

*Российская академия наук*

# **ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

**Том 58 № 3 2022**

Журнал основан в январе 1964 г.  
Выходит 4 раза в год  
ISSN 0424-7388

*Журнал издается под руководством  
Отделения общественных наук РАН*

**Главный редактор**

**В.Е. Дементьев**

*Редакционная коллегия:*

А.А. Афанасьев, С.А. Афонцев, А.Р. Бахтизин (зам. главн. ред.),  
В.А. Волконский, Н.А. Волчкова, Ю.Н. Гаврилец, Г.В. Егоров, Р.С. Ениколопов,  
А.В. Захаров, С.Б. Измалков (зам. главн. ред.), В.Л. Квинт, Г.Б. Клейнер, М. Кубонива,  
А.М. Либман, В.Н. Лившиц, В.Л. Макаров, В.М. Полтерович, А.Б. Поманский,  
А.В. Савватеев, Е.В. Устюжанина (зам. главн. ред.), И.С. Шитова (зам. главн. ред.)

*Заведующая редакцией Н.С. Виноградова*

Журнал «Экономика и математические методы»  
входит в Перечень ВАК, базы данных РИНЦ,  
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

*Адрес редакции:*

117418, г. Москва, Нахимовский просп., 47, ком. 305  
Тел.: 8(499) 129-39-33, 8(916) 139-27-26  
e-mail: emm@cemi.rssi.ru

**Москва**

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 58, номер 3, 2022

---

---

## Теоретические и методологические проблемы

Некипелов А.Д. О пространственном измерении общего равновесия	5
Данилов В.И. К теории общего экономического равновесия	19
Микитчук М.Д. Факторы формирования альтруистического поведения	28

## Народнохозяйственные проблемы

Сластников А.Д. О некоторых парадоксальных эффектах механизма налоговых каникул	45
---	----

## Отраслевые проблемы

Глазырина И.П., Лавлинский С.М., Яковлева Л.Л. Эколого-экономические модели в минерально-сырьевом секторе России: формирование инвестиционной политики на основе государственно-частного партнерства	57
--	----

## Проблемы предприятий

Пресняков В.Ф. Параметры и показатели мониторинга состояния предприятия	70
---	----

## Математический анализ экономических моделей

Акиншин А.А., Кузнецова О.И., Хачатрян Н.К., Борисова С.В. Агент-ориентированная модель «Интеллектуальная Россия»: конструкция модели и анализ начальной популяции	79
Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. Статическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе транспортной задачи с квадратичными добавками по стоимости	94
Коваленко А.Г., Злотов А.В. Математическое моделирование многопродуктового рассредоточенного рынка в системе мирового хозяйства	102
Kulikov A.V., Malykh N.O., Postevoy I.S. Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward exotic contracts	115

## Методы оптимизации

Добровольский В.М., Голембиовский Д.Ю. Оптимизация портфеля облигаций федерального займа и сделок РЕПО	129
--	-----

## Научная жизнь

Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бурилина М.А., Хлунова Е.А. Шестая встреча Рабочей группы БРИКС по ИКТ и высокопроизводительным вычислительным системам	142
--	-----

*Russian Academy of Sciences*

**ECONOMICS  
AND MATHEMATICAL  
METHODS**

**VOLUME 58 No. 3 2022**

Founded in January 1964

4 issues a year

ISSN 0424-7388

*The Journal is run under the supervision  
of the Department of Social Sciences at RAS*

**Editor-in-Chief**

**V.E. Dementiev**

*Editorial Board:*

Afanasiev A.A., Afontsev S.A., Bakhtizin A.R. (Deputy Editor-in-Chief),  
Egorov G.V., Enikolopov R.S., Gavrilets Yu.N., Izmalkov S.B. (Deputy Editor-in-Chief),  
Kleiner G.B., Kuboniwa M., Kvint V.L., Libman A.M., Livshits V.N., Makarov V.L.,  
Polterovich V.M., Pomanskiy A.B., Savvateev A.V., Shitova I.S. (Deputy Editor-in-Chief),  
Ustyuzhanina E.V. (Deputy Editor-in-Chief),  
Volchkova N.A., Volkonskiy V.A., Zakharov A.V.

*Secretary of Editorial Staff* N.S. Vinogradova

The journal "Economics and Mathematical Methods"  
is included in the list of the Higher Attestation Commission (HAC)  
and indexed in Russian Index of Scientific Citation,  
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

*Editorial Address*

Nakhimovskiy Prospect, 47, Office 305, Moscow, Russia, 117418

Tel.: +7(499) 129-39-33; +7(916) 139-27-26;

e-mail: emm@cemi.rssi.ru

**Moscow**

# CONTENTS

---

---

Volume 58, No. 3, 2022

---

---

## Theoretical and methodological problems

- Nekipelov A.D.** On the spatial dimension of general equilibrium 5  
**Danilov V.I.** Towards the theory of general economic equilibrium 19  
**Mikitchuk M.D.** Socio-economic determinants of altruistic behavior 28

## Problems of national economy

- Slastnikov A.D.** Some paradoxical effects of the tax holidays mechanism 45

## Industrial problems

- Glazyrina I.P., Lavlinskii S.M., Yakovleva L.L.** Ecological and economic models in the mineral and resource sector of Russia: Formation of investment policy based on public-private partnership 57

## Problems of enterprises

- Presnyakov V.F.** Parameters and indicators of enterprise status monitoring 70

## Mathematical analysis of economic models

- Akinshin A.A., Kuznetsova O.I., Khachatryan N.K., Borisova S.V.** Agent-based model “Intellectual Russia”: Model construction and initial population analysis 79  
**Lesik I.A., Perevozchikov A.G.** Market static model for software development based on a transport problem with quadratic cost additions 94  
**Kovalenko A.G., Zlotov A.V.** Mathematical modeling of a multi-product dispersed market in the system of the world economy 102  
**Kulikov A.V., Malykh N.O., Postevoy I.S.** Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward exotic contracts 115

## Methods of optimization

- Dobrovolskiy V.M., Golembiovskiy D.Yu.** Optimization of portfolio of federal loan bonds and REPO trades 129

## Scientific life

- Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Burilina M.A., Khlunova E.A.** The Sixth meeting of the BRICS Working Group on ICT and high performance computation systems 142

---

---

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

---

---

**О пространственном измерении общего равновесия**

© 2022 г. А.Д. Некипелов

**А.Д. Некипелов,**

*Московская школа экономики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: nekipelov@mse-msu.ru*

Поступила 08.04.2022

**Аннотация.** Проблемы, связанные с пространственными аспектами экономического развития, рассматриваются в рамках таких научных дисциплин, как «региональная экономика», «пространственная экономика», «новая экономическая география», «теория международной торговли», главным образом, под углом зрения частного анализа. В статье предлагается «базовая модель», призванная интегрировать пространственное измерение в теорию общего равновесия применительно к простой меновой экономике. Ее анализ показывает, почему выбор экономическими агентами места проживания и ведения производственной деятельности является столь же важным, как и определение ими области специализации. Сформулированы ключевые модификации в функциональных связях основных экономических переменных, связанные с учетом пространственного измерения хозяйственной деятельности. Вместе с тем показано, что эффекты от общественного разделения труда, выявляемые при помощи базовой модели, имеют потенциальный характер, поскольку при их определении не учитывались громадные транзакционные издержки, неизбежно сопровождающие взаимодействие ограниченно рациональных экономических агентов. Именно поэтому происходящее на основе опыта закрепление в пространстве места совершения сделок становится естественным способом приспособления институциональных условий к реальным возможностям экономических агентов получать и обрабатывать информацию. А эти корректировки, в свою очередь, приводят к изменениям в инструментарии рыночного механизма — в частности, к его дополнению рентой по местоположению.

**Ключевые слова:** пространственное измерение экономической деятельности, чистое пространство, проблема трех точек, транспортный ресурс, общее равновесие, транзакционные издержки, рента по местоположению.

**Классификация JEL:** A10, B16, B41, D50, R10.

Для цитирования: **Некипелов А.Д.** (2022). О пространственном измерении общего равновесия // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 5–18. DOI: 10.31857/S042473880019631-3

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В общей экономической теории традиционно весьма скромное место уделялось пространственной проблематике<sup>1</sup>; исключение в данном отношении с самого начала представляла лишь историческая школа в Германии. Такое положение дел вряд ли можно признать оправданным.

При этом целью *чистой теории* является не формулирование конкретных рекомендаций в отношении размещения общественного производства, а выявление принципиальной роли пространства для функционирования экономической системы. Решение такой задачи должно, естественно, происходить на основе методологии этой науки и органично включаться в ее общую ткань.

Авторский подход к построению *интеллектуального макета экономики* основан на попытке получить целостное представление о закономерностях не только ее функционирования, но и развития. Он предполагает последовательное движение (на основе дедукции, а не простого вовлечения в анализ все новых явлений и процессов, наблюдаемых на поверхности экономической жизни) от простых к более совершенным формам хозяйственной организации (Некипелов, 2019а). Имеется в виду, что в ходе такого движения будет происходить обогащение содержания как отдельных

---

<sup>1</sup> Изучение проблем размещения производства интенсивно ведется в рамках научных дисциплин, именуемых «региональная экономика», «пространственная экономика», «новая экономическая география», «теория международной торговли». Соответствующие исследования имеют более или менее явно выраженную эмпирическую направленность и в этом смысле решают задачи, которые не совпадают (хотя, несомненно, и пересекаются) с задачами, стоящими перед общей («чистой») экономической теорией.

категорий, так и их проявлений в различных измерениях — временном и пространственном, — свойственных экономическому организму. Именно поэтому в статье, посвященной анализу «робинзонады», — с нашей точки зрения, исходной модели общей теории — уже была обозначена роль пространственного измерения хозяйственной деятельности (Некипелов, 2019б).

На следующей ступеньке исследования, каковой является *простая меновая экономика*, эта роль подвергается существенной модификации. Важной стороной общественного разделения труда становится определенное *пространственное распределение экономических агентов* и принадлежащих им материальных факторов производства. Пространственное рассредоточение хозяйственной деятельности является причиной появления у субъектов разделения труда новых задач, связанных с получением информации о состоянии окружающего мира и преодолением продукцией расстояний от производителей к потребителям. Соответственно, проблема общего равновесия, свойственная экономической системе, основанной на общественном разделении труда, включает очевидную пространственную составляющую.

Слабое отражение этой составляющей в моделях общего равновесия дало основание наиболее проницательным представителям региональной науки уже довольно давно сделать вывод, что соответствующие модели, в сущности, описывают «мир одной точки» (one-point world) (Isard, 1956, p. 26). Между тем, даже из самых общих соображений ясно, что введение в анализ пространственного фактора не может не модифицировать результаты, полученные в рамках Вальрасовой теории общего равновесия. На поверхности лежит тот факт, что в этом случае к нахождению равновесных пропорций обмена, с учетом которых каждый экономический агент выбирает наилучшую область специализации и приобретает набор потребительских благ, максимизирующий уровень его благосостояния, добавляется задача определения наилучшего места для его закрепления в пространстве.

Очевидная важность этой проблематики сочетается с ее далеко не тривиальным характером. Несложно убедиться в том, что бесперспективной является попытка механического добавления пространственного измерения к анализу общего равновесия: привязать географические координаты местоположения экономических агентов к предварительно полученным характеристикам этого состояния (равновесным меновым ценностям благ и связанным с ним показателями производства и потребления). Такой подход не срабатывает, поскольку положение субъектов экономической деятельности в пространстве и упомянутые классические характеристики общего равновесия взаимно определяют друг друга.

Комплекс непростых проблем возникает в связи с естественной природной неоднородностью географического пространства, неопределенностью распределения на нем необходимых для производственной деятельности ресурсов. Крайне трудно выбрать и саму модель, от анализа которой следует отталкиваться. Каковы границы рассматриваемого пространства? Как организовано человеческое сообщество, о размещении которого идет речь: состоит ли оно из одиноких *экономических людей* А. Смига или за каждым из экономических агентов стоит тесно связанная с ним группа лиц (семья, домашнее хозяйство)? В какой мере и на каком этапе исследования учитывать тот факт, что и для проживания людей, и для ведения ими производства необходимо известное пространство? Нужно ли исходить из некоторого предварительного размещения людей в пространстве? Допустимо ли рассматривать транспортную инфраструктуру как экзогенно заданный параметр модели? Предполагать ли наличие пространственно локализованного рынка или само возникновение таких рынков следует обосновывать содержательным анализом?

Эти и другие подобные вопросы не являются новыми. На них, в зависимости от целей и характера исследований, давались и даются различные ответы. В настоящей статье сделана попытка предложить такую их трактовку, которая отвечает задачам, стоящим перед чистой экономической теорией, причем на уровне одной из простейших форм хозяйственной организации — простой меновой экономики. При этом автор стремился максимально использовать имеющиеся наработки по пространственной проблематике, имеющиеся и в общей теории, и в конкретных экономических дисциплинах.

## 2. НАУЧНЫЙ ЗАДЕЛ

Пионерная для *пространственной экономики* работа фон Тюнена (Thünen, 1895) любопытным образом сочетала элементы общего и частного анализа. Предложенная им модель охватывала всю экономику (центральный город и окружающее пространство, на котором должна была производиться необходимая для него продукция растениеводства). В то же время фокус исследования был

отраслевым: речь шла о выявлении закономерностей размещения различных сельскохозяйственных культур; при этом цены на продукцию и транспортный тариф рассматривались как заданные. Впервые было введено понятие *чистого пространства*. Фактически в работе были представлены два типа локализации экономических агентов: *точечный* — в центральном городе и *пространственный* — вокруг него<sup>2</sup>. Сам центральный город был воплощением локализованного рынка для сельскохозяйственной продукции. Работа, несомненно, сыграла важную роль в понимании того, как формируется *рента по местоположению*.

В дальнейшем пространственная проблематика разрабатывалась главным образом в рамках *классического частного анализа*: ключевую роль приобрел поиск места оптимального размещения фирмы в условиях заданных цен и расположения фирм поставщиков, с одной стороны, и потребителей, — с другой. К ним примыкали исследования *районов продаж (районов снабжения)*, в которых определялись ареалы реализации продукции и приобретения сырья и полуфабрикатов.

