

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 66, номер 5, 2020

---

---

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины

*А. О. Ватульян, В. О. Юров* 467

Создание эталонной плоской ультразвуковой волны в жидкости с помощью плоского пьезоэлектрического преобразователя большого волнового размера

*А. А. Крохмаль, Д. А. Николаев, С. А. Цысарь, О. А. Сапожников* 475

Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор)

*С. А. Назаров* 489

---

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Реконструкция диаграммы направленности источника звука в свободном пространстве по измерениям его поля в бассейне

*А. Л. Вировлянский, А. Ю. Казарова, Л. Я. Любавин* 509

Акустические характеристики дна озера Байкал

*В. А. Григорьев, К. М. Кучер, А. А. Луньков, М. М. Макаров, В. Г. Петников* 517

Акустические шумы, формируемые на мелководном шельфе судами с электродвигателями

*А. Н. Рутенко, М. Ю. Фершалов, В. Г. Ущиповский* 527

---

## АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

Использование корреляционной модели случайных квадрупольных источников для расчета эффективности экранирования шума турбулентной струи на основе геометрической теории дифракции

*С. Л. Денисов, В. Ф. Копьев, Н. Н. Остриков, Г. А. Фараносов, С. А. Чернышев* 540

---

## АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ. БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

Частотно-временной анализ звуков второго тона сердца для оценки давления в легочной артерии

*В. Г. Андреев, В. В. Грамович, М. В. Красикова, А. И. Корольков, О. Н. Выборов, Н. М. Данилов, Т. В. Мартынюк, О. В. Родненков, О. В. Руденко* 556

Особенности звукопроводения в легких человека в диапазонах частот 80–1000 Гц и 10–19 кГц

*В. И. Коренбаум, А. Д. Ширяев* 563

---

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

О работе электроакустического преобразователя, основанного на электрокинетических явлениях, при турбулентном режиме движения жидкости

*Б. П. Шарфарей, В. Е. Курочкин, В. А. Сергеев*

---

---

575

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА С КОЛЬЦЕВОЙ  
ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

© 2020 г. А. О. Ватульян<sup>a, b, \*</sup>, В. О. Юров<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Южный федеральный университет, Большая Садовая ул. 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

<sup>b</sup>Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН, Маркуса ул. 22, Владикавказ, 362027 Россия

\*e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

\*\*e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.

После доработки 23.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассмотрена задача о волнах в неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевой трещиной. Получена система интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами для отыскания скачков радиальных и продольных перемещений на берегах трещины. Для решения использована схема, основанная на методе граничных элементов. Построено асимптотическое решение системы интегральных уравнений при стремлении ширины дефекта к нулю. Приведены результаты вычислительных экспериментов по сравнению решений, полученных двумя методами.

*Ключевые слова:* цилиндрический волновод, неоднородность, трещина, система интегральных уравнений, асимптотический анализ

DOI: 10.31857/S0320791920050147

## ВВЕДЕНИЕ

Использование новых материалов влечет за собой активное развитие методов неразрушающего контроля для изготовленных из них конструктивных элементов. В этом процессе свою нишу занимает исследование распространения волн в неоднородных волноводах. При том, что однородные волноводы исследованы достаточно подробно [1] на основе аналитических методов, исследование волновых процессов в функционально-градиентных и кусочно-неоднородных волноводах осуществляется в основном численно. Для успешного решения обратной задачи по идентификации скрытых (внутренних) дефектов требуется развитие методик решения прямых задач о распространении волн в неоднородных волноводах с дефектами. Для исследования волновых процессов в однородных структурах с дефектами в основном используются методы, базирующиеся на закономерностях распространения волн Лэмба [2]. В [3] осуществляется идентификация размеров и глубины отслоения по изменению резонансных частот. Дальнейшее продвижение в исследовании волновых процессов в неоднородных структурах осуществляется обычно разбиением на кусочно-однородные области либо построением решений для неоднородностей простого вида.

Экспоненциальный закон использован в [4] для описания деформирования неоднородной плоскости с разрезом. В работе [5] найден способ построения приближенного решения задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве путем рассмотрения задачи, в которой произвольный закон неоднородности заменяется аппроксимацией некоторой системой функций.

Математический аппарат для решения задач о волнах в протяженных объектах с дефектами обычно основывается на применении метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [6, 7] или применении метода конечных элементов (МКЭ) [8, 9], дополненного неотражающими граничными условиями. ГИУ возникают при решении задач с раскрытыми трещинами, причем интегральные уравнения формируются относительно скачков перемещений и являются гиперсингулярными. При использовании МКЭ основной проблемой является корректный переход от неограниченной структуры к ограниченной и выявление структуры решения в окрестности вершин трещин.

В рамках первого подхода можно выделить различные способы решения задачи. Так, в [6] методом разложения в ряд по параметру решена задача о трещине на границе полосы и полуплос-

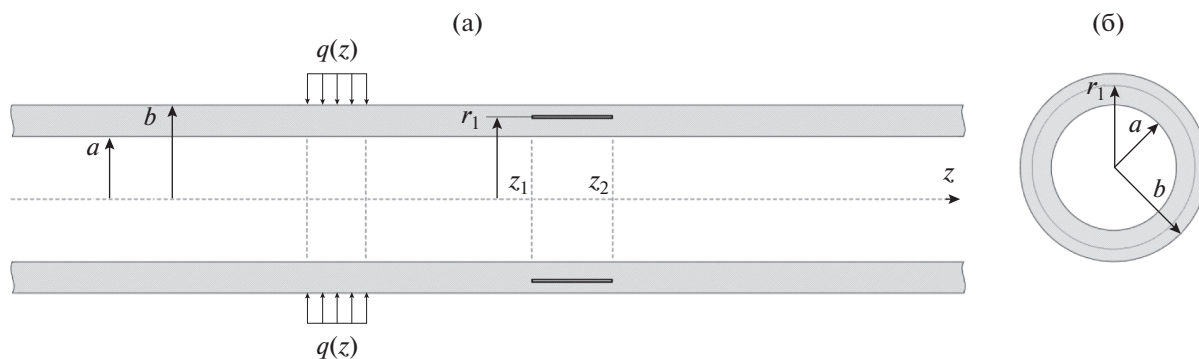


Рис. 1. Геометрия задачи: (а) – продольное сечение, (б) – поперечное сечение.

кости; решение зависит от соотношения упругих модулей на границе раздела сред. Составлена и решена на основе метода “больших  $\lambda$ ” система интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. Другой способ нахождения решения основан на построении интерполяционных многочленов для функций раскрытия и сведения задачи к решению алгебраической системы. Таким методом в статье [10] решена задача для полосы с трещиной, заполненной клеевым составом. В [11] решена задача о полосовой трещине на границе двух полупространств. Для решения возникающего гиперсингулярного ГИУ применялся метод Бубнова–Галеркина с разложением по ортогональным полиномам Чебышева второго рода. Построены асимптотики ядер интегральных уравнений, предложена формула, уточняющая квазистатическое приближение. В работе [12] исследовано явление блокирования волн в полуплоскости и в слое с продольной трещиной. Для полуплоскости решение строится аналогично работе [11], а для полосы осуществляется разложение решения ГИУ по нормальным модам, и задача сведена к бесконечной алгебраической системе.

В рамках второго подхода возможно моделирование волновода практически любой формы, содержащего дефекты любой природы в ограниченной области. В работе [8] решение задачи строится путем сопряжения численного решения в конечной неоднородной области с аналитическими решениями в полубесконечных областях. В [9] для расчета полей в неограниченном теле с дефектом применен МКЭ совместно с масштабированными граничными условиями (разновидности граничных условий неотражающего типа).

В настоящем исследовании использован метод ГИУ. В силу переменности коэффициентов дифференциального оператора, возникающего во вспомогательной задаче для трансформант Фурье, не удается применить методика учета трещины путем добавления в уравнение массовых сил [13]. Ядра системы интегральных уравнений относительно скачков перемещений построены на

основе решения вспомогательных задач Коши в пространстве трансформант [14], а само решение ГИУ построено на основе метода граничных элементов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волны в неоднородном по радиальной координате цилиндрическом волноводе с кольцевым поперечным сечением ( $a \leq r \leq b$ ), содержащем осесимметричную область с отслоением (замкнутая трещина конечной ширины, занимающая область  $\{(r, \varphi, z): r = r_1, \varphi \in [0, 2\pi), z_1 \leq z \leq z_2\}$ ). Колебания волновода вызываются действием распределенной осесимметричной нагрузки на внешней границе волновода  $q(z)$  (рис. 1). Внутренняя граница волновода и берега отслоения свободны от напряжений, т.е. трещина считается раскрытой. Осесимметричная форма уравнений установившихся колебаний с частотой  $\omega$  в цилиндрической системе координат имеет вид [15]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho \omega^2 u_z = 0. \end{cases}$$

Компоненты тензора напряжений Коши для изотропного цилиндра выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

где  $u_r, u_z$  – компоненты вектора перемещений,  $\sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_{zr}, \sigma_\varphi, \sigma_z$  – компоненты тензора напряжений Коши,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе, которые также могут зависеть от радиальной координаты. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [16].

Введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} x &= rb^{-1}, \quad \xi_0 = ab^{-1}, \quad y = zb^{-1}, \quad \mu_0 = \mu(\xi_0), \\ u_r &= bX_1, \quad u_z = ibX_2, \\ \sigma_r &= \mu_0 X_3, \quad \sigma_{rz} = i\mu_0 X_4, \quad \kappa^2 \mu_0 = \rho \omega^2 b^2, \\ \lambda &= \mu_0 g_1, \quad \mu = \mu_0 g_2, \quad G = g_1 + 2g_2. \end{aligned}$$

Цилиндрическая поверхность отслоения в безразмерных координатах задается множеством  $\{(x, y): x = \xi_1 \in (\xi_0, 1), y \in [-l_0, l_0]\}$ . Здесь и далее в силу осевой симметрии задачи опущено условие на окружную координату  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Будем считать, что внешняя нормальная нагрузка, вызывающая распространение волн в волноводе, приложена в области  $\{(x, y): x = 1, y \in [l_1, l_2]\}$ .

Выполним интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты в областях  $S_1 = \{(x, y): \xi_0 \leq x \leq \xi_1, -\infty < y < \infty\}$  и  $S_2 = \{(x, y): \xi_1 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$  при условии, что известно поле перемещений на условной границе  $x = \xi_1$ , базируясь на работе [14]. Введем следующее обозначение для трансформант

$$\tilde{\mathbf{X}}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(x, y) e^{i\alpha y} dy. \quad (1)$$

С целью исследования произвольной неоднородности, связанной с переменностью упругих параметров, сформируем каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{X}}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}, \quad (2)$$

где  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4)^T$ .

Приведем лишь ненулевые коэффициенты матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 : a_{11}^0 &= -g_1 (xG)^{-1}, \quad a_{13}^0 = G^{-1}, \quad a_{24}^0 = g_2^{-1}, \\ a_{31}^0 &= (G^2 - g_1^2) (x^2 G)^{-1}, \quad a_{33}^0 = -2g_2 (xG)^{-1}, \\ a_{44}^0 &= -x^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{01} : a_{31}^{01} &= a_{42}^{01} = 1; \\ \mathbf{A}_1 : a_{12}^1 &= g_1 G^{-1}, \quad a_{21}^1 = -1, \\ a_{32}^1 &= a_{41}^1 = -2g_1 g_2 (xG)^{-1}, \quad a_{34}^1 = 1, \\ a_{43}^1 &= -a_{12}^1; \\ \mathbf{A}_2 : a_{42}^2 &= (G^2 - g_1^2) G^{-1}. \end{aligned}$$

Введенные в уравнении (2) матрицы имеют переменные коэффициенты, являющиеся рациональными функциями относительно  $x, x^2, g_1(x), g_2(x)$  и ограниченными в силу условий  $g_1(x), g_2(x) > 0, \xi_0 > 0$ . Таким образом, решение уравнения (2) может быть построено численно как при непрерывных, так и при кусочно-непрерывных функциях  $g_1(x), g_2(x)$  с разрывами первого рода.

Сформулируем ряд вспомогательных задач Коши для (2)

$$\tilde{X}_1^{(1)}(\xi_0) = 1, \quad \tilde{X}_2^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad (3)$$

$$\tilde{X}_3^{(1)}(\xi_0) = \tilde{X}_4^{(1)}(\xi_0) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_2^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad (4)$$

$$\tilde{X}_3^{(2)}(\xi_0) = \tilde{X}_4^{(2)}(\xi_0) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(3)}(1) = 1, \quad \tilde{X}_2^{(3)}(1) = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{X}_3^{(3)}(1) = \tilde{X}_4^{(3)}(1) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(4)}(1) = 0, \quad \tilde{X}_2^{(4)}(1) = 1, \quad (6)$$

$$\tilde{X}_3^{(4)}(1) = \tilde{X}_4^{(4)}(1) = 0.$$

Векторы  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$  являются решениями уравнения (2) с граничными условиями (3), (4), (5) и (6), соответственно. Для их численного нахождения использованы схемы Рунге–Кутты 4–5 порядка.

Пусть колебания волновода вызваны нагрузкой  $q(z) = \delta(z)$ , приложенной на его внешней границе, а внутренняя граница свободна от напряжений. Решение этой задачи в пространстве трансформант строится как линейная комбинация  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)} = q_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + q_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ . Рассматриваемое  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}$  автоматически удовлетворяет граничным условиям на границе  $x = \xi_0$ . Выбирая  $q_1, q_2$ , обеспечим выполнение следующих условий  $\tilde{Z}_3^{(0)}(1) = 1, \tilde{Z}_4^{(0)}(1) = 0$  на границе  $x = 1$ . Для этого решим систему

$$\begin{cases} q_1 \tilde{X}_3^{(1)}(1) + q_2 \tilde{X}_3^{(2)}(1) = 1, \\ q_1 \tilde{X}_4^{(1)}(1) + q_2 \tilde{X}_4^{(2)}(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Теперь сконструируем решения, которые дают единичные скачки радиальных и продольных перемещений на трещине для задачи в трансформантах. Составим следующие линейные

комбинации  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)} = p_1\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + p_2\tilde{\mathbf{X}}^{(2)} + p_3\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} + p_4\tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} = d_1\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + d_2\tilde{\mathbf{X}}^{(2)} + d_3\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} + d_4\tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$ , причем будем считать, что  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{X}}^{(2)} \equiv 0$  в  $S_2/S_1$  и  $\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} = \tilde{\mathbf{X}}^{(4)} \equiv 0$  в  $S_1/S_2$ . Тогда  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$  и  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$  удовлетворяют граничным условиям отсутствия напряжений на границах  $x = \xi_0$  и  $x = 1$ . Обеспечим единичный скачок радиальных перемещений  $\tilde{Z}_1^{(1)}$  и непрерывность компонент  $\tilde{Z}_2^{(1)}$ ,  $\tilde{Z}_3^{(1)}$ ,  $\tilde{Z}_4^{(1)}$  на границе  $x = \xi_1$  для решения  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ , а также единичный скачок продольных перемещений  $\tilde{Z}_2^{(2)}$  и непрерывность  $\tilde{Z}_1^{(2)}$ ,  $\tilde{Z}_3^{(2)}$ ,  $\tilde{Z}_4^{(2)}$  для  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$ , соответственно. Для этого решим следующие алгебраические системы, записанные в сокращенной форме

$$p_1\tilde{X}_i^{(1)}(\xi_1) + p_2\tilde{X}_i^{(2)}(\xi_1) - p_3\tilde{X}_i^{(3)}(\xi_1) - p_4\tilde{X}_i^{(4)}(\xi_1) = -\delta_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

$$d_1\tilde{X}_i^{(1)}(\xi_1) + d_2\tilde{X}_i^{(2)}(\xi_1) - d_3\tilde{X}_i^{(3)}(\xi_1) - d_4\tilde{X}_i^{(4)}(\xi_1) = -\delta_{2i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9)$$

Сформулированные выше линейные комбинации  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha)$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha)$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha)$  позволяют составить решение задачи о колебаниях волновода с отслоением под действием внешней распределенной нагрузки в пространстве трансформант и тогда

$$\tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) = Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_1(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_2(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha), \quad (10)$$

где  $Q(\alpha) = \int_{l_1}^{l_2} q(y)e^{i\alpha y} dy$  – трансформанта внешней нагрузки, приложенной в радиальном направлении, причем при  $q(y) = q_0 = \text{const}$ ,  $Q(\alpha) = iq_0(\exp(i\alpha l_1) - \exp(i\alpha l_2))\alpha^{-1}$ ;  $\tilde{\chi}_1(\alpha)$  и  $\tilde{\chi}_2(\alpha)$  – трансформанты от неизвестных скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении.

Далее для выполнения условия равенства нулю оригинала вектора напряжений на берегах отслоения необходимо найти оригиналы полей, осуществляя обратное преобразование Фурье по формуле

$$\mathbf{Z}(x, y) = \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha. \quad (11)$$

Здесь контур  $\Gamma$  совпадает с  $[-\infty, \infty]$  всюду, за исключением полюсов подынтегральной функции, которые он огибает в соответствии с принципом предельного поглощения [16]. Подставляя решение (10) в формулу (11), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x, y) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_1(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_2(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{\chi}_j(\alpha) = \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(y) e^{i\alpha y} dy, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

В соответствии с граничными условиями компоненты  $Z_3, Z_4$  решения (12) обращаются в нуль на берегах отслоения. Это условие будет использовано для нахождения неизвестных функций  $\chi_1(y), \chi_2(y)$ .

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{f}(y) = -\frac{1}{2\pi_\Gamma} \int Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha$ . Учитывая представление (13), изменим во втором и третьем слагаемом в (12) порядок интегрирования

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_j(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \left( \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) e^{i\alpha\eta} d\eta \right) \tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) \mathbf{k}_j(\eta - y) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{k}_j(\eta - y) = \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{i\alpha(\eta - y)} d\alpha, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Из (12) и (14) нетрудно получить следующую систему двух интегральных уравнений относительно скачков  $\chi_1(\eta), \chi_2(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) k_{js}(\eta - y) d\eta &= f_s(y), \quad s = 3, 4, \\ y &\in [-l_0, l_0]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решив систему (15), можно найти поле перемещений на внешней границе волновода по формуле

$$\begin{aligned} X_s(x, y) &= X_s^{\text{эГ}}(x, y) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) m_{js}(\eta - y) d\eta, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$

где для краткости введено обозначение

$$X_s^{\text{эгр}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) Z_s^{(0)}(1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha,$$

$$\mathbf{m}_j(\eta - y) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\Gamma} \tilde{Z}^{(j)}(1, \alpha) e^{i\alpha(\eta - y)} d\alpha \right),$$

$$j = 1, 2.$$

При подсчете интегралов  $k_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$  системы (15) учтем поведение подынтегральной функции на бесконечности. В силу того, что  $\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $s = 3, 4$  являются неубывающими функциями  $\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha) = K_{js}^+|\alpha| + K_{js}^-\alpha + O(1)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , интегралы являются расходящимися и им надо придать смысл, используя теорию обобщенных функций [17]. Чтобы выделить главные составляющие, соответствующие предельным значениям функций на бесконечности, численно найдем следующие пределы  $K_{js} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha)/\alpha)$ . Воспользуемся двумя методами для решения задачи.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Система интегральных уравнений (15) для отыскания функций раскрытия может быть решена методом граничных элементов [18]. Разобьем интегралы по отрезку  $[-l_0, l_0]$  на сумму интегралов по элементам  $[-l_0, l_0] = \bigcup_{p=1}^N \Delta_p$ , где  $\Delta_p = [-l_0 + (p-1)h, -l_0 + ph]$ ,  $h = 2l_0N^{-1}$ ; также введем координаты концов элементов  $\eta_p = -l_0 + (p-1)h$  и точки коллокаций  $y_q = -l_0 + (q-1/2)h$ , полагая, что  $p = 1..N$ ,  $s = 1..N$ . Будем считать, что функции  $\chi_1(\xi)$ ,  $\chi_2(\xi)$  постоянны на элементе  $\chi_j|_{\Delta_p} = \chi_{jp}$ . Считая, что уравнения (15) выполнены в наборе точек, придем к следующим соотношениям

$$\int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\xi) k_{js}(\eta - y_q) d\eta =$$

$$= \sum_{p=1}^N \chi_{jp} \int_{\Delta_p} k_{js}(\eta - y_q) d\eta = f_s(y_q),$$

(17)

которые можно трактовать, как алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^N \chi_{jp} H_{pq}^{(js)} = f_{sq}, \quad s = 3, 4,$$

(18)

где введены следующие обозначения

$$H_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha(\eta_p - y_q)} d\alpha \right)_{\eta_k}^{n_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha)}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha \right),$$

$$E_{pq}(\alpha) = \left[ e^{i\alpha(\eta_{p+1} - y_q)} - e^{i\alpha(\eta_p - y_q)} \right],$$

$$j = 1, 2, \quad s = 3, 4.$$

(19)

Легко показать, что подынтегральные функции интегралов в (19) не имеют особенности при  $\alpha = 0$ , кроме того  $\alpha^{-1} \tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) \rightarrow \text{const}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Способ вычисления коэффициентов согласно (19) зависит от четности подынтегральной функции. Несложный анализ показал, что  $\tilde{Z}_3^{(1)}(\alpha)$ ,  $\tilde{Z}_4^{(2)}(\alpha)$  четны по  $\alpha$ ,  $\tilde{Z}_4^{(1)}(\alpha)$ ,  $\tilde{Z}_3^{(2)}(\alpha)$  – нечетны. Разобьем каждый из рассматриваемых интегралов на расходящуюся и сходящуюся части  $H_{pq}^{(js)} = K_{js} \text{SING}_{pq}^{(js)} + \text{REG}_{pq}^{(js)}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $s = 3, 4$ :

$$\text{SING}_{pq}^{(13)} = \text{SING}_{pq}^{(24)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \text{sign}(\alpha) E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{SING}_{pq}^{(23)} = \text{SING}_{pq}^{(14)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{REG}_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}|\alpha|}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$js = 13, 24,$$

$$\text{REG}_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}\alpha}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$js = 23, 14.$$

(20)

Используем для вычисления (20) следующие формулы [17] ( $V_p$  означает главное значение в смысле Коши)

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) d\alpha = V_p \left( \frac{1}{t} \right),$$

$$\int_0^{\infty} \cos(\alpha t) d\alpha = \pi \delta(t).$$

(21)

Учитывая, что узловые значения  $\eta_p$  и точки коллокаций  $y_q$  не совпадают, получаем, что  $\text{SING}_{pq}^{(23)} = \text{SING}_{pq}^{(14)} = 0$ ,  $\text{SING}_{pq}^{(13)} = \text{SING}_{pq}^{(24)} = 2i \left( \frac{1}{\eta_{p+1} - y_q} - \frac{1}{\eta_p - y_q} \right)$ .

Используя квадратурные формулы высоких порядков для подсчета сходящихся интегралов  $\text{REG}_{pq}^{(js)}$ , решим систему уравнений (18). Получим дискретное представление для функций раскры-

тия. Для расчета волновых полей на внешней границе волновода воспользуемся формулой (16), где интегралы по  $[-l_0, l_0]$  могут быть посчитаны на основе квадратурных формул и полученных дискретных представлений для функций раскрытия, а интегралы  $m_{js}(\eta - y)$ ,  $j = 1, 2, s = 1, 2$  вычисляются аналогично  $X_s^{\text{эп}}(x, y)$ ,  $s = 1, 2$ .

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Используя следующие обобщенные значения интегралов [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| e^{i\alpha t} d\alpha = -2Vp\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{i\alpha t} d\alpha = -2\pi i \delta'(t),$$
(22)

получим следующие представления ядер

$$k_{js}(t) = \begin{cases} -\frac{K_{js}}{\pi} Vp\left(\frac{1}{t^2}\right) + R_{js}(t), & js = 13, 24, \\ R_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) - K_{js} |\alpha|] e^{i\alpha t} d\alpha, \\ -iK_{js} \delta'(t) + R_{js}(t), & js = 23, 14, \\ R_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) - K_{js} \alpha] e^{i\alpha t} d\alpha. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя в (15) представление (23) и вводя замену переменных по формулам  $\eta = l_0 t$ ,  $y = l_0 \tau$  получим

$$\left\{ \begin{aligned} & -\int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_1(t) K_{13}}{\pi(t-\tau)^2} d\eta + l_0 i K_{23} \tilde{\chi}_2'(\tau) + \\ & + l_0^2 \int_{-1}^1 (\tilde{\chi}_1(t) \tilde{R}_{13}(t-\tau) + \tilde{\chi}_2(t) \tilde{R}_{23}(t-\tau)) d\eta = \\ & = f_3(l_0 \tau), \\ & -\int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_2(t) K_{24}}{\pi(t-\tau)^2} d\eta + l_0 i K_{14} \tilde{\chi}_1'(\tau) + \\ & + l_0^2 \int_{-1}^1 (\tilde{\chi}_1(t) \tilde{R}_{14}(t-\tau) + \tilde{\chi}_2(t) \tilde{R}_{24}(t-\tau)) d\eta = \\ & = f_4(l_0 \tau). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь собраны слагаемые при одинаковых степенях  $l_0$  и введены обозначения  $\tilde{\chi}_1(t) = \chi_1(l_0 t) l_0^{-1}$ ,  $\tilde{\chi}_2(t) = \chi_2(l_0 t) l_0^{-1}$ ,  $\tilde{R}_{js}(\tau) = R_{js}(l_0 \tau)$ . Будем искать решение путем разложения по  $l_0$  в ряд Тейлора в

окрестности нуля. В качестве первого приближения получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_1(t) K_{13}}{(t-\tau)^2} d\eta = f_3(0), \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_2(t) K_{24}}{(t-\tau)^2} d\eta = f_4(0), \end{cases} \quad \text{где } \tau \in [-1, 1]. \quad (25)$$

Учитывая значение интеграла, существующего в смысле конечного значения по Адамару

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-\tau)^2} dt = 1,$$

получим главные члены разложений:  $\tilde{\chi}_1(t) = \frac{f_3(0)}{K_{13}} \sqrt{1-t^2}$ ,  $\tilde{\chi}_2(t) = \frac{f_4(0)}{K_{24}} \sqrt{1-t^2}$  и, соответственно, функции раскрытия

$$\chi_1(\eta) = f_3(0) K_{13}^{-1} \sqrt{l_0^2 - \eta^2},$$

$$\chi_2(\eta) = f_4(0) K_{24}^{-1} \sqrt{l_0^2 - \eta^2}. \quad (26)$$

Используя формулу (16), посчитаем поле перемещений на внешней границе волновода. Контурные интегралы  $m_{js}(t)$ ,  $j, s = 1, 2$  могут быть посчитаны путем прямого численного интегрирования по квадратурным формулам, или с помощью теории вычетов с удержанием конечного числа слагаемых. Так как решение, полученное по теории вычетов, справедливо при больших значениях  $|t|$ , то решение строится при  $y > l_0 + \delta$  или при  $y < -(l_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ .

Подставляя (26) в (16), получим соотношения вида

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) k_{js}(\eta - y) d\eta = \\ & = l_0^2 \left( \frac{f_3(0)}{K_{13}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{1s}(l_0 t - y) dt + \right. \\ & \left. + \frac{f_4(0)}{K_{24}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{2s}(l_0 t - y) dt \right). \end{aligned}$$

Используя теорему о вычетах, получим, что  $k_{js}(t) = i \sum_{n=1}^N \text{res}_{\alpha=\alpha_n} (\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha)) e^{i\alpha t}$  при  $t < 0$ , где  $\alpha_n$  — это все положительные полюса функции  $\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha)$ , а также полюса, располагающиеся в верхней полуплоскости. Перейдем к пределу при  $l_0 \rightarrow 0$  в интегралах вида  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \exp(i\alpha_n l_0 t) dt$  и получим две компоненты решения



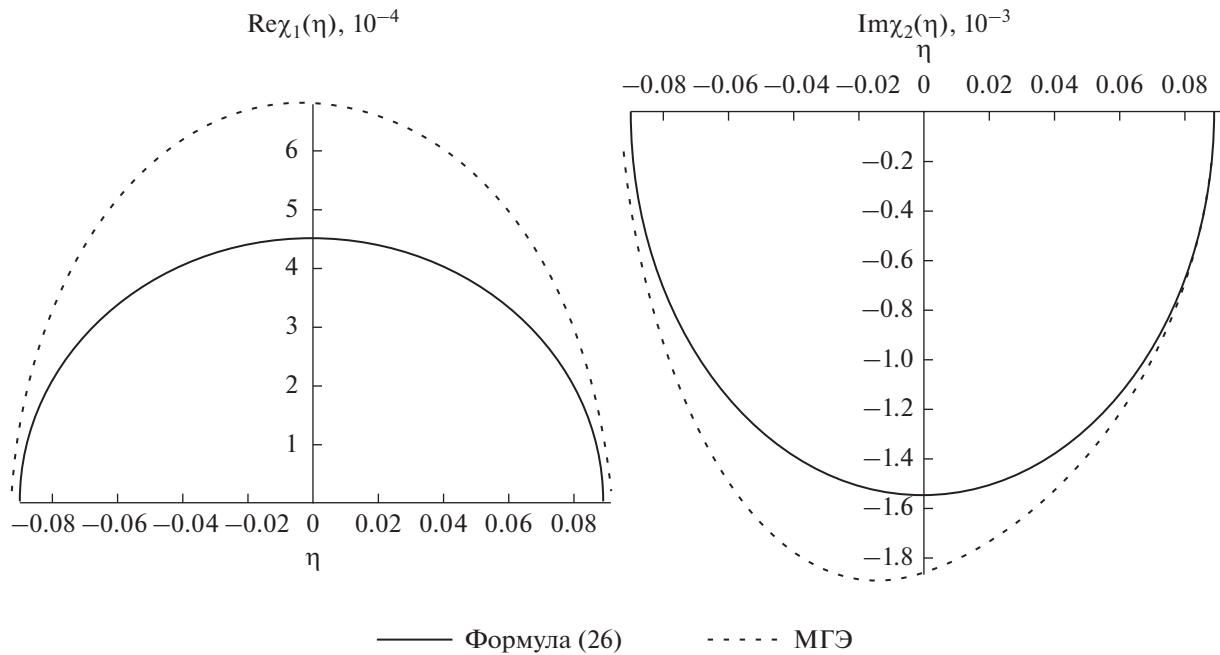


Рис. 2. Сравнение функций раскрытия, полученных по методу граничных элементов и асимптотически.

$$\begin{aligned}
 X_s(x, y) = & X_s^{эп}(x, y) - i \frac{l_0^2 \pi}{2} \times \\
 & \times \sum_{n=1}^N \left( \frac{f_3(0)}{K_{13}} \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_n} \left( \tilde{Z}_s^{(1)}(1, \alpha) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{f_4(0)}{K_{24}} \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_n} \left( \tilde{Z}_s^{(2)}(1, \alpha) \right) \right) \exp(-i\alpha_n y), \quad s = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Воспользуемся численным и асимптотическим методами для нахождения функций раскрытия. Для этого сравним решение системы (18) с асимптотическим решением (26) при следующем наборе параметров  $\kappa = 0.9$ ,

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 0.09, \quad l_1 = -2, \quad \xi_0 = 0.75, \\
 q(y) &= 1, \quad l_2 = -1, \quad \xi_1 = 0.9, \\
 g_1(x) &= \begin{cases} 1.5 - 0.1x, & x < \xi_1, \\ 14 + x^3, & x \geq \xi_1, \end{cases} \\
 g_2(x) &= \begin{cases} 1 + 0.1x, & x < \xi_1, \\ 11 - x^2, & x \geq \xi_1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены вещественная часть функции  $\chi_1(\eta)$  и мнимая часть функции  $\chi_2(\eta)$ , полученные по методу граничных элементов (точки) и асимптотически (сплошная линия). Здесь для метода граничных элементов выбрано  $N = 90$ . Проведена серия расчетов, где осуществ-

лялось уменьшение размера  $l_0$ . Расчеты показали, что уже при  $l_0 = 0.009$  относительная разница в равномерной метрике между сравниваемыми решениями не превышает 2%. Также проведена серия расчетов по увеличению числа граничных элементов  $N$ . При  $N = 450$  величины узловых значений на элементах, прилегающих к краям, в 10 раз меньше максимальных значений функций раскрытия. Отметим, что вне окрестностей точек  $\eta = \pm l_0$  функции раскрытия, соответствующие  $N = 90$  и  $N = 450$ , отличаются менее чем на 1%, что позволило при расчетах ограничиться числом граничных элементов  $N = 90$ .

Решения, полученные двумя методами, весьма близки. Это обусловлено тем, что поправка к эталонному решению много меньше самого эталонного решения. Поэтому на рис. 3 изображены поправки к эталонному полю радиальных перемещений на внешней границе волновода, найденные двумя методами. Расчеты выполнены также при  $l_0 = 0.09$ . Сплошным линиям на рисунке соответствуют вещественные части поправок, а пунктирным – мнимые, жирным выделены поправки к полю, полученные методом граничных элементов, а тонкими линиями изображены асимптотические поправки к решению, вычисленному по формуле (27). Как и в предыдущем случае, рассматриваемые поправки сближаются друг с другом при уменьшении размера  $l_0$  и при  $l_0 = 0.009$  максимальная относительная разница между сравниваемыми функциями не превышает 1%.

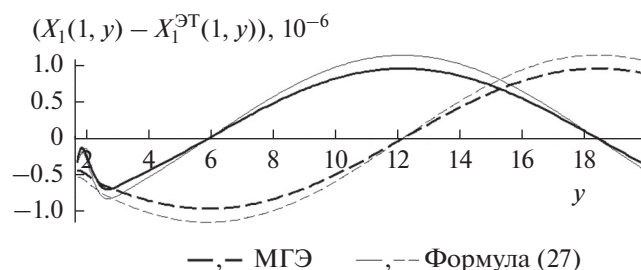


Рис. 3. Сравнение поправок к эталонному волновому полю на внешней границе, полученных по методу граничных элементов и асимптотически.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о вынужденных колебаниях неоднородного в радиальном направлении цилиндрического волновода с кольцевым отслоением. Методом граничных элементов решена возникающая система интегральных уравнений относительно скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении. Построено асимптотическое решение системы при малых размерах дефекта и поля перемещений на внешней границе волновода для случая с отслоением и без него. Выполнено сравнение решений, получаемых двумя методами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90017.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Su Z., Ye L., Lu Y. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review // J. Sound Vib. 2006. V. 295. № 3–5. P. 753–780.
3. Eremin A.A., Golub M.V., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Identification of delamination based on the Lamb wave scattering resonance frequencies // NDT E Int. 2019. V. 103. P. 145–53.
4. Ma L., Wu L., Zhou Z., Guo L. Scattering of the harmonic anti-plane shear waves by a crack in functionally graded piezoelectric materials // Composite Structures. 2005. V. 69. № 4. P. 436–441.
5. Айзикович С.М., Александров В.М., Трубчик И.С., Крнев Л.И. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве // Докл. Акад. наук. 2009. Т. 424. № 2. С. 185–189.
6. Александров В.М., Пожарский Д.А. К задаче о трещине раздела упругих полосы и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.
7. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.
8. Евдокимов А.А., Глушкова Н.В., Глушков Е.В. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
9. Gravenkamp H. Efficient simulation of elastic guided waves interacting with notches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures // Ultrasonics. 2018 V. 82. P. 101–113.
10. Антоненко Н.Н. Задача о продольной трещине с наполнителем в полосе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 315–322.
11. Дорошенко О.В., Кириллова Е.В., Фоменко С.И. Асимптотическое решение гиперсингулярного граничного интегрального уравнения, моделирующего рассеяние плоских волн на интерфейсной полосовой трещине // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 2. С. 86–99.
12. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 314–325.
13. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 4. С. 714–725.
14. Ватульян А.О., Юров В.О. Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 649–656.
15. Ватульян А.О., Юров В.О. О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20. № 1. С. 50–60.
16. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир. 1978. 518 с.
18. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

---

---

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

---

---

УДК 534.621.5,534-8

**СОЗДАНИЕ ЭТАЛОННОЙ ПЛОСКОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ  
В ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПЛОСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ БОЛЬШОГО ВОЛНОВОГО РАЗМЕРА**

© 2020 г. А. А. Крохмаль<sup>а, \*</sup>, Д. А. Николаев<sup>а</sup>, С. А. Цысарь<sup>а</sup>, О. А. Сапожников<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991 Россия

\*e-mail: doro1212@yandex.ru

\*\*e-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 01.11.2019 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Показана возможность использования плоского пьезоэлектрического преобразователя большого волнового размера в качестве источника эталонной плоской ультразвуковой волны, которая может быть использована для калибровки гидрофонов мегагерцового диапазона частот. В проведенном эксперименте в качестве излучателя использован пьезокерамический диск диаметром 100 мм и частотой толщинного резонанса около 1 МГц. Разработан способ определения чувствительности преобразователя в режиме излучения по измерениям его электрического импеданса. Предложена методика нахождения параметров плосковолновой компоненты излучаемого акустического импульса по известному электрическому сигналу на генераторе. Показано, что профиль акустического импульса, измеренный калиброванным гидрофоном вблизи излучателя, хорошо совпадает с теоретически предсказанным сигналом.

*Ключевые слова:* пьезоэлектрический преобразователь, калибровка гидрофонов, плосковолновой режим

**DOI:** 10.31857/S0320791920050068

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема калибровки излучателей и приемников является традиционной для акустических исследований, в частности, при применениях ультразвука в медицине, а также в задачах гидро- и аэроакустики. Важной характеристикой любого электроакустического преобразователя является его чувствительность, которая представляет собой связь между его электрическими и акустическими сигналами. Так, для звукового приемника (гидрофона или микрофона) под чувствительностью понимается отношение возникающего на нем электрического напряжения к акустическому давлению в месте размещения этого приемника при его отсутствии. Поскольку любой приемник имеет конечный размер, его отклик на акустическое поле зависит от того, какова структура поля в месте его расположения. Именно поэтому чувствительность вводится по отношению к волне с заданной структурой, в качестве которой обычно используется плоская падающая волна. Из сказанного ясно, что умение создавать плоскую волну с известными параметрами является принципиальным в задачах калибровки приемников.

Традиционно плосковолновой режим создается путем размещения приемника в дальнем поле акустического излучателя. Недостатком такого подхода является необходимость проведения измерений на больших расстояниях от источника, т.е. соответствующие установки не могут быть компактными. Кроме того, при измерениях в дальнем поле происходит заметное ослабление волны. Наконец, связь между электрическим сигналом на источнике и соответствующим акустическим сигналом на приемнике зависит от большого числа параметров, что понижает точность калибровки.

В настоящее время разработано большое количество методов калибровки акустических датчиков и нахождения параметров акустического поля: методы взаимности и самовзаимности [1, 2], метод определения акустической мощности, основанный на измерении радиационной силы [3], метод переменной нагрузки [4] и некоторые другие. Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки. Одним из привлекательных методов калибровки датчиков акустического давления является проведение измерений в эталон-

ном звуковом поле, т.е. в поле, характеристики которого заведомо известны. В этом случае основной задачей становится разработка устройства, способного создавать указанное эталонное поле. В настоящей работе предлагается один из вариантов такого метода калибровки. Показано, что в качестве источника эталонного поля может быть использован ультразвуковой преобразователь, излучающим элементом которого является плоский пьезокерамический диск.

Если диаметр однородно поляризованной плоской пьезокерамической пластины много больше длины волны, то при подаче на ее обкладки импульсного электрического напряжения она меняет свою толщину по “поршневому” закону, т.е. во всех точках пластины (за исключением малых участков вблизи края) ее поверхность смещается одинаково, излучая, тем самым, плоскую волну. Благодаря этому вблизи поверхности преобразователя существует область пространства, в которой в течение некоторого конечного интервала времени реализуется акустическое поле в форме бегущей плоской волны [5]. Указанная плоская волна может быть использована в качестве эталонного поля для проведения калибровки акустических приемников. Отметим, что близкое к плоской волне акустическое поле можно также создать с использованием многоэлементных решеток, в том числе синтезированных [6, 7], однако на практике использовать в качестве источников одноэлементные излучатели гораздо проще.

Использование плоской пьезопластины большого диаметра удобно не только тем, что она позволяет создать режим плоской волны, но и тем, что электрические и акустические процессы в ней можно описать с использованием одномерной модели электроакустического преобразователя [8, 9]. При таком подходе преобразователь описывается в виде шестиполюсника. В указанной модели электрическое напряжение  $U$  и сила тока  $I$  однозначно связаны с акустическими переменными – акустическим давлением  $p_1$ ,  $p_2$  и колебательной скоростью  $v_1$ ,  $v_2$  на внутренней и внешней поверхностях преобразователя, соответственно. Знание пьезоэлектрических и механических характеристик пластины и рабочей среды позволяет рассчитать величину излучаемого акустического давления на поверхности преобразователя. Ввиду наличия области бегущей плоской волны вблизи поверхности пластины та же величина звукового давления (лишь задержанная во времени) будет измерена датчиком, помещенным в любую точку данной области. Тем самым возникает возможность калибровки акустического приемника с помощью пьезоэлектрического преобразователя, излучающего эталонное акустическое поле. Отметим, что для реализации описанного подхода

требуется точное знание параметров пьезоэлектрического преобразователя.

Таким образом, для расчета излучаемого акустического поля необходимо иметь информацию о параметрах преобразователя, таких как пьезоэлектрические и упругие модули, коэффициент электромеханической связи, диэлектрическая постоянная, плотность, геометрические размеры пластины. В настоящей работе предлагается алгоритм действий, позволяющий на основе электрических и акустических измерений уточнить характеристики преобразователя, а затем рассчитать акустическое давление в зоне плоской волны аналитическим методом. Полученные результаты проверялись с помощью измерения акустической голограммы преобразователя [10, 11] и с помощью измерений поля на оси излучателя калиброванным гидрофоном.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ПОРШНЕВОГО ИСТОЧНИКА КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Рассмотрим преобразователь, активным элементом которого является круглый плоский пьезокерамический диск толщины  $l$  и радиуса  $R$ . Величина  $l$  определяет резонансную частоту толщинных колебаний преобразователя:  $f_0 = c/(2l)$ , где  $c$  – скорость продольной волны в пластине. Рассмотрим колебания пластины в одномерном приближении. Акустическое поле, создаваемое такой пластиной с равномерным распределением нормальной колебательной скорости по поверхности, находится решением задачи о гармоническом поршневом источнике [12].

Введем следующие величины, которые характеризуют гармоническое акустическое поле:  $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$  – вектор колебательной скорости, декартовы компоненты которого могут быть представлены в комплексном виде; в частности,

$$v'_z = \frac{V_z}{2} e^{-i\omega t} + \frac{V_z^*}{2} e^{i\omega t}, \text{ где } v_z \text{ – комплексная амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости; здесь предполагается, что ось } z \text{ ориентирована перпендикулярно поверхности излучателя. Так же в комплексном виде можно предста-}$$

вить акустическое давление:  $p' = \frac{p}{2} e^{-i\omega t} + \frac{p^*}{2} e^{i\omega t}$ , где  $p$  – комплексная амплитуда давления. Индексом 1 будем обозначать тыльную нагрузку – среду, с которой контактирует внутренняя поверхность пьезопластины (в описанном ниже эксперименте это был воздух), а индексом 2 – внешнюю среду (излучение производилось в воду). С учетом того, что  $v_z|_{x^2+y^2 \leq R^2} = v_2 = \text{const}$ ,  $v_z|_{x^2+y^2 > R^2} = 0$  (круглый поршневой источник), из решения волнового уравнения задачи во внешней среде получается

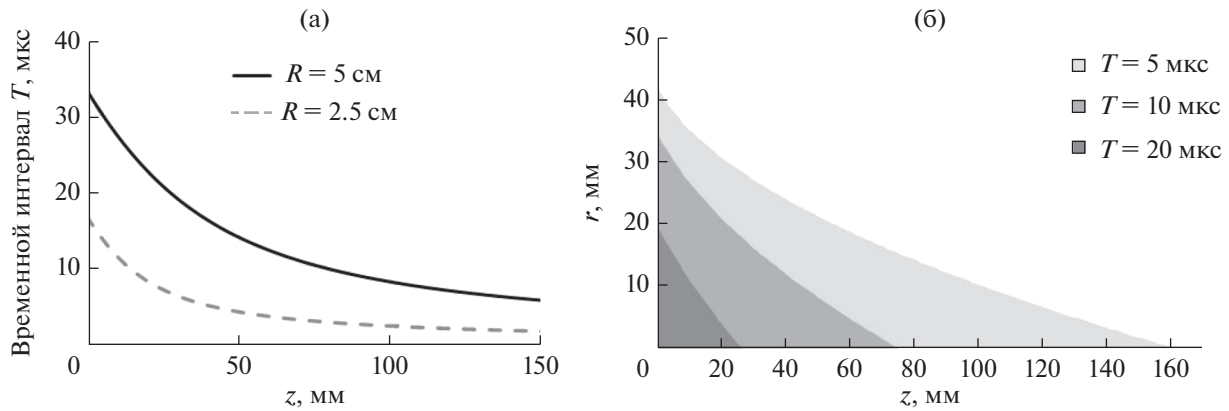


Рис. 1. (а) – Оценка временного интервала, в течение которого реализуется импульс плоской волны на оси симметрии преобразователей радиусов 5 и 2.5 см, в зависимости от расстояния до центра преобразователя; (б) – оценка размеров области плоской волны в направлениях вдоль и поперек оси пучка для плосковолновых интервалов 20, 10 и 5 мкс.

выражение для зависимости комплексной амплитуды давления на оси симметрии пластины от расстояния  $z$  до нее [12, 13]:

$$p(0, 0, z) = \rho_2 c_2 v_2 \left( e^{ik_2 z} - e^{ik_2 \sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad (1)$$

где  $\rho_2, c_2$  и  $k_2 = \omega/c_2$  – плотность, скорость звука и волновое число в жидкости. Если бы излучатель был бесконечно большим ( $R \rightarrow \infty$ ), то при предположении о малом поглощении в выражении (1) остался бы лишь член  $\sim e^{ik_2 z}$ , соответствующий плоской волне [13]. Однако при конечных размерах пластины отделить компоненты гармонического сигнала, приходящие с краев излучателя, от плоской волны невозможно. С другой стороны, в случае импульсного возбуждения излучателя нестационарное решение для поля в силу линейности задачи сводится к суперпозиции решений для спектральных составляющих. Для идеальной среды без поглощения и дисперсии из выражения (1) получаем следующее аналитическое решение для акустического давления на оси:

$$p'(0, 0, z, t) = \rho_2 c_2 \left[ V_2 \left( t - \frac{z}{c_2} \right) - V_2 \left( t - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{c_2} \right) \right], \quad (2)$$

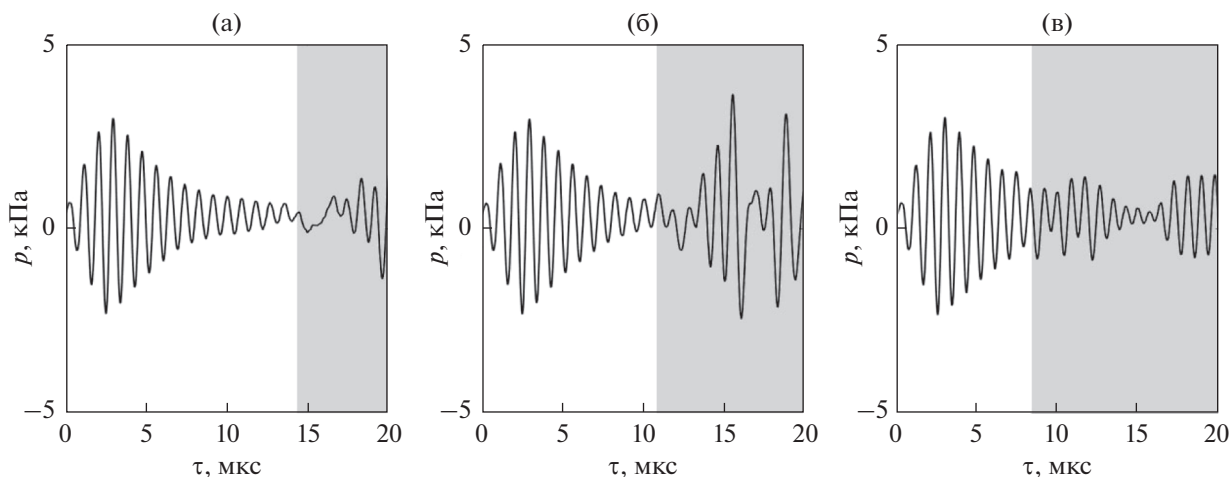
где  $V_2(t)$  – скорость поверхности излучателя. Из выражения (2) видно, что на расстоянии  $z$  от центра пластины, в случае начала возбуждения импульсного сигнала в момент  $t = 0$ , существует такой временной интервал  $\left[ z/c_2, \sqrt{z^2 + R^2}/c_2 \right]$ , в пределах которого имеется сигнал плоской волны, а краевая волна, описываемая вторым слагаемым, еще не достигла точки измерения. Таким образом, в пределах указанного интервала в чистом виде реализуется режим плоской акустической волны. На рис. 1а показана зависимость длительности плосковолнового временного ин-

тервала в зависимости от расстояния  $z$  от центра пластины для двух радиусов: 5 и 2.5 см. График наглядно демонстрирует, что для генерации плоской волны необходимо использовать преобразователь с большими размерами и что при этом измерения необходимо производить вблизи излучающей поверхности. Также важно отметить, что чем меньше расстояние от пьезопластины до гидрофона, тем больший вклад в измеряемый сигнал дает электрическая наводка от преобразователя. Таким образом, важно оптимальным образом расположить гидрофон, чтобы добиться максимальной длительности плосковолнового импульса и избежать электрических помех.

Интерес представляет и оценка области существования режима плоской волны при перемещении гидрофона в направлении поперек оси пучка. Режим плоской волны реализуется в пределах интервала времени между моментом прихода первого сигнала (сигнала “прямой” волны, распространяющейся перпендикулярно поверхности излучателя) и моментом прихода сигнала от ближайшей точки края излучателя. Отсюда следует, что если  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние от оси, то режим плоской волны будет выполняться в течение интервала времени длительностью

$$T \leq \frac{\sqrt{z^2 + (R-r)^2} - z}{c_2}. \quad (3)$$

Требование реализации режима плоской волны в пределах интервала заданной длительности  $T$  ограничивает область положения гидрофона. На рис. 1б показана область реализации указанного режима, рассчитанная по формуле (3) для преобразователя радиуса  $R = 50$  мм, для трех различных временных интервалов  $T$ : 5, 10 и 20 мкс. Видно, что чем меньше требуемый интервал времени, тем более протяженной является область



**Рис. 2.** Развертка сигналов в координатах бегущей волны  $\tau = t - z/c_2$ , записанных гидрофоном на оси излучателя на расстоянии (а) – 10, (б) – 50 и (в) – 100 мм. Серым цветом отмечена область регистрации краевой волны.

пространства, в которой реализуется плосковолновой режим.

На практике в дополнение к краевой волне в жидкости возникают задержанные сигналы, вызванные возбуждением в пьезопластине волн Лэмба [14, 15]. Волны Лэмба рождаются на краю пьезопластины, где нарушается условие однородности пластины. Распространяясь в направлении к центру пластины, они излучают в жидкость дополнительный сигнал, который может быть даже сильнее краевой волны. Однако, как и краевая волна, этот сигнал задержан относительно прямой волны и поэтому не препятствует образованию режима плоской волны.

Стоит отметить, что такие факторы, как конечная ширина полосы сигнала и расплывание формы волны во времени приводят к тому, что длительность сигнала в точке измерения может превысить ширину указанного временного интервала плоской волны.

Для проверки вышеизложенных соображений был проведен ряд измерений акустических сигналов вблизи поверхности преобразователя с помощью калиброванного гидрофона. Пьезокерамический диск имел диаметр 100 мм, его толщина составляла около 2 мм, а резонансная частота 1.12 МГц. Использовался гидрофон HGL-0200 (Onda, USA), ось которого ориентировалась перпендикулярно плоскости поверхности преобразователя. Гидрофон располагался на оси симметрии излучателя на различных расстояниях от его центра. На преобразователь подавался короткий импульсный электрический сигнал заданной формы. В качестве примера на рис. 2 показаны записи сигнала, принятого гидрофоном на расстояниях 10, 50 и 100 мм от преобразователя. Как видно из графиков, на ближнем расстоянии плоская и кра-

евая волны практически полностью разделяются, а с удалением от преобразователя возникает зона их перекрытия. Видно также, что форма и амплитуда плосковолновой компоненты остаются неизменными на разных расстояниях от поверхности преобразователя, что соответствует природе плоской волны. Следовательно, сигнал на поверхности преобразователя будет иметь точно такую же плосковолновую компоненту.

Экспериментально была зарегистрирована плоская волна с неизменной амплитудой и формой. Таким образом, если определить связь между электрическим сигналом, поданным с генератора на преобразователь, и плоской акустической волной, им излученной, можно будет использовать плоский преобразователь как устройство для калибровки гидрофонов или других преобразователей в режиме приема. При этом калибровка с помощью генерации плоской волны не подразумевает прецизионно точного расположения измерительного устройства – его достаточно расположить в области генерации плоской волны и перпендикулярно излучаемой поверхности [16].

### 3. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Электрический сигнал, подаваемый на пьезоэлектрический преобразователь, отличается от акустического сигнала, излучаемого во внешнюю среду, по форме и длительности. Амплитуда акустического сигнала линейно зависит от амплитуды электрического сигнала, а также от особенностей электроакустического преобразования. В качестве параметра, определяющего соотношение между электрическим и акустическим сигналами, можно выбрать чувствительность преобразовате-

ля в режиме излучения  $G$ . Выражение для чувствительности можно получить, рассмотрев процесс электроакустического преобразования в одномерном приближении и в гармоническом режиме.

Из литературы [8, 9] известно, как связать давления  $p_1, p_2$  и колебательные скорости  $v_1, v_2$  на внутренней и внешней поверхности пьезокерамической пластины с электрическими параметрами – напряжением на обкладках пластины  $U_0$  и силой протекающего тока  $I_0$ . Такую связь можно записать в матричном виде, что позволяет представить преобразователь как шестиполосник:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ U_0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \tilde{z} \operatorname{ctg} kl & -\tilde{z}/\sin kl & h/\omega S \\ \tilde{z}/\sin kl & -\tilde{z}/\operatorname{ctg} kl & h/\omega S \\ h/\omega & -h/\omega & 1/\omega C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\omega$  – циклическая частота гармонического возбуждения системы,  $\tilde{z} = \rho c$  – импеданс пьезокерамической пластины,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $\rho$  и  $c$  – плотность и скорость звука в материале пьезопластины,  $S$  – площадь поверхности преобразователя,  $C_0$  – емкость зажатого преобразователя,  $h$  – коэффициент, описывающий электроакустическое преобразование. Величины  $C_0$  и  $h$  связаны с коэффициентом электромеханической связи  $k_T$ ,  $z$ -компонентой пьезомодуля  $e_{z3}$  и диэлектрической проницаемостью зажатого преобразователя  $\epsilon$  следующим образом:

$$\begin{aligned} C_0 &= \epsilon \epsilon_0 S/l, \quad k_T = e_{z3}/\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \rho c^2}, \\ h &= e_{z3}/\epsilon \epsilon_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная.

Элементами столбцов в формуле (4) являются комплексные амплитуды соответствующих величин, причем предполагается, что полные величины изменяются по гармоническому закону как  $\sim \exp(-i\omega t)$ . Система уравнений (4) позволяет рассчитать работу пьезоэлектрического преобразователя как в режиме излучения, так и приема. Нас интересует режим излучения. Будем предполагать, что известны акустические импедансы  $z_1, z_2$  на внутренней и внешней сторонах пьезопластины:

$$p_1/v_1 = -z_1, \quad p_2/v_2 = -z_2. \quad (6)$$

С учетом (6) система уравнений (4) примет вид:

$$\begin{cases} p_1 = -i \frac{\tilde{z}}{z_1} \operatorname{ctg} kl p_1 - i \frac{\tilde{z}}{z_2} (1/\sin kl) p_2 + i (h/S\omega) I_0, \\ p_2 = -i \frac{\tilde{z}}{z_1} \left( \frac{1}{\sin kl} \right) p_1 - i \frac{\tilde{z}}{z_2} \operatorname{ctg} kl p_2 + i (h/S\omega) I_0, \\ U = -i (h/\omega) \frac{p_1}{z_1} - i \left( \frac{h}{\omega} \right) \frac{p_2}{z_2} + i \left( \frac{1}{\omega C_0} \right) I_0. \end{cases} \quad (7)$$

Из первого и второго уравнений системы (7) выразим  $p_1$  и  $p_2$  через ток  $I_0$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{ih}{S\omega} \frac{\sin kl + i \frac{\tilde{z}}{z_2} (\cos kl - 1)}{\left( 1 + \frac{\tilde{z}^2}{z_1 z_2} \right) \sin kl + i \tilde{z} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \cos kl} I_0, \\ p_2 &= \frac{ih}{S\omega} \frac{\sin kl + i \frac{\tilde{z}}{z_1} (\cos kl - 1)}{\left( 1 + \frac{\tilde{z}^2}{z_1 z_2} \right) \sin kl + i \tilde{z} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \cos kl} I_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив эти выражения в третье уравнение системы (7) и учитывая формулы (5), получим следующее соотношение между комплексными амплитудами напряжения на преобразователе и соответствующей силы тока:

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{I_0} &= Z_0 = \frac{1}{-i\omega C_0} \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{k_T^2}{kl} \frac{i \frac{z_1 + z_2}{\tilde{z}} \sin kl + 2(1 - \cos kl)}{\left( 1 + \frac{z_1 z_2}{\tilde{z}^2} \right) \sin kl + i \frac{z_1 + z_2}{\tilde{z}} \cos kl} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Это отношение комплексных амплитуд напряжения и силы тока является электрическим импедансом элемента  $Z_0$ . Отметим, что напряжение  $U_0$  и ток  $I_0$  в формуле (9) соответствует значениям непосредственно на обкладках пьезопластины. На практике для подачи сигнала к пьезопластине используется электрический кабель, один конец которого подсоединяется к обкладкам пьезопластины, а на втором конце находится разъем, к которому подводится электрическое напряжение от генератора. Поэтому напряжение и ток на входе в преобразователь – это напряжение  $U$  и ток  $I$  на конце кабеля, отличающиеся от соответствующих величин непосредственно на пьезопластине,  $U_0$  и  $I_0$ . С учетом влияния кабеля выражение для импеданса преобразователя  $Z = U/I$  имеет следующий вид [17]:

$$Z = R_c \frac{Z_0 - iR_c \operatorname{tg}(\omega L/v_c)}{R_c - iZ_0 \operatorname{tg}(\omega L/v_c)}, \quad (10)$$

где  $R_c$  – волновое сопротивление кабеля,  $L$  – его длина,  $v_c$  – скорость электромагнитных волн, распространяющихся в кабеле. При выводе соот-

ношения (10) учтено, что электрический кабель представляет собой длинную линию, т.е. волновод для электромагнитных волн. Свойства кабеля задаются его длиной  $L$ , скоростью распространения в нем электромагнитных волн  $v_c$  и волновым сопротивлением  $R_c$ .

Из (10) видно, что если бы преобразователь был согласованной нагрузкой с импедансом  $Z_0 = R_c$ , то импеданс  $Z$  был бы равен  $Z_0$  независимо от длины кабеля. В общем случае это не так. Например, если кабель короткий (его длина много меньше длины электромагнитной волны), то тангенс в формуле (10) можно заменить его аргументом, что дает  $Z = (Z_0 - i\omega \mathcal{L}_c L) / (1 - i\omega C_c LZ_0)$ , где  $\mathcal{L}_c = R_c/v_c$  и  $C_c = 1/(R_c v_c)$  имеют смысл погонной индуктивности и погонной емкости кабеля, соответственно. Типичные значения этих величин для 50-омного кабеля составляют  $\mathcal{L}_c = 0.275$  мкГн/м и  $C_c = 110$  пФ/м [18]. При малой нагрузке  $Z_0 \ll R_c$  короткий кабель ведет себя как индуктивность  $Z \approx -i\omega \mathcal{L}_c L$ , а при большой нагрузке  $Z_0 \gg R_c$  — как емкость  $Z \approx i/(\omega LC_c)$ . Как правило, однако, реализуется промежуточный случай, поэтому для корректного описания необходимо использовать более общую формулу (10).

Напряжение на выходном разьеме кабеля  $U$  связано с напряжением на обкладках пьезопластины  $U_0$  следующим образом:

$$\frac{U}{U_0} = \cos(\omega L/v_c) - i \frac{R_c}{Z_0} \sin(\omega L/v_c). \quad (11)$$

Отношение  $G = p_2/U$  можно считать передаточной функцией пьезоэлектрического преобразования в режиме излучения. Выражение для него вытекает из формул (8) и (11):

$$G = \frac{ih}{S\omega} \frac{\sin kl + i \frac{\tilde{z}}{z_1} (\cos kl - 1)}{\left(1 + \frac{\tilde{z}^2}{z_1 z_2}\right) \sin kl + i \tilde{z} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \cos kl} \times \frac{1}{Z_0 \cos(\omega L/v_c) - i R_c \sin(\omega L/v_c)}. \quad (12)$$

На практике не всегда возможно работать с гармоническими сигналами и, к тому же, для каждого преобразователя требуется некоторое время для установления излучаемого во внешнюю среду стационарного гармонического сигнала, которого может не хватить ввиду узости временного окна в режиме плоской волны в эксперименте. Поэтому предлагается работать с короткими импульсными сигналами, а приведенную теорию для гармонического режима использовать для интересующих нас спектральных компонент излучаемого импульсного сигнала, которые можно найти с помощью преобразования Фурье:

$\tilde{p}_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} p_2(\omega)$ ,  $\tilde{U}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(\omega)$ , где  $\tilde{p}_2(t)$  и  $\tilde{U}(t)$  — зависящие от времени сигналы, спектральными амплитудами которых являются  $p_2(\omega)$  и  $U(\omega)$ , соответственно.

Таким образом, модель шестиполюсника устанавливает зависимость между напряжением на генераторе и акустическим давлением на его поверхности. Если известны параметры преобразователя, то по подаваемому на преобразователь электрическому сигналу можно сразу определить характеристики излучаемой звуковой волны. Действительно, если измерить параметры указанного электрического сигнала, то можно рассчитать временную зависимость акустического давления на поверхности излучателя в 1-м приближении, а следовательно, полностью описать плосковолновую компоненту излучаемого акустического поля (см. раздел 2). Таким образом, возникает возможность создания эталонной плоской волны, которая может быть использована для калибровки гидрофонов на основе сопоставления электрического сигнала приемника и заданного акустического сигнала, измеренного в режиме плоской волны.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА

На практике часто известны не все параметры преобразователя или они известны с ограниченной точностью, и для получения достоверных результатов следует эти константы уточнить. В этом случае полезным оказывается аналитическое выражение для электрического импеданса пьезоэлектрического преобразователя (10). Импеданс нетрудно измерить в требуемом частотном диапазоне [19, 20] с помощью только осциллографа и резистора известного номинала, а в полученной частотной зависимости присутствуют все необходимые константы и параметры пьезокерамической пластины. Так как количество точек измерения можно сделать заведомо большим, чем количество неизвестных параметров, то по минимизации среднеквадратичного отклонения теоретической зависимости от экспериментальной можно эти параметры найти. После уточнения необходимых констант пластины становится возможной оценка акустического давления на поверхности преобразователя.

Полученная частотная зависимость электрического импеданса (10) включает в себя те параметры преобразователя, которые могут быть заранее неизвестными. Допустим, что известны геометрические размеры пластины (толщина  $l$ , площадь  $S$ ) и плотность  $\rho$ , которая для пьезопластины используемого типа PZT-4 составляет



$\rho = 7560 \text{ кг/м}^3$ , а остальные параметры заданы лишь с ограниченной точностью. Тогда неизвестными оказываются емкость зажатого преобразователя  $C_0$ , коэффициент электромеханической связи  $k_T$  и скорость продольной волны в пьезоэлектрике  $c$ , которая входит в выражение для волнового числа и акустического импеданса.

Для определения параметров преобразователя предлагается следующая последовательность действий. На первом шаге следует провести экспериментальное измерение частотной зависимости  $Z(\omega)$  в воде и воздухе. Измерения следует проводить в широком диапазоне частот, уменьшая шаг вблизи резонансных частот. При этом часть неизвестных параметров можно определить из экспериментальной зависимости импеданса от частоты без дополнительных расчетов. Далее нужно численно подобрать неизвестные параметры, чтобы теоретическая зависимость импеданса от частоты (10) совпадала с экспериментально измеренной зависимостью наилучшим образом. Ниже описана последовательность действий, которые нужно выполнить для определения всех неизвестных параметров преобразователя на основе экспериментального измерения его электрического импеданса.

### *Шаг 1. Нахождение резонансной частоты преобразователя*

Когда сделаны экспериментальные измерения  $Z(\omega)$  в воде и воздухе, по максимуму действительной части импеданса можно найти резонансную частоту преобразователя. Измерения в воде и воздухе, а также широкий частотный диапазон, охватывающий и первый, и третий резонанс, позволяют с определенной точностью найти резонансную частоту пьезоэлектрической пластины. В наших экспериментах она составила  $f_0 = 1.120 \pm 0.002 \text{ МГц}$ , причем погрешность была оценена из сравнения резонансных частот первой, третьей и пятой гармоники. Резонансная частота позволяет рассчитать неизвестное нам отношение скорости продольной волны к толщине пластины по формуле  $c/l = 2f_0$ .

