x \in [-1,1] \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1+r_m)}\left[\alpha_1 w - \frac{2\alpha_2(1+r_m r_v)}{\alpha(1+r_m)}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]_{t=t_f}, \quad x \in [-1,1] \tag{3.11}$$

Равенство (3.6) с учетом (3.7), (3.8) и проварьированных начальных и граничных условий (3.4), (3.5) и (3.9)–(3.11) приводит к сопряженному уравнению для переменной $v(x,t)$:

$$\begin{gathered} L(v) = \alpha^2(1+r_m)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} + \\ + [\kappa^2(1+r_m r_v^2) - 1]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \end{gathered} \tag{3.12}$$

и условию экстремума

$$\mu\theta = 0 \tag{3.13}$$

При этом

$$\int\limits_{\Omega}\left(2\mu g(x,t) - v(x,t)\right)\delta g d\Omega = 0 \tag{3.14}$$

Условие (3.13) означает, что для неактивного ограничения (3.2), выполняющегося со знаком строгого неравенства (3.2), (3.3), следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий множитель Лагранжа в этом случае, как это следует из необходимого условия оптимальности (3.13), должен полагаться равным нулю. Тем самым, ограничение (3.2) в этом случае при отыскании оптимального решения не учитывается. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является «активным».

Вариация прикладываемого демпфирующего воздействия (2.3) имеет вид

$$\delta g(x,t) = f(t)\delta\nu(x) \tag{3.15}$$

если функция $f(t)$, то есть программа подавления колебаний панели, является заданной. Варьируемой же переменной, искомой при оптимизации подавления колебаний

и определяющей способ воздействия, является функция $\nu(x)$. При этом условие оптимальности для $\nu(x)$, как это следует из (3.6)–(3.8), (2.3), (3.15), записывается в форме

$$2\mu\nu(x)\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt - \int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt = 0$$

и поэтому

$$\nu(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt\right)\left(\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt\right)^{-1} \tag{3.16}$$

В случае заданного способа приложения демпфирующего воздействия, то есть заданной функции $\nu(x)$, и варьируемой временной программы искомого управляющего воздействия, подавляющего колебания, условие оптимальности приводит к следующему выражению для $f(t)$ при $t \in [0, t_f]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\mu}\left(\int_{-1}^{1} v(x,t)\,\nu(x)\,dx\right)\left(\int_{-1}^{1} \nu^2(x)\,dx\right)^{-1} \tag{3.17}$$

Так, например, если заданное воздействие прикладывается на подынтервале $[x_1, x_2]$, где $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$, то

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu_0, & x_1 \le x \le x_2 \\ 0, & -1 \le x \le x_1, \quad x_2 \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Здесь ν_0, x_1, x_2 – заданные константы.

Множитель Лагранжа μ в (3.16), определяемый согласно (2.3), (3.2), (3.3) и (3.16), вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt\right)^2 dx\left(\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt\right)^{-1} \tag{3.19}$$

а множитель Лагранжа μ в (3.17), как это следует из соотношений (2.3), (3.2), (3.3) и (3.17), определяется выражением

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0}\int_0^{t_f}\left(\int_{-1}^{1} v(x,t)\,\nu(x)\,dx\right)^2 dt\left(\int_{-1}^{1} \nu^2(x)\,dx\right)^{-1} \tag{3.20}$$

4. Алгоритм отыскания оптимального воздействия. Для отыскания способа оптимального гашения колебаний движущейся в потоке жидкости упругой панели предлагается итерационный алгоритм определения управляющих воздействий, основанный на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов и сопряженной переменной. Алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении следующих итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации алгоритма решается «прямая» задача, состоящая в интегрировании уравнений динамики (2.1) с граничными условиями (3.5) при $x = \pm 1$ и начальными условиями (3.4) при $t = 0$, описывающими начальные распределения перемещений w и скоростей $\partial w/\partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое неоптимальное управление $g^1(x,t)$, удовлетворяющее неравенству (3.2). На дальнейших этапах выполнения алгоритма в качестве управляю-

щего воздействия на первом шаге принимается воздействие, получаемое из условий оптимальности на третьем шаге предыдущей итерации.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(x,t_f)$ и соответствующих величин $\partial w/\partial t$ и $\partial^2 w/\partial t\partial x$ при $t = t_f$, входящих в терминальные условия (3.10), (3.11), решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения (3.12) с граничными условиями (3.9) и условиями (3.10), (3.11) в конечный момент времени, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании переменной $v(x,t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге выражения для сопряженной переменной $v(x,t)$ и использованием условий экстремума (3.2), (3.3), (2.3), а также выражений (3.16), (3.19) или (3.17), (3.20) находится текущее приближение для оптимального демпфирующего воздействия $g(x,t)$, прикладываемого к панели. Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается в качестве «начального», и осуществляется переход к первому шагу следующей итерации алгоритма.

Завершение итерационного процесса происходит при выполнении условия $J_g \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданный малый параметр контроля точности итерационного процесса подавления колебаний.

Приведем некоторые детали реализации описанного алгоритма, основанной на методе Галёркина [17–19]. Представим искомые распределения поперечных перемещений панели $w(x,t)$ и сопряженной переменной $v(x,t)$ в виде рядов

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t)\Psi_n(x), \qquad v(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t)\Psi_n(x) \tag{4.1}$$

где $q_n(t)$, $s_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots,n_0)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v, а $\Psi_n(x)$ – функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right), \qquad x \in [-1,1] \tag{4.2}$$

и удовлетворяющие граничным условиям (3.5) для w и (3.9) для v при $x = \pm 1$.

Для координатных функций $q_n(t)$ и $s_n(t)$ метода Галёркина получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив (4.1), (4.2) в уравнения (2.1), (3.12) и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots$) с последующим интегрированием по $x \in [-1,1]$. Выполняя стандартные операции метода Галёркина [17–19], будем иметь две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2q_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)B_{jn}\frac{dq_n}{dt} + \right.\\ \left. + ([\kappa^2(1+r_m r_v^2)-1]C_{jn} + \beta D_{jn})q_n\right\} - G_j(t) = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2s_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)B_{jn}\frac{ds_n}{dt} + \right.\\ \left. + ([\kappa^2(1+r_m r_v^2)-1]C_{jn} + \beta D_{jn})s_n\right\} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Коэффициенты A_{jn}, B_{jn}, C_{jn}, D_{jn} и функции $G_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots$) определяются выражениями [15]

$$A_{jn} = \delta_{jn}, \quad C_{jn} = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \delta_{jn}, \quad D_{jn} = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^4 \delta_{jn}, \quad G_j(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_j g(x,t)\,dx$$

$$B_{jn} = 0, \quad j = n; \quad B_{jn} = \frac{nj}{n^2 - j^2}[(-1)^{j+n} - 1], \quad j \neq n$$

а начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в виде ($j = 1, 2, \ldots$)

$$(q_j)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_1(x)\,dx, \quad \left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_2(x)\,dx \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}(s_j)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1 + r_m)}\left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=t_f} \\ \left(\frac{ds_j}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1 + r_m)}\left(\alpha_1 q_j - \frac{2\alpha_2\kappa(1 + r_m r_v)}{\alpha(1 + r_m)}\sum_{n=1}^{n_0} B_{jn}\frac{dq_n}{dt}\right)_{t=t_f}\end{gathered} \tag{4.6}$$

Отметим некоторые свойства и обобщения используемого метода, приведенные в [17–19].

5. Пример оптимальной программы подавления колебаний. Рассмотрим случай задания $\nu(x)$ в виде (3.18) и отыскания программы прикладываемого воздействия, т.е. переменной $f(t)$, согласно (3.17), (3.20), на временном отрезке $[0, t_f]$ ($t_f > 0$ – заданный параметр). Предположим сначала, что $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ в (3.18), и проиллюстрируем процесс отыскания программы оптимального демпфирования, полагая для наглядности

$$\begin{gathered}g_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right), \quad g_2(x) = 0, \quad x \in [-1, 1] \\ \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad n_0 = 1, \quad \Psi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)\end{gathered} \tag{5.1}$$

На первом шаге рассматриваемого итерационного процесса при выполнении первой итерации примем

$$g^{(1)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega; \quad G_1^{(1)}(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g^{(1)}(x,t)\,dx = 0, \quad t \in [0, t_f]$$

и проинтегрируем уравнение

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(1)} = 0, \quad a_1 = \frac{[\kappa^2(1 + r_m r_v^2) - 1]C_{11} + \beta D_{11}}{\alpha^2(1 + r_m)A_{11}} \tag{5.2}$$

с начальными условиями

$$(q_1^{(1)})_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g_1(x)\,dx = 1, \quad \left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g_2(x)\,dx = 0 \tag{5.3}$$

Имеем

$$q_1^{(1)}(t) = \cos(\sqrt{a_1}t), \quad t \in [0, t_f] \tag{5.4}$$

Используя это решение на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании уравнения для $s_1^{(1)}$ с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 s_1^{(1)} = 0, \quad (s_1^{(1)})_{t=t_f} = 0, \quad \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2\alpha_1}{\alpha^2 (1 + r_m)} (q_1^{(1)})_{t=t_f}$$

находим

$$\begin{gathered} s_1^{(1)}(t) = \frac{Q}{\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) = Q_1 \sin(\sqrt{a_1} t) + Q_2 \cos(\sqrt{a_1} t) \\ Q = \frac{2\alpha_1 \cos(\sqrt{a_1} t_f)}{\alpha^2 (1 + r_m)}, \quad Q_1 = \frac{Q \cos(\sqrt{a_1} t_f)}{\sqrt{a_1}}, \quad Q_2 = -\frac{Q \sin(\sqrt{a_1} t_f)}{\sqrt{a_1}} \end{gathered} \tag{5.5}$$

При этом выражение для сопряженной переменной запишется в виде

$$v^{(1)}(x,t) = s_1^{(1)}(t) \Psi_1(x) = \frac{Q}{\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right) \tag{5.6}$$

Применяемая на второй итерации программа демпфирующего воздействия находится при помощи соотношений (3.17), (3.20). Используя соотношение (3.18) для $\nu(x)$ при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, а также выражения (3.17), (3.20) и (5.6), будем иметь

$$f^{(2)}(t) = \frac{Q \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f))}{\mu \pi \nu_0 \sqrt{a_1}}, \quad \mu^2 = \frac{2Q^2 t_f}{\pi^2 a_1 M_0} \tag{5.7}$$

Используя множитель Лагранжа из формулы (5.7) для $f^{(2)}(t)$, будем иметь

$$f^{(2)}(t) = \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{M_0}{2t_f}\right)^{1/2} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \tag{5.8}$$

В более общем случае, когда демпфирующее воздействие $\nu_0 f^{(2)}(t)$ прикладывается к участку панели $-1 \le x_1 \le x \le x_2 \le 1$ (см. (3.18)), приходим к выражениям

$$\begin{gathered} f^{(2)}(t) = \frac{Q\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + 1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_2 + 1)\right)\right]}{\mu \pi \nu_0 (x_2 - x_1) \sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \\ \mu^2 = \frac{Q^2 t_f}{2\pi^2 a_1 M_0 (x_2 - x_1)} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1 + 1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_2 + 1)\right)\right]^2 \end{gathered} \tag{5.9}$$

Применим найденное управление в форме (5.7) или (5.8) при интегрировании уравнения колебаний панели, записываемого в виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(2)} + a_2 = 0, \quad G_1^{(2)} = \int_{-1}^{1} \Psi_1(x) g^{(2)}(x,t)\, dx \\ a_2(t) = -\frac{G_1^{(2)}(t)}{\alpha^2 (1 + r_m) A_{11}} = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{M_0}{2t_f}\right)^{1/2} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \end{gathered} \tag{5.10}$$

Находим

$$q_1^*(t) \approx q_1^{(2)} = -\frac{Q_0\cos(\sqrt{a_1}t_f)}{4\mu\gamma_1^2 a_1^{3/2}}\sin(\sqrt{a_1}t) + \left\{1 - \frac{Q_0\sin(\sqrt{a_1}t_f)}{4\mu\gamma_1^2 a_1^{3/2}}\right\}\cos(\sqrt{a_1}t) -$$

$$-\frac{1}{4\mu\gamma_1^2 a_1}\{(Q_{01}\sqrt{a_1}t - Q_{02})\cos(\sqrt{a_1}t) - Q_{02}\sqrt{a_1}t\sin(\sqrt{a_1}t)\} \tag{5.11}$$

$$Q_0 = \frac{2\alpha_1}{\gamma_1}q_1^{(1)}(t_f), \quad Q_{01} = \frac{Q}{\sqrt{a_1}}\cos(\sqrt{a_1}t_f), \quad Q_{02} = -\sin(\sqrt{a_1}t_f)$$

где $\gamma_1 = 1 + \pi l\rho_f/4m$.

Оптимальное значение функционала качества дается выражением

$$J_g^* = (J_g)_{g=g^*} = \alpha_1(q_1^{(2)})^2_{t=t_f} \tag{5.12}$$

6. Пример определения оптимальной позиционной характеристики. Рассмотрим случай задания программы воздействия в виде $f(t) = f_0\sin\sqrt{a_1}(t - t_f)$ (f_0 – заданный параметр) и отыскания оптимальной позиционной характеристики, т.е. функции $\nu = \nu(x)$, определенной при $x \in [-1,1]$. При этом процесс отыскания $\nu(x)$ реализуется при тех же характеристиках и параметрах модели, что и в предыдущем примере (см. (5.1)). Непосредственно для нахождения $\nu(x)$ и соответственной величины множителя Лагранжа μ используются представленные ранее выражения (3.16), (3.19). Опуская промежуточные выкладки, будем иметь

$$\nu(x) = \frac{Q}{4\mu\sqrt{a_1}}t_f\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right), \quad \mu^2 = \frac{Qt_f}{8M_0\sqrt{a_1}} \tag{6.1}$$

Соответствующее значение функционала качества процесса подавления колебаний определяется при помощи формулы (5.12).

7. Некоторые замечания и выводы. Описание поведения идеальной жидкости и процесса поперечных колебаний упругой панели представлено для различных способов закрепления краев панели и начального распределения ее положения и скоростей. При этом гидродинамическая реакция на произвольное расположение колеблющейся панели находится аналитическим методом теории функций комплексного переменного в виде интегрального потенциала, зависящего от текущих перемещений. Использование аналитического выражения для гидродинамической реакции существенно упрощает учет взаимодействия потока жидкости и движущейся упругой панели.

Качество процесса гашения колебаний оценивается интегральным энергетическим показателем (критерием), зависящим как от окончательного положения панели, так и от достигаемого распределения скоростей. Выведены условия экстремальности функционала качества и предложен итерационный метод построения программы эффективного гашения возникающих поперечных колебаний системы. Рассмотрены иллюстрирующие примеры определения оптимального приложения управляющих воздействий как во времени, так и позиционно.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
3. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262 с.
4. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
5. *Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.* Aeroelasticity. Cambridge : Addison-Wesley Publishing Company, 1955. 860 p. = *Бисплингхоф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.* Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958. 800 с.
6. *Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю.* Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 3–14.
7. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Задачи оптимизации для пластин, колеблющихся в идеальной жидкости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 520–527.
8. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
9. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. New York: Dover Publ., 1965. 304 p.
10. *Lighthill J.* An informal introduction to theoretical fluid mechanics. Oxford: Scientific Publication, 1986. 260 p.
11. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
12. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* Stability of axially moving materials. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
13. *Ashley H.* On making things the best aeronautical uses of optimization // J. Aircr. 1982. V. 19. № 1. P. 5–28.
14. *Banichuk N.V.* Problems and methods of optimal structural design. New York: Plenum Press, 1983. 313 p.
15. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 81–85.
16. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 303 с.
17. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
18. *Вишик М.И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81). № 1. С. 51–148.
19. *Свирский И.В.* Методы Бубнова–Галёркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 98–108

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ НАРУЖНЫМ ДАВЛЕНИЕМ, СОЗДАВАЕМЫМ ЖЕСТКОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

© 2021 г. В. В. Васильев[a,*], В. А. Салов[b]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Центр перспективных разработок АО Центрального НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия*

* *e-mail: vvvas@dol.ru*

Поступила в редакцию 25.01.2021 г.
После доработки 26.01.2021 г.
Принята к публикации 27.01.2021 г.

В статье рассматривается задача устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки, находящейся в абсолютно жесткой среде, сжимающей оболочку так, что она может потерять устойчивость деформируясь только во внутреннюю полость. С помощью уравнений нелинейной теории оболочек, учитывающей из нелинейных эффектов только изменения радиусов кривизны срединной поверхности оболочки в процессе деформации, получено точное решение, определяющее критическое давление или предельную величину докритической деформации оболочки. Установлено, что критическое давление и деформация в значительной степени зависят от связи между оболочкой и наружной средой в кольцевом направлении. Исследовано два предельных случая – оболочка жестко связанная со средой и оболочка свободная от тангенциальной кольцевой поверхностной нагрузки. Полученное решение сопоставляется с результатами эксперимента, проведенного на композитных оболочках с металлическим и полимерным внутренним слоем.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость оболочки при внешнем давлении, устойчивость оболочки при односторонних связях, композитные баллоны давления

DOI: 10.31857/S0572329921040127

1. Введение. Задача, рассматриваемая в статье, имеет длинную историю. Погруженные в грунт трубопроводы, и тоннели, имеющие облицовку, испытывают давление со стороны грунта, усаживающегося в силу различных причин, и могут потерять устойчивость. Как известно, критическое значение внешнего давления, действующего на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку, определяется равенством

$$q_{cr} = \frac{\bar{E}h^3}{4R^3}, \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{1.1}$$

Здесь E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала и R, h – радиус и толщина оболочки. Для рассматриваемой задачи удобно ввести вместо давления вели-

чину докритической кольцевой деформации оболочки, которая связана с давлением следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{qR}{\bar{E}h} \tag{1.2}$$

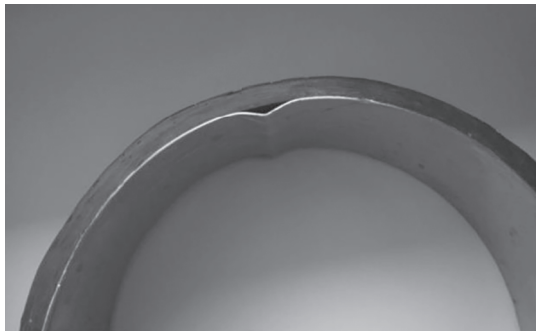
В соответствие с равенством (1.1), критическая деформация $\varepsilon_{cr} = (h/2R)^2$. При такой деформации сечение оболочки принимает эллиптическую форму. Однако для оболочки, находящейся в жесткой среде, такая форма потери устойчивости невозможна. Существенной особенностью рассматриваемой задачи является односторонний характер связи между оболочкой и окружающей средой, при котором оболочка может потерять устойчивость, если она приобретает местный прогиб, направленный к центру сечения. При этом на отслоившийся от среды участок оболочки давление не действует. Как показывают результаты эксперимента, критическое давление при этом оказывается значительно больше давления, соответствующего равенству (1.1). Традиционные линеаризованные уравнения устойчивости не позволяют найти критическое давление – из них следует, что оболочка не теряет устойчивости. Исключение составляет задача, рассмотренная в работе [1], посвященной устойчивости погруженной в грунт оболочки при действии давления жидкости, а не грунта. Еще одно традиционное приложение рассматриваемой задачи связано с устойчивостью слоистых оболочек при нагреве. Если оболочка состоит из двух слоев таких, что жесткость наружного слоя больше, а коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР) меньше чем у внутреннего слоя, то при нагреве во внутреннем слое появляется сжимающее напряжение, которое может вызвать его отслоение от наружного слоя. Если наружный слой является абсолютно жестким, то критическая температурная деформация внутреннего слоя имеет вид

$$\varepsilon_{cr} = (\alpha_T^i - \alpha_T^e)\Delta T \tag{1.3}$$

Здесь α_T^i и α_T^e – КЛТР внутреннего и наружного слоя и ΔT – критическое приращение температуры. И наконец, в последние годы появилось еще одно приложение рассматриваемой задачи, связанное с потерей устойчивости лейнера в композитных баллонах давления. Композитные баллоны, как правило, имеют внутренний герметизирующий слой (лейнер), изготовленный из металла или термопласта. Композиты допускают сравнительно большие упругие деформации, при которых материал лейнера оказывается упруго-пластическим. При разгрузке баллона остаточная деформация лейнера вызывает появление в нем сжимающих напряжений, которые могут вызвать отслоение лейнера. На рис. 1 показано отслоение лейнера из стали (a), и термопласта (b) в баллонах из углепластика.

История рассматриваемой задачи обсуждается в работе [2]. Для решения традиционно используется два подхода. В первом подходе основные уравнения получаются с помощью вариационного принципа [2, 7]. При этом для приближенного определения критического давления используются различные аппроксимации для прогиба отслоившейся части оболочки (или кольца) [3, 4]. Второй подход основан на аналитическом или численном решении нелинейных уравнений теории оболочек [5, 6]. Заметим, что численное решение рассматриваемой задачи связано с принципиальными трудностями. Интегрирование по параметру нагрузки для идеальной оболочки сводится к задаче Коши с нулевыми начальными условиями и приводит к тривиальному решению. Для получения нетривиального решения необходимо вводить начальные несовершенства, а они неизвестны. В работах [8, 9] предлагается вводить помимо давления фиктивную сосредоточенную силу, вызывающую местный изгиб оболочки. Для оценки устойчивости оболочки выделяется ее равновесное состояние, соответствующее нулевой фиктивной силе. Следует отметить, что рассматриваемая задача принци-

(a)



(b)

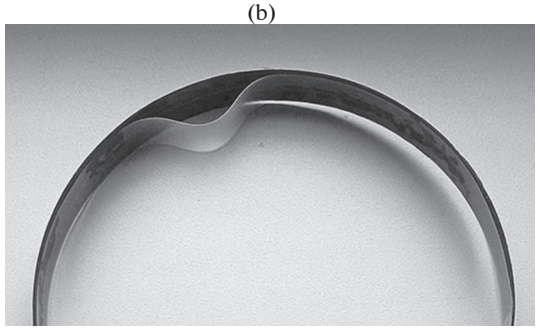


Рис. 1. Потеря устойчивости внутренней оболочки из стали (а) и полипропилена (б) (наружный слой – углепластик)

пиально отличается от другой известной аналогичной задачи об устойчивости цилиндрической оболочки под действием натяжения наматываемых на нее нитей [10]. В этой задаче потеря устойчивости оболочки сопровождается отклонением ее формы от цилиндрической по всей поверхности. Оболочка, теряющая устойчивость в жесткой среде, рассматриваемая ниже, сохраняет цилиндрическую форму на всей поверхности за исключением зоны отслоения.

В настоящей работе используются нелинейные уравнения теории оболочек, которые из всех возможных нелинейных эффектов учитывают только изменения радиусов кривизны срединной поверхности оболочки [11]. В такой постановке получено точное в рамках принятых гипотез аналитическое решение задачи.

2. Исходные уравнения. Рассмотрим отслоившийся участок оболочки, показанный на рис. 1. Нелинейные уравнения, которые учитывают только изменение радиуса кривизны в процессе деформации, имеют вид [11]

$$N' + Q(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad Q' - N(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad M' - RQ = 0 \quad (\cdots)' = d(\cdots)/d\alpha \tag{2.1}$$

$$N = B\varepsilon_\alpha, \quad M = \frac{D}{R}\omega'_\alpha, \quad B = \bar{E}h, \quad D = \frac{1}{12}\bar{E}h^3 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R}(u'_\alpha + w), \quad \omega_\alpha = \frac{1}{R}(u - w') \quad (1, 2), \tag{2.3}$$

Здесь N, Q, M – кольцевое усилие, поперечное усилие и изгибающий момент, положительные направления которых показаны на рис. 2, u_α, w – кольцевое перемещение и прогиб, направленный по наружной нормали. Уравнения (2.2) соответствуют беско-

нечно длинной цилиндрической оболочке. Для кольца в них следует принять $\nu = 0$. Как уже отмечалось, из возможных нелинейных эффектов уравнения (2.1)–(2.3) учитывают только изменение кривизны ω'_α. Эти уравнения справедливы если отношениями u_α/R, u'_α/R и w/R, w'/R можно пренебречь по сравнению с единицей.