В этом контексте особое место в теории размещения заняла проблема *трех точек*, или *транспортных направлений* (transport orientation) А. Вебера (Weber, 1909). Задача, которая решается в рамках этой модели<sup>3</sup>, состоит в поиске оптимального места  $P$  для размещения предприятия, собственники которого располагают информацией о расположении двух источников сырья (точки  $I$  и  $J$ ) и рынка реализации для производимой из них продукции (точка  $C$ ). При этом экзогенно задаются общие веса  $m_I$  и  $m_J$  подлежащих использованию видов сырья и  $m_C$  — готовой продукции, транспортные тарифы  $r_I$ ,  $r_J$  и  $r_C$ , применяемые при их перевозке, цены всех видов продукции. Удельные затраты сырья на производство готовой продукции и объем выпуска рассматриваются как фиксированные<sup>4</sup>.

При геометрическом решении этой задачи использовалась аналогия с механикой: в искомой точке  $P$  силы притяжения (к точке производства готовой продукции от точек производства сырья) и отталкивания (от точки производства готовой продукции к точке потребления), измеряемые произведением перевозимых грузов на соответствующий транспортный тариф, должны уравновешивать друг друга:  $\sum_{i=I,J,C} m_i r_i = 0$ .

У. Айзард, который считается одним из основателей американской региональной науки, попытался заложить основы *общей теории размещения*. При этом он рассматривал теорию общего равновесия Вальраса как ее частный случай, относящийся к *экономике одной точки*.

Пытаясь оттенить роль пространства в функционировании экономики, американский ученый ввел понятие «транспортный ресурс» (transport input), который он рассматривал как фактически дополнительный фактор производства<sup>5</sup>. В его понимании запас этого ресурса у производителя определяется потребностью в перемещении сырья к месту производства и готовой продукции — к месту потребления. Измерять (например, в тонно-километрах) величину транспортного ресурса У. Айзард предложил при помощи показателя  $m_i s_i$ , характеризующего перемещение груза весом  $m_i$  на расстояние  $s_i$ .

У. Айзард сделал ставку на движение от частного анализа к общему. Исходным пунктом построения общей теории размещения, в основе которой лежит понятие транспортного ресурса, он избрал проблему *трех точек*. Основным выводом, вытекавшим из его анализа этой модели, состоял в том, что абсолютная величина предельной нормы замещения одним транспортным ресурсом другого при фиксированном количестве третьего транспортного ресурса должна в состоянии

<sup>2</sup> В сельском хозяйстве земля является важнейшим фактором производства, и это делает бессмысленной попытку его точечной локализации.

<sup>3</sup> При характеристике этой модели, а в дальнейшем и того, как ее использовал У. Айзард при формулировании концепции «транспортного ресурса», используются обозначения из (Isard, 1956, p. 222–224).

<sup>4</sup> Математической основой «проблемы трех точек» является знаменитая «проблема Ферма», сформулированная выдающимся французским математиком в первой половине XVII в.: имеется треугольник  $ABC$  и необходимо найти точку  $D$ , сумма расстояний до которой от вершин этого треугольника является наименьшей. Примерно в 1645 г. Е. Торричелли нашел геометрическое решение этой проблемы. В 1750 г. английский математик Т. Симпсон сформулировал и дал геометрическое решение *проблемы трех точек*, являющейся обобщением *проблемы Ферма* (Simpson, 1750). Заслуга А. Вебера состоит главным образом в том, что он должным образом оценил значимость этой проблемы для региональных исследований, уделив ей большое внимание в (Weber, 1909). Прямое (тригонометрическое) решение проблем Ферма и Симпсона—Вебера было найдено только в 1972 г. французским ученым Л.-Н. Теллье (Tellier, 1972). За десять лет до этого американские ученые Г. Кун и Р. Куэн нашли итеративное решение проблем Ферма и Симпсона—Вебера, в том числе для случая « $n$  точек» (Kuhn, Kuenne, 1962).

<sup>5</sup> «Проблема производства, — писал Айзард, — становится проблемой выбора правильной комбинации различных видов капитала, труда, земли и транспортных ресурсов» (Isard, 1956, p. 36).

равновесия равняться обратной величине отношения транспортных тарифов, применяемых при перевозке соответствующих товаров (Isard, 1956, p. 224).

В ходе дальнейшего анализа У. Айзард, последовательно усложняя изучаемый объект, попытался доказать, что этот принцип имеет универсальное значение. С этой целью он вначале переходит к *модели n точек*, в которой сырье поставляется из многих постоянных пунктов добычи, а готовая продукция направляется многим потребителям, имеющим фиксированное местоположение. Далее он применяет (Isard, 1956, p. 231–235) свой подход к ранее проводившимся в (Launhardt, 1885; Fetter, 1924; Egländer, 1924; Palander, 1935; Schneider, 1935; Hoover, 1937; Lösch, 1944; Hyson C., Hyson W., 1950) исследованиям по проблематике районов поставок и районов продаж и допускает возможность существования не одного, а многих мест производства готовой продукции (Isard, 1956, p. 235–239). В заключительной части исследования У. Айзард доказывает, что сформулированный им принцип замещения транспортными ресурсами друг друга совместим с теорией Леша о пространственной организации экономики в виде сети восьмигранных районов продаж (Lösch, 1944, Part III) и с теорией размещения сельскохозяйственного производства, в основе которой лежит упоминавшаяся выше работа фон Тюнена (Thünen, 1895).

Главный вывод, к которому приходит У. Айзард, состоит в том, что введение в анализ категории «транспортный ресурс» и включение последнего в трансформационную функцию, определяющую границу производственных возможностей экономического агента, позволяет явным образом учесть в *теории производства (теории общего равновесия)* роль пространства (Isard, 1956, p. 252). Соответственно, появляется возможность свести *существенный пространственный анализ* (essential location analysis) к рассмотрению простого замещения транспортными ресурсами друг друга и освободиться от необходимости «маркировки каждой единицы земли, труда и капитала при помощи множества абсолютных пространственных координат или перевода их в общие единицы измерения, если такое, разумеется, возможно<sup>6</sup>» (Isard, 1956, p. 36).

Может показаться странным, но усилия У. Айзарда, направленные на формирование общей теории размещения, по большому счету не были поддержаны представителями региональной науки. У такого положения дел есть, как мне кажется, вполне понятное объяснение.

Прежде всего сказался тот факт, что сама проблематика пространственного измерения общего равновесия представляется чрезмерно абстрактной, а потому — и слишком далеко отстоящей от практических задач, на решение которых ориентированы ученые этого направления. Вместе с тем свою роль, видимо, сыграли и некоторые не вполне убедительные положения самой теории У. Айзарда.

Оставим в стороне вопрос об оправданности квалификации транспортного ресурса как квази-фактора производства. Важнее, что совсем не очевидна правомерность попытки прийти к решению проблем общего равновесия посредством движения от частного анализа к общему в том виде, как его задумал американский ученый.

Проблема *трех точек* основывается на экзогенном характере переменных, характеризующих величину выпуска и число используемых факторов производства. Несложно заметить, что данное обстоятельство блокирует выяснение вопроса о влиянии местоположения на производственные процессы. Эти ограничения в значительной степени преодолеваются в настоящее время на основе разработок *проблемы размещения производства (предприятия)*, получивших развитие после известной статьи Л. Мозеса (Moses, 1958). Однако эти исследования также ведутся в рамках методологии частного анализа и в значительной степени ориентированы на изучение имеющих практическую значимость типовых случаев. В центре внимания находится влияние различных видов кривых производственных издержек предприятия на их размещение, создаются алгоритмы компьютерной симуляции принятия соответствующих решений; см., например, (Revelle, Laporte, 1996; Peeters, Thisse, 2000).

Фиксированные в рамках *модели трех точек* производственные переменные, цены на сырье и готовую продукцию, а также транспортные тарифы позволили У. Айзарду свести задачу производителя к минимизации транспортных издержек  $K = r_1 m_1 s_1 + r_j m_j s_j + r_c m_c s_c$  при ограничении  $f(s_1, s_j, s_c) = 0$ . На основе анализа этой модели он и пришел к выводу, что в оптимальном положении предельная норма замещения одного транспортного ресурса другим равняется обратной

<sup>6</sup> Идея коррекции числа фактически применяемых факторов производства с учетом их местоположения и, соответственно, выражения этих чисел в условных единицах принадлежала немецкому ученому А. Пределю (Predöhl, 1928, p. 380–381).

величине отношения транспортных тарифов. Но даже если бы это было так<sup>7</sup>, то такого вывода было бы явно недостаточно, для того чтобы считать решенной проблему учета пространственного фактора в теории общего равновесия. Ведь совершенно неопределенным при таком подходе остается вопрос об условиях, определяющих равновесные уровни цен и транспортных тарифов. Не случайно сам У. Айзард чувствовал, что его подход не дает окончательного решения проблемы общего равновесия, поскольку опирается на заданные экзогенно транспортные тарифы<sup>8</sup>.

Таким образом, можно заключить, что проблема включения пространственного измерения в теорию общего равновесия остается открытой, а ее решение, по всей видимости, не может быть связано с попыткой обобщения выводов, вытекающих из таких частных моделей, как *модель трех точек*.

### 3. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФАКТОРА

**Определение пространства.** В качестве отправной точки анализа возьмем модель простой меновой экономики, в которой индивидуальные экономические агенты выбирают сферу своей специализации с учетом пространственного фактора. Первый вопрос, который возникает в связи с этим, касается характера территории, на которой будут развиваться интересующие нас события.

Представляется абсолютно естественным опираться на введенную еще фон Тюненом конструкцию *чистого пространства* — плоскую территорию (равнину), на которой отсутствует дорожная инфраструктура. Соответственно, перемещение грузов между любыми двумя точками осуществляется по прямой.

Следует сразу же констатировать, что появление транспортных издержек в результате различного географического положения субъектов экономической деятельности вносит коррективы в механизм сравнительных издержек, определяющий основы общественного разделения труда индивидуальных производителей. Общий вывод можно сформулировать следующим образом: расстояние поглощает сравнительные преимущества. В самом деле, пусть удельные затраты на производство двух благ у интересующего нас экономического агента составляют пять и семь часов рабочего времени, а их меновые ценности — соответственно 1 и 2. При нахождении производителя в непосредственной близости от потребителей очевидной является выгода специализации на выпуске второго товара: альтернативные (через обмен) издержки получения первого товара ( $7/2 = 3,5$  часов) оказываются ниже, чем прямые (5 часов). Если же к прямым издержкам на производство второго блага добавить 3 и более часов транспортных издержек, то при прежних пропорциях обмена стимулы специализации исчезают.

С учетом этого обстоятельства понятие *чистого пространства* нуждается для целей нашего исследования в некотором уточнении. Ведь утверждение о его абсолютной однородности, строго говоря, означает, что природные условия жизнедеятельности (ресурсы) одинаково представлены во всех точках соответствующей территории. Но в таких условиях все экономические агенты стремились бы сосредоточиться в одной (причем любой) ее точке, чтобы в пределе свести к нулю транспортные издержки. Констатация этого факта полезна в двух отношениях. С одной стороны, мы получаем представление о силах, действующих в сторону сосредоточения на единой территории производителей. С другой стороны, становится понятным, почему модель общего равновесия Вальраса, действительно, является частным, точечным случаем модели общего равновесия. В то же время, если остановиться на таком абсолютном понимании *чистого пространства*, то проблематика пространственного измерения общего равновесия сразу же окажется исчерпанной.

Сузим конституирующие признаки *чистого пространства* до однородного рельефа и единых климатических условий. В этом случае при формировании исходной (базовой) модели, отражающей пространственное измерение общего равновесия, необходимо определить, допускаем ли мы:

— существование видов деятельности, для которых само пространство является важнейшим условием производственной деятельности (в отношении таких видов деятельности невозможно прибегать к абстракции об их сосредоточении *в одной точке*);

<sup>7</sup> Из приведенной модели вытекает следующее условие наличия минимума у транспортных затрат:  $r_j / r_i = (m_j / m_i) \partial S_i / \partial S_j$ . Несложно убедиться, что в случае соблюдения «правила У. Айзарда» это условие должно было бы выглядеть иначе:  $r_j / r_i = \partial(m_j S_j) / \partial(m_i S_i)$ .

<sup>8</sup> Об этом свидетельствует следующее замечание У. Айзарда: «Представляется весьма вероятным, что проведенный в данной главе анализ окажется справедливым и для оптимальной пространственной экономики, в рамках которой характер структуры транспортных тарифов также рассматривается как переменный и нуждающийся в определении» (Isard, 1956, p. 222).

- неравномерность распределения природных ресурсов на территории;
- неодинаковое качество природных ресурсов в разных частях рассматриваемой территории.

В базовой модели будем исходить из того, что все виды производственной деятельности не требуют пространства для своего осуществления, т.е. имеют «точечную природу». На интересующей нас территории в строго определенных местах расположены природные ресурсы, необходимые для ведения производственной деятельности. Наконец, на этом начальном этапе мы абстрагируемся от возможности качественных различий в природных ресурсах.

Следует также отметить, что рассматриваемая территория не будет иметь явно определенных границ. Нас интересует, как при заданном расположении природных ресурсов будет размещаться на окружающей их территории некое человеческое сообщество.

#### 4. КОНКРЕТНЫЕ УСЛОВИЯ

Принимаем произвольную точку на рассматриваемой территории в качестве начала системы координат. Пусть имеется  $R$  видов природных ресурсов, важных для производственной деятельности человека, причем каждый из них расположен в одном месте. Координаты соответствующих мест будем обозначать  $(b_r, c_r)$ ,  $r = 1, \dots, R$ . Для простоты все ресурсы считаем неограниченными.

Таким образом, имеется  $R$  видов деятельности, связанных с добычей (выделением из природы) этих ресурсов. Они представляют собой первое звено всех технологических цепочек — первый передел, в результате которого природные ресурсы превращаются в сырье, доступное для дальнейшей переработки. Вполне естественно присвоить различным видам сырья номера природных ресурсов от 1 до  $R$ . Очевидно, что координаты мест добычи (производства) сырья совпадают с местами расположения природных ресурсов.

В нашей простой модели второй технологический передел является конечным: в его результате производится  $G$  видов потребительских благ. Именно их мы будем считать готовыми продуктами. Каждому из таких видов продукции мы присвоим номер от  $R+1$  до  $R+G$ .