### *Шаг 2. Определение электрической емкости пьезопластины*

На данном этапе можно оценить емкость преобразователя  $C_0$ . Метод заключается в рассмотрении низкочастотной асимптотики импеданса,

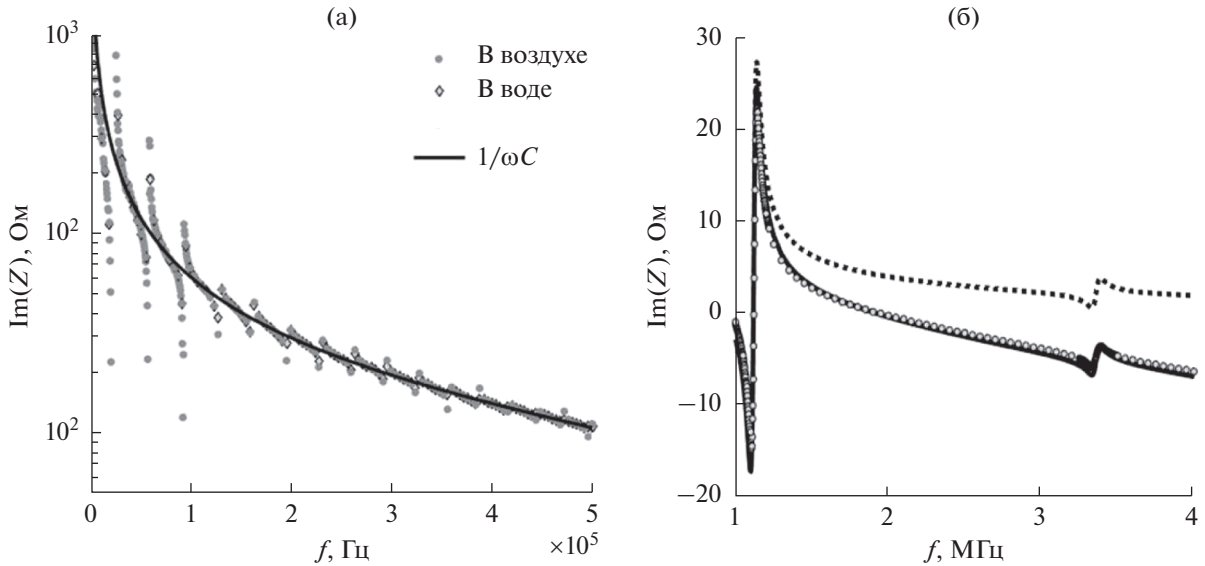
$Z_0 \approx \frac{i}{\omega C_0}$ . Если провести измерения импеданса преобразователя в низкочастотной области, то из аппроксимации зависимости мнимой части импеданса от частоты гиперболой можно оценить

искомую емкость (рис. 3а). Так как низкочастотная асимптотика зависит только от емкости пьезопластины, зависимости мнимой части импеданса от частоты при измерениях в воде и воздухе должны быть идентичны, что и наблюдается в эксперименте. На практике гиперболическая зависимость искажается из-за возникновения волн Лэмба, однако искажения уменьшаются с увеличением частоты. Найденная емкость пьезопластины оказалась равной  $C_0 = 21.195 \pm 0.004 \text{ нФ}$ ; погрешность была оценена из сравнения независимых измерений в воде и воздухе. Зная геометрические размеры пластины, из аппроксимации низкочастотной асимптотики можно довольно точно оценить величину диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , что в дальнейшем поможет при более точном подборе остальных характеристик преобразователя.

### *Шаг 3. Определение параметров электрического кабеля, подсоединенного к преобразователю*

Влияние кабеля и необходимость его учета при измерении импеданса показана на рис. 3б: электрический кабель изменяет наклон мнимой части импеданса преобразователя, что особенно заметно в диапазоне частот между  $f_0$  и  $3f_0$ . Зависимость мнимой части импеданса  $\text{Im}(Z)$  от частоты в этой области в основном обусловлена гиперболической асимптотикой  $\sim \frac{1}{\omega C_0}$  и влиянием

кабеля. Величина  $\text{Im}(Z)$  практически не зависит от акустического импеданса керамики  $\tilde{z}$  и коэффициента  $k_T$ , так как в этой области резонансный множитель сравнительно мал. Поэтому, задав табличные (т.е. приближенные) значения для неизвестной величины  $k_T$  и используя найденные параметры  $C_0$  и  $c/l$ , по сопоставлению экспериментально измеренной мнимой части импеданса с формулой (10) можно определить фазовую задержку, вносимую кабелем, т.е. отношение его длины к скорости электромагнитных волн  $L/v_c$ . В эксперименте использовался электрический кабель с волновым сопротивлением  $R_c = 50 \text{ Ом}$ . Так как длину электрического кабеля легко измерить, для проверки правильности методики расчета можно вычислить скорость электромагнитных волн и сравнить полученный результат с табличными значениями. В нашем эксперименте длина кабеля составляла  $L = 1.00 \pm 0.001 \text{ м}$ , а найденная фазовая задержка оказалась равной  $L/v_c = (6.359 \pm 0.002) \times 10^{-9} \text{ с}$ , что хорошо соответствовало типичным значениям для скорости электромагнитных волн в кабеле [18]. Погрешность для величины  $L/v_c$  также была оценена сравнением измерений этой величины при по-



**Рис. 3.** (а) – Аппроксимация мнимой части экспериментально измеренного импеданса гиперболической зависимостью в области низких частот для определения емкости зажатого преобразователя, (б) – сопоставление экспериментально измеренной частотной зависимости мнимой части импеданса преобразователя (кружки) с теоретической формулой для  $Z_0$  без учета влияния электрического кабеля (пунктирная линия) и зависимостью для  $Z$  с учетом кабеля (сплошная линия).

гружении преобразователя в воду и воздух. В проведенных экспериментах результаты измерений в этих двух случаях в пределах указанной выше погрешности не отличались.

**Шаг 4. Определение коэффициента электромеханической связи  $k_T$  из измерений импеданса в воздухе**

Из формулы для импеданса пьезопластины (9) видно, что в нее входят отношения акустических импедансов сред  $z_1$  и  $z_2$  к импедансу керамики  $\tilde{z}$ . Если же и слева, и справа от пьезопластины находится воздух, то это отношение становится малым. Поэтому формулу (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$Z_0|_{z_1, z_2 \rightarrow 0} = \frac{1}{-i\omega C_0} \left[ 1 - \frac{k_T^2}{kl} \frac{2(1 - \cos kl)}{\sin kl} \right]. \quad (13)$$

В таком случае по точке пересечения мнимой части импеданса преобразователя оси абсцисс можно найти неизвестный нам коэффициент электромеханической связи  $k_T$  [9]:

$$k_T^2 = \frac{\frac{\pi}{2} f_1 / f_0}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} f_1 / f_0 \right)}, \quad (14)$$

где частота  $f_1$  соответствует равенству нулю мнимой части импеданса преобразователя.

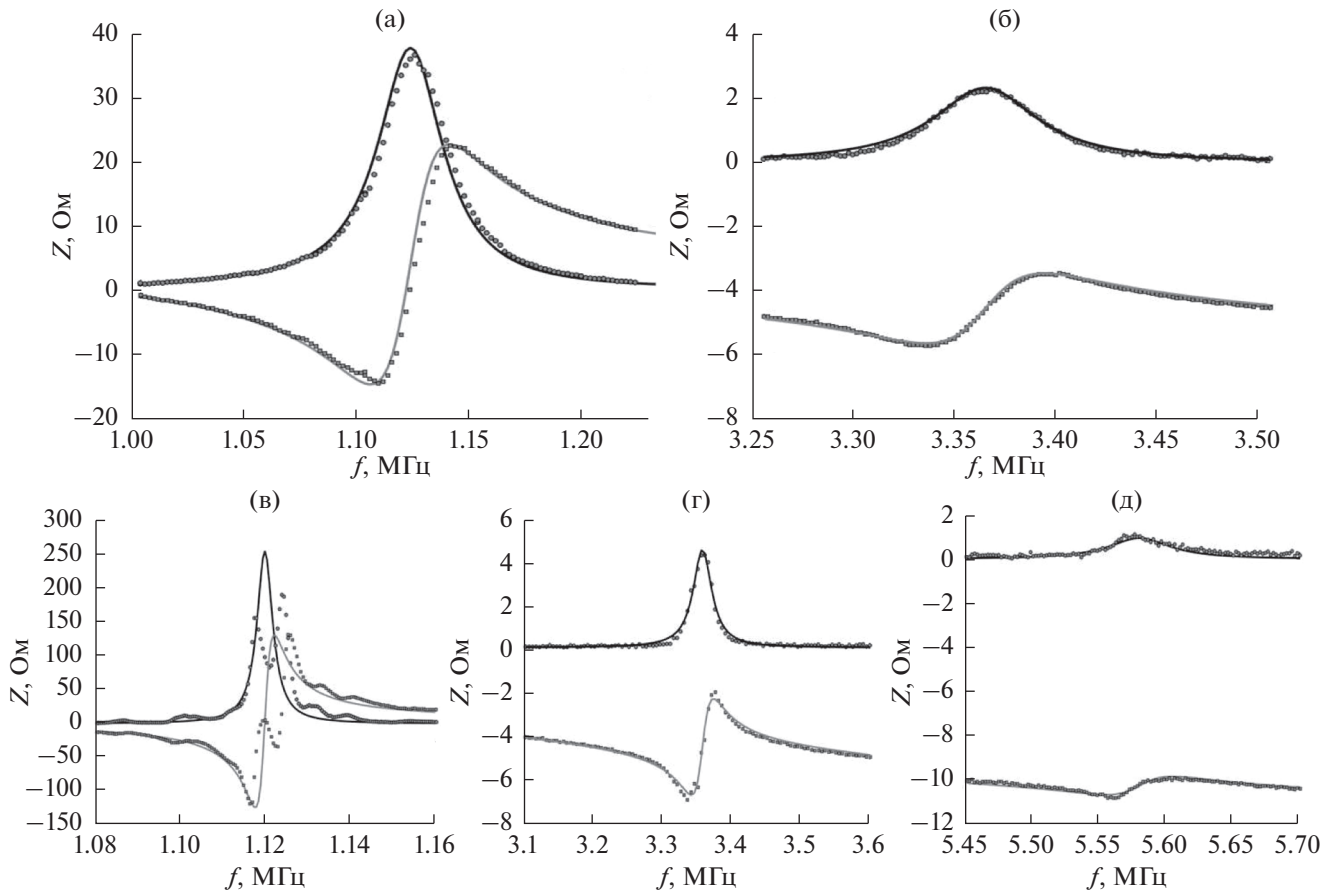
Так как в эксперименте мы измеряем импеданс преобразователя с учетом кабеля, для оценки импеданса самой пьезопластины и нахождения  $k_T$  нужно от влияния кабеля избавиться. С помощью найденного значения  $L/v_c$  преобразуем формулу (10) и получим следующее выражение для импеданса пластины:

$$Z_0^{\text{exp}} = R_c \frac{Z_{\text{exp}} + iR_c \operatorname{tg}(\omega L/v_c)}{R_c + iZ_{\text{exp}} \operatorname{tg}(\omega L/v_c)}. \quad (15)$$

Теперь остается только определить, на какой частоте мнимая часть импеданса преобразователя в воздухе пересекает ось абсцисс, и рассчитать коэффициент электромеханической связи. В нашем эксперименте эти величины оказались равными  $f_1 = 1.014 \pm 0.001$  МГц и  $k_T = 0.462 \pm 0.004$ , причем погрешность  $f_1$  соответствовала шагу по частоте при измерении электрического импеданса преобразователя, а погрешность  $k_T$  была рассчитана как косвенная в зависимости от погрешности величин  $f_0$  и  $f_1$ .

**Шаг 5. Определение тангенса угла потерь пьезокерамики**

Последним неизвестным параметром является тангенс угла механических и электрических потерь  $\operatorname{tg}\delta$ , который вносит вклад в мнимую часть волнового числа следующим образом:  $k = \frac{\omega}{c} (1 + i\operatorname{tg}\delta)$ .



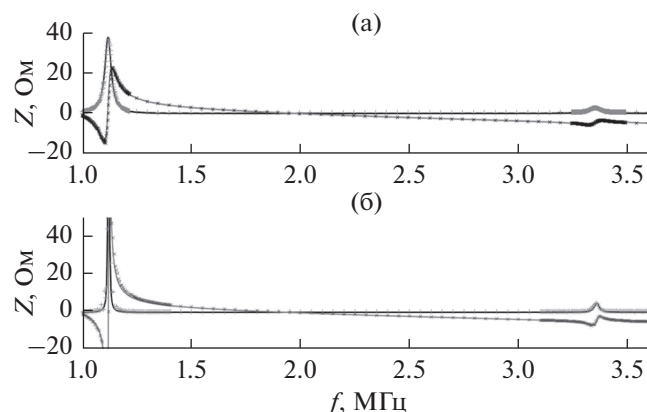
**Рис. 4.** Сопоставление мнимой и действительной частей импеданса, экспериментально измеренных (квадраты и кружки, соответственно) и теоретически рассчитанных (серая и черная сплошная линия, соответственно) для измерений (а, б) в воде и (в–д) в воздухе на резонансных частотах.

Его величину можно определить по пиковому значению действительной части импеданса в областях резонанса. Более корректно проводить поиск коэффициента потерь  $\operatorname{tg}\delta$  в воздухе, так как в воде возникают дополнительные потери, связанные с излучением. Однако и в воздухе, и в воде на первом резонансе сильным оказывается влияние волн Лэмба, которые существенно искажают вид импедансной зависимости (рис. 4а, 4в). Поэтому при воздушной нагрузке целесообразно искать тангенс потерь на 3-й и 5-й резонансных гармониках: на них влияние волн Лэмба уже мало (рис. 4г, 4д). По сопоставлению экспериментально измеренной действительной части импеданса в областях резонансных частот с формулой (10) было найдено значение коэффициента потерь  $\operatorname{tg}\delta$ : на частотах  $3f_0$  и  $5f_0$  в воздухе оно оказалось равным  $\operatorname{tg}\delta = (4.92 \pm 0.08) \times 10^{-3}$ , где погрешность была оценена из сравнения измерений в двух различных частотных областях. В пределах

указанной погрешности тангенс угла потерь  $\operatorname{tg}\delta$  не изменялся с частотой. Это значение  $\operatorname{tg}\delta$  удовлетворяло и измерениям в воде на частоте  $3f_0$  (рис. 4б). Следовательно, найденный коэффициент потерь можно применять во всем рассмотренном диапазоне частот.

Таким образом, после выполнения указанных выше пяти шагов в выражении для импеданса (10) определяются все искомые параметры пьезоэлектрического преобразователя. Константа  $h$ , согласно (4), находится через вышеупомянутые величины — диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ , входящую в емкость преобразователя  $C_0$ , и коэффициент электромеханической связи  $k_T$ .

Результаты сопоставления экспериментальных данных с теоретической зависимостью для воды и воздуха показаны на рис. 5а, 5б. В результате применения изложенного алгоритма действий были определены параметры использованного в работе пьезокерамического преобразователя. Они приведены в табл. 1.

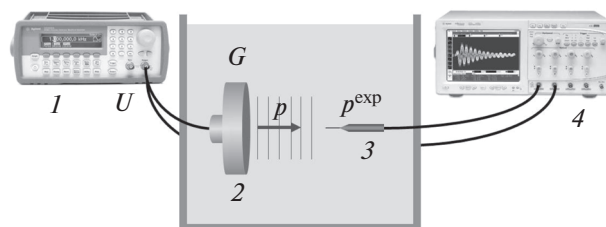


**Рис. 5.** Сопоставление мнимой и действительной частей импеданса, экспериментально измеренных (квадраты и кружки, соответственно) и теоретически рассчитанных (серая и черная сплошная линия, соответственно) для измерений в (а) – воде и (б) – воздухе в широком диапазоне частот.

### 5. ИЗМЕРЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ И СРАВНЕНИЕ С РАСЧЕТОМ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В ходе эксперимента (рис. 6) известный электрический сигнал  $\tilde{U}(t)$  подавался с генератора частот на преобразователь, который, в свою очередь, излучал акустическую волну, состоящую из плоской и краевой компонент. На некотором расстоянии от преобразователя, в области, где эти компоненты разделялись по времени, располагался гидрофон и записывался принимаемый им сигнал. Плосковолновую компоненту  $\tilde{p}_2(t)$ , соответствующую рассчитываемому временному окну, в пространстве частот связывает с  $U(\omega)$  соотношение (12). Таким образом, сравнивались экспериментально измеренный сигнал  $p^{\text{exp}}(t)$  и теоретический сигнал  $\tilde{p}_2(t)$ , рассчитанный по известному заданному напряжению на генераторе  $\tilde{U}(t)$ . Отметим, что рассчитанный сигнал  $\tilde{p}_2(t)$  соответствует только плоской волне, излученной преобразователем, так как в предложенной теории не учитываются краевые эффекты и поверхностные волны.

Сигналы излучались преобразователем, который представлял собой круглую пьезокерамическую пластину диаметром 100 мм и толщиной 2 мм,



**Рис. 6.** Схема эксперимента по излучению и приему плоской волны. 1 – генератор, 2 – пьезоэлектрический преобразователь, 3 – гидрофон, 4 – осциллограф.

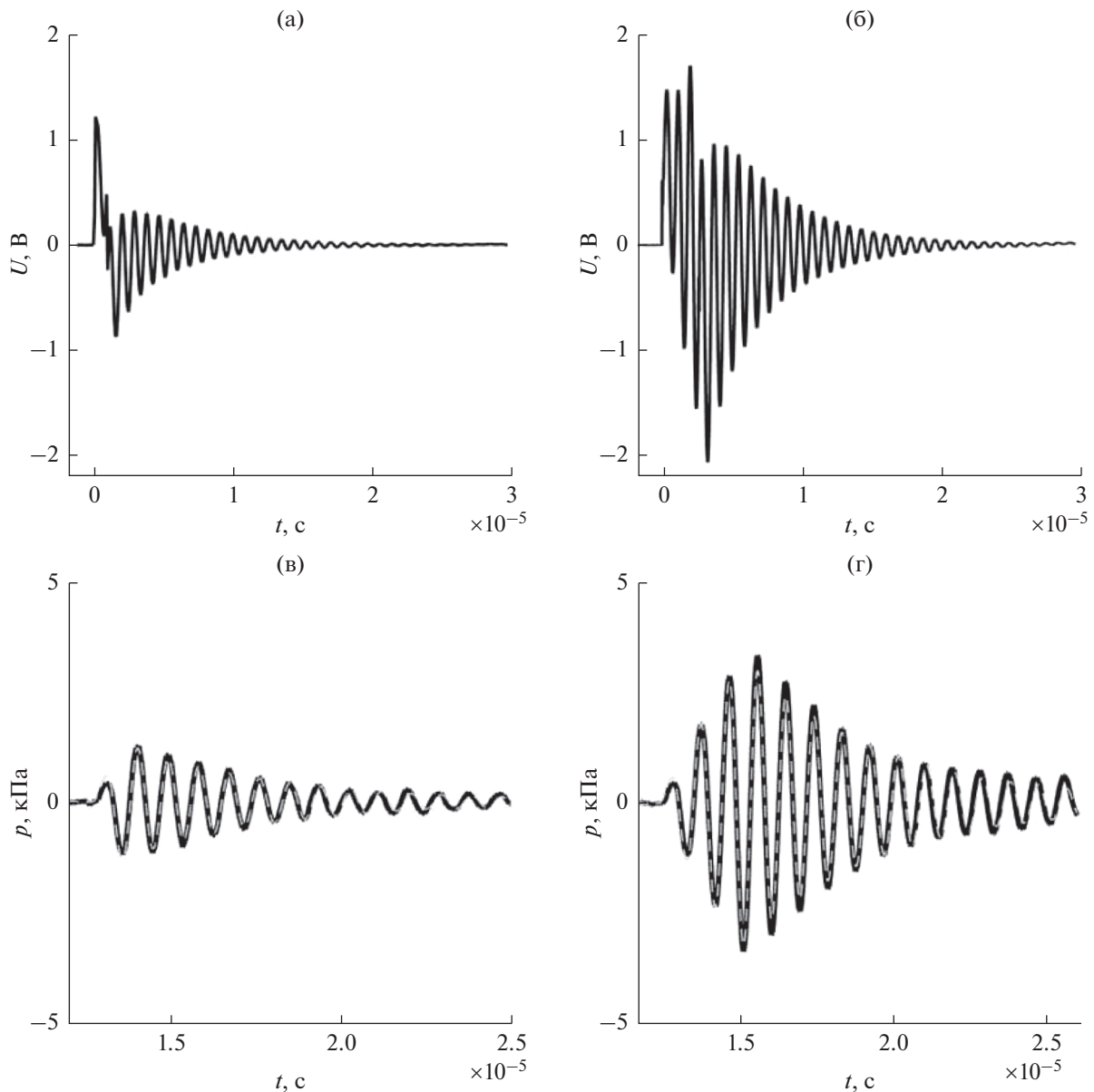
закрепленную в герметичном металлическом корпусе с помощью колец из проводящей резины, расположенных на противоположных сторонах пьезопластины вблизи ее края. Каждое из указанных колец было образовано замкнутым резиновым шнуром круглого сечения диаметром 1 мм, позволявшим обеспечить электрический контакт с посеребренной поверхностью пластины при минимальном механическом воздействии на ее колебание. Ввиду того, что у пьезокерамической пластины тыльная нагрузка была воздушной, преобразователь обладал высокой механической добротностью ( $Q \sim 10$ ), и поэтому длительность излучаемой акустической волны оказывалась в несколько раз больше периода электрического сигнала, задаваемого генератором. Более подробно конструкция используемого преобразователя описана в работе [5].

Электрический сигнал создавался с помощью генератора Agilent 33250A. Амплитуда импульсов, подаваемых на преобразователь, составляла 3 В. В качестве импульсов использовались сигналы, состоящие из одного или из трех периодов синуса на резонансной частоте преобразователя. Для записи сигнала в области реализации плоской волны был использован упомянутый выше калиброванный гидрофон HGL-0200 (Onda, USA). Заводская чувствительность гидрофона была указана производителем с точностью до 1 дБ и в пределах погрешности в исследуемой полосе частот составляла  $-262$  дБ относительно 1 В/мкПа на 1 МГц.

На рис. 7 показаны записи электрического сигнала на преобразователе (рис. 7а, 7б) и соответствующие им акустические сигналы (рис. 7в, 7г). Экспериментально измеренные сигналы с учетом чувствительности гидрофона были сопоставлены с теоретически рассчитанными акустическими сигналами по формуле (12), где спектр электриче-

**Таблица 1.** Найденные параметры используемого преобразователя

$R$ , мм	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$f_0$ , МГц	$C_0$ , нФ	$L/v_c$ , 10 <sup>-9</sup> с	$k_T$	$\text{tg}\delta$ , 10 <sup>-3</sup>
50	7560	$1.120 \pm 0.002$	$21.19 \pm 0.04$	$6.359 \pm 0.002$	$0.463 \pm 0.004$	$4.92 \pm 0.08$

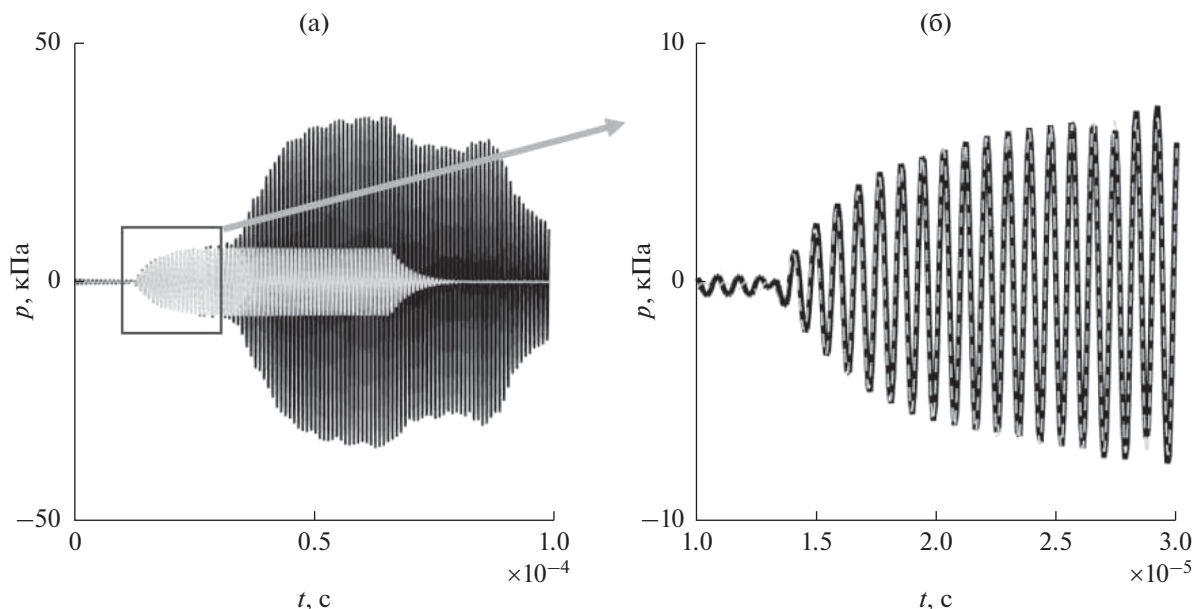


**Рис. 7.** Электрический сигнал, измеренный на преобразователе при форме электрического импульсного сигнала на генераторе в виде (а) – одного периода синуса на резонансной частоте и (б) – трех периодов синуса на резонансной частоте, и (в, г) – сопоставление соответствующего экспериментально измеренного сигнала давления (черная линия) с теоретически рассчитанным (серая линия).

ского сигнала  $U$  соответствовал записям на рис. 7а, 7б. Измерения показали, что для обоих преобразователей расчетный сигнал очень хорошо описывает измеренный сигнал, причем как его форму, так и амплитуду, вписываясь в погрешность заводской чувствительности 1 дБ.

При выводе соотношения (12), связывающего акустическое давление с напряжением на генераторе, не было использовано никаких ограничений на длительность сигнала. Таким образом, в случае работы преобразователя в квазигармоническом режиме также возможно оценить ампли-

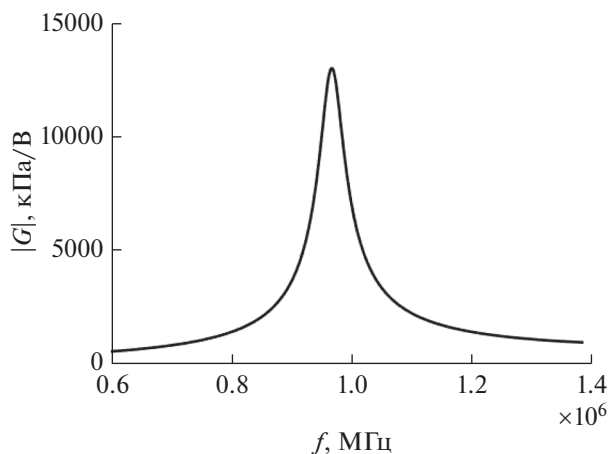
туду излучаемой гармонической волны. На рис. 8 показано сопоставление расчетного акустического давления для плоской волны с экспериментально измеренным давлением, когда на преобразователь подавался электрический сигнал длительностью в 60 периодов синуса на резонансной частоте преобразователя. При достаточно большом диаметре преобразователя и, следовательно, большом временном окне, соответствующем плосковолновому режиму распространения, амплитуда принимаемого сигнала успевает стабилизироваться на постоянном уровне, и ее легко



**Рис. 8.** Сопоставление экспериментально измеренного сигнала (черная линия) с теоретически рассчитанным (серая линия) для квазигармонического электрического сигнала (на генераторе задано 60 периодов синуса на резонансной частоте).

сопоставить с расчетной в той области, где уже наблюдается постоянная на нескольких периодах амплитуда колебаний. Возникающие следом колебания, соответствующие приходу краевых волн, также через некоторое время стабилизируются, и итоговую амплитуду давления в точке измерения можно узнать по сопоставлению амплитуд установившихся плосковолнового и полного полей.

При возбуждении преобразователя в режиме непрерывного синусоидального сигнала представляет интерес связь между амплитудами излучаемой акустической волны  $p_2$  и электрического напряжения на входе преобразователя  $U$ . На рис. 9



**Рис. 9.** Отношение давления, излучаемого преобразователем, к напряжению на преобразователе в зависимости от частоты сигнала.

приведена рассчитанная по формуле (12) зависимость чувствительности в режиме излучения  $|G| = |p_2/U|$  от частоты для исследуемых пьезопреобразователей. Указанная зависимость позволяет определить излучаемое акустическое давление по электрическому напряжению, измеренному на излучателе, т.е. использовать преобразователь как эталонный источник в некотором конечном диапазоне частот. Естественным ограничением по созданию желаемых излучаемых сигналов является резонансный характер чувствительности преобразователя. Из-за высокой механической добротности спектр импульсного акустического сигнала является довольно узким, и поэтому сопоставление амплитуд экспериментально измеренного и теоретически рассчитанного сигналов возможно только для спектральных компонент вблизи частоты резонанса. Для калибровки гидрофона в широкой полосе частот нужно либо использовать преобразователь с широким резонансом (это возможно при правильном подборе тыльной нагрузки), либо несколько преобразователей с разными резонансными частотами.

Таким образом, предложенный способ позволяет с помощью плоского пьезоэлектрического преобразователя большого волнового размера излучать плоскую акустическую волну известной амплитуды и формы. Эта возможность является привлекательной применительно к задаче калибровки гидрофонов [21–24].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы показана возможность использования плоского пьезоэлектрического преобразователя большого волнового размера в качестве источника плосковолнового поля с известным временным профилем. На тот случай, когда характеристики преобразователя по какой-либо причине неизвестны, был предложен способ определения этих характеристик с помощью измерения электрического импеданса.

Применение пьезоэлектрического преобразователя в качестве источника известного плосковолнового звукового поля возможно в широком диапазоне частот, так как всегда можно подобрать такую пьезопластину, толщинный резонанс которой соответствовал бы необходимому частотному интервалу. Использование согласованной тыльной нагрузки и согласующих слоев, а также использование градиентных пьезокерамических пластин [25], когда пьезоэлектрические характеристики линейно изменяются по толщине, а также ультразвуковых пьезоэлектрических преобразователей с управляемыми характеристиками [26] позволяет сгладить резонансные пики и увеличить диапазон рабочих частот. Таким образом, изложенные результаты и методики являются хорошей основой для калибровки гидрофонов и расчета амплитуды излучаемых полей.

Исследования поддержаны грантом РНФ № 19-12-00148. Работа А.А. Крохмаль выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боббер Р.Дж.* Гидроакустические измерения. М.: Мир, 1974. 362 с.
2. *Доля В.К.* О возможности самоградуировки электроакустического преобразователя, удовлетворяющего теореме взаимности // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 629–633.
3. *Николаева А.В., Цысарь С.А., Сапожников О.А.* Измерение радиационной силы мегагерцевого ультразвука, действующей на твердотельный сферический рассеиватель // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 29–37.
4. *Санин А.Г., Чичагов П.К., Рейман А.М.* Градуировка ультразвуковых преобразователей // Ультразвуковая диагностика. Сборник научных трудов ИПФ АН, Горький. 1983. С. 21–36.
5. *Хасанова М.В., Цысарь С.А., Николаев Д.А., Сапожников О.А.* Теоретическое исследование и экспериментальная демонстрация возможности создания режима плоской бегущей волны при использовании плоского пьезоэлектрического источника большого волнового размера // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2018. С. 1750709-1–1750709-6.
6. *Nikolaev D., Tsysar S., Krendeleva A., Sapozhnikov O., Khokhlova V.* Using acoustic holography to characterize absorbing layers // Proc. Meetings on Acoustics. 2019. V. 38. P. 045012/1–045012/5.
7. *Исаев А.Е., Айвазян Ю.М., Поликарпов А.М.* Проблемы исследования акустических свойств материалов методами ближнего поля // Альманах современной метрологии. 2020. № 1. С. 163–196.
8. *Харкевич А.А.* Теория электроакустических преобразователей. Изб. труды в трех томах. Т. 1. М.: Наука, 1973. 400 с.
9. *Кайно Г.* Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов. М.: Мир, 1990. 656 с.
10. *Сапожников О.А., Пищальников Ю.А., Морозов А.В.* Восстановление распределения нормальной скорости на поверхности ультразвукового излучателя на основе измерения акустического давления вдоль контрольной поверхности // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 416–424.
11. *Sapozhnikov O.A., Tsysar S.A., Khokhlova V.A., and Kreider W.* Acoustic holography as a metrological tool for characterizing medical ultrasound sources and fields // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. № 3. P. 1515–1532.
12. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
13. *Крылов В.В.* Основы теории излучения и рассеяния звука. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 118 с.
14. *Cathignol D., Sapozhnikov O.A., Zhang J.* Lamb waves in piezoelectric focused radiator as a reason for discrepancy between O’Neil formula and experiment // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 3. P. 1286–1297.
15. *Сапожников О.А., Смагин М.А.* Нахождение дисперсионных зависимостей для волн лэмбовского типа в вогнутой пьезоэлектрической пластине посредством оптической визуализации излучаемого в жидкость ультразвукового поля // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 199–206.
16. *Дорофеева А.А., Сапожников О.А.* Учет влияния дифракционной расходимости и неидеальности отражения от металлического рефлектора при градуировке пьезоэлектрического преобразователя методом самовзаимности // Учен. зап. физ. ф-та МГУ. 2017. С. 1750301-1–1750301-5.
17. *Григорьев А.Д.* Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высшая школа, 1990. 335 с.
18. *Parker K.J., Friets E.M.* On the measurements of shock waves // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1987. V. 34. № 4. P. 454–460.
19. *Егоров А.В., Овчинников И.В., Жуков И.А.* Измерительно-вычислительный комплекс для определения импеданса пьезоэлектрических преобразователей // Известия АлтГУ. 2010. Т. 1. № 1. С. 125–126.
20. *Кононенко В.С.* Электрический импеданс и амплитудно-частотная характеристика одномерного ультразвукового жидкостного резонатора с плоскими пьезопластинами // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 805–810.

21. Bacon D.R. Primary calibration of ultrasonic hydrophones using optical interferometry // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1988. V. 35. № 2. P. 152–161.
22. Schafer M.E. Techniques of hydrophone calibration // in Ultrasonic Exposimetry. Ziskin M.C. and Lewin P.A. (Eds.) Boca Raton, FL: CRC Press, 1993. Ch. 8.
23. Koch C., Molkenstruck W. Primary calibration of hydrophones with extended frequency range 1 to 70 MHz using optical interferometry // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1999. V. 46. № 5. P. 1303–1314.
24. Исаев А.Е., Черников И.В. Лабораторная градуировка гидроакустического приемника в реверберационном поле шумового сигнала // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 736–736.
25. Yamazaki D., Yamada K., Nakamura K. Functionally graded broadband ultrasound transducer created by forming an internal temperature gradient // Japan. J. Applied Physics. 2001. V. 40. № 12. P. 7166–7167.
26. Казаков В.В., Санин А.Г. Исследование характеристик двухэлементных ультразвуковых преобразователей в режиме излучения длинных импульсов // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 104–113.



---

---

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

---

---

УДК 519.958:531.33:517.956.8

**АНОМАЛИИ РАССЕЙНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ВБЛИЗИ ТОЧЕК  
ОТСЕЧКИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА (ОБЗОР)**

© 2020 г. С. А. Назаров\*

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб. 7–9, Санкт-Петербург, 199034 Россия*

\*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 29.03.2020 г.

После доработки 29.03.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Описаны несколько аномалий рассеяния волн в акустических волноводах с цилиндрическими или гофрированными жесткими стенками на частотах, близких к точкам отсечки (порогам) непрерывного спектра. Вводится понятие пороговых резонансов, которые порождены “почти стоячими волнами”, не переносящими энергию в бесконечность. Для гофрированных волноводов приведены примеры раскрытия спектральных лакун (зон торможения волн) и собственных чисел около их краев, обычных или вырожденных порогов. Описываются аномалии Вайнштейна и Вуда, возникающие выше и ниже порогов и заключающиеся соответственно в “почти полном” отражении или прохождении волн и в непропорционально быстрой изменчивости дифракционной картины. Обсуждаются примеры полного прохождения волны (“невидимости препятствия”) и процедуры обострения или сглаживания аномалии Вуда, в частности, построение собственных чисел внутри непрерывного спектра и соответствующих захваченных волн. Сравняются принципы излучения Зоммерфельда, Умова–Мандельштама и предельного поглощения, а также особенности их применения на порогах.

*Ключевые слова:* цилиндрические и гофрированные акустические волноводы, точки отсечки непрерывного спектра, условия излучения, пороговые резонансы, спектральные лакуны (зоны торможения), собственные частоты и захваченные волны, аномалии Вуда и Вайнштейна, пороговая и расширенная матрицы рассеяния

**DOI:** 10.31857/S0320791920050111

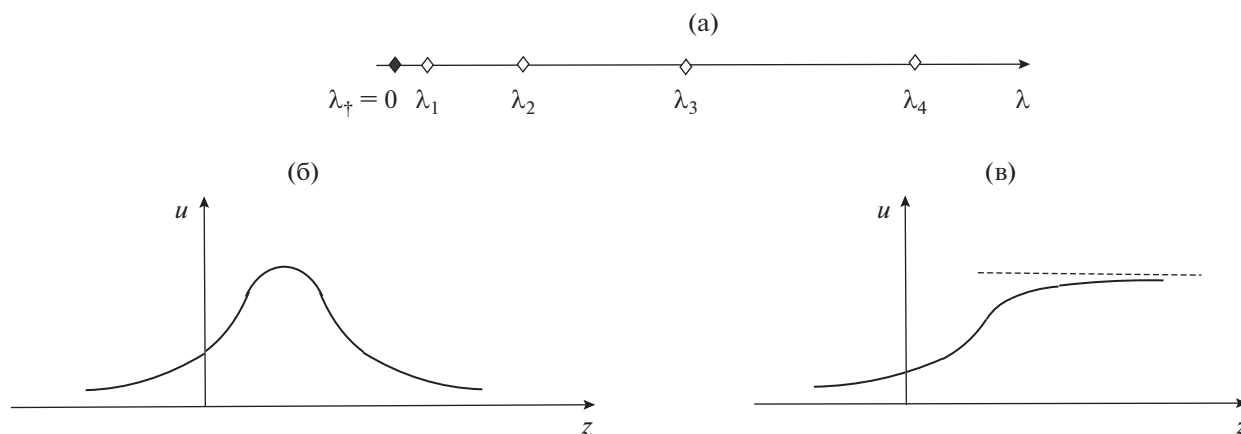
### МОТИВИРОВКА

Наряду с привычной, плавной изменчивостью дифракционной картины в волноводе при вариации частоты волны, приходящей из бесконечности, в спектре возникают особые изолированные частоты, около которых картина приобретает разнообразные “всплески” и “провалы”, т.е. ее изменения происходят в “быстром” масштабе. Настоящая статья посвящена описанию именно этих особых частот (пороги, собственные числа, точки комплексного резонанса) и сопутствующих разнообразных аномалий рассеяния волн. Такие объекты далее выделены аббревиацией и определены при первом появлении в тексте.

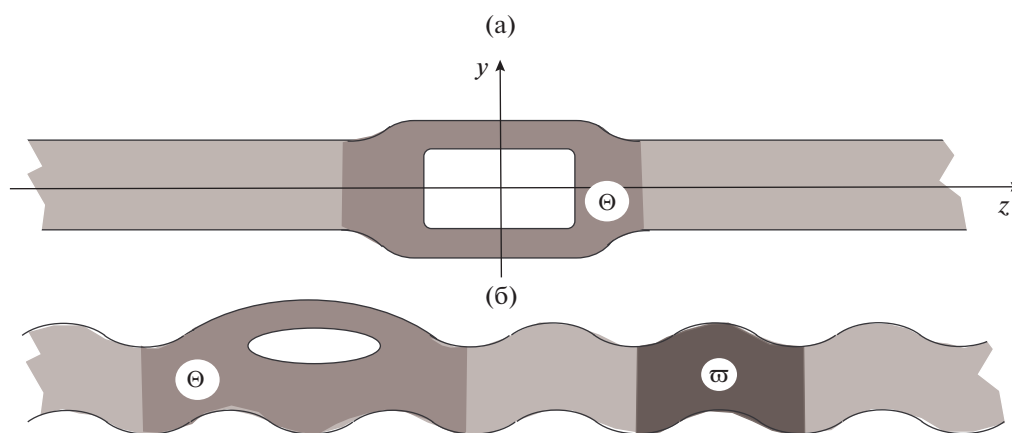
Точки отсечки (ТО) в спектре цилиндрических акустических волноводов, называемые также порогами (рис. 1а), характеризуются тем, что в них, во-первых, происходят скачок кратности непрерывного спектра и перестройка базиса распространяющихся волн, и во-вторых, появляются волна, не зависящая от продольной координаты, и волна, линейно растущая на бесконечности. Именно с последней обычно связываются разно-

образные аномалии дифракционной картины в волноводе с резонатором (рис. 2а), однако в работах [1, 2] при помощи асимптотического анализа было обнаружено, что, наоборот, за аномалии рассеяния ответственны волны на пороговой частоте, которые ограничены и, что главное, не переносят энергию на бесконечности. Такие волны, именуемые “почти стоячими” (рис. 1в), оказывают влияние на многие результаты применения асимптотических процедур (см. [3–6] и др.), а сам феномен их возникновения был назван пороговым резонансом (ПР).

В акустическом волноводе с жесткими стенками на нулевой частоте всегда наблюдается ПР, так как постоянная функция – ограниченное решение однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа, однако ПР на внутренних (положительных) ТО – явление неустойчивое: сколь угодно малое возмущение стенок резонатора способно уничтожить его. В то же время устранение порожденных ПР аномалий (ср. рис. 3в и рис. 3г) обычно требует точной настройки параметров возмущения стенок волноводов.



**Рис. 1.** (а) – Внешний  $\blacklozenge$  ( $\lambda_{\dagger} = 0$ ) и внутренние  $\diamond$  ( $\pi^2 k^2$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) пороги (ТО). (б) – Захваченная волна  $u$  – затухающая и (в) – почти стоячая волна  $u$  – стабилизирующаяся на правой бесконечности.



**Рис. 2.** Волноводы  $\Omega$  с резонаторами  $\Theta$ , выделенными тонированием: (а) – цилиндрический и (б) – периодический с глубоко тонированной ячейкой  $\varpi$ .

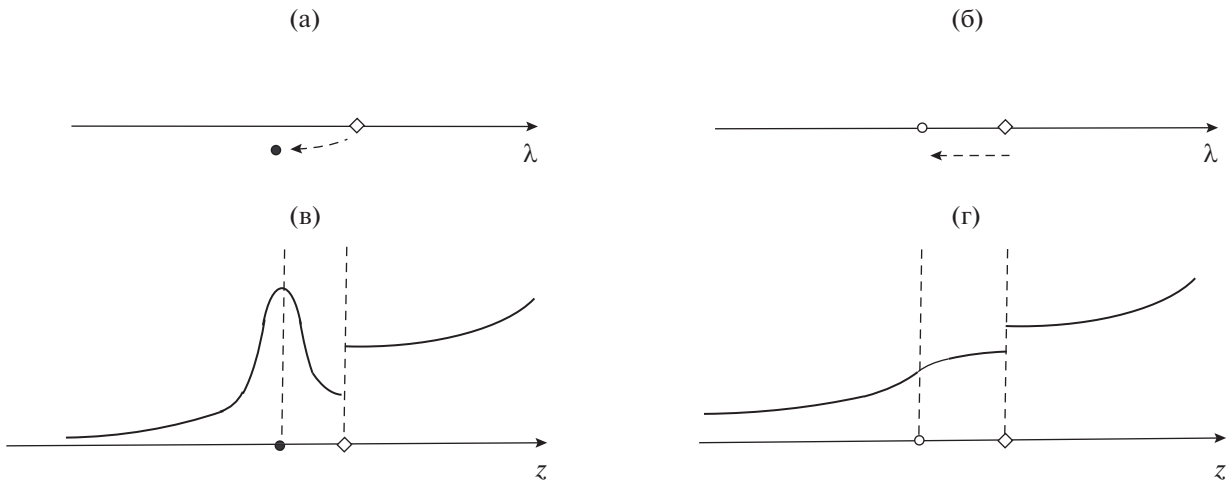
Существенный спектр  $\sigma_e$  волноводов с гофрированными стенками (рис. 2б) зачастую устроен более сложно, нежели непрерывный спектр  $\sigma_c = [0, +\infty)$  волноводов с цилиндрическими рукавами: между спектральными сегментами (зоны прохождения волн) могут образоваться открытые лакуны (зоны торможения волн), а также изолированные собственные частоты (СЧ) – точки дискретного спектра  $\sigma_d$ . В случае цилиндрических рукавов все СЧ располагаются на непрерывном спектре, образуют точечный спектр  $\sigma_p$  и оказываются неустойчивыми, покидающими вещественную ось и превращающимися в точки комплексного резонанса при “почти всех” малых вариациях стенок (см. [7, 8] и др.). Однако в статьях [1, 9] было введено понятие “принудительной устойчивости” СЧ, опирающееся на процедуру “точной настройки” нескольких параметров профиля возмущения и обеспечивающее как захват волны, так и сохранение СЧ вкрапленным в

непрерывный спектр (рис. 1б и рис. 3в). Нарушение настройки провоцирует аномалию Вуда (рис. 3в). Еще одно околороговое явление – аномалия Вайнштейна схематично изображена на рис. 4.

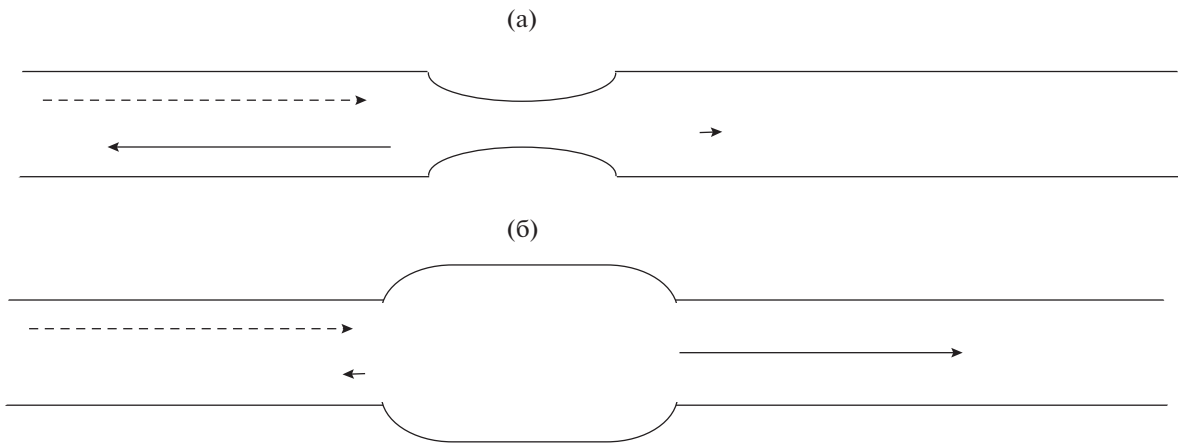
Интересное и малоисследованное явление – вырожденные пороги и сопутствующие ПР, характеризующиеся тем, что помимо линейных возникают полиномиально растущие волны высоких порядков. В цилиндрических акустических и квантовых<sup>1</sup> волноводах все пороги невырожденные и, в частности, поэтому СЧ, порожденная ПР, неспособна подняться выше ТО. Однако для гофрированных стенок или волноводов иной природы, например, упругих<sup>2</sup>, вырожденные пороги существуют, и в этом случае возможно со-

<sup>1</sup> Так часто называют волноводы с мягкими стенками, порождающими краевые условия Дирихле.

<sup>2</sup> В статье упругими называются волноводы, описываемые при помощи двух- или трехмерной системы уравнений теории упругости.



**Рис. 3.** Аномалия Вуда: (а) – точка ● комплексного резонанса и (в) – “всплеск” коэффициента рассеяния. (б) – Сглаживание аномалии Вуда: сохранение СЧ ○ и (г) – гладкая изменяемость коэффициента рассеяния. На пороге ◊ коэффициент рассеяния претерпевает разрыв.



**Рис. 4.** Аномалии Вайнштейна: (а) прямая – почти полное отражение и (б) инвертированная – почти полное прохождение. Приходящая волна изображена штрих-пунктирной линией, а отраженная и проходящая – сплошными. Их интенсивность пропорциональна длине стрелки.

вершено необычное явление – СЧ внутри непрерывного спектра поднимается вверх от ТО.

Еще один примечательный феномен на пороге – полное разногласие известных принципов излучения: принцип Зоммерфельда идентификации направления распространения волн не годится из-за линейного роста одной из волн, принцип предельного поглощения распознает все, даже незатухающие почти стоячие волны как захваченные, и только применение принципа излучения Умова–Мандельштама не влечет за собой видимых противоречий, т.е. этот энергетический принцип оказывается универсальным, так как вне порогов все три типа условий излучения равноценны.

Данная статья носит обзорный характер и в ней перечислены известные автору факты об упо-

мянутых характеристиках волноводов, а также сформулированы открытые вопросы. Схематичное и упрощенное изображение обсуждаемых эффектов представлено на рис. 1, 3, 4.

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ И ИХ СПЕКТРЫ

Акустический волновод  $\Omega$  с жесткими стенками  $\partial\Omega$  (рис. 2а) состоит из двух цилиндрических рукавов

$$\Pi_{\pm} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y = (y_1, y_{d-1}) \in \omega, \pm z > \ell > 0\}, \quad d = 2, 3, \quad (1)$$

и резонатора  $\Theta$  – ограниченного открытого множества внутри слоя  $\{x : z := x_d \in (-\ell, \ell)\}$ . Для простоты формулировок считаем, что  $\Omega$  – область с гладкой (класса  $C^\infty$ )  $(d - 1)$ -мерной границей  $\partial\Omega$ , в частности, при  $d = 3$  сечение  $\omega$  цилиндра  $\Pi = \omega \times \mathbb{R}$  ограничено простым гладким замкнутым контуром  $\partial\omega$ . Вместе с тем приведенные результаты в абсолютном большинстве верны и для липшицевых областей, например, областей с кусочно-гладкими границами.

Волновые процессы в волноводе  $\Omega$  описываются при помощи решений задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(x) &= \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\Delta_x$  – оператор Лапласа в декартовых координатах  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $\lambda = \rho \kappa^2$  – спектральный параметр,  $\rho > 0$  – плотность среды (далее полагаем  $\rho = 1$  после обезразмеривания) и  $\kappa > 0$  – частота гармонических во времени колебаний, а  $\partial_\nu$  – производная вдоль внешней нормали.

Непрерывный спектр  $\sigma_c$  задачи (2) занимает замкнутую положительную полуось  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$  (см., например, книги [10, 11]) и ТО (порогами)

$$0 = \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_m \leq \dots \rightarrow +\infty \tag{3}$$

разбивается на участки постоянной кратности, т.е. при

$$\lambda = \kappa^2 \in (\Lambda_m, \Lambda_{m+1}) \neq \emptyset \tag{4}$$

в прямом цилиндре  $\Pi$  имеются  $2m$  распространяющиеся волны

$$w_j^\pm(x) = a_j e^{\pm i\alpha_j z} U_j(y), \quad j = 1, \dots, m \tag{5}$$

с ингредиентами

$$\alpha_j = |\lambda - \Lambda_j|^{1/2}, \quad a_j = (2\alpha_j)^{-1/2}. \tag{6}$$

Здесь фигурируют собственные числа (СЧ) (3) модельной задачи на сечении цилиндра

$$\begin{aligned} -\Delta_y U(y) &= \Lambda U(y), \quad y \in \omega, \\ \partial_\nu U(y) &= 0, \quad y \in \partial\omega, \end{aligned} \tag{7}$$

а соответствующие собственные функции  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_m, \dots$  подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$(U_j, U_k)_\omega = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \tag{8}$$

где  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера, а  $(\cdot, \cdot)_\omega$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\omega)$ . Нормирующие множители  $a_j$  и волновые числа  $\pm\alpha_j$  из формул (5) и (6) в дальнейшем играют важную роль.

### ВОЛНОВОДЫ С ГОФРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ

В статье описаны разнообразные аномалии дифракционной картины в волноводе  $\Omega$  на околопороговых частотах, как ниже, так и выше ТО. Некоторые особенности строения спектра и характеристик рассеяния (лакуны, вырожденные пороги и пр.) отсутствуют в цилиндрических акустических волноводах, но проявляются в волноводах иной природы, например, упругих, а также в случае гофрированных рукавов, имеющих периодически изменяющееся сечение. Поэтому далее обсуждается и задача (2) на множестве  $\Omega$ , у которого рукава

$$\Pi_\pm = \{x \in \Pi : \pm z \geq \ell\} \tag{9}$$

отсечены от периодического квазицилиндра  $\Pi$  с ячейкой периодичности  $\overline{\omega}$  (рис. 2б)

$$\begin{aligned} \Pi &= \{x = (y, z) : (y, z \pm 1) \in \Pi\}, \\ \overline{\omega} &= \{x \in \Pi : |z| < 1/2\}, \\ \overline{\Pi} &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\omega}_k, \quad \overline{\omega}_k = \{x : (y, z - k) \in \overline{\omega}\}, \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \end{aligned}$$

При этом масштабированием период сведен к единице, а декартовы координаты и все геометрические параметры, в частности, полудлина  $\ell$  резонатора  $\Theta = \Omega \setminus (\overline{\Pi_-} \cup \overline{\Pi_+})$  сделаны безразмерными. Известно (см. публикации [12–16] и др.), что согласно теории Флоке–Блоха–Гельфанда существенный спектр<sup>3</sup>  $\sigma_e = \sigma_c \cup (\sigma_p \setminus \sigma_d)$  у задачи (2) в волноводе  $\Omega$  с жесткими и гладкими по предположению стенками  $\partial\Omega$  и периодическими рукавами (9) имеет зонное строение

$$\sigma_e = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \beta_j, \tag{10}$$

а спектральные сегменты (зоны прохождения волн)

$$\beta_j = \{\Lambda_j(\eta) | \eta \in [-\pi, \pi]\} \tag{11}$$

определяются по СЧ

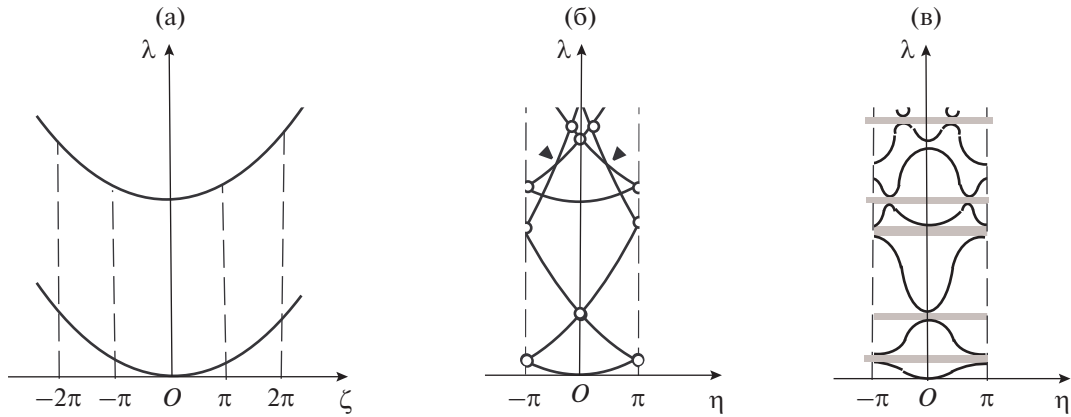
$$\begin{aligned} 0 \leq \Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \Lambda_3(\eta) \leq \dots \leq \\ \leq \Lambda_m(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty \end{aligned} \tag{12}$$

модельной задачи на ячейке периодичности

$$\begin{aligned} -\Delta_x \mathcal{U}(x; \eta) &= \Lambda(\eta) \mathcal{U}(x; \eta), \quad x \in \overline{\omega}, \\ \partial_\nu \mathcal{U}(x; \eta) &= 0, \quad x \in \theta_0 := \partial\overline{\omega} \setminus \bigcup_{\pm} \overline{\theta}_\pm, \end{aligned} \tag{13}$$

которая снабжена условиями квазипериодичности на торцах  $\theta_\pm = \{x \in \Pi : z = \pm 1/2\}$ , включаю-

<sup>3</sup> Он отличается от непрерывного множеством СЧ бесконечной кратности, которые заведомо отсутствуют в цилиндрических волноводах.



**Рис. 5.** Дисперсионные кривые: (а) – в цилиндрическом волноводе и (б) – при интерпретации его как периодического. (в) – После возмущения стенок возникают узкие лакуны – проекции тонированных прямоугольников на ось ординат.

щими параметр Флоке  $\eta \in [-\pi, \pi]$  (двойственную переменную преобразования Гельфанда [17]),

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(y, +\frac{1}{2}; \eta\right) &= e^{i\eta} \mathcal{U}\left(y, -\frac{1}{2}; \eta\right), \\ \partial_z \mathcal{U}\left(y, +\frac{1}{2}; \eta\right) &= e^{i\eta} \partial_z \mathcal{U}\left(y, -\frac{1}{2}; \eta\right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left(y, +\frac{1}{2}\right) \in \theta_{\pm}.$$

СЧ (12) задачи (13), (14) оказываются вещественными и непрерывно и  $2\pi$ -периодически зависят от переменной  $\eta$ , т.е. в самом деле  $\beta_j$  – компактные связные множества на полуоси  $[0, +\infty)$ . Каждая спектральная пара  $\{\Lambda_m(\eta), \mathcal{U}_m(x; \eta)\}$  с параметром<sup>4</sup>  $\eta \in (-\pi, \pi]$  порождает волну Флоке

$$\mathcal{W}_m(x; \eta) = e^{i\eta q} \mathcal{U}_m(y, z - q; \eta), \quad x \in \mathfrak{w}_q, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

которая удовлетворяет задаче (2) в (невозмущенном) квазицилиндре  $\Pi$  и становится гладкой благодаря условиям квазипериодичности (14). Функция (15) осциллирует в двух масштабах: с периодом  $2\pi/\eta$  из-за первого множителя в правой части и с периодом 1 из-за второго. Волна Флоке (15) называется элементарной, однако на порогах (см. ниже) возникают и полиномиальные волны Флоке

$$\mathcal{W}_m^{(k)}(x; \eta) = e^{i\eta q} \sum_{j=0}^k \frac{z^q}{q!} \mathcal{U}_m^{(k-j)}(y, z; \eta), \quad x \in \Pi, \quad (16)$$

$$j = 0, \dots, K - 1,$$

где  $\mathcal{U}_m^{(0)}, \dots, \mathcal{U}_m^{(K-1)}$  – 1-периодические функции переменной  $z$ . Разумеется, элементарная волна Флоке принимает вид (16) с  $k = 0$ , причем

<sup>4</sup> Точке  $\eta = -\pi$  отвечает та же волна Флоке, что и  $\eta = \pi$ , и потому первая точка исключена.

$\mathcal{U}_m^{(0)}(y, z) = e^{-i\eta z} \mathcal{W}_m(y, z)$  зависит 1-периодически от продольной координаты  $z$ .

Цилиндрические рукава (1) можно считать 1-периодическими, и следовательно, непрерывный спектр  $\sigma_c = [0, +\infty)$  также представим в виде (10), но в нем соседние спектральные сегменты  $\beta_j$  и  $\beta_{j+1}$  примыкают один к другому или пересекаются, а значит,  $\sigma_c$  – связное множество. В самом деле, “обычная” волна  $e^{i\zeta z} U_m(y)$ , удовлетворяющая задаче (2) с параметром

$$\Lambda = \Lambda_m + \zeta^2, \quad (17)$$

превращается в волну Флоке следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{i\zeta z} U_m(y) &= e^{i\eta q} \left( e^{i(\eta+2\pi p)(z-q)} U_m(y) \right) = \\ &= e^{i\eta q} \mathcal{U}_{n(m,p)}(y, z - q; \eta), \quad x \in \mathfrak{w}_q, \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом целое число  $p \in \mathbb{Z}$  выбрано так, что  $\eta = \zeta - 2\pi p \in (-\pi, \pi]$ , а функция  $\mathfrak{w} \ni (y, z) \mapsto \mathcal{U}_{n(m,p)}(y, z; \eta)$  – решение задачи (13), (14) с параметром

$$\begin{aligned} \Lambda_{n(m,p)}(\eta) &= \Lambda_m + (\eta + 2\pi p)^2, \\ \eta &\in [-\pi, \pi], \quad p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (19)$$

В итоге график (17) – парабола на рис. 5а – превращается в набор дисперсионных дуг (19), образующих связную “ферму” на рис. 5б.

В периодической ситуации между соседними расцепленными сегментами  $\beta_j$  и  $\beta_{j+1}$  может быть открыта спектральная лакуна (зона торможения волн)

$$\gamma_j = \left( \max_{\eta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_j(\eta), \min_{\eta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_{j+1}(\eta) \right),$$

а именно, непустой интервал, свободный от существенного спектра (10), но имеющий обе концевые точки в нем.

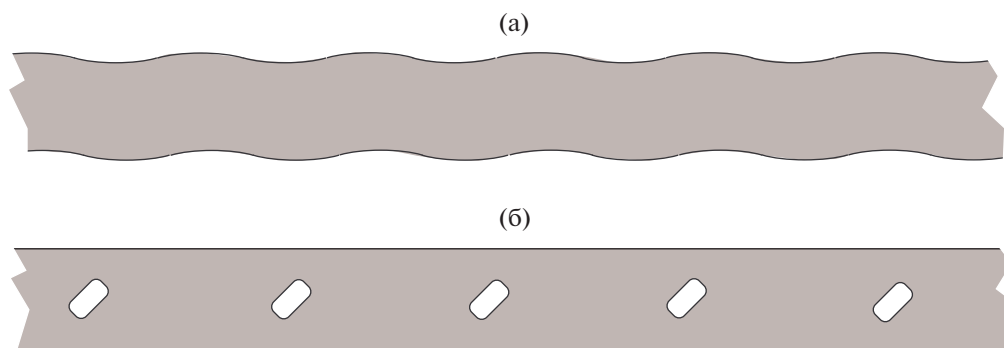


Рис. 6. Периодические возмущения цилиндрического волновода: (а) – регулярное и (б) – сингулярное.

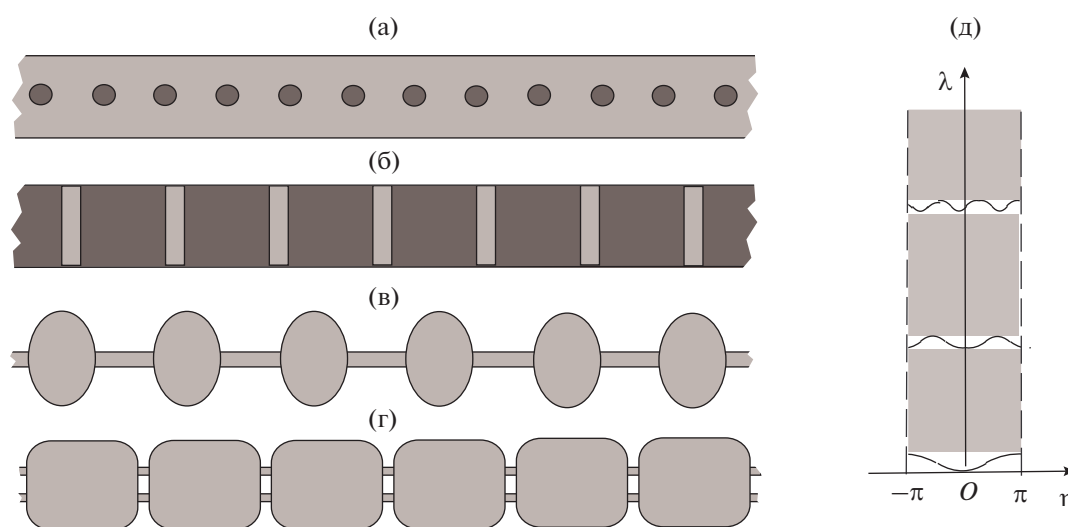


Рис. 7. Периодические волноводы (а) – с мелкими неоднородностями и (б) – стратифицированный. Периодическое семейство контейнеров, соединенных тонкими каналами: (в) – длинными и (г) – короткими. (д) – Пологие дисперсионные кривые, разделенные широкими лагунами.

Один из способов образования лагун – малое периодическое возмущение прямых цилиндрических волноводов: регулярное, пологое с высотой  $\varepsilon \ll 1$  (рис. 6а), или сингулярное, с отверстиями диаметром  $\varepsilon^{1/d}$  (рис. 6б). В работах [18–21] и др. показано, что при подходящих параметрах возмущения стенок узлы, помеченные символом  $\circ$  на рис. 5б, дробятся и между сглаженными дисперсионными кривыми раскрываются лагуны шириной  $O(\varepsilon)$  как внутри зоны Бриллюена, так и выше нее. Отметим, что узлы, отмеченные значками  $\blacktriangleright$  и  $\blacktriangleleft$  на рис. 5б и полученные пересечением двух восходящих или нисходящих дуг, не распадаются и не формируют лагуны (пояснения см., например, в статье [21]).

Многочисленные примеры зонного строения спектров волноводов, предложенные изначально в оригинальных работах [22, 23] и [24–26] и нашедшие продолжение в публикациях [27–31] и др.,

опираются на асимптотический анализ дифференциальных уравнений с контрастными коэффициентами и краевых задач на сочленениях областей различных предельных размерностей (см. статьи [32, 33] и [35–42], а также многие другие) и получаются вариацией физических или геометрических параметров. В первом случае (рис. 7а и 7б) акустическая среда является кусочно-однородной и возникновение раскрытых лагун как в низко-, так и в среднечастотном диапазонах спектра обусловлено контрастными свойствами разных сред: отношение скоростей распространения волн в них – малый или большой параметр.

Во втором случае (рис. 7в и 7г), как и у волноводов на рис. 6, лагуны появляются при малом геометрическом параметре  $\varepsilon$ : волноводы образованы периодическим семейством массивных контейнеров, соединенных тонкими, диаметром  $O(\varepsilon)$ , каналами, соответственно короткими или

длинными. В противоположность графикам на рис. 5в, где спектральные сегменты и лакуны приобрели соответственно размеры  $O(1)$  и  $O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , спектральные сегменты у графиков на рис. 7д для волновода с короткими каналами (рис. 7г) имеют длину  $O(\varepsilon)$ , локализованы около точек дискретного спектра задачи Неймана в изолированном контейнере и отделены один от другого лакунами шириной  $O(1)$ . В случае длинных каналов (рис. 7в) предельный спектр прирастает СЧ задачи Дирихле на оси канала. Для таких периодических квазицилиндров можно образовать любое наперед заданное количество непустых лакун. Проведенный анализ для волноводов на рис. 7г и 7б приспособлен [43, 44] к задачам теории упругости, однако для волноводов на рис. 6а, 6б и рис. 7в, 7а аналогичные результаты неизвестны до сих пор, так как в большинстве ситуаций векторные задачи оказываются значительно более сложными, чем скалярные, и нуждаются в новых методах исследования.

Упомянем гипотезу Бете–Зоммерфельда о том, что в спектрах многомерных ( $d > 1$ ) волноводов количество раскрытых лакун всегда конечно, — она подтверждена лишь для некоторых краевых задач, и задача Неймана в этот список не входит. В работе [45] рассмотрен волновод на рис. 7г, однако при условии, что поперечные размеры соединительных каналов между контейнерами с номерами  $N$  и  $N \pm 1$  стремятся к нулю при  $N \rightarrow \pm\infty$ . В этом случае существенным спектром служит счетное множество на полуоси  $[0, +\infty)$  без конечных точек сгущения<sup>5</sup>, и в нем обнаруживается бесконечное количество лакун. Вместе с тем нарушена периодичность волновода и в упомянутой работе не получена полная информация о дискретном спектре  $\sigma_d$  (изолированные СЧ) и точечном спектре  $\sigma_p$  (бесконечнократные СЧ).