Уравнения (2.1) можно дополнить уравнениями равновесия участка 0–1 (рис. 2) как твердого тела. Приравнивая нулю равнодействующие сил, действующих на этот участок, и суммарный момент относительно начала координат, получим

$$\begin{gathered} -N_0 + Q_1 \sin\alpha_1 + N_1 \cos\alpha_1 = 0, \quad Q_1 \cos\alpha_1 - N_1 \sin\alpha_1 = 0 \\ -N_0(R - \delta) + N_1 R - M_0 + M_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Рассмотрим равновесие оболочки, отделенной от среды (рис. 3). Предполагается, что на участке 1–2 оболочка сохраняет круговую форму, т.е. на этом участке на оболочку действует равномерное внешнее давление q, а в точке 2 действует только кольцевое усилие равное qR. Существенной особенностью задачи является наличие сосредоточенной силы P_1 в точке 1, где соединяются участки. Эта сила появляется в контактных задачах для оболочек, описываемых классической теорией. Для иллюстрации рассмотрим опертую по концам балку, нагруженную в середине пролета через жесткий штамп. Уравнение изгиба балки имеет вид $Dw^{(4)} = q$, где q – контактное давление. Если поверхность штампа описывается полиномом, степень которого меньше четырех, то контактное давление оказывается равным нулю и для обеспечения равновесия штампа на границе области контакта появляются сосредоточенные силы. Эти силы отсутствуют, если оболочка описывается неклассическими уравнениями, учитывающими деформацию поперечного сдвига. В этом случае на границах области контакта возникает локальное давление [12]. На существование обсуждаемой сосредоточенной силы в рассматриваемой задаче указывается в работах [2, 6]. Уравнения равновесия аналогичные уравнениям (2.4) имеют вид

$$-N_0 - P_1 \sin\alpha_1 + qR - qR(1 + \cos\alpha_1) = 0, \quad -P_1 \cos\alpha_1 + qR \sin\alpha_1 = 0$$

$$N_0(R - \delta) + M_0 + qR^2 = 0$$

Решение этих уравнений совместно с уравнениями (2.4) дает

$$N_0 = -\frac{qR}{\cos\alpha_1}, \quad N_1 = -qR, \quad Q_1 = -P_1 = -qR\tan\alpha_1, \quad M_1 = 0 \tag{2.5}$$

Преобразуем уравнения (2.1)–(2.3). Во-первых, будем считать контур поперечного сечения оболочки нерастяжимым. Тогда из первого равенства (2.3) имеем $u'_\alpha = -w$. Во-вторых, введем безразмерные переменные

$$\bar{N} = \frac{N}{qR}, \quad \bar{M} = \frac{M}{qR^2}, \quad \bar{u}_\alpha = \frac{u_\alpha}{R}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R} \tag{2.6}$$

В результате, система уравнений (2.1)–(2.3) и равенства (2.5) принимают следующий вид:

$$\bar{N}' + \bar{Q}(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega'_\alpha) = 0, \quad \bar{M}' = \bar{Q} \tag{2.7}$$

$$\bar{M} = \frac{1}{12\lambda}\omega'_\alpha, \quad \omega'_\alpha = -(\bar{w} + \bar{w}''), \quad \lambda = \frac{qR^3}{\bar{E}h^3} \tag{2.8}$$

$$\bar{N}_0 = -\frac{1}{\cos\alpha_1}, \quad \bar{N}_1 = -1, \quad \bar{Q}_1 = -\operatorname{tg}\alpha_1, \quad \bar{M}_1 = 0 \tag{2.9}$$

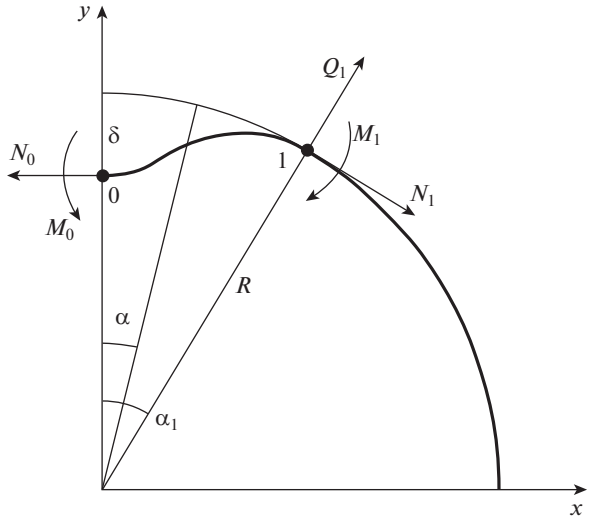


Рис. 2. Силы и моменты, действующие на отслоившийся участок оболочки

В заключение этого раздела преобразуем параметр λ. Используя равенство (1.2), выразим этот параметр через деформацию, то есть

$$\lambda = \varepsilon\left(\frac{R}{h}\right)^2 \tag{2.10}$$

3. Определение критической деформации. Рассмотрим уравнения (2.7). Умножим первое уравнение на $\bar{N}$ и прибавим к нему второе уравнение, умноженное на $\bar{Q}$. В результате получим $\bar{N}\bar{N}' + \bar{Q}\bar{Q}' = 0$. Интегрируя, имеем $\bar{N}^2 + \bar{Q}^2 = C^2$. Постоянную C найдем с помощью граничных условий при $\alpha = 0$ (рис. 2), согласно которым $\bar{N}(\alpha = 0) = -\bar{N}_0$ и $\bar{Q}(\alpha = 0) = 0$. Учитывая равенства (2.9), окончательно получим

$$\bar{N}^2 + \bar{Q}^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha_1}$$

Удовлетворим это уравнение, введя новую функцию $\theta(\alpha)$ такую, что

$$\bar{N} = -\frac{\cos\theta}{\cos\alpha_1}, \quad \bar{Q} = -\frac{\sin\theta}{\cos\alpha_1} \tag{3.1}$$

Учитывая равенства (2.9), можно установить пределы изменения функции $\theta(\alpha)$, то есть

$$\theta(\alpha = 0) = 0, \quad \theta(\alpha = \alpha_1) = \alpha_1 \tag{3.2}$$

Рассмотрим первое уравнение (2.7). Подставляя в него равенства (3.1) и выражая ω'_α через $\bar{M}$ с помощью первого равенства (2.8), получим

$$\theta' - (1 + 12\lambda\bar{M}) = 0 \tag{3.3}$$

Из третьего уравнения (2.7) и второго равенства (3.1) имеем

$$\bar{M}' = \bar{Q} = -\frac{\sin\theta}{\cos\alpha_1} \tag{3.4}$$

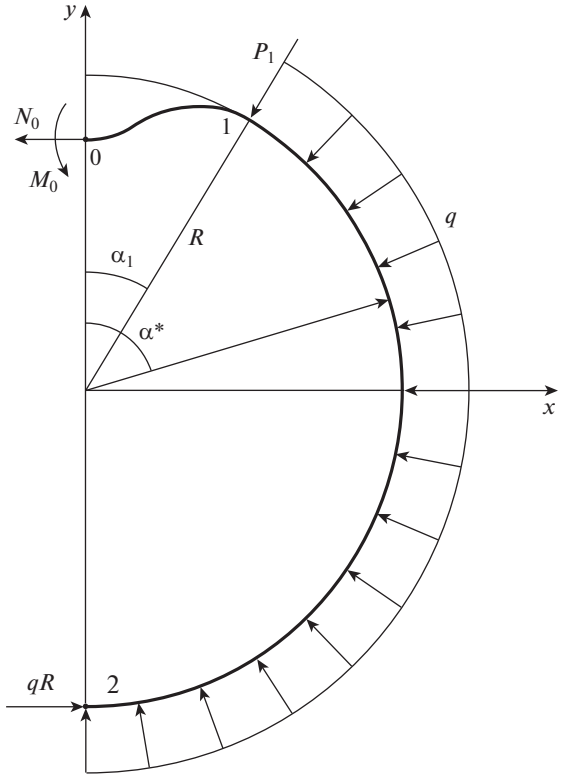


Рис. 3. Условия нагружения внутренней оболочки

Дифференцируя уравнение (3.3) и исключая $\bar{M}'$ с помощью равенства (3.4) придем к следующему уравнению:

$$\theta'' + k^2 \sin\theta = 0, \quad k^2 = \frac{12\lambda}{\cos\alpha_1} \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.5) выражается через эллиптический интеграл. Однако оно неудобно для дальнейшего анализа так как не позволяет получить явного выражения $\theta(\alpha)$. В связи с этим упростим это уравнение, считая, что угол α_1 много меньше π (рис. 1, 3). Учитывая равенства (3.2), можно заключить, что тогда можно считать что угол θ также много меньше π и использовать приближенное соотношение $\sin\theta \approx \theta$. В результате, уравнение (3.5) упрощается следующим образом:

$$\theta'' + k^2\theta = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (3.2), имеет вид

$$\theta = \frac{\alpha_1 \sin k\alpha}{\sin\eta}, \quad \eta = k\alpha_1 \tag{3.6}$$

Подставляя решение (3.6) в равенство (3.3), найдем изгибающий момент

$$\bar{M} = \frac{1}{12\lambda}\left(\frac{\eta\cos k\alpha}{\sin\eta} - 1\right) \tag{3.7}$$

Определим момент, действующий на концах участка 1–2 (рис. 2). Имеем

$$\bar{M}_0 = \bar{M}(\alpha = 0) = \frac{1}{12\lambda}\left(\frac{\eta}{\sin\eta} - 1\right), \quad \bar{M}_1 = \bar{M}(\alpha = \alpha_1) = \frac{1}{12\lambda}\left(\frac{\eta}{\operatorname{tg}\eta} - 1\right) \tag{3.8}$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся равенствами (2.8), (2.10), (3.5) и (3.6) и запишем развернутое выражение для параметра η, то есть

$$\eta = 2\alpha_1\sqrt{\frac{3\lambda}{\cos\alpha_1}} = 2\alpha_1\frac{R}{h}\sqrt{\frac{3qR}{\bar{E}h\cos\alpha_1}} = 2\alpha_1\frac{R}{h}\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\cos\alpha_1}} \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что параметры η и λ являются параметрами нагружения. Рассмотрим первое соотношение (3.8). При малых значениях параметра η имеем $\sin\eta > 0$ и $\bar{M}_0 > 0$. При таком моменте оболочка изгибается наружу, что не соответствует условиям ее закрепления. Как следует из рис. 2, для того, чтобы оболочка изгибалась внутрь, необходимо, чтобы выполнялось условие $\bar{M}_0 < 0$. Для этого в первом равенстве (3.8) должно быть $\sin\eta < 0$, что возможно если нагрузка достигает значения, при котором $\pi < \eta < 2\pi$. Конкретное значение η следует из второго равенства (3.8). Согласно соответствующему уравнению (2.9), $\bar{M}_1 = 0$. В результате, получим следующее уравнение для η:

$$\operatorname{tg}\eta = \eta \tag{3.10}$$

Заметим, что при этом условии $d\bar{M}_0/d\eta = 0$, то есть если параметр η удовлетворяет уравнению (3.10), то момент $\bar{M}_0$ принимает минимальное абсолютное значение. Минимальный ненулевой корень уравнения (3.10) – $\eta = 4.4934$.

Определим прогиб оболочки. Из равенств (2.8) и (3.7) имеем

$$\omega'_\alpha = 12\lambda\bar{M} = \frac{\eta\cos k\alpha}{\sin\eta} - 1 \tag{3.11}$$

Угол поворота должен удовлетворять граничному условию (рис. 2): $\omega_\alpha(\alpha = 0) = 0$. Интегрируя равенство (3.11) с учетом этого условия и равенства (3.6) для η, получим

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha_1\sin k\alpha}{\sin k\alpha_1} - \alpha$$

Отсюда следует, что ω_α $(\alpha = \alpha_1) = 0$, то есть угол поворота равен нулю в точках 1 и 2 (рис. 2). Из второго уравнения (2.8) следует

$$\bar{w}'' + \bar{w} = -\omega'_\alpha \tag{3.12}$$

где ω'_α определяется равенством (3.10). Решение уравнения (3.12) симметричное по координате α (рис. 2), имеет вид

$$\bar{w} = -\bar{w}_0\cos\alpha + \cos\alpha\int_0^\alpha \omega'_\alpha\sin\alpha d\alpha - \sin\alpha\int_0^\alpha \omega'_\alpha\cos\alpha d\alpha \tag{3.13}$$

Здесь $\bar{w}_0 = \bar{w}(\alpha = 0)$ определяет максимальный прогиб оболочки, который находится из условия $\bar{w}(\alpha = \alpha_1) = 0$ (рис. 2). В результате получим

$$\bar{w}_0 = \tan\alpha_1\int_0^{\alpha_1} \omega'_\alpha\cos\alpha d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \omega'_\alpha\sin\alpha d\alpha \tag{3.14}$$

Подставляя выражение (3.11) в равенства (3.13) и (3.14) и интегрируя, окончательно найдем

$$\bar{w} = \bar{w}_0 \cos\alpha + \frac{\sin\eta(\eta^2 - \alpha_1^2)(1 - \cos\alpha) - \eta\alpha_1^2(\cos\alpha - \cos k\alpha)}{\sin\eta(\eta^2 - \alpha_1^2)} \tag{3.15}$$

$$\bar{w}_0 = \frac{\sin\eta(\eta^2 - \alpha_1^2)(\cos\alpha_1 - 1) + \eta\alpha_1^2(\cos\alpha_1 - \cos\eta)}{\sin\eta(\eta^2 - \alpha_1^2)\cos\alpha_1} \tag{3.16}$$

Зависимости $\bar{w}(\alpha)$, соответствующие $\alpha_1 = 10°, 15°, 20°$ показаны на рис. 4.

Для завершения решения необходимо найти угол α_1 (рис. 2). Для этого воспользуемся условием недеформируемости оболочки в кольцевом направлении. При образовании прогиба оболочки на участке 0–1 (рис. 2) точка 1 смещается в кольцевом направлении на величину ΔS, которое с учетом принятых ранее гипотез имеет вид

$$\Delta S = \frac{R}{2}\int_0^{\alpha_1}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2 d\alpha$$

Поскольку оболочка имеет предварительную деформацию сжатия ε, эта деформация релаксирует так, что $\Delta S = \varepsilon l^*$. Здесь $l^* = R\alpha^*$ – длина по окружности, на которой происходит релаксация деформации (рис. 3). Определить эту длину и соответствующий угол α^* не представляется возможным так как они зависят от величины накопленной в оболочке упругой энергии и силы трения между оболочкой и окружающей ее средой. Однако возможны два предельных случая. Если оболочка жестко связана со средой в кольцевом направлении, то проскальзывать может только ее отслоившийся участок и $\alpha^* = \alpha_1$. Если трение между оболочкой и средой отсутствует, то проскальзывает вся оболочка и $\alpha^* = \pi$ (рис. 3). Таким образом, имеем

$$\alpha^*\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha_1}(\bar{w}')^2 d\alpha$$

Подставляя ε и $\bar{w}$ из равенств (2.10) и (3.14) найдем

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 = \frac{1}{2\alpha^*\lambda}\int_0^{\alpha_1}(\bar{w}')^2 d\alpha = \frac{6\alpha_1}{\alpha^*\eta\cos\alpha_1}\int_0^{\alpha_1}(\bar{w}')^2 d\alpha \tag{3.17}$$

Последнее равенство получено с учетом соотношения

$$\lambda = \frac{\eta\cos\alpha_1}{12\alpha_1} \tag{3.18}$$

следующего из первой формулы (3.9). Используя выражение (3.15) для $\bar{w}$ и интегрируя, окончательно получим

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 = f(\alpha_1, \alpha^*) \tag{3.19}$$

где

$$f(\alpha_1, \alpha^*) = \frac{3\alpha_1}{\alpha^*\eta\cos\alpha_1\sin^2\eta(\eta^2 - \alpha_1^2)^3}[\eta^3\alpha_1^5(\sin\eta\cos\eta - \eta) +$$
$$+ \eta^2\alpha_1^3(\eta^4 - \eta^3\sin\eta\cos\eta - 4r\sin\eta\cos\alpha_1) +$$
$$+ r\alpha_1^2(4\eta^3\cos\eta + r\cos\alpha_1)\sin\alpha_1 + \eta^2 r^2(\alpha_1 - \eta\sin\alpha_1\cos\alpha_1)]$$

$$r = (\eta^2 - \alpha_1^2)(1 - \bar{w}_0)\sin - \eta\alpha_1^2$$

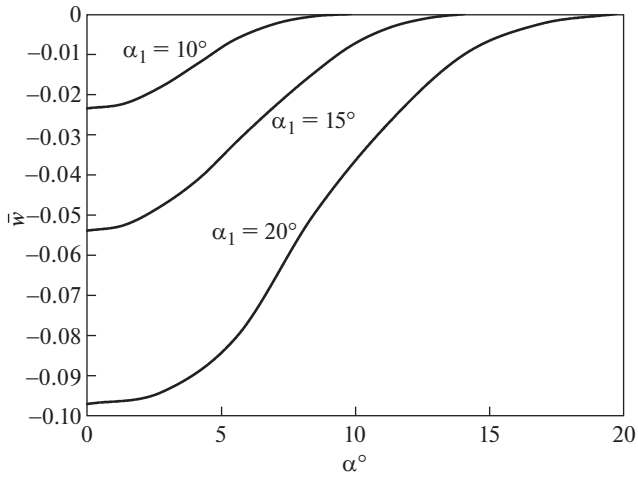


Рис. 4. Прогиб оболочки при различных значениях угла α_1

Здесь $\eta = 4.4934$. Уравнение (3.18) позволяет найти α_1 при заданных значениях отношения h/R и угла α^*. Соответствующие зависимости при $\alpha^* = \alpha_1$ и $\alpha^* = \pi$ показаны на рис. 5. Критическая деформация определяется из равенств (2.10) и (3.18), то есть

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\eta \cos \alpha_1}{12\alpha_1}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \tag{3.20}$$

Зависимости критической деформации от отношения h/R показаны для $\alpha^* = \alpha_1$ и $\alpha^* = \pi$ на рис. 6.

4. Анализ полученных результатов. На первый взгляд создается впечатление, что критическая деформация (3.20) не зависит от модуля упругости и абсолютной толщины теряющей устойчивость оболочки. Однако это не так – эти параметры влияют на критическую деформацию через угол α^*. Чем больше энергия деформаций докритического состояния, которая пропорциональна этим параметрам, тем больше угол α^*. Как следует из рис. 6, величина этого угла оказывает значительное влияние на критическую деформацию – деформации, соответствующие верхней и нижней кривой отличаются в 3.5 раза. Этим объясняется большой разброс экспериментальных результатов, полученных для различных материалов [13]. Темными точками на рис. 6 показаны средние по трем испытаниям результаты полученные на двухслойных кольцах с радиусами 45–75 мм [14] (рис. 1(*a*)). Наружное кольцо с толщиной 6–8 мм изготовлено методом намотки из углепластика и имеет нулевой КЛТР. Внутреннее кольцо, на которое осуществлялась намотка, изготовлено из нержавеющей стали и обладает следующими параметрами: $h = 0.5$ мм, $E = 200$ ГПа, $\alpha_T^i = 16 \times 10^{-6}$ 1/°C. Потеря устойчивости достигалась нагревом колец, а критическая деформация находилась по формуле (1.3). Как следует из рис. 6, сравнительно высокий модуль упругости стали и соответствующий уровень докритической энергии деформации обеспечивают критическую деформацию близкую к получаемой при отсутствии трения между кольцами ($\alpha^* = \pi$). Светлые точки соответствуют аналогичному эксперименту с внутренним кольцом из полипропилена (рис. 1(*b*)) с характеристиками $h = 0.4$ мм, $E = 0.9$ ГПа, $\alpha_T^i = 95 \times 10^{-6}$ 1/°C. Результаты эксперимента близки к кривой $\alpha^* = \alpha_1$, что соответствует жесткому скреп-

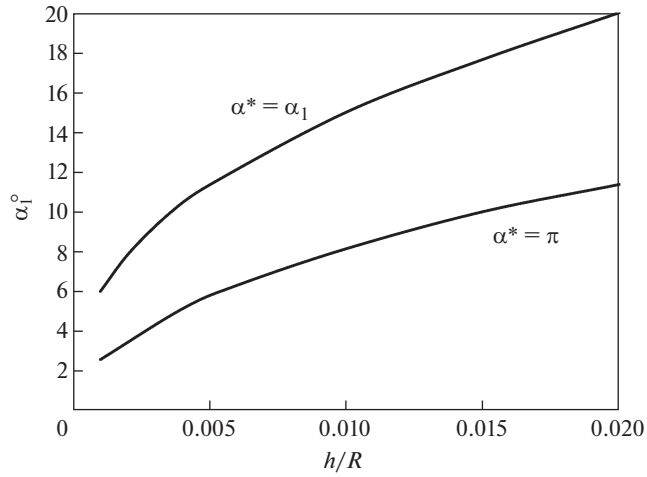


Рис. 5. Зависимость угла α_1 от отношения h/R

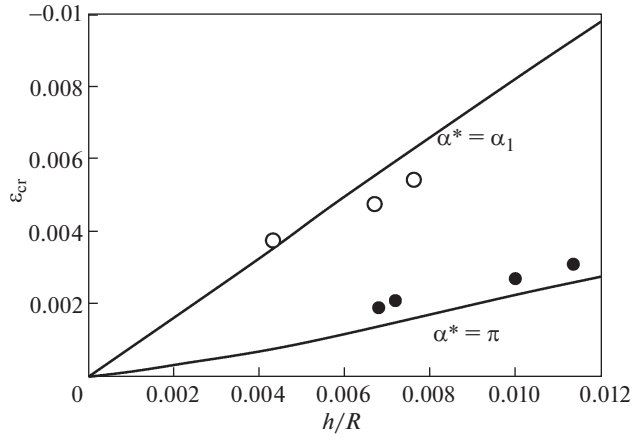


Рис. 6. Зависимость критической деформации от отношения h/R

лению колец за счет силы трения. О важности силы трения свидетельствует эксперимент с кольцом из полиэтилена с характеристиками $h = 0.16$ мм, $E = 0.1$ ГПа, $\alpha_T^i = 200 \times 10^{-6}$ 1/°С. При нагреве такого кольца наблюдались два взаимно независимых диаметрально расположенных отслоения внутреннего кольца.

В работах по устойчивости оболочки в жесткой среде критическая деформация оболочки аппроксимируется следующим соотношением:

$$\varepsilon_{cr} = C\left(\frac{h}{R}\right)^{1.2}$$

где C – некоторый коэффициент. Для нижней границы полученного решения, соответствующего кривой $\alpha^* = \pi$ на рис. 6, имеем $C = 0.55$. Ранее были получены следующие значения: в работе [1] – $C = 1.11$, в [3] – $C = 1.2$, в [4] $C = 0.43$, в [7] $C = 1$.

Заключение. В рамках варианта нелинейной теории оболочек, учитывающего из нелинейных членов только связанные с изменением кривизны оболочки в процессе деформации, получено точное аналитическое решение, определяющее критическое значение деформации оболочки, сжимаемой бесконечно жесткой внешней средой. Установлено, что эта деформация существенно зависит от соотношения между упругой энергией в сжатой оболочке и силами трения, действующими между оболочкой и средой. Исследованы два предельных случая – отсутствие трения между средой и оболочкой и жесткая тангенциальная связь между ними. Полученное решение подтверждено экспериментально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheney J.A.* Pressure buckling of ring encased in cavity // J. Eng. Mech. Division. 1971. V. 97. Iss. 2. P. 333–343

2. *El-Bayoumy L.* Buckling of a circular elastic ring confined to a uniformly contacting circular boundary // J. Appl. Mech. Sep 1972. V. 39. № 3. P. 758–766.
https://doi.org/10.1115/1.3422785

3. *Chicurel R.* Shrink buckling of thin circular rings // J. Appl. Mech. Sep 1968. V. 35. № 3. P. 608–610.
https://doi.org/10.1115/1.3601259

4. *Glock D.* Post-critical behavior of a rigidly encased circular pipe subject to external water pressure and temperature rise // Der Stahlbau. 1977. V. 46. № 7. P. 212–217.

5. *Chan H.C., McMinn S.J.* The stability of a uniformly compressed ring surrounded by a rigid circular surface // Int. J. Mech. Sci. 1966. V. 8. P. 433–442.

6. *Zagustin E.A., Herrmann G.* Stability of an elastic ring in a rigid cavity // J. Appl. Mech. Jun 1967. V. 34. № 2. P. 263–270.
https://doi.org/10.1115/1.3607677

7. *Буяков И.А.* Простейшее решение задачи о выпучивании кольца внутри жесткой обоймы // Космонавтика и ракетостроение. 2004. Вып. 1 (34). С. 119–130.

8. *Буяков И.А., Березкин В.А.* Выпучивание тонкой сферической оболочки внутри шаровой полости сжимающегося массивного тела // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 5. С. 30–33.

9. *Буяков И.А., Ермаков И.С., Сухомлинов Л.Г.* Исследование выпучивания тонкой сферической оболочки внутри шаровой полости сжимающегося массивного тела // Космонавтика и ракетостроение. 2018. Вып. 4 (103). С. 46–51.

10. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука–Физматлит, 1996. 368 с.

11. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.

12. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.

13. *Johns R.H., Kaufman A.* Filament-overwrapped metallic cylindrical pressure vessels // J. Spacecr. Rockets. 1967. V. 4. № 7. P. 872–877.

14. *Васильев В.В., Мороз Н.Г.* Композитные баллоны давления – проектирование, расчет, изготовление и испытания. М.: Машиностроение, 2015. 373 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 109–120

УДК 539.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ПРИСУТСТВИИ АГРЕССИВНОЙ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

© 2021 г. Ю. Г. Басалов[a,*], А. М. Локощенко[a,], Л. В. Фомин[a,b,***]**

[a] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[b] *Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*

**e-mail: basalov@yandex.ru*

***e-mail: loko@imec.msu.ru*

****e-mail: fleonid1975@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.
После доработки 12.06.2020 г.
Принята к публикации 25.06.2020 г.

Исследование основано на результатах испытаний на ползучесть до разрушения растягиваемых образцов титанового сплава ВТ6 при 600°С, в которые предварительно был внедрен водород различной концентрации. В данной работе проведено теоретическое обобщение полученных данных на нестационарное сложное напряженное состояние. Рассматривается моделирование ползучести цилиндрической оболочки вплоть до разрушения при двух программах зависимости осевого и поперечного напряжений от времени. Предполагается, что материал оболочки предварительно насыщался внедренным водородом различной концентрации. Описание ползучести проводится при учете физической и геометрической нелинейности. Для описания длительного разрушения используется кинетическая теория Ю.Н. Работнова с векторным параметром поврежденности. В первой части рассматривается кусочно-постоянная зависимость осевого и поперечного растягивающих напряжений от времени. Показано, что времена до разрушения оболочки при ступенчатом увеличении и уменьшении одинаковых значений напряжений совпадают. Во второй части рассматривается нагружение оболочки, при котором осевое и поперечное напряжения возрастают пропорционально времени. Получены кривые осевой ползучести оболочки вплоть до разрушения при различных скоростях увеличения напряжений.

Ключевые слова: ползучесть, длительное разрушение, цилиндрическая оболочка, сложное напряженное состояние, нестационарное нагружение, агрессивная среда, векторный параметр поврежденности, кривые осевой ползучести

DOI: 10.31857/S0572329921040048

1. Введение. В данной статье рассматривается ползучесть вплоть до разрушения цилиндрической оболочки при переменных осевом σ_z и поперечном σ_θ растягивающих напряжениях в присутствии агрессивной среды. В качестве основы приняты результаты испытаний цилиндрических образцов из двухфазного ($\alpha + \beta$) титанового сплава ВТ6 (Ti-6Al-4V) на ползучесть при растяжении вплоть до разрушения при температуре 600°С в присутствии предварительно внедрённого водорода [1–2].

2. Ползучесть оболочки вплоть до разрушения при кусочно-постоянной зависимости осевого и поперечного напряжений от времени. *2.1. Экспериментально-теоретическое исследование ползучести титанового сплава ВТ6 при растяжении вплоть до разрушения в присутствии агрессивной среды [1, 2].* Перед механическими испытаниями образцы титанового сплава насыщались водородом термодиффузионным способом в аппаратуре Сивертса. Данная аппаратура позволяет получать высокочистый газообразный водород и проводить гидрирование в высоком вакууме при температуре 600°С, что исключает окисление поверхности образцов.

Перед проведением механических испытаний в образцы вводился водород до концентрации $c = 0.1$, 0.2 и 0.3%. При $c = 0$, 0.1, 0.2 и 0.3% количество β-фазы составляло соответственно $\gamma = 28\%$, 35%, 45% и 55%.

В испытаниях при постоянной растягивающей силе P использовались цилиндрические образцы диаметром $d_0 = 5$ мм и рабочей длиной $l_0 = 25$ мм. Поскольку титановые сплавы характеризуются при ползучести значительным увеличением длины l от времени t, то в качестве характеристики осевой деформации ползучести в [1, 2] принималась логарифмическая деформация:

$$p_z(t) = \ln\left(l(t)/l_0\right)$$

Из условия несжимаемости материала при однородном деформировании $lF = lF_0$ ($F(t)$ – площадь поперечного сечения образцов, $F_0 = F(0)$) и соотношения для растягивающей силы $P = \sigma_0 F_0 = \sigma F$ ($\sigma(t)$ – осевое напряжение, $\sigma_0 = \sigma(0)$) получаем, что зависимость осевого напряжения σ от времени имеет вид:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(p_z(t))$$

Испытания [1, 2] показали, что все кривые ползучести характеризуются установившейся стадией с последующим разупрочнением вплоть до разрушения. Испытания проводились в широком диапазоне начальных напряжений σ_0 от 47 до 217 МПа. В качестве примера на рис. 1–2 сплошными линиями обозначены экспериментальные кривые осевой ползучести $p_z(t)$ при различных концентрациях c и осевых напряжениях $\sigma_0 = 167$ и 217 МПа соответственно. Поскольку на поверхности титановых образцов, испытываемых на воздухе, всегда присутствует слой, препятствующий выходу водорода из сплава, то концентрация водорода c не меняется во времени t (измеряется в часах). Испытания показали, что увеличение доли предварительно внедренного водорода c приводит к систематическому уменьшению в несколько раз скорости установившейся ползучести $\dot{p}_z$, увеличению времени до разрушения t^* и, как правило, к уменьшению предельной деформации $p_z^* = p_z(t^*)$.

Для теоретического описания реологического процесса деформирования титанового сплава с предварительно внедренным водородом в [1, 2] применялся вариант кинетической теории Ю.Н. Работнова с использованием скалярного параметра поврежденности ω. При этом скорость деформаций ползучести $\dot{p}_z$ и скорость накопления поврежденности $\dot{\omega}$ являются функциями не только σ и ω, но и концентрации c водорода в сплаве. Так как скорость деформации ползучести при разрушении ($t \to t^*$) не бесконечна, то для зависимостей $\dot{p}_z$ и $\dot{\omega}$ от поврежденности ω вместо пионерской модели Ю.Н. Работнова [3] со степенной функцией $(1-\omega)^{-1}$ в [1, 2] была использована экспоненциальная функция $\exp(\omega)$.