Каждый член сообщества, состоящего из  $N$  человек, обладает потребительскими предпочтениями и производственными способностями. Первые представлены индивидуальными функциями полезности  $U^j = U^j(X_{R+1}^j, \dots, X_{R+G}^j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где верхний индекс  $j$  представляет номер экономического агента; нижний индекс  $R+g$  — номер потребительского блага, а  $X_{R+g}$  — величину его потребления в весовых единицах (например, килограммах)<sup>9</sup>. Производственные способности у каждого члена сообщества распространяются на выпуск всех видов сырья, потребительских благ и перемещение грузов. Число производителей сырья будем обозначать  $N_r$ ; предметов потребления —  $N_g$  и лиц, предоставляющих транспортные услуги —  $N_{\text{Transpr}}$ . Конкретное распределение всего населения между этими группами заранее неизвестно — оно должно стать одним из результатов анализа.

Будем считать, что в сферах производства сырья и предоставления транспортных услуг из факторов производства используется только труд; в производстве предметов потребления применяется также сырье. Таким образом, производственные функции у лиц, занятых этими видами деятельности, будут иметь следующий вид:

$$Y_r^j = Y_r^j(t_r^j), \quad (1)$$

$$Y_{R+g+1}^j = Y_{R+g+1}^j(t_{R+g+1}^j), \quad (2)$$

$$Y_{R+g}^j = Y_{R+g}^j(x_{1(R+g)}^j, \dots, x_{R(R+g)}^j, t_{R+g}^j), \quad (3)$$

где  $x_{1(R+g)}^j$  — потребное для экономического агента  $j$  количество (в весовых единицах) ресурса  $r$  для производства потребительского блага  $R+g$  ( $g = 1, \dots, G$ ) в количестве  $Y_{R+g}^j$ ;  $t_{R+g}^j, t_r^j$  и за  $t_{R+g+1}^j$  — время, выделяемое производителем  $j$  для производства различных товаров и оказания транспортных услуг.

Договоримся, что перевозку грузов нельзя совмещать с другими видами деятельности. Основанием для такого допущения является тот факт, что коммивояжеры находятся в постоянном движении и не имеют постоянного места жительства, и тем более — производства. Иными словами,

<sup>9</sup> Измерение количества товаров в весовых единицах удобно по той причине, что именно к ним будет привязан тариф на перемещение продукции от производителей к потребителям.

перед каждым экономическим агентом стоит выбор: либо производить тот или иной набор товаров, либо сконцентрироваться целиком на транспортной деятельности.

Пусть меновые ценности  $EV_1, \dots, EV_R, \dots, EV_{R+G}$  одинаковых товаров (сырья и потребительских благ) в местах их производства одинаковы у всех производителей и выражены в отношении весовых единиц (т.е. не в отношении единицы товара, а в отношении единицы *веса* товара). Для наших целей считаем вполне допустимым предположение о едином уровне транспортного тарифа  $EV_{R+G+1}$  (меновая ценность перемещения единицы веса груза на единицу расстояния) для всех товаров и для всех расстояний.

Мы будем также исходить из того, что экономические агенты, не выполняющие функций перевозчиков, оплачивают<sup>10</sup> производителю меновую ценность товара  $EV_{r,g}$ , а перевозчику — меновую ценность их доставки. Соответственно, меновая ценность для экономического агента  $j$  товара  $i$  от производителя  $n$  будет равняться:

$$EV_{in}^j = EV_i + EV_{R+G+1} S_i^{jn}, \quad (4)$$

где  $i = r, g$ ,  $S_i^{jn} = [(b_j - b_n)^2 + (c_j - c_n)^2]^{1/2}$  — расстояние от производителя  $n$  до потребителя товара  $j$  ( $b$  — координата  $x$ ;  $c$  — координата  $y$ ; соответственно, экономических агентов  $j$  и  $n$ ). Для простоты будем считать, что коммивояжеры приобретают для собственных нужд товары в местах их производства по меновым ценностям  $EV_i$ .

Наконец, очень важно иметь в виду следующее обстоятельство. Несмотря на все упрощающие допущения, наша модель стала бы крайне сложной, если бы мы попытались не только определить экономических агентов, специализирующихся на доставке грузов, но и проследить конкретные маршруты, по которым должен следовать каждый из них. Поэтому мы ограничимся лишь одним требованием к процессу транспортировки: суммарная величина предлагаемых услуг перемещения товаров должна в состоянии равновесия быть равна спросу на них. При этом величина предлагаемых транспортных услуг экономическим агентом  $j$  является функцией времени  $t_{R+G+1}^j$ , которое он затрачивает на перевозку грузов, скорости его перемещения  $v^j$  и веса груза  $W^j$ , который он в состоянии перевозить:

$$Y_{(R+G+1)}^j = t_{R+G+1}^j v^j W^j. \quad (5)$$

## 5. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

Построение модели общего равновесия, учитывающей пространственный фактор, будем строить по классической Вальрасовой схеме. На первом этапе определим условия, в том числе территориальные, максимизации индивидуального благосостояния; при этом рыночные меновые ценности  $EV_1, \dots, EV_{R+G+1}$ , а также местоположение всех остальных экономических агентов будут рассматриваться как параметры модели. Результатом должно стать получение индивидуальных функций предложения и спроса на отдельные виды товаров производственного и потребительского назначения и транспортные услуги, а также оптимальных для заданных условий координат размещения рассматриваемого субъекта экономической деятельности. На втором этапе задача будет состоять в том, чтобы построить систему уравнений, позволяющую определить равновесные уровни меновых ценностей  $EV_1, \dots, EV_{R+G+1}$  и оптимальное местоположение всех участников хозяйственного взаимодействия.

### Максимизация индивидуального благосостояния

Для определения действий экономического агента  $j$ , направленных на максимизацию собственного благосостояния, будем исходить из того, что он ориентируется на заданные рынком величины меновых ценностей  $EV_{r,g}$  сырья и готовой продукции в местах их производства, транспортный тариф  $EV_{R+G+1}$ , а также географические координаты и специализацию всех остальных (помимо его самого и тех, кто занимается оказанием транспортных услуг) экономических агентов. Наконец, для

<sup>10</sup> Наша модель относится к экономической системе, в которой обмен имеет натуральный характер. Вместе с тем она допускает возможность несбалансированности товарных поставок между отдельными парами экономических агентов, при том что у каждого экономического агента обмен должен быть сбалансированным со всеми членами рассматриваемого сообщества. Поэтому слово «оплачивают» здесь означает, что продавцу товара его меновая ценность как бы заносится в актив, а покупателю — в пассив для целей последующего всеобщего взаимозачета поставок.

облегчения восприятия формул не будем без особой необходимости использовать верхний индекс, характеризующий номер интересующего нас экономического агента.

С учетом принятой договоренности о невозможности одновременного участия экономического агента в производстве и транспортировке продукции, а также того, что место производства сырья является жестко определенным, нам предстоит рассмотреть три возможных варианта действий экономического агента и затем выбрать из них наилучший:

- экономический агент специализируется на оказании транспортных услуг;
- экономический агент производит один из видов сырья<sup>11</sup>;
- экономический агент производит либо одно, либо несколько потребительских благ в наиболее выгодном для него месте.

Будем также считать, что время производственной деятельности  $T$  остается одним и тем же при любом виде деятельности и их комбинации.

*Вариант 1.* Согласно сделанному выше допущению, в случае специализации на предоставлении транспортных услуг экономический агент сможет приобретать потребительские блага по *чистой меновой ценности*, — т.е. без транспортной надбавки. Модель максимизации полезности экономического агента при такой специализации будет иметь следующий вид:

$$\max U = U(X_{R+1}, \dots, X_{R+G}) \quad (6)$$

при ограничении<sup>12</sup>

$$Y_{R+G+1}(t_{R+G+1})EV_{R+G+1} = \sum_{g=1}^G X_{R+g} EV_{R+G}. \quad (7)$$

Строим функцию Лагранжа и определяем необходимые условия максимума:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{R+g}} = \frac{\partial U}{\partial X_{R+g}} - \lambda EV_{R+G+1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Y_{R+G+1}(t_{R+G+1})EV_{R+G+1} - \sum_{g=1}^G X_{R+g} EV_{R+G} = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (8) следует известный вывод, в соответствии с которым при выборе оптимального набора потребительских благ предельная норма замещения одного из них другим должна равняться обратной величине соотношения их меновых ценностей. Определив из системы уравнений (8)–(9) такой набор потребительских благ, мы легко находим максимальную величину полезности, которую экономический агент может извлечь в случае специализации на оказании транспортных услуг.

*Вариант 2.* В случае когда экономический агент производит один из видов сырья (больше он производить не может, так как соответствующие ресурсы находятся в разных местах), место производства определяется местом расположения соответствующего природного ресурса ( $b_{r^*}, c_{r^*}$ ). Целевая функция этой модели не отличается от той, которая была использована в первом варианте. Особенность ограничения состоит в том, что здесь приходится учитывать, что фактором, влияющим на суммарную финальную меновую ценность потребительской продукции, полученной при помощи обмена, становится расстояние до ее производителей.

С учетом этого модель максимизации благосостояния экономического агента приобретает вид:

$$\max U = U(X_{R+1}, \dots, X_{R+G}) \quad (10)$$

при ограничении

$$Y_{r^*} EV_{r^*} = \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^{N_g} x_{R+g}^n \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_{r^*} - b_n)^2 + (c_{r^*} - c_n)^2} \right], \quad (11)$$

при том что  $\sum_{n=1}^{N_g} x_{R+g}^n = X_{R+g}$  (совокупный спрос  $X_{R+g}$  на соответствующее благо складывается из спроса  $x_{R+g}^n$  на это благо от различных его поставщиков).

<sup>11</sup> Строго говоря, предлагаемые три варианта исчерпывали бы все имеющиеся возможности, если бы здесь мы допустили производство не только одного из видов сырья, но и тех или иных потребительских благ. Однако в этом случае увеличивающаяся громоздкость модели не сопровождалась бы сколько-нибудь значимым изменением полученных выводов.

<sup>12</sup> Суть ограничения состоит в том, что совокупная меновая ценность оказанных экономическим агентом транспортных услуг должна равняться совокупной меновой ценности приобретенных им потребительских благ.

Система уравнений, составленная из частных производных функции Лагранжа, приравненных к нулю, будет иметь вид:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{R+g}^n} = \frac{\partial U}{\partial X_{R+g}} - \lambda \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_{r^*} - b_n)^2 + (c_{r^*} - c_n)^2} \right] = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Y_{r^*}(t_{r^*}) EV_{r^*} - \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^{N_g} x_{R+g}^n \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_{r^*} - b_n)^2 + (c_{r^*} - c_n)^2} \right] = 0. \quad (13)$$

Системы уравнений (12)–(13) должны быть составлены для  $r^* = 1, \dots, R$ . На основе их решения будут получены оптимальные для каждого случая функции предложения  $Y_{r^*} = Y_{r^*}(EV, (b_i^n, c_i^n))$  и спроса  $X_{R+g} = X_{R+g}(EV, (b_i^n, c_i^n))$ , где  $(b_i, c_i), i = 1, \dots, R+G$  — параметры, характеризующие местоположение и виды деятельности всех экономических агентов. После этого следует выбрать тот вид производства сырья  $r^*$ , который обеспечивает максимизацию индивидуальной функции полезности.

Из уравнений (таких уравнений  $G$  — по числу потребительских благ) (12) следует, что при выборе оптимального набора потребительских благ предельная норма замещения одного из них другим должна равняться обратной величине соотношения не их меновых ценностей, а предельных издержек  $EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_{r^*} - b_n)^2 + (c_j - c_n)^2}$ , связанных с приобретением соответствующих благ. При этом надо иметь в виду, что удовлетворение потребностей экономического агента в отдельных видах потребительских благ может обеспечиваться за счет производителей, находящихся от него на разных расстояниях. Отсюда следует, что сами предельные издержки определяются транспортными расходами, сопровождающими поставку соответствующего товара от наиболее удаленного производителя  $n$ .

*Вариант 3.* Отличие третьего варианта от второго состоит в том, что экономический агент заведомо не производит ни одного из видов сырья, а потому координаты его местоположения становятся переменными величинами. Целевая функция остается, естественно, такой, как и в первых двух случаях (см. (6) и (10)). А вот в ограничениях модели происходят вполне понятные изменения:

$$\sum_{g=1}^G Y_{R+g}(X_1, \dots, X_R, t_{R+g}) EV_{R+g} - \sum_{r=1}^R X_r \left[ EV_r + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2} \right] = \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N x_{R+g}^n \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_g^n)^2 + (c_j - c_g^n)^2} \right], \quad (14)$$

$$T = \sum_{g=1}^G t_{R+g}. \quad (15)$$

Появление второго ограничения (формула (15)) связано с тем, что в рассматриваемых условиях экономический агент может производить — как для целей обмена, так и для собственного потребления — не один вид продукции. В результате возникает проблема оптимизации распределения времени производства  $T$  между различными видами деятельности.

Система уравнений, составленная из приравненных к нулю частных производных функции Лагранжа, здесь имеет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{R+g}^n} = \frac{\partial U}{\partial X_{R+g}} - \lambda_1 \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_g^n)^2 + (c_j - c_g^n)^2} \right] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_r} = \lambda_1 \left\{ \sum_{g=1}^G \frac{\partial Y_{R+g}}{\partial X_r} EV_{R+g} - \left[ EV_r + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2} \right] \right\} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{R+g}} = \frac{\partial Y_{R+g}}{\partial t_{R+g}} EV_{R+g} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_j} = \sum_{r=1}^R \left( \frac{X_r EV_{R+G+1} (b_j - b_r)}{\sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2}} \right) + \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \left( \frac{x_{R+g}^n EV_{R+G+1} (b_j - b_g^n)}{\sqrt{(b_j - b_g^n)^2 + (c_j - c_g^n)^2}} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_j} = \sum_{r=1}^R \left( \frac{X_r EV_{R+G+1} (c_j - c_r)}{\sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2}} \right) + \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \frac{x_{R+g}^n EV_{R+G+1} (c_j - c_g^n)}{\sqrt{(b_j - b_g^n)^2 + (c_j - c_g^n)^2}} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = & \sum_{g=1}^G Y_{R+g} (X_1, \dots, X_R, t_{R+g}) EV_{R+g} = \sum_{r=1}^R X_r \left[ EV_r + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2} \right] + \\ & + \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N x_{R+g}^n \left[ EV_{R+g} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_n)^2 + (c_j - c_n)^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = T - \sum_{g=1}^G t_{R+g} = 0. \quad (22)$$

Решения уравнений (16)–(22) дают, как и в двух предыдущих вариантах, оптимальные величины выпуска и потребления (производственного и непроизводственного) различных товаров. Кроме того, дополнительным результатом являются координаты  $(b_j, c_j)$  местоположения рассматриваемого экономического агента, при котором уровень его благосостояния оказывается наивысшим.