Еще одна специфическая черта периодических волноводов — возможность “схлопывания” какого-то сегмента (11) в точку, когда СЧ  $\Lambda_j(\eta)$  задачи (13), (14) не зависит от параметра Флоке  $\eta$ , а значит, становится бесконечнократным в задаче Неймана в самом квазицилиндре  $\Pi$ . Соответствующие примеры известны для волноводов различной физической природы (см. [46–48] и др.), а невозможность коллапса любого из сегментов установлена при существенных геометрических ограничениях (см. [49–51] и др.). Вместе с тем в цилиндрах  $\Pi = \omega \times \mathbb{R}$  бесконечнократных собственных чисел нет (ср. [52], [16; замечание 3.1.5]), т.е.  $\sigma_{\text{ess}} = \sigma_c$  в случае рукавов (1).

<sup>5</sup> Последовательность (3) СЧ задачи об изолированном контейнере.

## ПОРОГОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ

В работах [3, 4] при изучении сочленений полубесконечных квантовых волноводов (спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа) было введено понятие порогового резонанса (ПР) — он возникает при условии, что у задачи со спектральным параметром, лежащим на нижней грани непрерывного спектра (нижней точки отсечки), есть нетривиальное ограниченное решение (ОР), которое не обязательно затухает на бесконечности, но может быть и захваченной волной, исчезающей на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Наличие или отсутствие ПР в узлах решетки тонких квантовых волноводов определяют структуру асимптотической одномерной модели решетки, на которую (модель) влияют и указанные качества ОР (подробности см. в статье [4]). В работе [53] было сформулировано достаточное условие отсутствия ПР, а в работе [54] — два разных по существу критерия, названные критериями отсутствия и существования ПР, причем второй из них позволяет узнать качества ОР. Кроме того, в публикациях [55–58, 53, 5] и др. разобраны многие конкретные сочленения квантовых волноводов и проверено отсутствие ПР или окольным путем доказано их появление при изолированных значениях варьируемого геометрического параметра. В периодической ситуации аналогичные результаты неизвестны.

Если какое-либо нетривиальное ОР на пороге исчезает на бесконечности и тем самым оказывается истинной собственной функцией, то порог — СЧ оператора задачи, но в том случае, когда все ОР не затухают, говорим, что ПР подлинный (ППР).

**Замечание 1.** Привести пример СЧ на пороге непрерывного спектра квантового волновода  $\Omega$  трудно. Пусть у области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  есть плоскость зеркальной симметрии  $\{x : x_2 = 0\}$ , а  $0 < \Lambda_1 < \Lambda_2$  — первые два СЧ задачи Дирихле на сечении  $\omega$ . Используя прием из статьи [59], рассмотрим задачу Дирихле на половине волновода  $\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_1 > 0\}$ , у которой (задачи) по предположению ТО непрерывного спектра — число  $\Lambda_2$ . Согласно классическому результату [60] раздутие  $\Theta(\gamma) = \{x : \gamma^{-1}x \in \Theta\}$  резонатора  $\Theta$  обеспечивает при больших  $\gamma > 1$  возникновение изолированного СЧ  $\lambda(\gamma)$  в спектре квантового волновода  $\Omega_+(\gamma) = \Pi_+ \cup \Theta(\gamma) \cup \Pi_-$ , причем  $\lambda(\gamma) \rightarrow +0$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Поскольку  $[1, +\infty) \ni \gamma \mapsto (0, \Lambda_2]$  — непрерывная монотонно убывающая функция, то СЧ  $\lambda(\gamma_*)$  попадает при каком-то  $\gamma_* > 1$  на истинную ТО  $\Lambda_1$  целого волновода  $\Omega$ . Более богатая геометрическая симметрия волновода дает возможность по намеченной схеме образовать СЧ на любом внутреннем пороге непрерывного спектра. Так, двойная зеркальная

симметрия позволяет построить пример акустического волновода  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с СЧ  $\Lambda_2 > 0$ . Впрочем, открытым остается вопрос, можно ли обеспечить одновременное включение нескольких членов последовательности (3) в точечный спектр  $\sigma_p$ .

В акустическом волноводе нижняя ТО  $\Lambda_1$  нулевая и в ней всегда реализуется ППР: постоянная функция – ОР задачи (2) с  $\lambda = 0$ . Поскольку других ОР нет, такой резонанс имеет кратность один. Помимо нижнего порога  $\lambda = \Lambda_1$  ПР можно приписать и внутренним (положительным) порогам  $\lambda = \Lambda_m$  при  $m > 1$ , однако прежнее определение [3] не годится, так как ограниченной оказывается любая распространяющаяся волна.

Пусть  $\Lambda_m$  – СЧ задачи (7) с кратностью  $\varkappa_m$ , т.е.

$$\Lambda_{m-\varkappa_m} < \Lambda_{m-\varkappa_m+1} = \dots = \Lambda_m < \Lambda_{m+1} \quad (20)$$

в последовательности (5). Тогда список волн (5) заменяется таким:

$$w_j^\pm(x) = a_j e^{\pm i\alpha_j z} U_j(y), \quad j = 1, \dots, m - \varkappa_m, \quad (21)$$

$$w_k^0(y, z) = U_m(y), \quad w_k^1(y, z) = z U_m(y), \quad (22)$$

$$k = m - \varkappa_m + 1, \dots, m.$$

Решение  $u$  задачи (2) назовем почти стоячей волной (ПСВ), если для него справедливо разложение

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \sum_{\pm} \chi^\pm(z) \sum_{k=m-\varkappa_m+1}^m a_k^\pm U_k(y), \quad (23)$$

где остаток  $\tilde{u}(x)$  исчезает при  $z \rightarrow \pm\infty$  со скоростью  $O(e^{-|z|\sqrt{\Lambda_{m+1}-\Lambda_m}})$ ,  $a^\pm = (a_{k=m-\varkappa_m+1}^\pm, \dots, a_m^\pm)$  – столбцы коэффициентов, а  $\chi^\pm$  – гладкие срезающие функции, служащие для локализации волн в рукавах,

$$\chi^\pm(z) = 1 \quad \text{при} \quad \pm z > 2\ell,$$

$$\chi^\pm(z) = 0 \quad \text{при} \quad \pm z < \ell.$$

ПСВ характеризуются важным свойством: они не переносят энергию на бесконечность (ср. форму переноса энергии (28)). Такое определение ПСВ годится и для периодических волноводов (ср. работу [61]).

ПР возникает при  $\lambda = \Lambda_m$  в том случае, если имеется хотя бы одна нетривиальная ПСВ. Линейную оболочку таких решений обозначим через  $\mathcal{L}^{st}$ , а пространство захваченных волн (собственных функций, отвечающих СЧ  $\lambda = \Lambda_m$ ) – через  $\mathcal{L}^{tr}$ . В обоих пространствах можно ввести вещественные базисы. Если  $\mathcal{L}^{tr} = \{0\}$ , т.е. нет нетривиальных решений (23) со столбцами  $a^\pm = 0$ ,

то возникает ППР и размерность  $\dim \mathcal{L}^{st}$  – его кратность.

Для периодических рукавов ПР могут быть устроены более сложно. Сами пороги – точки экстремума или перегиба дисперсионных кривых (ср. рис. 5б и рис. 7д). Крайя лакун и точка  $\Lambda = 0$  – внешние пороги, но остальные пороги – внутренние точки существенного спектра (последние отсутствуют на рис. 7д, но их можно обнаружить на рис. 5в). Пусть  $\Lambda = \Lambda_m(\eta^0)$  – порог, т.е.  $\partial_\eta \Lambda_m(\eta^0) = 0$  при некотором  $\eta^0 \in (-\pi, \pi]$  и

$$\partial_\eta^k \Lambda_m(\eta^0) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad \partial_\eta^{K+1} \Lambda_m(\eta^0) \neq 0. \quad (24)$$

В случае  $K = 1$  порог называется невырожденным, но он имеет порядок вырождения  $K$  при  $K > 1$ . Вырожденные пороги обладают многими необычными свойствами, в частности, для них приходится изменить определение ПСВ, а порожденные ими волны Флоке (16) – полиномы переменной  $z$  порядка не выше  $K - 1$  с 1-периодическими коэффициентами в квазицилиндре  $\Pi$  (см. [16; гл. 3, §4]). Для цилиндрических акустических и квантовых волноводов все пороги невырожденные, а полиномиальная зависимость от  $z$  становится линейной (см. формулы (22)).

**Замечание 2.** Если для периодических акустических волноводов вырожденные пороги – явление неординарное и редкое, то для цилиндрических и периодических упругих волноводов, в частности, для бесконечных пластин Кирхгофа (см. [62; §30]) нижняя точка отсечки  $\Lambda = 0$  непрерывного спектра – вырожденный порог порядка четыре всегда (см. [63, 64] и др.). Это обстоятельство предопределяет существенное отличие дифракционных задач для систем и дифференциальных уравнений высших порядков от обсуждаемых скалярных задач для оператора Лапласа.

### УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Для цилиндрических волноводов во внепороговой ситуации простейшим в применении является принцип излучения Зоммерфельда (см. [10, 11] и др.), и в соответствии с ним знак  $\pm$  волнового числа  $\pm\alpha_j$  определяет направление “от  $\mp\infty$  к  $\pm\infty$ ” распространения волны (5). Такая же классификация порождена энергетическим принципом излучения Умова–Мандельштама [65, 66] или принципом предельного поглощения (см., например, [16, 1] и [68, 69]).

Как обычно (ср. монографии [10, 11] и др.), решению неоднородной задачи Неймана

$$-\Delta_x u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

$$\partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$



с финитной (для простоты формулировок) правой частью  $f$  предписано такое поведение на бесконечности:

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \sum_{\pm} \chi^{\pm}(z) \sum_{j=1}^m c_j^{\pm} w_j^{\pm}(x). \quad (26)$$

Здесь  $\tilde{u}(x)$  – остаток, затухающий на бесконечности со скоростью  $O(e^{-z|\sqrt{\Lambda_{m+1}-\lambda}|})$ , коэффициенты при волнах (5) определяются при решении задачи и потому зависят от внешнего воздействия  $f$ , а в остальном использованы те же обозначения, что и в разложении (23). Понятно, что однородной ( $f = 0$ ) задаче (25), (26) удовлетворяет любая захваченная волна  $u \in \mathcal{L}^{lr}$ , у которой, конечно же,  $a_j^{\pm} = 0$ . Кроме того, условиями разрешимости задачи (25), (26) служат равенства

$$(f, u)_{\Omega} = 0 \quad \forall u \in \mathcal{L}^{lr}. \quad (27)$$

Таким образом, оператор задачи с условиями излучения обладает нулевым индексом, т.е. размерности его ядра  $\mathcal{L}^{lr}$  и коядра (количество линейно независимых условий ортогональности (27)) совпадают. Корректную постановку задачи (25), (26) на специальных весовых пространствах с отделенной асимптотикой можно найти в книге [16; гл. 5], статьях [1, 69] и др. публикациях.

Перезапись волн (5) в форме Флоке (18) демонстрирует проблему применения принципа излучения Зоммерфельда в периодических волноводах: положительному волновому числу  $\zeta \in (\pi, 2\pi)$  в левой части (18) отвечает отрицательный показатель  $\eta \in (-\pi, 0)$  в правой. Вместе с тем принцип предельного поглощения и энергетический принцип Умова–Мандельштама приспособлены и к гофрированным волноводам: если показатель  $\eta$  в (15) располагается на восходящем (нисходящем) участке дисперсионной кривой, то волна  $W_m$  оказывается уходящей (приходящей) в рукаве  $\Pi_+$ , но, разумеется, меняет свое существо в  $\Pi_-$ . Итак, во внепороговой ситуации соответствующие классификации и обозначения  $w_1^{\pm}, \dots, w_m^{\pm}$  для элементарных волн Флоке (15) полностью сохраняют постановку задачи (25) с условиями излучения (26) и указанные выше ее основные свойства.

На порогах принцип излучения Зоммерфельда неприменим хотя бы потому, что в списке (22) фигурируют линейно растущие волны, а принцип предельного поглощения также может привести к ошибочному результату (см. замечание 3). Единственно универсальным остается энергетический принцип излучения Умова–Мандельштама [65, 66], в котором классификация волн основана на

применении симплектической (полуторалинейной и антиэрмитовой) формы переноса энергии

$$Q(u, v) = \int_{\omega(R)} (\overline{v(y, R)} \partial_z u(y, R) - u(y, R) \overline{\partial_z v(y, R)}) dz, \quad (28)$$

которая пропорциональна проекции вектора Умова–Пойнтинга [65, 70] на ось  $z$  (см. [16; гл. 5], а также [1, 71] и др.). Именно, согласно принципу излучения Умова–Мандельштама направление “от  $\mp\infty$  к  $\pm\infty$ ” распространения волны  $w_j^{\vartheta}$  связывается со знаком  $\pm$  в правой части соотношений

$$Q(w_j^{\vartheta}, w_k^{\tau}) = \pm i \delta_{\vartheta, \tau} \delta_{j, k}, \quad (29)$$

которые включают индексы

$$\vartheta, \tau = \pm, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad (30)$$

проверяются непосредственными вычислениями при учете выражений (6) для ингредиентов волн и содержат сечение  $\omega(R) = \{x \in \Pi : z = R\}$ . Происходя от формулы Грина для оператора Гельмгольца, интеграл (28) не зависит от параметра  $R$  для любых решений задачи Неймана в прямом цилиндре  $\omega \times \mathbb{R}$ .

На пороге  $\lambda = \Lambda_m$  при ограничении (20) волны (21) удовлетворяют соотношениям (29) с  $j, k = 1, \dots, m - \kappa_m$ , однако  $Q(w_j^0, w_j^0) = 0$  и  $Q(w_j^1, w_j^1) = 0$  для волн (22) ввиду их вещественности. Следуя [16; гл. 5], введем линейные комбинации

$$w_k^{\pm}(x) = 2^{-1/2} (z \mp i) U_j(y), \quad j = m - \kappa_m + 1, \dots, m. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в том, что благодаря условиям ортогональности и нормировки (8) для набора волн (22), (31) выполнены соотношения (29) при всех индексах (30). В результате и на пороге задача (25), (26) сохраняет все перечисленные выше свойства.

Приведенные определения на основе формы переноса энергии (29) годятся и для волноводов с периодическими рукавами (9), причем ввиду 1-периодичности в качестве области интегрирования в (28) можно взять любую ячейку  $\omega_k$  вместо сечения  $\omega(R)$ . В [16; гл. 5] доказано, что волны Флоке (16), периодически и полиномиально зависящие от  $z$ , всегда можно выбрать так, чтобы были выполнены условия ортогональности и нормировки (29), и тем самым указать направление распространения каждой из волн в базисе  $\{w_1^{\pm}, \dots, w_m^{\pm}\}$ , а затем и сформировать условия излучения (26).

**Замечание 3.** Согласно принципу предельного поглощения [68, 67] решение задачи (25) с соответствующими условиями излучения определяется

как предел при  $\varepsilon \rightarrow +0$  решения  $u^\varepsilon$  задачи (25) с комплексным параметром

$$\lambda^\varepsilon = \Lambda_m + i\varepsilon \in \mathbb{C}.$$

Такая задача однозначно разрешима в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$ , и ее решение допускает разложение

$$u^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) + \sum_{\pm} \chi^\pm(z) \sum_{j=1}^m c_j^{\varepsilon\pm} w_j^{\varepsilon\pm}(x),$$

в котором фигурируют экспоненциально затухающие при  $z \rightarrow \pm\infty$  остаток  $\tilde{u}^\varepsilon$  и “возмущенные” волны (21) и (22)

$$w_j^{\varepsilon\pm}(y, z) = a_j e^{i\alpha_j^\varepsilon z} U_j(y), \quad j = 1, \dots, m - \kappa_m - 1,$$

$$w_k^{\varepsilon\pm}(y, z) = e^{i\alpha_k^\varepsilon z} U_k(y), \quad j = m - \kappa_m, \dots, m,$$

с показателями

$$\alpha_j^{\varepsilon\pm} = \pm \sqrt{\Lambda_m - \Lambda_j + i\varepsilon}, \quad \text{Im} \alpha_j^{\varepsilon\pm} > 0, \\ j = 1, \dots, m - \kappa_m - 1,$$

$$\alpha_k^{\varepsilon\pm} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}(1 + i)}, \quad j = m - \kappa_m, \dots, m.$$

Ясно, что  $\alpha_j^{\varepsilon\pm} \rightarrow \pm\alpha_j$  и  $\alpha_k^{\varepsilon\pm} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , а значит, принцип предельного поглощения устанавливает такие условия излучения:

$$u^0(x) = \tilde{u}^0(x) + \sum_{\pm} \chi^\pm(z) \sum_{j=1}^{m-\kappa_m-1} c_j^{0\pm} w_j^\pm(x) + \\ + \sum_{\pm} \chi^\pm(z) \sum_{k=m-\kappa_m}^m c_k^{0\pm} w_k^0(x). \quad (32)$$

Решение (32) оказывается ограниченным в отличие от решения (26). Вместе с тем условия излучения, назначенные принципом предельного поглощения на пороге, обладают следующими видимыми недостатками: во-первых, любая, даже незатухающая ПСВ – решение однородной задачи (2), (32), во-вторых, в случае ПР условия разрешимости (27) необходимо расширить за счет равенств

$$(f, u^0)_\Omega = 0 \quad \forall u^0 \in \mathcal{L}^{st} \ominus \mathcal{L}^{tr}$$

и, в-третьих, пороговая матрица рассеяния (см. ниже) теряет важное свойство унитарности и ее даже не всегда удается определить в случае ПР (см. [63, 71] и др.).

### КЛАССИЧЕСКАЯ, ПОРОГОВАЯ И РАСШИРЕННАЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Классический объект теории дифракции – матрица рассеяния  $s(\lambda)$  (МР), составленная из коэффициентов рассеяния (КР) в разложении

$$\zeta_j^\pm(x) = \tilde{\zeta}_j^\pm(x) + \chi_\mp(z) w_j^\pm(x) + \\ + \sum_{\tau=\pm} \chi_\tau(z) \sum_{k=1}^m s_{j\pm, k\tau}(\lambda) w_k^\tau(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad (33)$$

решений задачи (2) со спектральным параметром (4), которые инициированы приходящими в рукавах  $\Pi_\mp$  волнами  $w_j^\pm$  из списка (5). В (33) остаток  $\tilde{\zeta}_j^\pm$  такого же качества, что и  $\tilde{u}$  в разложении (26), а  $(2m \times 2m)$ -матрица  $s(\lambda)$  унитарная и симметричная благодаря условиям ортогональности и нормировки (29) и связям  $w_j^- = \overline{w_j^+}$ .

Как показано в [16; гл. 5] (см. также [1, 69]), благодаря сохранению условий (29) для волн (21), (31) на пороге  $\lambda = \Lambda_m$  по-прежнему существуют решения  $\zeta_1^\pm, \dots, \zeta_m^\pm$  задачи (2), а их КР образуют унитарную и симметричную  $(2m \times 2m)$ -матрицу  $s(\Lambda_m)$ , называемую пороговой матрицей рассеяния (ПМР). Выделим из нее нижний правый блок  $s^{**}(\Lambda_m)$  размером  $2\kappa_m \times 2\kappa_m$ . В статьях [69, 57, 54] установлена формула

$$\dim \ker(s^{**}(\Lambda_m) + \mathbb{1}_m) = \dim(\mathcal{L}^{st} \ominus \mathcal{L}^{tr}), \quad (34)$$

где  $\mathbb{1}_J$  – единичная  $(J \times J)$ -матрица. Иными словами, размерность пространства ПСВ без учета захваченных волн совпадает с кратностью собственного числа  $-1$  блока  $s^{**}(\Lambda_m)$ . Положительность величины (34) – достаточное условие возникновения ПР. Если известно, что  $\lambda = \Lambda_m$  не является СЧ и  $\mathcal{L}^{tr} = \{0\}$ , то оно становится критерием ППР и указывает размерность подпространства ПСВ.

Вернемся к рассмотрению внепороговой ситуации (4). Помимо распространяющихся волн (5) в цилиндре  $\Pi$  возникают экспоненциальные волны, затухающие (плюс) или растущие (минус) при  $z \rightarrow +\infty$ ,

$$v_j^\pm(x) = a_j e^{\mp\alpha_j z} U_j(y), \quad j = m + 1, m + 2, \dots, \quad (35)$$

которые имеют прежние атрибуты (6). По причине вещественности волны (35) аннулируют квадратичный функционал  $Q(w, w)$ , однако для похожих на (31) линейных комбинаций

$$w_j^\pm(x) = 2^{-1/2} (v_j^-(x) \mp i v_j^+(x)), \\ j = m - \kappa_m + 1, \dots, m, \quad (36)$$

соотношения (31) выполнены при всех  $j, k \in \mathbb{N}$ . Таким образом, энергетический принцип Умова–Мандельштама приписывает направление распространения “от  $\mp\infty$  к  $\pm\infty$ ” линейным комбинациям (36), образованным искусственно и не имеющим физического смысла. Вместе с тем включение в анализ таких “волн” позволяет применить весь технический аппарат теории рассеяния и

ввести объекты, полезные для выяснения настоящих физических характеристик волноводов.

Зафиксируем такое натуральное число  $N > m$ , что  $\Lambda_{N+1} > \Lambda_N$ . Как показано в [16; гл. 5], вне зависимости от того, является или нет число  $\lambda$  собственным, задача (2) обладает решениями

$$Z_j^\pm(x) = \tilde{Z}_j^\pm(x) + \chi_\mp(z)w_j^\pm(x) + \sum_{\tau=\pm} \chi_\tau(z) \sum_{k=1}^N S_{j\pm, k\tau}(\lambda)w_k^\tau(x), \quad j = 1, \dots, N, \quad (37)$$

иницированными “приходящими” волнами в рунке  $\Pi_\mp$  и имеющими остатки  $\tilde{Z}_j^\pm(x) = O(e^{-|z|\sqrt{\Lambda_{N+1}-\lambda}})$ . Коэффициенты разложений (37) образуют унитарную и симметричную  $(2N \times 2N)$ -матрицу  $S(\lambda)$ , которая названа [16; гл. 5], [72, 1] расширенной матрицей рассеяния (РМР). Представим ее в виде

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{\#}(\lambda) & S_{\#}(\lambda) \\ S_{\#}(\lambda) & S_{\#}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где блок  $S_{\#}(\lambda)$  имеет те же размеры, что и обычная МР  $s(\lambda)$ , однако, вообще говоря, отличается от нее, так как поля  $Z_j^\pm$  при  $j = 1, \dots, m$  не совпадают с полями (33) из-за присутствия в правой части (37) экспоненциально растущих на обеих бесконечностях составляющих (36). Нижний левый блок  $S_{\#}$  матрицы (38) фигурирует в формуле (см. [73, 1, 69] и др.)

$$\dim \ker(S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m}) = \dim \mathcal{L}_N^{\text{tr}}(\lambda), \quad (39)$$

где  $\mathcal{L}_N^{\text{tr}}(\lambda)$  – подпространство захваченных волн, которые затухают на бесконечности не быстрее  $e^{-|z|\sqrt{\Lambda_{N+1}-\lambda}}$ . Равенство (39) можно интерпретировать как достаточное условие существования захваченной волны: если  $-1$  – СЧ блока  $S''(\lambda)$ , то волновод  $\Omega$  на частоте  $\kappa = \sqrt{\lambda}$  производит захват одной или нескольких волн. Вместе с тем соотношение  $\dim \ker(S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m}) > 0$  не является критерием<sup>6</sup>, так как могут существовать захваченные волны, затухающие быстрее  $O(e^{-|z|\sqrt{\Lambda_{N+1}-\lambda}})$ .

**Замечание 4.** МР восстанавливается по блокам РМР (38) при помощи формулы (см. [1] и др.)

$$s(\lambda) = S_{\#}(\lambda) - S_{\#}(\lambda)(S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m})^{-1}S_{\#}(\lambda), \quad (40)$$

которая может оказаться полезной для многих целей. Например, в статье [75] на основе (40) выявлена математическая природа резонансов Фано (РФ) (см. [76], а также [77–79] и др.). Представим

<sup>6</sup> Критерий захвата волны предложен в [74] для квантовых волноводов. Он может быть приспособлен к акустическим, однако требует большого набора новых обозначений.

пояснения. Пусть СЧ  $\lambda$  отвечает мода  $v \in \mathcal{L}_N^{\text{tr}}$ , а значит,  $S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m}$  – особенная матрица в силу соотношения (39). Однако ввиду унитарности всей РМР (38) для ее блоков верно высказывание

$$b \in \ker(S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m}) \subset \mathbb{C}^{N-m} \Rightarrow S_{\#}(\lambda)b = 0 \in \mathbb{C}^m. \quad (41)$$

Кроме того,  $S_{\#}(\lambda)$  – транспонированный блок  $S_{\#}(\lambda)$  из-за симметричности РМР и, следовательно, равенство (40) сохраняется в сингулярном случае. Теперь возможен такой сценарий: при искажении стенок волновода блоки матрицы (38) приобретают возмущения и в правой части (40) возникает малый знаменатель в том случае, если матрица  $S_{\#}(\lambda) + \mathbb{1}_{N-m}$  становится неособенной и одновременно  $\lambda$  перестает быть СЧ. Этот механизм проявляется при анализе аномалий Вуда в следующем разделе.

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ И ОБОСТРЕНИЕ АНОМАЛИЙ ВУДА

В случае порогового резонанса (например,  $\Omega = \Pi$  – цилиндр или квазицилиндр) малые локальные возмущения стенок волновода, а также появление каверны или другого дефекта (рис. 8а, 8б и 8в) могут спровоцировать непропорционально быструю изменчивость дифракционной картины вблизи точек отсечки непрерывного спектра, называемую аномалией Вуда [80] (АВД) (см. также [81, 82] и др.). Опишем обнаруженные в работе [83] эффекты на примере пологого искажения волновода-полосы  $\Pi^0$  (рис. 8а); при этом возмущение стенок волновода

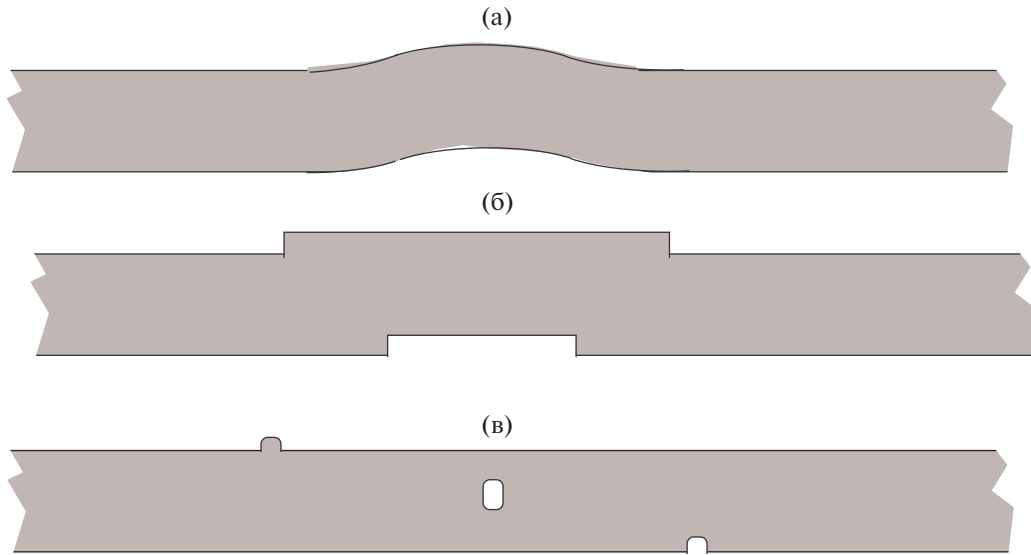
$$\Pi^\varepsilon = \left\{ x = (y, z) : -\varepsilon H_-(z) - \frac{1}{2} < y < \varepsilon H_+(z) + \frac{1}{2}, z \in (-\infty, +\infty) \right\} \quad (42)$$

описывается гладкими профильными функциями  $H_\pm$ , обращающимися в нуль при  $|z| > \ell > 0$ , т.е. рукава (1) остаются прямыми.

Рассмотрим ТО  $\kappa_m^0 = \pi m$  при некотором  $m \in \mathbb{N}$  и возмущенный спектральный параметр

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2 + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad \tau > 0, \quad |\tilde{\lambda}^\varepsilon| \leq c\varepsilon^3, \quad (43)$$

расположенный ниже порога  $\lambda^0 = \pi^2 m^2$  и вкрапленный в непрерывный спектр. Для того чтобы исследовать асимптотику МР при  $\varepsilon \rightarrow +0$  для волновода (42), воспользуемся схемой [83], упомянутой в замечании 4, а именно, найдем асимптотические представления блоков РМР  $S^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ , которые (представления) устроены значительно



**Рис. 8.** (а) – Пологое возмущение стенок волновода, (б) – возмущение уступами и (в) – возмущение малыми бугорками, кавернами или препятствиями.

более просто, и восстановим  $s^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$  по формуле (40). Еще один трюк, предложенный в статье [83] и упрощающий вычисления, состоит в том, что расширение МР производится только в одном рукаве  $\Pi_+$  и тем самым размеры РМР уменьшаются на единицу, в частности, блок  $S_{\pm}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$  становится скаляром, а блок  $S_{\mp}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$  – столбцом

Расчеты, проведенные в [83], показывают, что, во-первых, РМР гладко зависит от параметра  $\tau > 0$  и, во-вторых, главные асимптотические члены элементов РМР

$$S^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) = S^0(\tau) + \varepsilon S'(\tau) + \varepsilon^2 S''(\tau) + O(\varepsilon) \quad (44)$$

принимают вид

$$\begin{aligned} S_{\pm}^0(\tau) &= \frac{\tau - i(\tau - 2J_m(H))}{\tau - 2J_m(H) - i\tau}, \\ S_{j\pm, m+1}^0(\tau) &= \pm \frac{2\alpha_j \sqrt{2\tau(1+i)}}{\tau - 2J_m(H) - i\tau} J_{jm}^\pm(H), \end{aligned} \quad (45)$$

где  $\alpha_j = \pi\sqrt{m^2 - j^2}$  (см. равенства (6)) и

$$\begin{aligned} J_m(H) &= \pi^2 m^2 \int_{-\ell}^{\ell} (H_+(z) + H_-(z)) dz, \\ J_{jm}^\pm(H) &= \pi^2 m^2 \int_{-\ell}^{\ell} e^{\pm i\alpha_j z} (H_+(z) + (-1)^{j+m} H_-(z)) dz. \end{aligned} \quad (46)$$

Эти формулы позволяют обнаружить первичную АВД. Заметим, что

$$\tau_m = J_m(H) \Rightarrow S_{\pm}^0(\tau_m) = -1, \quad (47)$$

и рассмотрим два случая<sup>7</sup>

$$J_m(H) < 0 \quad (48)$$

и

$$J_m(H) > 0. \quad (49)$$

В первом случае ингредиенты  $S_{\pm}^1(\tau)$  и  $S_{\pm}^0(\tau)$ ,  $S_{\pm}^0(\tau)$  вытекающего из (40) представления

$$s^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) = S_{\pm}^0 + \varepsilon S_{\pm}^1(\tau) - \varepsilon \frac{S_{\pm}^0(\tau) S_{\pm}^0(\tau)}{1 + S_{\pm}^0(\tau)} + \dots, \quad (50)$$

гладко зависят от параметра  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , а знаменатель не обращается в нуль в силу соотношений (45) и (48). Таким образом, какие-либо аномалии не наблюдаются.

В случае (49) знаменатель  $1 + S_{\pm}^0(\tau)$  обращается в нуль в точке  $\tau = \tau_*$  и формула (50) теряет смысл при условии

$$S_{\pm}^0(\tau_m) \neq 0 \in \mathbb{C}^{2m}, \quad (51)$$

причем ввиду унитарности РМР разложение (44) и соотношения (51), (47) обеспечивают неравенство

$$2\text{Re} S_{\pm}^1(\tau_m) = |S_{\pm}^0(\tau_m)|^2 > 0. \quad (52)$$

<sup>7</sup> Еще один случай  $J_m(H) = 0$  допускает много возможностей, в частности, сохранение ПР, – они подробно рассмотрены в статье [83] и здесь не затрагиваются.

Введем “быструю” переменную

$$t = \varepsilon^{-1}(\tau - \tau_m), \quad (53)$$

и при учете (45), (47), (51) преобразуем формулу (50) к виду

$$s^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) = S_{\#}^0(\tau_m) - \frac{S_{\#}^0(\tau_m)S_{\#}^0(\tau_m)}{2\tau_m^{-1}it + S_{\#}^{\prime\prime}(\tau_m)} + O(\varepsilon t). \quad (54)$$

Теперь в силу неравенства (52) знаменатель отличен от нуля при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Таким образом, в отличие от соотношения (50), справедливого при ограничении (48) и обуславливающего гладкую зависимость МР от переменной  $\tau > 0$ , главный член асимптотики (54) в случае (49) характеризуется быстрой изменяемостью МР в масштабе (53), так как

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} s^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) &= S_{\#}^0(\tau_m), \text{ но} \\ \lim_{t \rightarrow 0} s^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) &= S_{\#}^0(\tau_m) - \\ &- S_{\#}^{\prime\prime}(\tau_m)^{-1} S_{\#}^0(\tau_m) S_{\#}^0(\tau_m) \neq S_{\#}^0(\tau_m). \end{aligned}$$

Иными словами, приращение спектрального параметра  $\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau_m^2$  на величину  $O(\varepsilon^3)$  приводит к кардинальной перестройке всей МР согласно формуле (54). Именно в этом и состоит одно из проявлений АД.

В силу соотношений (45) и (46) выбор профильных функций  $H_{\pm}$  позволяет обеспечить равенство

$$S_{\#}^0(\tau_m) = 0 \in \mathbb{C}^{2m}. \quad (55)$$

В этом случае вычитаемое в правой части (54) становится нулевым, однако это обстоятельство вовсе не означает, что АД исчезает или сглаживается, — наоборот, аномалия может усилиться. Будем считать, что профильные функции в волноводе (42) сами зависят от малого параметра  $\varepsilon$ , а именно,

$$H_{\pm}^\varepsilon(z) = H_{\pm}(z) + \varepsilon H_{\pm}^{\prime}(z), \quad (56)$$

$$H_{\pm}^{\prime} \in C^\infty([-\ell, \ell] \times [0, 1]), \quad \text{supp} H_{\pm}^{\prime} \subset (-\ell, \ell).$$

Пусть еще для интегралов (46) выполнены требования (49) и (55). Как показано в [83], поправки  $H_{\pm}^{\prime}(z)$  в правой части (56) можно подобрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$S_{\#}^{\prime}(\tau_m) \neq 0 \in \mathbb{C}^{2m}, \quad \text{Im} S_{\#}^{\prime}(\tau_m) = 0.$$

При этом формула (46) для МР превращается в

$$\begin{aligned} s^\varepsilon(\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau^2) &= \\ &= S_{\#}^{\prime\prime}(\tau_m) - \frac{S_{\#}^{\prime}(\tau_m)S_{\#}^{\prime}(\tau_m)}{2\tau_m^{-1}iT + S_{\#}^{\prime\prime\prime}(\tau_m)} + O(\varepsilon T), \end{aligned} \quad (57)$$

где используется сверхбыстрая переменная

$$T = \varepsilon^{-3} \left( \tau - \tau_m - \varepsilon^2 \text{Im} S_{\#}^{\prime\prime}(\tau_m) \right), \quad (58)$$

а знаменатель не обращается в нуль, так как выполнено аналогичное (52) неравенство  $\text{Re} S_{\#}^{\prime\prime\prime}(\tau_m) > 0$ .

При малом  $\varepsilon$  переменной (58) свойственен значительно более быстрый рост, чем у прежней переменной (53), а значит, соотношение (57) следует интерпретировать как обострение АД.

**Замечание 5.** Одно из толкований АД и РФ — возникновение точек комплексного резонанса (ТКР), приближенных к вещественной оси. Асимптотические формулы для этих точек и пристражающиеся от них наблюдения приведены в статье [83]. В частности, описанное обострение АД обусловлено уменьшением расстояния от ТКР до вещественной оси. В принципе за счет выбора профилей  $H_{\pm}^{\prime}(z, \varepsilon)$  в формулах (42), (56) этому расстоянию можно придать порядок  $\varepsilon^{2K-1}$  с любым заданным наперед  $K \in \mathbb{N}$ .

### СГЛАЖИВАНИЕ АНОМАЛИЙ ВУДА — ОБРАЗОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Продолжим рассмотрение возмущенной полосы (42) с профильными функциями (56). Допустим, что выполнены соотношения (49) и (55), способные привести к обострению АД, однако произведем дальнейшую настройку профилей, применив предложенную в [73, 1] процедуру образования СЧ (43), вкрапленного в непрерывный спектр.

Поскольку у задачи (2) в прямой полосе  $\Pi^0 = (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$ , разумеется, нет захваченных волн, упомянутое в предыдущем разделе достаточное условие  $S_{\#}^{\varepsilon}(\lambda^{\varepsilon}) = -1$  превращается в критерий захвата волны, который, следуя работам [1, 83], переформулируем в виде

$$\text{Im} S_{\#}^{\varepsilon}(\lambda^{\varepsilon}) = 0, \quad \text{Re} \left( e^{i\psi} S_{\#}^{\varepsilon}(\lambda^{\varepsilon}) \right) = 0 \in \mathbb{R}^{2m-2}, \quad (59)$$

причем фаза  $\psi$  зафиксирована так, что величина  $e^{2i\psi}$  не является СЧ матрицы  $S_{\#}^0(\pi^2 m^2)$ , состоящей из  $m$  блоков  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  на ее диагонали; например,

$\psi = \frac{\pi}{4}$ . Вычисления, доказывающие эквивалентность равенств (59) упомянутому критерию, приведены в статьях [1, 83].

Нужные профили будем искать в виде (56), где

$$H_{\pm}^{\prime}(z; \beta^{\prime}) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\vartheta} \beta_{k\pm} H_{\pm}^{(k\vartheta)}(z), \quad (60)$$

а СЧ – в виде

$$\lambda^\varepsilon = \pi^2 m^2 - (\tau_k + \beta_0)^2. \quad (61)$$

Образуем вектор неизвестных параметров

$$\beta = (\beta_0, \beta') = (\beta_0, \beta_{1+}, \beta_{1-}, \dots, \beta_{m-1+}, \beta_{m-1-}) \in \mathbb{R}^{2m-1}. \quad (62)$$

Наконец, назовем условия ортогональности и нормировки для компонент  $H$  и  $H_\vartheta^{(q)}$ , согласованные с формулами (59):

$$\begin{aligned} J_m(H^{(q\vartheta)}) = 0, \quad \operatorname{Re}(e^{i\psi} J_{pm}^\pm(H^{(q\vartheta)})) = \delta_{p,q} \delta_{\pm,\vartheta}, \\ J_m(H) = 1, \quad \operatorname{Re}(e^{i\psi} J_{pm}^\pm(H)) = 0, \quad (63) \\ p, q = 1, \dots, m-1, \quad \vartheta = \pm. \end{aligned}$$

В результате при учете асимптотических формул (45) переписываем соотношения (59) как векторное трансцендентное уравнение в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2m-1}$  для неизвестных (62)

$$\beta = \varepsilon B^\varepsilon(\beta) \quad (64)$$

со сжимающим оператором  $B^\varepsilon$  на шаре  $\mathbb{B}_\rho^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m-1}$  некоторого радиуса  $\rho > 0$ . При малом  $\varepsilon$  принцип Банаха сжимающих отображений (см., например, [84; гл. 2, §4]) доставляет единственное решение  $\beta \in \mathbb{B}_\rho^{2m-1}$ , которое к тому же допускает оценку

$$|\beta| \leq c\varepsilon.$$

В итоге найдены профили (56), (60) и спектральный параметр (61), при которых выполнены соотношения (59), а значит, и достаточное условие  $S_\varepsilon^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = -1$  (критерий в данном случае) захвата волн.

Благодаря формулам (41) и (40) справедливо равенство  $s^\varepsilon(\tau_k) = S_{\#}^\varepsilon(\tau_k)$ , а значит, АДВ сглаживается. Напомним, что исчезновение этой аномалии также происходит при соблюдении неравенства (48) или сохранении ПР (см. пояснения в работе [83]).

Подчеркнем, что на этапе решения трансцендентного уравнения (64) формулы (62) для СЧ и (61) для профильных функций становятся неявными. В статье [85] пояснено, как следует толковать приближенное (например, численное) решение  $\beta_{\text{appr}}$  уравнения (64). Условия (63), наложенные на составляющие разложения (60), можно соблюсти многими способами (один из них – вариация фазы  $\psi$  в (59)), причем каждый набор функций  $\{H_\pm^{1\vartheta}, \dots, H_\pm^{m-1\vartheta}\}$  порождает свои профили (61) для СЧ (62).

Намеченная процедура “точной настройки” успешно применялась в разных вариантах для построения околопороговых СЧ (см. [73, 86, 1, 87,

69] и др.), но также для сохранения ПР [83] или СЧ внутри непрерывного спектра [9]. Кроме того, она же позволяет построить примеры “невидимости” препятствий в акустическом волноводе на заданных наперед частотах (см. [88–90] и др.).

В статье [59] предложен уже обсуждавшийся в замечании 1 наиболее простой и изящный прием построения СЧ в непрерывном спектре симметричного акустического волновода – постановка искусственного условия Дирихле на средней линии (ось  $z$  на рис. 2а), которые образуют искусственную ТО  $\lambda_D^\dagger > 0$  в спектре ополовиненного волновода. Найти СЧ смешанной краевой задачи на интервале  $(0, \lambda_D^\dagger)$  удастся при помощи простого вариационного подхода (см. [59, 91, 92, 55] и многие др.), и это же СЧ попадает на непрерывный спектр исходного акустического волновода.

У задачи (2) в волноводе с цилиндрическими рукавами (1) дискретный спектр заведомо пуст, так как непрерывный спектр занимает всю положительную полуось  $[0, +\infty)$ . При раскрытии лагун в них все-таки могут появиться изолированные СЧ. Неожиданно применить вариационный подход для их отыскания не удалось, однако работает описанный выше асимптотический метод (см., например, статью [69]), причем со значительными упрощениями (не нужно проводить настройку) и явными выражениями для членов асимптотических формул.

Результат [91] о появлении СЧ ниже ТО в спектре изогнутого квантового двумерного волновода постоянной ширины (рис. 8а) нашел многочисленные применения и обобщения (см. обзор в книге [93]). Пример двумерного акустического волновода постоянной ширины, у которого в непрерывном спектре имеется СЧ, не построен до сих пор. В трехмерном случае известны [94] примеры непустого точечного спектра  $\sigma_p$  у волновода

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}, (n, y_2) \in \omega\}$$

с постоянным сечением  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  и изогнутой осью  $Y$  в плоскости  $\{x : y_2 = 0\}$ , на которой введены локальные криволинейные координаты  $(n, s)$ , где  $s$  – длина дуги, а  $n$  – ориентированное расстояние до  $Y$ . Именно, при двойной симметрии сечения

$$\omega = \{(-y_1, y_2) : y \in \omega\} = \{(y_1, -y_2) : y \in \omega\}$$

и любой нетривиальной кривизне  $\kappa$  оси всегда имеется СЧ на интервале  $(0, \Lambda_1)$ , а в случае полной потери симметрии сечением  $\omega$  удастся построить СЧ  $\lambda^\varepsilon = \Lambda_1 - \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$  при специально подобранной малой кривизне  $\kappa(x) = O(\varepsilon)$  конечного участка оси. Наконец, в работе [95] показано, что подбором положения патрубка единичной ширины в

плоском коленчатом волноводе на рис. 8б, можно добиться возникновения СЧ внутри непрерывного спектра.

**Замечание 6.** Поясним, почему при локальном возмущении формы волновода с цилиндрическими рукавами (1) СЧ не имеет возможности подняться вверх от порога непрерывного спектра, но в гофрированном волноводе может отцепиться в обе стороны от вырожденного порога (ср. замечание 2).

В цилиндрическом волноводе  $\Pi = \omega \times \mathbb{R}$  все пороги  $\lambda = \Lambda_m$  невырожденные, причем  $K = 1$  и  $\partial_\eta^2 \Lambda_m(0) < 0$  в формуле (24) при интерпретации его как 1-периодического множества. У задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_x w_\varepsilon(x) &= (\Lambda_m + \vartheta \varepsilon^2) w_\varepsilon(x), x \in \Pi, \\ \partial_\nu w_\varepsilon(x) &= 0, x \in \partial \Pi, \end{aligned}$$

имеются следующие волны:

$$w_{m\varepsilon}^{\text{osc}\pm}(y, z) = e^{\pm i\varepsilon z} U_m(y) \text{ при } \vartheta = +, \quad (65)$$

$$w_{m\varepsilon}^{\text{exp}\pm}(y, z) = e^{\pm \varepsilon z} U_m(y) \text{ при } \vartheta = -. \quad (66)$$

В случае  $\vartheta = -$ , т.е. ниже ТО  $\Lambda_m$  исчезающие при  $z \rightarrow \mp\infty$  волны (65) могут породить захваченную волну в возмущенном волноводе  $\Omega_\varepsilon$  – процедура точной настройки профиля возмущения стенок представлена в работе [1] и др. Если  $\vartheta = +$  и точка  $\Lambda_m + \vartheta \varepsilon^2$  расположена выше порога  $\lambda = \Lambda_m$ , в списке (66) нет затухающих волн и построение захваченной волны, происходящей от порога, невозможно (строгое доказательство этого факта приведено в [1, 96]).

Пусть в спектре квазицилиндра  $\Pi$  найден простой вырожденный порог, причем  $\eta^0 = 0$ ,  $K = 3$  и  $\partial_\eta^4 \Lambda_m(0) < 0$  в формуле (24) (ср. замечание 2). Классические результаты [97; гл. 7], [98; гл. 9] (см. также статью [71]) о возмущении СЧ операторных пучков показывают, что у задачи (65) в квазицилиндре при  $\vartheta = -$  имеются волны

$$\begin{aligned} w_{m\varepsilon}^{\text{dec}\pm}(y, z) &= e^{+\varphi_\varepsilon^\pm z} \mathcal{Q} w_{m\varepsilon}^{\text{dec}\pm}(y, z), \\ w_{m\varepsilon}^{\text{gro}\pm}(y, z) &= e^{-\varphi_\varepsilon^\pm z} \mathcal{Q} w_{m\varepsilon}^{\text{gro}\pm}(y, z), \end{aligned} \quad (67)$$

а при  $\vartheta = +$  – волны

$$\begin{aligned} w_{m\varepsilon}^{\text{osc}\pm}(y, z) &= e^{\pm i\varphi_\varepsilon^0 z} \mathcal{Q} w_{m\varepsilon}^{\text{osc}\pm}(y, z), \\ w_{m\varepsilon}^{\text{exp}\pm}(y, z) &= e^{\pm \varphi_\varepsilon^0 z} \mathcal{Q} w_{m\varepsilon}^{\text{exp}\pm}(y, z). \end{aligned} \quad (68)$$

При этом показатели экспонент удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^0 &= \sqrt{\varepsilon}(\varphi_0 + O(\varepsilon)), \quad \varphi_\varepsilon^\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}(i \mp 1)}(\varphi_0 + O(\varepsilon)), \\ \varphi_0 &> 0, \end{aligned}$$

а амплитудные части  $\mathcal{Q} w_{m\varepsilon}^{\pm}(y, z)$  имеют главным асимптотическим членом собственную функцию

$\mathcal{U}_m^0(y, z)$  задачи (13), (14) с  $\eta = 0$  и  $\Lambda(\eta) = \Lambda_m(0)$ , но различаются в младших асимптотических членах. В итоге, и при  $\vartheta = -$  в (67), и при  $\vartheta = +$  в (68) около порога  $\lambda = \Lambda_m$  существуют затухающие при  $z \rightarrow \mp\infty$  волны  $w_{m\varepsilon}^{\text{dec}\pm}$  и  $w_{m\varepsilon}^{\text{exp}\pm}$  соответственно. Таким образом, процедура точной настройки параметров возмущения позволяет построить СЧ и захваченные волны как ниже, так и выше порога  $\lambda = \Lambda_m$ .

К сожалению, автор не знает конкретного гофрированного акустического волновода, у которого в спектре существует вырожденный порог, однако в публикациях [99] и [64] эффект поднятия СЧ с вырожденного порога подтвержден для задач теории упругости и теории пластин Кирхгофа. Остался открытым вопрос о построении возмущения, при котором у волновода возникает максимально возможное количество СЧ – два ниже и одно выше ТО.

### АНОМАЛИИ ВАЙНШТЕЙНА

В акустических и квантовых волноводах АД и СЧ могут возникать только ниже невырожденного порога, а выше него зачастую образуются аномалии Вайнштейна (АВН), связанные с почти полным отражением (ППО) или почти полным прохождением (ППП) некоторых волн. Впервые такая необычная дифракционная картина была описана в книге [100], где на основе явных формул для акустического поля было обнаружено ППО поршневой моды в полубесконечной цилиндрической круговой трубе, открытой в пространстве. Изучению АВН посвящено большое количество публикаций (см. [101, 96, 2, 102–105] и др.), в том числе и для упругих волноводов [106].

Приведем один из результатов статьи [2], относящихся к цилиндрическим волноводам с резонаторами (рис. 2а), и для упрощения формулировок предположим зеркальную симметрию волновода относительно плоскости  $\{x : z = 0\}$  (ср. замечание 6), перпендикулярной оси цилиндра  $\Pi$ . Рассмотрим какое-то простое СЧ  $\Lambda_m$  модельной задачи (7) и отвечающую ему частоту отсечки  $\kappa_+ = \sqrt{\lambda_+}$ . Спектральному параметру

$$(\kappa^\varepsilon)^2 = \lambda^\varepsilon = \Lambda_m + \varepsilon^2 \in (\Lambda_m, \Lambda_{m+1}) \text{ при } \varepsilon > 0 \quad (69)$$

отвечают  $2m$  распространяющихся волн (5), причем у волн  $w_j^{\varepsilon\pm}$  с индексами  $j = 1, \dots, m - 1$  волновые числа  $\alpha_j^\varepsilon = \sqrt{\Lambda_m - \Lambda_j + \varepsilon^2}$  (см. определение (6)) имеют порядок единицы, но волновое число  $\alpha_m^\varepsilon = \varepsilon$  оказывается малым, т.е. нормирующий мно-

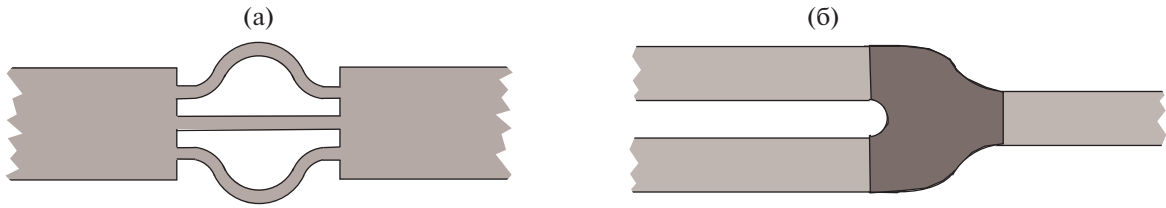


Рис. 9. Схематичные ( $N = 3$ ) изображения (а) — волновода с двойным пороговым резонансом и (б) — сочленение нескольких полуцилиндров.

житель  $a_m^\varepsilon = (2\varepsilon)^{-1/2}$  становится большим. Интерес представляют коэффициенты отражения  $R_m^\varepsilon = S_{-m,-m}^\varepsilon$  и коэффициенты прохождения  $T_m^\varepsilon = S_{-m,+m}^\varepsilon$  высокоамплитудной волны  $w_j^{\varepsilon+}$ , приходящей из бесконечности в рукаве  $\Pi_-$  (см. разложение (33)). Предположим, что при  $\lambda = \Lambda_m$  в задаче (2) реализуется ПР с кратностью  $k$ , для которой ввиду простоты СЧ возможны три значения 0, 1 и 2. Проведенный в [2] асимптотический анализ показал, что

1°. при  $k = 0$  (нет ПСВ) происходит ППО, т.е.

$$R_m^\varepsilon = -1 + O(\varepsilon), \text{ а остальные КР суть } O(\varepsilon);$$

2°. при  $k = 1$  (пространство ПСВ одномерно) происходит ППП, т.е.

$$T_m^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon), \text{ а остальные КР суть } O(\varepsilon);$$

3°. при  $k = 2$  (есть две линейно независимые ПСВ) происходит ППО, т.е.

$$R_m^\varepsilon = +1 + O(\varepsilon), \text{ а остальные КР суть } O(\varepsilon).$$

Ситуации 1° и 3° можно смоделировать при помощи слабопроницаемой перегородки на торце  $\omega(-\ell)$  рукава  $\Pi_-$ , причем она мягкая в случае 1° и жесткая в случае 3°. Ясно, что ПР — неустойчивый феномен, и в статье [94] описана процедура, позволяющая сохранить его, но, как и в случае СЧ, вкрапленного в непрерывный спектр, требующая “точной настройки” формы возмущения стенок. Поэтому 1° — ситуация общего положения. Пример ПР с кратностью  $k = 1$  очевиден: прямой цилиндр или полоса. Известный автору пример<sup>8</sup> ситуации 3° весьма экзотичен, а именно, два полуцилиндра соединены тонкими изогнутыми трубками в количестве  $N \leq 8$  штук при специальном подборе их длин (см. схему на рис. 9а).

Как упоминалось, на нулевой ГО реализуется простой ПР. Рассмотрим задачу рассеяния на низких частотах  $\kappa \ll 1$  в волноводе  $\Omega$ , состоящем из конечного ядра  $\Theta$  и полуцилиндров  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$

(рис. 9б с  $N = 3$ ), т.е. задачу Неймана (2) с малым параметром  $\lambda = \kappa^2$ . Пусть сечения рукавов

$$\Pi_n = \{(y^n, z_n) : y^n \in \omega, z_n > 0\} \quad (70)$$

одинаковы; здесь  $y^n = (y_1^n, \dots, y_{d-1}^n)$  и  $z_n$  — локальные декартовы координаты. Поршневая мода  $w_m^-(z_m) = e^{-i\kappa z_m}$  приходит из бесконечности в рукаве  $\Pi_m$  и рассеивается в рукавах (70) с коэффициентами  $S_{m1}^\kappa, \dots, S_{mN}^\kappa$ . Простой асимптотический анализ приводит к формулам

$$S_{mm}^\kappa = \frac{2}{N} - 1 + O(\kappa),$$

$$S_{mn}^\kappa = \frac{2}{N} + O(\kappa), \quad n \neq m.$$

Таким образом, при  $N = 1$  и  $N = 2$  реализуются ППО ( $S_{11}^0 = 1$ ) и ППП ( $S_{22}^0 = 0$  и  $S_{21}^0 = 1$ ) соответственно, однако в случае  $N \geq 3$  никаких особенностей в картине рассеяния нет.

**Замечание 6.** При  $N = 2$  при разных площадях сечений рукавов или при потере волноводом зеркальной симметрии ПСВ приобретают разложение

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \chi_-(z)K_-U_m(y) + \chi_+(z)K_+U_m(y),$$

причем  $K_- \neq K_+$  и

$$|K_-|^2 + |K_+|^2 = 1, \quad \text{Im}(\overline{K_-}K_+) = 0.$$

В этом случае согласно вычислениям из [2] коэффициенты отражения и прохождения на частоте  $\kappa^\varepsilon$  из (69) принимают вид

$$R^\varepsilon = |K_-|^2 - |K_+|^2 + O(\varepsilon), \quad T^\varepsilon = 2\overline{K_+}K_- + O(\varepsilon).$$

Ясно, что в случае  $|K_-| = |K_+|$  реализуется ППП и без симметрии волновода, но в случаях  $K_- = 0$  или  $K_+ = 0$  — ППО.

Работа финансово поддержана Российским научным фондом (проект 17-11-01003).

<sup>8</sup> Его построение будет опубликовано в журнале Математический сборник.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167, 2. С. 239–262.
2. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. 10. P. 1245–1260.
3. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. 2. P. 533–559.
4. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. P. 718–752.
5. *Назаров С.А.* Спектр прямоугольных решеток квантовых волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2017. Т. 81, 1. С. 31–92.
6. *Назаров С.А.* Разрушение циклов и возможность раскрытия спектральных лагун в квадратной решетке тонких акустических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2018. Т. 82, 6. С. 3–51.
7. *Aslanyan A., Parnowski L., Vassiliev D.* Complex resonances in acoustic waveguides // Q. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53. P. 429–447.
8. *Linton C. M., McIver P.* Embedded trapped modes in water waves and acoustics // Wave Motion. 2007. V. 45. 1–2. P. 16–29.
9. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47, 3. С. 37–53.
10. *Wilcox C.H.* Scattering Theory for Diffraction Gratings. Applied Mathematical Sciences Series Vol. 46. Singapore: Springer, 1997.
11. *Munra P., Lu C.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
12. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
13. *Кучмент П.А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, 4. С. 3–52.
14. *Скриганов М.М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 171. Ленинград: Наука, 1985. 122 с.
15. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
16. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
17. *Гельфанд И.М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
18. *Назаров С.А.* Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода // Матем. заметки. 2010. Т. 87, 5. С. 764–786.
19. *Bakharev F.L., Nazarov S.A., Ruotsalainen K.M.* A gap in the spectrum of the Neumann–Laplacian on a periodic waveguide // Applicable Analysis. 2012. V. 88. P. 1–17.
20. *Borisov D., Pankrashkin K.* Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2013. V. 46, 23. 235203.
21. *Назаров С.А.* Асимптотика спектральных лагун в регулярно возмущенном периодическом волноводе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. Вып. 2(7). С. 54–63.
22. *Hempel R., Lienau K.* Spectral properties of periodic media in the large coupling limit // Commun. Partial Differ. Equ. 2000. V. 25. P. 1445–1470.
23. *Hempel R., Post O.* Spectral gaps for periodic elliptic operators with high contrast: an overview // In: Progress in analysis, proceedings of the 3rd international ISAAC congress Berlin. 2001. P. 577–587.
24. *Post O.* Periodic manifolds with spectral gaps // J. Differential Equations. 2003. V. 187. P. 23–45.
25. *Exner P., Post O.* Convergence of spectra of graph-like thin manifolds // J. Geom. and Phys. 2005. V. 54(1). P. 77–115.
26. *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces. Lecture Notes in Mathematics, 2009. Heidelberg: Springer, 2012.
27. *Жиков В.В.* О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, 5. С. 34–58.
28. *Назаров С.А.* Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области // Функциональный анализ и его приложения. 2009. Т. 43, 3. С. 92–95.
29. *Назаров С.А., Руотсалайнен К., Таскинен Я.* Спектральные лакуны в задачах Дирихле и Неймана на плоскости, перфорированной двоякопериодическим семейством круговых отверстий // Проблемы матем. анализа. Вып. 62. Новосибирск, 2011. С. 51–100.
30. *Бахарев Ф.Л., Назаров С.А.* Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // Сибирск. матем. журнал. 2015. Т. 56, 4. С. 732–751.
31. *Bakharev F.L., Cardone G., Nazarov S.A., Taskinen J.* Effects of Rayleigh waves on the essential spectrum in perturbed doubly periodic elliptic problems // Integral Equations and Operator Theory. 2017. V. 88, 3. P. 373–386.
32. *Sanchez Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
33. *Lobo M., Perez E.* High frequency vibrations in a stiff problem // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1997. V. 7, 2. P. 291–311.

34. Назаров С.А. Лагуна в спектре формально самосопряженной эллиптической системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, 5. С. 726–736.
35. Beale J.T. Scattering frequencies of resonators // Commun. Pure Appl. Math. 1973. V. 26, 4. P. 549–563.
36. Арсеньев А.А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае крайних условий II и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, 3. С. 718–724.
37. Гадильшин Р.Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I // Матем. заметки. 1993. Т. 54, 6. С. 10–21. II. // ibid. 1994. Т. 55, 1. С. 20–34. III. // ibid. 1997. Т. 61, 4. С. 494–502.
38. Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 18. М.: изд-во МГУ. 1995. С. 3–78. 2 // ibid. Вып. 20. М.: изд-во МГУ. 1997. С. 155–195.
39. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
40. Гадильшин Р.Р. О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой” // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, 2. С. 45–110.
41. Joly P., Tordeux S. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots. I: The asymptotic expansion // SIAM J. Multiscale Model. Simul. 2006. V. 5, 1. P. 304–336.
42. Joly P., Tordeux S. Matching of asymptotic expansions for waves propagation in media with thin slots. II: The error estimates // Math. Model. Numer. Anal. 2008. V. 42, 2. P. 193–221.
43. Nazarov S.A., Ruotsalainen K., Taskinen J. Essential spectrum of a periodic elastic waveguide may contain arbitrarily many gaps // Applicable Anal. 2010. V. 89, 1. P. 109–124.
44. Назаров С.А. Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, 5. С. 879–895.
45. Назаров С.А., Таскинен Я. Строение спектра периодического семейства идентичных ячеек, соединенных через сужающиеся отверстия // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2012. Т. 409. С. 130–150.
46. Sobolev A.V., Walthoe J. Absolute continuity in periodic waveguides // Proc. London Math. Soc. 2002. V. 85, 1. P. 717–741.
47. Суслина Т.А., Штернберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе // Алгебра и Анализ. 2002. Т. 13, 2. С. 159–206.
48. Shargorodskii E., Sobolev A.V. Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems in dimension two // J. d'Analyse Math. 2003. V. 91, 1. P. 63–103.
49. Miller K. Nonunique continuation for uniformly parabolic and elliptic equations in self-adjoint divergence form with Hölder continuous coefficients // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974. V. 54, 2. P. 105–117.
50. Филонов Н.Д. Эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме, имеющее решение с компактным носителем // Проблемы матем. анализа. Т. 22. С. 246–257.
51. Демченко М.Н. О неединственности продолжения решения системы Максвелла // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2011. Т. 393. С. 803–100.
52. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, 3. С. 53–160.
53. Pankrashkin K. Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. of Math. Anal. and Appl. 2017. V. 449, 1. P. 907–925.
54. Bakharev F.L., Nazarov S.A. Criteria for the absence and existence of bounded solutions at the threshold frequency in a junction of quantum waveguides. <https://arxiv.org/abs/1705.10481>
55. Назаров С.А. Локализованные волны в Т-образном волноводе // Акуст. журн. 2010. Т. 56, 6. С. 747–758.
56. Nazarov S.A., Ruotsalainen K., Uusitalo P. The Y-junction of quantum waveguides // ZAMM. 2014. V. 94, 6. P. 477–486.
57. Назаров С.А. Ограниченные решения в Т-образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, 8. С. 1299–1318.
58. Бахарев Ф.Л., Матвеев С.Г., Назаров С.А. Дискретный спектр крестообразных волноводов // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, 2. С. 32–45.
59. Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D. Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
60. Jones D.S. The eigenvalues of  $\nabla^2 u + \lambda u = 0$  when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
61. Назаров С.А. Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и околопороговые собственные числа // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, 3. С. 111–160.
62. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
63. Назаров С.А. Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах // Проблемы матем. анализа. Вып. 72. Новосибирск, 2013. С. 101–146.
64. Назаров С.А. Бесконечная пластина Кирхгофа на компактном упругом основании может иметь сколь угодно малое собственное число // Доклады РАН. 2019. Т. 488, 4. С. 360–364.
65. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.

66. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Сб. трудов. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947.
67. *Вайнберг Б.Р.* Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1966. Т. 21, 6. С. 115–194.
68. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 20 с.
69. *Назаров С.А.* Лакуны и собственные частоты в спектре периодического акустического волновода // Акуст. журн. 2013. Т. 59, 3. С. 312–321.
70. *Royniting J. H.* On the transfer of energy in the electromagnetic field // Phil. Trans. of the Royal Society of London. 1884. V. 175. P. 343–361.
71. *Назаров С.А.* Условия излучения Умова–Мандельштама в упругих периодических волноводах // Матем. сборник. 2014. Т. 205, 7. С. 43–72.
72. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2000. Т. 264. С. 66–82.
73. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. I // Матем. сборник. 1999. Т. 190, 1. С. 109–138; II // *ibid.* 1999. Т. 190, 2. С. 43–70.
74. *Назаров С.А.* Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом // Функциональный анализ и его приложения. 2006. Т. 40, 2. С. 20–32.
75. *Chesnel L., Nazarov S. A.* Non reflection and perfect reflection via Fano resonance in waveguides // Commun. Math. Sci. 2018. V. 16, 7. P. 1779–1800.
76. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // Phys. Rev. 1961. V. 124, 6. P. 1866–1878.
77. *Shipman S.P., Venakides S.* Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // Phys. Rev. E. 2005. V. 71, 2. 026611.
78. *Shipman S.P., Tu H.* Total resonant transmission and reflection by periodic structures // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72, 1. P. 216–239.
79. *Shipman S.P., Welters A.T.* Resonant electromagnetic scattering in anisotropic layered media // J. Math. Phys. 2013. V. 54, 10. 103511.
80. *Wood R.* On the remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum // Proc. Phys. Soc. London. 1902. V. 18. P. 269–275.
81. *Seabrook W.* Doctor Wood, Modern Wizard of the Laboratory. New York: Harcourt Brace, 1941.
82. *Hessel A., Oliner A.A.* A new theory of Wood's anomalies on optical gratings // Appl. Optics. 1965. V. 4, 10. P. 1275–1297.
83. *Назаров С.А.* Обострение и сглаживание околопороговых аномалий Вуда в акустическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64, 5. С. 534–546.
84. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
85. *Nazarov S.A., Ruotsalainen K.M.* A rigorous interpretation of approximate computations of embedded eigenfrequencies of water waves // Z. Anal. Anwend. 2016. V. 35, 2. P. 211–242.
86. *Назаров С.А.* Собственные числа оператора Лапласа с условиями Неймана на регулярно возмущенных стенках волновода // Проблемы матем. анализа. Вып. 53. Новосибирск, 2011. С. 104–119.
87. *Назаров С.А.* Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58, 6. С. 683–691.
88. *Боннэ-Бен Дюа А.-С., Назаров С.А.* Препятствия в акустическом волноводе, становящиеся “невидимыми” на заданных частотах // Акуст. журн. 2013. Т. 59, 6. С. 685–692.
89. *Chesnel L., Nazarov S.A.* Team organization may help swarms of flies to become invisible in closed waveguides // Inverse Problems and Imaging. 2016. V. 10, 6. P. 977–1006.
90. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Lunéville E., Mbeutcha Y., Nazarov S.A.* A method to build non-scattering perturbations of two-dimensional acoustic waveguides // Math. Methods Appl. Sci. 2017. V. 40, 2. P. 335–349.
91. *Duclos P., Exner P.* Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions // Review Math. Phys. 1995. V. 7, 1. P. 73–102.
92. *Назаров С.А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сибирск. матем. журнал. 2010. Т. 51, 5. С. 1086–1101.
93. *Exner P., Kovarič H.* Quantum waveguides. Theoretical and Mathematical Physics. Cham: Springer, 2015.
94. *Назаров С.А.* Захват волны в искривленном цилиндрическом акустическом волноводе с неизменным сечением // Алгебра и анализ. 2019. Т. 31, 5. С. 154–183.
95. *Назаров С.А.* Захваченные волны в коленчатом волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2011. Т. 57, 6. С. 746–754.
96. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сборник. 2015. Т. 206, 6. С. 15–48.
97. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
98. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
99. *Назаров С.А.* Построение захваченной волны на малых частотах в упругом волноводе // Функциональный анализ и его приложения. 2020. Т. 54, 1. С. 41–57.

100. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966.
101. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // *SIAM J. Appl. Math.* 2009. V. 70. P. 1201–1218.
102. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Дифракция на решетке из поглощающих экранов разной высоты. Новые уравнения // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2014. Т. 422. С. 62–89.
103. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction by a transversal screen in a planar waveguide // *Proc. of Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS – SPb)*. 2017. P. 3521–3525.
104. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // *Wave Motion*. 2017. V. 68. P. 218–241.
105. *Назаров С.А.* О прохождении волн через малое отверстие в перегородке акустического волновода // *Сибирск. матем. журнал*. 2018. Т. 59, 1. С. 110–129.
106. *Назаров С.А.* Почти полное прохождение низкочастотных волн в локально поврежденном упругом волноводе // *Проблемы матем. анализа*. Вып. 100. Новосибирск, 2019. С. 83–121.

## РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО ПОЛЯ В БАССЕЙНЕ

© 2020 г. А. Л. Вировлянский<sup>а</sup>, \*, А. Ю. Казарова<sup>а</sup>, Л. Я. Любавин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной физики Российской Академии наук, ул. Ульянова 46, Н. Новгород, 603950 Россия

\*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Обсуждается реконструкция диаграммы направленности источника звука в свободном пространстве по измерениям поля, возбуждаемого этим источником в бассейне. Процедура реконструкции базируется на использовании эталонного акустического монополя. Поле калибруемого источника сопоставляется с полями, излученными монополю из нескольких специально выбранных точек бассейна. Сигналы источника и эталонного монополя регистрируются одними и теми же приемниками. На основе этих измерений поле источника в бассейне аппроксимируется суперпозицией полей акустических монополей. Сформулированы условия, при которых поле источника в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции полей тех же монополей. Это позволяет вычислить диаграмму направленности калибруемого источника в свободном пространстве. Работоспособность метода подтверждена результатами численного моделирования.

*Ключевые слова:* излучатель звука, калибровка, бассейн, метод эквивалентных источников

DOI: 10.31857/S0320791920050159

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Большинство методов калибровки акустических излучателей в бассейне с отражающими границами основаны на выделении прямого сигнала, приходящего в точки приема без отражения от границ. Чаще всего используется облицовка границ поглощающим покрытием для ослабления отраженных сигналов и/или селекция прямых сигналов по времени распространения [1, 2]. Эти подходы эффективны лишь на достаточно высоких частотах. При калибровке низкочастотных излучателей задача усложняется, и ее решение требует применения специальных методов обработки сигналов [3–5].

В недавней работе [6] развит альтернативный подход, позволяющий провести калибровку излучателя в бассейне без выделения прямого сигнала. Он базируется на использовании метода эквивалентных источников (ЭИ) [7–12]. Предполагается, что поля, возбуждаемые калибруемым излучателем и в бассейне, и в свободном пространстве могут быть представлены в виде суперпозиции полей одних и тех же акустических монополей, играющих роль ЭИ, с одними и теми же амплитудами. Амплитуды ЭИ восстанавливаются по данным измерений в бассейне. Необходимые для решения этой обратной задачи значения функции

Грина уравнения Гельмгольца измеряются с помощью процедуры, названной в [6] калибровкой бассейна. Она заключается в том, что эталонный акустический монополь поочередно помещается в точки расположения ЭИ и сигналы, излучаемые им из этих точек, регистрируются всеми приемниками. Искомое поле излучателя в свободном пространстве затем легко вычисляется с использованием найденных амплитуд ЭИ и известного выражения для функции Грина свободного пространства.

Возможности этого способа калибровки существенно ограничивает отсутствие обоснованных общих рекомендаций по выбору количества ЭИ и точек их размещения, гарантирующих эффективность моделирования поля произвольного источника звука суперпозицией полей ЭИ [8, 12]. Однако такие рекомендации можно сформулировать для низкочастотного излучателя с размерами меньше длины волны, поле которого в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции монополюльной, дипольных и квадрупольных компонент. В данной статье показано, что возможность пренебрежения вкладом высших мультиполей сильно упрощает анализ и позволяет сформулировать требования к расположению ЭИ и точек приема, достаточные для реконструк-

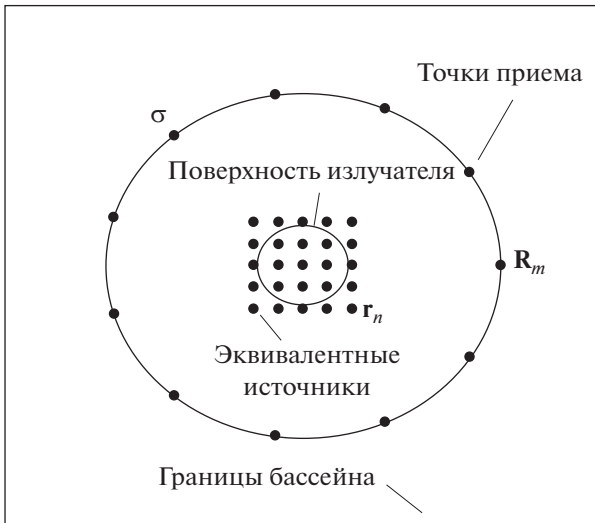


Рис. 1. Схема эксперимента.

ции поля калибруемого источника в свободном пространстве.

Материалы статьи расположены в следующем порядке. Для удобства читателя в разд. 2 кратко изложена основная идея метода из работы [6]. Требования к выбору координат ЭИ сформулированы в разд. 3. Анализ условий, при выполнении которых одни и те же ЭИ представляют поле излучателя и в бассейне, и в свободном пространстве, посвящен разд. 4. Критерий правильного выбора количества и позиций точек приема установлен в разд. 5. Эффективность найденных условий, обеспечивающих возможность решения обратной задачи, продемонстрирована на численном примере в разд. 6. Итоги работы подведены в разд. 7.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы кратко изложим идею подхода, предложенного в [6], и поставим вопросы, на которые нужно ответить для формулировки условий его применимости.

Процедура измерений схематически проиллюстрирована на рис. 1. Поле  $u$ , возбуждаемое на несущей частоте  $f$  в бассейне, заполненном водой с постоянной скоростью звука  $c$ , регистрируется в точках  $\mathbf{R}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , расположенных на поверхности  $\sigma$ , охватывающей излучатель [7–12].

Обсуждаемый подход базируется на аппроксимации поля излучателя на поверхности  $\sigma$  суперпозицией полей ЭИ. Последние представляют собой акустические монополи, расположенные внутри  $\sigma$  в точках  $\mathbf{r}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Их суммарное

поле в свободном пространстве с такой же скоростью звука, как в бассейне, равно

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}$  – точка наблюдения,

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} e^{ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad (2)$$

– функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве,  $k = 2\pi f/c$ ,  $A_n$  – комплексные амплитуды ЭИ [13]. Временной множитель  $e^{-2\pi if t}$  здесь и далее опускаем.

При применении метода ЭИ монополи нередко располагают внутри области, ограниченной поверхностью излучателя [8, 12]. Здесь мы не накладываем такого ограничения, что отражено на рис. 1.

Предполагается, что в бассейне с отражающими границами излучаемое поле  $\tilde{u}(\mathbf{R})$  может быть представлено в виде суперпозиции полей, возбужденных теми же ЭИ, т.е. акустическими монополями, размещенными в тех же точках  $\mathbf{r}_n$  и имеющими те же амплитуды  $A_n$ . Это значит, что

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (3)$$

где  $\tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  – функция Грина в бассейне. Результаты измерения поля  $\tilde{u}$  образуют вектор  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{u}(\mathbf{R}_M)]^T$ , где символ  $T$  обозначает транспонирование. Для отыскания неизвестных амплитуд ЭИ, мы получаем систему линейных уравнений, которая в матричных обозначениях принимает вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{A}, \quad (4)$$

где  $\tilde{\mathbf{G}}$  –  $M \times N$  матрица с элементами  $\tilde{G}_{mn} = \tilde{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}_n)$ ,  $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_N]^T$  – вектор искомых амплитуд. Матричные элементы  $\tilde{G}_{mn}$  измеряются с использованием эталонного монополя, который поочередно помещается во все точки  $\mathbf{r}_n$ , и сигналы, излученные из каждой точки, регистрируются всеми  $M$  приемниками. Эта процедура в [6] названа калибровкой бассейна.

Для решения системы уравнений (4) применим сингулярное разложение матрицы  $\tilde{\mathbf{G}}$  [14, 15]

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{l=1}^L \gamma_l \xi_l \eta_l^H, \quad (5)$$

где  $\gamma_l$  – сингулярные числа,  $\xi_l$  и  $\boldsymbol{\eta}_l$  – сингулярные векторы, символ  $H$  означает эрмитово сопряжение. Псевдообратная к  $\tilde{\mathbf{G}}$  матрица имеет вид суммы

$$\tilde{\mathbf{G}}^+ = \sum_{l=1}^{L_1} \frac{1}{\gamma_l} \boldsymbol{\eta}_l \xi_l^H, \quad (6)$$

в которой учитываются лишь  $L_1 \leq L$  первых (относительно больших) сингулярных чисел. Соотношение

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}^+ \tilde{\mathbf{u}} \quad (7)$$

дает оценку вектора  $\mathbf{A}$ . Подставляя это решение в (1), находим искомое поле калибруемого излучателя в свободном пространстве.

Как отмечено во Введении, применение описанной процедуры далеко не всегда гарантирует правильную реконструкцию поля излучателя. Для формулировки условий применимости обсуждаемого подхода нужно ответить на следующие вопросы:

1. Как выбрать количество акустических монополей и их координаты, чтобы сумма (1) могла с высокой точностью аппроксимировать поле калибруемого излучателя в свободном пространстве?

2. Когда поле излучателя в бассейне может быть аппроксимировано суммой (3) с теми же амплитудами ЭИ  $A_n$ , что и в свободном пространстве?

3. При каких условиях амплитуды ЭИ  $A_n$  могут быть найдены с приемлемой точностью из системы линейных уравнений (4), связывающих их с измеренными амплитудами поля  $\tilde{u}(\mathbf{R}_m)$ ? Погрешность оценки (7) может быть велика из-за того, что система (4) недоопределена, а матрица  $\tilde{\mathbf{G}}$  плохо обусловлена. Кроме того, совпадение суперпозиции полей ЭИ с полем калибруемого излучателя в  $M$  точках измерительной поверхности  $\sigma$ , в особенности, если  $M$  невелико, еще не гарантирует близости этих полей в других точках  $\sigma$ .

В данной работе ответы на эти вопросы будут получены в предположении, что мультипольное разложение поля калибруемого излучателя полностью определяется вкладами монополя, диполей и квадруполей, а вклады мультиполей более высоких порядков можно пренебречь. Это условие обычно выполняется для излучателя с размерами меньше длины волны [16].

### 3. ВЫБОР ПОЗИЦИЙ ЭИ

Начнем с ответа на вопрос 1. Введем сферическую систему координат  $(R, \theta, \varphi)$ , где  $R = |\mathbf{R}|$ , а  $\theta$  и  $\varphi$  – полярный и азимутальный углы точки  $\mathbf{R}$ . Начало системы координат поместим в центре излу-

чателя. Вне излучателя звуковое поле можно представить в виде [17, 18]

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_v^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (8)$$

где  $C_v^\mu$  – коэффициенты разложения,

$$S_v^\mu(\mathbf{R}) = h_v^{(1)}(kr) Y_v^\mu(\theta, \varphi), \quad (9)$$

$$h_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{v+1/2}^{(1)}(x)$$

– сферические функции Ханкеля,

$$Y_v^\mu(\theta, \varphi) = (-1)^\mu \sqrt{\frac{2\mu+1}{4\pi} \frac{(v-|\mu|)!}{(v+|\mu|)!}} P_v^{|\mu|}(\cos\theta) e^{i\mu\varphi}, \quad (10)$$

– сферические гармоники,  $P_v^\mu(x)$  – присоединенные полиномы Лежандра.

Далее нам понадобится разложение (8) поля  $n$ -го ЭИ

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v Q_{n,v}^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (11)$$

для коэффициентов которого имеется известное аналитическое выражение [17, 18]

$$Q_{n,v}^\mu = (-1)^\mu ik \sqrt{4\pi(2v+1)} \frac{(v-|\mu|)!}{(v+|\mu|)!} \times \quad (12)$$

$$\times j_v(kr_n) P_v^{|\mu|}(\cos\theta_n) e^{-i|\mu|\varphi_n},$$

где  $(r_n, \theta_n, \varphi_n)$  – сферические координаты точки  $\mathbf{r}_n$ ,  $j_v(x)$  – сферические функции Бесселя первого рода [19].

Переобозначим  $C_v^\mu$ ,  $Q_{n,v}^\mu$  и  $S_v^\mu(\mathbf{R})$ , заменив их соответственно на  $C_q$ ,  $Q_{nq}$  и  $S_q(\mathbf{R})$ , где

$$q = 1 + v + v^2 + \mu. \quad (13)$$

Правило (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами индексов  $(v, \mu)$  и индексами  $q$ , представленными натуральными числами. В новых обозначениях разложения (8) и (11) переходят соответственно в

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^{\infty} C_q S_q(\mathbf{R}) \quad (14)$$

и

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{q=1}^{\infty} Q_{nq} S_q(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Вклады монопольной, дипольных и квадрупольных компонент поля  $u(\mathbf{R})$  формируются слагаемыми ряда (8) с  $v \leq 2$  [17, 18], которые образуют первые девять членов ряда (14). Наше предпо-

ложение о поле излучателя, сформулированное в конце предыдущего раздела, означает, что все слагаемые с  $q > 9$  в правой части (14) малы и их можно отбросить. Поэтому достаточным условием представления  $u(\mathbf{R})$  в виде суперпозиции полей ЭИ (1) является возможность приближенного представления каждой из функций  $S_q(\mathbf{R})$  с  $q \leq 9$  в виде

$$S_q(\mathbf{R}) \cong \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (16)$$

Коэффициенты  $P_{qn}$  нужно подобрать таким образом, чтобы левая и правая части были максимально близки в точках поверхности  $\sigma$ .

Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда все ЭИ расположены так близко к началу координат, что

$$k|\mathbf{r}_n| \ll 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Принимая во внимание асимптотическую формулу для функции  $j_\nu(x)$  при малом значении аргумента [19]

$$j_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{(2\nu + 1)!!},$$

видим, что при условии (17) величина  $|C_\nu^u|$  быстро спадает с ростом  $\nu$  и, соответственно,  $|C_q|$  уменьшается с ростом  $q$ .

Полагаем, что для всех точек  $\mathbf{R}$  поверхности  $\sigma$  выполняется условие

$$k|\mathbf{R}| > 1. \quad (18)$$

Благодаря этому значения сферических функций Ханкеля  $h_\nu^{(1)}(k|\mathbf{R}|)$  в точках поверхности  $\sigma$  не растут неограниченно с ростом  $\nu$  и при выполнении (17) в бесконечной сумме в правой части (15) можно ограничиться учетом конечного числа слагаемых. Тогда в качестве коэффициентов  $P_{qn}$  в (16) можно взять элементы матрицы  $\mathbf{P}$ , которая псевдообратна к матрице  $\mathbf{Q}$  с коэффициентами  $Q_{nq}$ . Найденные таким образом аппроксимации сферических функций  $S_q(\mathbf{R})$  правыми частями (16) являются приближенными. Точность этого приближения для любого конкретного выбора точек  $\mathbf{r}_n$  легко оценить количественно. Полагая, что расстояния от центра излучателя до точек  $\sigma$  не сильно отличаются от некоторого среднего радиуса  $R_0$ , в качестве оценки точности аппроксимации примем

$$\varepsilon_q = \int_{\sigma_0} |b_q(\mathbf{R})|^2 ds \Big/ \int_{\sigma_0} |S_q(\mathbf{R})|^2 ds, \quad (19)$$

где интегрирование идет по  $\sigma_0$  — поверхности сферы радиуса  $R_0$ ,  $ds$  — элемент площади,

$$b_q(\mathbf{R}) = S_q(\mathbf{R}) - \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n)$$

— невязка. Критерием правильности выбора позиций ЭИ является выполнение условий

$$\varepsilon_q \ll 1, \quad q = 1, \dots, 9. \quad (20)$$

#### 4. ПОЛЯ, СОЗДАНИЕ ОДНИМИ И ТЕМИ ЭИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В БАССЕЙНЕ

Перейдем к ответу на вопрос 2. Предполагается, что объемные скорости монополей, представляющих ЭИ, одинаковы и в свободном пространстве, и в бассейне. Кроме того, каждая точка поверхности калибруемого источника в бассейне и свободном пространстве осциллирует одинаково.

Поле  $\tilde{u}(\mathbf{R})$ , возбуждаемое ЭИ в бассейне, представим в виде  $\tilde{u}(\mathbf{R}) = u(\mathbf{R}) + v(\mathbf{R})$ , где  $u(\mathbf{R})$  — поле, возбужденное теми же источниками в свободном пространстве, а  $v(\mathbf{R})$  — компонента, формируемая отражениями от границ. Функция  $v(\mathbf{R})$  представляет решение уравнения Гельмгольца в бассейне с граничными условиями, которые задаются значениями поля  $u(\mathbf{R})$  и его производных вблизи стенок бассейна.

Поле, возбуждаемое в бассейне излучателем, обозначим  $\tilde{u}'(\mathbf{R})$  и представим его в аналогичном виде  $\tilde{u}'(\mathbf{R}) = u'(\mathbf{R}) + v'(\mathbf{R})$ , где  $u'(\mathbf{R})$  — поле в свободном пространстве, а  $v'(\mathbf{R})$  — вклад волн, отраженных от границ. Поля  $u(\mathbf{R})$  и  $u'(\mathbf{R})$  различаются вблизи излучателя и ЭИ, но на поверхности  $\sigma$  они совпадают. Следовательно, они совпадают во всей области  $\Gamma$  между  $\sigma$  и границей бассейна. Поэтому функции  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  являются решениями уравнения Гельмгольца с одинаковыми граничными условиями.

Различие между  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  обусловлено тем фактом, что  $v(\mathbf{R})$  представляет решение в пустом бассейне (рассеяния волн на точечных ЭИ не происходит), а  $v'(\mathbf{R})$  — решение в присутствии излучателя конечного размера. Если рассеяние на излучателе пренебрежимо мало, то компоненты полей  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  всюду совпадают за исключением небольшой области вблизи излучателя. При этом на измерительной поверхности  $\sigma$  суммарные поля  $\tilde{u}(\mathbf{R})$  и  $\tilde{u}'(\mathbf{R})$  тоже совпадают.

Интуитивно понятно, что рассеянием на излучателе можно пренебречь, если его объем достаточно мал. Количественный критерий малости получен в работе [6] в предположении, что разме-



ры излучателя меньше длины волны и при оценке интенсивности рассеянного поля его можно заменить твердой сферой такого же объема. В этом случае интенсивность рассеянного поля у границы бассейна будет много меньше интенсивности падающего, если

$$V_s \ll \lambda^2 b / \pi, \quad (21)$$

где  $V_s$  – объем излучателя,  $b$  – характерный размер бассейна. При выполнении данного условия одни и те же ЭИ аппроксимируют поле излучателя и в свободном пространстве, и в бассейне.

Отметим, что представление акустического поля суперпозицией полей ЭИ, как правило, неоднозначно [13]. Даже при фиксированном выборе точек расположения монополей  $\mathbf{r}_n$  может существовать бесконечно много векторов  $\mathbf{A}$ , “обеспечивающих” выполнение равенств (1) и (3). Это происходит, если  $M < N$  и система (4) недоопределена. Такая ситуация часто возникает при использовании метода ЭИ, поскольку количество приемников обычно меньше количества ЭИ [13]. Однако неоднозначность выбора  $\mathbf{A}$  не противоречит получению однозначного решения нашей обратной задачи. Ведь любые два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$ , которые определяют поля  $u$  и  $u'$  в свободном пространстве, совпадающие на поверхности  $\sigma$ , задают поля  $\tilde{u}$  и  $\tilde{u}'$  в бассейне, тоже совпадающие на  $\sigma$ . В этом легко убедиться с помощью рассуждения, аналогичного приведенному выше, при сравнении полей излучателя и моделирующих его ЭИ. Оба рассуждения фактически основаны на однозначности решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями, заданными на замкнутой поверхности [20]. Точно также можно показать, что любой вектор  $\mathbf{A}$ , который задает поле (3), аппроксимирующее поле излучателя на поверхности  $\sigma$  в бассейне, одновременно задает поле (1), аппроксимирующее поле излучателя в свободном пространстве.

## 5. ВЫБОР КООРДИНАТ ПРИЕМНИКОВ

Принимая во внимание соотношения (14) и (16), поле в бассейне можно представить в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^9 C_q \tilde{S}_q(\mathbf{R}), \quad (22)$$

где

$$\tilde{S}_q(\mathbf{R}) \equiv \sum_{n=1}^N P_{qn} \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (23)$$

Переход от (14) к (22) является аналогом перехода от (1) к (3). Использование априорной информации об излучателе (пренебрежение вкладом высших мультиполей) позволило свести задачу

отыскания  $N$  неизвестных коэффициентов  $A_n$  к отысканию девяти коэффициентов  $C_q$ . Связь между  $A_n$  и  $C_q$  выражается соотношением

$$A_n = \sum_{q=1}^9 P_{qn} C_q, \quad (24)$$

которое легко получить, подставляя (23) в (22) и сравнивая найденное выражение с (3).

Таким образом, от системы линейных уравнений (4) мы переходим к системе

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{C}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{C}$  – вектор размера  $9 \times 1$  с элементами  $C_q$ ,  $q = 1, \dots, 9$ , а  $\tilde{\mathbf{S}}$  – матрица размера  $M \times 9$ , столбцами которой служат векторы  $[\tilde{S}_q(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{S}_q(\mathbf{R}_M)]^T$ . Предполагается, что  $M \geq 9$ , т.е. поле в бассейне измеряется, как минимум, в девяти точках. В противном случае система (25) будет недоопределена, ее решение будет неоднозначным, и в отсутствие дополнительной априорной информации об источнике мы не сможем снять эту неопределенность. При  $M \geq 9$  решение (25) равно  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{u}}$ , где  $\tilde{\mathbf{S}}^+$  – матрица, обратная или псевдообратная к  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Для того чтобы решение было слабо чувствительно к влиянию шумов и погрешностей измерений, нужно, чтобы матрица  $\tilde{\mathbf{S}}$  была хорошо обусловлена. Это значит, что число обусловленности, которое в данном случае выражается отношением первого (наибольшего) сингулярного числа  $\tilde{\mathbf{S}}$  к девятому (наименьшему), должно быть не слишком велико. Точки приема  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_m$ , удовлетворяющие условию (18), должны быть выбраны таким образом, чтобы это требование выполнялось. В совокупности с условиями, выраженными неравенствами (17) и (20), данное требование дает ответ на вопрос 3 из разд. 2 о достаточном условии правильной реконструкции амплитуд ЭИ. После того, как коэффициенты  $C_q$  найдены, амплитуды ЭИ  $A_n$  находятся по формуле (24).

Искомое поле калибруемого источника в свободном пространстве затем вычисляется подстановкой найденных  $A_n$  в (1) или, что эквивалентно, подстановкой найденных  $C_q$  в первые девять слагаемых суммы в правой части (14) и отбрасыванием остальных слагаемых.

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации описанной процедуры рассмотрим реконструкцию поля идеализированной модели излучателя, имеющего форму куба с длиной ребра  $a = 0.3$  м, две пары противоположных

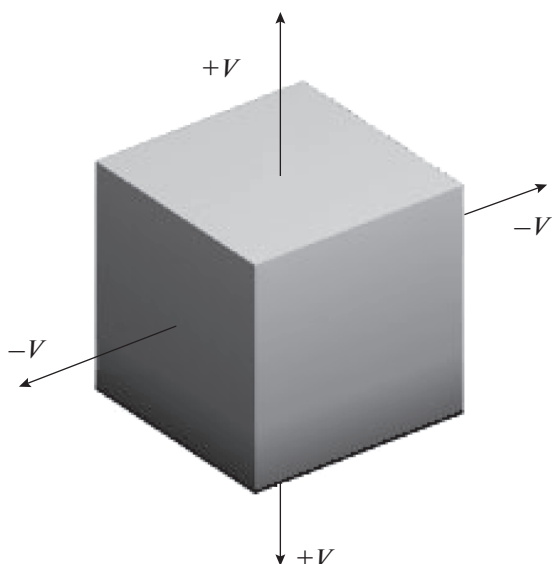


Рис. 2. Модель калибруемого излучателя.

граней которого осциллируют вдоль своих нормалей (рис. 2). Комплексные амплитуды скоростей у каждой пары одинаковы. Они равны  $V$  у одной пары и  $-V$  у другой. Две оставшиеся грани неподвижны.

Излучатель работает на частоте  $f = 1000$  Гц в бассейне, тоже имеющем форму куба с ребром длиной 3 м и твердыми границами. Бассейн заполнен водой со скоростью звука  $c = 1500$  м/с. Поскольку длина волны  $\lambda = 1.5$  м велика по сравнению с размером нашего источника, его поле в дальней зоне должно быть близко к полю квадруполья.

Поля, возбужденные в свободном пространстве и бассейне, рассчитывались методом конечных элементов. Грани излучателя располагались параллельно граням бассейна, а его центр был смещен на 0.5 м вдоль одного из ребер. При анализе поля использовалась сферическая система координат, центр которой совпадал с центром источника.

В качестве измерительной поверхности  $\sigma$ , на которой располагались точки приема, была взята сфера радиусом  $R = 1.4$  м. Она приблизительно равномерно была покрыта  $M = 150$  точками приема  $\mathbf{R}_m$ . ЭИ располагались в 27 точках, образующих куб размером  $3 \times 3 \times 3$  см с расстоянием между ближайшими точками (шагом кубической решетки) 0.015 м. Для выбранных точек расположения ЭИ и приемников условия (17) и (18) выполняются.

При вычислении матрицы  $\mathbf{P}$ , псевдообратной к  $\mathbf{Q}$ , использован тот же метод, базирующийся на сингулярном разложении, который применялся при вычислении псевдообратной матрицы  $\tilde{\mathbf{G}}^+$

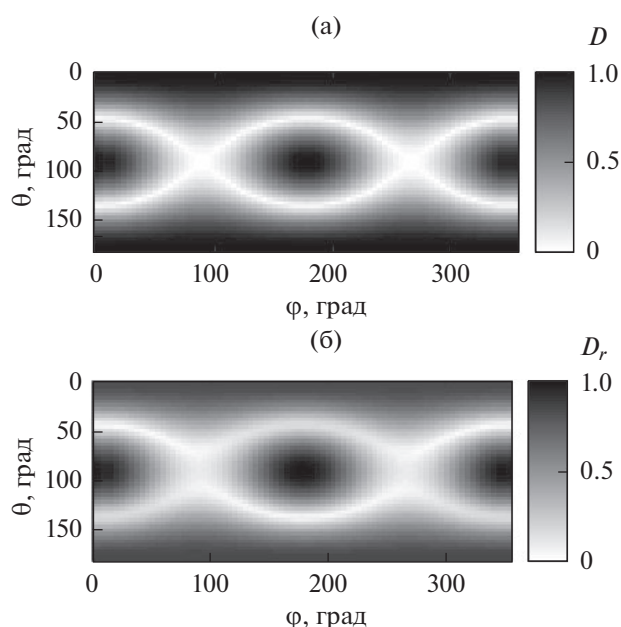


Рис. 3. Диаграмма направленности излучателя. (а) – Расчет в свободном пространстве. (б) – Результат реконструкции по измерениям в бассейне.

(см. (6)). Матрица  $\mathbf{Q}$  имеет размер  $N \times K$ , где  $K$  – количество слагаемых, удерживаемых в сумме (15). Величина  $K$  определяется тем, насколько быстро уменьшаются амплитуды коэффициентов  $|Q_{nq}|$  с ростом  $q$ . В нашем примере значения  $|Q_{nq}|$  резко спадают при  $q > 9$ , и поэтому мы выбрали  $K = 9$ . Результаты моделирования показывают, что увеличение  $K$  не повышает точности реконструкции.

Величины параметров  $\epsilon_q$ , заданные (19), в нашем примере не превышают 0.01, т.е. критерий правильности выбора позиций ЭИ (20) выполняется. Отношение наибольшего сингулярного числа матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  к наименьшему равно 60, что свидетельствует о хорошей обусловленности данной матрицы.

На рис. 3 показан результат реконструкции диаграммы направленности нашего источника в свободном пространстве

$$D(\varphi, \theta) = \frac{|u(R, \theta, \varphi)|}{\max(|u(R, \theta, \varphi)|)_{R \rightarrow \infty}}.$$

Поскольку амплитуда возбуждаемого поля прямо пропорциональна скорости пульсации граней  $V$ , диаграмма направленности от  $V$  не зависит. На рис. 3а показана диаграмма  $D(\theta, \varphi)$ , найденная путем прямого расчета поля в свободном пространстве, а на рис. 3б – диаграмма  $D_r(\theta, \varphi)$ , реконструированная по значениям  $\tilde{u}$  в

указанных выше точек  $\mathbf{R}_m$ . Точность реконструкции количественно характеризуется параметром

$$\mu = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |D(\theta, \varphi) - D_r(\theta, \varphi)|}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta D(\theta, \varphi)},$$

который в нашем примере равен 0.13. Практически такой же результат получается, если из 150 точек приема  $\mathbf{R}_m$  оставить лишь 9. При этом нужно, чтобы эти точки были расположены достаточно далеко друг от друга, так как в противном случае у матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  могут оказаться близкие столбцы и она станет плохо обусловленной. Во всех рассмотренных нами примерах хорошо обусловленной матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  (с числом обусловленности менее 1000) параметр  $\mu$  принимал значения, не превышающие 0.25. Аналогичные результаты были получены при реконструкции поля другого модельного источника, представляющего собой твердый цилиндр с пульсирующими основаниями.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия применимости метода ЭИ, неизвестные в общем случае [8, 12], в данной работе сформулированы для источника, в мультипольном разложении поля которого в свободном пространстве все компоненты, кроме монопольной, дипольных и квадрупольных, пренебрежимо малы. В этом случае реконструируемое поле представлено суммой первых девяти членов ряда (14), и задача заключается в отыскании неизвестных амплитуд  $C_1, \dots, C_9$ . Для решения задачи ЭИ должны быть расположены таким образом, чтобы суперпозиции их полей могли аппроксимировать каждую из девяти функций  $S_q(\mathbf{R})$  (условие (20)). При этом поле в бассейне будет представлено в виде суперпозиции девяти функций  $\tilde{S}_q(\mathbf{R})$  с теми же амплитудами  $C_1, \dots, C_9$ , что и в свободном пространстве. Для восстановления этих амплитуд достаточно, чтобы система уравнений (25) состояла всего из девяти уравнений. Поэтому при регистрации излученного поля нет необходимости в том, чтобы точки приема  $\mathbf{R}_m$  плотно покрывали поверхность  $\sigma$ . Достаточно иметь всего 9 правильно (с учетом введенных требований) выбранных точек приема.

Основным результатом данной статьи является формулировка достаточных условий применимости метода калибровки акустического излучателя, идея которого предложена в [6]. Следует отметить, что необходимость найденных условий здесь не доказана. Предполагается, что точки  $\mathbf{r}_n$  и

$\mathbf{R}_m$  выбираются эмпирически с соблюдением неравенств (17) и (18). Правильность выбора затем проверяется с помощью критериев, установленных в разд. 3 и 5: должны выполняться неравенства (20) и матрица  $\tilde{\mathbf{S}}$  должна быть хорошо обусловлена. Еще одним условием применимости обсуждаемого подхода является малость объема источника, который должен удовлетворять критерию (21).

В данной работе мы не рассматривали влияния внешних шумов и неточности измерений, приводящих к тому, что вектор  $\tilde{\mathbf{u}}$  всегда известен с некоторой ошибкой. Этот вопрос требует специального изучения. Здесь мы отметим лишь, что вследствие хорошей обусловленности матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  малые изменения вектора  $\tilde{\mathbf{u}}$  вызывают малые изменения решения системы (25) и, соответственно, приводят к относительно небольшим ошибкам в реконструкции поля источника.

Результаты численного моделирования подтверждают эффективность введенных критериев. Вместе с тем вопрос оптимального выбора количества ЭИ и их позиций остается открытым.

Неисследованным пока остается и вопрос об условиях применимости сделанного в начале разд. 4 предположения том, что отражения волн от границ бассейна не приводят к заметному изменению скорости осцилляций поверхности излучателя по сравнению со случаем свободного пространства. Ответ на этот вопрос для каждого конкретного источника должен быть получен с использованием соответствующих уравнений электромеханического преобразования и оценок радиационного импеданса источника в бассейне [21, 22].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проекты 0035-2019-0019 и 0035-2019-0006).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боббер Р.* Гидроакустические измерения. М.: Мир, 1974. 361 с.
2. *Robinson S.P.* Review of methods for low frequency transducer calibration in reverberant tanks. NPL Report SMAM 034. 1999.
3. *Robinson S.P., Hayman G., Harris P.M., Beamiss G.A.* Signal-modeling methods applied to the free-field calibration of hydrophones and projectors in laboratory test tanks // Meas. Sci. Technol. 2018. 29:085001.
4. *Исаев А.Е., Матвеев А.Н.* Градуировка гидрофонов по полю при непрерывном излучении в реверberирующем бассейне // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 727–736.
5. *Исаев А.Е., Николаенко А.С., Черников И.В.* Подавление реверберационных искажений сигнала приемника с использованием передаточной функции

- бассейна // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 165–174.
6. *Virovlyansky A.L., Deryabin M.S.* On the use of the equivalent source method for free-field calibration of an radiator in a reverberant tank // *J. Sound. Vibr.* 2019. V. 455. P. 69–81.
  7. *Koormann G.H., Song L., Fahnlone J.B.* A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 86. № 6. P. 2433–2438.
  8. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
  9. *Johnson M.E., Elliott S.J., Baek K.-H., Garcia-Bonito J.* An equivalent source technique for calculating the sound field inside an enclosure containing scattering objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 3. P. 1221–1231.
  10. *Zhang Y.-B., Jacobsen F., Bi C.-X., Chen X.-Z.* Near field acoustic holography based on the equivalent source method and pressure-velocity transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 126. № 3. P. 1257–1263.
  11. *Gounot Y.J.R., Musafir R.E.* Simulation of scattered fields: some guidelines for the equivalent source method // *J. Sound. Vibr.* 2011. V. 330. № 15. P. 3698–3709.
  12. *Lee S.* Review: the use of equivalent source method in computational acoustics // *J. Comput. Acoustics.* 2017. V. 25. № 1. 1630001.
  13. *Fernandez-Grande E., Xenaki A., Gerstoft P.* A sparse equivalent source method for near-field acoustic holography // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 532–542.
  14. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
  15. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: теория и методы. Т. 2. М.: Мир, 1983. 360 с.
  16. *Rossing T.D.* Springer Handbooks of Acoustics. New York: Springer, 2007. 1182 p.
  17. *Williams E.G.* Fourier Acoustic. Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography. San Diego: Academic Press, 1999. 306 p.
  18. *Gumerov N., Duraiswami R.* Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions. Oxford: Elsevier Ltd, 2004. 520 p.
  19. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред).* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
  20. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
  21. *Свердлин Г.М.* Прикладная гидроакустика. Ленинград: Судостроение, 1990. 320 с.
  22. *Butler J.L., Sherman C.H.* Transducers and Arrays for Underwater Sound. CA: Peninsula Press, Springer, 2016. 716 p.

## АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДНА ОЗЕРА БАЙКАЛ

© 2020 г. В. А. Григорьев<sup>a, \*</sup>, К. М. Кучер<sup>b, \*\*</sup>, А. А. Луньков<sup>c, \*\*\*</sup>,  
М. М. Макаров<sup>b, \*\*</sup>, В. Г. Петников<sup>c, \*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия

<sup>b</sup>Лимнологический институт СО РАН, ул. Улан-Баторская 3, Иркутск, 664033 Россия

<sup>c</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: grig4@yandex.ru

\*\*e-mail: mmmsoft@hlserver.lin.irk.ru

\*\*\*e-mail: lunkov@kapella.gpi.ru

\*\*\*\*e-mail: petniko@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 01.04.2020 г.

После доработки 14.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Развита методика оценки эффективных акустических параметров дна в мелководных акваториях, покрытых льдом. В основе методики лежит сравнение экспериментальной и расчетной зависимостей амплитуды звукового поля от глубины на расстоянии от источника примерно на порядок больше, чем глубина акватории. В качестве эффективных параметров принимаются значения скорости звука в дне, плотности и коэффициента затухания акустических волн, обеспечивающие при расчетах максимальное соответствие экспериментальным данным. Методика апробирована в натурном эксперименте на озере Байкал и может быть рекомендована для разработки систем автономного акустического мониторинга.

*Ключевые слова:* акустический мониторинг покрытых льдом мелководных акваторий, эффективные акустические параметры дна

DOI: 10.31857/S0320791920050044

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время долговременный автономный акустический мониторинг мелководных акваторий становится все более востребованным инструментом для изучения окружающей среды. Например, при исследованиях причин глобальных изменений климата [1], при наблюдениях процессов мелкомасштабной и мезомасштабной гидродинамической изменчивости среды [2], при экологическом контроле за вариациями характеристик крупных внутренних водоемов [3], для измерения уровня антропогенных акустических шумов, влияющих на охраняемые виды млекопитающих, проводящих большую часть времени под водой [4]. В первую очередь, указанный мониторинг востребован для акваторий с ледовым покровом, где дистанционная диагностика, основанная на других физических принципах, практически невозможна. Здесь подобный мониторинг также позволяет вести “наблюдения” за животными, обитающими на океанском шельфе и в крупных озерах, по их вокализации. Регистрируя звуковые сигналы, издаваемые этими животными

[5], можно, как минимум, определять их местоположение и с помощью пассивной гидролокации фиксировать их перемещение.

Осуществимость акустического мониторинга можно спрогнозировать, лишь зная акустические параметры волновода, характерного для выбранной мелководной акватории. Среди этих параметров наиболее малоизвестными являются параметры дна (скорость звука, плотность и коэффициент затухания акустических волн в дне). В настоящей статье приведены результаты экспериментальных оценок этих параметров для озера Байкал. Измерения выполнены в зимний период времени при наличии ледового покрова для частот звука около одного килогерца. Эти частоты характерны для звуковых сигналов, излучаемых охраняемым видом млекопитающих, байкальской нерпой (*Pusa sibirica*). Указанные сигналы, зарегистрированные в ходе проведенных экспериментальных исследований, также приведены в настоящей статье.

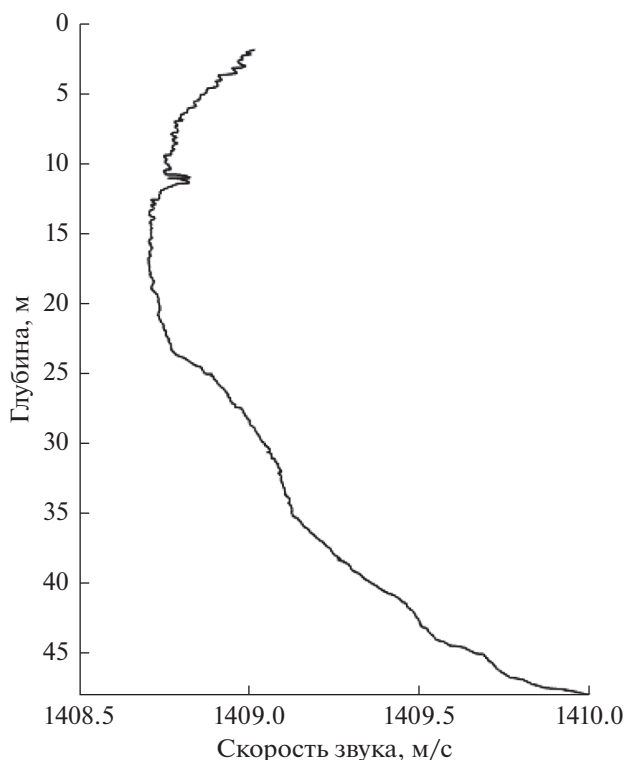


Рис. 1. Зависимость скорости звука в воде от глубины.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В ВОДНОМ СЛОЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Вертикальная интерференционная структура тонального звукового поля в мелководных акваториях на расстояниях много больших, чем глубина, весьма чувствительна к параметрам нижней границы акустического волновода, который формируется в подобных акваториях [6]. Другими словами, она во многом определяется эффективными параметрами дна: скоростью звука  $c_1$ , плотностью  $\rho_1$  и коэффициентом затухания акустических волн, отнесенным к частоте,  $\beta_f$ . Предполагается, что дно является однородной средой и под эффективными параметрами понимаются средние значения этих величин по расстоянию  $r$  между источником и приемником звука и по глубине  $\Delta H$ . Здесь под величиной  $\Delta H$  подразумевается эффективная толщина верхнего слоя донных осадочных пород, сравнимая с длиной звуковой волны в дне. Например, в работах [7, 8] продемонстрировано, что интенсивность звукового поля в волноводе в основном зависит от параметров слоя указанной толщины на расстояниях  $r > 10H$ , где  $H$  — глубина волновода. Это свойство интерференционной структуры может быть использовано для решения обратной задачи по определению

эффективных параметров. Методика решения основана на согласовании амплитуды поля, измеренной неподвижной вертикальной цепочкой гидрофонов в эксперименте, с аналогичным расчетным вертикальным амплитудным распределением. Предполагается, что расчетные параметры, обеспечивающие наилучшее соответствие теории и эксперимента, и являются искомыми параметрами задачи [9].

Описанная методика была использована для мелководной прибрежной части озера Байкал, где на глубине  $H(r) = 41$  м в марте 2019 года была установлена автономная вертикальная цепочка из  $J = 10$  гидрофонов, перегораживающая весь водный слой (см. табл. 1). Цель постановки цепочки состояла в изучении возможностей акустического мониторинга и сопутствующих ему технологий в мелководных акваториях с ледовым покровом. Цепочка опускалась с припая, характерного для Байкала в это время года. Оцифровка и запись на флеш-память принимаемых сигналов осуществлялась с помощью блока обработки информации, расположенного в специальном герметичном контейнере вместе с аккумуляторами для питания предусилителей гидрофонов. Контейнер располагался сверху на льду. Несущий трос цепочки гидрофонов был натянут между донным якорем и якорем на поверхности льда, что обеспечивало стационарное местоположение приемных гидрофонов на соответствующих глубинах  $z_j$ :

$$z_j = 0.64 + (j - 1)3.46 \text{ м}, \quad (1)$$

где  $j = 1, \dots, J$  — номер приемного гидрофона. Здесь для удобства сопоставления эксперимента и расчета глубины расположения гидрофонов отсчитываются от границы раздела вода–лед. Толщина ледового покрова составляла  $h = 0.66$  м.

В районе постановки цепочки с помощью профилографа MiniCTD Valeport были проведены измерения вертикального профиля температуры  $T(z)$ , где  $z$  — глубина точки измерения, а затем по этим данным с помощью эмпирической формулы, адаптированной для озера Байкал [10], был вычислен вертикальный профиль скорости звука в воде  $c(z)$ :

$$c(z) = 1402.39 + 4.99 T(z) - 0.05 T^2(z) + 0.01564z. \quad (2)$$

Этот профиль приведен на рис. 1.

На рис. 2 приведен пример акустического сигнала, излучаемого байкальской нерпой. Сигнал зарегистрирован на один из гидрофонов цепочки. На этом же рисунке приведена и спектрограмма этого сигнала. Как видно на рисунке, нерпа излучает квазигармонический сигнал с обертонами в диапазоне частот  $\Delta f \approx 100\text{--}1400$  Гц.

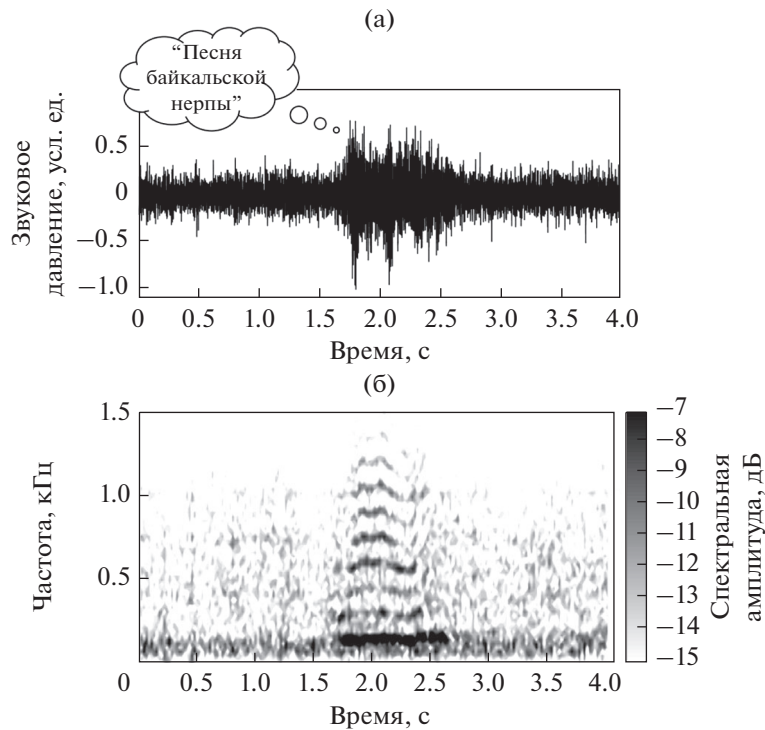


Рис. 2. (а) – Звуковой сигнал байкальской нерпы, зарегистрированный в эксперименте и (б) – его спектрограмма.

Для оценки эффективных параметров акустического волновода на озере Байкал, описанная выше методика определения эффективных акустических параметров дна была апробирована при приеме тональных сигналов частотой  $f = 735.0138$  Гц от удаленного источника звука (см. табл. 1). Расстояние между источником и приемной цепочкой, измеренное с помощью GPS, составляло  $r = 353$  м. Источник также был закреплен на растянутом между дном и ледовым покрытием несущем фале. Глубина источника от границы раздела вода–лед составляла  $z_0 = 18.44$  м, а глубина места в точке установки излучателя равнялась  $H(0) = 55$  м. Акустическая трасса источник–приемная цепочка была ориентирована примерно параллельно береговой линии (рис. 3а).

Экспериментальная зависимость амплитуды принимаемого сигнала от глубины, измеренная гидрофонами цепочки, показана на рис. 4а.

Расчет амплитуды тонального сигнала с той же, что и в эксперименте, частотой осуществлялся в

рамках модового описания звукового поля. При расчетах использовались следующие приближения:

- 1) Дно считалось жидкой однородной средой.
- 2) Глубина акватории меняется по линейному закону от точки постановки излучателя звука до точки, где была установлена приемная цепочка.
- 3) Скорость звука в воде считалась постоянной и равной  $c = 1409$  м/с.
- 4) Межмодовое взаимодействие и горизонтальная рефракция акустических волн не учитывались.

В расчетах также предполагалось, что ледовое покрытие имеет следующие характеристики: скорость продольных волн  $c_2 = 3500$  м/с, скорость поперечных волн  $c_s = 1800$  м/с, плотность льда  $\rho_2 = 917$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент затухания продольных волн  $\beta_{2f} = 0.086$  дБ/км/Гц, коэффициент затухания поперечных волн  $\beta_{sf} = 0.556$  дБ/км/Гц. Указанные типичные значения параметров льда взяты из работы [11]. Однако для этих значений в природных условиях характерна заметная времен-

Таблица 1. Координаты мест постановки гидроакустического оборудования

Использованное оборудование	Широта, северная	Долгота, восточная
Источник звука	52°00.509′	105°22.186′
Цепочка с гидрофонами	52°00.687′	105°22.295′

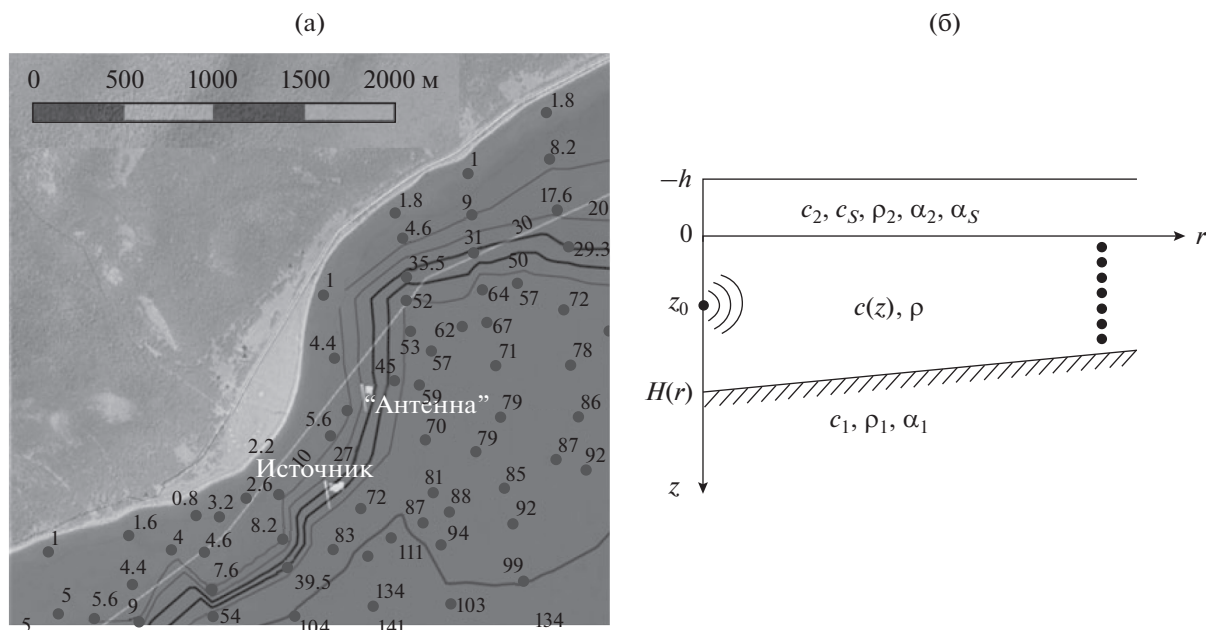


Рис. 3. (а) – Батиметрическая карта в районе работ с нанесенными на ней местоположениями источника звука и приемной цепочки с гидрофонами. (б) – Модель волновода.

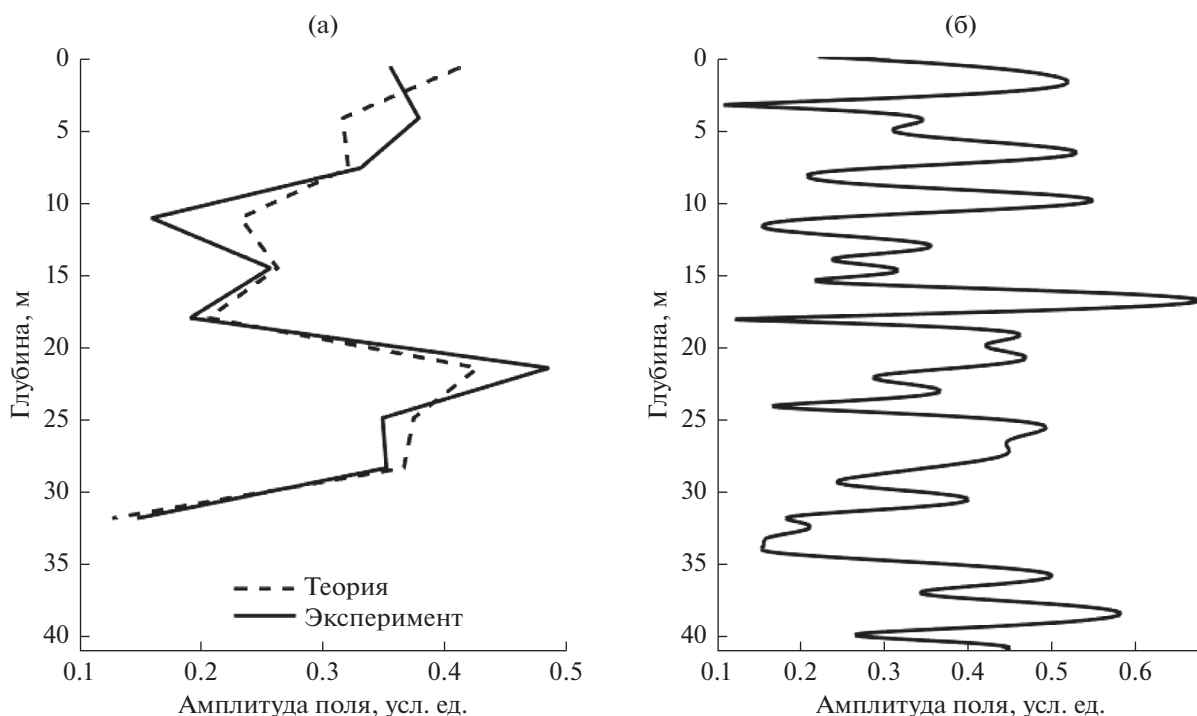


Рис. 4. (а) – Экспериментальная и теоретическая зависимость амплитуды поля от глубины на горизонтах установки гидрофонов (с шагом 3.46 м) при оптимальных параметрах дна:  $c_1 = 1670$  м/с,  $\rho_1 = 1500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\beta_f = 0.45$  дБ/км/Гц. (б) – Расчетная зависимость амплитуды от глубины с шагом по глубине 0.01 м при тех же параметрах дна.

ная и пространственная изменчивость, не учитываемая в настоящей работе. Такая изменчивость, в первую очередь, обусловлена многочисленными

мини-трещинами, возникающими и затягивающимися (замерзающими с течением времени) на ледовом покрове. Плотность воды полагалась



равной  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . (Оценки с использованием уравнения состояния воды в акватории при известной температуре [12] показали, что плотность воды изменяется от  $999.92 \text{ кг/м}^3$  у поверхности воды до  $1000.12 \text{ кг/м}^3$  на глубине 40 м.) Для наглядности модель волновода, использованная при расчетах, показана на рис. 3б. Методика расчетов описана в приложении А к настоящей статье. Заметим здесь только, что приближение постоянной скорости звука в воде позволило при нахождении дискретного спектра собственных значений и собственных функций использовать формулы (A14) и (A15) и, таким образом, существенно сократить время расчетов. Критерием близости теории и эксперимента являлась невязка

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^J (|P_j| - |P_j^{\text{EX}}|)^2}, \quad (3)$$

где  $|P_j|$  и  $|P_j^{\text{EX}}|$  – теоретическая и экспериментальная амплитуды поля на  $j$ -м гидрофоне. При этом в (3) подставляются нормированные амплитуды:  $\sum_{j=1}^J |P_j|^2 = \sum_{j=1}^J |P_j^{\text{EX}}|^2 = 1$ , что физически означает уравнивание мощностей экспериментального и теоретического сигналов. Искомыми параметрами дна считаются параметры  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$ , при которых достигается минимум невязки (в идеале ноль).

С целью сокращения объема расчетов на первом этапе было предложено использовать эмпирические формулы Эйкала [13] и Гамильтона [14] связи параметров  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$  с пористостью грунта  $\kappa$ , являющиеся обобщением экспериментальных данных по всему Мировому океану:

$$c_1 = c(1.631 - 1.78\kappa + 1.2\kappa^2), \quad (4)$$

$$\rho_1 = \rho(2.604 - 1.606\kappa), \quad (5)$$

$$\beta_f \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = \begin{cases} 0.2747 + 0.527\kappa, & 0 \leq \kappa < 0.472, \\ 4.903\kappa - 1.7688, & 0.472 \leq \kappa < 0.52, \\ 3.3232 - 4.89\kappa, & 0.52 \leq \kappa < 0.65, \\ 0.7602 - 1.487\kappa + 0.78\kappa^2, & 0.65 \leq \kappa \leq 0.9. \end{cases} \quad (6)$$

Использование формул (4)–(6) позволяет не перебирать три параметра  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$ , а менять только один параметр  $\kappa$ . По мере изменения  $\kappa$  происходит движение в трехмерном пространстве параметров  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$  по определенной эмпирически обоснованной линии. Вычисления проводились при  $\kappa = 0.1$ – $0.9$  с шагом 0.01. При каждом значении  $\kappa$  в соответствии с (4)–(6) вычислялся

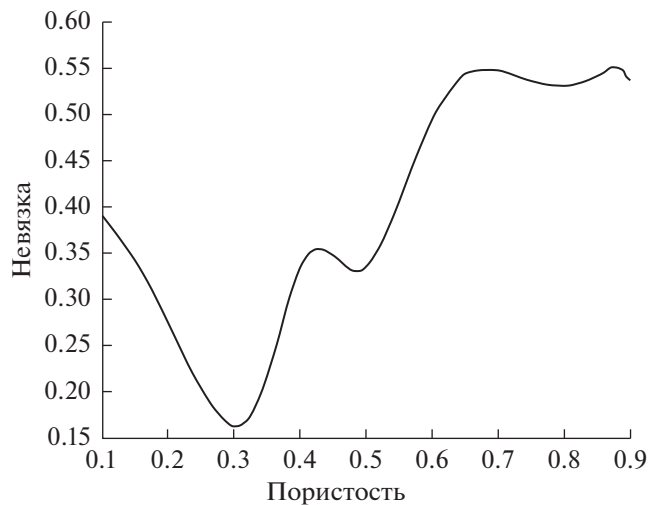


Рис. 5. Невязка как функция пористости.

набор  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$ , а затем теоретическое поле (A17) и невязка (3), как функция пористости  $\sigma(\kappa)$ .

Полученная зависимость  $\sigma(\kappa)$  приведена на рис. 5. Минимум невязки, равный  $\sigma = 0.164$ , наблюдается при  $\kappa = 0.3$ . Согласно (4)–(6) параметры дна в результате первого этапа расчетов равны:  $c_1 = 1700 \text{ м/с}$ ,  $\rho_1 = 2120 \text{ кг/м}^3$ ,  $\beta_f = 0.45 \text{ дБ/км/Гц}$ .

Заметим, что поиск минимума невязки проводился в очень широком диапазоне  $\kappa$ , охватывающем практически все возможные типы грунтов морского дна: каменные грунты, пески, алевролиты, глины, илы. Согласно формулам Эйкала (4) и (5), дно было жестким ( $c_1 > c$ ) и мягким ( $c_1 < c$ ). Соответственно, существенно менялись типы мод, учитываемые при вычислениях. Рассчитывались все моды, у которых мнимая часть собственных чисел была меньше  $0.025 \text{ м}^{-1}$ . Вклад остальных мод не приводил к изменению амплитуды поля на расстоянии 353 м. В табл. 2 приведены данные о числе и типах учитываемых мод. Как видно, рассматривались не только нормальные распространяющиеся моды, но также нормальные вытекающие моды и относящиеся к классу вытекающих – квазимоды. Подробнее о типах мод см. [15]. Отметим только, что вытекающие моды относительно глубоко проникают в дно, в отличие от распространяющихся мод.

На втором этапе расчетов параметры дна, полученные на первом этапе, рассматривались как начальное приближение, в окрестности которого простым перебором значений  $(c_1, \rho_1, \beta_f)$  был проведен поиск глобального минимума невязки в трехмерном пространстве. Расчеты показали, что при каждом фиксированном  $\beta_f$  минимум невязки  $\sigma(c_1, \rho_1)$  хорошо локализуется, и его положение

Таблица 2. Число и типы учитываемых мод

Пористость	Полное число учитываемых мод $M$	Число нормальных распространяющихся мод	Число нормальных вытекающих мод	Число квазимод
0.1	43	32	11	—
0.2	42	28	14	—
0.3	41	24	17	—
0.4	40	19	21	—
0.5	37	12	25	—
0.6	35	—	35	—
0.7	33	—	8	25
0.8	29	—	7	22
0.9	27	2	5	20

на плоскости  $(c_1, \rho_1)$  практически не зависит от значения  $\beta_f$ . Вместе с этим, по оси  $\beta_f$  локализация минимума невязки не была обнаружена.

По этой причине искомым значением потерь в дне было выбрано значение, полученное с помощью формулы Гамильтона (6):  $\beta_f = 0.45$  дБ/км/Гц. При данном  $\beta_f$  функция невязки  $\sigma(c_1, \rho_1)$  приведена на рис. 6. Глобальный минимум невязки, равный  $\sigma = 0.132$ , достигается при оптимальных (адекватных истинным) параметрах дна  $c_1 = 1670$  м/с,  $\rho_1 = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. При этом вычисления проводились с шагом по скорости звука 10 м/с, с шагом по плотности 100 кг/м<sup>3</sup>. Заметим, что при оптимальном наборе параметров дна число учитываемых мод было 37, из них 23 моды — распространяющиеся,

остальные 14 мод — нормальные вытекающие. Квазимод в числе учитываемых 37 мод не было.

На рис. 6 пунктиром изображена линия, параметрически описываемая формулами Эйкала (4) и (5). Точки на пунктирной линии соответствуют указанным значениям пористости, причем в приведенном диапазоне  $\kappa = 0.3-0.33$  значение потерь в дне практически одинаково и равно  $\beta_f \approx 0.45$  дБ/км/Гц. Заметим, что после первого этапа расчетов параметры дна соответствовали точке  $\kappa = 0.3$ .

На рис. 4а показаны зависимости амплитуд от глубины: экспериментальная и теоретическая, полученная при оптимальных параметрах дна после второго этапа расчетов. Для удобства восприятия точки с шагом 3.46 м, соответствующие расположению приемных гидрофонов, соединены прямыми линиями, хотя, как показывает подробный расчет теоретической зависимости с шагом 0.01 м, приведенный на рис. 4б, реальная изрезанность поля по глубине выражена гораздо сильнее.

Заметим, что вследствие этой изрезанности небольшие вариации в предполагаемом положении приемной цепочки по вертикали в целом приводят к заметному изменению расчетных значений поля в местах расположения приемных гидрофонов и, соответственно, к заметному изменению невязки с экспериментом. Расчеты показали, что минимум невязки наблюдается при положении цепочки, сдвинутом на 0.5 м вниз относительно первоначальных экспериментальных оценок<sup>1</sup>. Это составляет 1.2% от глубины моря в месте установки цепочки. При этом возможный наклон цепочки не учитывался. Можно предположить, что скорректированное положение цепочки, приводящее к минимальной невязке, является её истинным положением. По этой причине

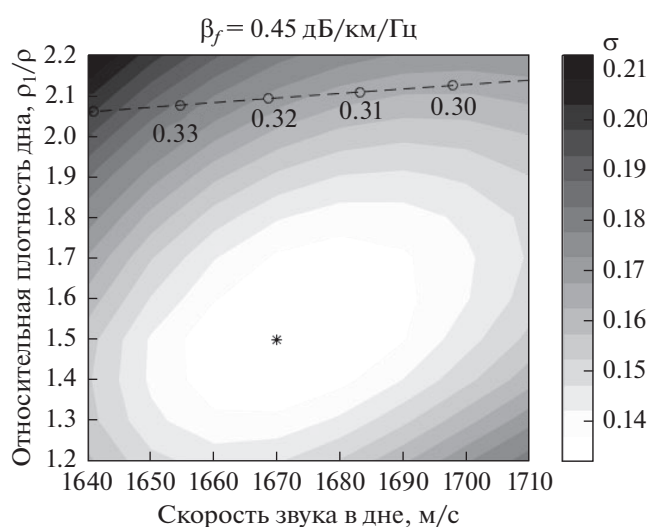


Рис. 6. Невязка как функция скорости звука в дне и относительной плотности дна. Минимум невязки показан звездочкой.

<sup>1</sup> Речь идет об оценках, полученных неакустическими методами при измерениях глубин погружения несущего фала и закрепленной на нем цепочки с гидрофонами.

не итоговые расчеты по определению параметров дна проводились для этого скорректированного положения цепочки, описываемого формулой (1), где учтен этот сдвиг. Результаты расчетов на рис. 4–6а также приведены для скорректированного положения цепочки.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, что полученные оценки эффективных акустических параметров дна на озере Байкал ( $c_1 = 1670$  м/с,  $\rho_1 = 1500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\beta_f = 0.45$  дБ/км/Гц) нельзя считать достоверными для всей акватории этого озера. Скорее всего, даже в мелководной ее части имеет место заметная изменчивость величин  $c_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\beta_f$ , обусловленная выносом осадочных пород многочисленными реками. Однако развитая в настоящей работе методика демонстрирует принципиальную возможность оценки этих параметров, во-первых, на небольших (сотни метров) расстояниях от источника звука, когда акустическое поле формируется не только распространяющимися, но и вытекающими модами и, во-вторых, при наличии ледового покрова. Последнее, в том числе, возможно при использовании приближенных расчетных соотношений, приведенных в приложении к настоящей статье и позволяющих существенным образом увеличить скорость вычислений. Указанную методику можно рекомендовать для применения на мелководном арктическом шельфе России.

Заметим здесь также, что акустические методы оценки пространственного распределения скорости звука в верхнем слое донных осадочных хорошо разработаны [16, 17] и лежат в основе современной инженерной сейсморазведки. Они позволяют определять поле скорости звука с горизонтальным пространственным разрешением в несколько десятков метров. Однако такое разрешение для задач акустического мониторинга, упомянутых во введении, как правило, является избыточным, тогда как сама сейсморазведка является высоко затратной методикой. Она применима только в акваториях, где, по крайней мере, в некоторые сезоны года отсутствует ледовый покров. Кроме того, в этой методике не предусмотрена оценка плотности донных осадков, которая определяется при сопутствующем малоуглубинном бурении. Это еще многократно увеличивает стоимость исследований. Учет этих особенностей инженерной сейсморазведки служит дополнительным аргументом в пользу применения методов, развитых в настоящей работе.