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= A^{-1}\left[\sigma(t)\cdot\exp(\omega)\right]^m \cdot f_1(c), \quad p_z(t=0) = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} &= B^{-1}\left[\sigma(t)\cdot\exp(\omega)\right]^n \cdot f_2(c), \quad \omega(t=0) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

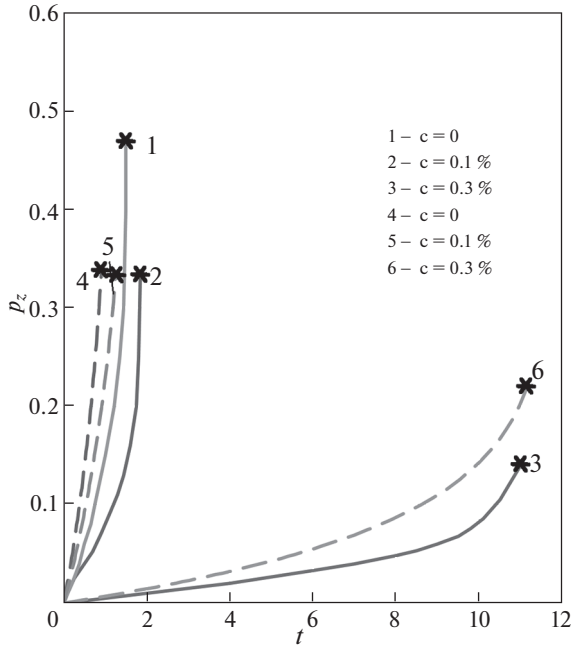


Рис. 1

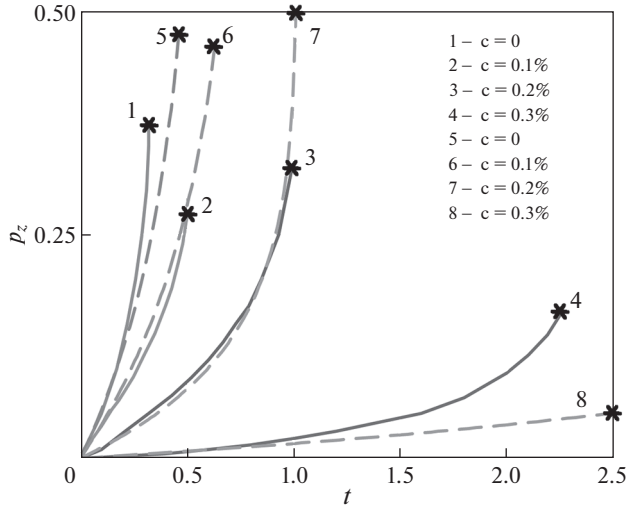


Рис. 2

Функция $f_1(c)$ характеризует уменьшение скорости деформации $\dfrac{dp_z}{dt}$ при увеличении концентрации c. Функция $f_2(c)$ определяет зависимость скорости накопления поврежденности $\dfrac{d\omega}{dt}$ от величины c.

Таблица 1. Зависимости характеристик ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 от уровня предварительно внедренного водорода [1, 2]

c (%)	γ (%)	f_1	f_2
0	0.28	1	1
0.1	0.35	0.71	0.73
0.2	0.45	0.23	0.54
0.3	0.55	0.03	0.11

Значения $f_1(c)$ и $f_2(c)$ приведены в табл. 1.

Анализ приведенных в [1, 2] испытаний привел к следующим значениям материальных констант:

$$m = 3.07, \quad n = 3.25, \quad A = 3\times10^7\ (\text{МПа})^m/\text{час}, \quad B = 7\times10^7\ (\text{МПа})^n/\text{час}.$$

На рис. 1–2 штриховыми линиями обозначены теоретические кривые ползучести при различных уровнях c при $\sigma_0 = 167$ и 217 МПа соответственно.

2.2. Накопление поврежденности в цилиндрической оболочке при кусочно-постоянном сложном напряженном состоянии в присутствии агрессивной окружающей среды. В данном параграфе исследуется накопление поврежденности в цилиндрической оболочке в процессе ползучести при одновременном действии осевого σ_z и поперечного σ_θ напряжений, величины которых являются кусочно-постоянными функциями времени t. Рассмотрим этот процесс применительно к ползучести оболочек из титанового сплава ВТ6 при температуре 600°С в присутствии предварительно внедренного водорода.

Для простоты вычислений примем, что при любом значении времени t значения σ_z и σ_θ равны:

$$\begin{gathered}\sigma_z(t) = \sigma_\theta(t) = \sigma_1 > 0, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_1 \\ \text{и} \quad \sigma_z(t) = \sigma_\theta(t) = \sigma_2 > 0, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t^*\end{gathered} \tag{2.2}$$

(t^* – время до разрушения оболочки при сложном напряженном состоянии).

В данном случае интенсивность напряжений σ_u и компоненты девиатора напряжений s_z, s_θ, s_r принимают следующие значения:

$$\begin{gathered}\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_z-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_r)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sigma^2} = \sigma \\ s_z = s_\theta = \frac{1}{3}\sigma, \quad s_r = -\frac{2}{3}\sigma\end{gathered} \tag{2.3}$$

Рассмотрим обобщение уравнений (2.1) на случай сложного напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\frac{dp_z}{dt} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{F_1(\sigma_u)}{\sigma_u}s_z\,[\exp(\omega)]^m f_1(c) \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{F_1(\sigma_u)}{\sigma_u}s_\theta\,[\exp(\omega)]^m f_1(c) \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{F_1(\sigma_u)}{\sigma_u}s_r\,[\exp(\omega)]^m f_1(c), \quad F_1 = A^{-1}\sigma_u^m\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\frac{F_2(\sigma_u)}{\sigma_u}s_z\left[\exp(\omega)\right]^n f_2(c)$$
$$\frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\frac{F_2(\sigma_u)}{\sigma_u}s_\theta\left[\exp(\omega)\right]^n f_2(c) \qquad (2.5)$$
$$\frac{d\omega_r}{dt} = 0, \quad F_2 = B^{-1}\sigma_u^n$$

В (2.5) ω_z, ω_θ, ω_r представляют собой компоненты вектора поврежденности.

Система уравнений (2.4) представляет собой гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести. Система уравнений (2.5) построена по аналогичному принципу.

В качестве $F_1(\sigma_u)$ и $F_2(\sigma_u)$ рассматриваются степенные функции интенсивности напряжений σ_u. Производная $\frac{d\omega_r}{dt}$ равна нулю, так как радиальная компонента девиатора напряжений отрицательна ($s_r < 0$), при этом предполагается [3], что поврежденность материала при сжатии не накапливается.

В рассматриваемом случае проекции вектора поврежденности на главные оси и величина вектора ω принимают следующие значения:

$$\omega_z = \omega_\theta, \quad \omega_r = 0, \quad \omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2 + \omega_r^2} = \omega_z\sqrt{2}$$

Проведем интегрирование первого уравнения (2.5) при $\sigma_u = \sigma_1$ и начальном условии $\omega_z(t = 0) = 0$.

$$\frac{d\omega_z(t)}{dt} = \frac{1}{2}B^{-1}[\sigma_1\exp(\omega_z\sqrt{2})]^n f_2(c)$$

$$\int_0^{\omega_z}[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}d\omega_z = \frac{1}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)\,t$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\omega_z}[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}d(\omega_z\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\omega_z}[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n-1}d[\exp(\omega_z\sqrt{2})] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left.\frac{[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}}{(-n)}\right|_{\omega_z=0}^{\omega_z} = \frac{1}{n\sqrt{2}}\cdot\{1 - [\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}\} = \frac{1}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)t$$

$$1 - [\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n} = \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)t$$

Определим зависимость ω_z от t.

$$\exp(\omega_z\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)t\right]^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \omega_z\sqrt{2} = -\frac{1}{n}\ln\left[1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)t\right]$$

$$\omega_z = -\frac{1}{n\sqrt{2}}\ln\left[1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)t\right] \qquad (2.6)$$

Определим значение t_1^*, при котором наступит разрушение в случае постоянного значения σ_1.

Из (2.6) при учете $\omega^* = 1\left(\omega_z^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ получаем:

$$(1 - e^{-n}) = \frac{n\sqrt{2}}{2} B^{-1}\sigma_1^n f_2(c) t_1^*, \quad t_1^* = \frac{2(1 - e^{-n})}{n\sqrt{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)} \tag{2.7}$$

Пусть первая стадия ползучести оболочки $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_u = \sigma_1$ заканчивается при $t_1 = \frac{1}{2}t_1^*$.

Значение поврежденности ω_z в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}t_1^*$ согласно (2.7) равно:

$$\omega_{z1} = \omega_z(t_1) = -\frac{1}{n\sqrt{2}}\ln\left\{1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B_1^{-1}\sigma_1^n f_2(c)\cdot\frac{(1 - e^{-n})}{[n\sqrt{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)]}\right\}$$

$$\omega_{z1} = -\frac{1}{n\sqrt{2}}\ln\left\{1 - \frac{(1 - e^{-n})}{2}\right\}$$

При $t = t_1$ напряжения $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_1$ мгновенно изменяют свои значения и становятся равными σ_2.

С помощью интегрирования первого уравнения (2.5) определим зависимость $\omega_z(t)$ на II стадии нагружения ($t_1 \le t \le t^*$):

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{2}B^{-1}[\sigma_2\exp(\omega_z\sqrt{2})]^n f_2(c)$$

$$\int_{\omega_{z1}}^{\omega_z}[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}d\omega_z = \int_{t_1}^{t}\frac{1}{2}B^{-1}\sigma_2^n f_2(c)dt = \frac{1}{2}B^{-1}\sigma_2^n f_2(c)(t - t_1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}}{(-n)}\Bigg|_{\omega_{z1}}^{\omega_z} = \frac{[\exp(\omega_{z1}\sqrt{2})]^{-n} - [\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n}}{n\sqrt{2}}$$

$$[\exp(\omega_z\sqrt{2})]^{-n} = \left[\exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{2}\right)\right)\right]^{-n} -$$

$$-\frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_2^n f_2(c)(t - t_1) = C - D(t - t_1)$$

$$C = \left[\exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{2}\right)\right)\right]^{-n} = \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{2}\right), \quad D = \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_2^n f_2(c)$$

$$\omega_z = -\frac{\ln[C - D(t - t_1)]}{n\sqrt{2}} \tag{2.8}$$

При разрушении $\omega_z(t^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, при этом

$$\ln[C - D(t^* - t_1)] = -n; \quad C - D(t^* - t_1) = \exp(-n); \quad D(t^* - t_1) = C - \exp(-n)$$

Таблица 2. Характеристики длительной прочности при $\sigma_1 = 167$ МПа и $\sigma_2 = 217$ МПа

c (%)	t_1^*, час	t_1, час	t_2^*, час	ω_{z1}	t^*, час
0	1.749	0.874	0.747	0.143	1.248
0.1	2.396	1.198	1.023	0.143	1.709
0.2	3.238	1.619	1.383	0.143	2.31
0.3	15.898	7.949	6.787	0.143	11.342

Таким образом, время до разрушения оболочки после обеих стадий нагружения равно

$$t^* = t_1 + \frac{C - \exp(-n)}{D} = t_1 + \frac{(1 - e^{-n})}{2D}$$
$$t^* = \frac{(1 - e^{-n})}{n\sqrt{2}B^{-1}\sigma_1^n f_2(c)} + \frac{(1 - e^{-n})}{n\sqrt{2}B^{-1}\sigma_2^n f_2(c)} \tag{2.9}$$

Соотношение (2.9) действительно как при $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, так и при $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

Отсюда следует, что времена до разрушения оболочки при ступенчатом увеличении ($\sigma_1 < \sigma_2$) и ступенчатом уменьшении ($\sigma_1 > \sigma_2$) напряжений совпадают.

2.3. Ползучесть цилиндрической оболочки при кусочно-постоянных напряжениях. Для определения осевой ползучести рассматриваемой оболочки воспользуемся первым дифференциальным уравнением (2.4) при учете (2.3)

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{1}{2}A^{-1}\left[\sigma_u \exp(\omega)\right]^m f_1(c), \quad p_z(t = 0) = 0$$

На первой стадии при $0 \le t \le t_1$ согласно (2.6) и (2.7) получаем:

$$p_z = \frac{1}{2}A^{-1}\sigma_1^m f_1(c)\int_0^t \left[1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^m f_2(c)t\right]^{(-m/n)} dt =$$
$$= \frac{1}{2}A\sigma_1^m f_1(c)\frac{\left\{1 - \left[1 - \frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^m f_2(c)t\right]^{\left(1-\frac{m}{n}\right)}\right\}}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{n\sqrt{2}}{2}B^{-1}\sigma_1^m f_2(c)}$$

На второй стадии при $t_1 \le t \le t^*$ согласно (2.8) получаем:

$$p_z = -\frac{1}{2}A^{-1}\sigma_2^m f_1(c)\cdot\int_{t_1}^t \left\{\exp\left[-\frac{\ln(C - D\cdot(t - t_1))}{n}\right]\right\}^m dt$$

2.4. Получение кривых ползучести, соответствующих кусочно-постоянным зависимостям $\sigma_z(t) = \sigma_\theta(t)$ при мгновенном увеличении и уменьшении напряжений. В этом параграфе в качестве примера рассмотрим два варианта нагружения оболочек, при которых напряжения σ_1 и σ_2 удовлетворяют неравенствам $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ или $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. В первом варианте нагружения рассмотрим значения $\sigma_1 = 167$ МПа и $\sigma_2 = 217$ МПа. При этом характерные значения приведены в табл. 2.

Таблица 3. Характеристики длительной прочности при $\sigma_1 = 217$ МПа и $\sigma_2 = 167$ МПа

c (%)	t_1^*, час	t_1, час	t_2^*, час	ω_{z1}	t^*, час
0	0.747	0.373	1.749	0.143	1.248
0.1	1.023	0.511	2.396	0.143	1.709
0.2	1.383	0.691	3.238	0.143	2.31
0.3	6.787	3.393	15.898	0.143	11.342

Во втором варианте нагружения рассмотрим значения $\sigma_1 = 217$ МПа и $\sigma_2 = 167$ МПа. В этом случае характеристики длительной прочности приведены в табл. 3.

На рис. 3–4 приведены зависимости $\omega(t)$ и $p_z(t)$ при мгновенном увеличении напряжений ($\sigma_1 = 167$ МПа, $\sigma_2 = 217$ МПа) при использовании материальных констант (2.2). На рис. 5–6 приведены аналогичные зависимости $\omega(t)$ и $p_z(t)$ при мгновенном уменьшении напряжений ($\sigma_1 = 217$ МПа и $\sigma_2 = 167$ МПа).

3. Ползучесть цилиндрической оболочки при линейной зависимости осевого и поперечного напряжений от времени вплоть до разрушения. Рассмотрим ползучесть цилиндри-

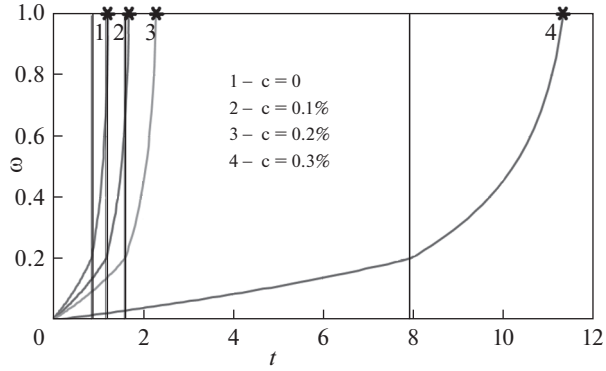


Рис. 3

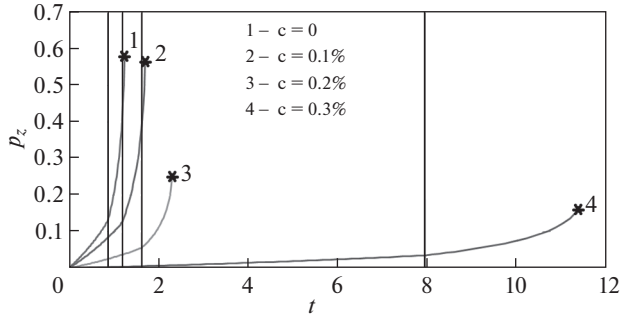


Рис. 4

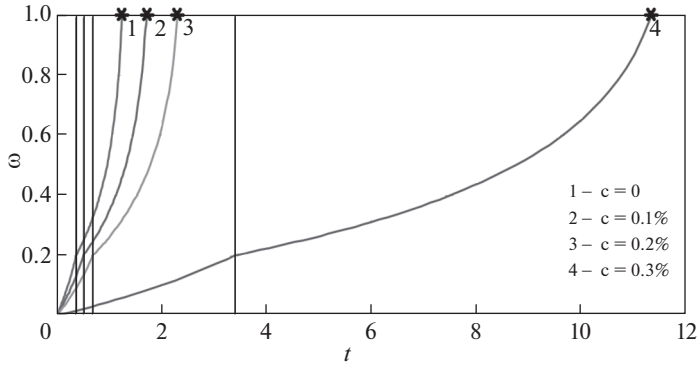


Рис. 5

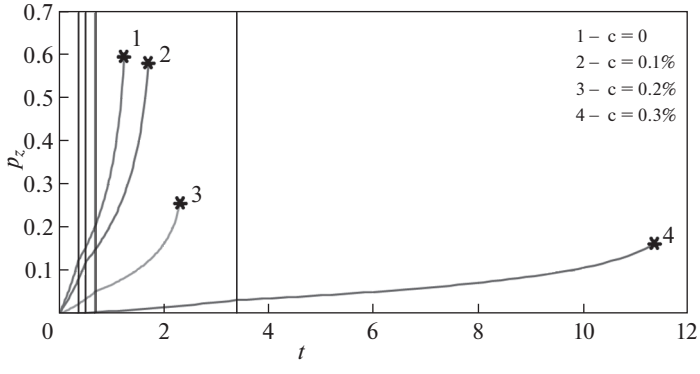


Рис. 6

ческой оболочки вплоть до разрушения, в которой осевое и окружное напряжения возрастают пропорционально времени:

$$\sigma_z = U_0 k\, t, \quad \sigma_\theta = a\sigma_z = aU_0 kt, \quad \sigma_r = 0$$

U_0 – скорость увеличения напряжений.

Интенсивность напряжений σ_u равна

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z\sqrt{(a-1)^2 + a^2 + 1} = g\sigma_z, \quad g = \sqrt{a^2 - a + 1}$$

Компоненты девиатора напряжений равны

$$s_z = \frac{(2-a)}{3}\sigma_z, \quad s_\theta = \frac{(2a-1)}{3}\sigma_z, \quad s_r = -\frac{(a+1)}{3}\sigma_z$$

Для рассмотрения длительного разрушения материала оболочки воспользуемся кинетической теорией ползучести и длительной прочности с векторным параметром поврежденности.

В случае пропорционального нагружения оболочки уравнения (2.4)–(2.5) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_z}{dt} = \frac{3}{2}A^{-1}\sigma_u^{m-1}s_z\left(\exp\omega\right)^m f_1(c) = \\
&= \frac{(2-a)}{2}A^{-1}g^{m-1}\sigma_z^m\left(\exp\omega\right)^m f_1(c), \quad p_z(t=0)=0 \\
&\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{3}{2}A^{-1}\sigma_u^{m-1}s_\theta\left(\exp\omega\right)^m f_1(c) = \\
&= \frac{(2a-1)}{2}A^{-1}g^{m-1}\sigma_z^m\left(\exp\omega\right)^m f_1(c), \quad p_\theta(t=0)=0 \\
&\frac{dp_r}{dt} = \frac{3}{2}A^{-1}\sigma_u^{m-1}s_r\left(\exp\omega\right)^m f_1(c) = \\
&= -\frac{(a+1)}{2}A^{-1}g^{m-1}\sigma_z^m\left(\exp\omega\right)^m f_1(c), \quad p_r(t=0)=0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{3}{2}B^{-1}\sigma_u^{n-1}s_z\left(\exp\omega\right)^n f_2(c) = \frac{(2-a)}{2}B^{-1}g^{n-1}\sigma_z^n\left(\exp\omega\right)^n f_2(c) \\
&\text{при} \quad a<2, \quad \omega_z(t=0)=0 \\
&\frac{d\omega_z}{dt} = 0, \quad \text{при} \quad a \ge 2 \\
&\frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{3}{2}B^{-1}\sigma_u^{n-1}s_\theta\left(\exp\omega\right)^n f_2(c) = \frac{(2a-1)}{2}B^{-1}g^{n-1}\sigma_z^n\left(\exp\omega\right)^n f_2(c) \\
&\text{при} \quad a \ge 0.5, \quad \omega_\theta(t=0)=0 \\
&\frac{d\omega_\theta}{dt} = 0, \quad \text{при} \quad a<0.5 \\
&\frac{d\omega_r}{dt} = 0, \quad \omega_r(t=0)=0, \quad \omega_r(t)\equiv 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Сравнивая ω_z и ω_θ, согласно (3.2) при $0.5 < a < 2$ получаем:

$$\frac{\omega_z}{\omega_\theta} = \frac{(2-a)}{(2a-1)}, \quad \omega_\theta = \frac{(2a-1)}{(2-a)}\omega_z$$

$$\omega = \sqrt{\omega_z^2+\omega_\theta^2+\omega_r^2} = \sqrt{1+\left(\frac{2a-1}{2-a}\right)^2}\omega_z = \frac{\sqrt{4-4a+a^2+4a^2-4a+1}}{(2-a)}\omega_z = b\omega_z$$

$$b = \frac{\sqrt{5a^2-8a+5}}{(2-a)}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{(2-a)}{2}B^{-1}g^{n-1}\left(\exp b\omega_z\right)^n f_2(c)\cdot\left(U_0kt\right)^n, \quad \omega_z(t=0)=0 \tag{3.3}$$

Интегрируя уравнение (3.3), получаем:

$$\left.\frac{\left[\exp\left(b\omega_z\right)\right]^{-n}}{-n\cdot b}\right|_0^{\omega_z} = \frac{1}{bn}\{1-\left[\exp\left(b\omega_z\right)\right]^{-n}\} = \frac{(2-a)}{2}B^{-1}g^{n-1}\cdot f_2(c)\cdot\frac{\left(U_0k\right)^n\cdot t^{n+1}}{(n+1)}$$

$$1-\left[\exp\left(b\omega_z\right)\right]^{-n} = \frac{b\cdot n(2-a)}{2}B^{-1}g^{n-1}f_2(c)\cdot\frac{\left(U_0k\right)^n t^{n+1}}{(n+1)} = Gt^{n+1}$$

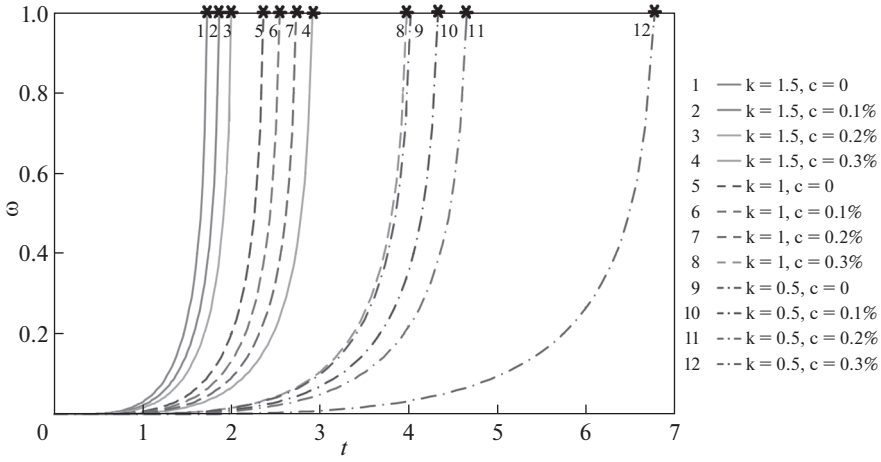


Рис. 7

$$G = \frac{b \cdot n(2-a)}{2} B^{-1} f_2(c) \cdot \frac{(U_0 k)^n}{(n+1)}$$

$$\exp(b\omega_z) = [1 - Gt^{n+1}]^{-(1/n)}, \quad b\omega_z = -\frac{1}{n}\ln[1 - Gt^{n+1}]$$

$$\omega_z(t) = -\frac{1}{bn}\ln[1 - Gt^{n+1}], \quad t = \left\{\frac{1 - [\exp(b\omega_z)]^{-n}}{G}\right\}^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \tag{3.4}$$

При разрушении оболочки $\omega^* = \omega(t^*) = b\omega_z^* = 1$.

Следовательно, время t^* до разрушения оболочки определяется следующим соотношением:

$$t^* = \left[\frac{1 - e^{-n}}{G}\right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Зависимости $\omega(t)$ при $U_0 = 100$ МПа/час, $a = 1$, различных значениях k и уровнях концентрации c приведены на рис. 7.

Перейдем к вычислениям продольной деформации ползучести $p_z(t)$.

С помощью (3.1) и (3.4) получаем зависимость $p_z(t)$:

$$p_z = \frac{(2-a)}{2} A^{-1} g^{m-1} f_1(c) \int_0^t [1 - Gt^{n+1}]^{-(m/n)} (U_0 kt)^m \, dt$$

Кривые ползучести $p_z(t)$ при t от 0 до t^* при различных значениях исходных параметров приведены на рис. 8.

Зависимости $\omega(t)$, $p_z(t)$ на рис. 7–8 при $k = 0.5$ нанесены сплошными линиями, при $k = 1.0$ – штриховыми линиями, при $k = 1.5$ – штрих-пунктирными линиями.

Из рис. 7–8 следует, что при уменьшении параметра k (то есть скорости возрастания напряжений во времени) время t^* до разрушения оболочки увеличивается, а значение деформации ползучести при разрушении $p_z(t^*)$ уменьшается. Увеличение уров-

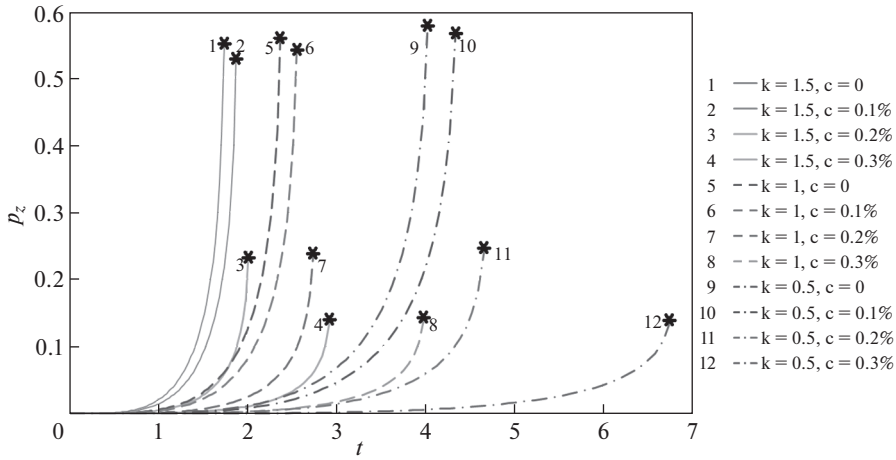


Рис. 8

ня концентрации предварительно внедренного водорода здесь, так же как и при одноосном растяжении титанового сплава [1, 2], приводит к увеличению времени до разрушения t^* и уменьшению предельной деформации $p_z^* = p_z(t^*)$.

4. Заключение. Проведено моделирование ползучести цилиндрической оболочки вплоть до разрушения в присутствии агрессивной среды при двух программах нестационарного сложного напряженного состояния.

В качестве первой программы нагружения рассматривается кусочно-постоянная зависимость осевого и окружного напряжений от времени. Во второй программе нагружения осевое и окружное напряжения возрастают пропорционально времени. Для описания длительного разрушения используется кинетическая теория Ю.Н. Работнова с векторным параметром поврежденности. Построены кривые осевой ползучести при различных значениях исходных параметров. Вычисления показали, что зависимость времени до разрушения t^* от уровня предварительно внедренной агрессивной среды c имеют тот же характер, который наблюдается в испытаниях растягиваемых образцов титанового сплава ВТ6 с предварительно внедренным водородом. Увеличение уровня агрессивной среды приводит к увеличению значений t^* и уменьшению значений p_z^*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-19-00062.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Локощенко А.М., Ильин А.А., Мамонов А.М., Назаров В.В.* Анализ ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 с предварительно внедренным водородом // Физико-химическая механика материалов. 2008. № 5. С. 98–104. (*Lokoshchenko A.M., Il'in A.A., Mamonov A.M., and Nazarov V.V.* Analysis of the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy with preliminarily injected hydrogen // Materials Science. 2008. Volume 44, pages 700–707).
2. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с. (перевод: A.M. Lokoshchenko. Creep and long term strength of metals. CISP. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca. Raton. London. New York. 2018. 545 p.).
3. *Работнов Ю.М.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 121–141

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2021 г. Чжицян Гао[a,*], Вэйпин Фу[a], Вэнь Ван[a], Шуанци Ван[a], Чжифэй Сюэ[b]

[a] *Школа механики и точного приборостроения Сианьский технологический университет, Сиань, Шэньси, КНР*

[b] *Государственная лаборатория энергосистем тракторов, China YITUO Group Co., Ltd, City, КНР*

**e-mail: gaozhiqiang@xaut.edu.cn*

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.
После доработки 21.12.2020 г.
Принята к публикации 22.12.2020 г.