Несложно заметить, что уравнения (12) и (16), характеризующие необходимые условия максимума функции индивидуального благосостояния при втором и третьем вариантах, являются одинаковыми. Не удивительно, что данная при анализе второго варианта характеристика условий оптимального выбора потребительских благ в полной мере распространяется и на случай, когда экономический агент специализируется на производстве одного или нескольких потребительских благ.

Из уравнений (17) следует, что суммарный прирост предельной меновой ценности всех потребительских благ в результате увеличения количества используемого сырья  $(\sum_{g=1}^G (\partial Y_{R+g} / \partial X_r) EV_{R+g})$  в оптимальном положении должен равняться «финальной меновой ценности» (с учетом транспортных расходов) единицы этого ресурса.

Уравнения (18) демонстрируют, какой должна быть величина предельного ценностного продукта труда, затрачиваемого на выпуск потребительских благ. Из этих уравнений вытекает, что в отношении видов деятельности, которые должен вести экономический агент, действует требование, согласно которому предельная норма замещения времени выпуска одного из них другим  $(\partial t_i / \partial t_j)$  была равна обратному соотношению меновых ценностей соответствующих товаров  $(EV_i / EV_j)$ .

Особого внимания заслуживают уравнения (19) и (20).

Остановимся подробнее на уравнении (19). Выше отмечалось, что произведение  $X_r EV_{R+G+1}$  можно интерпретировать как силу притяжения сырья к месту его переработки. Отношение  $(b_j - b_r) / \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2}$  представляет  $\cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона к оси  $x$  вектора упомянутой силы притяжения. Соответственно, произведение  $X_r EV_{R+G+1} (b_j - b_r) / \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2}$  в треугольнике сил является той силой, которая действует на сырье  $r$  вдоль оси  $x$ . Второе слагаемое уравнения характеризует сумму сил, действующих в противоположном направлении вдоль этой же оси, на все виды потребительских благ, поставляемых соответствующему субъекту хозяйственной деятельности всеми производителями. Таким образом, уравнение (19) свидетельствует о том, что в оптимальном положении эти две величины должны уравновешивать друг друга.

Аналогичные рассуждения применимы к уравнению (20). Следует только учитывать, что отношения  $(c_j - c_r) / \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2}$  и  $(c_j - c_g^n) / \sqrt{(b_j - b_g^n)^2 + (c_j - c_g^n)^2}$  представляют синусы углов наклона векторов соответствующих сил притяжения к оси  $y$ .

Наконец, необходимо отметить следующее обстоятельство. Три рассмотренных выше варианта, связанных с выбором экономическим агентом широкой области специализации, характеризуются общей целевой функцией и ограничениями, которые соотносятся друг с другом примерно так же, как куклы в матрешке, а потому могут быть унифицированы.

Первое ограничение везде состоит в том, что меновая ценность произведенной продукции (оказанных услуг) должна совпадать с меновой ценностью потребляемых благ. При этом в случае специализации на оказании транспортных услуг вообще нет необходимости учитывать местоположение экономических агентов, в случае же специализации на производстве сырья следует

принимать во внимание местоположение поставщиков потребительских благ, а в случае специализации на выпуске потребительских благ — и собственное местоположение, и местоположение всех остальных экономических агентов.

Второе ограничение в явном виде присутствует только в варианте специализации на производстве потребительских благ: в соответствии с ним время, выделяемое на все виды деятельности, должно совпадать с общей продолжительностью производственного процесса. Но в неявном виде это ограничение присутствует и в первых двух вариантах, где экономический агент специализируется на одном виде деятельности и посвящает ему все время производства.

С учетом сказанного понятно, что задачу максимизации индивидуальной полезности можно сформулировать в виде одной, наиболее общей (представленной в варианте 3) модели, если дополнительно ввести три булевы переменные, каждая из которых относится к одной из «укрупненных сфер» специализации — производства сырья, производства потребительских благ и предоставления транспортных услуг. При этом булевы переменные — только одна из них может равняться единице — определяются, как отмечалось выше, заданными величинами меновых ценностей товаров и транспортных услуг, а также местом нахождения и специализацией всех остальных экономических агентов. В силу данного обстоятельства возникает потребность в дополнительном, симплексном ограничении, увязывающем поведение рассматриваемого субъекта экономической деятельности с соответствующими параметрами окружающего его мира<sup>13</sup>.

#### От индивидуальных оптимумов к общему равновесию

Анализ поведения отдельного субъекта экономической деятельности показывает, что влияние пространственного измерения проявляется и в выборе им производственной программы, и в наборе благ, максимизирующих уровень его благосостояния.

Уравнения (17) и (18) характеризуют условия формирования оптимальной структуры применяемых факторов производства. Легко заметить, что выпуск следует устанавливать на таком уровне, когда предельная норма технологической трансформации  $\partial X_{r'} / \partial X_r$  одного вида сырья другим оказывается равной обратному соотношению не рыночных меновых ценностей  $EV_r / EV_{r'}$ , а предельных затрат

$$\left[ EV_r + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_r)^2 + (c_j - c_r)^2} \right] / \left( EV_{r'} + EV_{R+G+1} \sqrt{(b_j - b_{r'})^2 + (c_j - c_{r'})^2} \right),$$

связанных с их приобретением. В то же время предельная норма замещения времени, затрачиваемого на те виды деятельности, которые следует вести экономическому агенту, должна, как и в условиях *точечного равновесия*, быть обратно пропорциональной меновым ценностям создаваемых благ.

Что касается поведения потребителей, то они должны добиваться того, чтобы соотношение предельных полезностей благ было пропорциональным не единым рыночным меновым ценностям, а предельным издержкам, связанным с приобретением товаров (последние включают транспортные расходы — см. уравнения (16)).

Задача общего анализа состоит в том, чтобы определить условия, при которых ни один из участников экономического взаимодействия не желает менять свое экономическое поведение. В нашей модели (в отличие от стандартного подхода) в состав таких условий, наряду с меновыми ценностями благ, входит транспортный тариф  $EV_{R+G+1}$  и местоположение всех экономических агентов (за исключением тех, которые оказывают транспортные услуги).

Как известно, решение этой задачи в условиях *точной экономики* связано с построением системы уравнений, состоящей из четырех блоков, отражающих необходимость того, чтобы:

- на всех товарных рынках наблюдалась сбалансированность спроса и предложения;
- совокупный чистый спрос каждого экономического агента равнялся нулю;
- каждый экономический агент выполнял наилучшую производственную программу;
- каждый потребитель получал набор благ, максимизирующий уровень его благосостояния.

<sup>13</sup> Хотел бы выразить признательность рецензенту статьи, обратившему внимание на важность введения булевых переменных и симплексного ограничения для адекватной характеристики общей структуры *базовой модели*. Последняя с учетом этих дополнений переходит из разряда классических моделей с непрерывными переменными в категорию моделей со смешанными переменными.

Все эти блоки, с упоминавшимися выше модификациями, сохраняют значение и в нашей модели. Но к ним добавляется пятый блок, отражающий необходимость оптимального местонахождения всех субъектов экономической деятельности.

Появление пятого блока сопряжено с добавлением  $2N_g$  уравнений — уравнения (19) и (20) для каждого из  $N_g$  производителей, специализирующихся на выпуске предметов потребления. Точно на такое же число увеличивается и число неизвестных модели — речь идет о координатах  $(b_{n_g}, c_{n_g})$  для каждого из таких экономических субъектов. В этом плане ситуация с соотношением числа уравнений и неизвестных является в точности такой же, как и в случае классической модели Вальраса.

Кроме того, как отмечалось выше, возникает потребность в дополнительном введении для каждого субъекта экономической деятельности трех булевых переменных (и соответствующего числа уравнений) и одного симплексного ограничения.

Строгий анализ вопроса о наличии и числе состояний общего равновесия у такой модели выходит за рамки настоящей статьи. Из общих соображений не просматриваются причины, в силу которых такие состояния в принципе невозможны.

## 6. ВЫВОДЫ

Рассмотренная модель позволяет рельефно представить роль пространственного фактора в экономическом развитии. На основе ее анализа становится ясно, что для достижения общего равновесия выбор экономическими агентами места проживания и ведения производственной деятельности является столь же важным, как и определение ими области специализации. Удастся сформулировать и ключевые модификации в функциональных связях основных экономических переменных, которые происходят при учете пространственного измерения хозяйственной деятельности.

Но проведенный анализ, как представляется, важен еще и с методологической точки зрения. На его основе появляется возможность объяснить (а не постулировать<sup>14</sup>) причины возникновения такого важного института рыночной экономики, как локализованное в пространстве *место совершения меновых сделок* (market place). Такая локализация, как известно, приводит к дифференциации земельных участков по пространственному признаку и, как результат, — к появлению такого важного инструмента рыночного механизма, как *рента по местоположению*.

Для того чтобы понять, какие силы приводят к локализации меновых сделок, необходимо обратить внимание на проблемы, выявляющиеся при анализе возможностей практического воплощения изложенной выше базовой модели.

Начнем с констатации того факта, что если бы каждый экономический агент, с одной стороны, обладал всей полнотой информации, относящейся и к нему лично, и к его партнёрам, а также к размещению природных ресурсов, а с другой — способностью идеальным образом, без затрат времени, эту информацию обрабатывать, то никаких проблем практического характера не возникло бы. В этом случае представление об оптимальных специализации, потреблении, местоположении каждого участника экономического процесса и, соответственно, связывающих их транспортных потоках формировалось бы одновременно (причем мгновенно!) у всех членов рассматриваемого сообщества. В соответствии с этими знаниями они бы все и действовали, а экономика постоянно находилась бы в состоянии общего равновесия.

Сделаем наше предположение в отношении информационной обеспеченности экономических агентов более реалистичным: будем по-прежнему исходить из того, что каждый из них имеет полное представление о местах расположения природных ресурсов, а также о своих предпочтениях и производственных способностях, но не обладает сведениями о предпочтениях и производственных способностях других членов сообщества. В этих условиях, принимая решение о собственном местоположении и специализации, любому экономическому агенту не оставалось бы ничего другого, как формулировать соответствующие гипотезы в отношении своих потенциальных партнеров. Но в таком случае процесс движения к состоянию общего равновесия имел бы итеративный характер и оказался крайне громоздким. Он был бы сопряжен с внесением экономическими

<sup>14</sup> Стандартной практикой для экономической науки является рассмотрение локализованных в пространстве рынков как чего-то совершенно естественного и потому не нуждающегося в объяснении. Уже в упоминавшейся классической работе фон Тюнена (Thünen, 1895) центральный город рассматривался как место реализации сельскохозяйственной продукции, выращиваемой на окружающей его территории.

агентами на многочисленных стадиях этого движения изменений и в специализацию, и в структуру потребления, и в местоположение. Вряд ли нужно доказывать, что (транзакционные) издержки, сопровождающие такой путь к состоянию общего равновесия, оказались бы многократно больше выгод, вытекающих из общественного разделения труда. А из этого, в свою очередь, следует, что эффекты от общественного разделения труда, выявляемые на основе анализа *базовой модели*, являются не более чем потенциально возможными. Их достижение блокируется несовершенными институциональными условиями для взаимодействия ограниченно рациональных (в упомянутом выше смысле) экономических агентов.

С учетом данного обстоятельства происходящее на основе опыта закрепление в пространстве места совершения сделок становится естественным способом приспособления институциональных условий к реальным возможностям экономических агентов получать и обрабатывать информацию. А эти корректировки, в свою очередь, приводят к внесению изменений в инструментарий рыночного механизма — его дополнение рентой по местоположению.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Некипелов А.** (2019а). Кризис в экономической науке — природа и пути преодоления // *Вестник Российской академии наук*. Т. 89. № 1. С. 24–37. [**Nekipelov A.** (2019a). The crisis in economics, its nature, and ways to recover. *Herald of the Russian Academy of Sciences*, 89, 1, 24–37 (in Russian).]
- Некипелов А.** (2019б). Модель робинзонады как исходный пункт чистой экономической теории // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 3. С. 5–20 [**Nekipelov A.** (2019b). Robinson Crusoe model as the starting point of pure economic theory. *Economics and Mathematical Methods*, 55, 3, 5–20 (in Russian).]
- Egländer O.** (1924). *Teorie des Güterverkehrs und der Frachtsätze*. Jena.
- Fetter F.A.** (1924). The economic law of market areas. *Quarterly Journal of Economics*, V, XXXVIII, May, 525.
- Hoover E.** (1937). *Location theory and the shoe and leather industries*. Cambridge: The MIT Press.
- Hyson C.D., Hyson W.P.** (1950). The economic law of market areas. *Quarterly Journal of Economics*, LXIV, May, 319–327.
- Isard W.** (1956). *Location and space-economy. A general theory relating to industrial location, market areas, land use, trade and urban structure*. Cambridge: The MIT Press.
- Kuhn H.W., Kuenne R.E.** (1962). An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized weber problem in spatial economics. *Journal of Regional Science*, 4, 21–34.
- Launhardt W.** (1885). *Matematische Begründung der Volkswirtschaftslehre*. Leipzig.
- Lösch A.** (1944). *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*. Jena.
- Moses L.N.** (1958). Location and the theory of production. *The Quarterly Journal of Economics*, 72, 2, May, 259–272.
- Palander T.** (1935). *Beiträge zur Standortstheorie*. Upsala.
- Peeters D., Thisse J.-F.** (2000). The production-location problem revisited. *Regional Science*, 79, 221–231.
- Predöhl A.** (1928). The theory of location in its relation to general economics. *Journal of Political Economy*, XXXVI.
- Revelle Ch., Laporte G.** (1996). The plant location problem: New models and research prospects. *Operations Research*, 44 (6), 864–874.
- Schneider E.** (1935). Bemerkungen zu einern Theorie der Raumwirtschaft. *Econometrica*, III, January 79–89.
- Simpson T.** (1750). *The doctrine and application of fluxions*. London.
- Tellier N.-L.** (1972). The Weber problem: Solution and interpretation. *Geographical Analysis*, July, 215–233.
- Thünen J.H. von** (1895). *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*. Berlin: Hempel und Parey.
- Weber A.** (1909). *Über den Standort der Industrien*. Tübingen: J.C.B. Mohr. English translation: Weber A. (1929). *Theory of location of industries*. Ed. by C.J. Friedrich. Chicago: University of Chicago Press.