Авторы выражают благодарность М.В. Волкову и А.В. Шатравину за помощь в проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-02-00127.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

#### МОДОВОЕ ОПИСАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В МЕЛКОВОДНОМ ВОЛНОВОДЕ С ЛЕДОВЫМ ПОКРОВОМ

##### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим модельный волновод, изображенный на рис. 3. Волновод представляет собой водный слой переменной толщины  $H(r)$ , ограниченный сверху однородным упругим слоем (льдом) постоянной толщины  $h$ , снизу – однородным жидким полупространством (дном). Начало цилиндрической системы координат  $(r, z, \phi)$  выбрано на границе вода–лед, где  $r$  – горизонтальная ось, угол  $\phi$  отсчитывается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси  $z$ . С целью исключения в модели горизонтальной рефракции акустических волн модельный волновод полагаем цилиндрически симметричным относительно оси  $z$ , на которой в точке с координатой  $z_0$  в водном слое находится точечный источник звука частоты  $\omega = 2\pi f$ . При такой геометрии поле в волноводе не зависит от угла  $\phi$ , а зависит только от координат  $(r, z)$ .

Обозначим параметры рассматриваемых сред:  $c(z)$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  – скорости продольных волн в воде, дне и льду, соответственно;  $c_s$  – скорость поперечных волн во льду;  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  – плотности воды, дна и льда, соответственно;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – безразмерные коэффициенты потерь продольных волн для дна и льда, соответственно;  $\alpha_s$  – безразмерный коэффициент потерь поперечных волн для льда. Коэффициенты потерь определяют мнимую часть

волновых чисел  $k_{1,2,S} = \frac{\omega}{c_{1,2,S}} \left( 1 + i \frac{\alpha_{1,2,S}}{2} \right) = \frac{\omega}{\dot{c}_{1,2,S}}$ , где

обозначено  $\dot{c}_{1,2,S} = \frac{c_{1,2,S}}{1 + i\alpha_{1,2,S}/2}$ . Связь безразмерных

коэффициентов потерь ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_s$ ) с коэффициентами затухания ( $\beta_f$ ,  $\beta_{2f}$ ,  $\beta_{sf}$ ), используемыми при

расчетах, имеет вид  $\beta_{f, 2f, sf} \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = \frac{27.3\alpha_{1,2,S}}{c_{1,2,S} [\text{км/с}]}$ .

Прежде чем искать поле для горизонтально неоднородного волновода, у которого  $H(r) \neq \text{const}$ , решим задачу для горизонтально однородного волновода, у которого  $H = \text{const}$ .

Запишем звуковое давление в воде и дне в виде  $p = \text{Re}\{P \exp(-i\omega t)\}$  и  $p_1 = \text{Re}\{P_1 \exp(-i\omega t)\}$ , где  $P$  и  $P_1$  – комплексная амплитуда давления в соответствующих средах,  $t$  – время. В упругом слое льда аналогом давления является тензор напряжения  $p_2 = \text{Re}\{P_2 \exp(-i\omega t)\}$ , который в случае поля цилиндрической симметрии имеет вид

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_{2rr} & P_{2rz} & 0 \\ P_{2zr} & P_{2zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

Учитывая наличие упругой среды, нахождение поля в волноводе проводится с использованием понятия потенциалов. Пусть  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  – вектора смещений частиц соответственно в воде, дне и льду. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{grad } \varphi, \\ \mathbf{u}_1 &= \text{grad } \varphi_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

где  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – скалярные потенциалы, описывающие продольные волны в соответствующих средах,  $\mathbf{s}$  – векторный потенциал, описывающий поперечные волны во льду. Для поля цилиндрической симметрии все функции в (A2) зависят от координат  $(r, z)$ . При этом векторный потенциал имеет отличную от нуля только  $\varphi$ -компоненту и представляется в виде  $\mathbf{s} = (0, 0, -\partial\theta/\partial r)$ , где  $\theta$  – скалярная функция векторного потенциала.

Для тонального источника после перехода к комплексным амплитудам

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,2}, \varphi, \varphi_{1,2}, \theta) &= \\ = \text{Re}\{(\mathbf{U}, \mathbf{U}_{1,2}, \Phi, \Phi_{1,2}, \Theta) \exp(-i\omega t)\} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

справедливы уравнения Гельмгольца

$$\mathbf{L}\Phi = -\frac{A_0}{\rho\omega^2} \delta_0, \quad \mathbf{L}_{1,2}\Phi_{1,2} = 0, \quad \mathbf{L}_S\Theta = 0, \quad (\text{A4})$$

где  $\mathbf{L} = \Delta + k^2$ ,  $\mathbf{L}_{1,2,S} = \Delta + k_{1,2,S}^2$  – операторы Гельмгольца,  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа для

поля цилиндрической симметрии,  $\delta_0 = \delta(z - z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r}$ ,

$\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака,  $k = \frac{\omega}{c(z)}$ ,  $A_0$  – коэффициент, характеризующий мощность и начальную фазу источника (при последующих расчетах  $A_0$  не понадобится, т.к. исчезнет при нормировке поля).

Граничные условия на границах сред имеют вид

$$\begin{aligned} G\{\Phi, \Phi_{1,2}, \Theta\} &= \\ = \begin{cases} z = -h: P_{2zr} = 0, & P_{2zz} = 0, \\ z = 0: U_z = U_{2z}, & P = -P_{2zz}, & P_{2zr} = 0, \\ z = H: U_z = U_{1z}, & P = P_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$P = \rho\omega^2\Phi, \quad P_1 = \rho_1\omega^2\Phi_1,$$

$$U_z = \Phi', \quad U_{1z} = \Phi_1',$$

$$U_{2z} = \Phi_2' + \Theta'' + k_S^2\Theta, \quad (\text{A6})$$

$$P_{2zz} = -\hat{\lambda}_2 k_2^2 \Phi_2 + 2\hat{\mu}_2 U_{2z}',$$

$$P_{2zr} = 2\hat{\mu}_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \Phi_2' + \Theta'' + k_S^2 \Theta / 2 \right),$$

где  $U_z$ ,  $U_{1,2z}$  –  $z$ -компоненты векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{U}_{1,2}$ ,  $\hat{\lambda}_2 = \rho_2 (\dot{c}_2^2 - 2\dot{c}_S^2)$ ,  $\hat{\mu}_2 = \rho_2 \dot{c}_S^2$  – комплексные коэффициенты Ламэ, штрих в (A6) и далее означает производную по  $z$ .

Формулы (A4)–(A6) написаны на основе теории, изложенной в [18], но в отличие от [18] учтены потери во льду и дне. Аналогичные выражения приведены также в [8], но при другой конфигурации жидких и упругих сред.

Дополнительными условиями, выделяющими единственное решение уравнений (A4) с граничными условиями (A5), являются: 1) условие распространения волн в дне в направлении от источника, 2) условие излучения на бесконечности. Второе условие для дна в виде жидкого поглощающего полупространства сводится к ограниченности амплитуды волн на бесконечности [19]. Если через  $C_1$  и  $C_2$  обозначить классы функций, соответствующие первому и второму дополнительным условиям, то они запишутся в виде

$$\Phi_1 \in C_1, \quad \Phi_1 \in C_2. \quad (\text{A7})$$

#### 4.2. Решение задачи

Задача (A4)–(A7) при  $H = \text{const}$  имеет точное решение (вывод аналогичен [8, 11]). Для поля давления  $P$  в водном слое волновода ( $0 \leq z \leq H$ ) точное решение имеет вид

$$P = \frac{A_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, z_0) V(\xi, z_0)}{W(\xi)} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (\text{A8})$$

где функции  $U(\xi, z)$  и  $V(\xi, z)$  являются решениями задач

$$\begin{aligned} U'' + \varepsilon^2 U &= 0, \quad [U + gU']_{z=H} = 0, \\ V'' + \varepsilon^2 V &= 0, \quad [V + g_2 V']_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$\varepsilon = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ ,  $z_> = \max(z, z_0)$ ,  $z_< = \min(z, z_0)$ ,  $H_0^{(1)}(\cdot)$  – функция Ханкеля первого рода,  $W(\xi) = UV' - VU'$  – определитель Вронского, который не зависит от  $z$ .

Функции  $g = g(\xi)$  и  $g_2 = g_2(\xi)$  определяются из граничных условий на нижней и верхней гра-

ницах водного слоя, соответственно, и могут быть представлены в виде

$$g = \frac{im_1}{\epsilon_1}, \quad (A10)$$

$$g_2 = \frac{m_2}{k_S^4} \cdot \frac{a^2(A_{41} + A_{42}) + 2d(aA_{44} - D)}{2aA_{32} + 2dA_{34} - D}, \quad (A11)$$

где  $m_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{\rho}$ ,  $\epsilon_{1,2,S} = \sqrt{k_{1,2,S}^2 - \xi^2}$ ,  $a = k_S^2 - 2\xi^2$ ,  $d = 2i\epsilon_S\xi^2$ ,  $E_{2,S} = \exp(i\epsilon_{2,S}h)$ ,  $D = \det A$  – определитель матрицы  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -2i\epsilon_2 E_2^{-1} & 2i\epsilon_2 E_2 & aE_S^{-1} & aE_S \\ aE_2^{-1} & aE_2 & -dE_S^{-1} & dE_S \\ a & a & -d & d \\ i\epsilon_2 & -i\epsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  – алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы  $A$  (первый индекс – строка, второй индекс – столбец,  $M_{ij}$  – минор матрицы  $A$ , равный определителю оставшейся матрицы при вычеркивании  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца).

Все радикалы  $\sqrt{\cdot}$  в приведенных выше формулах и далее по тексту понимаются однозначно – как главное значение<sup>2</sup> комплексного квадратного корня, у которого  $\text{Re} \sqrt{\cdot} > 0$ . Если  $\text{Re} \sqrt{\cdot} = 0$ , то выбирается значение, у которого  $\text{Im} \sqrt{\cdot} > 0$ .

Интеграл (A8) может быть преобразован согласно теории вычетов в сумму дискретного спектра (сумма вычетов в полюсах  $\xi_m$ , удовлетворяющих равенству  $W(\xi_m) = 0$  на множестве комплексных  $\xi$  при  $\text{Im} \xi > 0$ ) и непрерывного спектра (интеграл по берегам разреза от точки ветвления  $k_1$ ). Пренебрегая непрерывным спектром, запишем приближенное решение задачи (A4)–(A7) при  $H = \text{const}$  в виде дискретного спектра:

$$P = \frac{iA_0}{4} \sum_{m=1}^M \psi_m(z_0) \psi_m(z) H_0^{(1)}(\xi_m r), \quad (A12)$$

где  $M$  – учитываемое число мод дискретного спектра,  $\psi_m(z)$  и  $\xi_m$  – нормированные собственные функции и собственные значения (полюса) задачи Штурма–Лиувилля для области  $0 \leq z \leq H$ :

<sup>2</sup> Второе неглавное значение комплексного квадратного корня отличается от главного значения знаком.

$$\psi_m'' + \epsilon_m^2 \psi_m = 0, \quad \psi_m(0) + g_{2m} \psi_m'(0) = 0,$$

$$\psi_m(H) + g_m \psi_m'(H) = 0, \quad (A13)$$

$$\int_0^H \psi_m^2(z) dz + b_m \psi_m^2(H) = 1,$$

где  $\epsilon_m$ ,  $g_{2m}$ ,  $g_m$ ,  $b_m$  – значения функций  $\epsilon(\xi)$ ,  $g_2(\xi)$ ,  $g(\xi)$ ,  $b(\xi) = \frac{i}{2m_1\epsilon_1}$  в точке  $\xi = \xi_m$ .

В частном случае при  $c = \text{const}$  собственные значения  $\xi_m$  определяются как корни уравнения:

$$(1 + g_{2m}g_m\epsilon_m^2) \sin(\epsilon_m H) + (g_m - g_{2m})\epsilon_m \cos(\epsilon_m H) = 0. \quad (A14)$$

При этом собственные функции равны:

$$\psi_m(z) = N_m [\sin(\epsilon_m z) - g_{2m}\epsilon_m \cos(\epsilon_m z)], \quad (A15)$$

где  $N_m$  – коэффициент нормировки, определяемый из условия нормировки (последнее равенство в (A13)):

$$N_m = \left[ \int_0^H (\sin(\epsilon_m z) - g_{2m}\epsilon_m \cos(\epsilon_m z))^2 dz + b_m (\sin(\epsilon_m H) - g_{2m}\epsilon_m \cos(\epsilon_m H))^2 \right]^{-1/2}. \quad (A16)$$

Заметим, что формулы для волновода безо льда получаются при  $g_2 = g_{2m} = 0$ .

Определенное выше правило понимания радикала  $\sqrt{\cdot}$ , как главного значения корня для действительных и комплексных  $\xi$ , приводит к бесконечному количеству полюсов  $\xi_m$ , а значит и числу мод  $M$ . Данное правило соответствует  $M$ -разрезу на комплексной плоскости, идущему от точки ветвления  $k_1$  по гиперболе  $\text{Im} \xi = \text{Re} k_1 \text{Im} k_1 / \text{Re} \xi$  при  $\text{Re} \xi \geq \text{Re} k_1$  [15]. На практике  $M$ -разрез эквивалентен разрезу Пекериса, идущему от точки  $k_1$  вертикально вверх, поскольку дает такие же полюса и моды. Среди бесконечного числа мод, как правило, имеется конечное число нормальных мод и бесконечное число квазимод. Как показано в [15], учет квазимод дает хорошее приближение к точному решению на коротких расстояниях  $r \sim (1...10)H$ .

В данной работе расстояние от источника  $r \sim 7H$ , поэтому необходимо учитывать моды всех типов: нормальные (распространяющиеся и вытекающие) и квазимоды, принадлежащие к классу вытекающих мод. Общее количество учитываемых мод  $M$  необходимо выбирать таким, чтобы прибавление новых мод практически не влияло на результат расчета дискретного спектра поля.

Для волновода с плавным изменением толщины водного слоя  $H(r)$ , решение для поля при  $0 \leq z \leq H$  может быть записано в адиабатическом приближении [6]:

$$P = \frac{A_0 \exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \times \sum_{m=1}^M \Psi_m(0, z) \frac{\Psi_m(r, z)}{\sqrt{q_m(r)} r} \exp\left(i \int_0^r \xi_m(r') dr'\right), \quad (\text{A17})$$

где  $\Psi_m(r, z)$  и  $\xi_m(r)$  – собственные функции и собственные значения, вычисленные согласно (A13)–(A16), при каждом поперечном сечении волновода для фиксированного значения  $r$ ,  $q_m(r) = \text{Re } \xi_m(r)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Worcester P.F., Dzieciuch M.A., Sagen H. Ocean acoustics in the rapidly changing arctic // *Acoustics Today*. 2020. V. 16. № 1. P. 55–64.
2. Lynch J.F., Lin Y.T., Duda T.F., Newhall A.F. Acoustic ducting, reflection, refraction, and dispersion by curved nonlinear internal waves in shallow water // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2010. V. 35. № 1. P. 12–27.
3. Katsnelson B., Katsman R., Lunkov A., Ostrovsky I. Acoustical methodology for determination of gas content in aquatic sediments, with application to Lake Kinneret, Israel, as a case study // *Limnology and Oceanography: Methods*. 2017. T. 15. № 6. С. 531–541.
4. Рутенко А.Н., Гаврилевский А.В., Путов В.Ф., Соловьев А.А., Манульчев Д.С. Мониторинг антропогенных шумов на шельфе о. Сахалин во время сейсморазведочных исследований // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 3. С. 348–362.
5. Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г., Шатравин А.В. Оценка возможностей идентификации гренландских китов на арктическом шельфе // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 5. С. 596–607.
6. Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J. *Fundamentals of Shallow Water Acoustics*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012.
7. Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е. Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 3. С. 342–358.
8. Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В. Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 389–405.
9. Кацнельсон Б.Г., Кулапин Л.Г., Мигулин А.А., Петников В.Г. Влияние гидродинамической изменчивости на вертикальную интерференционную структуру звукового поля в волноводе // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 2. С. 308–316.
10. Шерстянкин П.П., Колотило Л.Г., Тарасюк Ю.Ф., Куимова Л.Н., Иванов В.Г., Блинов В.В. О скорости звука в Байкале // *Докл. Акад. наук.* 2002. Т. 386. № 1. С. 103–107.
11. Collis J.M., Frank S.D., Metzler A.M., Preston K.S. Elastic parabolic equation and normal mode solutions for seismo-acoustic propagation in underwater environments with ice covers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 5. P. 2672–2682.
12. Millero F.J., Chen C.T., Bradshaw A., Schleicher K. A new high pressure equation of state for seawater // *Deep-Sea Research*. 1980. V. 27A. P. 255–264.
13. Akal T. The relationship between the physical properties of underwater sediments that affect bottom reflection // *Marine Geology*. 1972. V. 13. № 4. P. 251–266.
14. Hamilton E.L. Compressional-wave attenuation in marine sediments // *Geophysics*. 1972. V. 37. № 4. P. 620–646.
15. Григорьев В.А., Петников В.Г. О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 681–698.
16. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка. Тверь: Изд-во АИС, 2006.
17. Степанов А.В. Обработка сейсмических данных. Казань: Казанский университет, 2013.
18. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
19. Алексеев Г.В. Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток: Дальнаука, 2006.

## АКУСТИЧЕСКИЕ ШУМЫ, ФОРМИРУЕМЫЕ НА МЕЛКОВОДНОМ ШЕЛЬФЕ СУДАМИ С ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ

© 2020 г. А. Н. Рутенко<sup>а, \*</sup>, М. Ю. Фершалов<sup>а</sup>, В. Г. Ущиповский<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

\*e-mail: rutenko@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 13.02.2020 г.

После доработки 23.03.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Приводятся результаты пространственных измерений акустических шумов, генерируемых судами ледового плавания дизель-электроходами, применяемыми компанией “Сахалин Энерджи Инвестмент Компани Лтд.” для работы с нефтегазовыми платформами *ПА-Б* и *Моликпак*, установленными на северо-восточном шельфе о. Сахалин. С помощью 3D модового параболического уравнения и опорных натуральных измерений, в приближении нормальных вертикальных мод и узкоугольного параболического уравнения в горизонтальной плоскости, проведены расчеты антропогенных акустических полей, формируемых данными судами в прибрежном Пильтунском районе летне-осеннего нагула серых китов. Для моделирования построены спектральные функции эквивалентных судам точечных источников антропогенных акустических шумов. Результаты численного моделирования, проведенного с их помощью, согласуются с натурными измерениями.

**Ключевые слова:** акустические шумы, генерируемые судами на шельфе, построение эквивалентного точечного источника шума, экспериментальные и теоретические исследования распространения звука на шельфе

DOI: 10.31857/S0320791920050123

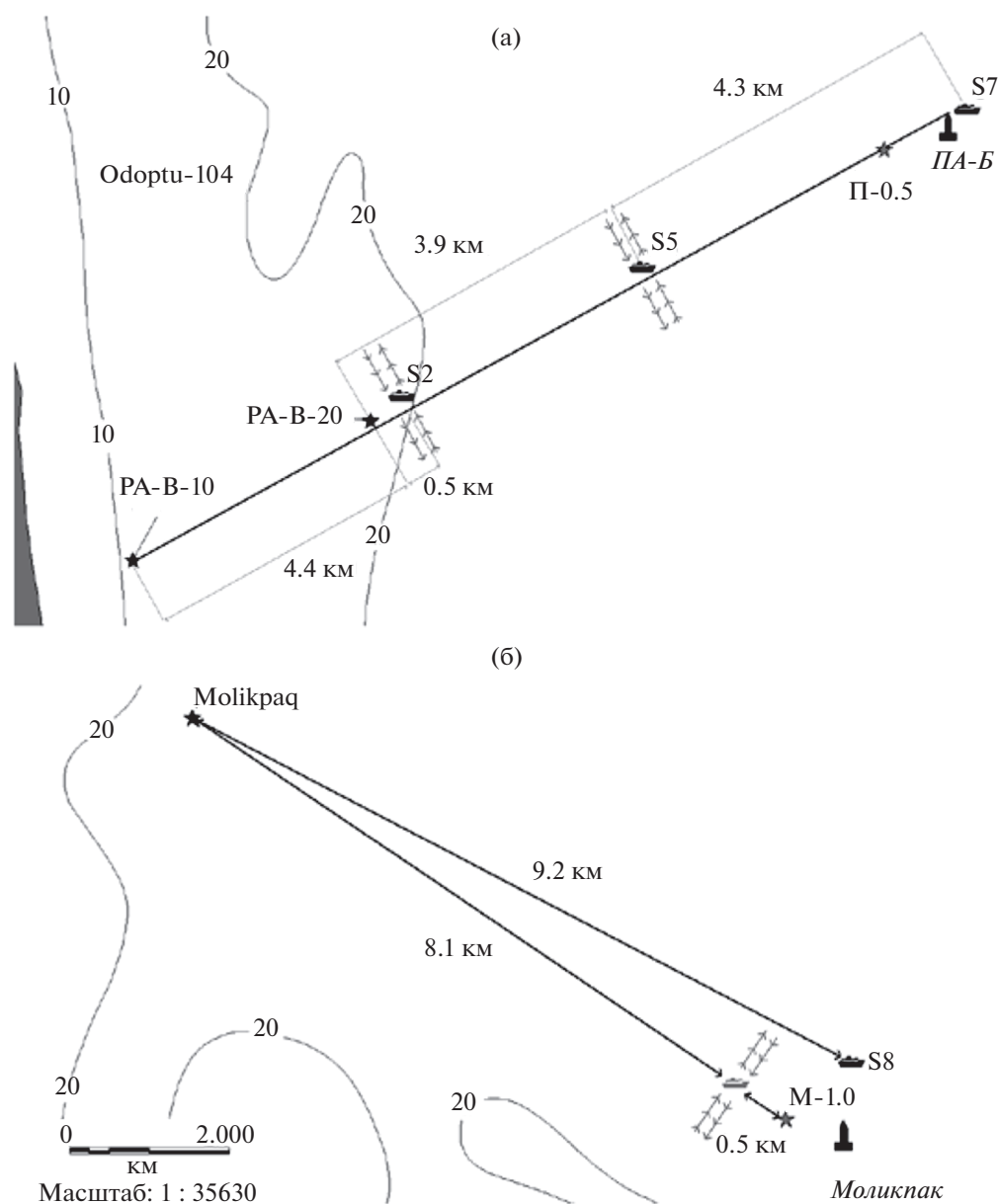
### ВВЕДЕНИЕ

При освоении углеводородного *Пильтун-Астохского* месторождения, расположенного на северо-восточном шельфе о. Сахалин, компания “Сахалин Энерджи Инвестмент Компани Лтд.” (далее “Сахалин Энерджи”) особое внимание уделяет контролю уровней антропогенных акустических шумов, генерируемых ее производственной деятельностью в данном районе. Это обусловлено тем, что их нефтегазодобывающие платформы *Моликпак* и *ПА-Б* расположены в 10 и 8 км от восточной границы прибрежного *Пильтунского* района летне-осеннего нагула западной (охотско-корейской) популяции серых китов, занесенных в *Красную книгу РФ* [1–3]. Индустриальные акустические шумы являются антропогенным фактором для серых китов, поэтому компания пытается их минимизировать с помощью проведения специальных мониторингов и предварительного численного моделирования [4–6]. В работе [7] показано, что важным источником антропогенных шумов в этом районе являются шумы судов, обеспечивающих работу платформ, причем наиболее шумным и продолжительным является режим динамического позиционирования (ДП)

судна при многочасовой работе с краном платформы.

В данной работе представлены результаты специальных натуральных измерений и численного моделирования антропогенных акустических полей, формируемых в районе нагула серых китов, новыми судами ледового плавания дизель-электроходами с двигателями *AZIPOD* [8]. “Сахалин Энерджи” с 2017–2018 гг. применяет 4 таких судна, и поэтому в 2019 г. была поставлена задача провести обмер генерируемых ими акустических шумов и построить оценки антропогенных полей, формируемых в районах нагула серых китов при проведении судами типовых операций: движение со скоростью 10 узлов возле платформ и вблизи 20-метровой изобаты – восточной границы прибрежного *Пильтунского* района нагула китов, а также во время работы с платформами в режиме ДП.

Многолетние наблюдения за распределением серых китов в этом районе [2, 3] показали, что киты кормятся на глубинах 6...15 м, и поэтому анализ результатов ежегодных акустических измерений, проводимых с помощью автономных подводных акустических регистраторов – АПАР [9, 10], уста-



**Рис. 1.** Карта района с указанием точек расположения нефтегазодобывающих платформ (а) – ПА-В (глубина моря 32 м), (б) – Моликпак (30 м), и треков, на которых проводились измерения шумов, генерируемых обмеряемыми судами, в 2013 г. (точки П-0.5, М-1.0) и в 2019 г.: S2 – 20, S5 – 25, S7 – 32, S8 – 30 м.

навливаемых в точках, показанных на рис. 1, характеризует вариации уровней фоновых и антропогенных шумов на восточной границе и внутри прибрежного *Пильтунского* района кормления серых китов

Необходимо отметить, что в данном районе шельфа Охотского моря в период 2005–2010 гг. с борта научно-исследовательских судов *Профессор Богоров* и *Академик Опарин* в комплексных биолого-акустических экспедициях, организуемых ТОИ ДВО РАН и ИБМ ДВО РАН при финансовой поддержке компаниями *“Сахалин Энерджи”*

и *“Эксон Нефтегаз Лимитед”*, проводились гидрологические и батиметрические измерения, а также специальные исследования потерь при распространении звука вдоль акустических трасс, простирающихся от места установки потенциального источника антропогенных шумов в традиционные районы кормления серых китов. Эти данные позволили построить адекватные экспериментальным данным теоретические модели, которые позволяют в пределах изученного района предсказывать уровни шумов, формируемых известными источниками с заданным расположением



[7, 11–13]. Акустические измерения, проводимые в точках мониторинга РА-В-20 и Molikraq (см. рис. 1) показали, что уровни антропогенных шумов от механизмов и устройств, работающих на соответствующих платформах, значительно ниже, чем от обслуживающих их судов. Поэтому в 2013 г. были проведены специальные пространственные акустические измерения спектров акустических шумов, формируемых в данной акватории буксирами разного типа в режиме равномерного движения у платформы *Моликнак* и в режиме динамического позиционирования у платформы *ПА-Б* [7].

Предложена методика, основанная на применении модового параболического уравнения (МПУ) [14, 15] в приближении нормальных адиабатических вертикальных водных и воднодонных мод и узкоугольного параболического уравнения в горизонтальной плоскости, для вычисления акустического поля, формируемого эквивалентным известному (судно) точечным источником в 3D неоднородном геоакустическом волноводе, в котором известны положение источника, распределение скорости звука в воде  $C_w$ , пространственный рельеф дна – батиметрические данные, модельное распределение в дне акустических параметров слагающих дно пород. Проведены специальные натурные измерения с помощью гидрофонов акустических станций [10], установленных у дна в точках РА-В-20, РА-В-10 и Molikraq (рис. 1), во время движения обмеряемых судов по соответствующим маршрутам, включая имитацию работы с платформами в точках: S2, S7 и S8. В этих точках суда работали в режиме ДП. Точка S2 удалена от точки акустического мониторинга РА-В-20 на 500 м, и, поскольку она лежит на акустической трассе “S7–П-05–S5–S2–РА-В-20–РА-В-10”, то логично построить эквивалентные точечные функции источника для режима ДП и движения со скоростью 10 узлов по акустическим сигналам, записанным у дна в точке РА-В-20 и соответствующим работе судна в точке S2. Построение осуществляется с помощью МПУ по методике, представленной в работах [16, 17].

#### АППАРАТУРА И МЕТОДИКА

В августе 2019 г. три однотипных судна компании “Сахалин Энерджи”: *Геннадий Невельской*, *Евгений Примаков* и *Федор Ушаков* прошли процедуру обмера генерируемых ими акустических шумов при движении со скоростью 10 узлов возле платформ и вблизи 20-метровой изобаты – восточной границы прибрежного *Пильтунского* района нагула серых китов. Ниже приведена методика проведения таких измерений.

Стационарные измерения у дна вариаций акустического давления в частотном диапазоне 2–15000 Гц проводятся с помощью гидрофона типа

Ги-50, установленного на резиновых амортизаторах в пирамидке, изготовленной из стального прутка. В 2013 г. в точках ежегодного акустического мониторинга измерения проводились с помощью АПАР [9], а возле платформ (см. рис. 1, точки П-0.5 и М-1.0) – с помощью мини-АПАР, отличающегося от АПАР только временем автономной работы – 6 сут, в то время как у АПАР автономность 52 сут. В 2019 г. акустические измерения проводились только новыми АПАР с динамическим диапазоном измерения вариаций акустического давления, равным 145 дБ [10].

Гидрологические измерения, включая измерения скорости звука в воде, были проведены с помощью автономного комбинированного зонда – MIDAS CTD +500 производства компании Valeport Limited, Англия. При построении модельных геоакустических волноводов, соответствующих трассам распространения звука, использовались батиметрические данные из базы данных ТОИ ДВО РАН и распределение акустических параметров пород, слагающих дно, полученные в результате специальных натуральных и теоретических исследований.

Поясним методику построения эквивалентных точечных функций источников, с помощью которых рассчитываются пространственные распределения антропогенных акустических полей, формируемых в прибрежном *Пильтунском* районе нагула серых китов известным источником – судном, работающим в заданном режиме.

В данном случае комплексный спектр эквивалентной точечной функции источника (судно в точке S2) рассчитывается для акустического сигнала  $p_r(t)$ , измеренного в точке РА-В-20. Для этого его комплексный спектр  $\dot{S}_r(f)$  подставляется в точку источника и с помощью МПУ проводится моделирование распространения в заданном 3D модельном волноводе на всех частотах в диапазоне  $\Delta f$ , с последующей коррекцией значений комплексного спектра источника, так чтобы в опорной точке модельный спектр  $\dot{S}_{model}(f)$  совпал с измеренным  $\dot{S}_r(f)$ . После этого мы называем соответствующий комплексный спектр  $S_{source} = \dot{S}_{z=s,x=0,y=0}(f)$  эквивалентной функцией источника, которая позволяет с помощью МПУ и модельного геоакустического волновода корректно рассчитывать акустическое поле, формируемое данным источником в акватории, ограниченной раскрытием узкоугольного параболического уравнения ( $26^\circ$ ). Корректность моделирования проверяется сравнением результатов моделирования с результатами синхронных натуральных измерений, проведенных в точке РА-В-10. Эквивалентные точечные функции источников для всех судов были построены с помощью МПУ и модельного 3D волновода, построенного для акустического профиля S2–РА-В-20–РА-В-10.

В точке РА-В-10 проводилось контрольное сравнение измеренных и модельных данных.

Измеренный или смоделированный акустический сигнал характеризуется во временной области вариациями акустического давления  $p(t)$ , по которым с помощью преобразования Фурье можно рассчитать комплексный спектр  $\hat{S}(f)$ , из которого можно с помощью обратного преобразования Фурье, ограничившись частотным диапазоном  $\Delta f$ , вернуться во временную область к вариациям  $\tilde{p}(t)$ . Это преобразование мы используем при построении эквивалентной точечной функции источника импульсного или широкополосного непрерывного акустического сигнала. Кроме того, с помощью преобразования Фурье рассчитывается периодограмма  $G(f)$ , характеризующая значения спектральной плотности мощности в 1 Гц диапазонах. Для удобства сравнения абсолютных значений широкополосных и тональных сигналов преобразование Фурье осуществляется по реализации  $p(t)$ , равной 1 секунде. Полагая, что вариации  $p(t)$  в исследуемом частотном диапазоне  $\Delta f$  на оцениваемом временном интервале  $\Delta t$  являются стационарными, проводится усреднение значений  $G(f)$ , рассчитанных по последовательным 1-секундным реализациям. Таким образом, мы получаем оценку спектра  $\hat{G}(f)$  измеренных на временном интервале  $\Delta t$  вариаций акустического давления  $p(t)$ . При проведении натурных измерений мы можем проводить усреднение по реализациям и за счет перемещения источника – судна, такое усреднение сглаживает интерференционную структуру формируемого судном акустического поля, хотя точка измерения  $p(t)$  стационарная. При численном моделировании сглаживание пространственной интерференционной структуры акустического поля осуществляется с помощью усреднения рассчитанных значений по пространственной сетке, включающей точку, в которой были проведены натурные измерения.

Таким образом, наглядной количественной физической характеристикой антропогенного акустического поля в заданной точке акватории является оценка модуля спектра  $\hat{G}(f)$ , которая в децибелах иллюстрирует значение спектральной плотности мощности акустических шумов на данной частоте –  $\hat{G}(f) = 10 \lg \left( \frac{\hat{G}(f)}{p_0^2} \right)$ , где  $p_0 = 1$  мкПа, но можно охарактеризовать уровень антропогенных шумов и одним интегральным значением,

это уровень среднеквадратичного значения акустического шума в частотном диапазоне  $\Delta f$ :

$$SPL_{rms}(\Delta f) = 20 \lg \left( \frac{\sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \hat{G}(f) df}}{p_0} \right), \text{ дБ отн. 1 мкПа};$$

$$SEL(\Delta f) = 10 \lg \left( \frac{\Delta t \int_{f_1}^{f_2} \hat{G}(f) df}{p_0^2 t_0} \right), \text{ дБ отн. 1 мкПа}^2 \text{ с.}$$

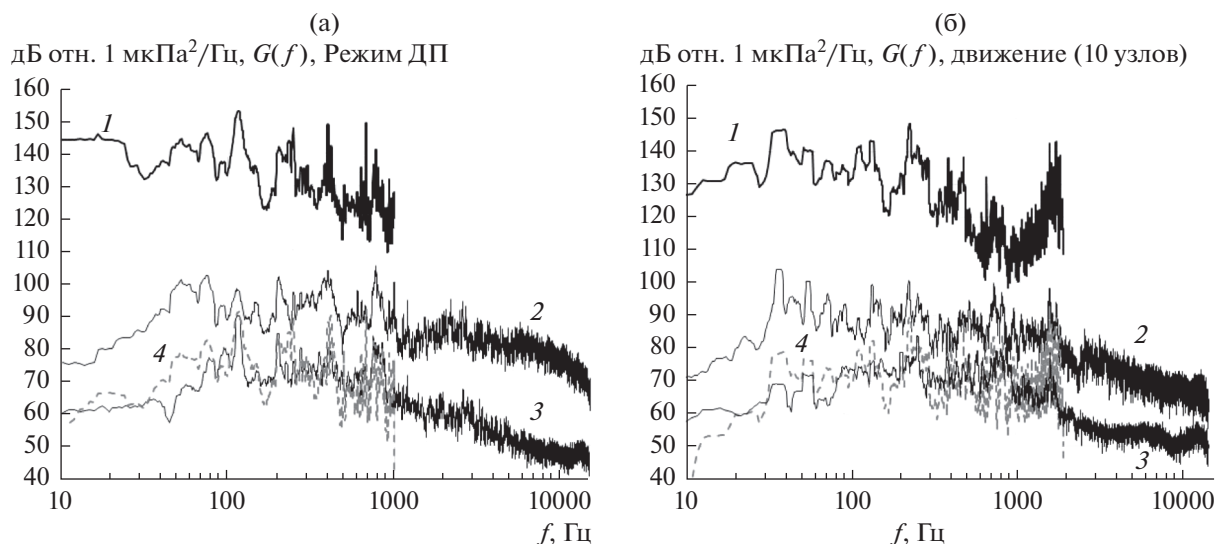
Вторая формула определяет значение уровня экспозиции или воздействия антропогенных шумов на водную среду. В этих формулах  $\Delta t$  – временной интервал, на котором проведены расчеты периодограмм по последовательным 1-секундным реализациям  $p(t)$ ,  $p_0 = 1$  мкПа,  $t_0 = 1$  с. Следует отметить, что построение оценок этих параметров в частотной области позволяет исключить влияние низкочастотных псевдошумов обтекания и вибраций, вызываемых на мелководном шельфе приливными течениями и орбитальным движением частиц воды в длинных поверхностных волнах зыби и во время штормов. Кроме того, можно исключить и фоновые шумы с частотами, например, больше 2 кГц для прохода судна со скоростью 10 узлов и больше 1 кГц для работы судна в режиме ДП. Поскольку, согласно представленным ранее спектрам типовых шумов, генерируемых судами, энергия акустических волн на этих частотах не существенна по сравнению с энергией в указанных диапазонах, при расчете этих параметров мы ограничимся диапазоном  $\Delta f = f_2 - f_1$ , где  $f_1 = 10$  Гц, а  $f_2 = 2000$  Гц для движения судна со скоростью 10 узлов и  $f_2 = 1000$  Гц для режима ДП. Например, для режима ДП в точке РА-В-20 значения  $SEL(10-15000 \text{ Гц}) = 126.9$  дБ, а  $SEL(10-1000 \text{ Гц}) = 125.1$  дБ, меньше на 1.8 дБ.

В заключение отметим, что если параметры  $SPL_{rms}(\Delta f)$  и  $SEL(\Delta f)$  оценивать по одной 1-секундной реализации, то их значения в дБ эквивалентны, т.е.

$$\begin{aligned} SEL(\Delta f) &= 10 \lg \left( \frac{\Delta t \int_{f_1}^{f_2} \hat{G}(f) df}{p_0^2 t_0} \right) \equiv \\ &\equiv SPL_{rms}(\Delta f) = 20 \lg \left( \frac{\sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \hat{G}(f) df}}{p_0} \right), \end{aligned}$$

поскольку  $\Delta t = 1$  с.

Проиллюстрируем методику построения  $S_{source}$  с помощью МПУ на примере акустических данных, записанных в точке РА-В-20, при работе



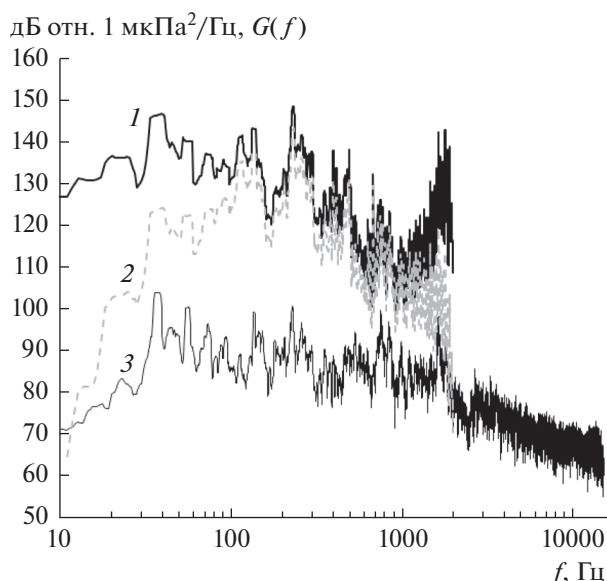
**Рис. 2.** Спектр акустического сигнала, измеренного в точке РА-В-20 – 2, спектр функции эквивалентного точечного источника – 1, спектр сигнала, измеренного в точке РА-В-10 – 3 и спектр антропогенных шумов, рассчитанный с помощью МПУ с использованием  $S_{source}$  – 4.

судна *Евгений Примаков* в точке S2 (см. рис. 1) в режиме ДП. По акустическим измерениям, проведенным у дна в точке РА-В-20, удаленной от S2 на 500 м, с помощью МПУ строится функция источника, а проверка корректности моделирования проводится сравнением модельных и экспериментальных данных в точке РА-В-10 (см. рис. 2). Расстояние между S2 и РА-В-10 равно 4 км. В результате выполненных расчетов в точке РА-В-10 в режиме ДП модельное значение превышает экспериментальное на 2.4 дБ, а в режиме движения на 1.1 дБ.

В 2017 г. компания *LUODE Consulting* в Финском заливе в море глубиной 60 м [18] провела специальные обмеры акустических шумов, генерируемых судном *Геннадий Невельской*. Натурные измерения были выполнены с помощью вертикальной цепочки из трех гидрофонов, расположенных на расстоянии 3, 18 и 33 м от дна, при этом запись акустических данных осуществлялась на автономные акустические регистраторы с частотой дискретизации 192 кГц. Методика проведения измерений и обработки полученных данных соответствовала стандарту NR 614 DT R00 E [19]. Значения уровня звукового давления  $SPL$  вычислялись посредством усреднения интенсивностей по трем гидрофонам за интервал времени, в течение которого судно проходило расстояние, равное его длине. Сравним представленные в этом документе [18] значения уровня звукового давления, пересчитанного на дистанцию 1 м от акустического центра судна  $SPL$  [дБ, отн. 1 мкПа/м], со значениями  $SPL_{rms}$  для судна *Евгений Примаков*, полученными по нашей методике из спектраль-

ной функции эквивалентного точечного источника, для режима движения судна со скоростью 10 узлов.

Результаты измерений и расчетов для судна *Евгений Примаков*, имеющего тот же класс, что и судно *Геннадий Невельской*, приведены на рис. 3. На этом рисунке видно, что для оценки антропогенных шумов, формируемых на границе прибрежного *Пилтунского* района кормления серых китов новыми судами, движущимися со скоростью 10 узлов вблизи (500 м) 20-метровой изобаты, можно ограничиться частотным диапазоном 10–2000 Гц, поскольку в точке РА-В-20 значение  $SPL_{rms}(10–15000 \text{ Гц}) = 122.6 \text{ дБ}$ , а  $SPL_{rms}(10–2000 \text{ Гц}) = 122.1 \text{ дБ}$ . График спектра, соответствующий эквивалентной точечной функции источника, показан на рис. 3. Этот спектр, пересчитанный с помощью МПУ в приближении нашего 3D геоакустического волновода на расстоянии 1 м, дает значение  $SPL_{rms}(10–2000 \text{ Гц}; z = 7 \text{ м}, y = 0, x = 1 \text{ м}) = 160.2 \text{ дБ}$  отн. 1 мкПа, а согласно работе [18] пересчет шумов, формируемых судном *Геннадий Невельской* при движении со скоростью 10 узлов на дистанции 208 м от точки акустических измерений в море глубиной 60 м, дает на расстоянии 1 м от его акустического центра значение  $SPL_{rms} = 161.2 \text{ дБ}$ . Таким образом, наши измерения хорошо согласуются с результатами измерений, проведенными в более глубоком море и представленными в работе [18].

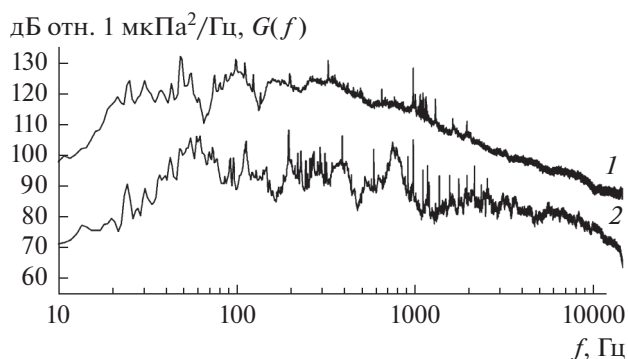


**Рис. 3.** График 1 – спектр функции эквивалентного точечного источника, рассчитанный с помощью МПУ по акустическому сигналу, измеренному в точке РА-В-20. График 3 – его спектр. График 2 – спектр функции эквивалентного точечного источника, пересчитанный с помощью МПУ на расстояние 1 м.

#### СРАВНЕНИЕ УРОВНЕЙ ШУМОВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ БУКСИРАМИ РАЗНОГО ТИПА В РЕЖИМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ

В работе [7] было показано, что уровень шумов, генерируемых судном в режиме ДП, значительно выше, чем когда судно равномерно движется. Поскольку суда продолжительное время работают с платформами именно в этом режиме, то представляют особый интерес натурные акустические измерения шумов, генерируемых судами во время работы с платформами *ПА-Б* и *Моликпак*. На рис. 1 показаны точки S7 и S8, которые расположены вблизи этих платформ. В 2019 г. обмеряемые суда в этих точках продолжительное время работали в режиме ДП, удерживаясь в точке с помощью 2-х кормовых и 2-х носовых винтов. Кроме того, для построения эквивалентных режиму ДП точечных функций источников суда работали в этом режиме в точке S2 (см. рис. 1) и использовался акустический сигнал, измеренный у дна в точке РА-В-20. Проверка моделирования осуществлялась путем сравнения модельных значений  $SEL(\Delta f)$  с измеренными. Например, для акустической трассы “S7–П-0.5–S2–РА-В-20–РА-В-10” такими точками являются РА-В-20 и РА-В-10. В 2013 г. акустические измерения проводились еще и в точке П-0.5, а обмеряемые суда действительно работали с платформой ПА-Б.

На рис. 4 приведены графики спектров акустических шумов, измеренных у дна на расстоянии



**Рис. 4.** График 1 – спектр акустических шумов, генерируемых буксиром *Smit Sakhalin* при работе с платформой *ПА-Б* в режиме ДП, измерения проведены в 2013 г. на расстоянии 550 м от судна в точке Р-0.5, показанной на рис. 1. График 2 – спектр шумов, генерируемых в точке S2 судном *Евгений Примаков* и измеренных в точке РА-В-20.

примерно 500 м от судна. График 1 соответствует антропогенным шумам, генерируемым буксиром *Smit Sakhalin* при работе с платформой ПА-Б в режиме ДП. Измерения были проведены в 2013 г. на расстоянии 500 м от судна в точке Р-0.5, показанной на рис. 1. График 2 – спектр шумов, генерируемых в точке S2 (см. рис. 1) судном *Евгений Примаков*, работающим в режиме ДП. Измерения были проведены в 2019 г. в точке РА-В-20 на расстоянии примерно 500 м от судна.

Для сравнения приведем соответствующие значения  $SPL_{rms}$ , рассчитанные в двух частотных диапазонах 10–15000 и 10–2000 Гц. График 1 –  $SPL_{rms} = 151.1$  и 151.0 дБ отн 1 мкПа. График 2 – 129 и 127 дБ отн 1 мкПа. Таким образом, уровни акустических шумов, формируемых в акватории с глубиной моря 20–30 м дизель-электроходами ледового плавания типа *Евгений Примаков* в режиме динамического позиционирования на 23 дБ меньше, чем от буксиров типа *Smit Sakhalin*.

График оценки спектра антропогенных шумов, формируемых в прибрежном районе судном *Евгений Примаков*, движущимся со скоростью 10 узлов вблизи 20-метровой изобаты в точке S2, представлен на рис. 5 – график 3. Графики 1 и 2 соответствуют спектрам акустических шумов, измеренных в 2013 г. в точке М-1.0 во время движения буксиров *Smit Sakhalin* и *Pacific Endurance* со скоростью 10 узлов на расстоянии 500 м, как это показано на рис. 1. На этом рисунке видно, что обычный буксир *Smit Sakhalin* при движении генерирует низкочастотные широкополосные шумы, которые в диапазоне частот 30–120 Гц по уровню превышают шумы от дизель-электроходов более чем на 20 дБ.

Сравнительный анализ этих измерений показал, что значения уровней  $SPL_{rms}$ , рассчитанных в

двух частотных диапазонах 10–15000 и 10–2000 Гц, соответственно равны М-1.0: 135.1 и 135 дБ отн 1 мкПа; РА-В-20: 127 и 127 дБ отн 1 мкПа. Поскольку дистанции распространения шумов до точки М-1.0 и РА-В-20 примерно равны, то, по-видимому, судно *Евгений Примаков* при таком движении генерирует антропогенные шумы на 7.5 дБ ниже, чем буксир *Smit Sakhalin*. На этом рисунке видно, что широкополосные шумы, генерируемые буксиром, в среднем на 10 дБ выше шумов, генерируемых дизель-электроходом, но следует отметить, что узкополосные шумы с частотами 270, 800 и 1700 Гц на 10–15 дБ превышают шумы буксира.

В спектре шумов, генерируемых буксиром с электродвигателями *Pacific Endurance*, в диапазоне частот 180–300 Гц ярко выражены тональные узкополосные сигналы, которые превышают широкополосные шумы от буксира *Smit Sakhalin*, и их нет в шумовом спектре судна *Евгений Примаков*. В спектре шумов судна *Евгений Примаков* (график 3) практически отсутствуют шумы на частотах меньше 30 Гц, но в отличие от спектра *Pacific Endurance* (график 2) в нем ярко выражены узкополосные квазитональные шумы на частотах 800 и 1800 Гц.

Таким образом, график спектра шумов, генерируемых дизель-электроходами типа *Pacific Endurance*, существенно отличается от соответствующих графиков для судов ледового плавания с электро-двигателями типа *AZIPOD*, расположенными в гондолах [8]. Спектры широкополосных антропогенных шумов, генерируемых судном *Евгением Примаковым* и буксиром *Pacific Endurance*, движущимися со скоростью 10 узлов, подобны в частотном диапазоне 20–1600 Гц, но следует отметить существенные отличия по частоте для генерируемых этими судами узкополосных квазитональных шумов. В спектре шумов, генерируемых дизель-электроходами ледового плавания, нет тональных сигналов в диапазоне 60–300 Гц, но у судна *Евгений Примаков* ярко выражены два пика спектральной плотности мощности на частотах 800 и 1700 Гц, которые по уровню превышают шумы от буксира *Smit Sakhalin*.

Столь существенные различия в уровнях антропогенных шумов, генерируемых рассмотренными судами, объясняются следующим. В четырех новых судах ледового плавания компании “Сахалин Энерджи” применяются электро-двигатели, основанные на винторулевой колонке типа *AZIPOD* – Azimuthing electric Podded Drive, или азимутальный электрический капсульный привод, показанный на рис. 6а [8]. На рисунке видно, что приводной двигатель, который крутит винт, установлен в гондоле, которая вместе с двигателем может вращаться вокруг оси на 360 градусов. И в зависимости от того, куда на данный момент повернута гондола, судно и начнет движение.

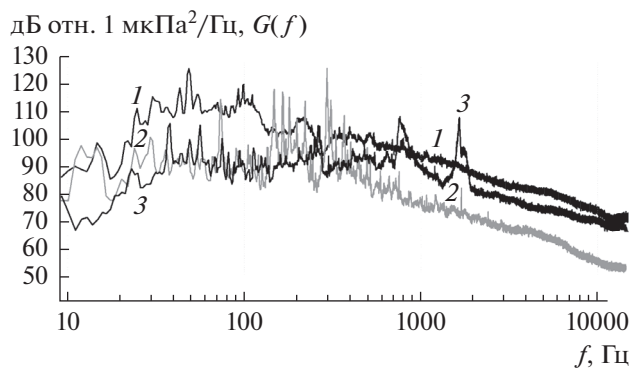
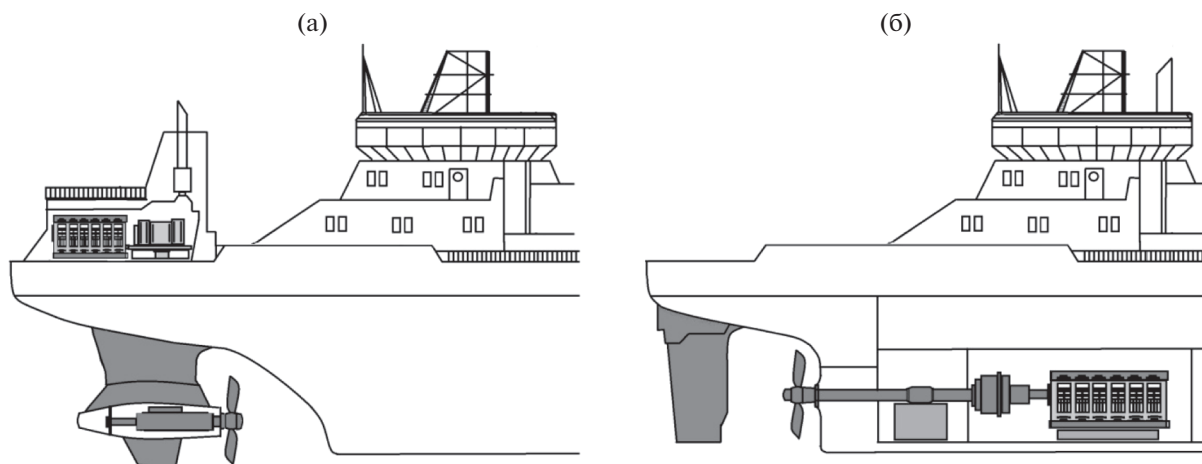


Рис. 5. Графики спектров акустических шумов, измеренных у дна при движении судов со скоростью 10 узлов на расстоянии 500 м от точки измерений. График 1 (*Smit Sakhalin*) и график 2 (*Pacific Endurance*) соответствуют антропогенным шумам, формируемым буксирами в точке М-1.0 во время их движения со скоростью 10 узлов на удалении 500 м согласно схеме, представленной на рис. 1. График 3 соответствует спектру акустических шумов, измеренных в точке мониторинга РА-В-20 во время движения судна *Евгений Примаков* в точке S2 (см. рис. 1) со скоростью 10 узлов.

Обычный судовой руль ограничен в переключке “лево–право” углом в 35 градусов на каждый борт, *AZIPOD* не имеет таких ограничений, поэтому маневры можно совершать в более широком диапазоне. Поскольку для создания крутящего момента гребных винтов в *AZIPOD* используется электрическая тяга, то суда, на которые он устанавливается, можно отнести к дизель-электроходам. На рис. 6б видно, что обычный движитель вращает гребной винт длинным валом, имеющим множество контактов с корпусом и дном судна. В этих точках вибрации вала и дизельного мотора (судовая машина) передаются днищу судна, которое благодаря своим геометрическим размерам и заглублению (более 5 м) эффективно возбуждает в водном слое акустические волны, которые и формируют антропогенные шумы. Вибрации, генерируемые гондолой движителя *AZIPOD*, существенно меньше, поскольку винт вращает электродвигатель с коротким валом и, как видно на рис. 6б, *AZIPOD* тянет, а не толкает.

Движение буксира *Pacific Endurance* обеспечивают два гребных винта, вращающиеся двумя электродвигателями мощностью 7000 кВт каждый, и две винторулевые колонки с 4-х лопастными винтами, а движение буксира *Smit Sakhalin* обеспечивают 4 двигателя мощностью 2739 кВт каждый и два 4-х лопастных винта с регулируемым шагом. Необходимая для движения электроэнергия генерируется на борту *Pacific Endurance* с помощью 4 двигателей мощностью 4320 кВт каждый.

Графики спектров акустических шумов, синхронно измеренных на 20- и 10-метровых изоба-



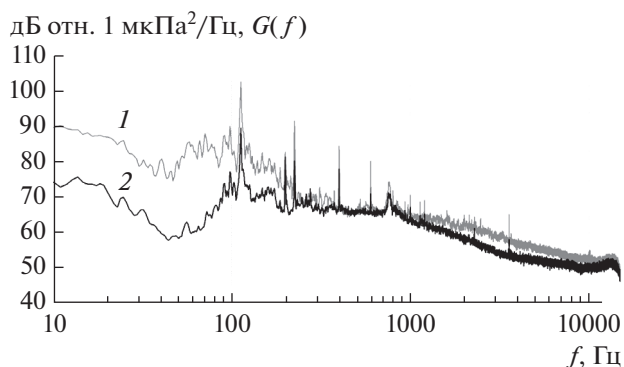
**Рис. 6.** На данном рисунке показано, чем отличается дизель-электроход от обычного судна: (а) — схема судна с азимутальным электрическим капсульным приводом *AZIPOD*, на которой видно, что *AZIPOD* тянет, а не толкает [8]; (б) — схема обычного судна с дизельным двигателем, вращающим гребной винт через длинный вал, имеющий множество контактов с корпусом и дном судна.

тах во время работы судна *Евгений Примаков* в режиме ДП возле платформы ПА-Б в точке S7 (см. рис. 1), представлены на рис. 7.

Измерения, проведенные в 2013 и в 2019 гг. показывают, что новые суда дизель-электроходы, оснащенные движетельной системой *AZIPOD*, во всех режимах генерируют самые низкие уровни антропогенных шумов и, согласно рис. 7, не оказывают существенного влияния на прибрежный *Пильтунский* район кормления серых китов.

#### АКУСТИЧЕСКИЕ ШУМЫ, ФОРМИРУЕМЫЕ СУДАМИ В ПИЛЬТУНСКОМ РАЙОНЕ КОРМЛЕНИЯ СЕРЫХ КИТОВ ПРИ ДВИЖЕНИИ СО СКОРОСТЬЮ 10 УЗЛОВ

Рассмотрим спектры акустических шумов, измеренных у дна в точке акустического монито-



**Рис. 7.** Графики спектров акустических шумов, синхронно измеренных в точках РА-В-20 — кривая 1 и РА-В-10 — кривая 2 во время работы судна *Евгений Примаков* в точке S7 (см. рис. 1) в режиме ДП.

ринга, расположенной на восточной границе прибрежного *Пильтунского* района кормления серых китов РА-В-20 и внутри района на 10-метровой изобате в точке РА-В-10. На рис. 8 для сравнения приведен график 1 — спектр акустических шумов, измеренных в 2013 г. в точке М-1 (см. рис. 1) во время движения буксира *Smit Sakhalin* со скоростью 10 узлов в 500 м от этой точки. Графики 2 и 3 на этом рисунке соответствуют спектрам акустических шумов, синхронно измеренных в точках РА-В-20 и РА-В-10 во время движения дизель-электрохода *Евгений Примаков* со скоростью 10 узлов в точке S2. Расстояние от М-1 до буксира *Smit Sakhalin* на траверзе было равно 500 м. Оно равно расстоянию между точками S2 и РА-В-20. Следовательно, уровень антропогенных широкополосных шумов на частотах меньше 200 Гц на 20–30 дБ меньше у дизель-электрохода *Евгений Примаков*, на более высоких частотах их уровень меньше примерно на 10 дБ, но уровень узкополосных шумов, генерируемых судном *Евгений Примаков* с частотами 800 и 1700 Гц на 10–15 дБ превышает уровень широкополосных шумов, генерируемых буксиром *Smit Sakhalin*.

При распространении от 20-метровой изобаты до 10-метровой (см. рис. 1 и графики 2 и 3 на рис. 8) антропогенные шумов затухают на 30 дБ в частотном диапазоне 30–70 Гц и на 20 дБ в диапазоне 200–10000 Гц

На рис. 9 показаны спектры шумов, измеренных у дна в точке РА-В-20 во время прохода судном *Федор Ушаков* точки S2 со скоростью 10 узлов левым и правым бортом по отношению к точке РА-В-20. На рисунке видно, что графики спектров сливаются, но уровни тональных сигналов

отличаются, что, по-видимому, обусловлено пространственной интерференцией.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Важной задачей данной работы является построение корректных оценок уровней антропогенных акустических шумов, формируемых новыми судами компании “Сахалин Энерджи” в *Пильтунском* прибрежном районе кормления серых китов во время проведения типовых операций, связанных с обеспечением работы платформ *ПА-Б* и *Моликпак*, а также во время движения судов по согласованным маршрутам вблизи 20-метровой изобаты.

При построении спектра точечного источника, формирующего на шельфе антропогенное акустическое поле, эквивалентное полю от движущегося судна, применялась модифицированная методика, представленная в работах [20, 21]. Наша задача сложнее, поскольку надо построить эквивалентный точечный источник для судна, длина которого более чем в два раза больше глубины моря, и конечной целью являлось не получение его эквивалентного шумового спектра, а корректная оценка спектров антропогенных шумов, формируемых данным судном в неоднородном волноводе на дистанциях более 6 км.

Наша методика основана на измерениях акустических шумов от судна, движущегося по треку, перпендикулярно пересекающему акустическую трассу, на которой в двух точках проводятся у дна стационарные измерения вариаций акустического давления. При этом первая точка акустических измерений удалена от трека движения судна на 4–5 длин корпуса судна, а вторая расположена в районе, где требуются оценки антропогенных шумов от этого судна. На рис. 1 это трасса S7–РА-В-10.

В данной работе решена экспериментально-теоретическая задача – построены спектры точечных источников, эквивалентных шумам, генерируемым в данной акватории вспомогательными судами, работающими с платформами *ПА-Б* и *Моликпак*, для корректного оценивания уровней антропогенных шумов, формируемых ими в *Пильтунском* районе нагула серых китов.

Для ее решения на основе предварительных экспериментально-теоретических исследований необходимо построить 3D модельный геоакустический волновод, и тогда пересчет спектра эквивалентного точечного источника в любую точку данного модельного геоакустического волновода не представит сложности. Данная методика была впервые успешно применена в работе [7].

В соответствие с поставленной задачей, опираясь на натурные измерения, с помощью программы на основе МПУ в приближении модель-

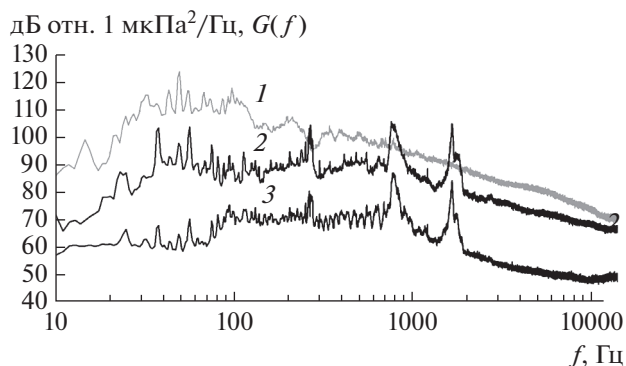


Рис. 8. Спектр, рассчитанный по результатам акустических измерений, проведенных в точке М-1.0 во время прохода ее траверза буксиром *Smit Sakhalin* – график 1 и графики спектров акустических шумов, синхронно измеренных в точке РА-В-20 – график 2 и в точке РА-В-10 – график 3 во время движения дизель-электрохода *Евгений Примаков* в точке S2 со скоростью 10 узлов.

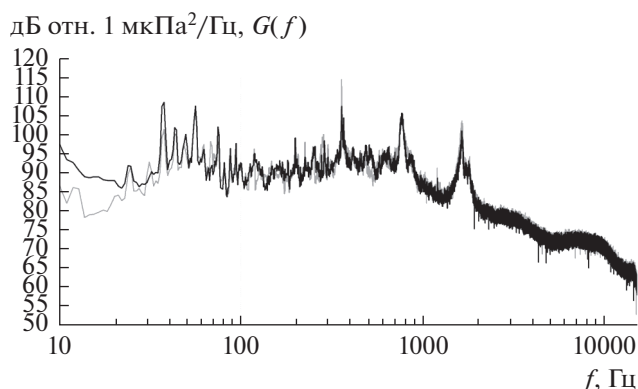


Рис. 9. Спектры акустических шумов, измеренных в точке РА-В-20 во время движения дизель-электрохода *Федор Ушаков* в точке S2 со скоростью 10 узлов левым и правым бортом по отношению к точке РА-В-20, в которой проводились измерения.

ного 3D геоакустического волновода строится эквивалентная точечная функция источника, сформировавшего акустический сигнал, который был измерен в опорной точке. Для построения эквивалентной точечной функции источника выбирается точка, удаленная от судна на 500 м, т.е. наблюдаемый в ней акустический сигнал определяется распространяющимися в сторону берега модами, которые рассчитываются в соответствии с параметрами акустического волновода, простирающегося от точки положения судна в *Пильтунский* прибрежный район кормления серых китов. При построении модельного 3D геоакустического волновода используются результаты многолетних батиметрических измерений, изме-

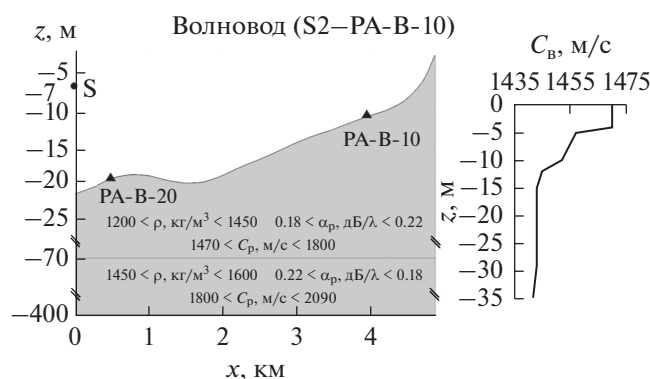


Рис. 10. Модельный геоакустический волновод.

ренные вертикальные профили скорости звука в воде и подобранные акустические параметры слагающих дно пород. Поскольку во время натурального эксперимента акустические измерения проводились в нескольких точках, в том числе на 10-метровой изобате, то представляется возможным в них сравнить экспериментальные и модельные значения спектров и значения уровня воздействия антропогенных шумов на среду  $SEL(\Delta f; z, x, y)$ .

Рассмотрим результаты модельных вычислений. При численном моделировании с помощью МПУ комплексный спектр эквивалентной точечной функции источника пересчитывается в узлы пространственной решетки в модельном 3D геоакустическом волноводе. Мы считаем, что наиболее наглядным интегральным параметром формируемого источником антропогенного акустического поля являются значения акустической экспозиции или энергии –  $SEL(\Delta f)$  на 1 секундном интервале. В этом случае, оно по уровню равно среднеквадратичному значению  $SPL_{rms}(\Delta f)$ , поэтому на графиках будем представлять цветом распределение значений  $SEL_{Is}(\Delta f; z, x, y)$  в вертикальной  $SEL_{Is}(\Delta f; z, x, y = 0)$  и горизонтальной  $SEL_{Is}(\Delta f; z = z_i, x, y)$  плоскостях.

Параметры модельного геоакустического волновода показаны на рис. 10. Считаем, что в волноводе с глубиной 400 м распространяются водные и водно-донные моды. Так, для частоты 10 Гц длина звуковой волны составляет менее 200 м, что

вдвое меньше толщины модельного геоакустического волновода.

На рис. 11а представлено распределение модельных значений  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; z, x, y = 0)$  в вертикальной плоскости при распространении энергии акустических шумов, генерируемых движущимся в точке S2 со скоростью 10 узлов судном *Евгений Примаков* и в горизонтальной плоскости, на горизонте 7 м, значений  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; z = 7 \text{ м}, x, y)$ . На рис. 11 видно, что МПУ в приближении 3 адиабатических мод и “жидкого” дна формирует в водном слое вертикальную интерференционную структуру значений  $SEL_{Is}(\Delta f; z, x, y = 0)$  в виде приповерхностного, срединного и придонного слоев относительно высокой интенсивности.