При контакте двух анизотропных шероховатых поверхностей их взаимодействие оказывается анизотропным или изотропным контактом, который близок к контакту азимутальных углов неровностей на микроскопическом уровне. Анизотропия / изотропия межфазного контакта будет влиять на нормальную контактную жесткость и демпфирование механических соединений. Предложена модель нормальной контактной жесткости и демпфирования между двумя анизотропными шероховатыми поверхностями, которая включает эффекты неровностей при плотном контакте и смежных неровностей. Законы влияния степени согласования контактов и анизотропии контакта на нормальную контактную жесткость и демпфирование контакта выявлены с помощью серии модельных экспериментов. Показано, что нормальной контактной жесткостью и демпфированием можно управлять, регулируя топографические особенности поверхности и ориентацию контакта между механическими частями.

Ключевые слова: контактная анизотропия, контактная жесткость, контактное демпфирование, неровность плотного контакта, взаимодействие с соседними неровностями

DOI: 10.31857/S057232992104005X

1. Введение. Морфология поверхности и шероховатость деталей обуславливается режущими способами обработки материалов. При описании шероховатой поверхности часто принимается что высота, наклон и кривизна неровностей распределены случайным образом. Кроме того, поскольку поверхности деталей обрабатываются токарной обработкой, фрезерованием, строганием и т.д., ориентация механической текстуры поверхности соответствует направлению движения режущих инструментов относительно обрабатываемых деталей. Равномерность ориентации текстуры поверхности можно описать анизотропией или изотропией. При контакте двух анизотропных шероховатых поверхностей их взаимодействие может быть анизотропным или изотропным, что определяется азимутальными углами неровности контакта на микроскопическом уровне, а нормальная контактная жесткость и демпфирование различны для изотропного и анизотропного контактов. Общая контактная жесткость взаи-

модействий составляет более 60% от общей жесткости станка, а демпфирование контакта составляет примерно 90% от демпфирования всего станка.

Контактная нагрузка и реальная площадь контакта сильно анизотропных шероховатых поверхностей изучаются А. Бушем и др. [1], исследование показывает, что различие в режимах деформации изотропных и анизотропных поверхностей зависит от их соответствующих поверхностных характеристики. Таким образом, необходимо изучить нормальную контактную жесткость и демпфирование изотропного и анизотропного контакта. Выявление законов влияния степени согласования контакта и контактной анизотропии на нормальную контактную жесткость и демпфирование имеет большое значение. Жесткость и демпфирование всей машины можно регулировать путем изменения топографических характеристик поверхности и ориентации контакта между механическими частями в соответствии с законами влияния. Исследование контакта шероховатых поверхностей впервые было предложено в работе [2] Гринвудом и Уильямсоном, которые исследовали контакт гладких жестких плоских поверхностей, контактирующих с шероховатой поверхностью, с использованием статистического метода. Кроме того, для исследования поведения контакта между двумя шероховатыми поверхностями использовались некоторые упрощенные методы, например, модели, CEB [3], KE [4], KKE [5], JG [6, 7] и др., что в некоторой степени решало сложную проблему контактного взаимодействия. Эти модели предполагают, что контакт между двумя шероховатыми поверхностями эквивалентен контакту между шероховатой поверхностью и гладкой жесткой плоскостью. Однако при реальном контакте многие контактирующие неровности плотно прилегают друг к другу [8]. Тогда контакт двух шероховатых поверхностей не может напрямую рассматриваться как контакт между шероховатой поверхностью и гладкой жесткой плоскостью. Для плотного контакта неровностей были предложены модели поверхностного контакта, например, модель AF [9], модель SF [10, 11], модель Бина [12] и т. д. Кроме того, также были предложены некоторые модели плотного контакта неровностей со скользящей неровностью, такие как модель Ягера [13], модель Джексона [14], модель Малвихилла [15], модель Ши [16], модель Фолкнера [17] и др. И все больше и больше исследователей начинают осознавать важность плотного контакта неровностей для межфазных характеристик. В большинстве моделей плотного контакта неровностей использовалась деформация нормальной компоненты перемещения для получения касательной компоненты перемещения в соответствии с соотношением для расстояния между верхними и нижними неровностями и углом контакта неровностей с использованием метода конечных элементов. Когда пара неровностей плотно соприкасается под действием нормальной силы, происходит трение между верхними и нижними неровностями. С другой стороны, неизбежно взаимодействие смежных неровностей как деформируемого твердого тела, потому что все неровности соединены общим материалом основания. Так, были представлены многочисленные исследования взаимодействия неровностей, такие как модель ZC [18], модель CGP [19], модель CEP [20] и т. д. Однако обе эти модели основаны на предположении, что эквивалентная шероховатая поверхность контактирует с гладкой жесткой плоскостью, тогда все неровности соприкасаются вершинами. В этих моделях, основанных на предположении о единственной шероховатой поверхности, не учитывается влияние наклонной контактной силы на взаимодействие соседних неровностей. Моделирование случайной анизотропной гауссовой поверхности чрезвычайно сложно, поскольку для определения поверхности требуется по крайней мере пять параметров (дисперсия высоты поверхности m_{00}, два главных среднеквадратичных уклона m_{02}, m_{20} и две главные среднеквадратичные кривизны m_{04}, m_{40}) [1]. Гринвуд и Трипп [21], Уайтхаус и Арчард [22], Лонге и Хиггинс [23], Наяк [24, 25], Буш [1], Маккул [26], Уайтхаус и Филлипс [27, 28] проделали большую работу по построению модели анизотропной шероховатой поверхности. В частности, Бучковски и др. [29] была построена упруго-пластическая

статистическая модель, с сильно анизотропной шероховатой поверхностью. Из модели Буша можно обнаружить, что степень анизотропии серьезно влияет на характеристики контакта. Кроме того, когда две анизотропные шероховатые поверхности контактируют, анизотропия контакта является неопределенной. Чтобы устранить недостатки существующих моделей, в этой статье представлена модель нормального контакта между двумя шероховатыми поверхностями, которая учитывает контакт плотный контакт неровностей, взаимодействие соседних неровностей и межфазную анизотропию. Сначала изучается поведение плотного контакта неровностей между парой неровностей, а затем с помощью механики упругого контакта анализируется взаимодействие соседних неровностей. По изменению азимутальных углов контакта выявлено анизотропное влияние на контактные характеристики взаимодействия. После этого могут быть рассчитаны в соответствии со статистической теорией нормальные контактные силы, нормальное рассеивание энергии контакта, нормальная контактная жесткость и нормальное демпфирование контакта между анизотропными контактными поверхностями. Наконец, область контакта, состоящую из двух анизотропных шероховатых поверхностей, можно рассматривать как систему с одной степенью свободы с вязким демпфированием. Эквивалентное демпфирование может быть получено приравниванием энергии, рассеиваемой вязким демпфированием, к энергии невязкой демпфирующей силы с предполагаемым гармоническим движением.

2. Плотный контакт неровностей. Графическая схема плотного соприкосновения неровностей представлена на рис. 1. Пара неровностей (высота неровностей выражается как z_1 и z_2) контактирует с силой F_i (сила включает статическую силу и динамическую силу $F_i = F_{is} + F_{id}$), которую можно разложить на нормальную составляющую силы F_{in}, касательную нормальную составляющую силы F_{ih} и горизонтальную составляющую силы $F_{i\tau}$ в направлениях z', y' и x' соответственно. Контактная деформация в направлении z' обозначена как δ_{bf}. d – среднее расстояние между двумя шероховатыми поверхностями. Радиус контактной поверхности неровностей обозначен как r_i, a – радиус области деформации основного материала на дне контактирующей неровности, R – радиус неровности. Угол контакта и азимутальный угол контакта могут быть обозначены как φ и θ соответственно, m – расстояние между верхней и нижней неровностями.

Согласно модели КЕ, предложенной в [4], можно выделить четыре режима деформации: упругая стадия, упруго-пластическая зона I, упруго-пластическая зона II и полная пластическая стадия. Ю. Кадин и др. [5] объединяют упруго-пластические зоны I и II в упруго-пластическую стадию, доходящую даже до полной пластической стадии. Чтобы упростить сложную задачу о контакте двух шероховатых поверхностей, деформацию неровностей можно разделить на упругую ($0 < \delta_{bf}^* \le 1$) и упруго-идеально пластическую ($1 < \delta_{bf}^* < +\infty$) в соответствии с моделью Кадина [5]. Верхний индекс * обозначает безразмерную переменную, а δ_{bf}^* можно вычислить как $\delta_{bf}^* = \delta_{bf}/\delta_{bc}$, где δ_{bc} – критическая деформация в начале пластической деформации. δ_{bc} можно получить с помощью модели СЕВ [3] в виде $\delta_{bc} = (\pi SH/2E)^2 R$ где S, H, E – максимальный коэффициент контактного давления, твердость более мягкого материала и модуль упругости Герца соответственно.

2.1.1. Упругая стадия (нагружение). Деформация неровностей находится в упругой стадии, когда безразмерная деформация неровностей δ_{bf}^* меньше единицы. Деформация δ_{bf}^* включает статическую и динамическую части $\delta_{bf}^* = \delta_{bfs}^* + \delta_{bfd}^* = \delta_{bfs}^* + \delta_{bfdm}^* \sin(\omega t)$

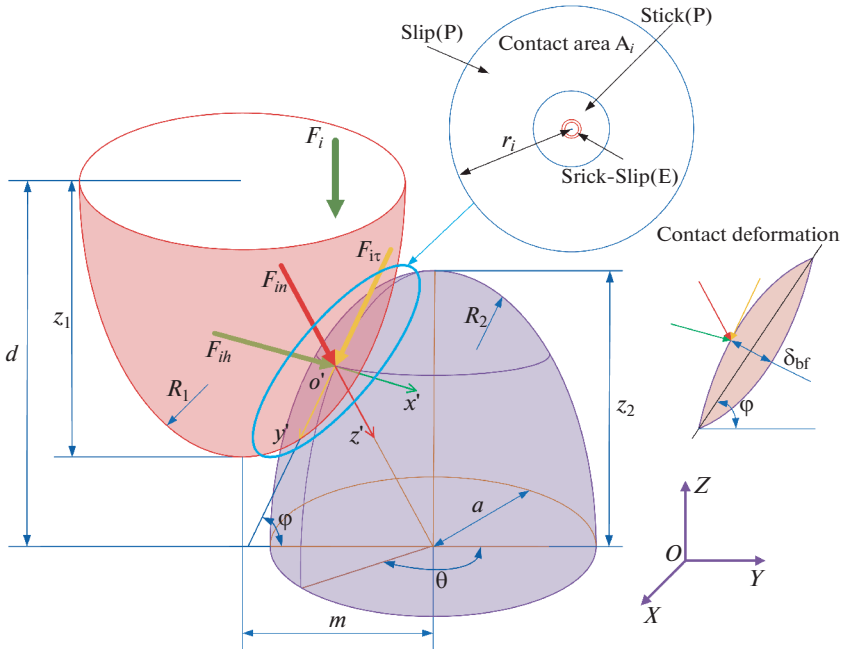


Рис. 1. Графическая схема контакта неровностей в форме плечом к плечу.

на силу F_i. Неровность находится в стадии нагружения в промежутке $-\pi/(2\omega) \le t \le$ $\le \pi/(2\omega)$. Согласно теории Герца, безразмерная нормальная составляющая силы на неровностях в упругой стадии может быть получена следующим образом:

$$F^*_{ine} = (\delta^*_{bf})^{3/2} \tag{2.1}$$

а безразмерную контактную жесткость контактной неровности легко получить с помощью

$$K^*_{ine} = \frac{dF^*_{ine}}{d\delta^*_{bf}} = \frac{3}{2}(\delta^*_{bf})^{1/2} \tag{2.2}$$

2.1.2. Упругая стадия (разгрузка). Неровность находится в стадии разгрузки в интервале $\pi/(2\omega) \le t \le 3\pi/(2\omega)$. Поскольку неровность находится в стадии полной упругости, сила нормальной составляющей разгрузки равна силе нормальной составляющей нагрузки, которая также может быть выражена как

$$F^*_{ine_un} = (\delta^*_{bf})^{3/2} \tag{2.3}$$

а контактная жесткость нормального компонента при разгрузке может быть рассчитана по формуле

$$K^*_{ine_un} = \frac{dF^*_{ine_un}}{d\delta^*_{bf}} = \frac{3}{2}(\delta^*_{bf})^{1/2} \tag{2.4}$$

2.1.3. Упруго-идеально пластичная стадия (нагружение). Если неровность безразмерной деформации больше единицы, неровность вызывает упруго-пластическую деформацию или полную пластическую деформацию. Упруго-пластические стадии и пол-

ная пластическая стадия могут быть скомбинированы в упруго-идеально пластическую стадию. Согласно модели Кадина [5], нормальная составляющая силы в упруго-идеально пластической стадии может быть выражена как

$$F^*_{inp} = 1.32(\delta^*_{bf} - 1)^{1.27} + 1 \tag{2.5}$$

а контактная жесткость нормального компонента при нагрузке может быть получена согласно

$$K^*_{inp} = \frac{dF^*_{inp}}{d\delta^*_{bf}} = 1.6764(\delta^*_{bf} - 1)^{0.27} \tag{2.6}$$

2.1.4. Упруго-идеально пластичная стадия (разгрузка). Точно так же неровность находится в стадии разгрузки в интервале времени $\pi/(2\omega) \le t \le 3\pi/(2\omega)$. Согласно модели Кадина [5], нормальная составляющая силы разгрузки может быть выражена как

$$F^*_{inp_m} = F^*_{inp_m}\left(\frac{\delta^*_{bf} - \delta^*_r}{\delta^*_{bm} - \delta^*_r}\right)^{n_p} \tag{2.7}$$

а контактная жесткость нормального компонента при разгрузке может быть рассчитана как

$$K^*_{inp_un} = \frac{dF^*_{inp_un}}{d\delta^*_{bf}} = \frac{n_p F^*_{inp_m}}{\delta^*_{bf} - \delta^*_r}\left(\frac{\delta^*_{bf} - \delta^*_r}{\delta^*_{bfm} - \delta^*_r}\right)^{n_p} \tag{2.8}$$

где δ^*_r обозначает остаточную деформацию, которую можно получить с помощью $\delta^*_r = \delta^*_{bfm}(1 - (\delta^*_{bfm})^{-0.28})(1 - (\delta^*_{bfm})^{-0.69})$. n_p – индекс выгрузки в форме $n_p = 1.5(\delta^*_{bfm})^{-0.0331}$.

2.2. Анализ тангенциальной составляющей. Каттанео [30] и Миндлин [31] независимо исследовали проблему контакта упругих неровностей под действием касательной силы, которая показывает, что контакт имеет квазистатический переход от полного прилипания к частичному скольжению. Радиус всей площади прилипания можно выразить как

$$c^*_{i(e,p)} = r^*_{i(e,p)}\left(1 - \frac{F^*_{i\tau(e,p)}}{\mu_{(e,p)}F^*_{in(e,p)}}\right)^{1/3} \tag{2.9}$$

где $r^*_{i(e,p)}$ выражает радиус области контакта в упругой стадии или в упруго-идеально пластической стадии. $\mu_{(e,p)}$ – коэффициент трения в упругой стадии или в упруго-идеально пластической стадии. Чтобы упростить сложную контактную задачу, случай полного прилипания учитывается только в упругой стадии, а случай частичного скольжения рассматривается только в упруго-идеально пластической стадии.

2.2.1. Случай полного прилипания (нагружение). Как упоминалось выше, проскальзывание ζ^*_b включает статическое и динамическое проскальзывания $\zeta^*_b = \zeta^*_{bs} + \zeta^*_{bd} = \zeta^*_{bs} + \zeta^*_{bdm}\sin(\omega t)$. Неровность находится в стадии нагружения в промежутке времени $-\pi/(2\omega) \le t \le \pi/(2\omega)$. Как показано на рис. 2, в упругой стадии в основном наблюдается состояние полного прилипания.

Согласно модели Эритена [32] касательная составляющая силы в состоянии прилипания может быть выражена как

$$F^*_{i\tau e} = \frac{3}{2}\zeta^*_b r^*_{ie} \tag{2.10}$$

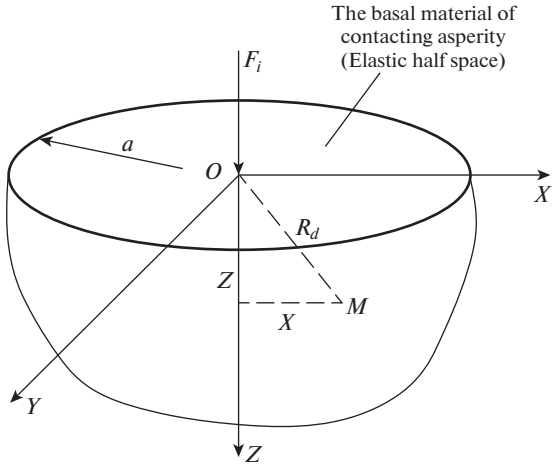


Рис. 2. Упругое полупространство под действием нормальной сосредоточенной силы.

и контактная жесткость касательной компоненты в состоянии полного прилипания может быть получена с помощью

$$K^*_{i\tau e} = \frac{dF^*_{i\tau e}}{d\zeta^*_b} = \frac{3}{2} r^*_{ie} \tag{2.11}$$

где r^*_{ie} – радиус контактной площади в упругой стадии, который можно рассчитать по формуле

$$r^*_{ie} = \sqrt{\delta^*_{bf}/\pi}$$

2.2.2. Случай полного прилипания (разгрузка). Неровность находится в стадии разгрузки для промежутка времени $\pi/(2\omega) \le t \le 3\pi/(2\omega)$. Касательная составляющая разгружающего усилия равна касательной составляющей нагружающего усилия, поскольку верхняя и нижняя неровности находятся в состоянии полного прилипания, тогда жесткость касательного контакта при разгрузке также равна жесткости касательного контакта нагружения.

2.2.3. Состояние частичного скольжения (нагружение). На стадии упругой идеально пластической деформации в основном присутствует состояние частичного скольжения. Согласно модели Эритена [32], тангенциальная составляющая силы в состоянии частичного скольжения может быть получена как

$$F^*_{i\tau p} = \mu_p F^*_{inp}\left(1 - \left(1 - \frac{r^*_{ip}\zeta^*_b}{\mu_p F^*_{inp}}\right)^{3/2}\right) \tag{2.12}$$

а контактная жесткость касательной компоненты в состоянии частичного скольжения может быть рассчитана по формуле

$$K^*_{i\tau p} = \frac{dF^*_{i\tau p}}{d\zeta^*_b} = 1.5 r^*_{ip}\left(1 - \frac{r^*_{ip}\zeta^*_b}{\mu_p F^*_{inp}}\right)^{1/2} \tag{2.13}$$

где μ_p можно получить с помощью модели ВКЕ [33], которая равна $\mu_p = 0.27\mathrm{ctg}(0.27(F^*_{inp})^{0.35})$.

2.2.4. Состояние частичного скольжения (разгрузка). Согласно модели Эритена [32], касательная составляющая силы разгрузки в состоянии частичного скольжения может быть выражена как

$$F^*_{i\tau p_un} = F^*_{i\tau p_m} - 2\mu F^*_{inp}\left(1 - \left(0.5\left(\frac{\zeta^*_b A^*_{ip}}{\mu_p F^*_{inp}} + \left(1 - \frac{F^*_{i\tau p_m}}{\mu_p F^*_{inp}}\right)^{2/3} + 1\right)\right)^{3/2}\right) \tag{2.14}$$

и контактная жесткость касательной компоненты разгружающего усилия в состоянии частичного скольжения может быть получена с помощью

$$K^*_{i\tau p_un} = \frac{dF^*_{i\tau p_un}}{d\zeta^*_b} = 1.5A_{ip}\left(\frac{0.5\zeta^*_b A_{ip}}{\mu_p F^*_{inp}} + 0.5\left(1 - \frac{F^*_{i\tau p_m}}{\mu_p F^*_{inp}}\right)^{2/3} + 0.5\right)^{1/2} \tag{2.15}$$

2.3. Анализ горизонтальной компоненты. Контакт неровностей имеет тот же механизм проскальзывания, что и механизм касательного проскальзывания (включая прилипание и проскальзывание) в направлении горизонтальной составляющей. Для краткости подробное описание процессов здесь опущено.

2.4. Нормальная результирующая сила и жесткость. В разделах 2.1 и 2.2 нормальная и касательная составляющие анализируются на упругой и упруго-идеально пластической стадиях соответственно. Тогда могут быть легко получены нормальные результирующие сила и жесткость в упругих и упруго-идеально пластических стадиях.

2.4.1. Упругая стадия (нагружение). Нормальная результирующая сила может быть получена как

$$F^*_{ie} = \sqrt{(\delta^*_{bf})^3 + \left(\frac{3}{2}\zeta^*_b r^*_i\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\xi^*_b r^*_i\right)^2} \tag{2.16}$$

где ξ^*_b – безразмерное горизонтальное проскальзывание.

Результирующую контактную жесткость можно рассчитать по формуле

$$K^*_{ie} = \frac{3}{2}\sqrt{\delta^*_{bf} + 2(r^*_{ie})^2} \tag{2.17}$$

2.4.2. Упругая стадия (разгрузка). Результирующие сила и жесткость при разгрузке такие же, как результирующие сила и жесткость при нагрузке, потому что в упругой стадии нет ни пластической деформации, ни частичного скольжения.

2.4.3. Упруго-идеально-пластическая стадия (нагружение). Нормальная результирующая сила в упруго-идеально пластической стадии может быть выражена как

$$F^*_{ip} = \sqrt{(1.32(\delta^*_{bf} - 1)^{1.27} + 1)^2 + \left(\mu_p F^*_{inp}\left(1 - \left(1 - \frac{r^*_{ip}\zeta^*_b}{\mu_p F^*_{in}}\right)^{3/2}\right)\right)^2 + \left(\mu_p F^*_{inp}\left(1 - \left(1 - \frac{r^*_{ip}\xi^*_b}{\mu_p F^*_{inp}}\right)^{3/2}\right)\right)^2} \tag{2.18}$$

Результирующую контактную жесткость можно рассчитать по формуле

$$K^*_{ip} = \sqrt{2.81(\delta^*_{bf} - 1)^{0.54} + 2.25(r^*_{ip})^2\left(2 - \frac{r^*_{ip}(\zeta^*_b + \xi^*_b)}{\mu_p F^*_{inp}}\right)} \tag{2.19}$$

2.4.4. Упруго-идеально пластическая стадия (разгрузка). На этапе разгрузки нормальная результирующие разгружающие усилие может быть выражена как

$$F^*_{ip_un} = \sqrt{(F^*_{inp_un})^2 + (F^*_{i\tau p_un})^2 + (F^*_{ihp_un})^2} \tag{2.20}$$

а результирующая контактная жесткость при разгрузке может быть получена через

$$K^*_{ip_un} = \sqrt{(K^*_{inp_un})^2 + (K^*_{i\tau p_un})^2 + (K^*_{ihp_un})^2} \tag{2.21}$$

3. Анализ деформации контактной неровности. Большинство неровностей плотно контактируют, когда две шероховатые поверхности соприкасаются под действием нормальной силы, и между соседними неровностями на одной и той же шероховатой поверхности происходит взаимодействие. Предполагается, что каждая контактирующая неровность независимо деформируется в классических моделях GW [2], CEB [3], ZMC [34], KE [4], JG [6,7] и т. д. Однако взаимодействие соседних неровностей как сплошного деформируемого твердого тела неизбежно, поскольку все неровности соединены общим материалом подложки. Чжао и др. [34] и Дженг и др. [35], соответственно, изучали взаимодействие между соседними неровностями, используя принцип Сен-Венана [36] и формулу Лява [37], но эти модели основаны на предположении контакта гладкой жесткой плоскости, контактирующей с эквивалентной шероховатой поверхностью, что привело к тому, что все неровности соприкасаются на вершинах. Тогда пренебрегают влиянием наклонной контактной силы на взаимодействие соседних неровностей. Чтобы устранить этот недостаток, в этом разделе была предложена улучшенная модель взаимодействия соседних неровностей. Когда две шероховатые поверхности контактируют под действием нормальной силы, микроконтактная деформация между двумя шероховатыми поверхностями в основном включает деформацию контактирующих неровностей, деформацию основного материала и деформацию взаимодействия между соседними неровностями.

3.1. Деформация плотного контакта неровностей. Нормальная деформация, не включающая деформацию взаимодействия, может быть выражена как

$$\delta_{vl} = \delta_{vf} + \zeta_v = z_1 + z_2 - d - m^2/(2R_t) \tag{3.1}$$

где R_t – сумма радиусов верхней и нижней неровностей формы $R_t = R_1 + R_2$. Расстояние между верхней и нижней неровностями можно получить как $m = R_t \mathrm{tg}\varphi$. Тогда уравнение (3.1) можно преобразовать к виду

$$\delta_{vl} = \delta_{vf} + \zeta_v = z_1 + z_2 - d - 0.5R_t \mathrm{tg}^2\varphi \tag{3.2}$$

Согласно уравнению (3.2), можно сделать выводы: деформация контактной неровности равна $\delta_{vl} = z_1 + z_2 - d$ когда контактный угол равен нулю, что является деформацией жесткой гладкой плоскости, контактирующей с эквивалентной шероховатой поверхностью, и совпадает с деформацией модели GW, модели CEB и модели KKE. Член $0.5R_t\mathrm{tg}^2\varphi$ – деформация, вызванная плотным контактом неровностей. Таким образом, контакт вершины к вершине является частным случаем, когда угол контакта равен нулю.

3.2. Деформация основного материала. Основной материал контактирующих неровностей можно принять как упругое полупространство под действием нормальной сосредоточенной силы, как показано на рис. 2. Здесь F_i – сосредоточенная сила, т.е. нормальная контактная сила неровностей; a – радиус области деформации основного материала на дне контактирующей неровности; (x, z) – координаты произвольной точки M в направлениях оси x и оси z соответственно; R_d – расстояние между точкой M и началом координат $OXYZ$, $R_d = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Деформация материала основания может быть получена при $z = 0$ и $x = r$ согласно модели Буссинеска

$$\delta_s = \frac{(1 - v^2)F_i}{\pi E r} \tag{3.3}$$

где r – радиус контактной площади неровности A_i в форме $r = \sqrt{A_i/\pi}$; F_i – нормальная контактная сила контактной неровности $F_i = P_i A_i$; P_i – нормальное контактное давление на неровность. Уравнение (3.3) можно преобразовать

$$\delta_s = \frac{(1 - v^2)}{\sqrt{\pi}} \frac{P_i \sqrt{A_i}}{E} \tag{3.4}$$

3.3. Деформация взаимодействия между соседними неровностями. Область деформации основного материала каждой контактирующей неровности можно принять как круговую область с радиусом a. Если в области деформации двух соседних неровностей есть пересекающиеся части, то две соседние неровности взаимодействуют, в противном случае взаимодействие отсутствует. Согласно уравнению (3.4), деформация взаимодействия соседних неровностей может быть получена как

$$\delta_{\text{int}} = \frac{(1 - v^2)F_j}{\pi E a} \tag{3.5}$$

где a – радиус области деформации материала основания A_s, в форме $a = \sqrt{A_s/\pi}$; F_j – нормальные контактные силы на прилегающей части контактной неровности $F_j = P_j A_j$; P_j – контактное давление на соседнюю неровность. Нижним индексом j обозначена соседняя неровность. Тогда деформацию, вызванную прилегающей неровностью, можно выразить согласно

$$\delta_{\text{int}} = \frac{(1 - v^2)P_j}{\sqrt{\pi} E} \frac{A_j}{\sqrt{A_s}} \tag{3.6}$$

Согласно принципу Сен-Венана, если силы, действующие на небольшую часть поверхности упругого тела, заменяются другой статически эквивалентной системой сил, действующих на ту же часть поверхности, это перераспределение нагрузки вызывает существенные изменения в локальном напряжении, но оказывает незначительное влияние на напряжения вдали от контакта на расстоянии, которое велико по сравнению с линейными размерами поверхности, на которой изменяются силы. Однако пока это строго не доказано. Чтобы полностью учесть взаимодействие между соседними неровностями, разумно предположить, что $A_s = 3A_j$ в соответствии с принципом Сен-Венана, тогда уравнение (3.6) можно преобразовать в

$$\delta_{\text{int}} = \frac{(1 - v^2)}{\sqrt{3\pi}} \frac{P_j \sqrt{A_j}}{E} \tag{3.7}$$

Полную деформацию контактной неровности можно получить как

$$\begin{aligned} \delta_v &= \delta_{vl} + \delta_s + \delta_{\text{int}} = \\ &= z_1 + z_2 - d - 0.5R_s \text{tg}^2\varphi + \frac{(1 - v^2)P_i\sqrt{A_i}}{\sqrt{\pi}E} + \frac{(1 - v^2)P_j\sqrt{A_j}}{\sqrt{3\pi}E} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогичным образом предполагается, что, согласно принципу Сен-Венана, поверхностное давление и площадь контакта соседних неровностей равны $P_j = P_i/3$ и

$A_j = A_i/3$ соответственно. Полная деформация неровностей с учетом плотного контакта и взаимодействия неровностей может быть получена согласно

$$\delta_v = \delta_{vl} + \delta_s + \delta_{\text{int}} = \\ = z_1 + z_2 - d - 0.5R_s\text{tg}^2\varphi + \frac{10}{9}\frac{\left(1 - v^2\right)P_i\sqrt{A_i}}{\sqrt{\pi}E} \tag{3.9}$$

Согласно уравнению (3.9) можно получить, что сумма основной деформации материала и деформации взаимодействия равна $\delta_s + \delta_{\text{int}} = 1.05P_i\sqrt{A_i}/E$ когда коэффициент Пуассона материала равен 0.23. Коэффициент 1.05 отличается от значения 0.96, данного моделью Чавареллы [19], потому что модель Чавареллы предполагает, что материал основания с контактирующими неровностями несет равномерное давление, в то время как предлагаемая модель предполагает, что материал основания находится под сосредоточенной нагрузкой.