## On the spatial dimension of general equilibrium

© 2022 A.D. Nekipelov

**A.D. Nekipelov,**

*Moscow School of Economics, M.V. Lomonosov Moscow State University; Moscow; Russia;  
e-mail: nekipelov@mse-msu.ru*

Received 08.04.2022

**Abstract.** Problems related to the spatial aspects of economic development are considered within the framework of such scientific disciplines as “regional economy”, “spatial economy”, “new economic geography”, “theory of international trade” mainly from the point of view of partial analysis. The article proposes a “basic model” designed to integrate the spatial dimension into the theory of general equilibrium in relation to a simple exchange economy. Its analysis shows why the choice by economic agents of the place of residence and production activities is as important as the selection of the field of specialization. Key modifications in the functional relationships of the main economic variables linked to the spatial dimension of economic activity are formulated. At the same time, it is shown that the effects of the social division of labor, identified using the “basic model”, are potential, since the model ignores huge transaction costs that inevitably accompany the interaction of partially rational economic agents. That is why anchoring in space the place of transactions, which is the result of experience, becomes a natural way of adapting institutional conditions to the real abilities of economic agents to receive and process information. And these adjustments, in turn, lead to changes in the toolkit of the market mechanism — in particular, adding to it a rent by location.

**Keywords:** spatial dimension of economic activity, pure space, three-point problem, transport inputs, general equilibrium, transaction costs, rent by location.

**JEL Classification:** A10, B16, B41, D50, R10.

For reference: **Nekipelov A.D.** (2022). On the spatial dimension of general equilibrium. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 5–18. DOI: 10.31857/S042473880019631-3

---

---

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

---

---

**К теории общего экономического равновесия**

© 2022 г. В.И. Данилов

**В.И. Данилов,**  
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: vdanilov43@mail.ru

Поступила в редакцию 07.03.2022

**Аннотация.** В работе предлагается модель общего экономического равновесия, когда некоторые фирмы своими действиями могут влиять на цены. Прimitивы (т.е. описание производства, распределения, потребления) предлагаемой модели те же, что и у модели Эрроу–Дебре. Отличие заключается в поведении олигополистических фирм — предполагается, что они (как в оригинальной модели Курно) назначают свои производственные планы. Главное новшество состоит в описании процесса принятия решений о производственных планах фирмами-олигополистами. В предыдущих моделях считалось, что олигополистические фирмы стремятся максимизировать прибыль при текущих ценах. Здесь же делается более естественное предположение, что фирмы-олигополисты принимают решения о планах производства с помощью голосования акционеров. Показано, как модель Эрроу–Дебре может быть модифицирована для учета этого обстоятельства. Вводится понятие равновесия Кондорсе–Курно–Вальраса, объединяющее идеи этих трех классиков. Обсуждается вопрос о существовании равновесий. Рассматривается также упрощенная версия модели, в которой каждой фирмой владеет один агент. Упрощение состоит в том, что отпадает необходимость обращаться к голосованию.

**Ключевые слова:** модель Эрроу–Дебре, равновесие Курно, олигополия, голосование, победитель по Кондорсе, максимизация прибыли.

**Классификация JEL:** D02, D21, D43, D52.

Для цитирования: Данилов В.И. (2022). К теории общего экономического равновесия // Экономика и математические методы. Т. 58. № 3. С. 19–27. DOI: 10.31857/S042473880020012-2

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе предлагается модель общего экономического равновесия. Возникает резонный вопрос, а разве ее не было раньше. Обычно под экономическим равновесием понимается общее конкурентное равновесие, когда каждый отдельный участник мал по отношению ко всей экономике, что его действия не влияют на цены и он принимает их как данные. Конечно, термин «конкурентный» здесь не вполне уместен. В чем конкурентность такой экономики? Олигополисты тоже конкурируют. Иногда добавляют слова о «совершенной конкуренции». Но в чем состоит это «совершенство»?

Рассмотрим равновесие в экономике, когда действующие лица могут реально влиять на цены. Обычно такую ситуацию обозначают как «неконкурентное», или «олигополистическое», равновесие. Современная экономика полна примерами больших компаний, способных влиять на цены и использующих эту возможность. Экономическая наука давно предложила модели несовершенной (или монополистической) конкуренции. Однако все они в той или иной степени оставались незавершенными, не обладали той внутренней (логической) согласованностью, которую отличает модель конкурентной экономики Эрроу–Дебре. Именно к этому образцу мы и стремились, создавая свою модель.

Главный недостаток предлагавшихся ранее моделей состоял в упрощенном моделировании поведения фирм-производителей. В конкурентной ситуации справедливо предполагалось, что цель фирмы состоит в максимизации прибыли при существующих ценах. Это было разумно, так как эта прибыль шла акционерам-потребителям, увеличивала их бюджетное множество и давала им более предпочтительное потребление. Такое максимизирующее прибыль поведение механически переносилось на более общую, неконкурентную ситуацию. В предлагаемой ниже модели принцип максимизации прибыли заменяется более естественным и логичным принципом голосования акционеров. Поясним его пока в общих чертах, откладывая точные формулировки на следующий этап.

В конкурентной ситуации главным ориентиром при принятии решений была цена  $p$ . Принимая ее как данное, фирма принимала решение  $y$  о своем производственном плане и выбирала план  $y = y(p)$ , дающий максимальную прибыль  $py$ .

Олигополистическая фирма, напротив, назначает производственный план  $y$ . Затем в экономике устанавливаются конкурентные цены  $p = p(y)$  и для каждого агента  $i$  формируется его благосостояние  $u_i(y)$ . Акционеры этой фирмы выбирают (голосуют) за такой план  $y$ , который устраивает большинство акционеров.

Надо сразу признаться, что мы не приводим никаких теорем о существовании такого равновесия. Вряд ли равновесие существует при обычных предположениях Эрроу–Дебре и нужны какие-то дополнительные условия (а это — работа для будущих исследователей). Отмечу также, что предлагаемая модель (как и модель Эрроу–Дебре) статична и не включает финансовой системы и государства. Скорее это логически стройная заготовка, открытая для дальнейших усовершенствований.

## 2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Работы, посвященные олигополистическому общему равновесию, можно разделить на две группы. В одной группе исследователи ставили задачу проанализировать какое-то частное явление, связанное с наличием олигополии, и делали для этого ряд упрощающих предположений. При этом авторов мало заботила логическая согласованность всех деталей. В другой группе задача была более теоретической. Здесь мы остановимся именно на второй группе работ.

Первой работой в этой группе была статья (Negishi, 1961). В ней, как и в однопродуктовой модели Курно, фигурировали (уже многопродуктовые) функции спроса без детализации, откуда они берутся.

Работа (Gabszewich, Vial, 1972) служила ориентиром для многих последующих разработок, в том числе и для настоящего исследования. В ней предполагалось, что каждая фирма  $j$  назначает объемы своего выпуска  $y_j$ , после чего в экономике (уже как в экономике чистого обмена) формируется конкурентное равновесие с равновесными ценами  $p = p(y)$ . Зная реакцию цен  $p(y)$  на планы  $y = (y_j)$ , каждая фирма-олигополист так выбирает свой выпуск  $y_j$ , чтобы максимизировать прибыль  $p(y)y_j$  (предполагая, как и Курно, выпуски других фирм неизменными). Иными словами, они придерживались идеи максимизации прибыли. Помимо того что такое поведение не всегда совпадало с интересами акционеров, оно было ущербно и с чисто математической точки зрения. Дело в том, что в модели равновесные цены определены с точностью до множителя. И чтобы задача имела экономический смысл, нужно было выбрать *селектор равновесных цен*, или, как говорят экономисты — выбрать «*нумерер*». Сами же авторы приводили пример, когда результирующее равновесие зависело от этого выбора, отсутствующего в исходном описании экономики.

После публикации этой статьи Габжевич неоднократно возвращался к теме олигополий, например в обзорах по этой теме (Gabszewich, Thisse, 2000; Gabszewicz, 2013), и по ним можно проследить дальнейшее развитие теории олигополистического равновесия.

Отход от ложной идеи максимизации прибыли и переход к благосостоянию акционеров фирм наметился только в последнее десятилетие. Впрочем, эта идея не новая в теории фирмы (см., например, (Miller, 2021)), но она почему-то не была воспринята разработчиками моделей общего равновесия.

В статье (Dierker, Dierker, Grodal, 2000) авторы заменяют максимизацию прибыли максимизацией реального богатства акционеров. При этом допускалось некоторое перераспределение полезности между акционерами, что выглядит не вполне оправданно. В работе (Vejan, 2008) подробно объясняется, в чем состоит ошибочность принципа максимизации прибыли.

Наиболее близкая к нашей постановке модель рассмотрена в (Azar, 2012), но автор довольно быстро переходит к упрощающим предположениям типа Кобба–Дугласа, чтобы производить конкретные расчеты.

В работе (Crez, Tvede, 2020) авторы выдвигают предположение, что решения фирм о планах производства определяются голосованием акционеров. Однако у них акционеры реагируют на инфинитезимальные изменения благосостояния при инфинитезимальных изменениях планов выпуска, а не на глобальные изменения своего благосостояния (как мы предлагаем). При этом основная задача работы Креза и Твида состояла в поиске такой схемы саморегулирования олигополий, при которой равновесие было бы оптимальным по Парето. С этой целью авторы предложили привлекать к голосованию не только акционеров, но и других заинтересованных лиц, включая государство.

Работа (Azar, Vives 2021) скорее относится к первой группе работ, посвященных изучению конкретного феномена, связанного с олигополиями. Авторы работы интересовало, как влияет структура собственности на эффективность рынка и положение труда. Они делали для этого несколько упрощающих предположений, в частности, что труд однороден и является единственным производственным ресурсом. Они отказывались от максимизации фирмой ее прибыли, заменяя ее максимизацией некоторой линейной комбинации прибылей всех фирм внутри отрасли. Последнее оправдывалось тем, что капиталисты, как правило, владеют акциями не одной фирмы, но распределяют свои капиталы сразу в нескольких компаниях и отраслях.

### 3. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

**Модель Курно.** Первая модель олигополии была предложена О. Курно в 1838 г. Его книга была первым трудом по математической экономике (см. (Cournot, 1963)<sup>1</sup>).

Курно предполагал, что несколько фирм производят один и тот же товар. Если фирма  $j$  выпускает его в количестве  $q_j$ , она несет издержки  $C_j(q_j)$ . Спрос на этот товар задается функцией  $P$ . Если на рынок поставлен товар в количестве  $Q$ , его цена равна  $P(Q)$ . Прибыль фирмы  $j$  при выпуске  $q_j$  равна  $P(Q)q_j - C_j(q_j)$ , где  $Q = \sum q_j$  — совокупное предложение товара. Перед каждой фирмой стоит задача так выбрать объем своего выпуска  $q_j$ , чтобы прибыль была максимальной. Эта задача и ее решение, естественно, зависят от того, какие объемы выпуска продукции выберут другие фирмы. Но перед всеми фирмами стоит одинаковая задача, так что получается замкнутый круг. Главная заслуга Курно заключалась в том, что он предложил решать эту задачу как задачу равновесия. Решением становится такой набор выпусков ( $q_j^*$ ) всех фирм, когда ни одной фирме не выгодно изменить свой выпуск  $q_j$  при условии, что остальные фирмы сохраняют равновесные выпуски.

Позже Нэш применит эту идею к произвольным некооперативным играм. И с тех пор «равновесие Курно–Нэша» стало доминирующим понятием в теории игр и экономике. В решении Курно были свои плюсы и минусы. Но оно знаменовало решительную смену экономической парадигмы: вместо детального описания процесса взаимодействия и торга было предложено ограничиться финальным, стабилизированным, неизменным состоянием. Вопросы динамики — наступит ли равновесие и каким оно будет — отодвигались на второй план<sup>2</sup>.

Одно обстоятельство модели Курно явно бросалось в глаза — ее однопродуктовость. Курно прекрасно понимал необходимость общей теории равновесия, учитывающей взаимную зависимость рынков всех товаров<sup>3</sup>. Такую модель спустя 35 лет предложил Вальрас, правда, только для конкурентного поведения участников рынка. Современный вид эта модель обрела у Эрроу и Дебре.

**Модель Эрроу–Дебре.** В этой модели следует различать анатомическую часть (примитивы модели) и физиологическую (поведение агентов): анатомия описывает различные элементы системы и их связи друг с другом, физиология — как действуют эти отдельные части и какие цели они преследуют. Анатомическая часть у нас будет такой же, что и у Эрроу–Дебре, а вот поведенческая — иной.

Анатомия модели Эрроу–Дебре в простейшем (минимальном) варианте состоит из товаров, производителей и потребителей.

1. *Товары.* Считается, что есть конечное множество  $L$  товаров. Товарный набор  $x$  задается вектором в пространстве  $\mathbb{R}^L$ .

<sup>1</sup> «Если бы для рождения математической экономики была выбрана символическая дата, наша профессия в редком единодушном согласии назвала бы 1838 г.; это год, в котором Огюстен Курно опубликовал “Исследование математических принципов теории богатства” (“Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses”)», — из нобелевской речи Ж. Дебрё.

<sup>2</sup> «Вся старая критика, которая постоянно обрушивалась на классическую теорию дуополии “Почему дуополисты должны продолжать близоруко предполагать постоянную реакцию своих конкурентов независимо от опыта?”, была сметена приглашением Нэша перейти непосредственно к конечному долгосрочному равновесию без учета какого-либо трудоемкого процесса корректировки, сходящегося к равновесию. Равновесие теперь можно определить, не вдаваясь в запутанный вопрос о том, кто на самом деле объявляет окончательную цену» (Blaug, 2003).

<sup>3</sup> «Но в реальности экономическая система есть целое, все части которого взаимосвязаны и действуют друг на друга. Рост доходов производителя товара А будет действовать на спрос товаров В, С и т.д., что, в свою очередь, повлечет изменение в спросе на товар А. Поэтому представляется, что для полного и строгого решения проблем, относящихся к некоторым частям экономической системы, неизбежно принимать к рассмотрению всю систему. Но это превзошло бы мощь математического анализа и наших методов вычисления» (Cournot, 1838).

2. *Производители.* Имеется конечное множество  $J$  производителей (фирм), где каждая фирма  $j$  описывается своим производственным множеством  $Y_j \subseteq \mathbb{R}^L$ . Положительные компоненты вектора  $y \in Y_j$  указывают выпуск, отрицательные — затраты. Обычно считается, что  $0 \in Y_j$ .