Рассмотрим результаты численного моделирования, проведенного для судна, работающего в режиме ДП в точке S7, которая расположена в 500 м от платформы *ПА-Б*. Модельные распределения значений  $SEL(10-1000 \text{ Гц})$  в вертикальной и горизонтальной (на горизонте 7 м) плоскостях, представлены на рис. 11б. Результаты моделирования для судна, движущегося со скоростью 10 узлов в точке S5, представлены на рис. 11в. Для сравнения в табл. 1 представлены модельные и экспериментальные значения в точках акустического мониторинга при работе судна в режиме ДП в точке S7.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

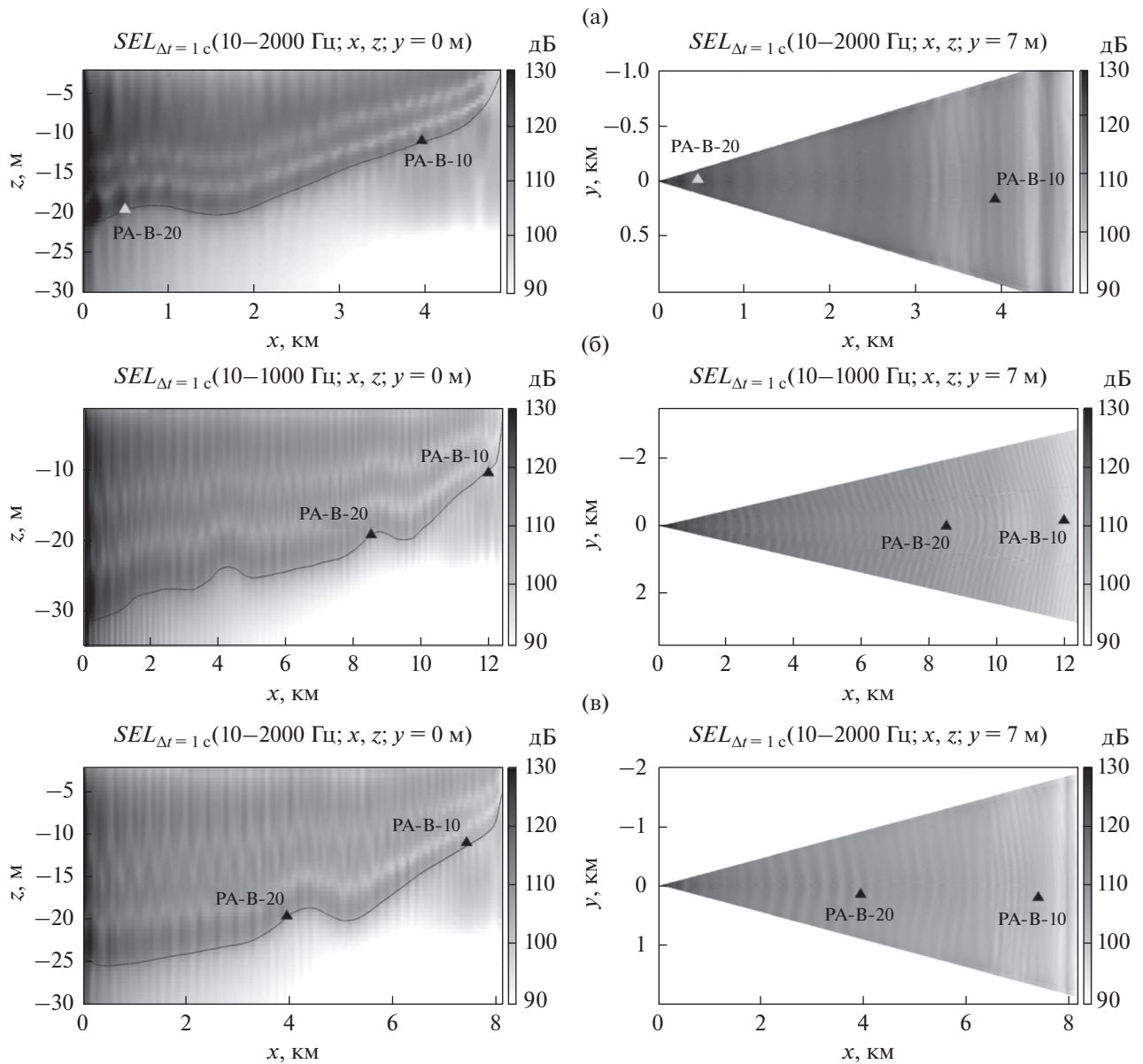
Проведены натурные измерения акустических шумов, формируемых на восточной границе и внутри прибрежного *Пильтунского* района летне-осеннего нагула серых китов, новыми судами дизель-электроходами, работающими в режиме динамического позиционирования возле платформ *ПА-Б* и *Моликпак* и во время их движения со скоростью 10 узлов возле 20-метровой изобаты и около платформы *ПА-Б*.

По результатам специальных измерений, проведенных в 500 м восточной точки акустического мониторинга *РА-В-20*, построены эквивалентные точечные функции источников (судов), соответствующие двум режимам работы судна – динамическому позиционированию и движению со скоростью 10 узлов.

Таблица 1. Значения  $SEL_{Is}(10-1000 \text{ Гц})$

Точка мониторинга	$SEL$ (эксперимент), дБ	$SEL$ (модель), дБ
Одопу-104	97.9	96.4
РА-В-20	107.1	105.5
РА-В-10	98.7	96.9





**Рис. 11.** (а) – Поле значений  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; x, z; y = 0)$  и  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; x, y; z = 7 \text{ м})$  при движении судна со скоростью 10 узлов в точке S2. (б) – Поле значений  $SEL_{Is}(10-1000 \text{ Гц}; x, z; y = 0)$  и  $SEL_{Is}(10-1000 \text{ Гц}; x, y; z = 7 \text{ м})$  при работе судна в режиме ДП в точке S7. (в) – Поле значений  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; x, z; y = 0)$  и  $SEL_{Is}(10-2000 \text{ Гц}; x, y; z = 7 \text{ м})$  во время движения судна со скоростью 10 узлов в точке S5.

Для построенных эквивалентных точечных функций источников с помощью модового параболического уравнения для 3D модельных геоакустических волноводов проведено численное моделирование формируемых в *Пилтунском* районе антропогенных акустических полей данным типом судов ледового плавания дизель-электроходами. Результаты моделирования согласуются с натурными измерениями.

Сравнительный анализ показал, что новые суда ледового плавания дизель-электроходы *Геннадий Невельской*, *Федор Ушаков* и *Евгений Примаков* с

двигателями *AZIPOD*, установленными в подводных гондолах, по сравнению с обычными буксирами типа *Smit Sakhalin* во всех режимах формируют уровни антропогенных шумов в *Пилтунском* районе на 15–30 дБ ниже. Важно, что при работе с платформой в режиме динамического позиционирования, данные суда не формируют в районе кормления китов “заметных” широкополосных шумов, уровни узкополосных тональных шумов на 10-метровой изобате не превышают 95 дБ отн.  $1 \text{ мкПа}^2/\text{Гц}$ .

Решена экспериментально-теоретическая задача — построены спектры точечных источников, эквивалентных шумам, генерируемым в данной акватории вспомогательными судами, работающими с платформами *ПА-Б* и *Моликпак*, позволяющие корректно оценивать уровни антропогенных шумов, формируемых судами в прибрежном *Пильтунском* районе кормления серых китов.

Полученные в работе результаты, безусловно, будут полезны для оценок влияния антропогенных акустических шумов в других районах океанского шельфа.

В заключение, выражаем благодарность компании “*Сахалин Энерджи Инвестмент Компани Лтд.*” и ее сотрудникам и консультантам, без участия которых данная работа не могла быть выполнена. Среди них следует отметить Сергея Виноградова и Сергея Стародымова. Выражаем благодарность компании “*Эксон Нефтегаз Лимитед*” за выделенное судовое время на постановки в море и подъем акустических станций, а также сотрудникам ТОИ ДВО РАН, принявшим активное участие в полевых исследованиях, это Д.Г. Ковзель, С.В. Борисов и В.А. Гриценко.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании “*Сахалин Энерджи Инвестмент Компани Лтд.*”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохин С.А., Язвенко С.Б., Владимиров В.Л., Лагерев С.И.* Численность, распределение и характер поведения серого кита (*Eschrichtius robustus*) на основании авиационных наблюдений на северо-восточном шельфе острова Сахалин летом и осенью 2001 г. // Доклад на конф. Морские млекопитающие в удаленных районах Арктики, 11–13 сентября 2002 г., озеро Байкал, Россия.
2. *Торнева О.Ю., Маминов М.К., Швецов Е.П., Фадеев В.И., Селин Н.И., Яковлев Ю.М.* Сезонные перемещения серых китов (*Eschrichtius robustus*) между кормовыми районами на северо-восточном шельфе о. Сахалин // Морские млекопитающие Голарктики: Сб. науч. трудов 4-ой междунар. конф. Изд. СПб Университета, 2006. С. 530–535.
3. *Владимиров В.А., Стародымов С.П., Афанасьев-Григорьев А.Г., Корниенко М.С.* Распространение и численность серых китов охотско-корейской популяции в водах северо-восточного Сахалина / Исследования водных биологических ресурсов Камчатки и северо-западной части Тихого океана. 2010. № 19. С. 50–64.
4. *Круглов М.В., Рутенко А.Н.* Расчет уровней акустических шумов на границах районов кормления серых китов во время проведения строительных работ на северо-восточном шельфе о. Сахалин / Сборник трудов XI школы-семинара им. академика Л.М. Бреховских “Акустика океана”. М.: ГЕОС, 2006. С. 340–343.
5. *Рутенко А.Н., Гриценко В.А.* Мониторинг антропогенных акустических шумов на шельфе о. Сахалин // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 77–81.
6. *Racca R., Rutenko A., Broker K., Gailey G.* Model based sound level estimation and in-field adjustment for real-time mitigation of behavioral impacts from a seismic survey and post-event evaluation of sound exposure for individual whales // Proceedings of Acoustics 2012. 21–23 November 2012, Fremantle, Australia.
7. *Рутенко А.Н., Ущиповский В.Г.* Оценки акустических шумов, генерируемых вспомогательными судами, работающими с нефтедобывающими платформами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 605–613.
8. *Hganninen S., Heideman T.* Breakthrough in Arctic Shipping // Offshore Technology Conference. OTC Arctic Technology Conference, 23–25 March 2015, Copenhagen, Denmark.
9. *Борисов С.В., Ковзель Д.Г., Рутенко А.Н., Ущиповский В.Г.* Автономная гидроакустическая станция с радиоканалом для акустических измерений на шельфе // Приборы и техника эксперимента. 2008. № 5. С. 132–137.
10. *Рутенко А.Н., Борисов С.В., Ковзель Д.Г., Гриценко В.А.* Радиогидроакустическая станция для мониторинга параметров антропогенных импульсных и шумовых сигналов на шельфе // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 500–511.
11. *Рутенко А.Н.* Натурные и модельные исследования распространения сейсмоакустических сигналов в 3-D геоакустических волноводах с сухопутным участком / Сборник трудов XV школы-семинара им. академика Л.М. Бреховских “Акустика океана”. М.: ГЕОС, 2016. С. 80–83.
12. *Рутенко А.Н., Боровой Д.И., Гриценко В.А., Петров П.С., Ущиповский В.Г., Воекхольт М.* Акустический мониторинг и результаты исследований распространения в прибрежную зону энергии сейсморазведочных импульсов // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 356–369.
13. *Рутенко А.Н., Гаврилевский А.В., Путов В.Ф., Соловьев А.А., Манульчев Д.С.* Мониторинг антропогенных шумов на шельфе о. Сахалин во время сейсморазведочных исследований // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 348–362.
14. *Petrov P.S., Trofimov M.Yu., Zakharenko A.D.* Mode parabolic equations for the modeling of three-dimensional sound propagation effects in shallow water // Proc. 11<sup>th</sup> European Conference on Underwater Acoustics. 2–6 th July 2012, GB Edinburgh. P. 53–60.
15. *Trofimov M.Y., Kozitskiy S.B., Zakharenko A.D.* A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // Wave Motion. 2015. V. 58. P. 42–52.
16. *Манульчев Д.С.* Построение функции источника для 3-D моделирования импульсного акустического поля, формируемого на шельфе излучающим комплексом сейсморазведочного судна / Сборник трудов XV школы-семинара им. академика Л.М. Бреховских “Акустика океана”. М.: ГЕОС, 2016. С. 72–75.

17. *Рутенко А.Н., Фершалов М.Ю., Jenkerson M.R.* 3-D моделирование акустического поля, формируемого на шельфе во время забивки фундаментных свай на берегу / Сборник трудов XV школы-семинара им. академика Л.М. Бреховских “Акустика океана”. М.: ГЕОС, 2016. С. 240–243.
18. Underwater noise Measurements of the Gennadiy Nevelskoy / Doc. No. Luode-25012017-UWN-Gennadiy Nevelskoy-A (2017). 13 p.
19. DNV. Rules of Classification of Ships – Silent Class Notation Det Norske Veritas. Norway. 2010. <http://www.dnv.com>
20. *Bahtiarian M.A.* ASA standard goes underwater // *Acoust. Today*. 2009. V. 5. № 4. P. 26–29.
21. *McKenna M.F., Ross D., Wiggins S.M., Hildebrand J.A.* Underwater radiated noise from modern commercial ships // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. № 1. P. 92–103.

УДК 534.2.532

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАНИЯ ШУМА ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

© 2020 г. С. Л. Денисов<sup>а, \*</sup>, В. Ф. Копьев<sup>а, \*\*</sup>, Н. Н. Остриков<sup>а, \*\*\*</sup>,  
Г. А. Фараносов<sup>а, \*\*\*\*</sup>, С. А. Чернышев<sup>а, \*\*\*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского  
Научно-исследовательский московский комплекс (НИМК ЦАГИ), ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

\*e-mail: stanislav.denisov@tsagi.ru

\*\*e-mail: vkopiev@mktsagi.ru

\*\*\*e-mail: nikolay.ostrikov@tsagi.ru

\*\*\*\*e-mail: georgefalt@rambler.ru

\*\*\*\*\*e-mail: sergey.a.chernyshev@tsagi.ru

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.

После доработки 17.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Представлены результаты расчетно-экспериментального исследования снижения шума струи с помощью эффекта экранирования. Согласно корреляционной теории, источники шума круглой одноконтурной струи представляются набором некоррелированных квадрупольных источников. Используя основные соотношения геометрической теории дифракции (ГТД), получены выражения для звукового поля, излучаемого точечным квадрупольным источником, расположенным вблизи акустически жесткой бесконечной полуплоскости. С помощью полученных в рамках ГТД выражений проведена адаптация корреляционной модели источников шума струи к расчету звукового поля при наличии плоского прямоугольного экрана. Сравнение расчетных и экспериментально измеренных спектров уровней звукового давления, выполненное при заданной скорости истечения струи и различных положениях экрана, показало хорошее качественное, а для определенных углов наблюдения и количественное согласие.

**Ключевые слова:** шум турбулентной струи, корреляционная теория шума струи, дифракция звуковых волн, геометрическая теория дифракции (ГТД), эффективность экранирования

**DOI:** 10.31857/S0320791920050020

### ВВЕДЕНИЕ

Шум турбулентной струи, как известно, является одной из важных составляющих шума современного самолета на местности. На протяжении уже свыше 60 лет он находится в фокусе экспериментальных, теоретических и расчетных исследований. Одним из возможных способов снижения шума струи на местности является его экранирование различными элементами планера самолета. Вместе с тем, несмотря на значительную историю, теоретическое описание экранирования шума струи далеко от завершения.

Задача экранирования шума струи имеет длительную историю, берущую свое начало в 70-х годах XX-го века. Первые расчетно-экспериментальные исследования экранирования шума струи были выполнены в работах [1–3], в которых так-

же были предложены упрощенные расчетные модели для описания самого шума струи. Так, струя, как источник звука, представлялась в виде набора распределенных вдоль оси монополей, или в виде расположенного на срезе сопла точечного источника с диаграммой направленности, соответствующей излучению струи в дальнем поле. Дифракция звука, излучаемого такими источниками, рассчитывалась с помощью метода Маекавы [4] или решения Макдональда для полуплоскости [5]. Результаты данных исследований, выполненные для одноконтурных турбореактивных двигателей и двигателей с малой степенью двухконтурности, продемонстрировали чрезвычайно высокий потенциал снижения шума струи с помощью эффекта экранирования, что послужило толчком к проработке новых компоновочных схем для самолетов нового поколения, в которых эффект

экранирования мог бы быть реализован в полной мере.

Однако активное совершенствование конструкции турбореактивных двигателей (переход на двигатели большой и сверхбольшой степени двухконтурности, применение звукопоглощающих конструкций и проч.) привело к тому, что интерес к исследованию эффекта экранирования шума струи существенно снизился. Тем не менее, когда в начале XXI века требования по снижению шума самолетов на местности начали ужесточаться, а резервы для дальнейшего снижения шума современных двухконтурных двигателей стали уменьшаться, снижение шума с помощью эффекта экранирования снова стало актуальной научно-исследовательской и конструкторской задачей.

Выполненные в последнее время экспериментальные исследования продемонстрировали существенно меньшую эффективность экранирования шума струи [6–10], чем предсказывали ранние расчеты, проведенные на основе методов, разработанных в [1–3]. Детальный анализ показал, что причиной расхождения экспериментальных и теоретически предсказанных результатов является не только использование упрощенных методов расчета дифракции звука [11, 9] и учет свойства некомпактности источника звука [9, 10], но и применение грубых моделей, описывающих турбулентную струю как источник шума [12].

На данный момент нет общепринятого ответа на вопрос о том, какая часть турбулентности отвечает непосредственно за излучение звука струей, что и обуславливает большое разнообразие моделей шума струи. В работах рассматриваются модели источников шума, связанные с различными их представлениями и механизмами аэродинамической генерации: мелкомасштабной турбулентностью [13–19], волнами неустойчивости [19, 20], собственными колебаниями крупномасштабных вихрей [21–23], рождением вихревых структур [24–26] и др. Эти теории в том или ином виде использовались также и в приложении к задаче экранирования шума турбулентных струй [27–47].

Одной из первых работ по расчетной оценке эффекта экранирования шума струи стала работа [27], в которой источники шума струи описывались на основе акустической аналогии Лайтхилла [28], а для описания экранирования рассматривался экран конечных размеров. В данной работе применялся гибридный подход: предполагалось, что струя находится в бесконечном пространстве, в котором отсутствует экран, а расчет экранирования излучаемого струей шума осуществлялся с помощью метода Маекавы [4] путем разбиения струи на излучающие звук объемы малых размеров. Однако в то время для надежного использо-

вания подобного подхода было недостаточно информации о корреляционных свойствах источника.

В работах [29–34], исходя из представлений о шуме струи как шуме волн неустойчивости, был проведен расчет эффективности экранирования с помощью метода граничных элементов [35], а форма и параметры волновых пакетов определялись на основе подгонки под экспериментальные данные, полученные для шума изолированной струи в дальнем поле. Проведенное сравнение расчетных и экспериментальных данных излучаемого волновыми пакетами шума продемонстрировало хорошее качественное, а при определенных скоростях истечения струи и количественное совпадение. Однако эта расчетная модель продемонстрировала высокую чувствительность к форме и параметрам волнового пакета, что делает модель крайне зависимой от заложенных в нее параметров.

В работах [36–41] проводилось исследование шума, излучаемого при взаимодействии ближнего гидродинамического поля волн неустойчивости с кромкой экранирующей поверхности. При этом в работах [36–41] волны неустойчивости моделировались с помощью тензора напряжений Рейнольдса, параметры которого подбирались из условия совпадения с экспериментом в дальнем поле, а в [42–44] моделировались непосредственно пульсации давления в ближнем поле, свойства которых определялись на основании теории гидродинамической устойчивости для слоя смешения и данных эксперимента. Было показано, что такое взаимодействие приводит к возникновению звукового поля, интенсивность которого экспоненциально зависит от расстояния между плоскостью экрана и слоем смешения струи. Особенностью данного поля является его симметричность относительно экранирующей поверхности, т.е. оно присутствует также в зоне тени, и, при близком расположении струи и экрана, может нивелировать эффект экранирования в области низких и средних частот.

Изучению взаимодействия шума струи с экранами различного типа посвящены работы [45–47], в которых в приложении к задачам экранирования развивалась теория мелкомасштабной турбулентности. В статье [45] рассматривалось экранирование шума бесконечной полуплоскостью, а в работе [47] было рассмотрено влияние скоса задней кромки крыла на снижение шума, причем расчет в обоих случаях осуществлялся на основании точного решения Макдональда [5]. При этом с целью учета эффекта низкочастотного усиления шума, описанного в [36–44], в исходную модель [15] были добавлены волны, экспоненциально затухающие по радиальной координате, амплитуды и фазовые скорости которых определялись из численного моделирования. Сравнение экспери-

ментальных и расчетных данных показало хорошее количественное соответствие для низкочастотного усиления, однако для эффекта экранирования в области высоких частот соответствие было скорее качественным, чем количественным.

Из числа работ, посвященных прямому расчету шума струи в присутствии экранирующих поверхностей, следует обратить внимание на работу [48], где был выполнен расчет шума круглой двухконтурной струи, расположенной вблизи крыла. Сравнение расчетных и экспериментальных спектров шума продемонстрировало приемлемое согласие, однако значительные вычислительные мощности, необходимые в данном случае, ограничивают область применения вихреразрешающих численных методов в задачах расчета эффективности экранирования.

В целом, анализ работ, посвященных исследованию экранирования шума струи, свидетельствует, что точность расчета эффективности экранирования существенно зависит как от качества моделей, описывающих шум струи, так и от точности используемых методов расчета дифракции звука. При этом к настоящему времени отсутствуют модели для расчетной оценки эффективности экранирования шума струи, которые, с одной стороны, являлись бы сравнительно простыми и универсальными, а с другой — обеспечили приемлемую точность расчета.

В настоящей работе для описания процесса звукового излучения турбулентной струей используется корреляционная модель источников шума, разработанная в [24–26]. В этой модели генерация возмущений описывается случайным полем с некоторой эмпирической пространственно-временной корреляционной функцией. В качестве основной стохастической переменной используется интенсивность генерации турбулентных возмущений. Это дает возможность, в отличие от прямого стохастического моделирования интенсивности турбулентных пульсаций [29–31], свести звуковые источники к локальным процессам с малым пространственным масштабом, исключив конвекцию источников из корреляционной функции, и минимизировать неопределенность, связанную с эмпирическим моделированием характеристик случайного поля источников. Этот подход в совокупности с выбором квадрупольного типа источников дает возможность построить простую и эффективную модель, позволяющую предсказывать не только мощность звукового излучения струи, но и фазовые характеристики акустического поля, что необходимо для анализа взаимодействия шума струи с расположенными вблизи нее твердыми поверхностями.

Поскольку источники авиационного шума располагаются в непосредственной близости к экранирующей поверхности и являются акусти-

чески некомпактными (как, например, реактивная струя), то для корректного описания дифракции звука необходимо, чтобы метод расчета дифракции, применяемый для определения эффективности экранирования, достаточно точно описывал как амплитудные, так и фазовые характеристики дифрагированного поля [9, 10]. Так как точные аналитические решения дифракционной задачи для рассматриваемых в приложениях геометрий экранов отсутствуют, то при расчете экранирования шума необходимо рассматривать приближенные методы теории дифракции, позволяющие описать в том числе распределение звукового поля в различных точках наблюдения при экранировании шума, излучаемого некомпактными источниками. Ниже рассмотрены основные подходы, используемые в таких задачах и их сравнительные достоинства и недостатки.

Применение приближения физической оптики, основанного на методе Кирхгофа [49], к задаче дифракции звука на бесконечной полуплоскости показывает, что при расчете функции Грина имеется значительное отклонение амплитудно-фазовых характеристик от точного решения, что, в свою очередь, приводит к существенным качественным отклонениям при расчете дифракции звука от некомпактного источника на частотах, характерных для авиационных приложений [50]. В то же время модификация этого метода применительно к конечным экранам позволяет увеличить точность вычисления фазовых характеристик в зоне глубокой тени для монопольного источника, что, однако, требует значительных вычислительных затрат. Отметим также, что для некомпактных источников звука проблема точности расчета дифракционной картины сохраняется. Поэтому часто используется либо высокочастотное приближение метода Кирхгофа—метод Маекавы [4], либо теория дифракции Рубиновича—Магги [49].

Метод Маекавы, базирующийся на приближении Френеля [49], справедлив при описании дифракции звука только в случае достаточно высоких частот и акустически компактных источников, расположенных на большом расстоянии от экрана, поскольку предполагает, что фазовые фронты падающих на экран волн близки к плоским волнам. В теории Рубиновича—Магги точность расчета амплитудно-фазовых характеристик поля в зоне полутени и в зоне глубокой тени существенно выше, чем при расчете с помощью метода Маекавы, более того, этот метод допускает обобщение на случай экранов сложной формы [51, 52], однако условие достаточно высоких частот и акустической компактности источника требуется и в этом случае.

Использование численных методов расчета экранирования, как правило, ограничивается различными вариантами метода граничных эле-

ментов [35] или разрывного метода Галеркина [53]. Применение этих методов к решению прикладных задач для натуральных объектов сталкивается с необходимостью использования значительных вычислительных ресурсов, что крайне затрудняет решение оптимизационных задач. Достаточно часто в прикладных задачах расчета экранирования точечных источников или шума струи используют решение Макдональда [5], являющееся точным решением для случая дифракции звука на бесконечной полуплоскости. Несмотря на его прозрачный физический смысл и математическую простоту, главным недостатком этого метода является сложность при обобщении на случай экранов произвольной формы (например, полигональных экранов), что снижает его практическую применимость.

Метод геометрической теории дифракции (ГТД) [54–57], описывающий дифракцию волн в предположениях, что расстояние от источника и от точки наблюдения до препятствия много больше длины волны, удобен для описания экранирования шума плоскими полигональными экранами [9, 58]. Сравнение результатов, полученных в рамках ГТД, с точным решением для случая дифракции звука на бесконечной полуплоскости [9, 50], продемонстрировало высокую точность расчета как амплитудных, так и фазовых характеристик дифрагированного поля для частот и геометрических параметров, характерных для авиационных приложений [9]. Более того, проведенные расчеты показали, что ГТД дает удовлетворительное согласие с точным решением в случаях относительно небольших значений  $kR$  ( $kR > 2$ ), где  $k$  – волновое число,  $R$  – расстояние от источника до кромки экрана, т.е. при достаточно близком расположении источника и экрана, но при условии, что точка наблюдения расположена на расстояниях много больше длины волны [9, 50]. Кроме этого, ГТД может быть относительно просто обобщена на случай дифракции волн при наличии однородного спутного потока [10]. В совокупности указанные выше особенности показывают, что ГТД может быть применена к задаче экранирования шума турбулентной струи как в случае натуральных параметров, так и для описания результатов испытаний на маломасштабных моделях. Именно этот метод расчета дифракционного поля выбран в настоящей работе.

В настоящей работе рассматривается приложение корреляционной теории к задаче расчета эффективности экранирования шума турбулентной струи прямоугольным экраном с помощью ГТД. В первом разделе представлены основные положения корреляционной теории шума турбулентной струи, необходимые для проведения дальнейших расчетов эффективности экранирования. Поскольку изначально ГТД развивалась для случая дифракции звука, излучаемого точеч-

ными монополярными источниками, в то время как в рамках корреляционной теории излучение звука описывается квадрупольными источниками, во втором разделе выполнено обобщение ГТД на случай генерации шума точечными квадрупольными источниками. Заметим, что обсуждение выражений для дифракции электромагнитных волн на бесконечной полуплоскости, излучаемых точечными диполями, представлено в [59].

В третьем разделе приведено описание эксперимента, в котором исследовался эффект экранирования шума турбулентной струи, а также дано описание расчетной модели, построенной на основе корреляционной теории и ГТД. В четвертом разделе проводится сравнение экспериментальных и расчетных данных для спектров шума турбулентной струи при различных положениях экрана и заданной скорости истечения струи. В пятом разделе представлен пример расчета эффективности экранирования шума круглой струи плоским прямоугольным экраном, и в последнем разделе работы представлены выводы к полученным результатам.

В целом, настоящая работа является этапом в адаптации низкоуровневой модели источников шума струи к задачам экранирования, направленных на проведение быстрых и эффективных оценок в ходе поисковых исследований по снижению шума турбулентных струй с помощью эффекта экранирования.

## 1. ГЕНЕРАЦИЯ ШУМА СЛУЧАЙНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ КВАДРУПОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В СТРУЕ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Ниже рассмотрены необходимые в дальнейшем основные положения корреляционной модели источников шума в турбулентной струе. В этой работе используется вариант корреляционной модели, в котором не учитывается эффект рефракции звуковых волн на среднем поле струи [24–26]. Это дает возможность сравнительно просто обобщить модель на случай взаимодействия звукового излучения струи с отражающими поверхностями. В этом варианте модели распространение звуковых возмущений описывается с помощью простого волнового оператора на основе акустической аналогии Лайтхилла [28]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial r^i \partial r^j}, \quad (1)$$

где  $p$  – возмущение давления,  $c_0$  – скорость звука,  $T^{ij}$  – нестационарная часть тензора напряжений Рейнольдса  $\rho v^i v^j$ . Выполнив преобразование

Фурье уравнения (1) по временной переменной, получим неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 p + k^2 p = \frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial r^i \partial r^j}, \quad (2)$$

где  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $\omega$  – частота звукового поля.

Решение уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)}{\partial r^i \partial r^j} T^{ij}(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' = \int G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) T^{ij}(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (3)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – функция Грина рассматриваемой краевой задачи, а  $G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – ее вторые производные, вычисленные по координатам точки наблюдения. Для случая свободного пространства выражения для функции Грина уравнения Гельмгольца  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  и ее второй производной  $G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  имеют вид:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4)$$

$$G_0^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{3 \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \times \left( 1 - ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \frac{(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2}{3} \right) (x_i - x'_i)(x_j - x'_j). \quad (5)$$

Необходимо отметить, что в общем случае выражение для функции Грина зависит от геометрии задачи и применительно к задаче дифракции звука на бесконечной полуплоскости будет рассмотрено далее.

Нестационарная часть тензора напряжений Рейнольдса  $T^{ij}$  описывает источники звука в уравнении (2). В рамках подхода, обычно используемого в корреляционных моделях [13–15], плотность источников представляется как стохастическое поле, которое описывается некоторой корреляционной функцией. В случае квадрупольных источников случайными полями должна описываться каждая из компонент квадруполя  $T^{ij}(\mathbf{r}, t)$ . Однако более удобным является представление источников в виде разложения по базисным квадруполям:

$$T^{ij}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^6 D_n^{ij} \xi_n(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

где  $\xi_n$  – стационарные случайные поля с заданными корреляционными характеристиками, базисные квадруполи  $D_n^{ij}$  выбираются таким обра-

зом, что  $\xi_n$  для разных  $n$  являются статистически независимыми [24–26].

Вследствие симметричности тензора  $T^{ij}$  в сумму (6) должны входить 6 членов. В качестве базисных выбираются квадруполь вида  $D_n^{ij} = \delta^{ij}$ , где  $\delta^{ij}$  – символ Кронекера, и 5 квадруполей с нулевым следом:

$$D_2^{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_3^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_5^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$D_6^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадруполи (7) характеризуются тем, что их свертки с функцией Грина (5) представляют собой отдельные азимутальные гармоники в цилиндрической системе координат с осью  $x$ , совпадающей с направлением истечения струи, причем квадруполи  $D_1^{ij}$  и  $D_2^{ij}$  соответствует нулевой азимутальной гармонике, квадруполи  $D_3^{ij}$  и  $D_4^{ij}$  – первой азимутальной гармонике, а  $D_5^{ij}$  и  $D_6^{ij}$  – второй азимутальной гармонике.

Используя уравнения (3), (6), а также условие статистической независимости для  $\xi_n$ , получим выражение для спектра звукового давления:

$$\Phi_p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=1}^6 \int D_n^{ij} G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) D_n^{kl} G^{kl*} \times \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \omega) \Phi_{\xi_n}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \quad (8)$$

где  $\Phi_{\xi_n}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega)$  – функция взаимной спектральной плотности случайного поля  $\xi_n$ , верхний индекс \* обозначает комплексное сопряжение, а интегрирование проводится по объему, занятому струей.

Для описания характеристик источников звука используется преобразование случайных полей  $\xi(\mathbf{r}, t)$ , описывающих интенсивность турбулентных пульсаций, к переменным  $\eta(\mathbf{r}, t)$ , описывающим интенсивность генерации пульсаций [16, 24–26]. Это преобразование задается уравнением Ланжевена:

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi + U \frac{\partial}{\partial x} \xi + \varepsilon \xi = \eta, \quad (9)$$

где  $U$  – скорость конвекции источников,  $x$  – продольная координата,  $\varepsilon(x)$  – скорость затухания



возмущений. Переход к новой переменной позволяет исключить конвекцию из корреляционных характеристик источников, что позволяет разделить пространственную и временную корреляцию.

Корреляционная функция генерации возмущений  $\eta(\mathbf{r}, t)$  выбирается в следующем виде:

$$R_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \tau) = A(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^2}{2l_0^2} - \frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right). \quad (10)$$

Отсюда следует выражение для взаимного спектра:

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) &= \\ &= \sqrt{2\pi\sigma} A(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^2}{2l_0^2} - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Оценки корреляционной длины  $l_0$  дают значения, существенно меньшие по сравнению с другими характерными размерами задачи. В этом случае выражение (11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) &= \\ &= 4\pi^2\sigma A(\mathbf{r}') l_0^3 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта-функция.

В модели источников звука мы пренебрегаем распределением источников по сечению струи и сносим эти источники на ось струи. Это приближение может быть принято, поскольку рефракция звуковых волн на среднем течении струи не учитывается, а рассматриваемый диапазон частот соответствует длине звуковой волны, большей, чем диаметр сечения струи. В этом случае корреляционная функция и взаимный спектр определяются для источников, распределенных на оси струи:

$$R_\eta(x', x'', \tau) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} A(x') l_0^3 \delta(x' - x'') \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(x', x'', \omega) &= \\ &= 4\pi^2\sigma A(x') l_0^3 \delta(x' - x'') \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

При этом 2-кратный интеграл по объему (8) сводится к интегралу по продольной координате, что существенно упрощает вычисления.

В соответствии с (9) корреляционная функция турбулентных пульсаций определяется уравнением:

$$\begin{aligned} R_\xi(x_1, x_2, \tau) &= \int H(x_2 - x'', \tau) \times \\ &\times H^*(x_1 - x', \tau) R_\eta(x', x'', \tau) dx' dx'', \end{aligned} \quad (15)$$

где  $H(x, \tau)$  – функция Грина уравнения Ланжевена (9):

$$H(x, \tau) = \frac{1}{U} \delta(x - U\tau) \exp(-\varepsilon\tau) \theta(\tau). \quad (16)$$

Пренебрегая зависимостью мощности процесса  $A(x)$  от продольной координаты  $x$ , в локально-однородном приближении получим:

$$\begin{aligned} R_\xi(x_1, x_2, \tau) &= \sqrt{2\pi} \frac{Al_0^3}{2\varepsilon U} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x_2 - x_1 - U\tau)^2}{2U^2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{U}|x_2 - x_1|\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Функциональный вид выражения (17) соответствует эмпирической корреляционной функции источников звука в струе, обычно используемой в корреляционных моделях [13–15]. Это служит основанием для выбора корреляционной функции генерации возмущений  $\eta(\mathbf{r}, t)$  в виде (10).

Взаимный спектр турбулентных пульсаций определяется уравнением

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(x_1, x_2, \omega) &= \int \hat{H}(x_2 - x'', \omega) \times \\ &\times \hat{H}^*(x_1 - x', \omega) \Phi_\eta(x', x'', \omega) dx' dx'', \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\hat{H}(x, x_0, \omega) = \int \exp(-i\omega\tau) H(x, x_0, \tau) d\tau$ .

В результате получим следующее выражение для спектра звукового давления:

$$\begin{aligned} \Phi_p(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{n=1}^6 \int D_n^{ij} G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \omega) \times \\ &\times D_n^{kl} G^{kl*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \hat{H}(x_2, x'', \omega) \times \\ &\times \hat{H}^*(x_1, x', \omega) \Phi_\eta(x', x'', \omega) dx' dx'' dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Главным преимуществом выражения (19) является явная зависимость от функции Грина, что позволяет использовать его не только для расчета распространения излучаемого струей шума в свободном пространстве, но и при наличии различных отражающих и/или экранирующих поверхностей.

Предложенная модель была валидирована в работах [24–26] на основе экспериментальных данных, полученных с помощью метода азимутальной декомпозиции, разработанного специально для разделения различных азимутальных гармоник звукового поля. В работе [26] показано, что данная модель позволяет с высокой степенью точности вычислять характеристики шума струи под большими углами к оси струи. Однако для малых углов наблюдения, близких к оси струи, точность расчетов снижается, что связано с эффектом рефракции акустического излучения на среднем течении струи, который не учитывается в этой модели.

## 2. ОБОБЩЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА СЛУЧАЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ТОЧЕЧНЫМ КВАДРУПОЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Использование выражения (19) для расчета дифракции звукового поля, генерируемого струей, требует вычисления вторых производных функции Грина  $G^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  по пространственным координатам местоположения монопольного источника звука применительно к задаче дифракции на полигональных экранах при наличии потока. В настоящей работе для расчета эффективности экранирования полигональными экранами применяется приближенный метод ГТД, и, тем самым, необходимо получить вторые производные для функции Грина, вычисляемой по этому методу, причем в качестве канонической задачи теории дифракции целесообразно использовать задачу дифракции на бесконечной полуплоскости.

Рассмотрим задачу построения функции Грина для дифракции звука, излучаемого точечным квадрупольным источником на бесконечной полуплоскости. Как известно [54–56], в рамках ГТД функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  для дифракции точечного монопольного источника на акустически абсолютно жесткой полуплоскости представляется в следующем виде:

$$G_{\text{total}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = G_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \quad (20)$$

где  $G_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – геометроакустическое поле для точечного монопольного источника, а  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – дифрагированное поле для точечного монопольного источника.

Тогда для геометроакустического поля  $G_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  точечного монопольного источника справедливо следующее выражение:

$$G_G(\mathbf{R}_{\text{obs}}, \mathbf{r}, k) = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_s|)}{4\pi|\mathbf{R}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_s|} \Theta(|\mathbf{R}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_s|), \quad (21)$$

где  $A$  – начальная амплитуда поля,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $\mathbf{R}_{\text{obs}}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}_s$  – радиус-вектор источника,  $\Theta(z)$  – ступенчатая функция Хэвисайда, равная нулю, если точка наблюдения располагается в зоне геометрической тени, и единице в противоположном случае.

Для дифрагированного поля  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  точечного монопольного источника справедливо следующее выражение [53–55]:

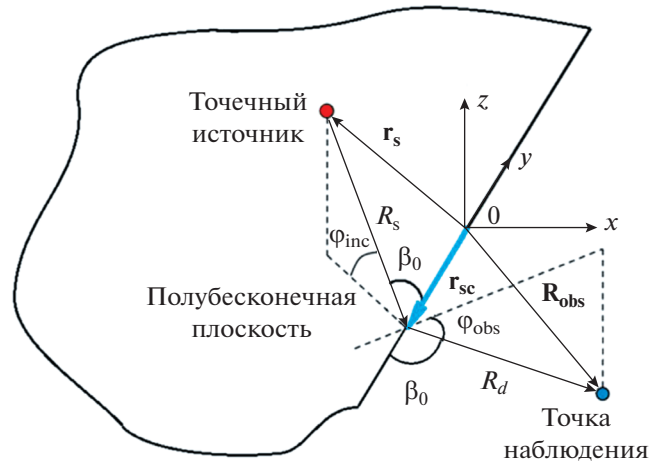


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции звука на бесконечной полуплоскости.

$$G_D(\mathbf{R}_{\text{obs}}, \mathbf{r}_s, k) = A \frac{\exp(ik(R_{\text{sc}} + R_d))}{4\pi R_{\text{sc}}} \times \sqrt{\frac{R_{\text{sc}}}{R_d(R_{\text{sc}} + R_d)}} D_{\text{coeff}}, \quad (22)$$

$$R_{\text{sc}} = |\mathbf{r}_{\text{sc}} - \mathbf{r}_s|, \quad R_d = |\mathbf{R}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_{\text{sc}}|,$$

где  $A$  – начальная амплитуда поля,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $\mathbf{r}_{\text{sc}}$  – радиус-вектор точки рассеяния,  $R_{\text{sc}}$  – расстояние от источника до точки рассеяния,  $R_d$  – расстояние от точки рассеяния до точки наблюдения,  $D_{\text{coeff}}$  – дифракционный коэффициент, определяемый из решения канонической задачи дифракции.

При дифракции на бесконечной полуплоскости дифракционный коэффициент имеет вид [55]:

$$D_{\text{coeff}} = \frac{-\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \left( \sum_{m=1}^4 F(p_m) \text{ctg}(\theta_m) \right), \quad (23)$$

$$\theta_m = \frac{\pi \pm \beta_m^\mp}{4}, \quad \beta_m^\mp = \varphi_{\text{obs}} \mp \varphi_{\text{inc}}, \quad m = 1 \dots 4,$$

где  $\varphi_{\text{obs}}$  – угол наблюдения относительно рассеивающей грани и  $\varphi_{\text{inc}}$  – угол падения звуковой волны на рассеивающую грань,  $\beta_0$  – угол рассеяния звуковой волны (рис. 1). Функции  $F(p_m)$  выражаются через интегралы Френеля в следующем виде [54]:

$$F(p_m) = 2i\sqrt{p_m} \exp(ip_m) \int_{\sqrt{p_m}}^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}u^2\right) du,$$

$$p_m = \frac{2kR_{\text{sc}}R_d}{R_{\text{sc}} + R_d} \sin^2(\beta_0) \cos^2(\chi_m), \quad (24)$$

$$\chi_m = \frac{(2\pi \mp \beta_m^\mp)}{2}.$$

С учетом (2), (3) и (20) выражение для полного звукового поля квадруполь при наличии экрана записывается в виде свертки с базисными квадрупольями:

$$\frac{\partial^2 G_{\text{total}}}{\partial r_s^i \partial r_s^j} D_n^{ij} = \frac{\partial^2 G_G}{\partial r_s^i \partial r_s^j} D_n^{ij} + \frac{\partial^2 G_D}{\partial r_s^i \partial r_s^j} D_n^{ij}, \quad (25)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n = 1 \dots 6,$$

где  $D_n^{ij}$  –  $n$ -ый базисный квадруполь, а дифференцирование производится по координатам точки источника (в выражении (25) учитывается, что базисный квадруполь не зависит от расположения источника).

Выражение для второй производной от геоакустического поля по координатам источника полностью аналогично выражению (5), а выражение для второй производной от дифрагированного поля имеет вид:

$$\frac{\partial^2 G_D}{\partial r_s^i \partial r_s^j} D_n^{ij} = A \frac{\exp(ikR_d)}{4\pi} \times \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_s^i \partial r_s^j} \left( \frac{\exp(ikR_{sc})}{R_{sc}} \sqrt{\frac{R_{sc}}{R_d(R_{sc} + R_d)}} D_{\text{coeff}} \right) D_n^{ij} \right], \quad (26)$$

причем при вычислении второй производной необходимо учитывать, что угол падения  $\varphi_{\text{inc}}$  и расстояние от источника до точки рассеяния  $R_{sc}$  явно зависят от местоположения источника, а расстояние от точки рассеяния до точки наблюдения  $R_d$  и угол наблюдения  $\varphi_{\text{obs}}$  нет.

Тогда, выполнив двукратное дифференцирование выражения (26) как сложной функции от  $\mathbf{r}_s$  с учетом выражений (23) и (24) для дифракционного коэффициента, получим необходимые соотношения для расчета звукового поля, излучаемого точечным квадрупольным источником при наличии бесконечной акустически жесткой полуплоскости. Выражения (5), (25) и (26) совместно с выражением (19) решают задачу вычисления спектра звукового давления для шума струи в произвольной точке наблюдения при наличии полубесконечного экрана.

С учетом сделанных выше предположений о малом влиянии вторично дифрагированных волн, а также волн, рассеянных углами экрана [59], выражения (5), (25) и (26) путем непосредственного применения к каждой стороне экрана обобщаются на случай прямоугольного бесконечно тонкого акустически жесткого экрана.

Сравнение полученных выражений со случаем дифракции звука, излучаемого четырьмя точечными монопольными источниками, показала, что для всех положений экрана в рассматриваемом диапазоне частот (см. ниже) относительная ошибка между вычисленными значениями зву-

кового поля в различных точках наблюдения составляет не более 0.005%.

Сделаем некоторые замечания относительно возможности пренебрежения вкладом волн вторичной дифракции и волн, рассеянных вершинами экрана. Хорошо известно [51, 54, 56], что если экран целиком закрывает первую зону Френеля или рассеивающая грань экрана не содержит резких изменений геометрии формы, таких как углы или вершины, то в первом случае можно пренебречь вкладом вторичных волн, а во втором – вкладом волн, рассеянных углами и вершинами. Таким образом, для корректного использования полученных выражений продольный и поперечный размеры экрана должны быть больше, чем характерный размер первой зоны Френеля для всех частот, для которых проводится расчет.

### 3. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКРАНИРОВАНИЯ ШУМА КРУГЛОЙ ОДНОКОНТУРНОЙ СТРУИ

Экспериментальные исследования экранирования шума струи проводились в заглушенной камере с потоком АК-2 ЦАГИ, входящей в состав стенда АС-1. На рис. 2 представлена фотография, а на рис. 3 схема экспериментальной установки для исследования экранирования шума круглой одноконтурной струи. В качестве объекта исследований было выбрано круглое одноконтурное сопло диаметром  $D = 39.5$  мм, причем внутренние обводы канала сопла выполнены в соответствии с профилем Витошинского, что обеспечивает равномерный поток на срезе сопла. Для измерения шума струи использовалась полярная решетка микрофонов радиусом  $R = 2$  м (рис. 3), состоящая из десяти преполяризованных  $\frac{1}{2}$ -дюймовых микрофонов фирмы Bruel&Kjaer типа 4189 с предусилителем. Динамический диапазон микрофонов составлял 14.6–146 дБ, а частотный диапазон от 6.3 Гц до 25 кГц.

В качестве экрана использовалась устанавливавшаяся вблизи среза сопла прямоугольная стальная пластина размером  $1300 \times 450 \times 4.2$  мм, которая могла перемещаться в плоскости, перпендикулярной плоскости расположения микрофонов, что позволяло проводить измерения, изменяя область геометрической тени для различных микрофонов. Исследования экранирования шума одноконтурной струи были выполнены для трех различных скоростей истечения струи (173, 233, 273 м/с) и при двух положениях экрана относительно среза сопла: положение № 1 –  $x = 2D$ ,  $z = 2D$ , и положение № 2 –  $x = 2D$ ,  $z = 3D$ .

Расчет экранирования шума круглой одноконтурной струи прямоугольным экраном проводился

для набора точечных квадрупольных источников, расположенных на оси струи (рис. 4). Расположение сопла относительно кромки экрана, геометрия экрана, скорость истечения струи  $U$ , а также координаты точек наблюдения соответствовали условиям проведения эксперимента. Расчет спектров шума струи проводился для дискретного набора частот: 400, 500, 630, 800, 1000, 1200, 1600, 2000, 2500, 3150, 4000 и 5000 Гц (данные частоты соответствуют центральным частотам при расчете 1/3-октавных спектров шума).

Для расчета спектров уровней шума струи использовалось выражение (19), где для второй производной от функции Грина использовались выражения (26), (27)–(33). Поскольку выражение (19) зависит от ряда свободных параметров, определяемых на основе анализа результатов экспериментальных данных или численных расчетов, то при проведении расчетов для величин  $A_n$  и  $\tau_n$  использовались значения, полученные при анализе шума струи методом азимутальной декомпозиции, полученные в работе [26].

При проведении расчетов экран рассматривался как бесконечно тонкая, акустически абсолютно жесткая прямоугольная пластина размером  $1300 \times 450$  мм. Расчет проводился для всех рассмотренных в эксперименте скоростей истечения струи и положений экрана.

Для рассматриваемого диапазона частот, геометрии экрана и взаимных положений сопла и точки наблюдения этим размерами первой зоны Френеля [49]. Для этого сделаем предположение, что во всем рассматриваемом диапазоне частот источники располагаются непосредственно вблизи среза сопла. Тогда для частоты 500 Гц радиус первой зоны Френеля составит  $\sim 220$  мм, а для частоты 5 кГц – 71 мм. Сравнив полученные расстояния с размерами экранирующей пластины, видим, что для диапазона частот от 500 Гц до 5 кГц характерные размеры пластины превосходят диаметр первой зоны Френеля, что оправдывает сделанные выше предположения о малости вклада волн вторичной дифракции. А поскольку сопло располагается в центре длинной стороны пластины, то также можно пренебречь вкладом волн, рассеянных углами экрана.

Сделаем замечание относительно частоты 400 Гц, для которой радиус первой зоны Френеля составляет  $\sim 250$  мм. В данном случае для корректного расчета необходимо оценить вклад волн вторичной дифракции. Однако, как показывают экспериментальные данные [57, 59], по сравнению с вкладом первично рассеянных волн этот вклад мал. Тогда, учитывая, что для рассматриваемого сопла частоты ниже 1 кГц эффективно излучаются существенно ниже по потоку (на расстояниях от среза сопла порядка  $10D \dots 15D$ ), вкладом вто-

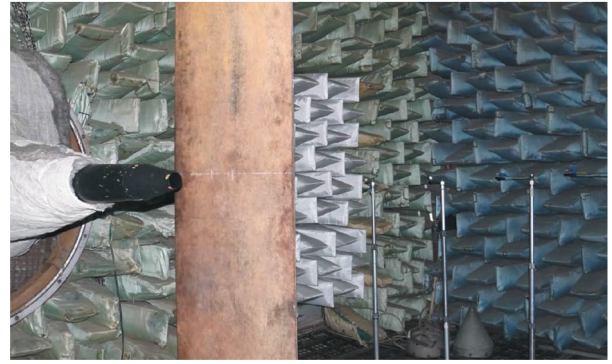


Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки для исследования экранирования шума одноконтурной струи в акустической камере АК-2.

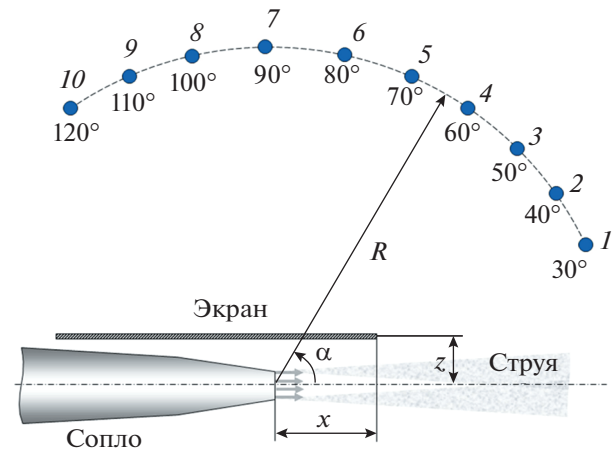


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для исследования экранирования шума одноконтурной струи.

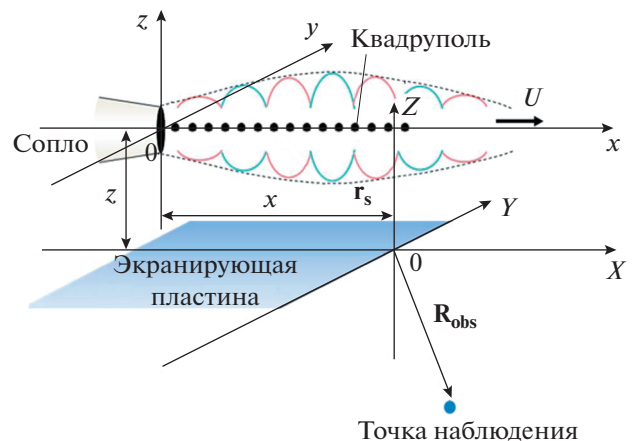


Рис. 4. Геометрия расчетной модели для расчета экранирования шума круглой одноконтурной турбулентной струи.

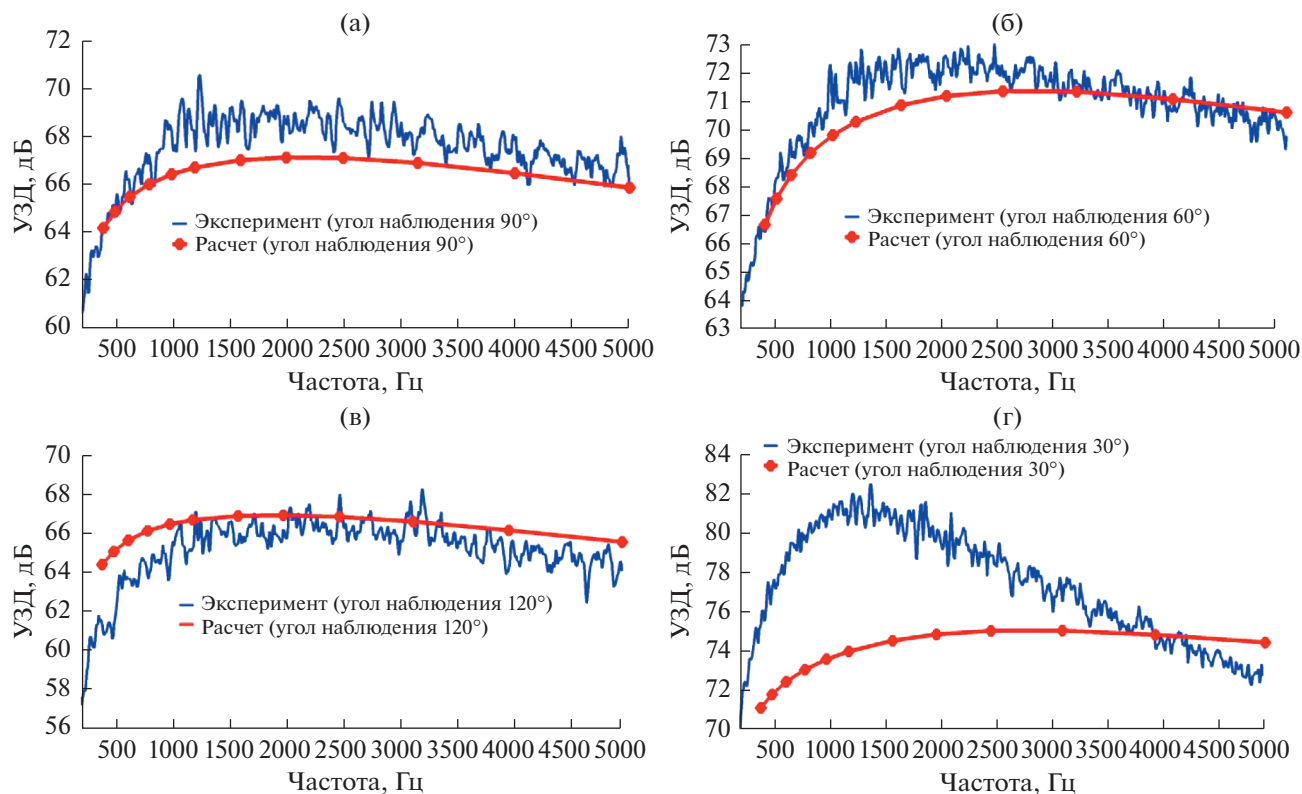


Рис. 5. Сравнение экспериментальных и расчетных спектров уровней шума турбулентной струи без экрана для угла наблюдения (а) – 90°, (б) – 60°, (в) – 120°, (г) – 30°.

рично дифрагированных волн на данной частоте можно пренебречь.

Здесь необходимо отметить, что струя является акустически некомпактным источником, для которого понятия зоны Френеля, вводимое для точечного источника, является не совсем корректным. Однако в данном случае нам необходимо провести только оценку порядка величины для первой зоны Френеля, для чего вышеизложенные рассуждения представляются справедливыми.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ

Проведем сравнение экспериментально измеренных (синяя кривая) узкополосных спектров шума и расчетных (красная кривая) 1/3-октавных спектров шума струи при наличии и отсутствии экрана для скорости истечения, равной 273 м/с ( $M = 0.8$ ), и углов наблюдения 30°, 60°, 90° и 120° градусов. Выбор данных углов позволяет четко проследить основные тенденции, возникающие при экранировании шума струи, и обусловлен тем, что эти углы описывают направление максимального излучения шума струей (30°), зону частичной тени (60°–90°) и зону глубокой тени (120°) относительно среза сопла. Выбор данной

скорости истечения струи обусловлен тем, что позволяет четко выявить общие тенденции при проведении сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных, которые справедливы и при более низких скоростях истечения струи, которые были рассмотрены в эксперименте.

Рассмотрим сначала сравнение расчетных данных с экспериментом для струи без экрана. На рис. 5 для четырех углов наблюдения (90°, 60°, 120° и 30°) представлено сравнение экспериментально измеренных спектров шума струи при скорости истечения струи 273 м/с с расчетными спектрами шума струи при отсутствии экрана.

Для углов наблюдения 90°, 60°, 120°, представленных на рис. 5а, 5б и 5в, видно, что расчетные кривые корректно передают форму огибающей экспериментально измеренного спектра, отличаясь в пределах 1.5–2 дБ. При меньших скоростях истечения струи, исследованных в эксперименте, сравнение экспериментальных и расчетных спектров уровней шума струи продемонстрировало аналогичное поведение для тех же углов наблюдения.

На рис. 5г видно, что при данной скорости истечения струи под углом наблюдения 30° имеет место значительное (до 7 дБ на частотах ниже 1500 Гц) расхождение между расчетными и экспе-

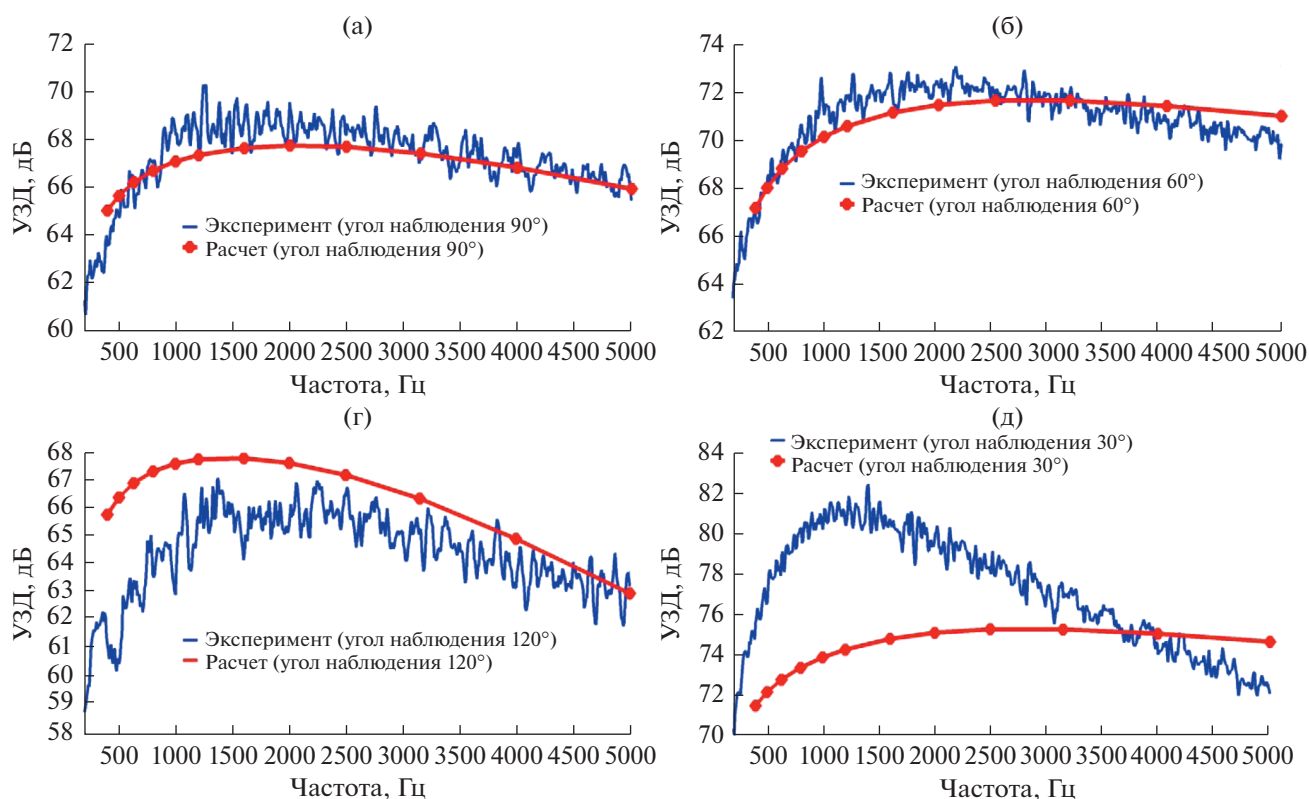


Рис. 6. Сравнение экспериментальных и расчетных спектров уровней шума турбулентной струи для угла наблюдения (а) –  $90^\circ$ , (б) –  $60^\circ$ , (в) –  $120^\circ$ , (г) –  $30^\circ$  (положение экрана № 1).

риментальными спектрами шума струи. Это обусловлено тем, что используемая расчетная модель не рассматривает явление рефракции звуковых волн, которое наиболее значительно проявляется при углах наблюдения, близких к оси струи [60]. Кроме того, в модели не рассматривается вклад волн неустойчивости, которые при скоростях струи  $M \sim 0.8$  могут вносить уже значительный вклад в области углов, близких к оси струи.

Рассмотрим далее сравнение расчетных и измеренных спектров шума струи в случае экранирования струи прямоугольным экраном, расположенным на расстоянии  $x = 2D$ ,  $z = 2D$  (рис. 4) от среза сопла (положение экрана № 1). Как при отсутствии экрана, рассмотрим спектры уровней звукового давления струи для рассмотренных ранее углов наблюдения, представленные на рис. 6.

Для рассматриваемой скорости истечения струи и положения экрана № 1 сравнение расчетных и экспериментально измеренных кривых показывает, что для углов наблюдения до  $60^\circ$ – $90^\circ$  во всем диапазоне частот наблюдается хорошее совпадение между расчетными и экспериментальными данными (рис. 6а и 6б). Однако для угла наблюдения  $120^\circ$  (рис. 6в) в диапазоне частот от 400 Гц до 2.5 кГц расчетный спектр шума струи на 1.5–2 дБ превосходит экспериментально измеренный, хо-

тя на частотах свыше 2.5 кГц расчетная кривая корректно описывает экспериментальную форму спектра. Сравнение кривых под углом наблюдения  $30^\circ$ , представленное на рис. 6г, как и в случае отсутствия экрана, демонстрирует расхождение между расчетными и измеренными значениями уровня шума. Для других скоростей истечения струи сравнение расчетных и экспериментальных спектров шума струи при наличии экрана в положении № 1 имело схожий характер, причем разница между расчетными и экспериментальными кривыми для угла наблюдения  $120^\circ$  составляла 2.5–3 дБ.

Рассмотрим, наконец, экранирование шума струи прямоугольным экраном, расположенным на расстоянии  $x = 2D$ ,  $z = 3D$  (рис. 4) от среза сопла (положение экрана № 2), т.е. в случае большей удаленности струи от экрана. Результаты сравнения расчетных и экспериментальных спектров представлены на рис. 7. Как и для всех ранее представленных случаев, для углов наблюдения  $60^\circ$  и  $90^\circ$  (рис. 7а и 7б) видно хорошее согласие между расчетными и экспериментальными спектрами, причем разница не превышает 2 дБ. Для угла наблюдения  $30^\circ$  градусов имеет место значительное (до 7.5 дБ) расхождение между расчетны-

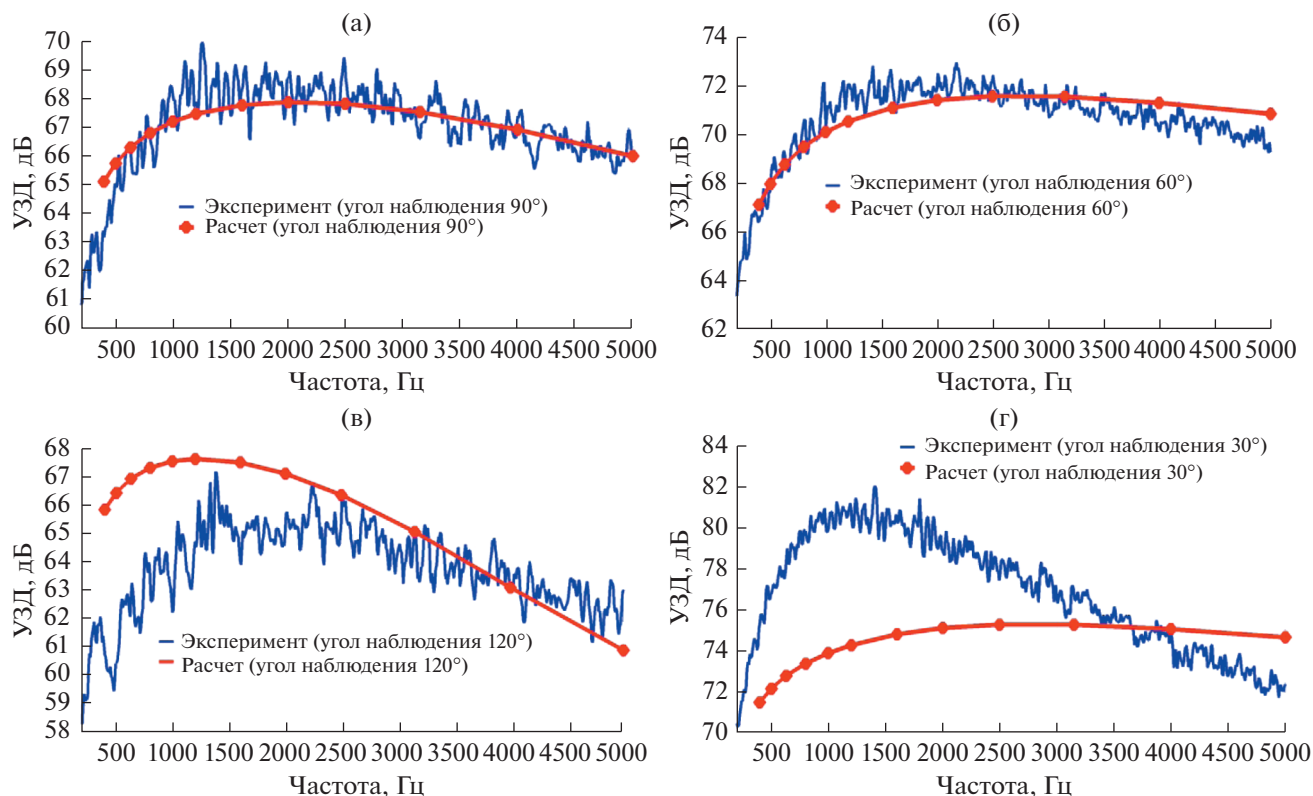


Рис. 7. Сравнение экспериментальных и расчетных спектров уровней шума турбулентной струи для угла наблюдения (а) –  $90^\circ$ , (б) –  $60^\circ$ , (в) –  $120^\circ$ , (г) –  $30^\circ$  (положение экрана № 2).

ми и экспериментально измеренными спектрами шума струи (рис. 7г).

Для угла наблюдения  $120^\circ$  имеет место тенденция, отличная от рассмотренных ранее случаев: на частотах ниже 1.5 кГц расчетные уровни шума на 2–3 дБ превосходит измеренные, а на частотах свыше 2.5 кГц уже экспериментально измеренные уровни шума превосходят расчетные, причем при увеличении частоты разность между спектрами монотонно возрастает и достигает величины  $\sim 2.2$  дБ (рис. 7в). Для других скоростей истечения струи поведение расчетных и экспериментально измеренных спектров шума при положении экрана № 2 имело аналогичный характер.