Преобразуя уравнение (3.9) к безразмерному виду в форме

$$\delta_v^* = \delta_{vl}^* + \delta_s^* + \delta_{\text{int}}^* = z^* - d^* - 0.5R_s^*\text{tg}^2\varphi + \frac{10(1 - v^2)P_a^*\sqrt{A_i^*}}{9\sqrt{\pi}} \tag{3.10}$$

где $\delta_v^* = \delta_v/\sigma$, $z^* = z_1^* + z_2^*$, $z^* = z/\sigma$, $d^* = d/\sigma$, $P_a^* = P_a/EA_n$, $R_s^* = R_s/R$. σ – стандартное отклонение распределения высот поверхности, может быть получено с помощью $\sigma = (\sigma_z^2 + 3.717\times10^{-4}/\eta^2R^2)^{-1/2}$; η – поверхностная плотность неровностей; σ_z представляет собой стандартное отклонение высоты неровностей.

4. Анализ анизотропии на границе раздела. Поверхности, обработанные токарной обработкой, обточкой или шлифованием, имеют ориентацию, соответствующую направлению движения режущих инструментов относительно заготовок, и потому необходимо использовать модель анизотропных шероховатых поверхностей. Текстура шероховатой поверхности изучалась многими учеными [1, 22–29] на основе статистического подхода для выявления контактных характеристик анизотропных шероховатых поверхностей. Однако эти методы очень сложны. Кроме того, для межфазной контактной анизотропии не определено, когда происходит контакт двух анизотропных шероховатых поверхностей. Чтобы упростить проблему анизотропии и точно выявить характеристики межфазного контакта, предлагается улучшенная анизотропная межфазная модель в соответствии с моделями Мисры [38, 39]. Высота неровностей, азимутальные углы неровностей и азимутальные углы неровностей области контакта являются основными параметрами, влияющими на контактные характеристики при взаимодействии двух шероховатых поверхностей.

4.1. Распределение высот неровностей. Согласно модели GW [2], модели GT [21], модели Буша [1], модели Наяка [24, 25] и модели Маккула [26], высота неровностей обработанной поверхности соответствует распределению Гаусса со стандартным отклонением σ_z, самые высокие и самые короткие неровности разделены с приблизительным расстоянием $3\sigma_z$. Можно предположить, что на номинальной поверхности контакта A_n имеется неровность N, а среднее расстояние между двумя шероховатыми поверхностями при заданных нагрузках принимается равным d. z – высота неровностей, отсчитываемая от средней высоты неровностей. Количество контактирующих неровностей можно прогнозировать с помощью

$$n_z = N\int_d^\infty \Phi(z)dz = \eta A_n\int_d^\infty \Phi(z)dz \tag{4.1}$$

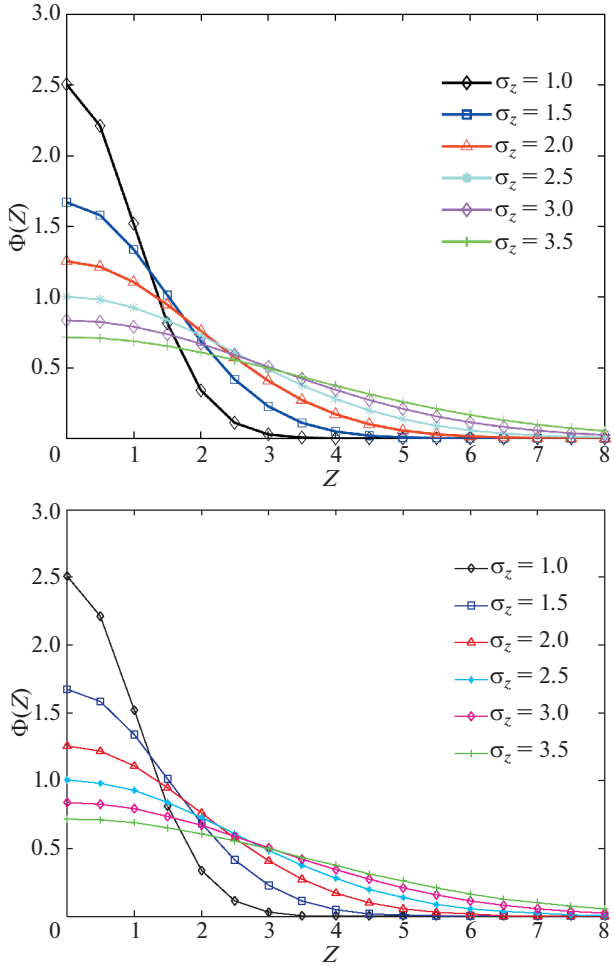


Рис. 3. Распределение вероятностей высот неровностей

где $\Phi(z)$ – функция распределения Гаусса, которую можно записать как

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\exp\left(-0.5\left(\frac{z}{\sigma_z}\right)^2\right) \quad (0 \le z < +\infty) \tag{4.2}$$

На рис. 3 показано распределение вероятностей высот неровностей согласно уравнению (4.2), которое интуитивно показывает их взаимосвязь. Влияние стандартного отклонения высоты неровностей σ_z на распределение вероятностей показано на рис. 4.

Мы можем видеть, что поверхность с меньшим σ_z имеет более концентрированные высоты неровностей в соответствии с рис. 3, что означает, что поверхность более гладкая. Поверхность становится более шероховатой с увеличением стандартного отклонения высоты неровностей σ_z.

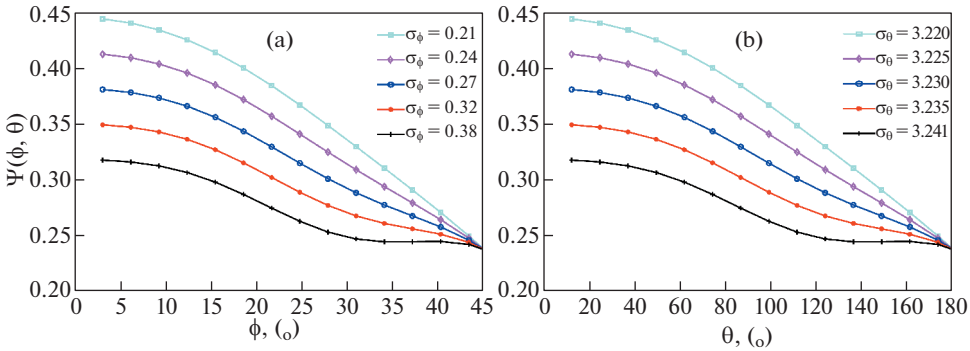


Рис. 4. Распределение вероятности контактных (азимутальных) углов неровностей: (a) поведение σ_φ, (b) поведение σ_θ.

4.2. Распределение контактного (азимутального) угла неровностей. Плотный контакт неровностей в основном зависит от контактного угла неровностей, в то время как однородность азимутального угла контакта определяет степень анизотропии межфазного контакта. Для описания распределения контактных (азимутальных) углов может быть использовано разложение смещенных сферических гармоник в сферических полярных координатах как функция плотности вероятности [38, 39], совместная функция плотности вероятности краевых углов и контактных азимутальных углов задается согласно

$$\Psi(\varphi, \theta) = \frac{b\sin(b\varphi)}{2\pi\sin\varphi}\left(1 + \frac{c}{4}\left(3\cos(2c\varphi) + 1\right) + 3e\sin^2(b\varphi)\cos(2\theta)\right) \tag{4.3}$$

где φ – контактный угол неровности, с диапазоном значений в диапазоне $0 \le \varphi \le 2b$; b – константа ($b \ge 1$), которая описывает величину краевых углов неровностей; θ – азимутальный угол контакта с неровностями, с диапазоном значений $0 \le \theta \le 2\pi$; c определяет форму распределения углов смачивания неровностей, которая находится в диапазоне $-1 \le c \le 2$; e определяет форму распределения азимутальных углов контакта неровностей, а диапазон ее значений находится в диапазоне $|e| \le (2 - b)/6$.

Совместная функция плотности вероятности контактных углов неровностей и контактных азимутальных углов неровностей удовлетворяет уравнению (4.4).

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2a} \sin\varphi\psi(\varphi, \theta)d\varphi d\theta = 1 \tag{4.4}$$

Тогда $n_z\psi(\varphi, \theta)\sin\varphi d\varphi d\theta$ можно представить как количество неровностей контакта в течение $\sin\varphi d\varphi d\theta$, которые можно выразить как

$$n = n_z\sin\varphi\psi(\varphi, \theta)d\varphi d\theta \tag{4.5}$$

Математическое ожидание контактных углов неровностей может быть получено с помощью

$$E[\varphi] = \int_0^{\pi/2a} \varphi\sin\varphi\psi(\varphi, \theta)d\varphi d\theta = \frac{6 - b}{6a} \tag{4.6}$$

Стандартная дисперсия углов контактной неровности может быть получена следующим образом:

$$\sigma_\varphi = E[(\varphi - E[\varphi])^2] = \int_0^{\pi/2a} (\varphi - E[\varphi])^2 \sin\varphi\psi(\varphi,\theta)\,d\varphi = \\ = (36\pi - 108 + 20b - 6b\pi - b^2)/36a^2 \tag{4.7}$$

Точно так же математическое ожидание контактных азимутальных углов неровностей равно

$$E[\theta] = \int_0^{2\pi} \theta \sin\varphi\psi(\varphi,\theta)d\theta = \pi \tag{4.8}$$

Стандартная дисперсия контактных азимутальных углов неровностей

$$\sigma_\theta = E[(\theta - E[\theta])^2] = \int_0^{2\pi} (\theta - E[\theta])^2 \sin\varphi\psi(\varphi,\theta)\,d\theta = c + \pi^2/3 \tag{4.9}$$

Чтобы выявить влияние контактных углов неровностей и контактных азимутальных углов неровностей, в соответствии с уравнениями (4.3)–(4.9) были построены графики функции плотности вероятности для различных σ_φ и σ_θ, которые приведены на рис. 4. На рис. 4, a показано влияние σ_φ на совместную функцию плотности вероятности. Можно обнаружить, что область контакта с большим σ_φ имеет более дискретное распределение углов контакта неровностей, что означает, что степень согласования между неровностями на границе раздела хуже. Напротив, краевые углы неровностей более концентрированные, что означает, что степень согласования между двумя шероховатыми поверхностями лучше. На рис. 4, b показано влияние σ_θ на совместную функцию плотности вероятности. Мы можем обнаружить, что контактные азимутальные углы неровностей становятся более дискретными с увеличением σ_θ, что означает, что контактная поверхность имеет тенденцию быть более изотропной. В противном случае область контакта имеет тенденцию быть более анизотропной.

5. Статистическая модель границы раздела. *5.1. Диссипация межфазной энергии.* Нормальное контактное усилие нагружения может быть рассчитано с помощью контактного анализа неровностей в соответствии со статистической теорией следующим образом:

$$F^* = F_e^* + F_p^* = \eta A_n \int_{d^*}^{d^*+\delta_{vc}^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} F_{ie}^* \Psi(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\, \Phi^*(z^*)dz^* \\ + \eta A_n \int_{d^*+\delta_{vc}^*}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} F_{ip}^* \Psi(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\, \Phi^*(z^*)dz^* \tag{5.1}$$

а нормальная контактная компонента нагружающего усилия может быть получена следующим образом:

$$F_{un}^* = F_{e_un}^* + F_{p_un}^* = \eta A_n \int_{d^*}^{d_{\min}^*+\delta_{vc}^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} F_{ie_un}^* \Psi(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\, \Phi^*(z^*)dz^* + \\ + \eta A_n \int_{d_{\min}^*+\delta_{vc}^*}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} F_{ip_un}^* H(\delta_v^* - \delta_{res}^*)\Psi(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\, \Phi^*(z^*)dz^* \tag{5.2}$$

где δ^*_{vc} – критическая деформация в направлении оси z, которую можно получить с помощью $\delta^*_{vc} = \delta_{bc}/(\sigma_z \cos\varphi)$; $d^*_{\min}$ – минимальное безразмерное расстояние между двумя шероховатыми поверхностями; δ^*_{res} – межфазная остаточная деформация, которая может быть выражена как $\delta^*_{res} = \delta^*_{vc}((\delta^*_{vm}/\delta^*_{vc}) - (\delta^*_{vm}/\delta^*_{vc})^{0.72} - (\delta^*_{vm}/\delta^*_{vc})^{0.31} + (\delta^*_{vm}/\delta^*_{vc})^{0.03})$ согласно модели ККЕ [5].

Диссипация межфазной энергии во время цикла может быть выражена формулой

$$E^*_n = \int_{-\delta^*_{vm}}^{\delta^*_{vm}} (F^* - F^*_{un}) d\delta^*_v \tag{5.3}$$

где δ^*_{vm} – максимальная деформация в направлении оси z, которая может быть получена согласно уравнению (3.10).

5.2. Нормальная средняя динамическая контактная жесткость. Нормальную контактную жесткость на этапе нагружения можно рассчитать по формуле

$$\begin{aligned} K^* = K^*_e + K^*_p = \eta A_n \int_{d^*}^{d^*+\delta^*_{vc}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} K^*_{ie} \Psi(\varphi,\theta) \sin\varphi d\varphi d\theta \Phi^*(z^*) dz + \\ + \eta A_n \int_{d^*+\delta^*_{vc}}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} K^*_{ip} \Psi(\varphi,\theta) \sin\varphi d\varphi d\theta \Phi^*(z^*) dz \end{aligned} \tag{5.4}$$

а нормальная контактная жесткость на этапе разгрузки может быть получена с помощью

$$\begin{aligned} K^*_{un} = K^*_{e_un} + K^*_{p_un} = \eta A_n \int_{d^*}^{d^*_{\min}+\delta^*_{vc}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} K^*_{ie_un} \Psi(\varphi,\theta) \sin\varphi d\varphi d\theta \Phi^*(z^*) dz + \\ + \eta A_n \int_{d^*_{\min}+\delta^*_{vc}}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2b} K^*_{ip_un} H(\delta^*_v - \delta^*_{res}) \Psi(\varphi,\theta) \sin\varphi d\varphi d\theta \Phi^*(z^*) dz \end{aligned} \tag{5.5}$$

Нормальная средняя динамическая контактная жесткость во время цикла может быть рассчитана следующим образом:

$$K^*_d = \frac{1}{T} \int_0^T (K^* + K^*_{un}) dt \tag{5.6}$$

5.3. Эквивалентное демпфирование вязкого контакта. Систему стыковых поверхностей станка можно рассматривать как систему с одной степенью свободы с вязким демпфированием. Безразмерное эквивалентное демпфирование вязкого контакта C^*_n можно рассчитать по формуле

$$C^*_n = \frac{E^*_n}{\pi\omega(\delta^*_{vm})^2} \tag{5.7}$$

6. Эксперименты по моделированию. Чтобы выявить влияние топографии поверхности и свойств материала на межфазную контактную жесткость и демпфирование контакта, было проведено моделирование со следующими параметрами.

Нормальный статический средний интервал и амплитуда динамического среднего расстояния между двумя шероховатыми поверхностями равны $d^*_s = 0.2$ и $d^*_m = 0.9$ соответственно. Частота вибрации $f = 100$ Гц. Модуль Юнга $E_1 = E_2 = 2.07 \times 10^{11}$ Па;

Таблица 1. Топографические параметры поверхности и показатели пластичности

Показатели пластичности ψ	σ_z/R	$\beta = \eta\sigma_z R$
0.4	7.4×10^{-5}	0.0296
0.5	8.41×10^{-5}	0.0336
0.6	9.6×10^{-5}	0.0384
0.7	1.11×10^{-4}	0.0444

твердость по Бринеллю $H = 2\times10^9$ Па; коэффициент Пуассона $v_1 = v_2 = 0.29$. Кроме того, номинальная площадь контакта принимается равной $A_n = 3\times10^{-5}\ m^2$. Диапазон значений индекса пластичности от 0.5 до 2.5 был рассчитан из соответствующих значений β и σ_z/R согласно следующему определению [3]: $\psi = (2E/1.5\pi kH)(\sigma_z/R)^{1/2}(1 - -3.717 \times 10^{-4}/\beta^2)^{1/4}$, а индекс пластичности в диапазоне от 0.4 до 0.7 приведен в таблице 1. Коэффициент среднего контактного давления k принят равным 0.8. Из уравнения показателя пластичности видно, что показатель пластичности в первую очередь зависит от топографии поверхности и свойств материала. Более гладкие и твердые поверхности имеют более низкие показатели пластичности.

В табл. 1 σ – стандартное отклонение высоты поверхности, η – поверхностная плотность неровностей и R – радиус кривизны неровностей.

6.1. Эксперименты по моделированию межфазной нормальной контактной силы. На рис. 5, a показана зависимость между безразмерной нормальной контактной силой на границе раздела F^* и стандартной дисперсией углов контактной неровности σ_φ. Нормальная контактная сила F^* постепенно нелинейно уменьшается с увеличением σ_φ, потому что область контакта с большим σ_φ имеет плохую степень согласования между неровностями на границе области.

Рисунок 5, b показывает влияние стандартной дисперсии σ_θ контактных азимутальных углов неровностей на нормальную контактную силу F^*, которая косвенно отражает влияние межфазной контактной анизотропии на нормальную контактную си-

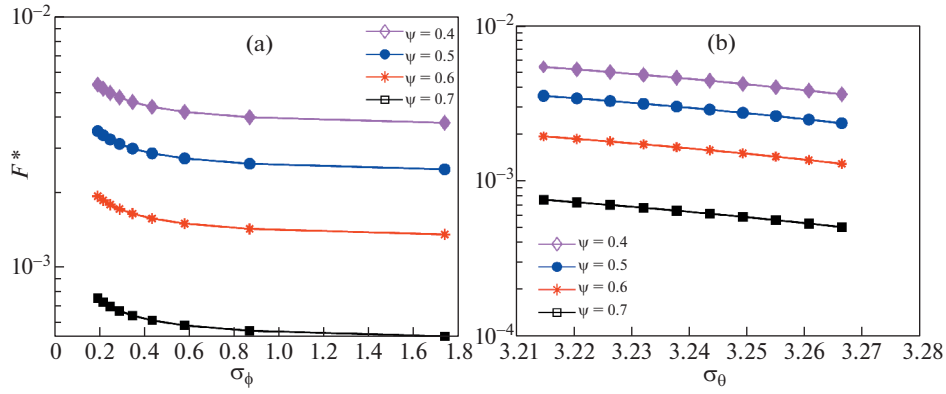


Рис. 5. Влияние стандартной дисперсии неровностей контактных (азимутальных) углов на нормальную контактную силу (a) и на σ_θ (b).

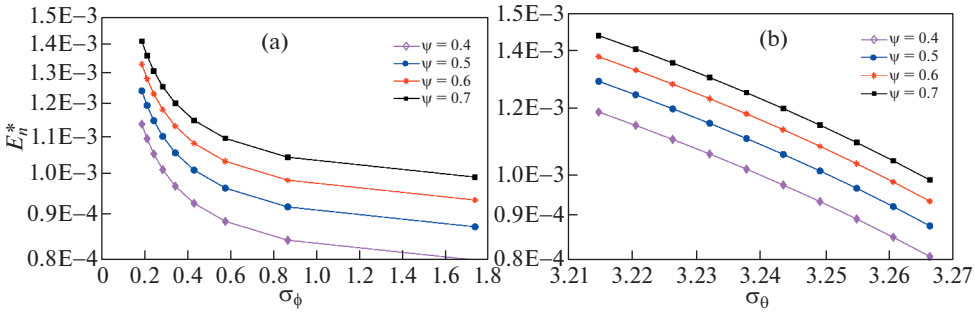


Рис. 6. Влияние стандартной дисперсии контактных (азимутальных) углов неровностей на нормальное рассеивание контактной энергии: влияние (a) σ_φ, (b) влияние σ_θ.

лу F^*. Нормальная контактная сила F^* постепенно уменьшается с увеличением σ_θ, т.е. нормальная контактная сила постепенно уменьшается по мере того, как область контакта становится более изотропной. Причина в том, что контактные силы неровностей становятся более дискретными с увеличением σ_θ. Нормальная контактная сила F^* с более высоким показателем пластичности ψ имеет меньшее значение, потому что шероховатая поверхность с более высоким показателем пластичности представляет собой более грубую или более мягкую поверхность. Следовательно, деформации неровностей имеют преимущественно пластический характер. И наоборот, более гладкие и более твердые поверхности имеют более низкие показатели пластичности ψ, нормальное контактное усилие между двумя шероховатыми поверхностями больше.

6.2. Эксперименты по моделированию диссипации энергии нормального контакта. На рис. 6 , a показана зависимость между диссипацией энергии нормального контакта E_n^* и стандартной дисперсией углов контакта неровностей σ_φ. Диссипация нормальной контактной энергии нелинейно уменьшается с увеличением σ_φ, потому что количество контактных неровностей уменьшается с увеличением σ_φ, так что нормальная контактная диссипация энергии уменьшается.

На рис. 6, b показано соотношение между нормальным рассеиванием энергии контакта E_n^* и стандартными отклонениями азимутальных углов неровностей контакта σ_θ. Нормальная контактная диссипация энергии E_n^* уменьшается по мере того, как область контакта становится более изотропной, потому что нормальная контактная сила неровности изотропной границы раздела более дискретна по сравнению с анизотропной границей раздела, так что нормальная контактная диссипация энергии уменьшается. Диссипация контактной энергии E_n^* с более высоким показателем пластичности ψ имеет большее значение, потому что площадь петли гистерезиса нагрузки и разгрузки контактной силы больше с более высоким показателем пластичности ψ.

6.3. Эксперименты по моделированию нормальной контактной жесткости. На рис. 7, a показана зависимость между нормальной контактной жесткостью K_n^* и стандартной дисперсией краевого угла неровности σ_φ. Нормальная контактная жесткость K_n^* нелинейно уменьшается с увеличением σ_φ, потому что количество контактных неровностей уменьшается с увеличением σ_φ, так что нормальная контактная жесткость уменьшается.

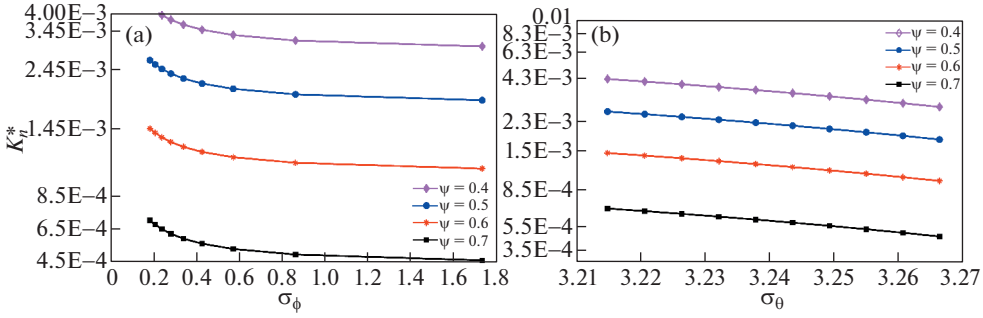


Рис. 7. Влияние стандартной дисперсии контактных (азимутальных) углов неровностей на нормальную контактную жесткость: влияние (a) σ_φ, (b) влияние σ_θ.

На рис. 7, b показано влияние стандартных отклонений контактных азимутальных углов неровностей σ_θ на нормальную контактную жесткость K_n^*. Нормальная контактная жесткость на поверхности раздела уменьшается линейно с увеличением стандартной дисперсии азимутальных углов контакта неровностей σ_θ, т.е. нормальная контактная жесткость линейно уменьшается с увеличением границы раздела, как правило, более изотропной. Причина в том, что с увеличением σ_θ контактная сила неровностей становится более дискретной. Нормальная контактная жесткость K_n^* с более низким показателем пластичности ψ имеет большее значение, потому что более гладкие и более твердые поверхности имеют более низкие показатели пластичности ψ, нормальная контактная жесткость больше между двумя шероховатыми поверхностями. Следовательно, деформации неровностей в основном имеют упругий характер.

6.4. Эксперименты по моделированию нормального контактного демпфирования. На рис. 8, a показана зависимость между демпфированием нормального контакта C_n^* и стандартной дисперсией углов контакта неровностей σ_φ. Демпфирование нормального контакта нелинейно увеличивается с увеличением σ_φ, потому что степень согласования между неровностями на границе раздела хуже с увеличением σ_φ. Рис. 8, b показывает влияние стандартных отклонений азимута контакта неровностей σ_θ на демпфирование нормального контакта C_n^*. Демпфирование нормального контакта постепенно увеличивается с увеличением σ_θ, т.е. увеличение демпфирования нормального контакта с границей раздела имеет тенденцию быть более изотропным. Причина в том, что контактная сила неровностей становится более дискретной с увеличением σ_θ, что вызывает уменьшение деформации неровностей, и уменьшение градиента скорости деформации неровностей больше, чем уменьшение градиента скорости диссипации энергии. Тогда эквивалентное вязкое демпфирование увеличивается с увеличением σ_θ. Нормальное контактное демпфирование C_n^* с более высоким показателем пластичности ψ имеет большее значение, потому что шероховатая поверхность с более высоким показателем пластичности ψ более мягкая и шершавая, деформации контактной шероховатости в основном имеют пластический характер.

6.5. Сравнение с эквивалентными контактными моделями. При $\sigma_\varphi = 0.4$, $\sigma_\theta = 3.22$, $\psi = 0.5$, $f = 100$ и $d_m = 0.9$ были выявлены отношения между нормальной контактной силой F^*, диссипацией контактной энергии E_n^*, контактной жесткостью K_n^* и демпфированием C_n^*; результаты, полученные при помощи предлагаемой модели, были

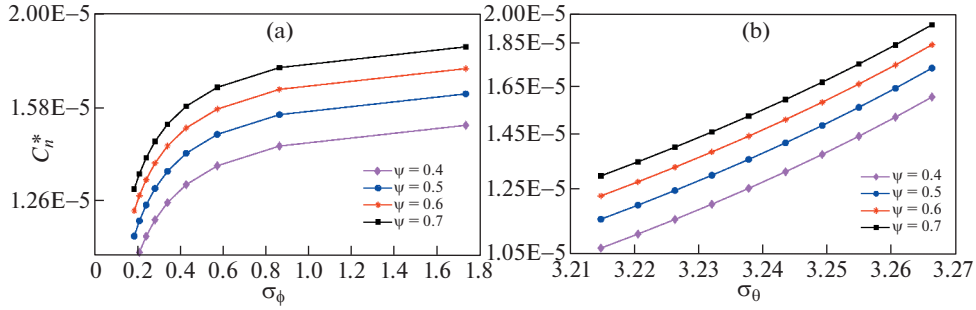


Рис. 8. Влияние стандартной дисперсии неровностей контактных (азимутальных) углов на нормальное контактное демпфирование: влияние (a) σ_φ, (b) влияние σ_θ.