3. *Потребители.* Имеется конечное множество потребителей  $I$ . Каждый потребитель  $i$  характеризуется: а) множеством допустимых потреблений  $X_i \subseteq \mathbb{R}^L$ ; б) функцией полезности  $u_i$  на  $X_i$ ; в) начальным запасом  $e_i \in \mathbb{R}^L$ .

4. *Отношение собственности.* Предполагается, что каждая фирма  $j$  находится в собственности ее акционеров, что задается неотрицательными числами  $\theta_{ji}$ , которые указывают долю потребителя  $i$  в фирме  $j$  (естественно,  $\sum_j \theta_{ji} = 1$ ).

Так как мы не гонимся за общностью, для простоты будем считать  $X_i = \mathbb{R}_+^L$ . Вместо функции полезности можно работать с соответствующим предпочтением  $\preceq_i$ . На эти данные обычно накладываются некоторые условия (выпуклость, замкнутость, непрерывность и т.п.), но они нужны для вопросов существования, которых мы пока не касаемся.

Состояние экономики задается парой  $((x_i), (y_j))$ , которая удовлетворяет материальному балансу  $\sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \sum_i e_i$ . Рыночный характер экономике придает наличие в ней цен.

*Цена* — это неотрицательный линейный функционал  $p$  на пространстве товаров  $\mathbb{R}^L$ . Фактически цены задают пропорции, в которых могут обмениваться товары разных видов. Но лучше понимать цены как информацию, которую нужно знать агентам для принятия решения: фирмам — что и из чего производить, потребителям — что покупать и потреблять. Более точно: в физиологии Эрроу–Дебре предполагается, что все агенты экономики воспринимают цены как данные и не пытаются влиять на них, т.е. каждый потребитель  $i$  выбирает для потребления тот потребительский набор  $x_i$ , который максимизирует его полезность при бюджетном ограничении  $px_i \leq pe_i + \sum_j \theta_{ji} py_j$ . Фирмы же стараются максимизировать свои прибыли  $py_j$ ,  $y_j \in Y_j$ .

Конечно, эти планы  $(x_i), (y_j)$  при произвольно выбранной цене  $p$  будут несбалансированными. Цена  $p^*$  называется *равновесной*, если эти планы сбалансированы, удовлетворяют материальному балансу (обычно еще добавляется условие: цены товаров, по которым спрос меньше предложения, равны 0). Идея равновесия, навеянная практикой и здравым смыслом, состояла в том, что если спрос больше предложения, — цена повышается, и наоборот. Если же баланс достигнут, то у цены нет стимулов меняться и система может функционировать сколь угодно долго. Тем более что такое состояние оптимально по Парето. Вальрас надеялся, что реально функционирующие системы в результате некоторого таинственного процесса *нащупывания* приходят в состояние равновесия.

Эрроу и Дебре показали, что при некоторых достаточно естественных условиях равновесие действительно существует<sup>4</sup>.

*Олигополистическая физиология.* Нас будет интересовать физиология, когда (некоторые) фирмы ведут себя неконкурентно и пытаются своими действиями влиять на цены, чтобы получить большую прибыль или (что точнее) повысить благосостояние своих акционеров. Какие действия имеются в виду? И как понимать «благосостояние»?

Под действиями, как и в модели Курно, мы будем понимать производственные планы. Альтернативно под действиями можно было бы понимать цены (или даже цены и выпуски). Однако манипулирование ценами, несмотря на кажущуюся естественность такого действия, не вполне корректно. Говорить о назначении цен на свою продукцию можно тогда, когда эту продукцию выпускает только одна эта фирма. Это приводит к искусственному умножению товаров. Манипуляция выпусками выглядит более приемлемой, и мы ею ограничимся.

Среди множества фирм мы экзогенно выделяем множество  $J_0$  тех фирм (*олигополистов*), которые ведут себя неконкурентно, предполагая, что остальные фирмы ведут себя конкурентно (для

<sup>4</sup> Созданная экономистом с математическим вкусом и математиком со склонностью к экономике, модель Эрроу–Дебре 1954 г. своим совершенством выглядит как образец построения экономических моделей. Так нам видится теперь. Но так было не всегда. «Статья Эрроу и Дебре была опубликована после бурных дебатов и шла через огонь. Статья была отправлена на рецензию экономисту У. Баумолу и математику С. Фиппсу. Ожидалось, что Баумол рассмотрит рукопись с экономической точки зрения, а Фиппс проверит математическую корректность статьи. Но получилось наоборот: Баумол попросил авторов более активно использовать теорему Нэша, в то время как Фиппс возражал против абстрактности предположений. Баумол поддержал публикацию статьи, тогда как Фиппс настаивал на ее тщательном пересмотре. После публикации Фиппс выражал яростное недовольство публикацией статьи в связи со сделанными в ней экономическими предпосылками» (Mócsar, 2020).

простоты можно считать, что  $J_0 = J$ ). Фирмы из  $J_0$  назначают свои производственные планы  $y_j \in Y_j$  и пытаются их реализовать. Остальная часть экономики (потребители и остальные фирмы) действуют в условиях совершенной конкуренции (т.е. по Вальрасу). Более точно: возникает Вальрасова экономика  $\mathcal{E}(y)$ , в которой устанавливаются равновесные цены  $p$  (зависящие от  $y$ , так что правильнее их обозначать  $p(y)$ ). Так, для  $j \in J_0$  выпуски  $y_j$  максимизируют прибыль  $p y_j$  на множестве  $Y_j$ ; потребления  $x_i$  максимальны на соответствующих бюджетных множествах, и выполняется материальный баланс. Все — как в модели Эрроу–Дебре, за исключением того, что выпуски  $y_j$  для  $j \in J_0$  фиксированы и поэтому прибыль не максимизируют. Учитывая, что потребления  $x_i$  также зависят от  $y = (y_j, j \in J_0)$ , мы обозначаем их  $x_i(y)$ . Для удобства обозначим  $u_i(x_i(y))$  через  $u_i(y)$ , хотя, строго говоря, это число зависит не только от  $y$ , но и от установившихся в равновесии цен  $p(y)$ , потому что равновесий может быть несколько. К вопросу о существовании равновесий в экономике  $\mathcal{E}(y)$  мы вернемся позже.

#### 4. ЗАДАЧА ФИРМ-ОЛИГОПОЛИСТОВ

Теперь рассмотрим, как ведут себя фирмы-олигополисты, т.е. фирмы  $j \in J_0$ . Они выбирают выпуски  $y_j$ , но чем они руководствуются при таком выборе?

Наивная точка зрения состоит в том, что они (как у Курно или Вальраса) максимизируют прибыль  $p(y)y_j$ . Такого взгляда придерживались авторы работы (Gabszewich, Vial, 1972) и многие последующие теоретики. Однако эта точка зрения несостоятельна, как минимум, по двум причинам — экономической и математической.

Экономическое возражение выглядит так. Представим, что фирма  $j$  выбрала выпуск  $y_j$ , максимизирующий прибыль. И пусть она увеличит немного, на  $\Delta y$ , выпуск своего товара. Тогда ее прибыль уменьшится пропорционально  $\Delta y^2$ . В то же время цена этого товара уменьшится пропорционально  $\Delta y$ . И те акционеры фирмы, которые покупают свой товар (а, по идее, это — все акционеры), получают выгоду от такого уменьшения цены. Поэтому они не заинтересованы в том, чтобы максимально увеличивать прибыль. Прибыль должна быть близка к максимальной, но не обязательно совпадать с ней.

Математическое возражение состоит в том, что равновесные цены в Вальрасовой экономике  $\mathcal{E}(y)$  определены с точностью до множителя. И поэтому, чтобы придать смысл прибыли, нужно задаться некоторым *правилом нормирования цен*. Это уже понимали авторы работы (Gabszewich, Vial, 1972), и они привели пример, когда разные правила нормирования цен приводят к разным равновесным состояниям экономики. Конечно, нельзя считать положительной чертой модели, когда ответ зависит от ничем не обоснованных волюнтаристских дополнительных предположений, которых не было в исходной задаче.

Правильный, на наш взгляд, подход состоит в том, что фирмы стремятся максимизировать благосостояние своих акционеров. Менеджеры должны так управлять фирмой и назначать такие объемы выпуска  $y_j$ , чтобы максимизировать благосостояние акционеров<sup>5</sup>. Но как определять благосостояние? Ведь в принципе акционеров много и интересы у них разные. Можно было бы попытаться построить функцию их благосостояния (как это и было сделано в (Dierker, Dierker, Grodal, 2000)). Но было бы волюнтаризмом навязывать им какую-то мифическую групповую полезность.

Представляется, что более разумно поступить так, как предписывает устав компании, т.е. обратиться к голосованию акционеров. У каждого из них есть доля  $\theta_{ji}$  акций, и естественно считать, что каждый голос акционера  $i$  должен браться с этим весом<sup>6</sup>.

Предположим, что фирма  $j$  использует план  $y_j$  (а остальные олигополисты — планы  $y_{-j}$ , формируя  $y = (y_j, y_{-j})$ ). Потребитель  $i$  получает полезность  $u_i(y)$ . Предположим, что некто вносит предложение вместо плана  $y_j$  использовать альтернативный план  $y'_j$ . В случае принятия этого предложения сформируется новое равновесие Вальраса ( $y' = (y'_j, y_{-j}), x', p'$ ) и потребитель  $i$  получит полезность  $u_i(y')$ .

<sup>5</sup> Конечно, менеджеры не всегда так поступают, и тому есть много свидетельств, но если они совсем не будут на это обращать внимания, их быстро сместят из руководства компанией. Поэтому примем упрощенную (и, быть может, не слишком реалистичную) гипотезу, что менеджеры заботятся о благосостоянии владельцев фирмы.

<sup>6</sup> На самом деле, такое предположение не так важно, можно учитывать голоса акционеров с другим весом и даже принимать во внимание голоса и мнение посторонних, но заинтересованных лиц (поставщиков и покупателей продукции, общественных организаций и государства). Или рассматривать для каждой фирмы свое правило голосования. Но для определенности мы будем ориентироваться на доли акций.

Если эта новая полезность окажется больше старой  $u_i(y)$ , потребитель  $i$  как акционер выступит в поддержку нового плана. И если таких акционеров (взятых с весами  $\theta_{ji}$ ) будет больше половины, старый план отвергнут и заменят новым. Иными словами, старый план считается *одобренным*, если любой альтернативный план не выигрывает при голосовании акционеров.

Таким образом, мы почти окончательно сформулировали понятие *равновесия Кондорсе–Курно–Вальраса* (ККВ): это такой набор  $(y, x, p)$  производственных планов  $y_j$ , потребительских планов  $x_i$  и цен  $p$ , что: а) набор  $(x, p)$  образует равновесие Вальраса в экономике  $\mathcal{E}(y)$ ; б) для каждого  $j$  (из  $J_0$ ) план  $y_j$  одобряется акционерами фирмы  $j$ .

**Замечание.** Тут мы сталкиваемся со сравнительно новым для теории игр явлением: действующий агент (в нашем случае — менеджер фирмы) отделен от заинтересованных лиц (акционеров фирмы). При выборе стратегии действующий агент принимает во внимание интересы акционеров, но ему приходится агрегировать интересы различных акционеров, что оказывается нетривиальной задачей. В предлагаемой модели агрегирование осуществляется с помощью довольно несовершенного инструмента — голосования (хотя голосование — обычная практика в работе компаний).

В любом случае получается, что *теория группового выбора* вторгается в область общего равновесия. Это не столь удивительно, если мы вспомним, что К. Эрроу заинтересовался задачей агрегирования индивидуальных предпочтений и пришел к своей теореме о невозможности именно в связи с задачей фирмы. Правда, Эрроу понимал различие интересов акционеров как их разные представления о будущих событиях, т.е. интересовался динамикой. В нашей модели общего экономического равновесия динамика отсутствует, но различие интересов остается. Следует отметить, что о разделении коалиций действия и коалиций интересов применительно к общим играм писал Н. Воробьев (Воробьев, 1970).

**Некоторые уточнения.** Разобравшись в основной идее определения ККВ-равновесия, вернемся к двум тонким моментам, пропущенным при предварительном обсуждении. Предположим, что все фирмы-олигополисты выбрали свои производственные планы  $y_j$ , сформировав вектор  $y$ . После этого в игру вступает конкурентный механизм (экономика  $\mathcal{E}(y)$ ) и формируются равновесные потребления  $x_i$  (зависящие от  $y$ ). И тут встает вопрос о существовании равновесия в экономике чистого обмена  $\mathcal{E}(y)$ . Казалось бы, что проблем не должно быть, так как при стандартных предположениях — типа выпуклости и непрерывности — равновесия существуют. Однако не так все просто. Обычно в экономике чистого обмена предполагается, что суммарный начальный запас  $\sum_i e_i$  положителен. У нас же суммарный начальный запас (который должен затем перераспределяться с учетом производства конкурентных фирм) равен  $\sum_i e_i + \sum_{j \in J_0} y_j$  и в общем случае не является неотрицательным. Но в таком случае мало шансов, что в экономике (см. выше)  $\mathcal{E}(y)$  существует равновесие (а если конкурентных фирм нет, то равновесие точно не может существовать).

Из этой тупиковой ситуации есть два выхода. Первый — разрешать фирмам назначать только такие планы  $y_j$ , которые не нарушают положительности суммарного запаса. Выход, прямо скажем, не вполне удовлетворительный. Более естественно предположить, что, назначая выпуск  $y_j$ , фирма  $j$  готова на самом деле использовать любой промежуточный выпуск  $\alpha y_j$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Тем более что к такому промежуточному выпуску фирме придется обращаться только в том случае, когда ее прибыль  $p y_j$  станет неположительной. Конечно, реализация таких промежуточных выпусков подразумевает, что производственное множество  $Y_j$  фирмы выпуклое (и содержит 0), но это — стандартное предположение в теории экономического равновесия. Хотя и небезобидное, потому что экономия на масштабе — одна из главных причин обретения олигопольной власти.

Если мы принимаем такой сценарий, то равновесие в экономике  $\mathcal{E}(y)$  существует, но нужно немало модифицировать определение. В экономике  $\mathcal{E}(y)$  производственные множества фирм устроены так: если фирма  $j$  не является олигополистом ( $j \notin J_0$ ), ее производственное множество равно  $Y_j$ ; если является ( $j \in J_0$ ), то ее производственное множество — это отрезок  $[0, y_j]$ . В этом случае все производственные множества выпуклые и замкнутые и стандартные теоремы обеспечивают существование равновесий.