Представленное сравнение расчетных и экспериментально измеренных спектров шума струи демонстрирует, что для углов наблюдения, близких к оси струи (угол  $30^\circ$ ), имеет место существенное расхождение между рассматриваемыми кривыми, причем оно увеличивается при увеличении скорости истечения струи и не зависит от присутствия экранирующей поверхности. Причиной этого, как уже было упомянуто, является то, что рассматриваемая здесь модель источников шума не принимает во внимание явление рефракции звука струей (более подробно см. [25, 26]) и вклад волн неустойчивости.

Для диапазона углов наблюдения  $60^\circ$ – $90^\circ$  градусов при наличии и отсутствии экрана имеет место хорошее совпадение между расчетными и экспериментальными кривыми, что свидетельствует о корректности используемых подходов как при описании излучения звука струей, так и при описании явления дифракции звука на прямоугольном экране.

При этом наблюдается некоторое отличие между расчетными и экспериментальными спектрами при размещении экрана дальше от струи в положении № 2 на частотах свыше 2.5 кГц. Одной из возможных причин этого отличия является то, что в корреляционной теории, рассматриваемой в данной работе, высокочастотные источники шума струи предполагаются расположенными только в области вблизи сопла, а незначительным наличием высокочастотных источников также и в области основного участка струи пренебрегается. Это приводит к расхождению между рассматриваемыми кривыми при увеличении расстояния между задней кромкой экрана и срезом сопла с увеличением частоты. Результаты для угла наблюдения  $120^\circ$ , представленные на рис. 7в, подтверждают этот вывод. Можно ожидать, что учет рефракции звука струей, а также более точный учет распределения источников в струе позволит

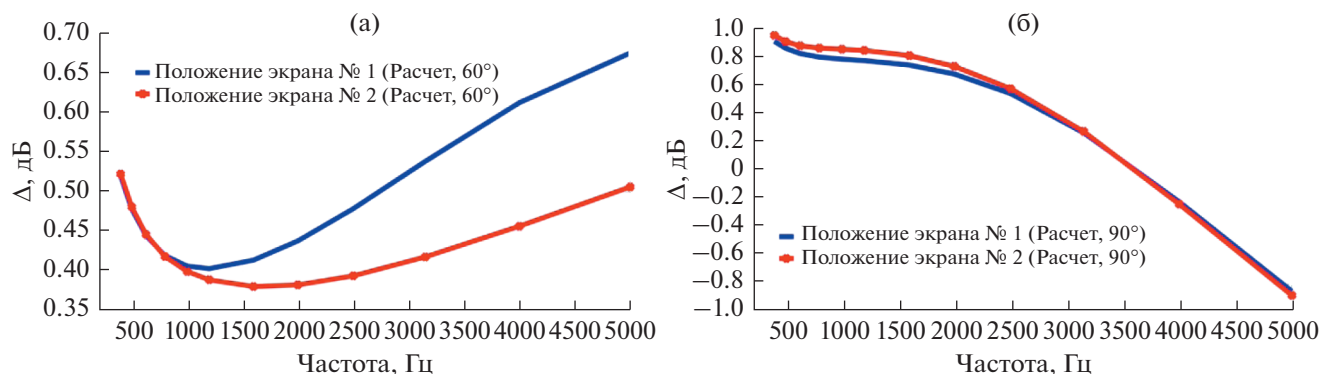


Рис. 8. Сравнение расчетных эффективностей экранирования шума круглой турбулентной струи для угла наблюдения (а) – 60°, (б) – 90° (скорость истечения 173 м/с).

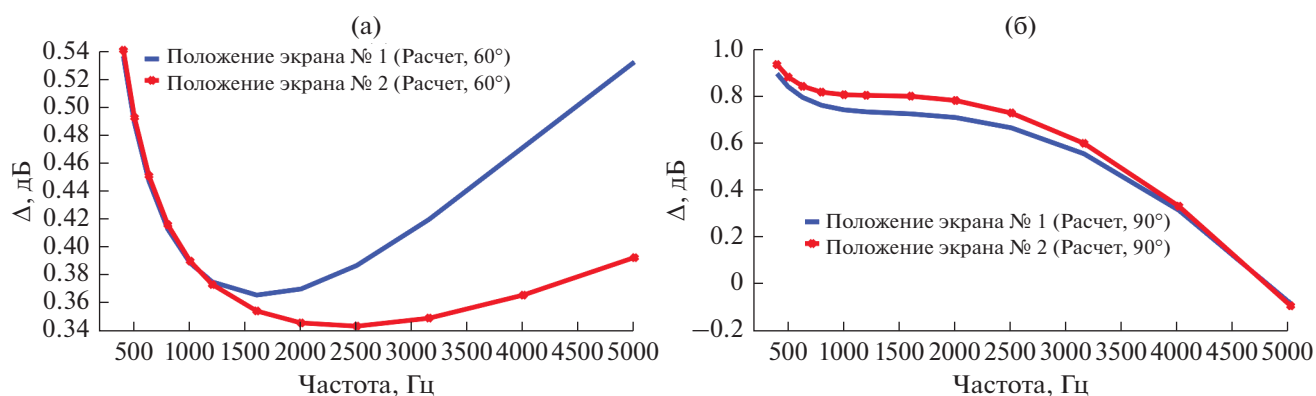


Рис. 9. Сравнение расчетных эффективностей экранирования шума круглой турбулентной струи для угла наблюдения (а) – 60°, (б) – 90° (скорость истечения 273 м/с).

корректно описать распространение звука во всем диапазоне углов.

### 5. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАНИЯ ШУМА КРУГЛОЙ ОДНОКОНТУРНОЙ СТРУИ

Для рассмотренных выше положений экрана приведем пример расчета эффективности экранирования шума круглой одноконтурной струи под углами наблюдения 60° и 90°, поскольку именно они представляют наибольший интерес с точки зрения снижения шума на местности. Расчет эффективности экранирования  $\Delta$  проводился с помощью соотношения:

$$\Delta = \text{УЗД}_S - \text{УЗД}_F, \quad (27)$$

где  $\text{УЗД}_S$  – выраженный в дБ уровень звукового давления струи при наличии экрана,  $\text{УЗД}_F$  – выраженный в дБ уровень звукового давления для свободной струи. При таком определении эффективности экранирования положительным значе-

ниям  $\Delta$  соответствует усиление шума, а отрицательным – снижение шума струи.

На рис. 8 представлен сравнительный расчет эффективности экранирования для скорости истечения струи 173 м/с, а на рис. 9 – для скорости истечения струи 273 м/с. Синяя кривая соответствует положению экрана № 1, а красная кривая – положению экрана № 2.

Для угла наблюдения 60° расчет эффективности экранирования при рассмотренных скоростях истечения струи продемонстрировал положительную эффективность экранирования, что свидетельствует об отсутствии снижения шума для обоих рассмотренных положений экрана (рис. 8а и 9а). Представленные на рис. 8а и 9а зависимости имеют характерный ложкообразный вид, демонстрируют наличие минимума в диапазоне частот от 1.5 до 2.5 кГц для положения экрана № 2, и в диапазоне частот от 800 Гц до 1.6 кГц для положения экрана № 1. Несмотря на то что для рассматриваемого угла наблюдения экранирование отсутствует, отметим, что усиление шума



невелико и не превышает 0.7 дБ для всех рассмотренных случаев.

Сравнение расчетных зависимостей для угла наблюдения  $90^\circ$ , представленное на рис. 8б, демонстрирует, что при скорости истечения струи 173 м/с максимальная эффективность экранирования шума струи не зависит от положения экрана и начинает проявляться на частотах свыше 3.5 кГц, достигая 0.9 дБ на частоте 5 кГц. На частотах ниже 3.5 кГц имеет место слабое монотонное усиление шума струи, достигающее 0.9 дБ на частотах ниже 500 Гц. При скорости истечения струи 273 м/с (рис. 9б) вычисленные эффективности экранирования для шума струи имеют схожее поведение на частотах ниже 2.5 кГц, однако в данном случае экранирования на частотах выше 3.5 кГц не наблюдается, хотя зависимости и демонстрируют монотонное уменьшение  $\Delta$  при увеличении частоты.

В целом, полученные расчетные зависимости согласуются с экспериментальными и расчетными данными, полученными при проведении исследований эффекта экранирования шума турбулентных струй и описанными в работах [1–3, 9, 10, 18, 27, 29–32, 45–47].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе на основе корреляционной теории шума струи и геометрической теории дифракции предложен метод для расчета экранирования шума круглой струи произвольным плоским экраном. Проведена адаптация ГТД для расчета экранирования шума турбулентной струи, для чего в рамках ГТД получено выражение для дифракции звука, излучаемого точечным квадрупольным источником на плоском полигональном экране при произвольной ориентации источника относительно декартовой системы координат, связанной с экраном.

Для валидации предложенного метода расчета экранирования выполнено сравнение экспериментальных и расчетных спектров уровней звукового давления шума струи при различных скоростях истечения струи и при различных положениях прямоугольного экрана относительно кромки сопла.

Сравнительный анализ экспериментальных спектров шума струи с расчетными спектрами, выполненными на основе корреляционной теории, продемонстрировал хорошее качественное, а при углах наблюдения  $60^\circ$ – $90^\circ$  и количественное согласие при всех рассмотренных скоростях истечения струи и положениях экрана, а также при его отсутствии в рассматриваемом диапазоне частот. Однако для углов, близких к оси струи ( $30^\circ$ ), имеется существенное расхождение между расчетными и измеренными спектрами, что свя-

зано с тем, что в использованной здесь модели источников звука в струе не учитывается явление рефракции и не учитывался вклад волн неустойчивости.

Настоящая модель в сочетании с моделью шума взаимодействия, разработанной в [41, 42], позволит проводить расчетную оценку шума струи, расположенной вблизи элементов конструкции самолета, с учетом эффекта экранирования, принимая во внимание возможность низкочастотного усиления шума струи. Предложенный метод позволяет давать оценки экранирования в ситуациях, представляющих технологический интерес. В дальнейших исследованиях предполагается расширить предложенный подход на случай более сложной версии корреляционной модели с учетом эффекта рефракции на слое смещения струи и более сложного распределения источников по струе.

Работа выполнена на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФГУП “ЦАГИ” и при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-11-2018-178 (уникальный идентификатор соглашения RFMEFI62818X0011).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Von Glahn U., Goodykoontz J., Wagner J.* Nozzle geometry and forward velocity effects on noise for CTOL Engine-Over-The-Wing concept // NASA TM-X-71453, Oct. 1973.
2. *Von Glahn U., Groesbeck D., Reshotko M.* Geometry considerations for jet noise shielding with CTOL Engine-Over-The-Wing concept // AIAA Paper. 1974. P. 1974–568.
3. *Von Glahn U., Groesbeck D., Wagner J.* Wing shielding of high-velocity jet and shock – associated noise with cold and hot flow jets // AIAA Paper. 1976. P. 1976–547.
4. *Maekawa Z.* Noise reduction by screens // J. Appl. Acoust. 1968. P. 157–173.
5. *McDonald H.M.* A class of diffraction problems // Proc. London Mathematical Society. 1915. V. 2. № 14. P. 410–427.
6. *Morris P.J.* Jet noise prediction: past, present and future // Canadian Acoustics. 2007. V. 35. № 3. P. 16–22.
7. *Camussi R.* Noise sources in turbulent shear flows: fundamentals and applications. International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures // Springer. 2013. V. 545.
8. *Ahtye W., McCulley G.* Evaluation of approximate method for the prediction of noise shielding by airframe components // NASA Technical Paper 1004. 1980.
9. *Ostrikov N.N., Denisov S.L.* Airframe shielding of noncompact aviation noise sources: theory and experiment // AIAA Paper. 2015. P. 2015–2691.
10. *Ostrikov N.N., Denisov S.L.* Mean Flow Effect On Shielding Of Noncompact Aviation Noise Sources //

- 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 30 May–1 June 2016. AIAA Paper. 2016. P. 2016–3014.
11. *Broadbent E.G.* Noise shielding for aircraft // Prog. Aerospace Science. 1977. V. 17. P. 231–268.
  12. *Denisov S.L., Ostrikov N.N.* Comparison of the methods for noncompact aviation noise sources shielding calculation // The 22nd Int. Congress on Sound and Vibration, 12–16 July 2015, Florence, Italy. Book of abstracts. P. 196.
  13. *Tam C., Aurialt L.* Jet mixing noise from fine-scale turbulence // AIAA J. 1999. V. 37. № 2. P. 145–153.
  14. *Morris P., Boluriaan S.* The prediction of jet noise from CFD data // AIAA Paper. 2004. P. 2004–2977.
  15. *Karabasov S.A., Afsar M.Z., Hynes T.P., Dowling A.P., McMullan W.A., Pokora C.D., Page G.J., McGuirk J.J.* Jet noise: acoustic analogy informed by large eddy simulation // AIAA J. 2010. V. 48. № 7. P. 1312–1325.
  16. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // AIAA Paper. 2007. P. 2007–3506.
  17. *Kopiev V., Chernyshev S., Faranosov G., Zaitsev M., Belyaev I.* Correlations of jet noise azimuthal components and their role in source identification // AIAA Paper. 2010. P. 2010–4018.
  18. *Dowling A., Hynes T.* Sound generation by turbulence // European J. Mechanics B/Fluids. 2004. V. 23. P. 491–500.
  19. *Tam C., Viswanathan K., Ahuja K., Panda J.* The sources of jet noise: experimental evidence // J. Fluid Mech. 2008. V. 615. P. 253–292.
  20. *Guitton A., Kerherve F., Jordan P., Delville J.* The sound production mechanism associated with coherent structures in subsonic jets // AIAA Paper. 2008. P. 2008–2892.
  21. *Kopiev V., Zaitsev M., Chernyshev S., Ostrikov N.* Vortex ring input in subsonic jet noise // Int. J. Aeroacoustics. 2007. V. 6. № 4. P. 375–405.
  22. *Kopiev V., Chernyshev S.* Vortex ring eigen-oscillation as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 19–57.
  23. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring oscillations, the development of turbulence in vortex rings and generation of sound // Physics Uspehi. 2000. V. 43. № 7. P. 663–690.
  24. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Correlation model for noise sources in turbulent jet based on birth of vortices as a key event // AIAA Paper 2012. P. 2012–2250.
  25. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источник шума в струях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 482–497.
  26. *Kopiev V., Chernyshev S.* Simulation of azimuthal characteristics of turbulent jet noise by correlation model of quadrupole noise sources // Int. J. Aeroacoustics. 2014. V. 13. № 1.
  27. *Власов Е.В., Гедымин В.А., Каравосов Р.К.* Метод расчета шума реактивной струи при наличии экраняющей поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. XIII. № 1. С. 30–38.
  28. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. R. Soc. Lond. 1954. V. 1. P. A 222.
  29. *Huang C., Papamoschou D.* Numerical study of noise shielding by airframe structures // AIAA. 2008. P. 2008–2999.
  30. *Papamoschou D.* Prediction of jet noise shielding // AIAA Paper 2010. P. 2010–653.
  31. *Mayoral S., Papamoschou D.* Effects of source redistribution on jet noise shielding // AIAA Paper. 2010. P. 2010–652.
  32. *Papamoschou D., Mayoral S.* Jet noise shielding for advanced hybrid wing-body configurations // AIAA Paper. 2011. P. 2011–912.
  33. *Papamoschou D.* Wavepacket modeling of the jet noise source // AIAA Paper. 2011. P. 2011–2835.
  34. *Papamoschou D., Mayoral S.* Prediction of jet noise shielding with forward flight effects // AIAA Paper. 2013. P. 2013–0010.
  35. *Wu T.W.* Boundary Element Acoustics. Fundamentals and Computer Codes // WIT Press. 2000.
  36. *Cavaliere A., Jordan P., Gervais Y.* Scattering of wavepackets by a flat plate in the vicinity of a turbulent jet // AIAA Paper. 2012. P. 2012–2156.
  37. *Cavaliere A.V.G., Wolf W.R., Jordan P., Gervais Y.* Diffraction effects of finite and semi-infinite flat plates in the vicinity of a turbulent subsonic jet // 22nd Int. Congress of Mechanic Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013, Ribeirao Preto, SP, Brazil.
  38. *Piantanida S., Huber V.J.J., Wolf W., Cavaliere A.V.G., Jordan P.* Scattering of turbulent-jet wavepackets by a swept trailing edge // AIAA Paper. 2015. P. 2015–2998.
  39. *Nogueira P.A.S., Cavaliere A.V.G., Jordan P.* A model problem for sound radiation by an installed jet // AIAA Paper. 2016. P. 2016–2857.
  40. *Piantanida S., Cavaliere A.V.G., Wolf W., Donadon M., Jordan P.* Scattering of turbulent jet wavepackets by a flexible composite plate // AIAA Paper. 2016. P. 2016–2704.
  41. *Nogueira P., Siroto J., Miotto R., Cavaliere A., Cordioli J., Wolf W.* Acoustic radiation of subsonic jets at the vicinity of an inclined flat plate // AIAA Paper. 2018. P. 2018–2976.
  42. *Bychkov O.P., Faranosov G.A., Denisov S.L., Ostrikov N.N.* Theoretical modeling of the excess noise due to jet-wing interaction // 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2016. AIAA Paper. 2016. P. 2016–2932.
  43. *Бычков О.П., Фараносов Г.А.* Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 437–453.
  44. *Faranosov G., Belyaev I., Kopiev V., Bychkov O.* Azimuthal structure of low-frequency noise of installed jet // AIAA Journal. 2019. V. 57. № 5. P. 1885–1898.
  45. *Lyu B., Dowling A.P.* On the mechanism and reduction of installed jet noise // AIAA Paper. 2017. P. 2017–3523.
  46. *Lyu B., Dowling A.P., Naqavi I.* Prediction of installed jet noise // J. Fluid Mech. 2017. V. 811. P. 234–268.
  47. *Lyu B., Dowling A.P.* Prediction of installed jet noise due to swept wings // AIAA Paper. 2018. P. 2018–2980.

48. *Kopiev V.F., Semiletov V.A., Yakovlev P.G., Karabasov S.A., Faranosov G.A.* Jet and jet-wing noise modeling based on the CABARET MILES flow solver and the Ffowcs Williams–Hawkings method // *Int. J. Aeroacoustics*. 2016. V. 15. № 6–7. P. 631–645.
49. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 856 с.
50. *Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Денисов С.Л.* Исследования по выбору оптимальной методики расчета дифракции звука, генерируемого некомпактными источниками различного типа, на обтекаемых поверхностях летательного аппарата // Третья открытая всероссийская конференция по аэроакустике, 1–3 октября 2013 г., Звенигород. 2013.
51. *Lummer M.* Maggi-Rubinowicz diffraction correction for ray-tracing calculations of engine noise // *AIAA Papers*. 2008. P. 2008–3050.
52. *Colas D., Spakovszky Z.* A turbomachinery noise shielding framework based on the modified theory of physical optics // *AIAA paper*. 2013. P. 2913–2136.
53. *Lummer M.* Aircraft noise generation and assessment // *CEAS Aeronautical Journal*. 2019. V. 10. P. 159–178. <https://doi.org/10.1007/s13272-019-00382-5>
54. *Keller J.B.* Geometrical theory of diffraction // *J. Opt. Soc. Am.* 1962. V. 52. № 2. P. 116–130.
55. *Kouyoumjian R.G., Pathak P.H.* A Uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface // *Proc. IEEE*. 1974. V. 62. № 11. P. 1448–1461.
56. *Боровиков В.А., Кинбер В.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
57. *Денисов С.Л., Корольков А.И.* Исследование экранирования шума с помощью метода последовательностей максимальной длины в приложении к задачам авиационной акустики // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 1–17.
58. *Agarwal A., Dowling A., Ho-Chul Shin, Graham W., Sefi S.* A ray tracing approach to calculate acoustic shielding by silent aircraft airframe // *AIAA Paper*. 2006. P. 2006–2618.
59. *Bowman J.J., Senior T.B., Uslenghi P.L.* Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes // *American Elsevier Publ. Co. Inc. New York*, 1969.
60. *Kopiev V., Chernyshev S.* Correlation model of quadrupole noise sources in turbulent jet: effect of refraction // *AIAA Paper*. 2015. P. 2015–3130.

## ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ЗВУКОВ ВТОРОГО ТОНА СЕРДЦА ДЛЯ ОЦЕНКИ ДАВЛЕНИЯ В ЛЕГОЧНОЙ АРТЕРИИ

© 2020 г. В. Г. Андреев<sup>а, \*</sup>, В. В. Грамович<sup>с</sup>, М. В. Красикова<sup>а, b</sup>, А. И. Корольков<sup>а</sup>,  
О. Н. Выборов<sup>с</sup>, Н. М. Данилов<sup>с</sup>, Т. В. Мартынюк<sup>с</sup>, О. В. Родненков<sup>с</sup>, О. В. Руденко<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики,  
Москва, 119991 Россия

<sup>б</sup>Университет ИТМО, физико-технический факультет, Санкт-Петербург, 197101 Россия

<sup>с</sup>ФГБУ “НМИЦ кардиологии” Минздрава РФ, Москва, 121552 Россия

\*e-mail: andreev@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 21.04.2020 г.

После доработки 21.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Предложен способ неинвазивной оценки давления в легочной артерии, основанный на выделении аортальной и легочной компонент звука второго тона сердца  $S_2$  и определении времени задержки между ними. Алгоритм выделения аортальной и легочной компонент основан на преобразовании Вигнера–Вилла. Проведен анализ фонокардиограмм 96 пациентов с легочной гипертензией (ЛГ), записанных врачами ФГБУ “НМИЦ кардиологии” с помощью оригинального комплекта аппаратуры. Сигналы  $S_2$  удалось разделить на компоненты и определить задержки между ними у 53 пациентов с ЛГ. Построена зависимость задержек между компонентами от величины давления в легочной артерии (ДЛА), измеренной методом катетеризации правых отделов сердца (КПОС). Для семи пациентов с легочной гипертензией полученные зависимости были использованы для предсказания величины ДЛА по измеренной временной задержке. Для пяти пациентов коэффициент детерминации предсказанных значений ДЛА составил 0.83, что свидетельствует о достаточно хорошей корреляции с измерениями методом КПОС.

*Ключевые слова:* легочная гипертензия, второй тон сердца, аускультация, катетеризация правых отделов сердца, аортальная и легочная компоненты, преобразование Вигнера–Вилла

DOI: 10.31857/S0320791920050019

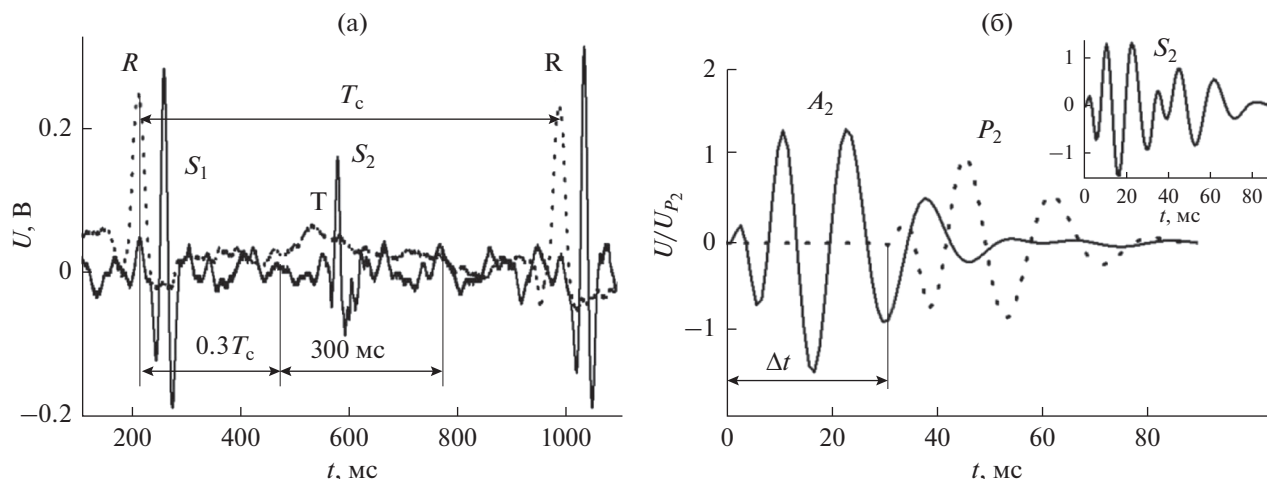
### ВВЕДЕНИЕ

Разработка методов неинвазивной диагностики легочной гипертензии (ЛГ) — заболевания, сопровождающегося стойким повышением среднего давления (более 25 мм рт. ст.) в легочной артерии (ЛА), является актуальной проблемой современной кардиологии. В настоящее время измерение давления в легочной артерии (ДЛА) проводится только в условиях стационара обученным персоналом с применением современного оборудования. Основным методом прямого измерения давления в правых отделах сердца и легочной артерии является введение катетера через подключичную или внутреннюю яремную вену [1]. Использование данного метода в клинике сопровождается рядом ограничений и рисками возникновения осложнений. Эхокардиография (ЭхоКГ) — единственный неинвазивный метод количественной оценки ДЛА в клинике. Для его правильного применения требуется подготовленный персонал, способный корректно измерить и интерпретиро-

вать полученные данные [2]. Метод имеет ряд серьезных ограничений, связанных с особенностями его аппаратной реализации.

При аускультации сердца хорошо выслушиваются первый и второй тоны. Первый (систолический) тон возникает во время систолы при захлопывании митрального и трикуспидального клапанов и при сокращении желудочков. Он синхронизован с зубцом R на электрокардиограмме (ЭКГ). Второй (диастолический) образуется в начале диастолы (периода расслабления сердца) при захлопывании аортального и легочного клапанов; он синхронизован с зубцом T на ЭКГ (рис. 1а). При патологических состояниях можно прослушать также дополнительные (третий и четвертый) тоны сердца.

В норме сигнал второго тона  $S_2$  содержит несколько колебаний и имеет длительность порядка 60 мс (вставка на рис. 1б). Легочная гипертензия в ряде случаев приводит к некоторой задержке времени закрытия легочного клапана  $\Delta t$  и расщепле-



**Рис. 1.** (а) – Фонокардиограмма (ФКГ) (сплошная линия) и ЭКГ (пунктирная), записанные у пациента. Импульсы  $S_1$  и  $S_2$  соответствуют первому и второму тонам сердца. Они синхронизированы соответственно с зубцами R и T на ЭКГ. (б) – Аортальная  $A_2$  и легочная  $P_2$  компоненты модельного сигнала второго тона  $S_2$  (на вставке). Компонента  $P_2$  (пунктирная линия) задержана на  $\Delta t = 30$  мс относительно  $A_2$ .

нию импульса на две компоненты – аортальную ( $A_2$ ) и легочную ( $P_2$ ) (рис. 1б). У таких пациентов наблюдается корреляция между длительностью задержки между компонентами  $S_2$  и величиной ДЛА [3]. Величина времени задержки  $\Delta t$  может варьироваться в пределах 10–70 мс. При  $\Delta t < 30$  мс компоненты визуально не разделяются, и сигнал  $S_2$  выглядит как один импульс (вставка на рис. 1б). Кроме того, повышение давления в ЛА приводит к дополнительному растяжению упругих стенок сосудов и створок легочного клапана, в результате чего спектр сигнала легочной компоненты может смещаться в сторону более высоких частот [4–6]. Систематические измерения сигнала второго тона сердца свиней в зависимости от уровня ДЛА, контролируемого медикаментозно, показали, что сигналы обеих компонент имеют вид chirпированных импульсов (рис. 1б) [7, 8]. Мгновенная частота на фронте импульсов достигает значений 150–200 Гц, затем в течение первых 15–20 мс частота быстро уменьшается до значений 70–80 Гц, после чего медленно спадает до уровня 35–40 Гц. Такое поведение частоты соответствует теоретической модели, где легочный клапан, моделируемый упругой натянутой мембраной в жидкости, возбуждался коротким импульсом, возникающим при резком закрытии клапана [5, 6].

Целью настоящей работы являлось изучение возможности оценки величины ДЛА путем регистрации сигнала второго сердечного тона  $S_2$ , выделения аортальной и легочной компонент и построения корреляционной зависимости времени задержки между компонентами от ДЛА, измеренного на ограниченной выборке пациентов с легочной гипертензией. Полученная таким образом корреляционная зависимость использовалась для

предсказания величины ДЛА у пациентов, не входящих в указанную выборку и сравнения предсказанных значений с измеренными методом катетеризации правых отделов сердца (КПОС).

### МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ФКГ И ЭКГ В КЛИНИКЕ

Регистрация сигналов ФКГ и ЭКГ проводилась врачами ФГБУ “НМИЦ кардиологии” у пациентов с ЛГ различной степени тяжести. Для записи сигналов был разработан и создан комплекс аппаратуры, на использование которого в условиях клиники было получено разрешение Этического комитета кардиоцентра. В соответствии с общепринятыми правилами проведения биомедицинских исследований, у всех пациентов было получено письменное информированное согласие на участие в настоящем исследовании. Сигналы тонов сердца записывались у пациентов в день проведения КПОС, а в ряде случаев непосредственно в рентгеноперационной при проведении КПОС.

В качестве приемника акустических сигналов использовался медицинский стетоскоп с мембраной, которая соединялась штатным звуководом с микрофоном. Сигнал микрофона усиливался и поступал на один из входов USB осциллографа (Picoscope). На второй вход осциллографа подавался сигнал ЭКГ, модуль которого находился в одном корпусе с микрофоном. Осцифрованные сигналы ФКГ и ЭКГ с выхода осциллографа поступали на персональный компьютер для записи и последующей обработки. Сигналы ФКГ регистрировались в четырех положениях на грудине на выдохе при задержке дыхания. Длительность

записи ФКГ составляла 12–15 с и содержала около 10 полных сердечных циклов, которые в дальнейшем обрабатывались. Точка выслушивания легочного клапана (ЛК) [3], расположенная во втором межреберье слева от грудины, оказалась оптимальной для регистрации сигналов второго тона сердца.

Полоса частот сигналов второго тона лежит в пределах 20–250 Гц. Поэтому амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) приемного тракта должна быть максимально равномерной в указанном частотном диапазоне. Измерения АЧХ мембраны стетоскопа, соединенной с микрофоном и усилителем, проводились в безэховой камере кафедры акустики физического факультета МГУ. Было показано, что чувствительность микрофона незначительно растет с увеличением частоты от 20 до 500 Гц. Наличие мембраны стетоскопа приводит к уменьшению чувствительности в области частот 20–80 Гц и повышению чувствительности в диапазоне 180–300 Гц. Такая частотная зависимость изменяет форму и спектр регистрируемых сигналов, однако в данном случае использование мембраны создает дополнительное преимущество, поскольку амплитуда сигнала на высоких частотах усиливается, а на низких частотах, где амплитуда и так достаточно велика, ослабляется.

Обработка записанных ФКГ проводилась как вручную, так и в автоматическом режиме. По записанной ЭКГ определялась длительность сердечного цикла  $T_c$  как интервал между соседними R-зубцами (рис. 1а). Считалось, что сигнал  $S_2$  начинается в момент времени, равный  $0.3T_c$ , и соответствует T-зубцу на ЭКГ. Длительность выделяемого сигнала выбиралась равной 300 мс, что существенно превышает типичную длительность  $S_2$ , однако такой интервал позволял учесть физиологические особенности пациентов. Отметим, что профили сигналов  $S_2$  от цикла к циклу заметно менялись, поэтому каждый из выделенных сигналов обрабатывался отдельно, а полученные в результате временные задержки усреднялись. Для снижения уровня высокочастотного шума применялся фильтр низких частот, пропускающий частоты ниже 500 Гц.

Сигнал второго тона  $S_2(t)$  является нестационарным, поэтому для его анализа используются различные частотно-временные преобразования. Таковыми, например, являются оконное преобразование Фурье [9], вейвлет-анализ [10]. Разделение компонент сигнала второго тона целесообразно проводить с помощью преобразования Вигнера–Вилла (В–В), поскольку оно обеспечивает наилучшее разрешение в частотно-временной области для chirпированных импульсов [11, 12]:

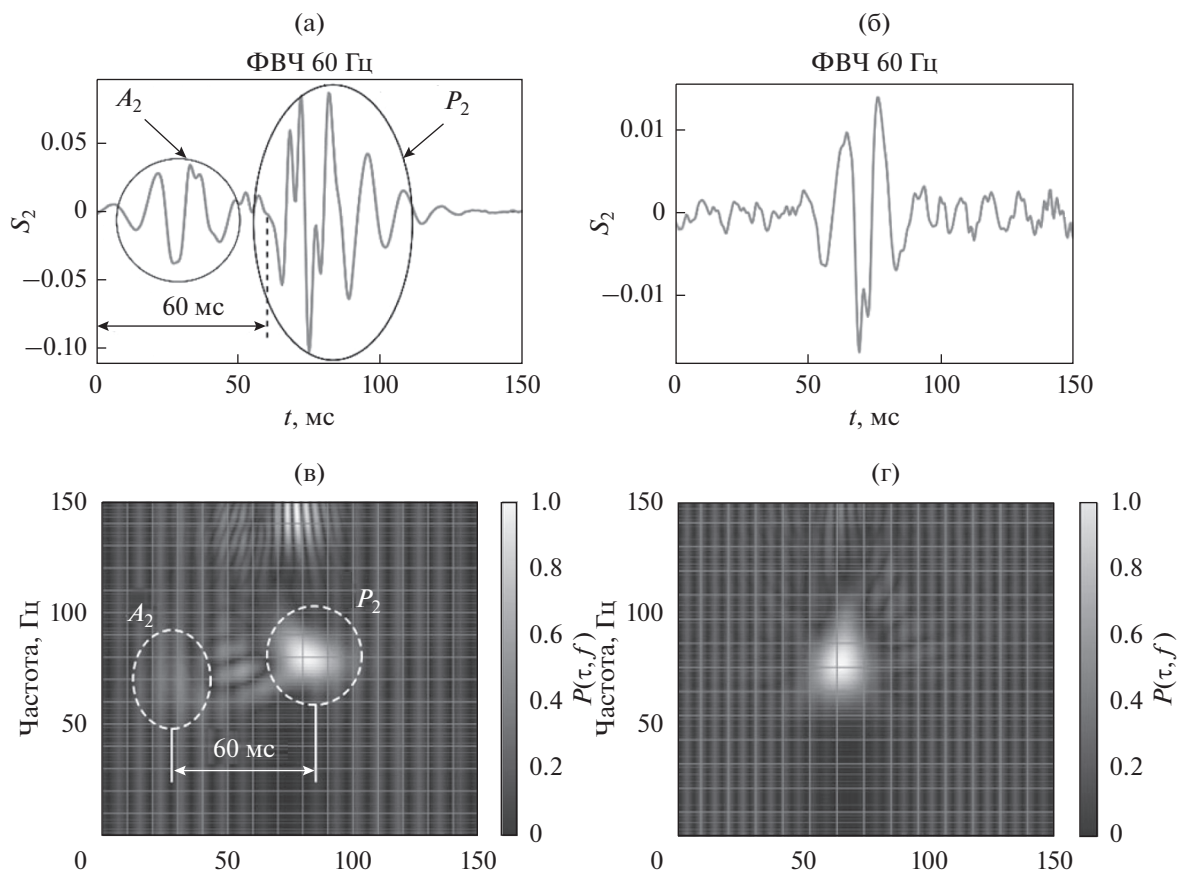
$$P(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau + t/2) y^*(\tau - t/2) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1)$$

где  $y(t)$  – комплексный аналитический сигнал,  $f$  – частота,  $*$  – знак комплексного сопряжения,  $j$  – мнимая единица. Сигнал  $y(t)$  связан с измеряемым сигналом второго тона  $S_2(t)$  соотношением  $y(t) = S_2(t) + jH(t)$ , где  $H(t)$  – преобразование Гильберта:

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_2(t')}{t - t'} dt'. \quad (2)$$

Величина  $P(\tau, f)$  может рассматриваться в качестве оценки плотности энергии сигнала на данной частоте в фиксированный момент времени. В спектре сигнала  $S_2(t)$  высокие частоты существуют ограниченное время, не превышающее 20 мс, остальное время преобладают относительно низкие частоты 35–40 Гц. Если задержка между компонентами превышает 40 мс, то функция  $P(\tau, f)$  имеет в частотно-временной области два выраженных максимума, соответствующих энергетическим центрам аортальной и легочной компонент. Длительность интервала между этими максимумами соответствует времени  $\Delta t$ . Для нахождения компонент при меньших задержках проводилось пропускание сигнала  $S_2(t)$  через фильтры, срезающие низкие частоты. Частота среза увеличивалась последовательно с 30 до 100 Гц с шагом 5 Гц [13]. На каждом шаге фильтрации строилось преобразование В–В отфильтрованного сигнала и определялись локальные максимумы, соответствующие энергетическим центрам компонент. В ряде случаев положение одной из компонент определялось по виду преобразования В–В сигнала  $S_2(t)$ , построенного без фильтрации, а положение второй компоненты определялось и уточнялось по отфильтрованным сигналам. При  $\Delta t < 10$  мс разделить компоненты описанным методом практически невозможно, что накладывает определенные ограничения на его использование.

На рис. 2 изображены сигналы второго тона  $S_2$ , измеренные у пациента с ЛГ (рис. 2а) и у пациента с нормальным значением ДЛА (рис. 2б). У пациента с ЛГ сигнал явно разделяется на два импульса. На преобразовании В–В, построенном для этого сигнала, различимы две отдельные области, соответствующие аортальной  $A_2$  и легочной  $P_2$  компонентам (рис. 2в). Временная задержка  $\Delta t$  определяется как интервал между их энергетическими центрами. Появление легочной компоненты в момент времени 70 мс хорошо видно на рис. 2в. В момент появления легочной компоненты в ее спектре присутствуют составляющие с частотами 100–120 Гц. Наличие в спектре высоких частот может являться дополнительным признаком ЛГ. Отметим, что на рис. 2в в интервале 40–70 мс видны интерференционные полосы – артефакты, связанные с нелинейностью преобразования В–В [13]. При малых задержках влияние



**Рис. 2.** Сигналы  $S_2$  пациентов с (а) – повышенным и (б) – нормальным значениями ДЛА, полученные после фильтрации высоких частот с частотой отсечки 60 Гц. (в, г) – Вид преобразования Вигнера–Вилла для этих же сигналов.

этих артефактов становится значительным, поэтому планируется использовать сглаженное преобразование В–В [12, 14]. Однако вид временного окна и его длительность пока не оптимизированы. У пациента с нормальным значением ДЛА сигнал  $S_2$  не разделяется на компоненты независимо от фильтрации, и на преобразовании В–В присутствует только одна область (рис. 2г).

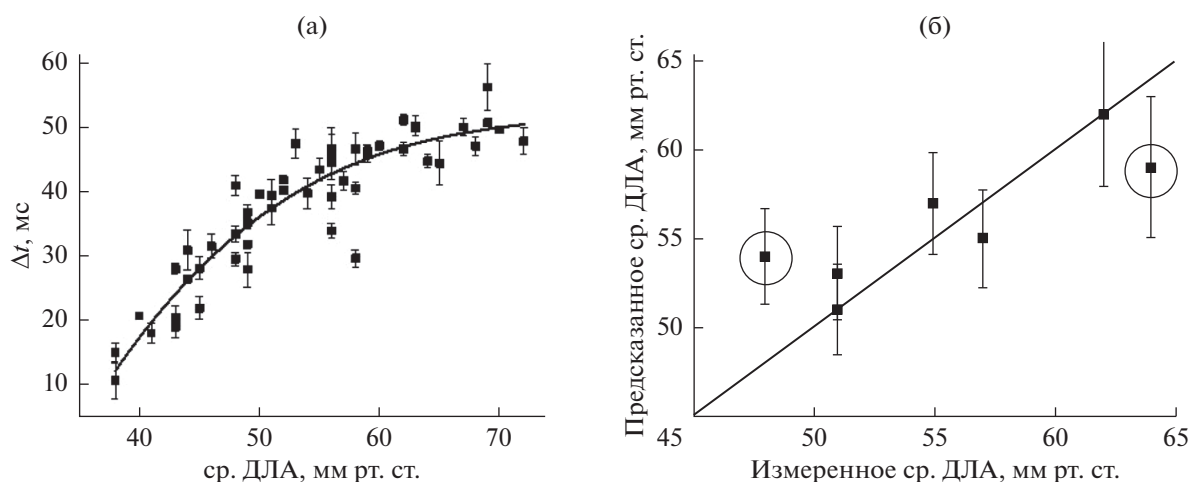
### РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе была проанализирована выборка из 113 пациентов, 96 из которых с диагнозом ЛГ (85%), и у 17 (15%) ДЛА было в норме. У пациентов без ЛГ величина ДЛА, по этическим соображениям, определялась методом ЭхоКГ, а пациентам с ЛГ проводилась КПОС. Для большинства пациентов с ЛГ имеются записи временных профилей давления в различных отделах сердца, измеренные во время катетеризации. Из общего числа обследованных пациентов с диагнозом ЛГ разделить сигнал второго тона на компоненты и измерить задержку между ними удалось только у 53. Результаты измерений задержки для первых 46 пациентов были использованы для построения

зависимости  $\Delta t$  от величины ср. ДЛА, полученной при катетеризации (символы на рис. 3а). Экспериментальная зависимость была аппроксимирована кубическим полиномом:

$$\Delta t[\text{ms}] = -218 + 10.23x - 0.132x^2 + 5.8 \times 10^{-4}x^3, \quad (3)$$

где  $x$  – ср. ДЛА в мм рт. ст. Величина коэффициента детерминации ( $R^2 = 0.86$ ) свидетельствует о достаточно хорошей корреляции выбранной аппроксимирующей зависимости и измеренных значений. В диапазоне значений ср. ДЛА 35–50 мм рт. ст. задержка растет практически линейно с увеличением давления. Начиная со значений ср. ДЛА 55 мм рт. ст. рост задержки уменьшается, а при значениях ср. ДЛА, превышающих 70 мм рт. ст., величина  $\Delta t$  стабилизируется на уровне 50–55 мс. Полученная аналитическая зависимость (3) была использована в дальнейшем для предсказания величины ср. ДЛА у семи пациентов по измеренной задержке  $\Delta t$ . Результаты предсказания показаны на рис. 3б, где по горизонтальной и вертикальной осям отложены величины ср. ДЛА, определенные при КПОС и рассчитанные по формуле (3) с использованием измеренных значений  $\Delta t$  соответственно. В случае



**Рис. 3.** (а) — Зависимость рассчитанной задержки между компонентами  $A_2$  и  $P_2$  от ср. ДЛА, измеренного при катетеризации (символы). Аппроксимация кубическим полиномом показана сплошной линией. (б) — Результат предсказания ср. ДЛА для семи пациентов по аппроксимационной зависимости (3).

совпадения значений ср. ДЛА, полученных обоими методами, все точки на рис. 3б должны лежать на прямой линии с коэффициентом пропорциональности единица. Для пяти пациентов из семи отмечено соответствие в пределах погрешности измерений предсказанных значений ср. ДЛА измеренным КПОС. Для этих пациентов коэффициент детерминации  $R^2 = 0.83$ , что свидетельствует о достаточно высокой корреляции результатов, полученных двумя методами. При учете результатов измерений двух пациентов, отмеченных кружками на рис. 3б, коэффициент детерминации уменьшается до 0.1. Это означает, что в целом для выборки из семи пациентов корреляция предсказанных и измеренных значений довольно слабая. Поэтому, наряду с измерениями задержки между компонентами второго тона следует использовать дополнительные признаки сигналов ФКГ для уточнения результатов неинвазивного измерения ДЛА. Отметим также, что погрешность предсказанных значений для ср. ДЛА, превышающих 55 мм рт. ст., возрастает вследствие уже отмеченной слабой зависимости  $\Delta t$  от ср. ДЛА в этом диапазоне давлений.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В ряде работ [7, 8] предлагается использовать задержку, нормированную на период сердечного цикла  $T_c$ :  $NSI = \Delta t/T_c$ . Частота сердечных сокращений варьируется в достаточно широких пределах у различных пациентов. Даже в процессе проведения измерений ФКГ частота сердечного ритма у одного и того же пациента может изменяться в зависимости от нагрузки и эмоционального состояния. Зависимость  $\Delta t/T_c$  от ср. ДЛА может быть универсальной для пациентов с различной

частотой сердечного цикла. В наших измерениях величина  $\Delta t/T_c$  варьировалась от 1 до 7% в зависимости от пациента. Такой большой диапазон (в 7 раз) приводит к растягиванию масштаба по вертикали на графике зависимости  $\Delta t/T_c$  от ср. ДЛА, увеличению разброса данных и уменьшению коэффициента детерминации при аппроксимации данных полиномиальной зависимостью ( $R^2 \approx 0.7$ ). Поэтому было решено в качестве основного параметра оставить  $\Delta t$ . Возможно, что нормированная задержка  $\Delta t/T_c$  может быть полезна для оценки ср. ДЛА у одного и того же пациента при условии значительной вариабельности частоты его сердечного ритма.

Наряду с зависимостью  $\Delta t$ (ср. ДЛА) была построена и проанализирована зависимость  $\Delta t$  от величины систолического ДЛА (СДЛА). Вариабельность СДЛА оказалась выше, чем ср. ДЛА, что привело к дополнительному разбросу данных на графике зависимости  $\Delta t$ (СДЛА) и снижению коэффициента детерминации при аппроксимации данных полиномиальной зависимостью ( $R^2 \approx 0.65$ ).

Зависимость  $\Delta t$ (ср. ДЛА) у пациентов с разделяющимися аортальной и легочной компонентами оказалась наиболее подходящей для оценки величины ср. ДЛА. Этот экспериментально установленный факт не является очевидным, поскольку основным параметром, управляющим процессом звукообразования при схлопывании створок легочного клапана, является перепад давления в правом желудочке (ПЖ) и ЛА [4–6]. Для объяснения роли именно величины ср. ДЛА можно предложить несколько механизмов. В основе формирования времени задержки лежит несинхронное сокращение и расслабление желудочков сердца вследствие повышенной нагрузки



на ПЖ и вызванных ею изменений правого желудочка. Повышенная нагрузка на ПЖ определяется именно ср. ДЛА, так как этот показатель менее зависит от других параметров гемодинамики, и в большей степени определяется легочным сосудистым сопротивлением, которое, в свою очередь, отражает степень поражения (стенозирования) легочных артерий. Систолическое же давление является производной величиной не только от легочного сосудистого сопротивления, но и параметров гемодинамики (например, наполнения ПЖ, которое в свою очередь, зависит от венозного возврата, объема циркулирующей крови, податливости миокарда ПЖ, сердечного ритма и его частоты), а также сократительной функции ПЖ и податливости стенок магистральных легочных артерий. СДЛА обуславливается главным образом ударным объемом крови ПЖ, максимальной скоростью ее изгнания и растяжимостью стенок ЛА. Чем выше будут вышеуказанные параметры, тем выше будет, соответственно, величина СДЛА. Поэтому при одних и тех же значениях ср. ДЛА систолическое давление варьируется в достаточно широких пределах. Возможно, что были погрешности в определении СДЛА при катетеризации из-за дыхательной вариабельности измерений. Необходимо также учесть, что измерения ФКГ и проведение КПОС были разнесены по времени (от нескольких часов до суток), и только у нескольких пациентов они проводились одновременно в рентгеноперационной.

Еще раз следует отметить, что предложенный метод оценки давления в ЛА может быть использован только в случае разделения сигнала второго тона сердца  $S_2$  на аортальную и легочную компоненты. Это условие является серьезным ограничением метода, поскольку только примерно у 50% обследованных пациентов эти компоненты в нашем исследовании разделились в частотно-временной области. Требуется также уточнить корреляционную зависимость  $\Delta t$  (ср. ДЛА) для пациентов с начальной и умеренной ЛГ, у которых ср. ДЛА лежит в диапазоне 25–45 мм рт. ст. В настоящее время ведется работа в данном направлении.

Теоретический анализ генерации колебаний, возникающих при захлопывании легочного клапана, показал, что спектр колебаний упругих стенок ЛА при их дополнительном растяжении смещается в высокочастотную область. Такое растяжение стенок может вызываться повышенным давлением крови в ЛА. Поэтому анализ спектрального состава сигнала второго тона сердца  $S_2$  и присутствие в нем высокочастотных компонент может обеспечить дополнительную информацию о величине давления в ЛА.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при условии разделения сигнала второго тона на компоненты существует достаточно хорошая корреляция между временем задержки  $\Delta t$  и величиной ср. ДЛА. Если время задержки изменяется в диапазоне 10–50 мс, то величину ср. ДЛА можно оценить, и она с достоверностью порядка 80% будет находиться в пределах 35–65 мм рт. ст. При времени задержки, превышающем 55 мс, значение ср. ДЛА не предсказывается; можно только предполагать, что ср. ДЛА высокое и превышает 70 мм рт. ст. Задержка  $\Delta t$  менее 10 мс не измеряется описанным выше методом. Следует отметить, что даже при разделении сигнала второго тона на компоненты, предсказание ср. ДЛА по измеренной задержке у ряда пациентов оказалось довольно неточным. Поэтому продолжается поиск дополнительных признаков в сигналах ФКГ, которые позволили бы повысить точность и надежность предсказания ДЛА.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-02-00736.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zamanian R., Waxman A.B., Maron B.A.* Pulmonary Hypertension: Basic Science to Clinical Medicine // Springer. 2015. P. 371.
2. *Шиллер Н.Б., Осипов М.А.* Клиническая эхокардиография // Практика. 2005. 344 с.
3. *Алмазов В.А., Салимьянова А.Г., Шляхто Е.В.* Аускультация сердца. СПб: Издательство СПбГМУ, 1996. 458 с.
4. *Sikarskie D.L., Stein P.D., Vable M.* Mathematical model of aortic valve vibration // Mathematical Modelling in Science and Technology. Pergamon, 1984. С. 709–714.
5. *Андреев В.Г., Грамович В.В., Выборов О.Н., Мартынюк Т.В., Родненков О.В., Руденко О.В.* Ударное возбуждение звука при схлопывании створок полулунных клапанов сердца // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 232–240.
6. *Андреев В.Г., Грамович В.В., Выборов О.Н., Мартынюк Т.В., Родненков О.В., Руденко О.В.* Колебания полулунного клапана, моделируемого упругой натянутой мембраной в жидкости // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 647–652.
7. *Xu J., Durand L.-G., Pibarot P.* Nonlinear transient chirp signal modeling of the aortic and pulmonary components of the second heart sound // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2000. V. 47. № 10. P. 1328–1335.
8. *Xu J., Durand L.-G., Pibarot P.* Extraction of the aortic and pulmonary components of the second heart sound using a nonlinear transient chirp signal model // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2001. V. 48. № 3. P. 277–283.
9. *Allen J.B., Rabiner L.R.* A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis // Proc. IEEE. 1977. V. 65. № 11. P. 1558–1564.

10. *Debbal S.M., Bereksi-Reguig F.* Automatic measure of the split in the second cardiac sound by using the wavelet transform technique // *Computers in Biology and Medicine.* 2007. V. 37. P. 269–276.
11. *Mecklenbräuker W., Hlawatsch F.* The Wigner distribution: theory and applications in signal processing // *Elsevier Science*, 1997. P. 480.
12. *Djebbari A., Bereksi-Reguig F.* Detection of the valvular split within the second heart sound using the reassigned smoothed pseudo Wigner–Ville distribution // *Bio-Medical Engineering OnLine.* 2013. V. 12: 37. <https://doi.org/10.1186/1475-925X-12-37>
13. *Лесик М.В., Корольков А.И., Андреев В.Г.* Методы анализа пульмональной компоненты второго сердечного тона // *Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та.* 2018. № 4. С. 1840703–1–1840703–8.
14. *Barma S., Chen B., Man K.L., Wang J.* Quantitative measurement of split of the second heart sound (S2) // *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics.* 2015. V. 12. № 4. P. 851–860.

## ОСОБЕННОСТИ ЗВУКОПРОВЕДЕНИЯ В ЛЕГКИХ ЧЕЛОВЕКА В ДИАПАЗОНАХ ЧАСТОТ 80–1000 ГЦ И 10–19 КГЦ

© 2020 г. В. И. Коренбаум<sup>а</sup>, \*, А. Д. Ширяев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

\*e-mail: v-kor@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 26.03.2018 г.

После доработки 06.02.2020 г.

Принята к публикации 25.02.2020 г.

При зондировании легких человека с использованием техники сжатия импульса в низкочастотном диапазоне 80–1000 Гц установлено преимущественное звукопроведение к поверхности грудной клетки через паренхиму легких продольных, а не сдвиговых волн со скоростями распространения от 100 до 15 м/с. При зондировании через рот для первых 2–3 приходов выявлена значимая разница эффективных углов падения фронта волны зондирующего сигнала на поверхность грудной клетки, подтверждающая ранее сформулированные представления о воздушно-структурном и структурном механизмах проведения звука из просвета бронхиального дерева на стенку грудной клетки. При зондировании с поверхности тела из надключичной области наблюдаются 2 низкоскоростных прихода (15–50 м/с), эффективные углы падения которых по вертикали свидетельствуют о структурном звукопроведении от точечного источника, образованного штампом виброизлучателя. При зондировании виброизлучателем с поверхности грудной клетки в высокочастотном диапазоне 10–19 кГц установлено существование низкоскоростных приходов со скоростями распространения 50–150 м/с, трактуемых как результат распространения продольной звуковой волны по паренхиме легких, и наличие высокоскоростных приходов со скоростями 150–1000 м/с, связываемых с распространением продольной волны по плотным тканям грудной клетки. Выявлена зависимость соотношения амплитуд пиков низкоскоростных и высокоскоростных приходов от воздухонаполнения паренхимы легких. Низкоскоростное распространение продольных звуковых волн в обоих диапазонах частот гипотетически объяснено с позиций модели “эффективной” водоподобной среды с микропузырьками воздуха.

*Ключевые слова:* сложные сигналы, акселерометр, свертка, приходы сигнала, звукопроведение, скорость звука, грудная клетка, моделирование

DOI: 10.31857/S0320791920040048

### ВВЕДЕНИЕ

В 1816 году Р. Лаэннек изобрел метод аускультации легких с помощью стетоскопа, устанавливаемого на поверхности грудной клетки. Эта неинвазивная методика широко применяется во врачебной практике уже в течение почти двух столетий. Однако она носит субъективный характер и не соответствует требованиям современной доказательной медицины.

Интенсивные исследования по объективизации акустических феноменов дыхания ведутся с 70-х годов прошлого века [1]. Тем не менее надежные диагностические методики все еще не созданы. В частности, до сих пор не достигнуты успехи в создании низкочастотной акустической визуализации или томографии легких [2]. Одна из основных проблем — слабая изученность распро-

странения звуков в дыхательной системе человека [3, 4].

Прежние исследования звукопроведения в легких человека касались преимущественно давно используемого на практике низкочастотного диапазона до 1000 Гц, характеризуемого скоростями распространения звуковых волн в пределах 15–200 м/с [5]. На более высоких частотах звукопроведение считалось невозможным из-за повышенного затухания в тканях паренхимы легких. Однако недавно был экспериментально выявлен неожиданный феномен дополнительного “акустического окна прозрачности” легких человека в высокочастотном диапазоне 10–40 кГц, характеризуемого скоростью звука около 1000 м/с [6]. Таким образом, исследуемая акустическая картина еще более усложнилась.

Авторами предложен оригинальный метод зондирования легких человека [7] путем подачи сложных сигналов в рот и с поверхности грудной клетки и вычисления взаимно-корреляционной функции излученного и принятого на поверхности грудной клетки сигналов. Этот метод известен в радио- и гидролокации как метод сжатия импульса. Исследования, выполненные с его помощью для низкочастотного диапазона 80–1000 Гц [7, 8, 5], и пилотная апробация в высокочастотном диапазоне 10–19 кГц, произведенная с использованием акустических датчиков для низкочастотного диапазона [9], позволили экспериментально выявить наличие нескольких путей проведения звуковых волн к поверхности грудной клетки, отличающихся скоростью распространения. Обнаружено, в частности, наличие низкоскоростных приходов звуковой волны, результирующая скорость звука которых близка в обоих частотных диапазонах.

Целью данной работы является дальнейшее изучение характеристик распространения звука через легкие человека *in vivo* в диапазонах частот 80–1000 Гц и 10–19 кГц при трансмиссионном зондировании с помощью метода сжатия импульса.

#### ОБЗОР МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЛЕГКИХ ЧЕЛОВЕКА

В связи с отсутствием строгой теории, рассмотрим имеющиеся к настоящему времени эмпирические представления, неизбежно, по своему характеру, весьма приближенные. Исследуемый акустический тракт ограничен поверхностью грудной клетки (порядка 30 см в диаметре для взрослого человека). Внутренняя часть грудной клетки заполнена легочной паренхимой, представляющей собой смесь микропузырьков воздуха и водоподобной ткани.

Скорость звука для продольной волны частотой ниже 1 кГц в такой среде согласно модели “эффективной среды” определяется сжимаемостью воздуха в пузырьках и плотностью тканей (близкой к воде) [10]. В результате, расчетная скорость звука в паренхиме легких имеет низкое значение около 20–30 м/с. Последнее значение на частотах 100–300 Гц (диапазон наиболее интенсивного звукопроводения) дает длину продольной звуковой волны  $\lambda = 30 \dots 10$  см, при этом волновой размер исследуемой области составляет  $(1 \dots 3)\lambda$ .

Существует возможность и иного представления рассматриваемой среды – в виде поро-вязко-эластичной модели Био [11]. В последнем случае согласно численным оценкам [11] существует быстрая продольная волна со скоростями распространения в пределах 25–50 м/с и медленная продольная волна – со скоростями распространения

около 5 м/с. Кроме того, имеет место и сдвиговая волна со скоростью распространения 2–3 м/с.

Основными особенностями паренхимы легких как акустической среды в диапазоне частот ниже 1 кГц являются высокое затухание (от 3 до 20 дБ/см [11]), которое в сочетании с расхождением волнового фронта от источника позволяет пренебречь отраженными и переотраженными звуковыми волнами [12], а также очень малое значение модуля сдвига, которое, в сочетании с высоким затуханием, не должно допускать распространения сдвиговых волн на существенные дистанции (из глубины грудной клетки на ее поверхность). Однако последнее утверждение ранее экспериментально не проверялось.

Таким образом, исходя из модельных соображений, для диапазона частот ниже 1 кГц мы пришли к приближенной акустической модели, представляющей источник (чаще точечный), который излучает в неограниченную среду [3]. Допустимость подхода, связанного с распространением звуковых волн внутри грудной клетки человека в этом частотном диапазоне, вытекает из полученных в работе [5] результатов экспериментальной оценки близости скоростей распространения зондирующего сигнала при измерении в нескольких точках поверхности грудной клетки. Однако измерения акустических характеристик источника излучения обычно приходится выполнять в его ближней волновой зоне. При этом акустические датчики при диаметре контактирующей с поверхностью тела области 25 мм имеют в низкочастотном диапазоне небольшие волновые размеры, что позволяет предположить, что падающая на них звуковая волна может считаться локально плоской (кривизной фронта волны можно пренебречь).

Паренхима легких отделена от внешней среды стенкой грудной клетки, образованной мягкими тканями. Скорость продольных звуковых волн в стенке грудной клетки близка к скорости звука в воде. Так как толщина стенки грудной клетки составляет 2–3 см (волновой размер  $\lambda/1000$ ), в волновом смысле она может быть представлена тонким слоем, лежащим на акустически мягкой границе, на которой размещены акустические датчики. Однако сдвиговой жесткостью этих тканей пренебречь уже не представляется возможным. Дело в том, что именно сдвиговая жесткость этого тонкого слоя в проекции установочной поверхности датчика [3] в сочетании с массой самого акустического датчика определяет частоту резонанса его подвеса (установки), которая влияет на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) акустических датчиков [13].

Поскольку далее будут рассматриваться результаты, полученные с использованием датчиков акселерометрического типа, проанализируем

более подробно особенности их функционирования на поверхности грудной клетки. Как было показано ранее [13], при характерных массо-габаритах однокомпонентных датчиков этого типа (акселерометр массой 7.5 г, установленный на эбонитовом основании диаметром 25 мм) частота резонанса подвеса для них лежит в районе  $f_0 = 90\text{--}150$  Гц. Причем резонанс, вследствие существенного затухания сдвиговых колебаний, отличается низкой добротностью. В результате, на частотах, начиная примерно с  $120\text{--}225$  Гц ( $1.5f_0$ ), акселерометрический датчик, ориентированный осью чувствительности нормально к поверхности тела, для продольной звуковой волны, бегущей изнутри грудной клетки, представляет собой приемник колебательной скорости. Тогда как на частотах ниже  $60\text{--}100$  Гц ( $f_0/1.5$ ) он будет вести себя как приемник колебательного ускорения – акселерометр [13].

При установке на том же основании втрое более массивного трехкомпонентного акселерометра, согласно известной формуле для частоты резонанса подвеса [13] произойдет ее снижение в  $(3)^{0.5} = 1.73$  раза, т.е. примерно до  $52\text{--}87$  Гц.

При работе датчика существенно выше частоты резонанса подвеса его колебания отстают от колебаний среды, что порождает сдвиговые “обтекающие препятствие” смещения тканей поверхностного слоя среды примерно в области проекции его установки на поверхность тела при падении продольной волны в нормальном направлении. Наблюдаемая картина схожа с виброизолирующим эффектом армированного резинового виброизолятора [14] и описана нами ранее в [3]. Именно сдвиговая жесткость тонкого поверхностного слоя биологических тканей (меньшая, чем продольная) определяет в этом случае упругость подвеса и частоту резонанса датчика. Аналогично влияние сдвиговой жесткости тонкого слоя будет сказываться при возбуждении сдвиговых осцилляций датчика на поверхности тонкого слоя продольной волной (или ее проекцией), падающей на него с тангенциальных направлений. Следовательно, при малых в волновом смысле размерах датчика можно с некоторой осторожностью (экспериментальных данных нет) предположить, что относительные чувствительности продольной и тангенциальных компонент трехкомпонентного акселерометра будут близки, по крайней мере, на частотах выше  $1.5f_0$ , т.е. примерно с  $80\text{--}130$  Гц, а, значит, и в основной части исследуемого низкочастотного диапазона.

Что касается диапазона частот  $10\text{--}20$  кГц, то на средней частоте  $15$  кГц при скорости звука  $1000$  м/с длина продольной звуковой волны составит  $6.7$  см, а при скорости звука  $100$  м/с –  $6.7$  мм соответственно. Особенности затухания звука в паренхиме легких в этом диапазоне частот совершенно

неизвестны. Кроме того, здесь уже нельзя пренебрегать направленностью акустического датчика (диаметр воспринимающей поверхности  $25$  мм при скорости звука  $100$  м/с составляет  $3.7\lambda$ ) и, хотя и в меньшей степени, источника излучения (диаметр штампа  $10$  мм составляет  $1.5\lambda$ ). Именно поэтому исследование звукопроведения в данном диапазоне частот будет выполнено при насколько возможно противлежащих (оппозитных) по отношению к торсу добровольцев положениях вибростенда и акустических датчиков, лежащих на противоположных половинах грудной клетки, с целью сближения ориентации акустических осей их излучения/приема.

Можно было бы ожидать, что используемые для регистрации проведенного зондирующего сигнала однокомпонентные акселерометрические датчики в высокочастотном диапазоне  $10\text{--}20$  кГц за счет эффекта виброизоляции подвеса в рамках рассмотренной выше модели [13] должны быть полностью развязаны от колебаний поверхности тела и потому совершенно нечувствительны к колебательной скорости продольной волны, бегущей изнутри грудной клетки. Однако на практике в этом диапазоне, напротив, наблюдаются достаточно мощные отклики датчиков на зондирующий сигнал [9]. Объяснение, видимо, заключается в том, что в столь высокочастотном диапазоне ( $10\text{--}19$  кГц) датчики акселерометрического типа воспринимают колебательное ускорение присоединенной (соколеблющейся) массы среды [16], т.е. вновь начинают вести себя как акселерометры.

## МЕТОД

Установка для трансмиссионного зондирования легких человека, описанная ранее [5, 17], дополнительно оснащена комплектом устанавливаемых на поверхности грудной клетки однокомпонентных датчиков акселерометрического типа, способных работать сразу в обоих исследуемых частотных диапазонах (выполнены на основе акселерометров 333B52 (PCB Piezotronics), имеющих частоту собственного резонанса около  $35$  кГц), и 3-х компонентным акселерометрическим датчиком для диапазона частот  $80\text{--}1000$  Гц (выполненным на акселерометре 317A41 (PCB Piezotronics)).

При этом нужно заметить, что однокомпонентные акселерометрические датчики преимущественно реагируют на продольную волну, тогда как тангенциально ориентированные компоненты 3-х компонентного акселерометрического датчика могут регистрировать как сдвиговые волны, так и составляющие продольной волны, проходящей под значительным углом падения (углом к нормали к поверхности установки датчика). Разделить продольные и сдвиговые волны можно будет, только если они имеют различные скоро-

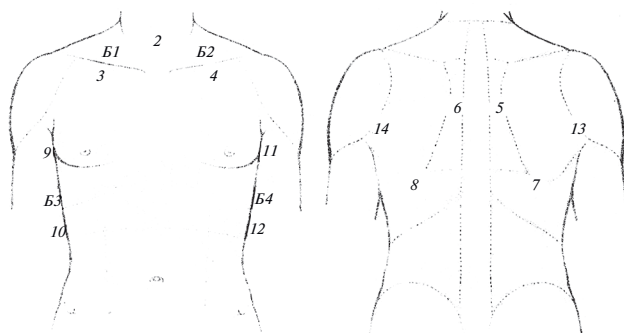


Рис. 1. Схема точек установки акселерометрических датчиков (№ 2–14) и проекции штампа виброболта вибростенда (B1–B4) на торсе обследуемого.

сти распространения. Тем не менее, если предположение о близости чувствительностей каналов акселерометра выполняется, то для составляющих продольных волн можно определить отношение амплитуд сигнала в тангенциальных и продольном направлениях, и через функции  $\arctg(U_{vt}/U_l)$ ,  $\arctg(U_{ht}/U_l)$ , где  $vt$  – вертикальная тангенциальная,  $ht$  – горизонтальная тангенциальная,  $l$  – продольная компоненты, попытаться оценить углы падения фронта звуковой волны на датчик в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно, по аналогии с тем, как это сделано ранее для подводных векторных приемников (например, [15]).

Регистрация сигналов от указанных датчиков через соответствующие цепи питания предварительных усилителей осуществлялась на 16-канальном электронном самописце Powerlab (ADInstruments), обеспечивающем запись и отображение временных реализаций величин электрического напряжения (в вольтах), подаваемых на вход каждого из каналов.