сравнены с традиционными контактными моделями. Следует отметить, что классические эквивалентные модели контактов не вычисляют диссипацию энергии межфазного контакта, жесткость контакта и демпфирование контакта, поэтому эти результаты рассчитываются системой с одной степенью свободы с вязким демпфированием, которые аналогичны предлагаемой модели. На рис. 9, a показано сравнение нормальных контактных сил F^* между предлагаемой моделью и классическими эквивалентными моделями контакта. Нормальная контактная сила предложенной модели больше, чем контактная сила модели JG, но меньше, чем контактная сила модели Etsion [4], модели CEB и модели SF, потому что предлагаемая модель учитывает эффект контакта неровностей плечом к плечу и влияние взаимодействия неровностей. Плотный контакт неровностей приведет к уменьшению нормальной контактной силы из-за бокового контакта неровностей, а взаимодействие неровностей приведет к увеличению нормальной контактной силы в соответствии с моделью ZMC. На рис. 9 (b) приведено сравнение диссипации энергии нормального контакта между предлагаемой моделью и эквивалентными моделями контактов. Диссипация контактной энергии в предложенной модели больше, чем в других, что правдоподобно, поскольку классические модели не учитывают скольжение–прилипание и взаимодействие между неровностями.

На рис. 9, c сравнивается контактная жесткость предложенной модели с жесткостью некоторых традиционных моделей. Из графиков видно, что жесткость предлагаемой модели меньше жесткости некоторых традиционных моделей, что можно объяснить эффектом плотного контакта неровностей и взаимодействием между соседними неровностями. На рис. 9, d сравнивается модель нормального контакта предложенной модели с некоторыми классическими моделями, и показано, что демпфирование нормального контакта предложенной модели больше, чем демпфирование других моделей. В предложенную модель включена диссипация энергии трения плотного контакта, которая не рассматривается в других моделях.

7. Заключение. Предложена физическая модель, описывающая контактную жесткость и демпфирование между анизотропными шероховатыми поверхностями, которая включает плотный контакт и взаимодействие соседних неровностей. С использованием статистических методов исследована нормальная контактная жесткость и демпфирование при задании параметров контакта σ_φ и σ_θ. Проанализировано влия-

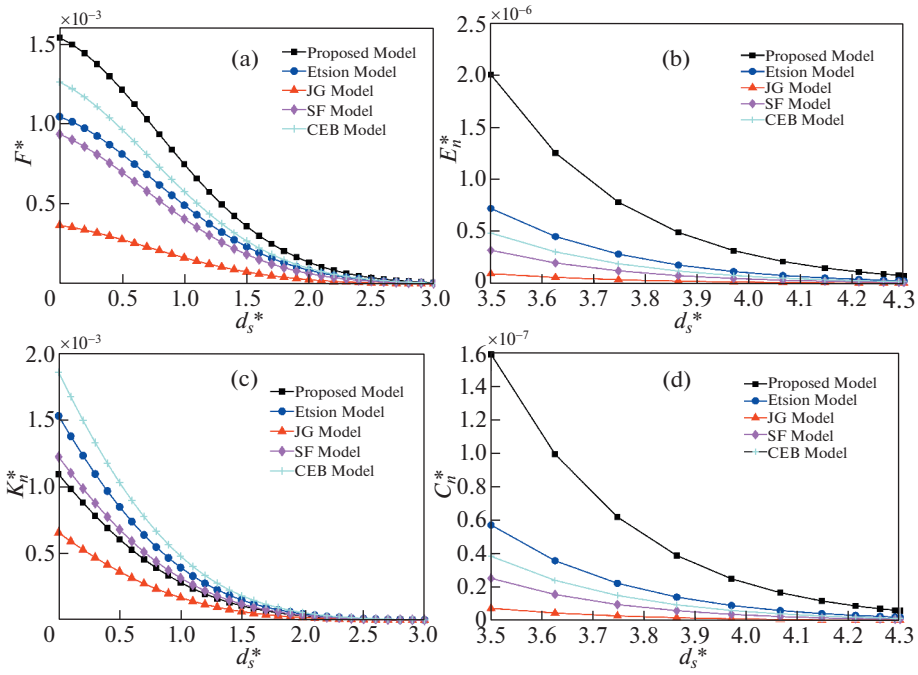


Рис. 9. Сравнение с эквивалентной контактной моделью: (a) нормальные контактные силы, (b) диссипации энергии нормального контакта, (c) нормальная контактная жесткость, (d) демпфирование нормального контакта.

ние контактных параметров σ_φ и σ_θ на поведение межфазного контакта. На основании проведенного исследования были сделаны следующие выводы:

(1) Межфазная контактная сила, диссипация контактной энергии и контактная жесткость в нормальном направлении нелинейно уменьшаются с увеличением стандартной дисперсии контактных углов неровностей и линейно уменьшаются с увеличением стандартной дисперсии контактных азимутальных углов неровностей. Такое поведение указывает на то, что нормальная несущая способность области контакта может быть улучшена за счет улучшения состояния контакта и увеличения анизотропии межфазного контакта.

(2) Демпфирование межфазного нормального контакта увеличивается нелинейно с увеличением стандартной дисперсии углов контакта неровностей и увеличением стандартной дисперсии контактных азимутальных углов неровностей. Можно сделать вывод, что степень согласования и анизотропия между поверхностями контакта имеет большое влияние на демпфирование нормального контакта на границе раздела, а демпфирование нормального контакта можно улучшить, отрегулировав степень согласования и анизотропию контакта. В работе решена контактная задача о взаимодействии между анизотропными шероховатыми поверхностями с использованием статистического метода в некоторой степени и выявлено влияние контактных углов неровностей и контактных азимутальных углов на нормальную контактную силу, нормальную контактную жесткость и демпфирование нормального контакта.

(3) Контактные шероховатые поверхности с более высоким показателем пластичности имеют меньшее нормальное контактное усилие и контактную жесткость, но

имеют большее рассеивание нормальной контактной энергии и контактное демпфирование.

Благодарности. Авторы выражают признательность за финансовую поддержку, предоставленную Национальным фондом естественных наук Китая (№ 52005401), Китайским фондом постдокторантуры (№ 2019M663782), Проектом фундаментальных исследований естественных наук Шэньси (№ 2020JQ-629), Специальным научно-исследовательским проектом Департамента образования провинции Шэньси (№ 20JK0800), Открытым проектом Государственной ключевой лаборатории энергосистем тракторов (№ AKT2020002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bush A.W., Gibson R.D., Keogh G.P.* Strongly anisotropic rough surfaces // J. Tribol. 1979. V. 101. № 1. P. 15–20.
2. *Greenwood J.A., Williamson J.B.P.* Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London. 1966. V. 295. № 1442. P. 300–319.
3. *Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B.* An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces // Asme J. Trib. 1987. V. 109. № (2). P. 257–263.
4. *Kogut L., Etsion I.* A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces // Modell. Simul. Eng. 2011. № 3. P. 383–390.
5. *Kadin Y., Kligerman Y., Etsion I.* Unloading an elastic–plastic contact of rough surfaces // J. Mech. Phys. Solids 2006. V. 54. № 12. P. 2652–2674.
6. *Jackson R.L., Green I.* A finite element study of elastoplastic hemispherical contact against a rigid flat // J. Tribol. 2005. V. 127. № 2. P. 343–354.
7. *Jackson R.L., Green I.* A statistical model of elastoplastic asperity contact between rough surfaces // Tribol. Int. 2006. V. 39. № 9. P. 906–914.
8. *Gorbatikh L., Popova M.* Modeling of a locking mechanism between two rough surfaces under cyclic loading // Int. J. Mech. Sci. 2006. V. 48. № 9. P. 1014–1020.
9. *Abdo J., Farhang K.* Elastic–plastic contact model for rough surfaces based on plastic asperity concept // Int. J. Nonlin. Mech. 2005. V. 40. № 4. P. 495–506.
10. *Sepehri A., Farhang K.* On elastic interaction of nominally flat rough surfaces // J. Tribol. 2008. V. 130. № 1. P. 125–128.
11. *Sepehri A., Farhang K.* Closed-form equations for three dimensional elastic-plastic contact of nominally flat rough surfaces // J. Tribol. 2009. V. 131. № 4. P. 041402-1-8.
12. *Zhao B., Zhang S., Hai Y.* Loading–unloading normal stiffness model for power-law hardening surfaces considering actual surface topography // Tribol. Int. 2015. V. 90. № 2015. P. 332–342.
13. *Jäger J.* Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift // Arch. Appl. Mech. 1995. V. 65. № 7. P. 478–487.
14. *Jackson R.L., Duvvuru R.S., Mahajan M.* An analysis of elasto-plastic sliding spherical asperity interaction" Wear. 2007. V. 262. № 1–2. P. 210–219.
15. *Mulvihill D.M., Kartal M.E., Hills D.A.* An elastic–plastic asperity interaction model for sliding friction // Tribol. Int. 2011. V. 44. № 12. P. 1679–1694.
16. *Shi X., Zou Y., Fang H.* Numerical investigation of the three-dimensional elastic-plastic sloped contact between two hemispheric asperities // J. Appl. Mech. 2016. V. 83. № 10. P. 101004-1-8.
17. *Faulkner A., Arnell R.D.* The development of a finite element model to simulate the sliding interaction between two, three-dimensional, elastoplastic, hemispherical asperities // Wear. 2000. V. 242. № 1. P. 114–122.
18. *Zhao Y., Chang L.* A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces // J. Tribol. 2001. V. 123. № 4. P. 857–864.
19. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M.* Inclusion of "interaction" in the Greenwood and Williamson contact theory // Wear. 2008. V. 265. № 5–6. P. 729–734.
20. *Chandrasekar S., Eriten M., Polycarpou A.* An improved model of asperity interaction in normal contact of rough surfaces // J. Appl. Mech. 2013. V. 80. № 1. P. 011025-1-8.
21. *Greenwood J.A., Tripp J.H.* The contact of two nominally flat rough surfaces // P. I. Mech. Eng. 1970. V. 185. № 1970. P. 625–634.

22. *Whitehouse D.J., Archard J.F.* The properties of random surfaces of significance in their contact // P. Roy. Soc. A. 1970. V. 316. № 1524. P. 97–121.
23. *Longuethiggins M.S.* Statistical properties of an isotropic random surface // Philos. T. R. Soc. A. 1957. V. 250. № 975. P. 157–174.
24. *Nayak P.R.* Random process model of rough surfaces // J. Lubr. Technol. 1971. V. 93. № 3. P. 398–406.
25. *Nayak P.R.* Random process model of rough surfaces in plastic contact // Wear. 1973. V. 26. № 3. P. 305–333.
26. *Mccool J.I.* Predicting micro fracture in ceramics via a micro contact model // J. Tribol. 1986. V. 108. № 3. P. 380–386.
27. *Whitehouse D.J., Phillips M.J.* Two-dimensional discrete properties of random surfaces // Philos. T. R. Soc. B. 1982. V. 305. № 1490. P. 441–468.
28. *Whitehouse D.J., Phillips M.J.* Sampling in a two-dimensional plane // J. Phys. A: Gen. Phys. 1985. V. 18. № 13. P. 2465–2477.
29. *Buczkowski R., Kleiber M.* Elasto-plastic statistical model of strongly anisotropic rough surfaces for finite element 3D-contact analysis // Comput. Method. Appl. M. 2016. V. 195. № 37. P. 5141–5161.
30. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi I; II; III // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. VI. 1938. Ser. 27. 342–348; 434–436; 474–478.
31. *Mindlin R.D., Deresiewicz H.* Elastic spheres in contact under varying oblique forces // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1953. V. 20. № 3. P. 327–344.
32. *Eriten M., Polycarpou A.A., Bergman L.A.* Physics-based modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces // Int. J. Solids. Struct. 2011. V. 48. № 10. P. 1436–1450.
33. *Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I.* Elastic–plastic spherical contact under combined normal and tangential loading in full stick // Tribol. Lett. 2007. V. 25. № 1. P. 61–70.
34. *Zhao Y., Maietta D.M., Chang L.* An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow // J. Tribol. 2000. V. 122. № 1. P. 86–93.
35. *Jeng Y.R., Peng S.R.* Elastic-plastic contact behavior considering asperity interactions for surfaces with various height distributions // J. Tribol. 2006. V. 128. № 2. P. 665–697.
36. *Knowles J.K.* On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity // Arch. Ration. Mech. An. 1966. V. 21. № 1. P. 1–22.
37. *Love A.E.H.* The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary // Philos. Trans. R. Soc. London. 1929. V. 228. № 659–669. P. 377–420.
38. *Misra A.* Mechanist model for contact between rough surfaces // J. Eng. Mech. 2011. V. 123. № 5. P. 45352–45357.
39. *Misra A., Huang S.* Effect of loading induced anisotropy on the shear behavior of rough interfaces // Tribol. Int. 2011. V. 44. № 5. P. 627–634.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 142–150

УДК 621.391,629.78

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

© 2021 г. П. А. Кучеренко[a,*], С. В. Соколов[b]

[a] *АО "НИИАС" (Ростовский филиал), Ростов-на-Дону, Россия*
[b] *Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
**e-mail: pavelpost83@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.06.2020 г.
После доработки 29.10.2020 г.
Принята к публикации 28.12.2020 г.

Решена задача аналитического синтеза функций, аппроксимирующих зависимости длины геодезической линии от навигационных параметров ее начальной и конечной точек для сфероида и сферы Земли. Аппроксимирующие длину геодезической линии зависимости определены как для приведенной, так и для геодезической широт. Получены выражения для азимута конечной точки (при известной широте начальной точки), не требующие знания долготы конечной точки и длины геодезической линии. Найденные решения позволяют существенно сократить вычислительные затраты при решении различных классов задач навигации и геодезии.

Ключевые слова: эллипсоид, геодезическая задача, длина геодезической линии, аппроксимация функциональной зависимости

DOI: 10.31857/S0572329921040073

В связи с постоянным развитием высокоточных методов и систем навигации оказывается весьма актуальной проблема высокоточного описания параметров траекторий движения объектов на поверхности сфероидальной Земли. Решение этой проблемы для большинства навигационных приложений сводится к решению частного случая геодезической задачи в следующей формулировке: даны геодезические координаты – широта B и долгота L, начальной (B_0, L_0) и конечной точек (B_1, L_1) движения объекта, начальный (прямой) азимут A_0 движения, требуется найти кратчайшее расстояние S между этими точками (длину геодезической линии), а также конечный (обратный) азимут A_1 геодезической линии в конечной точке. В настоящее время данная задача решается, в основном, использованием итеративных методов при численном решении системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию геодезических линий на сфероиде [1, 2]. Это приводит к значительным временным и вычислительным затратам, что для систем навигации, функционирующих в реальном времени, представляется неприемлемым.

В связи с этим, целью данной статьи является построение аналитической функциональной зависимости, аппроксимирующей с высокой точностью решение указанной геодезической задачи, т.е. связь навигационных параметров B_0, L_0, B_1, L_1, A_0 с длиной геодезической линии S и обратным азимутом A_1. Синтез данной зависимости будем рассматривать для геодезической долготы и геодезической и приведенной широт, используя следующие обозначения переменных: A – текущий азимут геодезической линии, B – геодезическая широта, u – приведенная широта, L – геодезическая долгота,

E – первый эксцентриситет, e – второй эксцентриситет, a, b – большая и малая полуоси эллипсоида, ds – дифференциал линии на эллипсоиде. Для эллипсоида Красовского:

$$E^2 = 0.0066934216, \quad e^2 = 0.0067385254, \quad c = \frac{a^2}{b} = 6399698.9018 \text{ м},$$

$$M = \frac{c}{\sqrt{(1 + e^2 \cos^2 B)^3}}, \quad N = \frac{c}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}$$

Для решения поставленной задачи используем известные уравнения связи навигационных переменных A, B, L, справедливые для любых кривых на сфероиде [1]:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B} \tag{1}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} \tag{2}$$

и только для геодезической линии [1]:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\mathrm{tg} B \sin A}{N} \tag{3}$$

Предварительно найдем зависимость текущего азимута геодезической линии A от геодезической широты B, для чего разделим уравнение (3) на уравнение (2):

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\mathrm{tg} A \, \mathrm{tg} B}{1 + e^2 \cos^2 B}$$

Данное уравнение легко интегрируется методом разделения переменных:

$$\int_{A_0}^{A} \mathrm{ctg} A dA = \int_{B_0}^{B} \frac{\mathrm{tg} B}{1 + e^2 \cos^2 B} dB \tag{4}$$

где A и A_0 – текущее и начальное значения азимута, соответственно, B и B_0 – текущее и начальное значение геодезической широты.

Интеграл в левой части (4) – табличный, а в правой – находится методом замены переменных $e \cos B = X$:

$$\int \frac{e \sin B}{e \cos B (1 + e^2 \cos^2 B)} dB = -\int \frac{dX}{X(1 + X^2)} = \ln \sqrt{1 + X^{-2}} = \ln \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}}$$

Окончательно имеем:

$$\ln \sin A - \ln \sin A_0 = \ln \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} - \ln \sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}$$

или

$$\ln \frac{\sin A}{\sin A_0} = \ln \frac{\sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}}}{\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}}$$

Из последнего выражения можно получить равенство

$$\sin A = \sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} C_0, \quad C_0 = \frac{\sin A_0}{\sqrt{1 + [e \cos B_0]^{-2}}}$$

которое определяет зависимость текущего азимута геодезической линии от геодезической широты:

$$A = \arcsin(\sqrt{1 + [e \cos B]^{-2}} \; C_0) \tag{5}$$

Остановимся на найденной зависимости подробнее. Помимо ее дальнейшего использования для решения поставленной задачи, зависимость (5) позволяет решить задачу определения азимута A_1 конечной точки с широтой B_1 геодезической линии конечной длины *без* традиционного знания долготы конечной точки и длины геодезической линии (зная только параметры начальной точки A_0, B_0):

$$A_1 = \arcsin(\sqrt{1 + [e\cos B_1]^{-2}}\ C_0)$$

Интересно также сравнить полученное выражение с уравнением Клеро [1]:

$$N\cos B\sin A = \frac{c}{\sqrt{1 + e^2\cos^2 B}}\cos B\sin A = C$$

Исходя из данного уравнения, выражение $\sin A$ может быть представлено в виде:

$$\sin A = \frac{eC\sqrt{1 + e^2\cos^2 B}}{e\ \ \cos B\ \ c} = \sqrt{1 + [e\cos B]^{-2}}\,\frac{eC}{c}$$

откуда сравнением с (5) получаем:

$$\frac{eC}{c} = \frac{\sin A_0}{\sqrt{1 + [e\cos B_0]^{-2}}}$$

и сразу находим различные варианты выражения постоянной Клеро:

$$C = \frac{c\ \sin A_0}{e\sqrt{1 + [e\cos B_0]^{-2}}} = \frac{a^2\sin A_0}{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{1 + [e\cos B_0]^{-2}}} = \frac{\frac{a^2}{b}\ \sin A_0}{\sqrt{e^2 + [\cos B_0]^{-2}}}$$

существенно расширяющие диапазон ее традиционного представления, приведенный в [1].

Для дальнейшего решения задачи из полученного выражения $\sin A$ найдем $\cos A$:

$$\cos A = \sqrt{1 - (1 + [e\cos B]^{-2})C_0^2} = \sqrt{C_0^{-2} - 1 - [e\cos B]^{-2}}\ \ C_0$$

и подставим его в уравнение (2):

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{\sqrt{C_0^{-2} - 1 - (e\cos B)^{-2}}C_0}{\frac{c}{\sqrt{(1 + e^2\cos^2 B)^3}}} = \frac{C_0\sqrt{(P[e\cos B]^2 - 1)(1 + e^2\cos^2 B)^3}}{(e\cos B)c}$$

$$P = C_0^{-2} - 1$$

Полученное уравнение интегрируется методом разделения переменных

$$\int_0^S ds = \int_{B_0}^{B} \frac{(e\cos B)c}{C_0\sqrt{(P[e\cos B]^2 - 1)(1 + e^2\cos^2 B)^3}}\,dB \tag{6}$$

но для возможности аналитического вычисления интеграла в левой части необходима его адекватная аппроксимация.

Для получения высокоточной аналитической аппроксимации зависимости $S = f(B)$ проведем предварительно анализ зависимости $S = f(u)$, где u – приведенная широта, связанная с геодезической широтой известным соотношением [1]:

$$\sin u = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2\cos^2 B}} \tag{7}$$

Для приведенной широты уравнения (1)–(3) трансформируются следующим образом [1]:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{a\cos u}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{a}\cos A \tag{8}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{v}{a}\operatorname{tg}u\sin A \tag{9}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - E^2\cos^2 u}}$$

Предварительно найдем зависимость текущего азимута геодезической линии A от приведенной широты u. Используя уравнение Клеро для приведенной широты [1]

$$\cos u \cdot \sin A = \Phi$$

где $\Phi = \cos u_*$ или $\Phi = \sin A_*$, u_* – приведенная широта наиболее удаленной от экватора точки геодезической линии, A_* – азимут геодезической линии в точке пересечения ее с экватором, имеем:

$$\sin A = \frac{\Phi}{\cos u} \Rightarrow A = \arcsin\frac{\Phi}{\cos u}$$

откуда также вытекает соответствующее выражение для $\cos A$:

$$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi}{\cos u}\right)^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}{\cos u} \tag{10}$$

Данные соотношения могут быть получены и другим путем – делением уравнения (9) на (8) с последующим интегрированием полученного дифференциального уравнения:

$$\frac{dA}{du} = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}u \Rightarrow \int_{A_0}^{A}\operatorname{ctg}A dA = \int_{u_0}^{u}\operatorname{tg}u\, du \Rightarrow \ln\frac{\sin A}{\sin A_0} = \ln\frac{\cos u_0}{\cos u}$$

где u_0 – приведенная широта начальной точки геодезической линии; A_0 – азимут геодезической линии в начальной точке, что приводит к ранее приведенному соотношению:

$$\sin A = \frac{\sin A_0\cos u_0}{\cos u} = \frac{\Phi}{\cos u}$$

в котором постоянная Клеро уже приобретает новое выражение:

$$\sin A_0\cos u_0 = \Phi$$

Здесь необходимо отметить, что данное выражение постоянной Клеро (в отличие от приведенных выше традиционных выражений) позволяет решить задачу определения азимута A_1 конечной точки с приведенной широтой u_1, зная только параметры начальной точки A_0, u_0:

$$A_1 = \arcsin\frac{\sin A_0\cos u_0}{\cos u_1}$$

Для дальнейшего решения поставленной задачи подставим найденное выражение для $\cos A$ в уравнение (8):

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{a\sqrt{1 - E^2\cos^2 u}}\frac{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}{\cos u}, \quad \frac{ds}{du} = \frac{a\cos u\sqrt{1 - E^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}$$

Данное уравнение интегрируется методом разделения переменных

$$\int_0^S ds = a\int_{u_0}^{u} \frac{\cos u\sqrt{1 - E^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}}\,du \tag{11}$$

но для возможности аналитического вычисления интеграла в левой части необходима его соответствующая аппроксимация.

Рассмотрим с этой целью возможность упрощения его подынтегрального выражения разложением в ряд функции $\sqrt{1 - E^2\cos^2 u}$ по аргументу $E^2\cos^2 u$ (в точке u_l) с точностью до $(E^2\cos^2 u)^3$, что, как показано далее, обеспечивает очень высокую точность аппроксимации (11) (около 10^{-5} метра):

$$\begin{gathered}\sqrt{1 - E^2\cos^2 u} \approx \sqrt{1 - E^2\cos^2 u_l} - \frac{E^2}{2\sqrt{1 - E^2\cos^2 u_l}}(\cos^2 u - \cos^2 u_l) - \\ - \frac{E^4}{8\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^3}}(\cos^2 u - \cos^2 u_l)^2 - \frac{E^6}{16\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^5}}(\cos^2 u - \cos^2 u_l)^3 = \\ = \alpha_0 + \alpha_1\cos^2 u + \alpha_2\cos^4 u + \alpha_3\cos^6 u,\end{gathered} \tag{12}$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0,\ldots,3$ вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - E^2\cos^2 u_l} + \frac{E^2\cos^2 u_l}{2\sqrt{1 - E^2\cos^2 u_l}} - \frac{E^4\cos^4 u_l}{8\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^3}} + \frac{E^6\cos^6 u_l}{16\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^5}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{E^2}{2\sqrt{1 - E^2\cos^2 u_l}} + \frac{E^4\cos^2 u_l}{4\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^3}} - \frac{3E^6\cos^4 u_l}{16\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^5}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{E^4}{8\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^3}} + \frac{3E^6\cos^2 u_l}{16\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^5}}$$

$$\alpha_3 = -\frac{E^6}{16\sqrt{(1 - E^2\cos^2 u_l)^5}}$$

При этом заметим, что для районов низких и высоких широт коэффициенты выражения (12) существенно упрощаются:

– для района высоких широт – $u_0 = \frac{\pi}{2}$ (при выборе точки линеаризации в начале интервала, т.е. при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{E^2}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{E^4}{8}, \quad \alpha_3 = -\frac{E^6}{16}$$

– для района низких широт – $u_0 = 0$ (также при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - E^2} + \frac{E^2}{2\sqrt{1 - E^2}} - \frac{E^4}{8\sqrt{(1 - E^2)^3}} + \frac{E^6}{16\sqrt{(1 - E^2)^5}} - \frac{5E^8}{128\sqrt{(1 - E^2)^7}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{E^2}{2\sqrt{1-E^2}} + \frac{E^4}{4\sqrt{(1-E^2)^3}} - \frac{3E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} + \frac{5E^8}{32\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{E^4}{8\sqrt{(1-E^2)^3}} + \frac{3E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} - \frac{15E^8}{64\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

$$\alpha_3 = -\frac{E^6}{16\sqrt{(1-E^2)^5}} + \frac{5E^8}{32\sqrt{(1-E^2)^7}}$$

Тогда уравнение (11) приобретает вид:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \frac{S}{a}$$

Первый из интегралов в левой части уравнения при замене переменных является табличным:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\alpha_0 \cos u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \alpha_0 \int_{u_0}^{u} \frac{d(\sin u)}{\sqrt{1-\Phi^2-\sin^2 u}} = \alpha_0 \left(\arcsin \frac{\sin u}{\sqrt{1-\Phi^2}} - \arcsin \frac{\sin u_0}{\sqrt{1-\Phi^2}} \right) =$$
$$= \alpha_0 \left(\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0) \right), \quad k = \frac{1}{\sqrt{1-\Phi^2}}$$

Остальные интегралы

$$\alpha_i \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du = \alpha_i k \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du, \quad i = 1, 2, 3$$

могут быть определены из [3]:

$$k\alpha_1 \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^3 u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du = k\alpha_1 \left\{ \frac{\sin u \sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}{2k^2} + \frac{2k^2-1}{2k^3} \arcsin(k \sin u) \right\} \Bigg|_{u_0}^{u}$$

$$k\alpha_2 \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^5 u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du = k\alpha_2 \left\{ \frac{2k^2 \cos^2 u + 6k^2 - 3}{8k^4} \sin u \sqrt{1-k^2 \sin^2 u} + \right.$$
$$\left. + \frac{8k^4 - 8k^2 + 3}{8k^5} \arcsin(k \sin u) \right\} \Bigg|_{u_0}^{u}$$

$$k\alpha_3 \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^7 u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du =$$
$$= k\alpha_3 \left\{ \frac{8k^4 \sin^4 u - 2k^2(18k^2-5)\sin^2 u + 72k^4 - 54k^2 + 15}{48k^6} \sin u \sqrt{1-k^2 \sin^2 u} + \right.$$
$$\left. + \frac{16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5}{16k^7} \arcsin(k \sin u) \right\} \Bigg|_{u_0}^{u}$$

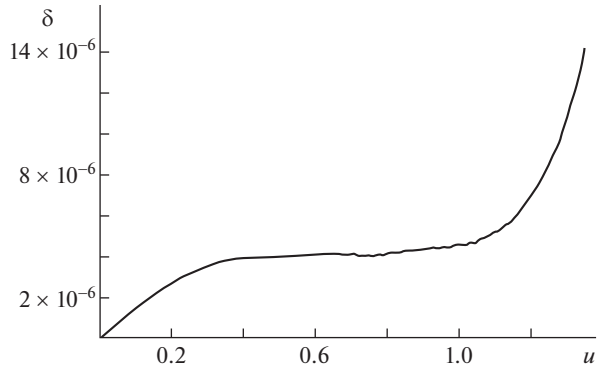


Рис. 1. Зависимость ошибки аппроксимации δ функции $S = f(u)$ при $u_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад, $u_l = 0.7$ рад

С учетом возможности представления в компактном виде суммы интегралов:

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \int_{u_0}^{u} \frac{\cos^{2i+1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \Phi^2}} du =$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4$$

где коэффициенты $\beta_i, i = 0, \ldots, 4$ вычисляются по следующим формулам:

$$\beta_0 = \frac{24\alpha_1 k^4 + 6\alpha_2(8k^2 - 3)k^2 + \alpha_3(72k^4 - 54k^2 + 15)}{48k^5}$$

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_3(18k^2 - 5) + 6k^2\alpha_2}{24k^3}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_3}{6k}$$

$$\beta_3 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(2k^2 - 1)8k^4 + \alpha_2(8k^4 - 8k^2 + 3)2k^2 + \alpha_3(16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5)}{16k^6}$$

$$\beta_4 = -(\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u_0 + \beta_2 \sin^4 u_0) \sin u_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0} - \beta_3 \arcsin(k \sin u_0)$$

Окончательно аппроксимация функциональной зависимости длины геодезической линии S от приведенной широты u имеет вид:

$$S = a \cdot ((\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4) \qquad (13)$$

Для оценки точности найденной аппроксимации (13) был проведен численный сравнительный анализ интеграла (11) с зависимостью (13).