Однако равновесий в  $\mathcal{E}(y)$  может быть несколько. Допустим, что фирма  $j$  хочет отклониться от равновесного плана  $y_j$  и перейти к новому  $y'_j$ . Мы предполагаем, что в модифицированной экономике  $\mathcal{E}(y')$  установится равновесие. Но какое именно, если их несколько? Не существует общих утверждений о единственности равновесия. Конечно, есть условия, гарантирующие единственность равновесия, но они относятся к очень специальным ситуациям. Естественный выход: если

имеется несколько равновесий, агенты-акционеры ориентируются на наихудший исход при оценке альтернативного плана  $y'_j$ . Иначе говоря, полезность  $u_i(y')$  формируется как минимум (инфимум) полезностей потребления агента  $i$  по всем равновесиям в  $\mathcal{E}(y')$ . И участник  $i$  голосует против  $y$  в пользу  $y'$ , если  $u_i(y) < \underline{u}_i(y')$ .

Это уточнение завершает определение равновесия Кондорсе–Курно–Вальраса.

## 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЙ КОНДОРСЕ–КУРНО–ВАЛЬРАСА

Вопрос о существовании равновесия Кондорсе–Курно–Вальраса (ККВ-равновесия) остается открытым. В каких-то специальных случаях, видимо, можно проверить существование ККВ-равновесий, но никаких общих теорем на этот счет я не могу предложить. Доказывая существование ККВ-равновесий, мы сталкиваемся с двумя трудностями.

1. Оценка (одобрение) планов фирм осуществляется путем голосования. Чтобы план  $y_j$  был одобрен, он должен стать победителем по Кондорсе среди всех остальных альтернативных планов. Но часто победителей по Кондорсе не существует. Правда, соответствующие контрпримеры строятся, когда предпочтения избирателей произвольны. В экономической же ситуации предпочтения формируются специфическим способом и поэтому вполне возможно, что если план  $y_j$  близок к оптимальному, он будет победителем по Кондорсе. Например, пусть некоторый план максимизирует прибыль при текущих ценах  $p$ . Может быть, он и не побеждает при голосовании, но вблизи него вполне может оказаться победитель. Одним словом, этот вопрос требует дополнительного изучения.

2. Проблема касается существования равновесия в игре Курно олигополистических фирм. Обычно для существования равновесий нужно предполагать некоторую выпуклость полезности фирмы  $j$  относительно  $y_j$ . Эта трудность видна уже в классической однопродуктовой модели Курно. Менее тривиальные примеры несуществования приведены у (Bonnisseaum, Florig, 2005).

Перечисленные соображения не исключают, что в каких-то специальных ситуациях равновесие можно найти и вычислить. Экономистов мало интересует только факт существования решения; им важнее что-нибудь посчитать и сделать выводы. А для этого приходится идти на упрощения модели. Мы же делали упор на принципиальные вопросы корректного построения модели общего равновесия.

## 6. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ

Выше была предложена модель олигопольной физиологии экономики типа Эрроу–Дебре. В этой модели действуют менеджеры фирм-олигополистов, принимая решения о производственных планах. Владельцы фирм только одобряют или отклоняют действия менеджеров. По понятным причинам акционерам трудно непосредственно руководить производственным процессом. Особенно когда владельцев-акционеров несколько и им нужно как-то координировать свои действия. В такой ситуации предложенная физиология выглядит оправданной. Однако если акционеров мало (или у фирмы только один владелец), можно предложить (или обсудить) альтернативную физиологию, когда действующими лицами становятся сами акционеры.

К этому побуждает следующее соображение. Предположим, что некий агент единолично владеет (или имеет контрольные пакеты акций) несколькими фирмами. Тогда он может единолично задавать планы всех своих фирм. В этой ситуации нелепо предполагать, что при составлении плана для одной из своих фирм он будет считать планы других своих фирм фиксированными. Он будет задавать планы всех своих фирм! Заметим, что в этом случае трудностей в оценке планов (и голосовании) не возникает. Владельцу нужно всего лишь (!) проследить, как выбранный план выпуска влияет на его полезность.

В общем случае, когда владение не единоличное, можно сделать искусственную вещь, а именно «раздать» акционерам производственные множества фирм-олигополистов в соответствии с их долями. Более точно, сформируем новую модель, в которой каждый агент  $i$  единолично владеет фирмой с производственным множеством  $\tilde{Y}_i = \sum_j \theta_{ji} Y_j$ , а все остальные параметры (запасы  $e_i$  и полезности  $u_i$ ) остаются прежними. И рассмотрим равновесие Курно–Вальраса в этой модифицированной модели. Это означает, что каждый агент  $i$  задает производственный план  $\tilde{y}_i$  из множества  $\tilde{Y}_i$  и (предполагая фиксированными планы остальных агентов) максимизирует свою полезность  $u_i(\tilde{x}_i)$  в установившемся равновесии Вальраса в экономике  $\mathcal{E}(\tilde{y})$ .

Заметим, что с производственной точки зрения ничего не меняется (если все  $Y_j$  выпуклы) — все, что было достижимо ранее, достижимо и теперь. А с точки зрения поведения или управления изменения очевидны. Исчезает необходимость в голосовании, так как агенты единолично распоряжаются и владеют своей фирмой. Фактически получается некооперативная игра потребителей (они же производители), а равновесие Курно–Вальраса превращается в равновесие Нэша. Конечно, вопрос о существовании равновесия по-прежнему остается открытым (в силу того что мало известно о зависимости полезности агентов от их стратегий  $\tilde{y}_i$ ). Однако ответ на этот вопрос существенно облегчается.

Конечно, эта альтернативная модель вряд ли может претендовать на описание какой-то реальной ситуации. Скорее это некоторое математическое преобразование исходной модели, может быть, полезное для анализа изначальной модели.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье была предложена *трехэтажная модель* общего экономического равновесия. Главное новшество (по сравнению с предложенными ранее моделями типа Габжевича–Виала) состояло в появлении *третьего* этажа, представленного голосованием акционеров. Хотя этот этаж выглядит естественным и соответствует практике принятия решений в компаниях, его добавление сильно усложняет модель с точки зрения существования равновесий и их анализа. Тут необходим баланс сразу на трех этажах: в экономике Вальраса  $\mathcal{E}(y)$ , в игре Курно с этими  $y$  и в голосовании на фирмах. Установить баланс на всех трех этажах — непростая задача.

Взглянем, однако, на модель не с точки зрения ее анализа, а с точки зрения фундаментальных принципов. Конечно, в первую очередь критика может быть направлена на голосование. Едва ли акционеры голосуют за выбор производственных планов. Они с трудом могут представлять последствия альтернативных планов. Хотя какие-то совсем уже нелепые планы могут отвергать. Это — достаточно тонкий и уязвимый момент модели.

Но более принципиальное возражение, на наш взгляд, вызывает восходящее к Курно предположение, что каждая фирма исходит из гипотезы о том, что остальные фирмы оставляют свои стратегии неизменными. Это глубоко укоренившееся предположение (ставшее основной парадигмой всей современной теории игр) может быть оправдано только его простотой. Если я, к примеру, снижаю цену своей продукции, надеясь завоевать большую долю рынка, то мой конкурент скорее всего тоже уменьшит свою цену. Если я сокращаю выпуск, рассчитывая поднять цену, конкурент может увеличить свой выпуск. Одним словом, все понимают, что предпринятые действия одной стороны не останутся без реакции других сторон рыночной игры. Конечно, трудно точно предвидеть эту реакцию. И в этом случае принимается странная логика: если реакция неизвестна, будем считать, что ее не будет совсем.

Именно в этом мы видим главный недостаток предложенной ранее (да и всех других) модели общего экономического равновесия. Кроме того, наша модель не затрагивала многих других аспектов — таких как динамика и стохастика, финансы и государство.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Воробьев Н.Н.** (1970). Современное состояние теории игр // *Успехи математических наук*. Т. 25. Вып. 2. С. 81–140. [**Vorob'ev N.N.** (1970). The present state of the theory of games. *Russian Mathematical Surveys*, 25, 2, 77–136 (in Russian).]
- Azar J.** (2012). *A new look at oligopoly: Implicit collusion through portfolio diversification*. A dissertation presented to the faculty of Princeton University.
- Azar J., Vives X.** (2021). General equilibrium oligopoly and ownership structure. *Econometrica*, 89, 999–1048.
- Bejan C.** (2008). The objective of a privately owned firm under imperfect competition. *Economic Theory*, 37, 99–118.
- Blaug M.** (2003). The formalist revolution of the 1950s. *Journal of the History of Economic Thought*, 25, 2, 145–156.
- Bonnisseau J.-M., Florig M.** (2005). Non-existence of duopoly equilibria: A simple numerical example. *Journal of Economics*, 85, 1, 65–75.

- Cournot A.** (1963). *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*. Homewood (Illinois): Irwin. Originally published in 1838. Translated from the French “Recherchés sur les principes mathématiques de la théorie des richesses”, Paris.
- Crez H., Tvede M.** (2020). Corporate self-regulation of imperfect competition. *Working paper. School of Economics of University of East Anglia*, 1, 1–25.
- Dierker E., Dierker H., Grodal B.** (2000). Objectives of an imperfectly competitive firms: A surplus approach. *Vienna Economics Paper 0007*. University of Vienna, Department of Economics.
- Gabszewicz J.J., Vial J-P.** (1972). Oligopoly ‘a la Cournot’ in a general equilibrium analysis. *Journal of Economic Theory*, 4, 381–400.
- Gabszewicz J., Thisse J.-F.** (2000). Microeconomic theories of imperfect competition. In: *Cahiers d’Économie Politique*, 37. Qu’a-t-on appris sur la concurrence imparfaite depuis Cournot?, 47–99.
- Gabszewicz J.J.** (2013). Introduction. In: *Recherchés économiques de Louvain*, 79, 4, 5–13.
- Miller A.D.** (2021). Voting in corporations. *Theoretical Economics*, 16, 101–128.
- Móczár J.** (2020). The Arrow–Debreu model of general equilibrium and Kornai’s critique in the light of neoclassical economics. *Journal of Banking, Finance and Sustainable Development*, 1, 42–68.
- Negishi T.** (1961). Monopolistic competition and general equilibrium. *Rev. Econ. Studies*, 28, 3, 196–201.

## Towards the theory of general economic equilibrium

© 2022 V.I. Danilov

**V.I. Danilov,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;*  
*e-mail: vdanilov43@mail.ru*

Received 07.03.2022

**Abstract.** The paper proposes a model of general economic equilibrium, when some firms can influence prices by their actions. Their primitives (that is, the description of production, distribution, and consumption) of the proposed model are the same as those of the Arrow–Debreu model. The difference lies in the behavior of oligopolistic firms: it is assumed that they (as in the original Cournot model) assign their production plans. The main innovation is the description of the decision-making process on production plans by oligopolistic firms. In previous models, it was assumed that oligopolistic firms seek to maximize profits at current prices. Here, a more natural assumption is made that oligopolistic firms make decisions about production plans through a vote of shareholders. It is shown how the Arrow–Debreu model can be modified to account for this circumstance. The concept of Condorcet–Cournot–Walras equilibrium is introduced, combining the ideas of these three classics. The problem of the existence of equilibria is discussed. A simplified version of the model is also considered, in which each firm is owned by one agent. The simplification means that there is no need to turn to the voting.

**Keywords:** Arrow–Debreu model, Cournot equilibrium, oligopoly, voting, Condorcet winner, profit maximization.

**JEL Classification:** D02, D21, D43, D52.

For reference: **Danilov V.I.** (2022). Towards the theory of general economic equilibrium. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 19–27. DOI: 10.31857/S042473880020012-2

---

---

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

---

---

**Факторы формирования альтруистического поведения**

© 2022 г. М.Д. Микитчук

**М.Д. Микитчук,**

*ЦЭМИ РАН, МШЭ МГУ, Москва; e-mail: mikitchuk\_md@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.03.2022

*Автор признателен академику РАН В.М. Полтеровичу и старшему преподавателю кафедры эконометрики МШЭ МГУ Л.А. Кораблевой за ценные рекомендации и поддержку.*

**Аннотация.** Впервые поставлена и решена проблема выявления факторов формирования индивидуального альтруизма в социокультурном контексте на межстрановом уровне. Эконометрический анализ панельных данных 34 стран за 2010–2019 гг. подтвердил известные результаты, основанные на изучении отдельных регионов и групп населения: социальное благосостояние, счастье и гражданская активность показали статистическую значимость в регрессионном анализе исследуемой выборки. При этом появились основания предполагать, что некоторые зависимости могут иметь параболический характер и, соответственно, свидетельствовать о нелинейном развитии альтруизма. Кроме того, впервые на эмпирическом уровне были протестированы социально-экономические детерминанты, предлагаемые философией сотрудничества. Включение новых переменных позволило выявить особую роль культуры толерантности в формировании альтруистического поведения. Также эконометрические расчеты показали, что характер воздействия некоторых факторов зависит от принадлежности страны к числу развитых или развивающихся экономик. Согласно результатам анализа для развитых стран положительными детерминантами альтруизма являются прежде всего счастье и политическая активность, для развивающихся — социальное благосостояние. Иерархический кластерный анализ позволил выделить и дополнительно изучить подгруппу развитых стран с более высокой культурой толерантности. Полученные нами выводы показали важность детерминации феномена счастья, сложность которого во многом предопределяет дифференциацию наборов факторов альтруизма для разных групп стран. Результаты настоящей работы могут быть использованы для дальнейшего изучения коллаборативных механизмов (механизмов сотрудничества), в частности, исследования мотивации и эффективности международной помощи в целях развития.

**Ключевые слова:** альтруистическое поведение, философия сотрудничества, коллаборативные механизмы, межстрановой анализ, панельная регрессия, социокультурные детерминанты.

**Классификация JEL:** B52, O10, C53.

Для цитирования: Микитчук М.Д. (2022). Факторы формирования альтруистического поведения // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 28–44. DOI: 10.31857/S042473880021695-3

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование альтруистического поведения, его свойств и детерминант приобретает сегодня новую актуальность в рамках философии сотрудничества: альтруизм рассматривается в качестве исторически обусловленной, основополагающей компоненты формирования конструктивной, или позитивной, конкуренции. Согласно теории, которая восходит к философским воззрениям Канта, Юма и Гоббса, эффективные, обеспечивающие общемировой прогресс проявления сотрудничества зиждутся в своей природе на данном феномене культуры, тем самым постепенно увеличивая радиус распространения и устойчивость всеобщего благосостояния (Polterovich, 2017; Полтерович, 2018). Выявление факторов формирования альтруизма важно для дальнейшего изучения коллаборативных механизмов<sup>1</sup>, их экономической эффективности и перспектив дальнейшей эволюции.