Для низкочастотного диапазона 80–1000 Гц в качестве зондирующего сигнала был использован фазоманипулированный (ФМ) сигнал, представляющий собой совокупность разнесенных по времени М-кодированных (основание – 511 отсчетов) последовательностей с тремя различными несущими частотами 200, 300, 750 Гц [7], частота дискретизации 10 кГц. Для высокочастотного диапазона в качестве зондирующих сигналов использован линейно частотно-модулированный (ЛЧМ) сигнал с полосой частот 10–19 кГц и продолжительностью перестройки 6 секунд. Верхний предел частоты сигналов этого диапазона ограничен 19 кГц, чтобы обеспечить выполнение правила Найквиста при частоте дискретизации 40 кГц.

Описанные сигналы излучались в дыхательную систему человека через рот электродинамическим громкоговорителем [17], оснащенным трубкой со сменным одноразовым фильтром, в

низкочастотном диапазоне, а с поверхности грудной клетки – компактным вибростендом 4810 Brüel&Kjær в обоих частотных диапазонах. Излучатели управлялись аналоговым сигналом с ЦАП профессиональной выносной звуковой карты Transit, M-Audio персонального компьютера, генерируемым с частотой дискретизации 96 кГц. Сигнал на излучатели подавался через усилитель мощности 860 PHONIC MAX.

Используемые точки установки акустических датчиков и проекции штампа виброболта вибростенда на поверхности грудной клетки показаны на рис. 1. Акустические датчики приклеивались на медицинскую двустороннюю клеящую ленту, а вибростенд удерживался рукой оператора с обеспечением ориентации оси виброболта примерно по нормали к поверхности грудной клетки. В эксперименте было задействовано 4 добровольца, давших информированное согласие на участие в эксперименте.

При обработке сигналов вычислялся коэффициент взаимной корреляции  $R_{xy}(1)$ , показывающий степень корреляции между излученной репликой сигнала  $x$  (на выходе звуковой карты) и принятым сигналом  $y$  в каналах 16-канального самописца

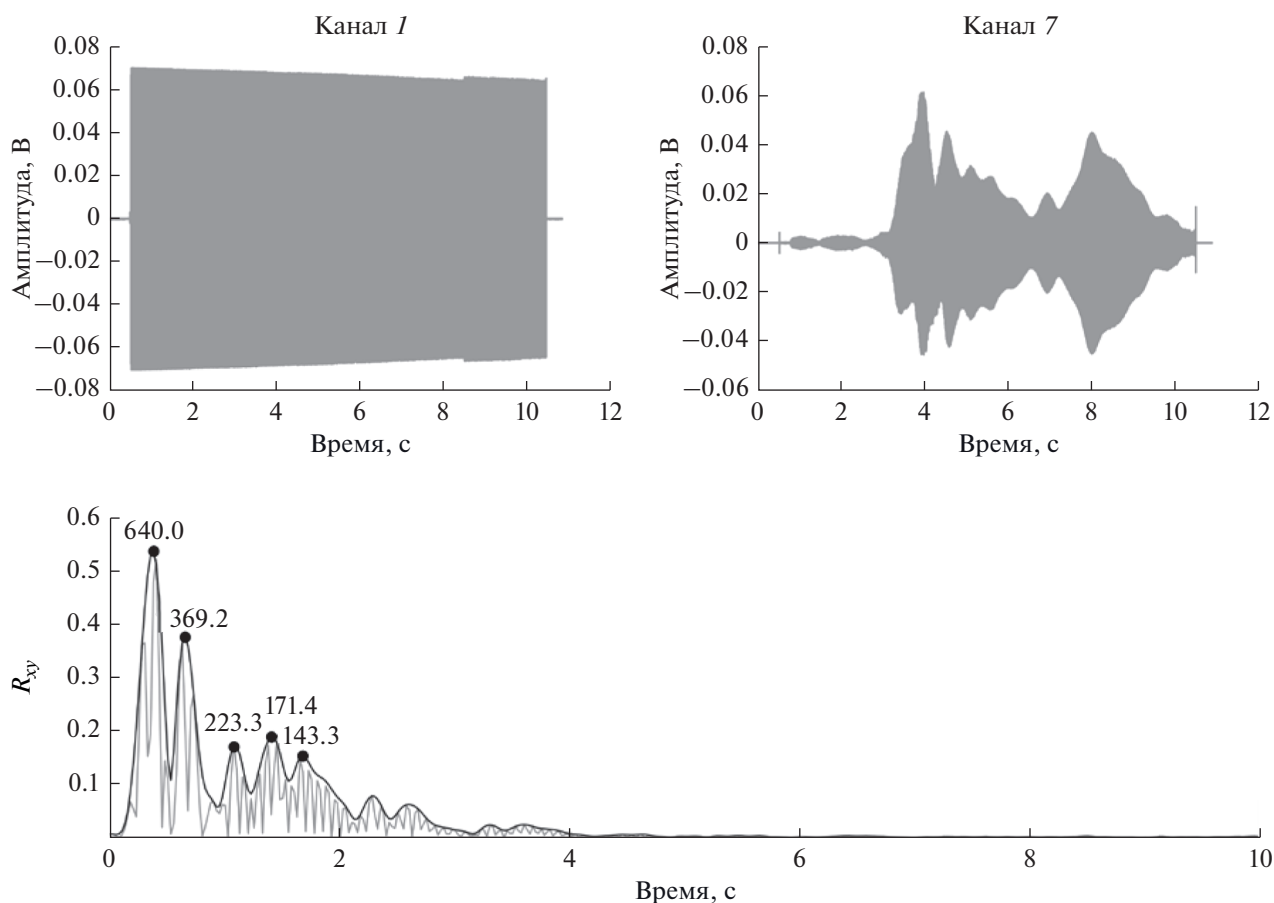
$$R_{xy} = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_{xx}(0)F_{yy}(0)}}, \quad (1)$$

где  $F_{xy}$  – взаимно-корреляционная функция реплики излученного сигнала  $x$  и принятого сигнала  $y$ ;  $F_{xx}(0)$  – максимум автокорреляционной функции сигнала  $x$ , а  $F_{yy}(0)$  – сигнала  $y$ . При этом информация об относительных амплитудах принятых сигналов теряется. Для того чтобы выделить и эту информацию, по аналогии с передаточной функцией введена нормировка взаимно-корреляционной функции на максимум автокорреляционной функции реплики излучаемого сигнала  $x$

$$T_{xy} = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_{xx}(0)F_{xx}(0)}} = \frac{F_{xy}}{F_{xx}(0)}. \quad (2)$$

Полученный корреляционный коэффициент  $T_{xy}(2)$  линейно зависит от амплитуды принятого сигнала, тогда как амплитуда реплики излученного (записываемой на канал 1 самописца) остается постоянной. Величина  $T_{xy}$  может быть представлена и в логарифмическом масштабе, что оказалось удобным для анализа звукопроводения в высокочастотном диапазоне.

Для функций  $R_{xy}$ ,  $T_{xy}$  рассчитывались огибающие Гильберта, в результате чего получались графики, обычно называемые свертками зондирующего и принятого сигналов. На рис. 2 в качестве примера показаны отклики излученного ЛЧМ сигнала высокочастотного диапазона (канал самописца № 1) и датчика № 7 (канал само-



**Рис. 2.** Характерный вид сигналов при зондировании высокочастотным сигналом 10–19 кГц (трасса *Б1* – т. 7, доброволец Ш.) при спокойном дыхании (HF1): Канал 1 – реплика излученного виброизлучателем ЛЧМ сигнала (канал 1 самописца), Канал 7 – отклик датчика № 7 (Канал 7 самописца),  $R_{xy}$  – коэффициент взаимной корреляции откликов, его огибающая – свертка, точки – выделенные пики огибающей, цифры – результирующая скорость звука, м/с.

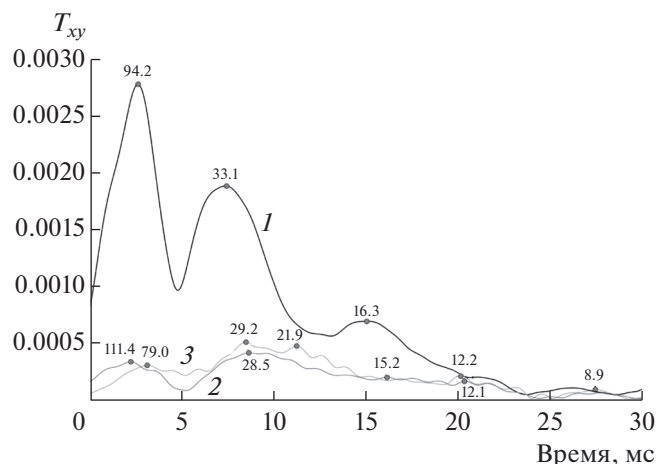
писца № 7), а также амплитуда функции  $R_{xy}$  и ее огибающая.

Каждый пик свертки в соответствии с общеизвестными радио- и гидролокационными соображениями, а также нашим опытом [5, 7–9], трактуется как отдельный приход зондирующего сигнала (звуковой волны), имеющий свою определенную временную задержку. Каждый такой приход сигнала распознавался автоматически (рис. 2). При этом максимумы огибающей  $R_{xy}$  находились путем численного дифференцирования, выделялись максимумы, превышающие пороговое значение. Пороговое значение устанавливалось равным максимальному уровню боковых лепестков относительно основного лепестка автокорреляционной функции – для сигнала ФМ 15%, для сигнала ЛЧМ 18%. Кроме того, использовалось дополнительное требование – абсолютный уровень  $R_{xy}$  обнаруженного пика должен быть выше 0.1. Соответствующие указанным условиям пики отмечались метками и далее переносились на графики функции  $T_{xy}$ .

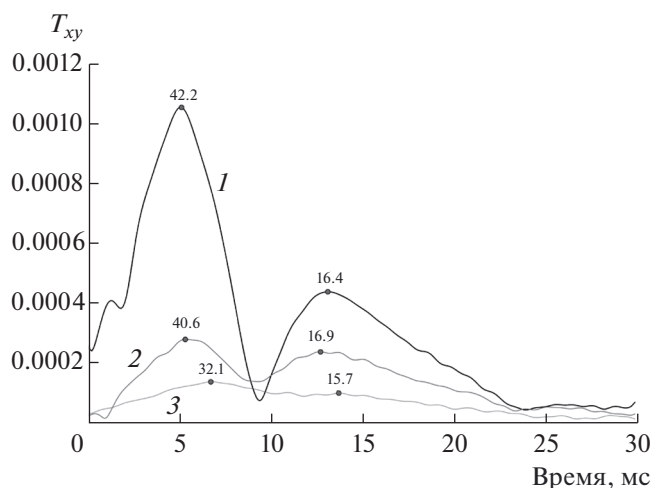
Результирующая скорость распространения звуковой волны для каждого прихода сигнала рассчитана по прямо измеренному пелвиметром расстоянию между центром следа проекции штампа виброболта вибростенда на поверхности тела (или 2-го трахеального акселерометрического датчика при зондировании через рот, с учетом поправки на время распространения зондирующего сигнала от контрольного датчика у рта до датчика № 2 [5]) и центром позиции конкретного приемного акустического датчика, отнесенному к временной задержке, определяемой по свертке. Рассчитанные значения скорости звука обозначены цифрами над пиками свертки (рис. 2 и далее).

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЗВУКА В ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ 80–1000 ГЦ 3-Х КОМПОНЕНТНЫМ АКСЕЛЕРОМЕТРИЧЕСКИМ ДАТЧИКОМ

Зондирование легких осуществлялось при излучении ФМ сигнала через рот на спокойном вы-



**Рис. 3.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  для трехкомпонентного акселерометрического датчика в точке 7 при зондировании через рот (доброволец С): кривая 1 – продольная компонента с нормальной ориентацией к поверхности грудной клетки, кривая 2 – вертикальная тангенциальная компонента, кривая 3 – горизонтальная тангенциальная компонента.



**Рис. 4.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  для трехкомпонентного акселерометрического датчика в точке 7 при зондировании вибростендом из точки В1 (доброволец С): кривая 1 – продольная компонента с нормальной ориентацией к поверхности грудной клетки, кривая 2 – вертикальная тангенциальная компонента, кривая 3 – горизонтальная тангенциальная компонента.

дохе [7], тогда как зондирование легких с поверхности грудной клетки виброизлучателем выполнялось при спокойном дыхании.

Характерные свертки для откликов трех компонент трехкомпонентного акселерометрического датчика, установленного в т. 7 на одном и том же добровольце, на излучение низкочастотного зондирующего сигнала в рот представлены на рис. 3, а на

излучение вибростендом из точки В1 – на рис. 4. Положение и ориентация трехкомпонентного датчика одни и те же: кривая 1 – продольная компонента с нормальной ориентацией к поверхности грудной клетки, кривая 2 – вертикальная тангенциальная компонента, кривая 3 – горизонтальная тангенциальная компонента.

Первое, на что следует обратить внимание на рис. 3, – это хорошо выраженные пики свертки по продольной компоненте акселерометрического датчика. Обычно в нижних отделах легких при зондировании через рот наблюдается 3 таких пика, характеризующих приходы зондирующего сигнала. Амплитуды этих пиков (приходов) существенно превышают (в 2–10 раз) пики, наблюдаемые при сходных задержках времени на свертках тангенциальных компонент акселерометрического датчика.

Скорости значимых по амплитуде приходов, определяемых по пикам свертки каналов акселерометра, лежат в пределах 15–111 м/с. Этот диапазон скоростей распространения хорошо согласуется с данными, полученными для той же полосы частот 80–1000 Гц на обширной выборке обследуемых ранее [5], и характерен для распространения продольной звуковой волны. Действительно, если бы было существенным распространение через паренхиму легких сдвиговых волн, соотношение амплитуд пиков свертки каналов акселерометра (рис. 3) изменилось бы в пользу тангенциальных каналов. Что касается возможности распространения сдвиговых волн по поверхности грудной стенки, то выявленные ранее при этом скорости распространения 2–3 м/с [18, 11] для наблюдаемых в случае зондирования через рот приходов не обнаруживаются вовсе.

Итак, если вкладом сдвиговых и поверхностных волн при зондировании через рот можно пренебречь, то через отношения амплитуд пиков в каналах акселерометрического датчика появляется возможность оценить углы падения фронта продольной волны (волн) на участок поверхности тела, где размещен акселерометрический датчик. Для случая, показанного на рис. 3, эти оценки приведены в табл. 1.

Как следует из табл. 1, первый приход зондирующего сигнала имеет очень малые углы падения и по вертикали, и по горизонтали, и, следовательно, характеризует продольную звуковую волну, распространяющуюся почти по нормали к оси чувствительности этой компоненты акселерометра. Такое распространение характерно для так называемого “воздушно-структурного” механизма звукопроводения [3], когда звуковая волна, излучаемая в полость рта, большую часть пути до датчика пробегает по просвету дыхательных путей и переизлучается в паренхиму легких только на уровне достаточно удаленных (дистальных) мел-



**Таблица 1.** Оценки углов прихода фронта волны при зондировании через рот (рис. 3).

Область излучения	Точка установки датчика	№ прихода на свертке (рис. 3)	Отношения пиковых амплитуд компонент акселерометра	$U_{vt}/U_1$ , $U_{ht}/U_1$	Угол падения, градусы
Рот	7	1	Горизонтальная тангенциальная/продольная, $U_{ht}/U_1$	0.11	12.4
Рот	7	1	Вертикальная тангенциальная/продольная, $U_{vt}/U_1$	0.12	13.5
Рот	7	2	Горизонтальная тангенциальная/продольная, $U_{ht}/U_1$	0.27	28.4
Рот	7	2	Вертикальная тангенциальная/продольная, $U_{vt}/U_1$	0.22	23.8
Рот	7	3	Горизонтальная тангенциальная/продольная, $U_{ht}/U_1$	0.63	32.2
Рот	7	3	Вертикальная тангенциальная/продольная, $U_{vt}/U_1$	0.30	31.0

ких бронхов [5]. Кстати, и наблюдаемые скорости распространения для первого прихода согласуются с ранее выполненными оценками для этого механизма [5].

Второй и третий приходы (рис. 3) характеризуют фронты волн, хотя и распространяющихся с разными скоростями, но падающими на акустический датчик в направлении горизонтали практически под одним углом. В направлении вертикали эти углы различаются немного больше. Однако интересно, что величины этих углов намного (в 2–2.5 раза) превышают вертикальный угол, наблюдаемый для 1-го прихода. Сами значения углов падения для каждого из приходов могут определяться не слишком точно, поскольку их оценка требует выполнения ранее высказанного дискуссионного предположения об идентичности влияния системы подвеса на чувствительности продольного и тангенциальных каналов трехкомпонентного акселерометрического датчика. Но значимое изменение углов падения в одних и тех же условиях излучения и приема означает распространение сигнала по другому пути или от другого источника. Судя по результирующим скоростям 2-го и 3-го приходов, здесь имеет место гораздо более длинный ход звуковой волны по паренхиме легких, чем по просвету дыхательных путей, как для 1-го прихода. Эти соотношения длин хода звуковых волн, да и скорости распространения, более характерны для так называемого “структурного” механизма звукопроводения [3], когда звуковая волна, излучаемая в полость рта, переизлучается в паренхиме легких из просвета дыхательных путей на уровне трахеи или крупных бронхов [5]. Интересно, что первый из этих “структурных” приходов по скорости распространения 33 м/с близок к предсказаниям скоро-

сти быстрой продольной волны по модели Био (25–45 м/с), тогда как второй, имеющий скорость 16 м/с – к предсказаниям модели “эффективной среды” (22 м/с), а вовсе не медленной продольной волны по модели Био (5 м/с) [11].

Перейдем теперь к оценке результатов зондирования с поверхности грудной клетки (рис. 4, табл. 2) на том же обследуемом. Обычно в нижних отделах легких при зондировании с поверхности грудной клетки наблюдается 2 пика свертки, характеризующих приходы зондирующего сигнала. Интересно, что скорости распространения этих приходов близки к скоростям 2-го и 3-го приходов при зондировании через рот. Практически полная идентичность по скоростям распространения наблюдается для 2-го прихода при зондировании с поверхности грудной клетки из позиции *Б1* и 3-го прихода при зондировании через рот. Поскольку при зондировании с поверхности грудной клетки из точки *Б1* штамп виброболта вибростенда размещен примерно на уровне середины длины трахеи, отсюда следует, что переизлучение в паренхиме легких звуковой волны, описываемой 3-м приходом, при зондировании через рот должно происходить преимущественно из внутригрудного участка трахеи. Это наблюдение идеально укладывается в модель “структурного” звукопроводения по паренхиме легких [5]. Первый приход сигнала при зондировании с поверхности грудной клетки из позиции *Б1*, будучи более высокоскоростным, скорее всего, должен быть связан с звукопроводением по более плотным тканям легких, например, средостению. Передача сигнала по плотным тканям грудной клетки в просвет трахеи с частичным задействованием “структурного” механизма звукопроводения по просвету дыхательных путей также не исключена. Веро-

**Таблица 2.** Оценки углов прихода фронта волны при зондировании с поверхности грудной клетки (рис. 4)

Область излучения	Точка установки датчика	№ прихода на свертке (рис. 4)	Отношения пиковых амплитуд компонент акселерометра	$U_{vt}/U_1$ , $U_{ht}/U_1$	Угол падения, градусы
<i>Б1</i>	7	1	Горизонтальная тангенциальная/продольная, $U_{ht}/U_1$	0.13	14.6
<i>Б1</i>	7	1	Вертикальная тангенциальная/продольная, $U_{vt}/U_1$	0.26	27.5
<i>Б1</i>	7	2	Горизонтальная тангенциальная/продольная, $U_{ht}/U_1$	0.23	24.7
<i>Б1</i>	7	2	Вертикальная тангенциальная/продольная, $U_{vt}/U_1$	0.54	47.2

ятым объяснением первого прихода сигнала при зондировании с поверхности грудной клетки может быть и вышеописанная быстрая продольная волна по модели Био [11].

Что касается соотношения амплитуд пиков наблюдаемых приходов на свертках (рис. 4), то здесь разница между продольным и вертикальным тангенциальным каналами заметно меньше, чем при зондировании через рот. Поскольку все условия зондирования идентичны (один и тот же обследуемый, датчик в одном и том же расположении, меняется только позиция излучателя), можно, также как и прежде, исключить влияние сдвиговых волн. Следовательно, можно оценить и углы падения фронтов волн на акустический датчик (табл. 2). Как и ранее, сами значения углов падения для каждого из приходов не слишком точны, поскольку их оценка требует выполнения ранее высказанного дискуссионного предположения об идентичности влияния системы подвеса на чувствительности продольного и тангенциальных каналов трехкомпонентного акселерометрического датчика, однако значимое изменение углов падения в тех же условиях приема означает распространение сигнала по другому пути или от другого источника.

Согласно табл. 2, при зондировании из точки *Б1* фронт волны зондирующего сигнала, характеризующего 1-м приходом, падает под существенным вертикальным углом, близким к углу падения 2-го прихода при зондировании через рот.

Угол падения для фронта волны зондирующего сигнала, характеризующего 2-м приходом, несколько больше, однако и позиция штампа вибростенда *Б1* смещена по направлению к этому датчику ближе, чем нижняя часть трахеи, предполагаемая в качестве основного источника “структурного” звукопроводения при зондировании через рот. В целом, эффективные углы падения фронта (фронтов) звуковой волны по вертикали намного больше, чем для первого прихода при зондировании через рот. Это наблюдение может

быть интерпретировано как результат звукопроводения от точечного источника, образованного штампом виброизлучателя, непосредственно или опосредовано через средостение или трахею по паренхиме легких, по контрасту со случаем “воздушно-структурного” звукопроводения при зондировании через рот.

Следует заметить, что при зондировании с поверхности грудной клетки на свертках продольной компоненты трехкомпонентного акселерометра иногда наблюдаются более слабые по амплитуде, чем вышеописанные, пики особо низкоскоростных приходов (менее 5 м/с), которые можно трактовать как вызванные колебательными смещениями штампа виброизлучателя сдвиговые волны, распространяющиеся по поверхности грудной клетки [16, 11]. Вследствие высокого затухания таких колебаний и большого расстояния между излучателем и акустическим датчиком (в данном случае не менее 20 см) эти сигналы, вероятно, претерпевают очень существенное ослабление по сравнению с прошедшими через паренхиму легких продольными волнами.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЗВУКА В ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ 10–19 КГц

В высокочастотном диапазоне зондирование легких осуществлялось только виброизлучателем с поверхности грудной клетки по схеме, показанной на рис. 1. Зондирование через рот в этом диапазоне частот оказалось невозможным вследствие недостаточного уровня излучаемых динамиком сигналов. При выполнении зондирования обследуемые последовательно выполняли следующие дыхательные маневры: спокойное дыхание (HF1), задержку дыхания при максимально глубоком вдохе (HF2), задержку дыхания при максимально полном выдохе (HF3). Поскольку при маневре спокойного дыхания (HF1) была выявлена высокая вариабельность времен и амплитуд приходов сигнала, далее анализировались только ма-

невры с задержками дыхания HF2, HF3, вариабельность при которых оказалась существенно ниже.

При частоте дискретизации 40 кГц 16-канальный самописец PowerLab (ADInstruments) обеспечивал возможность синхронной регистрации сигналов только для 7 каналов. По этой причине, а также для снижения влияния направленности акустических датчиков и виброизлучателя запись сигналов производилась от датчиков, расположенных на противоположных штампу виброизлучателя половинах грудной клетки (оппозитно) (рис. 1).

Согласно рис. 2 при зондировании в высокочастотном диапазоне, так же как и в низкочастотном, по функции  $R_{xy}$  удается разделять низкоскоростные и высокоскоростные приходы звуковых волн. Таким образом, возможность разложения полученных сигналов на высокоскоростные и низкоскоростные приходы, впервые выявленная ранее [9], подтверждена и на этой, независимой, выборке обследуемых при использовании специальных высокочастотных акустических датчиков. Однако приходов в высокочастотном диапазоне наблюдается гораздо больше, чем в низкочастотном. Это свидетельствует о более сложных закономерностях звукопроведения, зависящих от ориентации акустических осей направленных (в этом диапазоне частот) датчиков и излучателей и, вероятно, включающих переотражение от более плотных легочных структур, рефракцию и дисперсию. На настоящем этапе исследования разделить эти эффекты не представляется возможным. Тем не менее, чтобы минимизировать, по крайней мере, влияние переотражений и направленности датчиков/излучателя, рассмотрим далее звукопроведение на оппозитных трассах (излучатель и датчик расположены на противоположных половинах грудной клетки). Углы расположения источника излучения к акустической оси приема датчика и расположения датчика к акустической оси излучения источника приближенно оценивались с помощью транспорта.

Закономерен вопрос, не являются ли некоторые из фиксируемых приходов результатом распространения сдвиговых волн. Исчерпывающе ответить на этот вопрос пока невозможно, т.к. трехкомпонентный акселерометрический датчик не пригоден для высокочастотного диапазона из-за недостаточно высокой частоты собственного резонанса чувствительного элемента. Однако при используемых оппозитных положениях виброизлучателя и датчика, вследствие близкой к оси приема ориентации акустического датчика на источник и близкой к оси излучения ориентации источника на датчик, доминирующим по величине  $T_{xy}$ , очевидно, должен считаться вклад распространяющихся прямо вдоль трассы между датчи-

ком и излучателем продольных звуковых волн (сдвиговые волны в биотканях на тех же дистанциях должны затухать в большей степени).

При исследованиях на оппозитных трассах излучатель—датчик установлено существование низкоскоростных приходов со скоростями распространения в среднем 50–150 м/с. Их амплитуда и/или скорость обратно зависят от степени воздухонаполнения легких при задержке дыхания на вдохе и выдохе, что позволяет трактовать эти приходы как результат распространения продольной звуковой волны преимущественно по паренхиме легких.

Амплитуды высокоскоростных приходов имеют скорости 150–1000 м/с и чаще усиливаются при уменьшении воздухонаполнения легких при задержках дыхания на выдохе. Поэтому они могут быть связаны с распространением продольной волны по плотным тканям грудной клетки (стенки бронхов, стенки сосудов и наполняющая их кровь [6]).

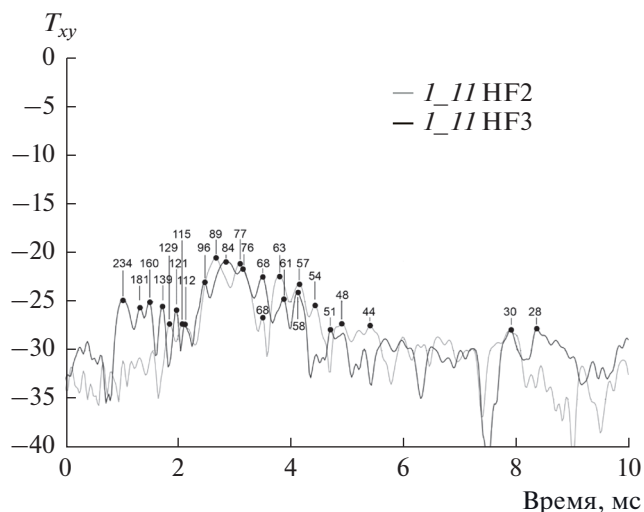
Обнаруженные низкоскоростные приходы имеют скорость звука в пределах 50–150 м/с, что для средней частоты исследуемого диапазона 15 кГц дает длины волн от 0.33 до 1 см. Столь небольшие длины волн могут обеспечить пространственное разрешение в паренхиме легких патологических участков, отличающихся по акустическим свойствам, размерами порядка первых единиц сантиметров! Таким образом, выявленный феномен низкоскоростного распространения звука в легких человека в диапазоне 10–19 кГц представляется перспективным для обеспечения акустической визуализации с высоким разрешением или даже томографии легочной паренхимы.

Кроме того, выявлено 4 варианта соотношения амплитуд высокоскоростных и низкоскоростных приходов и их изменения в зависимости от степени воздухонаполнения легких при задержках дыхания на вдохе и выдохе. Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  (свертки зондирующего и принятого сигналов) для этих типов показаны на диаграммах рис. 5–8. Они представлены в логарифмическом масштабе ( $10 \lg$ ), чтобы в одном графике вместить результаты, полученные и для задержки на вдохе (HF2), и для задержки на выдохе (HF3).

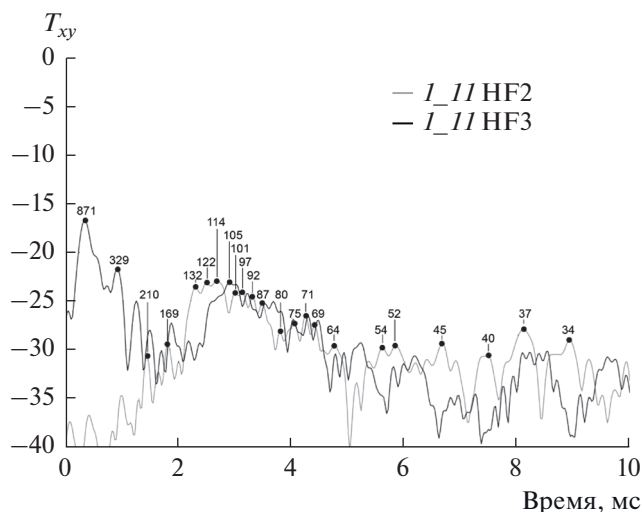
Тип 1 (рис. 5) — появление высокоскоростных приходов при выдохе (HF3) по сравнению с вдохом (HF2) без существенных изменений основных низкоскоростных приходов.

Тип 2 (рис. 6) — существенное увеличение амплитуд высокоскоростных приходов при выдохе (HF3) по сравнению с вдохом (HF2).

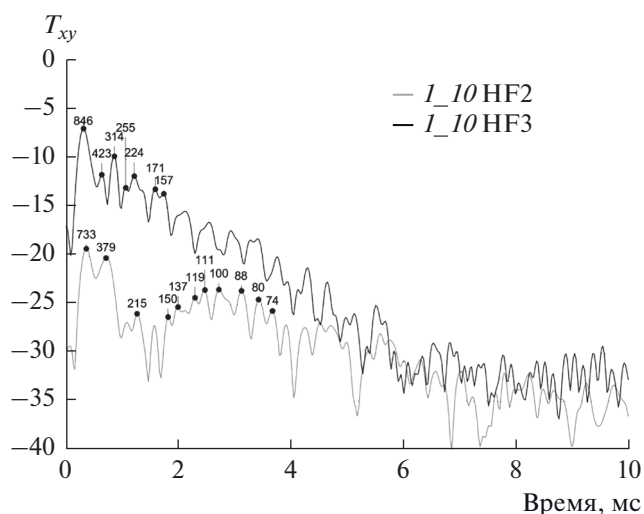
Тип 3 (рис. 7) — резкое увеличение амплитуд высокоскоростных и низкоскоростных приходов при выдохе (HF3) по сравнению с вдохом (HF2).



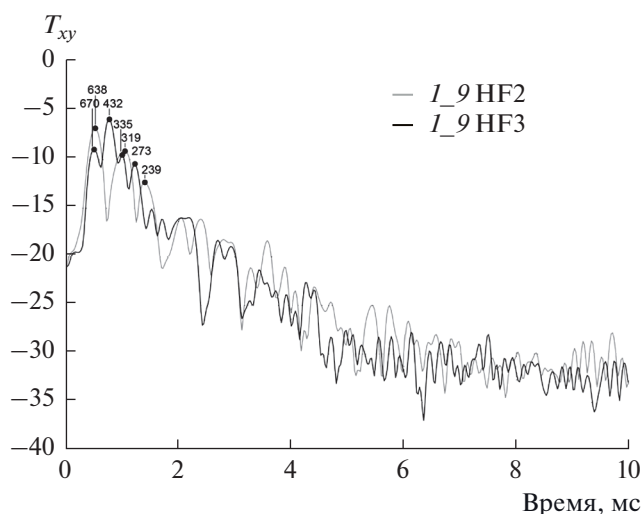
**Рис. 5.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  (тип 1) при зондировании с поверхности грудной клетки на трассе  $B1 - т. 11$  (угол расположения источника излучения к акустической оси приема датчика до  $30^\circ$ , угол расположения датчика к акустической оси излучения источника до  $45^\circ$ ), доброволец К1: для глубокого вдоха (HF2) и глубокого выдоха (HF3).



**Рис. 6.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  (тип 2) при зондировании с поверхности грудной клетки на трассе  $B3 - т. 11$  (угол расположения источника излучения к акустической оси приема датчика  $15^\circ - 20^\circ$ , угол расположения датчика к акустической оси излучения источника до  $30^\circ$ ), доброволец С: для глубокого вдоха (HF2) и глубокого выдоха (HF3).



**Рис. 7.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  (тип 3) при зондировании с поверхности грудной клетки на трассе  $B4 - т. 10$  (угол расположения источника излучения к акустической оси приема датчика  $15^\circ - 20^\circ$ , угол расположения датчика к акустической оси излучения источника до  $30^\circ$ ), доброволец С: для глубокого вдоха (HF2) и глубокого выдоха (HF3).



**Рис. 8.** Огибающие Гильберта функции  $T_{xy}$  (тип 4) при зондировании с поверхности грудной клетки на трассе  $B2 - т. 9$  (угол расположения источника излучения к акустической оси приема датчика до  $30^\circ$ , угол расположения датчика к акустической оси излучения источника до  $45^\circ$ ), доброволец К2: для глубокого вдоха (HF2) и глубокого выдоха (HF3).

Тип 4 (рис. 8) – отсутствие какой-либо динамики амплитуды или скорости высокоскоростных и низкоскоростных приходов между выдохом (HF3) и вдохом (HF2).

Один из этих вариантов – тип 4 (рис. 8), характеризующийся преобладанием амплитуд высокоскоростных приходов и на вдохе, и на выдохе, мо-

жет быть акустически интерпретирован как снижение воздухонаполнения легочной ткани на выдохе, и встречается только у одного немолодого добровольца К2 с длительным течением гормонозависимой бронхиальной астмы, а не у 3-х других, которые являются молодыми здоровыми лицами. Следовательно, предложенный подход может

быть перспективен для оценки локальной вентиляции участков легочной паренхимы.

Заметим, что наблюдаемая разница звукопроводения между вдохом и выдохом не может быть объяснена смещением положений излучателя и датчика, т.к. основное изменение объема легких достигается за счет движений диафрагмы, а не поверхности грудной клетки. Поэтому реально измеренные пелвиметром прямые расстояния между положениями излучателя и датчика при маневрах задержки дыхания на вдохе (HF2) и выдохе (HF3) различались не более чем на 0.5–1 см, что менее 5% от минимальной исследуемой дистанции и потому не может приводить к столь драматическим изменениям огибающей функции  $T_{xy}$ , которые наблюдаются на рис. 5–7!

Поскольку скорость распространения поверхностных волн по стенке грудной клетки для высокочастотного диапазона неизвестна, возникает вопрос, не связаны ли наблюдаемые приходы с этим механизмом звукопроводения. Однако в этом случае также не должно быть таких значимых изменений между вдохом и выдохом, которые наблюдаются на большинстве оппозитных трасс, например, рис. 5–7.

### МОДЕЛЬНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Итак, нами экспериментально установлено низкоскоростное звукопроводение в обоих диапазонах частот, наиболее вероятно, осуществляемое посредством продольных звуковых волн. Возникает вопрос, какой механизм может объяснить распространение продольных звуковых волн в обоих диапазонах частот 80–1000 Гц и 10–19 кГц с близкими скоростями?

Что касается модели Био [11], то оценок для высокочастотного диапазона 10–19 кГц не имеется. Если, используя модель “эффективной среды”, применить известную формулу Миннаерта [19] для водоподобной среды с пузырьками, то резонансная частота пузырьков воздуха в воде определяется как  $f = 3.26/r$ , где  $r$  – радиус пузырька. При радиусе легочных альвеол  $r = 0.1–0.15$  мм, получаем резонансную частоту  $f = 22–33$  кГц. Таким образом, и низкочастотный 80–1000 Гц, и высокочастотный 10–19 кГц диапазоны проведения звука в легких лежат заметно ниже фундаментального резонанса альвеол. Следовательно, в обоих частотных диапазонах скорость звука должна определяться податливостью воздуха в альвеолах и плотностью тканей стенки альвеол. Таким образом, в обоих частотных диапазонах скорости звука через нормально заполненную воздухом паренхиму легких должны быть достаточно близки. Это действительно и наблюдается по результатам приведенных измерений при зондировании с поверхности грудной клетки, где для низкоскорост-

ных приходов получены скорости 50–150 м/с в высокочастотном диапазоне 10–19 кГц, а в низкочастотном диапазоне 80–1000 Гц – скорости 15–50 м/с. Последние значения, кстати, хорошо согласуются с независимыми результатами [5].

Однако в этом случае закономерен вопрос, почему продольные звуковые волны не распространяются в паренхиме легких в полосе частот 1–10 кГц [6], находящейся между диапазонами 80–1000 Гц и 10–19 кГц, где звукопроводение можно полагать доказанным?

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В низкочастотном диапазоне 80–1000 Гц установлено преимущественное проведение к поверхности грудной клетки через паренхиму легких продольных, а не сдвиговых волн со скоростями распространения от 100 (через рот) до 15 м/с. При зондировании через рот для первых 2–3 приходов зондирующего сигнала выявлена значимая разница эффективных углов падения фронта продольной волны зондирующего сигнала на поверхность грудной клетки, подтверждающая ранее сформулированные представления о воздушно-структурном и структурном механизмах проведения звука из просвета бронхиального дерева на стенку грудной клетки [7, 8, 5]. При зондировании с поверхности грудной клетки виброизлучателем из надключичной области наблюдаются 2 более низкоскоростных прихода (от 50 до 15 м/с), эффективные углы падения которых по вертикали намного больше, чем для первого прихода при зондировании через рот, что свидетельствует о структурном звукопроводении от точечного источника, образованного штампом виброизлучателя.

При зондировании виброизлучателем с поверхности грудной клетки в высокочастотном диапазоне 10–19 кГц установлено существование низкоскоростных приходов со скоростями распространения 50–150 м/с, трактуемых как результат распространения продольной звуковой волны преимущественно по паренхиме легких, и наличие высокоскоростных приходов со скоростями 150–1000 м/с, связываемых с распространением продольной волны по плотным тканям грудной клетки. Выявлена зависимость соотношения амплитуд пиков низкоскоростных и высокоскоростных приходов от воздухонаполнения паренхимы легких. Выполнены оценки, показывающие, что низкоскоростные приходы звуковой волны могут обеспечить пространственное разрешение порядка первых единиц сантиметров при выявлении отличающихся по акустическим свойствам участков в паренхиме легких.

Возможность существования низкоскоростного распространения продольных звуковых волн в обоих исследованных диапазонах частот

укладывается в модель “эффективной” водоподобной среды с микропузырьками воздуха, частота фундаментального резонанса легочных альвеол в которой, оцененная по формуле Миннаерта [17], составляет 23–33 кГц.

Полученные результаты существенно расширяют феноменологию распространения звуковых волн в легких человека и кажутся многообещающими в плане перспектив создания альтернативной акустической визуализации паренхимы легких в медицинских целях.

Исследование низкочастотного звукопроведения в легких человека выполнено при поддержке НИР № 0271-2019-0010 по Программе фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2019-2021 гг. (регистрационный номер: АААА-А20-120031890011-8). Исследование высокочастотного звукопроведения и акустическое моделирование для обоих диапазонов частот выполнены при поддержке гранта РФФИ 16-08-00075-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяченко А.И., Михайловская А.Н. Респираторная акустика (обзор) // Труды ИОФАН. 2012. Т. 68. С. 136–181.
2. Peng Y., Dai Z., Mansy H., Sandler R., Balk A., Royston T. Sound transmission in the chest under surface excitation: an experimental and computational study with diagnostic applications // Med. Biol. Eng. Comp. 2014. V. 52. № 8. P. 695–706.
3. Коренбаум В.И., Тагильцев А.А., Кулаков Ю.В. Особенности передачи звука голоса человека на стенку грудной клетки // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 380–390.
4. Henry B., Royston T.J. A multiscale analytical model of bronchial airway acoustics // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 142. № 4. P. 1774–1783.
5. Korenbaum V., Shiryaev A. Sound propagation through human lungs, under transmission sounding with acoustic signal of 80–1000 Hz frequency band // Proc. of Meetings on Acoustics (POMA). 2015. V. 23. № 1. P. 020002.
6. Rueter D., Hauber H., Droeman D., Zabel P., Uhlig S. Low-frequency ultrasound permeates the human thorax and lung: a novel approach to non-invasive monitoring // Ultraschall in der Medizin–European J. of Ultrasound. 2010. V. 31. № 1. P. 53–62.
7. Коренбаум В.И., Нужденко А.В., Тагильцев А.А., Костив А.Е. Исследование прохождения сложных звуковых сигналов в дыхательной системе человека // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 537–544.
8. Коренбаум В.И., Дьяченко А.И., Нужденко А.В., Лопаткин Н.С., Тагильцев А.А., Костив А.Е. Прохождение сложных звуковых сигналов в дыхательной системе человека в зависимости от скорости звука в используемой газовой смеси // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 854–861.
9. Korenbaum V., Shiryaev A., Tagiltsev A., Kamenev S. Features of 10–19 kHz sound propagation through human lungs // 26-th Congress of the European Federation of Societies for Ultrasound in Medicine and Biology. 2014. P. 66.
10. Paciej R., Vyshedskiy A., Shane J., Murphy R. Transpulmonary speed of sound input into the supraclavicular space // J. Appl. Physiol. 2003. V. 94. P. 604–611.
11. Dai Z., Peng Y., Mansy H., Sandler R., Royston T. Porovisco-elastic modeling of mechanical wave motion in the lungs // J. Vib. Acoust. 2014. V. 136. № 051012–1.
12. Коренбаум В.И., Тагильцев А.А., Горовой С.В., Ширяев А.Д., Костив А.Е. О дальнометрии источников свистящих дыхательных звуков в легких человека при интенсивметрической обработке сигналов, зарегистрированных на поверхности грудной клетки // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 5. С. 600–608.
13. Коренбаум В.И., Тагильцев А.А., Дьяченко А.И., Костив А.Е. Сравнение характеристик акустических датчиков различных типов при регистрации дыхательных звуков на поверхности грудной клетки человека // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 530–538.
14. Ляпунов В.Т., Лавендел Э.Э., Шляпочников С.А. Резиновые виброизоляторы. Л.: Судостроение, 1988. 216 с. С. 10–33.
15. Гордиенко В.А. Векторно-фазовые методы в акустике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 480 с.
16. Антонец В.А., Аксенова Р.Х., Казаков В.В. Измерение колебаний на поверхности мягких тканей. Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких биологических тканей. Горький: ИПФ АН СССР, 1990. С. 7–17.
17. Коренбаум В.И., Тагильцев А.А., Костив А.Е., Ширяев А.Д. Аппаратно-программный комплекс для многоканального исследования распространения звуковых колебаний в дыхательной системе человека // Приборы и техника эксперимента. 2013. № 6. С. 82–87.
18. Dyachenko A., Mikhailovskaya A., Semenov Yu., Timanin E., Vasiliev V. Elastic waves propagation on the surface of the human chest wall // IFMBE Proceedings. 2013. V. 39. P. 238–241.
19. Minnaert M. On musical air-bubbles and the sound of running water // Philosophical Magazine. 1933. № 16 (104). P. 235–248.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 544. 638+534.1

### О РАБОТЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ, ОСНОВАННОГО НА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ, ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. Б. П. Шарфарец<sup>а, \*</sup>, В. Е. Курочкин<sup>а, \*\*</sup>, В. А. Сергеев<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,  
ул. Ивана Черных 31–33, Санкт-Петербург, 198095 Россия

<sup>б</sup>АО «АКВАМАРИН», Баррикадная ул. 17, Санкт-Петербург, 198097 Россия

\*e-mail: sharb@mail.ru

\*\*e-mail: lavrovas@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.01.2020 г.

После доработки 23.03.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассмотрены уравнения, описывающие движение жидкости в пористой среде под воздействием электрического поля в условиях сформировавшегося турбулентного режима движения. Приведены уравнения, описывающие возникающие в жидкости акустические колебания, источником которых может быть не только переменное электрическое поле, но и постоянное электрическое поле. Возникающие под воздействием постоянного электрического поля пульсационные широкополосные акустические колебания могут являться паразитными при работе электроакустических преобразователей, что необходимо учитывать при их проектировании. Полученные результаты натурных экспериментов на модели электроакустического преобразователя подтверждают теоретические результаты, приведенные в работе. Изложенные теоретические и экспериментальные результаты позволяют решить приоритетную научно-техническую проблему проектирования и создания акустических излучателей нового типа.

*Ключевые слова:* электроакустическое преобразование, электрокинетические явления, гидродинамика электроосмоса, акустика электроосмоса, турбулентное течение, пульсационные колебания

DOI: 10.31857/S0320791920050135

#### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ [1, 2] по теоретическому обоснованию, а также по модельному и экспериментальному тестированию предложенного в [3] нового метода электроакустического преобразования. В работе [1] проблема рассматривалась в линейном приближении решения системы Навье–Стокса для ламинарного движения жидкости в пористой среде под воздействием суммарного постоянного и переменного электрического поля. В работе [2] эта проблема уже рассматривалась в нелинейном приближении решения системы Навье–Стокса для ламинарного движения жидкости. В настоящей работе задача рассматривается в нелинейной постановке для турбулентного режима движения жидкости в пористой среде.

#### ОБОСНОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ

Известно (см., например [4, с. 178–183]), что в отличие от ламинарного режима движения жид-

кости, в турбулентном режиме в полях давления и скорости, а в случае рассмотрения сжимаемой жидкости и в поле плотности, даже в режиме стационарной установившейся турбулентности, кроме стационарных (осредненных полей) возникают и т.н. пульсационные составляющие полей, присутствующие имманентно в турбулентном режиме, и представляющие собой сложные, неупорядоченные во времени и пространстве процессы даже при стационарных внешних источниках движения. С точки зрения рассматриваемого электроакустического преобразования эти пульсационные составляющие могут являться паразитными по отношению к оригинальному акустическому сигналу.

Целью настоящей работы является создание физической и математической моделей, описывающих поведение указанного электроакустического преобразователя в режиме турбулентного движения жидкости. Это позволит решить приоритетную научно-техническую проблему проектирования и создания электроакустических излучателей нового типа.

Поскольку одним из рассматриваемых в задаче процессов является акустический процесс, то вновь, как и в [1], систему уравнений Навье—Стокса принимаем в упрощенном виде для случая однородной сжимаемой вязкой баротропной жидкости:

закон сохранения импульса в виде уравнения Навье—Стокса [5, с. 73]

$$\rho_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{\Sigma}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\Sigma} \nabla) \mathbf{v}_{\Sigma} \right) = -\nabla p_{\Sigma} + \eta \Delta \mathbf{v}_{\Sigma} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v}_{\Sigma} + \rho_{el} \mathbf{E}_{\Sigma}, \quad (1)$$

уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости [4, с. 15]

$$\frac{\partial \rho_{\Sigma}}{\partial t} + \nabla (\rho_{\Sigma} \mathbf{v}_{\Sigma}) = 0, \quad (2)$$

уравнение состояния баротропной жидкости

$$p = c^2 \rho. \quad (3)$$

Здесь, также как в [1, 2],  $\mathbf{v}_{\Sigma} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$ ,  $p_{\Sigma} = p_0 + p$ ,  $\rho_{\Sigma} = \rho_0 + \rho$  и  $\mathbf{E}_{\Sigma} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$  — соответственно поля давлений, плотностей и векторов скоростей, а также векторов напряженности внешних стационарного  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  и переменного  $\mathbf{E}$  электрических полей. Индекс  $\Sigma$ , как и в [1, 2], характеризует суммарные параметры потока. Однако, в отличие от [1, 2], индекс 0 здесь означает осреднение по Рейнольдсу соответствующих суммарных параметров течения (эта процедура является обычной при описании турбулентных течений, см., например, [6]). Поля без индекса — возмущенные (пульсационные) величины потока, вызванные как переменным полем  $\mathbf{E}$ , так и самой природой турбулентного потока. Кроме того, в (1)–(3) приняты обозначения:  $c$  — скорость звука;  $\eta$  и  $\zeta$  — динамическая и объемная вязкости.

Осреднение по Рейнольдсу можно проводить по времени, по пространству и по ансамблю. Независимо от типа осреднения оператор осреднения по Рейнольдсу символизирует прямая черта сверху над осредняемой величиной  $f_{\Sigma}$ ,  $\overline{f_{\Sigma}} = f_0$ ,  $f_{\Sigma} = f_0 + f$ . Кроме того, это осреднение удовлетворяет условиям Рейнольдса [6, §2.1; 7, §2.1]:  $\overline{f_{\Sigma} + g_{\Sigma}} = \overline{f_{\Sigma}} + \overline{g_{\Sigma}}$ ;  $\overline{a f_{\Sigma}} = a \overline{f_{\Sigma}}$ ,  $a = \text{const}$ ;  $\overline{\overline{a}} = a$ ;  $\frac{\partial \overline{f_{\Sigma}}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f_{\Sigma}}{\partial s}}$ ;  $\overline{f_{\Sigma} g_{\Sigma}} = \overline{f_{\Sigma}} \overline{g_{\Sigma}}$ ;  $\overline{f_{\Sigma}} = \overline{f_{\Sigma}}$ ;  $\overline{f} = 0$ ;  $\overline{f_{\Sigma} g_{\Sigma}} = \overline{f_{\Sigma}} \overline{g_{\Sigma}}$ ;  $\overline{f_{\Sigma} g} = 0$ ;  $\overline{f_{\Sigma} g_{\Sigma}} = \overline{f_{\Sigma}} \overline{g_{\Sigma}} + \overline{f g}$ . Таким образом, величина  $f_0$  представляет собой осредненное значение исходной величины  $f_{\Sigma}$ , а величина  $f$  называется пульсационной составляющей величины  $f_{\Sigma}$  и, как видно из приведенных тождеств,  $\overline{f} = 0$ . Отсюда имеем:  $\overline{\mathbf{v}} = 0$ ;  $\overline{p} = 0$ ;  $\overline{\rho} = 0$ ;  $\overline{\mathbf{E}} = 0$ .

Далее будем рассматривать осреднение по времени. В этом случае осредненные величины получают следующим образом [6, с. 13]:

$$f_0(\mathbf{x}, t) = \overline{f_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f_{\Sigma}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

где  $\mathbf{x}$  — пространственные координаты;  $t$  — время;  $T$  — интервал осреднения, выбираемый из условия  $T_1 \ll T \ll T_2$ , где  $T_1$  — характерный масштаб колебаний пульсационной составляющей,  $T_2$  — характерный масштаб медленных изменений величины  $f_0(\mathbf{x}, t)$  во времени (см. рис. 2.1 работы [6, с. 13])<sup>1</sup>.

После осреднения по Рейнольдсу уравнения (1) получаем уравнение Рейнольдса [6, с. 16] для осредненного течения

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla p_0 + \eta \Delta \mathbf{v}_0 - \rho_0 \nabla (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \rho_{el} \mathbf{E}_0. \quad (4)$$

Здесь  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} = v_i v_j$  — тензорное (внешнее) произведение векторов, равное произведению двух матриц  $(v_x, v_y, v_z)$  и  $(v_x, v_y, v_z)^T$ , где  $T$  в индексе означает транспонирование матрицы; тензор  $-\rho_0 (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\rho_0 v_i v_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  называется тензором турбулентных напряжений Рейнольдса или просто тензором Рейнольдса [6, с. 16].

Уравнение (4) является незамкнутым. Во-первых, к нему необходимо добавить краевые условия и уравнение непрерывности применительно к случаю стационарного электроосмотического течения, которые подробно описаны в [8, § 2.2]. Во-вторых, как видно из (4), в уравнении присутствует неизвестная величина  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ . Для устранения этой неопределенности воспользуемся простейшей, т.н. алгебраической моделью турбулентности, дополнив уравнение (4) гипотезой Буссинеска [7, с. 29; 9, с. 102], смысл которой состоит в попытке выражения тензора напряжений Рейнольдса  $T_{ij}$  через характеристики поля осредненной скорости  $\mathbf{v}_0$  и т.н. турбулентную вязкость<sup>2</sup>  $\eta_t$ :

$$T_{ij} = -\rho_0 \overline{v_i v_j} = -\frac{2}{3} \rho_0 k \delta_{ij} + \eta_t \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

<sup>1</sup> В стационарном случае  $f_0(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x})$  очевидно, что  $T_2 = \infty$ .

<sup>2</sup> Выражение для тензора напряжений Рейнольдса для сжимаемой жидкости можно найти, например, в [6, с. 18] и [10, с. 17].



**Таблица 1.** Зависимость критической напряженности электрического поля от плотности бумаги

Тип бумаги	Плотность бумаги $\rho_{\text{бум}}, \text{ г/см}^3$	Появление турбулентного шума	
		разность потенциалов между электродами $U_{\text{крит}}, \text{ В}$	напряженность электрического поля $E_0, \text{ В/см}$ , соответствующая значению $U_{\text{крит}}$
1	0.412698	1300	8667
2	0.684596	1850	12333
3	0.721308	1950	13000
4	0.970461	1800	15000

Здесь  $k = \frac{\overline{v_i v_i}}{2}$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций на единицу массы жидкости. С учетом выражения (5) для тензора напряжений Рейнольдса запишем (4) в следующем виде

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla \left( p_0 + \frac{2}{3} \rho_0 k \right) + (\eta + \eta_t) \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}_0. \quad (6)$$

Отметим, что турбулентная вязкость  $\eta_t$  не является свойством самой жидкости, как это имеет место для обычной вязкости, а зависит от самого течения, и для заданного течения может меняться от точки к точке [9, с. 102]. Самый простой подход к рассмотрению турбулентных течений состоит в предположении о том, что турбулентная вязкость  $\eta_t$  и кинетическая энергия турбулентных пульсаций  $k$  для данного течения являются постоянными величинами во всей области турбулентного течения. В этом случае  $\nabla k = 0$  и добавка  $\frac{2}{3} \rho_0 k$  к давлению  $p_0$  в (6) пропадает. Кроме того, из (6) видно, что осредненная скорость  $\mathbf{v}_0$  в этом случае является стационарной и не зависит от времени  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ . Уравнение (6) принимает при этом простой вид

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 + (\eta + \eta_t) \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}_0. \quad (7)$$

Вычитая почленно уравнение (7) из уравнения (1) и линеаризуя разность, получаем уравнение движения для пульсационных параметров движения в терминах линейной акустики

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v} + (\rho_{\text{el}} \mathbf{E} - \eta_t \Delta \mathbf{v}_0). \quad (8)$$

Учтем также линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (9)$$

Сравнение уравнения движения (8) с аналогичным уравнением работы [2, уравнение (20)] для случая ламинарного нелинейного движения жидкости показывает, что в случае турбулентного движения появляется дополнительный источник возмущения  $\eta_t \Delta \mathbf{v}_0$ , связанный с турбулентной вязкостью  $\eta_t$ .

Из сравнения систем (1), (2) и (8), (9) также видно, что при отсутствии переменного поля электрической напряженности  $\mathbf{E}$ , система (8), (9) описывает движение пульсационных полей  $\mathbf{v}$  и  $p$  в их акустической интерпретации, присутствующих имманентно в течении турбулентной жидкости вследствие приложения одного только стационарного поля  $\mathbf{E}_0$ .

Если в члене  $(\rho_{\text{el}} \mathbf{E} - \eta_t \Delta \mathbf{v}_0)$  справа в уравнении движения (8) выполняется неравенство  $|\rho_{\text{el}} \mathbf{E}| \gg |\eta_t \Delta \mathbf{v}_0|$  (случай слабой турбулентности), то источником колебаний  $\eta_t \Delta \mathbf{v}_0$  с турбулентной вязкостью можно пренебречь, и для стационарного акустического поля на частоте  $\omega$  в этом случае справедливы все результаты работы [2] для ламинарного движения жидкости в нелинейном приближении. Если же неравенство  $|\rho_{\text{el}} \mathbf{E}| \gg |\eta_t \Delta \mathbf{v}_0|$  не выполняется (случай развитой турбулентности), то в (8) кроме  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{E}$  появляется третий источник возмущения  $\eta_t \Delta \mathbf{v}_0$ , связанный с турбулентностью. Тогда совершенно аналогично тому, как в работе [2] из уравнения (20) было получено выражение (22), можно из уравнения (8) настоящей работы получить следующее линейное выражение относительно  $\Phi$  и  $p$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi) \right) = -p + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_{\text{el}} \Psi - \eta_t \Delta \Phi_0, \quad (10)$$

Здесь  $\Phi$  – потенциал поля  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ;  $\psi$  – потенциал поля  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ ;  $\Phi_0$  – потенциал поля  $\mathbf{v}_0$ :  $\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi_0$ . Выражение (10) с точностью до дополнительного слагаемого  $-\eta_r\Delta\Phi_0$ , описывающего объемную плотность источника пульсационных акустических волн, совпадает с выражением (22) работы [2], в котором присутствует только один объемный источник  $\rho_{el}\psi$ . Отсюда ясно, что акустическое поле ( $\mathbf{v}$ ,  $p$ ), описываемое линейным уравнением (10), будет состоять из двух слагаемых, одно из которых вызвано полем  $\mathbf{E}$ , а второе – объемным источником пульсационных колебаний  $\eta_r\Delta\Phi_0$ . При равенстве плотностей источников  $\rho_{el}\psi = \eta_r\Delta\Phi_0$  и поочередном наличии в (10) только одного из них качество акустического процесса для каждого из них будет неразличимо. При этом для обоих слагаемых уравнения (10) будет работать механизм накачки, описанный в [2] и означающий перекачку энергии из стационарного поля ( $\mathbf{v}_0$ ,  $p$ ), возбужденного полем  $\mathbf{E}_0$ , в акустическое поле ( $\mathbf{v}$ ,  $p$ ), образованное как полем  $\mathbf{E}$ , так и объемным источником пульсационных колебаний  $\eta_r\Delta\Phi_0$ . В случае гармонического поля  $\mathbf{E}$  частотой  $\omega$  акустическое поле ( $\mathbf{v}$ ,  $p$ ) будет содержать усиленные процессом накачки дискретную составляющую с частотой  $\omega$ , совпадающей с частотой колебаний поля  $\mathbf{E}$ , и широкополосную шумовую составляющую, вызванную пульсационными колебаниями в турбулентном потоке, образованном стационарным полем  $\mathbf{E}_0$ . Тем самым, пульсационный поток в этом случае будет вызывать паразитные колебания акустического поля, усиленные процессом накачки.

Таким образом, в теоретической части работы решена анонсированная выше цель работы: предложены физическая и математическая модели, отражающие закономерности поведения электроакустического преобразователя в режиме турбулентного движения жидкости.

Если же рассматривать результаты работ [1, 2] и настоящей работы в совокупности, то следует отметить, что приведенные в них выкладки показывают, что по мере увеличения напряжения накачки  $\mathbf{E}_0$  при фиксированной величине акустической составляющей электрического поля  $\mathbf{E}$  можно говорить о трех режимах работы рассматриваемого преобразователя:

1. При малых величинах  $\mathbf{E}_0$  накачки не возникает, получающаяся система уравнений для электроосмотического и акустического процессов остается линейной, а задачи расчета стационарного поля движения жидкости и акустического поля являются несвязанными; этот режим был описан в работе [1];

2. При достаточно больших значениях поля  $\mathbf{E}_0$ , когда задача расчета стационарного поля пере-

стает быть линейной, но описывает ламинарный режим движения жидкости, задачи расчета стационарного и акустического полей движения жидкости становятся связанными и происходит перекачка энергии стационарного поля движения жидкости в энергию акустического поля; этот режим описан в работе [2];

3. Случай, когда амплитуда стационарного поля  $\mathbf{E}_0$  начинает превышать амплитуду его критического значения  $\mathbf{E}_{0\text{крит}}$  и зарождается турбулентный режим движения жидкости в капиллярно-пористой структуре преобразователя, можно разделить на два подслучая.

3а. Ситуацию с неразвитой турбулентностью можно отнести к случаю 2, когда паразитными пульсационными колебаниями можно пренебречь.

3б. Ситуацию с развитой турбулентностью уже нельзя отнести к случаю 2. Паразитными пульсационными колебаниями уже пренебречь нельзя, поскольку они усиливаются процессом накачки так же, как и полезный сигнал, и становятся соизмеримыми с уровнем полезного сигнала. Случай 3б описан в настоящей работе.

## НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Полученные выше теоретические результаты по особенностям функционирования преобразователя в турбулентном режиме движения жидкости показали их идентичность с процессами в ламинарном режиме с точки зрения влияния режима накачки. Поэтому экспериментальная часть работы была посвящена подтверждению этого факта, а также изучению влияния пористости тела преобразователя на процесс электроакустического преобразования.

В качестве преобразователя использовалась находящаяся в воздушной среде матрица, состоящая из двух алюминиевых перфорированных электродов, между которыми попеременно помещались пачки бумаги формата А4 различной плотности, состоящие из 15 листов каждая. Бумага была изготовлена из однотипного материала, но разной пористости<sup>3</sup>, из чего следовала ее разная плотность<sup>4</sup>. К электродам подавалось только постоянное напряжение  $U_0$ , которое варьировалось от значения  $U_0 = 0$  до значения  $U_0 \geq U_{\text{крит}}^i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , где  $U_{\text{крит}}^i$  – напряжение, при котором с по-

<sup>3</sup> Пористость – одна из характеристик пористого тела. Пористость – доля объема пор в общем объеме тела [11, с. 69].

<sup>4</sup> Размерность плотности бумаги далее  $\rho_{\text{бум}}$  в г/см<sup>3</sup>, а не в г/см<sup>2</sup>, как это принято для бумаги, по той причине, что в данном случае описывается трехмерная пористая среда. Плотность бумаги вычислялась прямыми вычислениями, как частное от деления веса пачки бумаги к объему пачки.

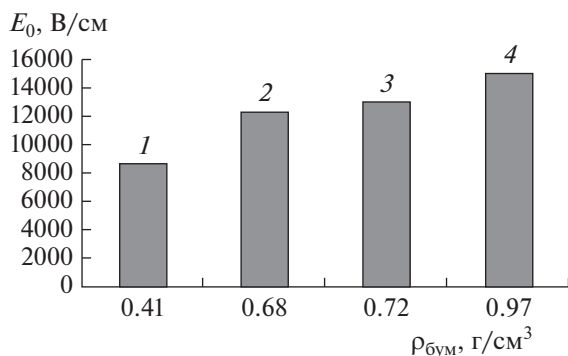


Рис. 1. Диаграмма зависимости критической напряженности электрического поля от плотности бумаги.

мощью установленного у матрицы микрофона и спектроанализатора регистрировалось скачкообразное появление пульсационных шумов, вызванных возникновением турбулентного движения воздуха в поровом пространстве находящейся в матрице бумаги  $i$ -го сорта. Характеристики бумаги и результаты эксперимента отражены в таблице. Для наглядности данные таблицы сведены в следующую диаграмму, представленную на рис. 1

Из таблицы и рис. 1 следует, что критическое значение напряженности электрического поля  $E_{0\text{кр}} = |E_0|_{\text{кр}}$ , при котором возникает турбулентный характер движения жидкости, находится в прямой пропорциональной зависимости от плотности бумаги  $\rho_{\text{бум}}$ . Это полностью согласуется с физикой задачи. Действительно, если процессы в пачках бумаги с различной пористостью считать подобными, то турбулентный режим возникает в них примерно при одном и том же критическом числе Рейнольдса  $Re = Re_{\text{кр}}$ , где  $Re$  для электроосмотического процесса уместно принять в виде

$$Re = V_{\text{ео}} \frac{\rho_0 d_{\text{ср}}}{\eta} = E_0 \frac{\epsilon \epsilon_0 d_{\text{ср}}}{\eta v} \zeta, \quad \text{где } V_{\text{ео}} = E_0 \frac{\epsilon \epsilon_0}{\eta} \zeta -$$

электроосмотическая скорость жидкости [8, с. 34];  $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$  – соответственно относительная диэлектрическая проницаемость жидкости (воздуха) и электрическая постоянная соответственно;  $\zeta$  – дзета или электрокинетический потенциал;  $d_{\text{ср}}$  – средняя величина пор в бумаге;  $E_0 = |E_0|$ ;  $v = \eta/\rho_0$  – кинематическая вязкость внутрипоровой среды. Из постоянства критического числа Рейнольдса

$$Re_{\text{кр}} = E_{0\text{кр}} \frac{\epsilon \epsilon_0 d_{\text{ср}}}{\eta v} \zeta = \text{const} \text{ следует, что с уменьшением средней величины пор } d_{\text{ср}} \text{ (или, что эквивалентно, с ростом плотности бумаги } \rho_{\text{бум}}) \text{ увеличивается критическая величина напряженности}$$

электрического поля  $E_{0\text{кр}}$ . Приведенные рассуждения полностью подтверждаются экспериментом.

В процессе проведения описываемого эксперимента также подтвердился предсказанный теоретически процесс накачки, когда с ростом величины  $E_0$  росла амплитуда пульсационных шумов, регистрируемых микрофоном и отображаемых на анализаторе спектра.

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены уравнения, описывающие движение жидкости в пористой среде под воздействием электрического поля в условиях сформировавшегося турбулентного режима движения. Приводятся уравнения, описывающие возникающие в жидкости акустические колебания, источником которых может быть не только переменное электрическое поле, но и постоянное электрическое поле. Возникающие под воздействием постоянного электрического поля пульсационные широкополосные акустические колебания могут являться паразитными при работе электроакустических преобразователей, что необходимо учитывать при их проектировании. Полученные результаты натуральных экспериментов на модели электроакустического преобразователя подтверждают теоретические результаты, приведенные в работе. Теоретические и экспериментальные результаты могут использоваться при проектировании и эксплуатации рассматриваемых электроакустических преобразователей.

Авторы благодарны С.П. Дмитриеву и С.Г. Телятнику за содействие в проведении экспериментов.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 0074-2019-0013 Министерства науки и высшего образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В. Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Докл. Акад. наук. 2018. Т. 483. № 3. С. 260–264.
2. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Гуляев Ю.В. О методе электроакустического преобразования, основанном на электрокинетических явлениях // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 4. С. 453–462.
3. Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V. Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. United States Patent # US 8,085,957, B2 Dec. 27, 2011.
4. Физическая энциклопедия. Т. 5. Под ред. Прохорова А.М. М.: Большая Росс. Энцикл., 1998. 760 с.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. Wilcox C.D. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Canada, California. 1994. 460 p.
7. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
8. Духин С.С., Дерягин Б.В. Электрофорез. М.: Наука, 1976. 328 с.
9. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Ч. 1. Пермь.: Перм. гос. техн. ун-т, 1998. 108 с.
10. Larsson J. Numerical simulation of turbulent flows for turbine blade heat transfer applications. Doctoral Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Department of Thermo and Fluid Dynamics Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden. 1998. 57 p.
11. Химическая энциклопедия. Т. 4. М.: Большая Росс. Энцикл., 1995. 639 с