На рис. 1 представлена зависимость ошибки аппроксимации δ (в метрах) функции $S = f(u)$, полученная путем сравнения значений аппроксимирующего выражения (13) и значений высокоточного численного решения уравнения (11), для параметров $u_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад при выборе точки линеаризации $u_l = 0.7$ рад.

Как показали результаты моделирования, вид представленной на рис. 1 зависимости является характерным для различных начальных значений A_0, u_0 и точки линеаризации u_l и подтверждает высокую точность полученной аналитической аппроксимации функции длины геодезической линии для земного эллипсоида.

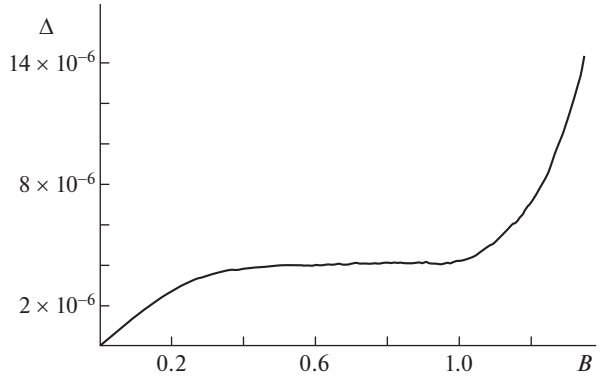


Рис. 2. Зависимость ошибки аппроксимации Δ функции $S = f(B)$ при $B_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад, $B_l = 0.7$ рад

Соответственно, для геодезической широты с учетом соотношения (7) искомая зависимость приобретает вид:

$$S = a \cdot \left(\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\sin^2 B}{1 + e^2 \cos^2 B} + \beta_2 \frac{\sin^4 B}{(1 + e^2 \cos^2 B)^2} \right) \times \right.$$
$$\times \frac{\sin B \sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B}}{1 + e^2 \cos^2 B} +$$
$$\left. + \beta_3 \arcsin \left(k \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \right) + \beta_4 \right) \tag{14}$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0, \ldots, 3$, $\beta_i, i = 0, \ldots, 4$ пересчитываются также с учетом соотношения (7) и выбранной точки линеаризации для геодезической широты B_l.

Для оценки точности данной аппроксимации геодезической широты был проведен ее сравнительный численный анализ с интегралом (6) для различных начальных значений A_0, B_0 и точек линеаризации B_l, который также показал высокую точность данной аппроксимации. В качестве иллюстрирующего это примера на рис. 2 представлена зависимость ошибки аппроксимации Δ (в метрах) функции $S = f(B)$, полученная путем сравнения значений аппроксимирующего выражения (14) и значений высокоточного численного решения уравнения (6), для аналогичных параметров $B_0 = 0$ рад, $A_0 = 0.2$ рад при выборе точки линеаризации $B_l = 0.7$ рад.

Полученные выше результаты интересно далее интерпретировать для сферы и сравнить их с уже известными [1, 2].

Рассмотрим сначала выражение текущего азимута геодезической линии (ортодромии) на сфере, вытекающее из (5) при $e = 0$ (в данном случае в качестве переменной B выступает уже географическая широта φ):

$$A = \arcsin \left(\sqrt{e^2 + [\cos \varphi]^{-2}} \frac{\sin A_0}{\sqrt{e^2 + [\cos \varphi_0]^{-2}}} \right) = \arcsin \left(\frac{\cos \varphi_0 \sin A_0}{\cos \varphi} \right) \tag{15}$$

или в виде интересного соотношения:

$$\frac{\sin A}{\sin A_0} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Из выражения (15) легко определяется выражение для азимута конечной точки ортодромии:

$$A_1 = \arcsin\left(\frac{\cos\varphi_0 \sin A_0}{\cos\varphi_1}\right)$$

которое может быть также получено из уравнения Клеро на сфере [1] и принципиально отличается от традиционного выражения азимута конечной точки, зависящего от значений долготы и широты как начальной, так и конечной точек (здесь требуется знание только начальных значений широты φ_0 и азимута A_0).

Аналогично, полагая $e = 0$, из уравнения (11) находим интегральную связь длины ортодромии S с параметрами ее начальной и конечной точек (в данном случае $u = \varphi$, $a = R$, R – радиус Земли):

$$\int_0^S ds = R\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \varphi^2}}\, d\varphi$$

откуда с учетом ранее проделанных вычислений имеем:

$$S = R\big(\arcsin(k\sin\varphi) - \arcsin\ \ (k\sin\varphi_0)\big) \tag{16}$$

Как и ранее с выражением для азимута, полученное из дифференциальных уравнений геодезической линии соотношение (16) не совпадает с традиционным выражением зависимости длины ортодромии S от широты φ, выведенной с использованием формул сферической тригонометрии [2]:

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 \cos S + \cos\varphi_0 \sin S \cos A_0$$

то есть

$$S = R\left(\arcsin\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi_0 + (\cos\varphi_0\cos A_0)^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\cos A_0}\right) \tag{17}$$

Т.к. получить аналитический вывод выражения (16) из (17) (и наоборот) представляется весьма затруднительным, то для проверки их совпадения было выполнено численное моделирование выражений (16) и (17) для целого ряда значений параметров начальной точки. Результаты численного эксперимента показали *полное* совпадение зависимостей (16) и (17).

Таким образом, полученные выше выражения представляют собой аналитическое решение поставленной задачи и могут быть эффективно использованы в практических расчетах с минимальными вычислительными затратами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.

2. *Серапинас Б.Б.* Геодезические основы карт. М.: Изд-во МГУ, 2001. 132 с.

3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 151–164

УДК 539.4

ОТКЛИК НЕЛОКАЛЬНЫХ И ФАЗОВЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ НА НАГРУЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ТИПА В ТЕОРИЯХ ТЕРМОУПРУГИХ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ

© 2021 г. Раджниш Кумар[a], Сачин Каушал[b,*], Викрам [b]

[a] *Университет Курукшетры, Курукшетра, Харьяна, Индия*

[b] *Школа химической инженерии и физических наук, Профессиональный университет Лавли – Пхагвара, Пенджаб, Индия*

**e-mail: sachin_kuk@yahoo.co.in*

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.
После доработки 11.12.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

Построена новая математическая модель диффузии с учетом термоупругих моментных напряжений (ТМН), в которой рассмотрены эффекты нелокального и двухфазного запаздывания. Это обобщение анализируется в процессе термомеханического нагружения. Основные уравнения упрощаются за счет использования методов преобразования Лапласа и Фурье. Для демонстрации предложенной модели учитываются нормальная и тепловая нагрузки линейного типа. Рассчитаны и графически проанализированы перемещения, напряжения, изменения температуры и химического потенциала. Также рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова: модифицированная моментная термоупругость, нелокальность, двухфазные запаздывания, преобразования Лапласа, преобразования Фурье, нормальная нагрузка линейного типа, тепловой источник

DOI: 10.31857/S0572329921040097

1. Введение. В нелокальной теории упругости напряженное состояние в точке является функцией деформации всех точек тела, тогда как классическая (локальная) теория упругости описывает напряженное состояние в данной точке посредством деформаций в той же точке. Нелокальная теория была разработана и опубликована в работах А.К. Эрингена [1–7], Д. Эделена [1, 8], К. Ло [8], Б. МакКея и М. Нарсимхана [9, 10]. Исчерпывающее исследование теории нелокальной упругости изложено в монографии А.К. Эрингена [11].

Нелокальный отклик и запаздывающий отклик среды схожи, как в пространстве, так и во времени. В работе [12] Д. Цзу объединил отклик нелокальной теплопроводности с однофазным запаздыванием и сравнил его с моделью, разработанной Б. Цао и З. Го [13] и З. Го и К. Хоу [14]. Д. Цзу и З. Го в [15] демонстрируют объединение нелокального отклика с моделью двухфазного запаздывания, предложенной Д. Цзу в работах [16, 17], и известной как новая теория, включающая оба эффекта (нелокального и запаздывающего отклика).

К. Шарма в [18] исследовал краевые задачи в обобщенной термоупругой диффундирующей среде. Влияние источников тепла и времени релаксации на распределение температуры в тканях изложено в [19]. К. Шарма и др. в [20] изучали плоские волны и фундаментальное решение в твердом теле с учетом электро-микро- растяжений. Коробление нанотрубок при неоднородной температуре на основе нелокальной термо-

упругости исследовано в [21]. А.Е. Абуэлригал в работе [22] показал влияние температурно-зависимых физических свойств и дробной (фрактальной) термоупругости на нелокальные нанотрубки.

Р. Кумар и соавт. в [23] провели переходный анализ нелокальной микростатической термоупругой толстой круглой пластины с фазовым запаздыванием. Р. Кумар и соавт. в [24] исследовали влияние источников теплового и химического потенциала в тонком пучке в ТМН с помощью модели термоупругой диффузии с трехфазным запаздыванием. В. Боржалилу и др. [25] представили явное соотношение для термоупругого демпфирования в нелокальных нанотрубках с учетом эффекта двухфазного запаздывания.

В этой статье исследуются нелокальные эффекты и эффекты фазового запаздывания, связанные с термомеханическими источниками при диффузии ТМН. Для исследования проблемы применяется метод интегрального преобразования. Подход был продемонстрирован на нормальной и тепловой нагрузках линейного типа. Результаты изображены графически, чтобы показать нелокальный эффект и эффект фазового запаздывания.

2. Основные уравнения. Исходя из работ [15, 26, 27], имеем

(i) Определяющие соотношения

$$t_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{1}{2} e_{kij} m_{lk,l} + \delta_{ij}[\lambda_0 e_{kk} - \gamma_1 T - \gamma_2 P] \tag{2.1}$$

$$m_{ij} = 2\alpha\chi_{ij} \tag{2.2}$$

(ii) Уравнение движения

$$\left(\lambda_0 + \mu + \frac{\alpha}{4}\Delta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left(\mu - \frac{\alpha}{4}\Delta\right)(\Delta\mathbf{u}) - \gamma_1 \nabla T - \gamma_2 \nabla P = \rho(1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

(iii) Уравнение теплопроводности

$$\left(1 - \zeta^2\Delta + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\gamma_1 T_0 \dot{e} + l_1 T_0 \dot{T} + T_0 d \dot{P}) = K\left(1 + \tau_t \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta T \tag{2.4}$$

(iv) Уравнение диффузии

$$\left(1 - \varsigma^2\Delta + \tau_u \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_u^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\gamma_2 \dot{e} + d \dot{T} + n \dot{P}) = D\left(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta P \tag{2.5}$$

Здесь $\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} + \omega_{j,i})$, $\omega_i = \frac{1}{2} e_{ipq} u_{q,p}$, где $\lambda_0 = \lambda - \frac{\beta_2^2}{b}$, $\gamma_1 = \beta_1 + \frac{a}{b}\beta_2$, $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{b}$, $l_1 = \frac{\rho C_e}{T_0} + \frac{a^2}{b}$, $d = \frac{a}{b}$, $n = \frac{1}{b}$.

В уравнениях (2.1)–(2.5), ξ, ζ, ς – нелокальные параметры, τ_q и τ_t – времена тепловой релаксации, где $\tau_q, \tau_t \geq 0$, и τ_u и τ_p – времена диффузионной релаксации где $\tau_u, \tau_p \geq 0$. $\beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, $\beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$. Здесь α_t, α_c соответствуют коэффициенту линейного теплового расширения и диффузионного расширения соответственно. Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор набла (градиента). Остальные символы имеют общепринятое значение.

3. Постановка задачи. Рассматривается однородное изотропное нелокальное диффундирующее ТМН тело с двухфазным запаздыванием, занимающее область $x_3 \geq 0$. Введем прямоугольную декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) с началом координат на $x_3 = 0$. Полупространство подвергается нормальной и тепловой рамповой нагрузке на граничной плоскости $x_3 = 0$.

Для предлагаемой модели запишем

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_3, t), 0, u_3(x_1, x_3, t)), \quad T(x_1, x_3, t), \quad P(x_1, x_3, t) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.3)–(2.5), приходим к следующим уравнениям

$$(\lambda_o + \mu)\frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu\Delta u_1 + \frac{\alpha}{4}\Delta\left(\frac{\partial e}{\partial x_1} - \Delta u_1\right) - \gamma_1\frac{\partial T}{\partial x_1} - \gamma_2\frac{\partial P}{\partial x_1} = \rho(1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

$$(\lambda_o + \mu)\frac{\partial e}{\partial x_3} + \mu\Delta u_3 + \frac{\alpha}{4}\Delta\left(\frac{\partial e}{\partial x_3} - \Delta u_3\right) - \gamma_1\frac{\partial T}{\partial x_3} - \gamma_2\frac{\partial P}{\partial x_3} = \rho(1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

$$\left(1 - \zeta^2\Delta + \tau_q\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\gamma_1 T_o\dot{e} + l_1 T_o\dot{T} + T_o d\dot{P}) = K\left(1 + \tau_t\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta T \tag{3.4}$$

$$\left(1 - \varsigma^2\Delta + \tau_u\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_u^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\gamma_2\dot{e} + d\dot{T} + n\dot{P}) = D\left(1 + \tau_p\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta P \tag{3.5}$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{gathered}\xi' = \frac{\omega^*}{c_1}\xi, \quad \zeta' = \frac{\omega^*}{c_1}\zeta, \quad \varsigma' = \frac{\omega^*}{c_1}\varsigma, \quad x_i' = \frac{\omega^*}{c_1}x_i, \quad u_i' = \frac{\omega^*}{c_1}u_i, \quad t' = \omega^* t \\ \tau_t' = \omega^*\tau_t, \quad \tau_q' = \omega^*\tau_q, \quad \tau_u' = \omega^*\tau_u, \quad \tau_p' = \omega^*\tau_p, \quad t_{ij}' = \frac{1}{\gamma_1 T_o}t_{ij} \\ m_{ij}' = \frac{\omega^*}{\gamma_1 T_o c_1}m_{ij}, \quad T' = \frac{\gamma_1}{\rho c_1^2}T, \quad P' = \frac{1}{b\gamma_2}P\end{gathered} \tag{3.6}$$

где

$$\omega^{*2} = \frac{\lambda_\circ^2}{\mu^2 t^2 + \rho\alpha}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_o + 2\mu}{\rho}$$

ω^* – характерная частота, c_1 – скорость продольной волны в среде.

Уравнения (3.2)–(3.5) с помощью (3.6) сводятся путем опускания штрихов к следующим

$$\frac{(\lambda_o + \mu)}{\rho c_1^2}\frac{\partial e}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho c_1^2}\Delta u_1 + \frac{\alpha}{4}\frac{\omega^{*2}}{\rho c_1^4}\Delta\left(\frac{\partial e}{\partial x_1} - \Delta u_1\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{b\gamma_2^2}{\rho c_1^2}\frac{\partial P}{\partial x_1} = (1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{3.7}$$

$$\frac{(\lambda_o + \mu)}{\rho c_1^2}\frac{\partial e}{\partial x_3} + \frac{\mu}{\rho c_1^2}\Delta u_3 + \frac{\alpha}{4}\frac{\omega^{*2}}{\rho c_1^4}\Delta\left(\frac{\partial e}{\partial x_3} - \Delta u_3\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} - \frac{b\gamma_2^2}{\rho c_1^2}\frac{\partial P}{\partial x_3} = (1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{3.8}$$

$$\left(1 - \zeta^2\Delta + \tau_q\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\gamma_1^2}{K\rho\omega^*}T_o\dot{e} + \frac{l_1 c_1^2}{K\omega^*}T_o\dot{T} + \frac{b\gamma_2\gamma_1}{K\rho\omega^*}T_o d\dot{P}\right) = \left(1 + \tau_t\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta T \tag{3.9}$$

$$\left(1 - \varsigma^2\Delta + \tau_u\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_u^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{c_1^2}{Db\omega^*}\dot{e} + \frac{c_1^4 d\rho}{Db\omega^*\gamma_1\gamma_2}\dot{T} + \frac{nc_1^2}{D\omega^*}\dot{P}\right) = \left(1 + \tau_p\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta P \tag{3.10}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

4. Метод решения. Компоненты вектора перемещений $u_1(x_1, x_3, t)$ и $u_3(x_1, x_3, t)$ относятся к скалярным потенциалам $\phi(x_1, x_3, t)$ и $\psi(x_1, x_3, t)$ в безразмерной форме как

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{4.1}$$

С помощью (4.1) уравнения (3.7)–(3.10) записываются в виде

$$(a_1 + a_2)\Delta\phi - T - a_4 P - (1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

$$(a_2 - a_3\Delta)\Delta\psi - (1 - \xi^2\Delta)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.3}$$

$$\left(1 - \zeta^2\Delta + \tau_q\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_5\Delta\dot{\phi} + a_6\dot{T} + a_7\dot{P}) = \left(1 + \tau_t\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta T \tag{4.4}$$

$$\left(1 - \varsigma^2\Delta + \tau_u\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_u^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_8\Delta\dot{\phi} + a_9\dot{T} + a_{10}\dot{P}) = \left(1 + \tau_p\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta P \tag{4.5}$$

где

$$a_1 = \frac{(\lambda_o + \mu)}{\rho c_1^2}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\rho c_1^2}, \quad a_3 = \frac{\alpha}{4}\frac{\omega^{*2}}{\rho c_1^4}, \quad a_4 = \frac{b\gamma_2^2}{\rho c_1^2}, \quad a_5 = \frac{\gamma_1^2}{K\rho\omega^*}T_o$$

$$a_6 = \frac{l_1 c_1^2}{K\omega^*}T_o, \quad a_7 = \frac{b\gamma_2\gamma_1}{K\rho\omega^*}T_o d, \quad a_8 = \frac{c_1^2}{Db\omega^*}, \quad a_9 = \frac{c_1^4 d\rho}{Db\omega^*\gamma_1\gamma_2}, \quad a_{10} = \frac{nc_1^2}{D\omega^*}$$

Определим преобразования Лапласа и Фурье согласно

$$\begin{aligned} \overline{f}(x_1, x_3, s) &= \int_0^\infty f(x_1, x_3, t)\exp(-st)dt \\ \hat{f}(x_1, x_3, s) &= \int_{-\infty}^\infty \overline{f}(x_1, x_3, s)\exp(i\xi_1 x_1)dx_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Используя преобразование (4.6) в (4.2)–(4.5), после упрощения получаем:

$$(R_1 D_1^6 + R_2 D_1^4 + R_3 D_1^2 + R_4)(\hat{\phi}, \hat{T}, \hat{P}) = 0 \tag{4.7}$$

$$(D_1^4 + R_5 D_1^2 + R_6)\hat{\psi} = 0 \tag{4.8}$$

где

$$R_1 = R_{11}R_{13}R_{15} - R_{33}R_{35}R_{11}\zeta^2\varsigma^2 + R_{31}R_{15}\zeta^2 - R_{33}R_{34}\zeta^2\varsigma^2 - R_{31}R_{35}a_4\zeta^2\varsigma^2 + R_{34}R_{13}a_4\varsigma^2,$$

$$R_2 = R_{01} - 3\xi_1^2 R_1, \quad R_3 = 3\xi_1^4 R_1 - 2\xi_1^2 R_{01} + R_{02}, \quad R_4 = R_{01}\xi_1^4 - R_1\xi_1^6 - R_{02}\xi_1^2 - R_{03},$$

$$R_5 = -\frac{a_2 + \xi^2 s^2 + 2\xi_1^2 a_3}{a_3},$$

$$R_6 = \frac{a_3\xi_1^4 + a_2\xi_1^2 + s^2 + \xi_1^2\xi^2 s^2}{a_3}$$

$$R_{01} = -R_{11}R_{22}R_{15} - R_{11}R_{13}R_{26} - R_{13}R_{15}s^2 + R_{33}R_{11}R_{25}\zeta^2 + R_{35}R_{23}R_{11}\varsigma^2 + R_{33}R_{35}\zeta^2\varsigma^2 s^2 -$$
$$- R_{31}R_{26}\zeta^2 - R_{21}R_{15} + R_{33}R_{24}\zeta^2 + R_{34}R_{23}\varsigma^2 + R_{31}R_{24}a_4\zeta^2 + R_{35}R_{21}a_4\varsigma^2 -$$
$$- R_{13}R_{24}a_4 - R_{34}R_{22}\varsigma^2 a_4$$

$$R_{02} = R_{11}R_{22}R_{26} + R_{13}R_{26}s^2 + R_{22}R_{15}s^2 - R_{11}R_{23}R_{25} - R_{33}R_{25}\zeta^2 s^2 - R_{35}R_{23}\varsigma^2 s^2 +$$
$$+ R_{21}R_{26} - R_{23}R_{24} - R_{21}R_{25}a_4 + R_{22}R_{24}a_4$$
$$R_{03} = -s^2 R_{26}R_{22} + s^2 R_{23}R_{25}, \quad R_{11} = a_1 + a_2 + \xi^2 s^2$$

$$R_{12} = 1 + s\tau_q + \frac{s^2}{2}\tau_q^2, \quad R_{13} = a_6 s\zeta^2 + 1 + s\tau_t, \quad R_{14} = 1 + s\tau_u + \frac{s^2}{2}\tau_u^2$$
$$R_{15} = 1 + s\tau_p + s\zeta^2 a_{10}, \quad R_{21} = R_{31}R_2, \quad R_{22} = R_{32}R_2, \quad R_{23} = R_{33}R_2$$

$$R_{24} = R_{34}R_4, \quad R_{25} = R_{35}R_4, \quad R_{26} = R_{36}R_4, \quad R_{31} = a_5 s, \quad R_{32} = a_6 s$$
$$R_{33} = a_7 s, \quad R_{34} = a_8 s, \quad R_{35} = a_9 s, \quad R_{36} = a_{10} s$$

Связанное решение уравнений (4.7) и (4.8) имеет вид

$$(\hat{\phi}, \hat{T}, \hat{P})(x_3, \xi_1, s) = \sum_{i=1}^{3}(1, R_i^*, S_i^*)A_i \exp(-m_i x_3) \tag{4.9}$$

$$\hat{\psi}(x_3, \xi_1, s) = \sum_{i=4}^{5} A_i \exp(-m_i x_3) \tag{4.10}$$

Здесь $m_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ — корни уравнений (4.7) и (4.8), а константы связи определяются выражениями

$$R_i^* = \frac{(m_i^2 - \xi_1^2)^3(R_{33}R_{34}\zeta^2\varsigma^2 - R_{31}R_{15}\zeta^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)^2(R_{31}R_{26}\zeta^2 + R_{21}R_{15} - R_{33}R_{24}\zeta^2 - R_{35}R_{21}\varsigma^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)(R_{21}R_{25} - R_{23}R_{24})}{(m_i^2 - \xi_1^2)^2(R_{13}R_{15} - R_{33}R_{35}\zeta^2\varsigma^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)(-R_{22}R_{15} - R_{13}R_{26} + R_{33}R_{25}\zeta^2 + R_{35}R_{23}\varsigma^2) + (R_{22}R_{26} - R_{23}R_{25})}$$

$$S_i^* = \frac{(m_i^2 - \xi_1^2)^3(R_{31}R_{35}\zeta^2\varsigma^2 - R_{34}R_{13}\varsigma^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)^2(R_{34}R_{22}\varsigma^2 + R_{13}R_{24} - R_{31}R_{25}\zeta^2 - R_{35}R_{21}\varsigma^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)(R_{21}R_{25} - R_{22}R_{24})}{(m_i^2 - \xi_1^2)^2(R_{13}R_{15} - R_{33}R_{35}\zeta^2\varsigma^2) + (m_i^2 - \xi_1^2)(-R_{22}R_{15} - R_{13}R_{26} + R_{33}R_{25}\zeta^2 + R_{35}R_{23}\varsigma^2) + (R_{22}R_{26} - R_{23}R_{25})}$$

$$i = 1, 2, 3$$

5. Термомеханические условия. Рассмотрим нормальную нагрузку линейного типа с тепловым источником, пренебрегая при этом касательным моментным напряжением и химическим потенциалом:

$$t_{33} = -F_1(t)\delta(x), \quad t_{31} = 0, \quad m_{32} = 0, \quad T = F_2(t)\delta(x), \quad P = 0 \tag{5.1}$$

$$[F_1(t), F_2(t)] = (F_0, F_{01})\begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{t}{t_0} & 0 < t \le t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \tag{5.2}$$

где F_0 и F_{01} определяют величину силы и стационарную температуру, $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию Дирака, а t_0 – линейный параметр.

Безразмерные компоненты напряжения определяются выражением

$$t_{33} = \frac{2\mu}{\gamma_1 T_o}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \frac{\lambda_o}{\gamma_1 T_o}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) - \frac{\rho c_1^2}{\gamma_1 T_o} T - \frac{\gamma_2^2 b}{\gamma_1 T_o} P \tag{5.3}$$

$$t_{31} = \frac{\mu}{\gamma_1 T_o}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\alpha}{4}\frac{\omega^{*2}}{c_1^2 \gamma_1 T_o}\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{5.4}$$

$$m_{32} = \frac{\alpha}{2}\frac{\omega^{*2}}{c_1^2 \gamma_1 T_o}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{5.5}$$

Используя (4.6) в уравнениях (5.1) и (5.2), получим

$$\hat{t}_{33} = -\hat{F}_1(s), \quad \hat{t}_{31} = 0, \quad \hat{m}_{32} = 0, \quad \hat{T} = \hat{F}_2(s), \quad \hat{P} = 0 \tag{5.6}$$

$$\hat{F}_1(s) = \frac{F_0(1 - \exp(-st_0))}{t_0 s^2}, \quad \hat{F}_2(s) = \frac{F_{01}(1 - \exp(-st_0))}{t_0 s^2} \tag{5.7}$$

Учитывая (4.9) и (4.10) в (5.7) вместе с (4.1), (4.6) и (5.3)–(5.5) имеем

$$\hat{u}_1 = -\frac{i\xi_1}{\Delta}\sum_{i=1}^{3}\Delta_i \exp(-m_i x_3) + \frac{1}{\Delta}\sum_{i=4}^{5} m_i \Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.8}$$

$$\hat{u}_3 = -\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{3} m_i \Delta_i \exp(-m_i x_3) - \frac{i\xi_1}{\Delta}\sum_{i=4}^{5}\Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.9}$$

$$\hat{t}_{33} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{5} a_{1i}\Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.10}$$

$$\hat{t}_{31} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{5} a_{2i}\Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.11}$$

$$\hat{m}_{32} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{5} a_{3i}\Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.12}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{3} R_i^* \Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.13}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{3} S_i^* \Delta_i \exp(-m_i x_3) \tag{5.14}$$

здесь

$$\Delta = (S_2^* R_1^* - S_1^* R_2^*)n_1 + (S_1^* R_3^* - S_3^* R_1^*)n_2 + (S_3^* R_2^* - S_2^* R_3^*)n_3$$

$$n_1 = a_{13}a_{24}a_{35} - a_{13}a_{34}a_{25} - a_{14}a_{23}a_{35} + a_{14}a_{33}a_{25} + a_{15}a_{23}a_{34} - a_{15}a_{33}a_{24}$$

$$n_2 = a_{12}a_{24}a_{35} - a_{12}a_{34}a_{25} - a_{14}a_{22}a_{35} + a_{14}a_{32}a_{25} + a_{15}a_{22}a_{34} - a_{15}a_{32}a_{24}$$

$$n_3 = a_{11}a_{24}a_{35} - a_{11}a_{32}a_{25} - a_{14}a_{21}a_{35} + a_{14}a_{31}a_{25} + a_{15}a_{21}a_{34} - a_{15}a_{31}a_{24}$$

$$a_{1i} = (2r_1 + r_2)m_i^2 - \xi_1^2 r_2 - r_3 R_i^* - r_4 S_i^*, \quad a_{1j} = 2i\xi_1 r_1 m_j$$
$$a_{2i} = 2i\xi_1(-r_5 m_i^3 + r_1 m_i + r_5\xi_1^2 m_i), \quad a_{2j} = r_5 m_j^4 - r_1 m_j^2 - r_1\xi_1^2 - r_5\xi_1^4$$
$$a_{3i} = 4i\xi_1 r_5 m_i, \quad a_{3j} = -2r_5(m_j^2 + \xi_1^2), \quad r_1 = \frac{\mu}{\gamma_1 T_o}, \quad r_2 = \frac{\lambda_o}{\gamma_1 T_o}$$
$$r_3 = \frac{\rho c_1^2}{\gamma_1 T_o}, \quad r_4 = \frac{\gamma_2^2 b}{\gamma_1 T_o}, \quad r_5 = \frac{\alpha}{4}\frac{\omega^{*2}}{\gamma_1 T_o c_1^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 4, 5$$

Помещая $[-\hat{F}_1(s), 0, 0, \hat{F}_2(s), 0)]'$ в i-й столбец Δ соответственно, определим Δ_i ($i = 1$, 2, ..., 5).

6. Проверка и особые случаи. (a) Для нормальной нагрузки линейного типа $F_2 = 0$ соответствующие значения определяются из уравнений (5.8)–(5.14).

(b) Для теплового источника линейного типа $F_1 = 0$ значения величин определяются из уравнений (5.8)–(5.14).

Особые случаи:

(1). Принимая $\xi, \zeta, \varsigma = 0$, получим соответствующие выражения из (5.8)–(5.14) в отсутствие нелокальных параметров.

(2). Принимая $\tau_t, \tau_q, \tau_u, \tau_p = 0$, получим соответствующие выражения из (5.8)–(5.14) без двухфазного запаздывания.

7. Обратное преобразование. Обращаем преобразования в (5.8)–(5.14) с помощью методов, изложенных в работе [28].

8. Обсуждение численных результатов. Для численных расчетов, следуя работе [29], рассмотрим в качестве термоупругого диффундирующего твердого тела медь с соответствующими параметрами:

$$\lambda = 7.76\times10^{10}\ \text{Кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}, \quad \mu = 3.86\times10^{10}\ \text{Кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}, \quad T_o = 0.293\times10^3\ \text{K}$$
$$C_e = 0.3891\times10^3\ \text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad \alpha_t = 1.78\times10^{-5}\ \text{K}^{-1}, \quad \alpha_c = 1.98\times10^{-4}\ \text{м}^3\cdot\text{Кг}^{-1}$$
$$a = 1.02\times10^4\ \text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, \quad b = 9\times10^5\ \text{Кг}^{-1}\cdot\text{м}^5\cdot\text{с}^{-2}, \quad D = 0.85\times10^{-8}\ \text{Кг}\cdot\text{м}^{-3}\cdot\text{с}$$
$$\rho = 8.954\times10^3\ \text{Кг}\cdot\text{м}^{-3}, \quad K = 0.386\times10^3\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \alpha = 0.05\ \text{Кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$$
$$t = 0.01\ \text{с}, \quad t_o = 0.2\ \text{с}, \quad \tau_t = 0.6\ \text{с}, \quad \tau_q = 0.7\ \text{с}, \quad \tau_p = 0.8\,\text{s}, \quad \tau_u = 0.9\ \text{с}$$
$$\xi = 0.395\times10^{-9}\ \text{м}, \quad \zeta = 0.2\times10^{-9}\ \text{м}, \quad \varsigma = 0.15\times10^{-9}\ \text{м}, \quad F_0 = 1, \quad F_{01} = 1$$

Для вычислений использовался Matlab (R2016a). Численное моделирование проводилось в следующих случаях:

(i) Диффузия ТМН с нелокальным и двухфазным запаздыванием (MNP).

(ii) Диффузия ТМН с двухфазным запаздыванием (NP).

(iii) Диффузия ТМН с нелокальным запаздыванием и без учета диффузионного запаздывания (MNWDP).

(iv) Диффузия ТМН с нелокальным запаздыванием и без учета теплового запаздывания (MNWTP).

(v) Диффузия ТМН с нелокальным запаздыванием (MH).

На рис. 1–5 показано влияние нормальной нагрузки линейного типа для всех случаев. На рис. 6–10 показано влияние теплового источника линейного типа для всех случаев.

На всех рисунках линия (—) соответствует диффузии ТМН с нелокальным и двухфазным запаздыванием (MNP), линия (- – -) представляет диффузию ТМН с двухфазным запаздыванием (NP), линия (– –) соответствует диффузии ТМН с нелокальным запаздыванием и без запаздывания диффузионной фазы (MNWDP), линия (– * –)

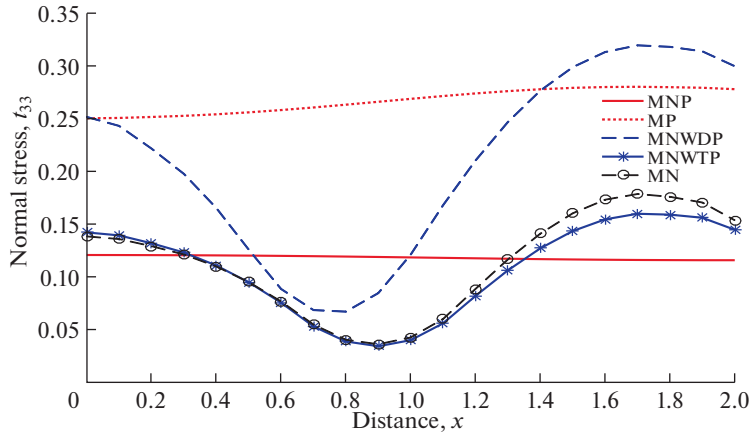


Рис. 1. Зависимость нормального напряжения t_{33} от расстояния x

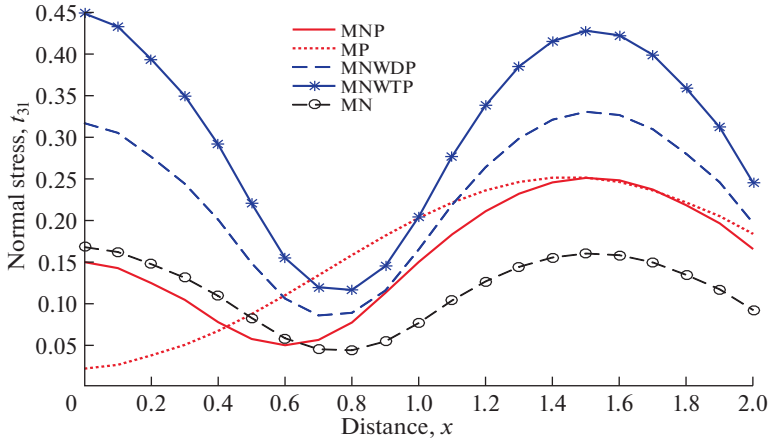


Рис. 2. Зависимость касательного напряжения t_{31} от расстояния x

соответствует диффузии ТМН с нелокальным запаздыванием и без запаздывания термической фазы (MNWTP), линия (– $_0$ –) соответствует диффузии ТМН с нелокальным запаздыванием (MH).

8.1. Нормальная нагрузка. На рис. 1 показана зависимость t_{33} от x. Вариация t_{33} остается для MNP стационарной. Значения t_{33} увеличиваются для ограниченного интервала x и уменьшаются за пределами этого интервала для NP. t_{33} показывает аналогичное поведение для MNWDP, MNWTP и MH с разницей в значениях магнитуды.

На рис. 2 показана зависимость t_{31} от x. Величина t_{31} увеличивается для ограниченной области и уменьшается вдали от источника для Ф. t_{31} показывает тенденцию к снижению для ограниченного региона и после этого показывает колебания для MNP, MNWDP, MNWTP и MH.

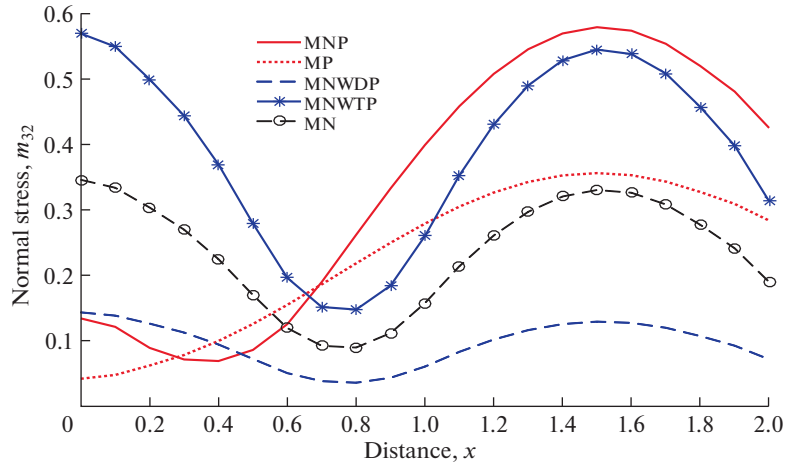


Рис. 3. Зависимость касательного моментного напряжения m_{32} от расстояния x

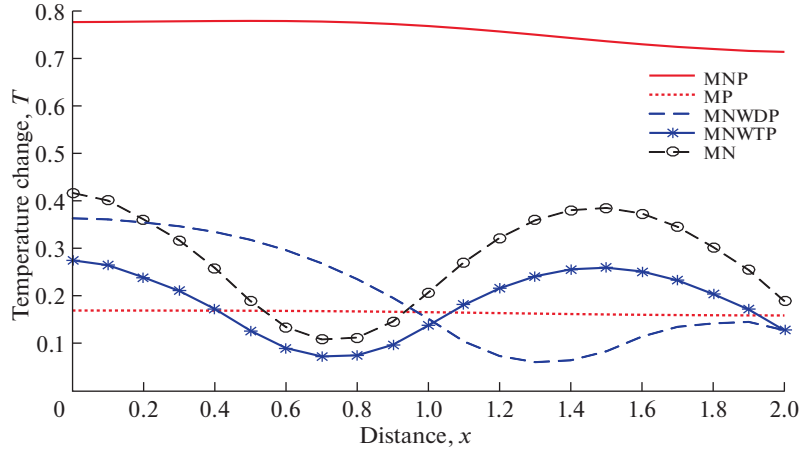


Рис. 4. Зависимость температуры T от расстояния x

На рис. 3 показана зависимость m_{32} от x. Поведение m_{32} в случае MNWDP, MNWTP и MH аналогично для всех значений x, но величина m_{32} в случае MNWDP меньше по сравнению с MNWTP и MH. Профиль m_{32} для NP и MNP остается таким же для $x > 0.9$, хотя величина для MNP больше, чем для NP.

На рис. 4 показана зависимость T от x. T показывает тенденцию к уменьшению в MNP и NP с разницей в значениях величины. Величина T постепенно уменьшается вблизи источника и увеличивается вдали от источника для MNWDP. T уменьшается для ограниченной области, и после этого наблюдается колебательное поведение для MNWDP и MH.

На рис. 5 показана зависимость P от P. Вариация P постепенно уменьшается для MNP и NP. P обозначают тенденцию к уменьшению около источника, а вдали от

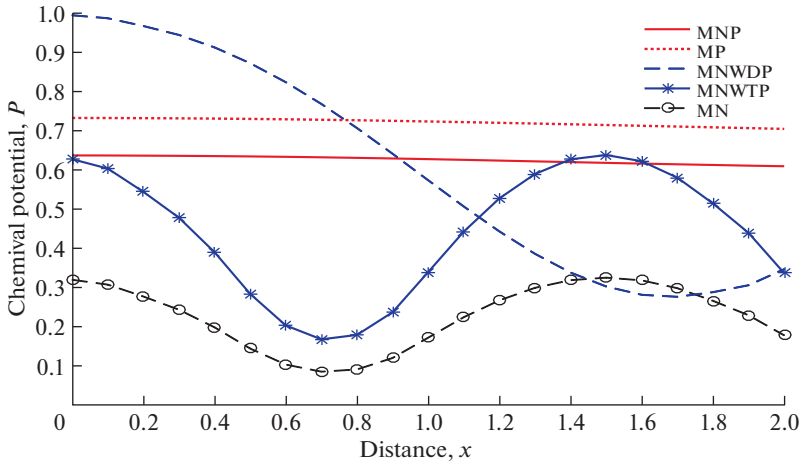


Рис. 5. Зависимость химического потенциала P от расстояния x

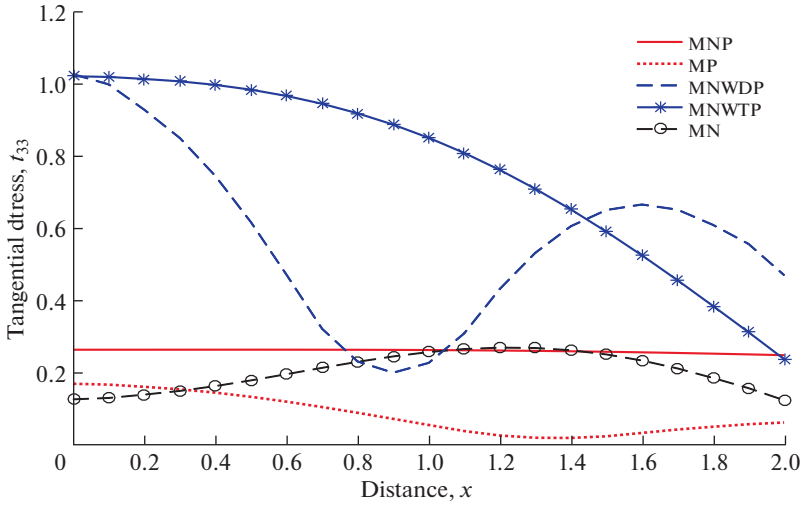


Рис. 6. Зависимость нормального напряжения t_{33} от расстояния x

источника наблюдается тенденция к увеличению для MNWDP. Поведение P для MNWTP и NP аналогично, хотя значение P для MNWTP больше, чем для NP.

8.2. Тепловой источник. На рис. 6 показана зависимость t_{33} от x. Поведение t_{33} противоположно для MP и MN. Значения t_{33} монотонно уменьшаются для MNWTP, тогда как для MNP наблюдается стационарное изменение. t_{33} демонстрирует колебательное поведение для модели MNWDP.

На рис. 7 показана зависимость t_{31} от x. Тенденция t_{31} аналогична для MNP и MNWDP с разницей в значениях уровня исследуемых величин. Вблизи источника ве-

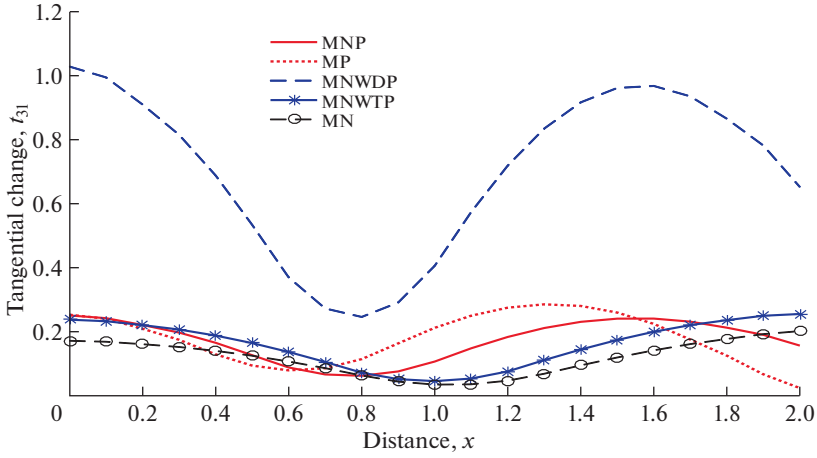


Рис. 7. Зависимость касательного напряжения t_{31} от расстояния x

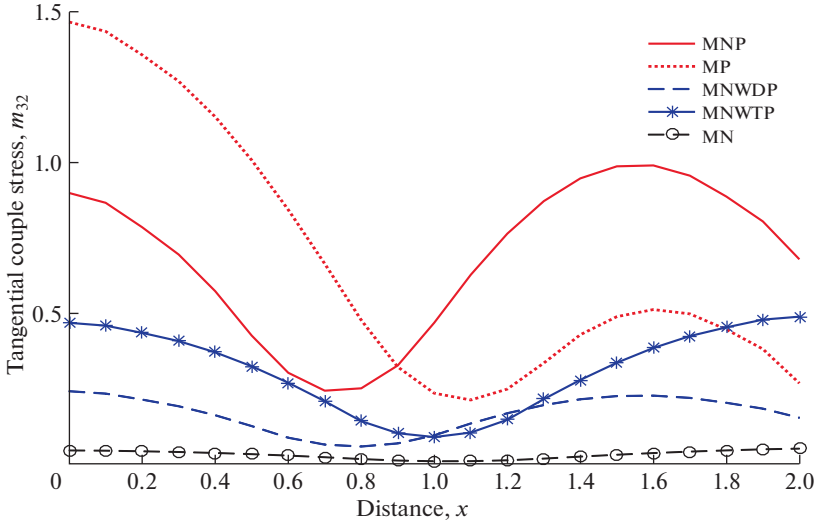


Рис. 8. Зависимость касательного парного напряжения m_{32} от расстояния x

личина t_{31} уменьшается, после чего наблюдается колебательное поведение для модели ТМН. t_{31} показывает аналогичное поведение для всех значений x для MNWTP и MNP.

На рис. 8 показана зависимость m_{32} от x. Величина m_{32} уменьшается с начальными значениями m_{32} и для промежуточного интервала x колебательное поведение m_{32} наблюдается для всех случаев. Вдали от ограничивающей поверхности тренд m_{32} уменьшается, за исключением MNWTP и MNP.

На рис. 9 показана зависимость T от x. T демонстрирует тенденцию к снижению для MNP, MP и MNWDP. Величина T уменьшается вблизи источника, и после этого поведение T исследуется для MNWTP и MNP.

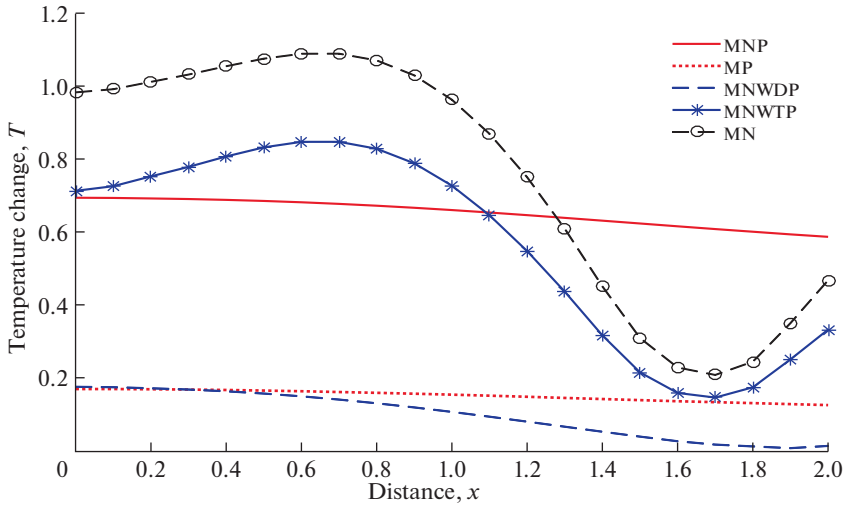


Рис. 9. Зависимость изменения температуры T от расстояния x

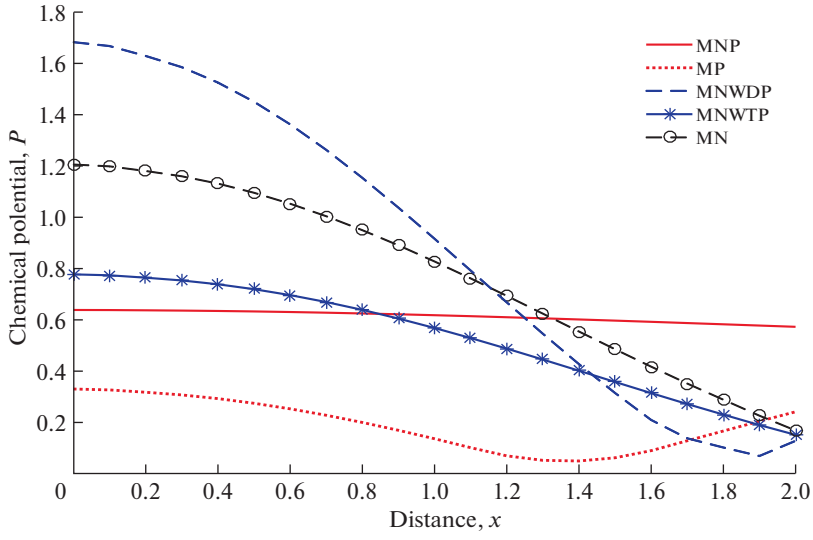


Рис. 10. Зависимость химического потенциал P от расстояния x

Рис. 10 показана зависимость P от x. Поведение P аналогично для MNWDP, MNWTP и MN, за исключением того, что он находится вдали от источника. Значения P монотонно увеличиваются для MNP и MP.

9. Заключение. Рассмотрена проблема определения физических величин с помощью методов интегрального преобразования с учетом нормальной и тепловой нагрузки. Интегральное преобразование включает преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по пространственной переменной. Нелокальные параметры и параметры фазового запаздывания существенно влияют на получаемые величины.

Обнаружено, что эти величины очень чувствительны к нелокальным параметрам и параметрам фазового запаздывания.

Отмечено, что значения величин составляющих напряжений для нормальной нагрузки линейного типа больше по сравнению с термической нагрузкой линейного типа. В заданное время распределение заданных величин ограничено. Результаты этой модели заметно различаются для разных случаев. Для всех случаев показано, что определенные величины в точке приложения источника проявляют тенденцию к снижению и отклонению от нее при колебательном поведении. Также наблюдается сильное колебание всех результирующих величин из-за отличия нормальной нагрузки от термической. Полученные результаты важны для исследователей, работающих в области модифицированной термоупругости учитывающей моментные напряжения с диффузионными и нелокальными параметрами. Проблема имеет важное и практическое значение для конструкций или устройств в микромасштабе, подверженных переходным механическим и тепловым нагрузкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eringen A.C., Edelen D.G.B.* On nonlocal elasticity // Int. J. Eng. Sci. 1972. V. 10. P. 233–248.
2. *Eringen A.C.* On nonlocal fluid mechanics // Int. J. Eng. Sci. 1972. V. 10. № 6. P. 561–575.
3. *Eringen A.C.* Nonlocal polar elastic continua // Int. J. Eng. Sci. 1972. V. 10. № 1. P. 1–16.
4. *Eringen A.C.* Nonlocal continuum theory of liquid crystals // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1981. V. 75. P. 321–343.
5. *Eringen A.C.* Nonlocal inviscid magneto-hydrodynamics and dispersion of Alfven waves // Bull. Tech. Univ. Istanb. 1986. V. 39. P. 393–408.
6. *Eringen A.C.* Memory dependent nonlocal electrodynamics // Proceedings of IUTAM Symposium on mechanical modelling of new electromagnetic materials, Stockholm, Sweden, 1990. Ed. by *Hsieh R.K.T.* Amsterdam: Elsevier, 1990. P. 45–59.
7. *Eringen A.C.* Memory dependent nonlocal electromagnetic elastic solids and superconductivity // J. Math. Phy. 1991. V. 32. № 3. P. 787–796.
8. *Edelen D.G.B., Laws N.* On the thermodynamics of systems with nonlocality // Arch. Ration. Mech. Anal. 1971. V. 43. P. 24–35.
9. *McCay B.M., Narsimhan M.L.N.* Theory of nonlocal electromagnetic fluids // Arch. Mech. 1981. V. 33. № 3. P. 365–384.
10. *Narsimhan M.L.N., McCay B.M.* Dispersion of surface waves in nonlocal dielectric fluids // Arch. Mech. 1981. V. 33. № 3. P. 385–400.
11. *Eringen A.C.* Nonlocal continuum field theories. New York: Springer, 2002. 367 p.
12. *Tzou D.Y.* Thermal shock phenomena under high rate response in solids // Annual Rev. Heat Transf. 1992. V. 4. P. 111–185.
13. *Cao B.Y., Guo Z.Y.* Equation of motion of a phonon gas and non-Fourier heat conduction // J. Appl. Phys. 2007. V. 5. P. 053503.
14. *Guo Z.Y., Hou Q.W.* Thermal wave based on the thermomass model // J. Heat Transf. 2010. V. 5. P. 072403.
15. *Tzou D.Y., Guo Z.Y.* Nonlocal behavior in thermal lagging // Int. J. Therm. Sci. 2010. V. 49. № 7. P. 1133–1137.
16. *Tzou D.Y.* A unified field approach for heat conduction from macro to micro scales // J. Heat Transf. 1995. V. 117. № 1. P. 8–16.
17. *Tzou D.Y.* The generalised lagging response in small scale and high rate heating // Int. J. Heat Mass Transf. 1995. V. 38 (17). P. 3231–3240.
18. *Sharma K.* Boundary value problems in generalised thermodiffusive elastic medium // J. Solid Mech. 2010. V. 2. № 4. P. 348–362.
19. *Sharma S., Sharma K.* Influence of heat sources and relaxation time on temperature distributions in tissues // Int. J. Appl. Mech. Eng. 2014. V. 19. № 2. P. 427–433.
20. *Sharma S., Sharma K., Bhargava R.R.* Plane waves and fundamental solution in an electro-microstretch elastic solids // Afr. Math. 2014. V. 25. № 2. P. 483–497.

21. *Yu Y.J., Xue Z.N., Li C.L., Tian X.G.* Buckling of nanobeams under nonuniform temperature based on nonlocal thermoelasticity // Compos. Struct. 2016. V. 146. P. 108–113.
22. *Abouelregal A.E.* The effect of temperature dependent physical properties and fractional thermoelasticity on nonlocal nanobeams // Open Acc. J. Math Theor. Phy. 2018. V. 1. № 2. P. 46–55.
23. *Kumar R., Miglani A., Rani R.* Transient analysis of nonlocal microstretch thermoelastic thick circular plate with phase lags // Med. J. Simul. 2018. V. 9. P. 25–42.
24. *Kumar R., Devi S., Sharma V.* Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags // Mech. Mech. Eng. 2019. V. 23. P. 36–49.
25. *Borjalilou V., Asghari M., Taati E.* Thermoelastic damping in nonlocal nanobeams considering dual phase lagging effect // J. Vib. Contr. 2020. V. 26. № 11–12. P. 1042–1053.
26. *Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H.A.* The theory of generalised thermoelastic diffusion // Int. J. Eng. Sci. 2004. V. 42. P. 591–608.
27. *Yu Y.J., Tian X.-G., Xiong Q.-L.* Nonlocal thermoelasticity based on nonlocal heat conduction and nonlocal elasticity // Eur. J. Mech. / A Solids. 2016. V. 60. P. 238–253.
28. *Kumar R., Devi S., Sharma V.* Effect of hall current and rotation in modified couple stress generalised thermoelastic half space due to ramp type heating // J. Solid Mech. 2017. V. 9. № 3. P. 527–542.
29. *Sherief H.H., Saleh H.* A half space problem in the theory of generalised thermoelastic diffusion // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. P. 4484–4493.