Существует большое число исследований, в которых анализируются *факторы* формирования альтруистического поведения на выборках отдельного региона, страны или группы людей. Факторы тестируются на различных уровнях: на индивидуальном (пол, уровень образования, семейное

---

<sup>1</sup> Термин «коллаборативность» используется в работах, основанных на философии сотрудничества (например, (Полтерович, 2018)), и является эквивалентным понятию «сотрудничество».

положение, физическое и психологическое здоровье индивидуума, предрасположенность к жертвованиям и т.п.) и социокультурном (ВВП, общий уровень доверия, гражданской активности, религиозности и т.п.); на государственном — изучаются прежде всего индикаторы альтруизма (наличие или отсутствие культурной и религиозной общности реципиента и донора, геополитического интереса, цикличности пожертвований и т.п.). Методология работ основана на статистическом анализе, как правило, отдельных регионов<sup>2</sup> или на экспериментах, проводимых в соответствии с теорией психологических игр (Зак, 2021) на незначительной (лабораторной) выборке. Ориентация эмпирических баз на конкретные цели и узконаправленный характер задач конкретных исследований приводят к неоднозначным, а иногда и противоречивым выводам.

Стоит отметить, что изучение альтруистического поведения также осложнено природой исследуемого объекта. Выявление таких психологических эффектов, как общественное одобрение, «лучше среднего» (better than average), «поступок лидера», воздействие исторической информации, групповой эффект (Kolm, 2006; Xiao et al., 2011); открытие эволюционной биологией таких функций альтруизма, как социальное страхование и сохранение генетического фонда (Kurzban, 2014; Trivers, 1971); культурологическое разделение нормативного, естественного, патологического и мнимого альтруизма — значительно усложнили вопрос определения истинного альтруистического намерения (Kolm, 2006; Oakley et al., 2012; Rubin, 2014).

В отличие от предыдущих исследований в данной работе автор пытается анализировать общий уровень частного альтруизма в межстрановом контексте. Альтруизм трактуется как фундаментальная компонента *сотрудничества*, формирование которой необходимо рассматривать с учетом условий культурного, институционального, инновационно-технологического развития, а также уровня благосостояния. Кроме того, всякое проявление альтруизма в исследовании воспринимается как истинное — без учета возможных психолого-биологических или нормативных эффектов, а также любых дифференциаций альтруистического поведения. Использованный феноменологический подход позволил получить меру для *общего уровня индивидуального альтруизма*, объясненного через комплекс социально-экономических детерминант. Особое внимание в работе уделено проблеме сопоставления наборов значимых факторов для развитых и развивающихся стран.

## 2. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ

Для выявления факторов, формирующих альтруистическое поведение, на эмпирических данных ряда стран выполнены эконометрические расчеты, наиболее важные результаты которых представлены ниже.

**Уровень экономического благосостояния.** В статье (List et al., 2012) на большой межстрановой выборке авторы обнаружили значимую положительную зависимость уровня денежных пожертвований<sup>3</sup> от темпов прироста ВВП на душу населения. При этом в МНК-регрессии, объясняющей склонность к добровольческой деятельности, переменная ВВП оказалась с отрицательным знаком (при статистической незначимости коэффициента). Причина обратной связи, по мнению авторов данной работы, состоит в межкультурном различии восприятия времени как ресурса: согласно расчетам страны с высокими показателями денежных пожертвований в среднем характеризуются более низким уровнем волонтерской активности.

Изучение альтруизма в рамках *теории международной помощи* также подтверждает неоднозначную связь между валовым национальным доходом (ВНД) и пожертвованиями развивающимся странам, в том числе частными (Adelman et al., 2016; Gulrajani et al., 2019).

**Степень удовлетворенности жизнью.** Большинство работ, рассматривающих факторы формирования альтруизма на индивидуальном уровне, в качестве детерминант с прямой зависимостью используют такие показатели, как уровень дохода, образования, размер жилья, а также изучают взаимосвязи семейного положения и наличия детей с альтруистическим поведением (например, Shukor et al., 2017; Hrung, 2004; Steinberg, 1990; Houston, 2006)). На социокультурном уровне исследовалось воздействие на альтруизм некой обобщенной переменной, которая определялась

<sup>2</sup> Межстрановые исследования выполнены преимущественно по вопросам помощи развивающимся странам (например, Adelman et al., 2016; Gulrajani et al., 2019)). Изучение общего уровня индивидуального альтруизма в широком межстрановом контексте, насколько нам известно, было отражено только в статье (List et al., 2012).

<sup>3</sup> В качестве показателя авторы использовали долю положительных ответов на вопрос «Осуществляли ли вы пожертвование в денежной форме в последнее время?».

авторами (List et al., 2012) через социальное «благополучие» индивидуума и интерпретировалась как удовлетворенность жизнью. В работе было доказано, что повышение уровня счастья<sup>4</sup> способствует распространению альтруистического поведения.

**Социальная справедливость.** Неоднократно на эмпирическом уровне подтверждалось положительное воздействие на альтруистическое поведение различных проявлений общего уровня *социальной справедливости* в стране. Например, в работе (Smith, 2005) на данных социальных опросов США за 2002 и 2004 г. было обнаружено статистически значимое влияние на альтруизм активной заинтересованности в политике социального обеспечения и отрицательного отношения к несправедливым действиям. Также в исследованиях (Rose-Ackerman, 1996; Carkoglu et al., 2018; Bekkers et al., 2011a) приводятся убедительные доказательства положительного воздействия институтов социальной защиты на альтруистическое поведение индивида. В некоторых работах (Fukuyama, 1995; Matera et al., 2005) авторы прослеживают отрицательные зависимости уровня альтруизма от различных типов неравенства, существующих в обществе.

**Гражданская и политическая активность.** Активная гражданская позиция и вовлеченность населения в политическую деятельность выступают в исследованиях положительными детерминантами альтруизма вне зависимости от рассматриваемого региона. Так, например, в статьях (Smith, 2005; Carkoglu et al., 2018) доказывалась значимая зависимость альтруистического поведения от уровня развития гражданской культуры — в США и Турции соответственно.

**Религия.** В работах о благотворительности рассматривается влияние религиозности и различных ее проявлений на уровне индивидуума гораздо чаще, чем воздействие религии как элемента общей культурной традиции. Многофакторность явления приводит авторов к неоднозначным результатам. Так, например, в работе (Yen, 2002) было выявлено, что женщины склонны совершать пожертвования по религиозным причинам гораздо чаще, чем мужчины; а в (Brown et al., 2007) было доказано обратное. Как элемент культурно-исторического кода религия присутствует в исследовании (Yablo et al., 2007), где использовалось сравнительное тестирование двух групп — американских и тайских студентов. Авторами была доказана значимость положительного влияния религиозных ценностей на альтруистическое поведение.

**Доверие в обществе.** Вопрос влияния доверительных настроений в обществе на альтруистическое поведение остается открытым. Например, в регрессионном анализе на основе данных опросов в Турции (Carkoglu et al., 2018) доверие к (просоциальным) организациям было оценено с положительным коэффициентом, в то время как межличностное доверие<sup>5</sup> оказалось незначимой переменной. Схожие результаты были получены исследователями из Японии (Taniguchi et al., 2014), доказавшими положительную связь между доверием к институтам и волонтерством. Несмотря на то что значимость влияния межличностного доверия до сих пор не была обнаружена при определении альтруизма на эмпирическом уровне, исследователи отмечают важность этого фактора в теоретическом анализе (Bekkers et al., 2011b; Brooks, 2005; Brown et al., 2007).

В заключение обзора необходимо остановиться более подробно на работах по межстрановому анализу. Впервые он был осуществлен в статье (List et al., 2012): для исследования авторы использовали Всемирный индекс благотворительности (World Giving Index, WGI) за 2010 и 2011 г. — показатель частной безвозмездной помощи в 153 странах. В работе уделено большое внимание сравнительному описанию двух видов помощи — в форме денежных пожертвований и участия в волонтерской деятельности — для лидирующих (согласно индексу) стран, а также межрегиональному сопоставлению данных видов благотворительности. Факторы формирования альтруистического поведения были исследованы прежде всего с теоретической точки зрения: в статье подробно рассмотрены психологические аспекты жертвования вне контекста межстранового анализа. Эконометрические расчеты (модели пула, объясняющие альтруизм) были выполнены только для экономического и социального благосостояния, что отмечалось ранее в обзоре.

Последующее исследование альтруизма на широкой выборке стран, насколько нам известно, сосредоточено на изучении *международной помощи* (например, (Adelman et al., 2016; Gulrajani et al.,

<sup>4</sup> В статье (List et al., 2012) удовлетворенность жизнью отождествляется со счастьем. Кроме того, стоит отметить, что *эквивалентность* понятий была постулирована в ряде теоретических работ (например, (Tov et al., 2013)).

<sup>5</sup> В качестве индекса межличностного доверия в статье использовались результаты опроса — «Можно ли доверять большинству людей?»

2019)). При этом ее мотивы рассматривались вне контекста изучения общего уровня индивидуального альтруизма в стране-доноре и его детерминант.

Обзор литературы показал, что альтруистическое поведение принято изучать скорее в психологическом ключе (т.е. на индивидуальном уровне), чем в социально-культурном аспекте (что отчасти может объяснить отсутствие межстранового анализа). Однако теоретические выводы некоторых таких исследований можно обобщить до необходимого восприятия альтруизма как явления культуры и фундаментальной составляющей развития. Относительно устойчивыми факторами формирования альтруизма в исследовательской традиции являются гражданская и политическая активность, социальная справедливость, удовлетворенность жизнью. При этом нет полной ясности относительно доверия в обществе, религии и уровня экономического благосостояния страны. Вопрос дифференциации набора факторов для различных регионов, не рассматривавшийся прежде в явном виде, также остается открытым.

Основной решаемой далее задачей является выявление детерминант на межстрановом уровне, с учетом феноменологического подхода *теории сотрудничества*, применяемого в данном контексте впервые. Соответственно, необходимым становится:

1) тестирование набора рассмотренных выше факторов, а также других потенциально возможных с теоретической точки зрения регрессоров (инновационно-технологическое развитие, культура толерантности, демократичность режима, уровень индивидуализма (Polterovich, 2017; Полтерович, 2018));

2) проверка предположения о том, что значимые наборы этих факторов могут различаться для некоторых стран (которые можно дифференцировать по экономическому благосостоянию и с опорой на культурно-исторический подход).

Ниже представлены результаты тестирования данных гипотез, выполненного на основе эконометрического анализа панельных данных.

### 3. ДАННЫЕ: ОПИСАНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В расчетах были использованы данные Организации объединенных наций, Всемирного банка, Ассоциации всемирного обзора ценностей (The World Values Survey Association, WVSA), Фонда благотворительной помощи (Charities Aid Foundation, CAF), Института по вопросам демократии и помощи в проведении выборов (International Institute for Democracy and Electoral Assistance, IDEA), неправительственной организации «Freedom House» (табл. 1). Размеры тестируемой выборки обуславливаются структурой индексов — в анализ включены панельные данные для 34 стран за период 2010–2019 гг. Выборка представляет собой страны с различным политическим устройством, экономическим развитием (по классификации МВФ) и культурно-историческим прошлым. В качестве зависимой переменной регрессионных моделей был использован Всемирный индекс благотворительности, в котором агрегированы результаты измерений трех компонент альтруистического поведения<sup>6</sup>: частота помощи незнакомым людям, перечисление средств в благотворительные организации и участие в добровольческой деятельности. Данные, характеризующие уровень человеческого капитала, толерантности, индивидуализма, гендерного и экономического неравенства, политического участия, демократичности режима, просоциальной и инновационной политики государства, обобщенного доверия и счастья, тестируются как регрессоры (табл. 1).

Пропущенные значения переменных были восстановлены путем линейной аппроксимации — в случае последовательных пропусков, и средним от окаймляющих значений — для одианарных. Структура данных некоторых факторов (индексы WVSA) является несбалансированной в силу волнового характера проводимых измерений, поэтому значения переменных были восстановлены дублированием в рамках одной волны для каждого года (данные WVSA представляют показатели восприятия действительности на уровне ментальности, что дает право говорить о медленных изменениях и, соответственно, использовать данный эконометрический метод). Кроме того, выбросы были оставлены в силу естественности своего происхождения. Также стоит отметить, что

<sup>6</sup> Важно подчеркнуть, что Всемирный индекс благотворительности не учитывает мотивации донора, а лишь отражает его поступок. Как отмечалось выше, определение истинного альтруистического намерения индивида представляет собой сложный междисциплинарный вопрос. Большая теоретическая дискуссия о дифференциации намерений в альтруистическом поступке, а также отсутствие страновых данных для показателя эгоистических мотивов обуславливают исследование поведения без учета мотивации. В частности, стимулирование альтруистического поведения налоговыми льготами, которое должно быть учтено при измерении уровня благотворительности, вынужденно оставлено за рамками исследования.

Таблица 1. Исследуемые переменные: обозначения, источники, пояснения

Индекс (название, источник)	Краткое обозначение	Пояснение
Всемирный индекс благотворительности ( <a href="https://www.cafonline.org">https://www.cafonline.org</a> )	<i>WGI</i>	Индекс личной (частной) благотворительности (агрегированный показатель: более высокий балл соответствует большей склонности к альтруизму)
«Я считаю толерантность и уважение к другому человеку важными качествами», ( <a href="https://www.worldvaluessurvey.org">https://www.worldvaluessurvey.org</a> )	<i>TOLERANCE</i>	Мера толерантности (опросы, % всех положительных ответов)
Индекс человеческого капитала ( <a href="https://www.worldbank.org">https://www.worldbank.org</a> )	<i>HCI</i>	Агрегированный расчетный показатель, отражающий доступность здравоохранения и образования
Индекс отсутствия политических свобод ( <a href="https://freedomhouse.org">https://freedomhouse.org</a> )	<i>lim_FREEDOM</i>	Агрегированный расчетный показатель, отрицательная мера политической свободы: более высокое значение индекса соответствует более высокой степени авторитарности (тоталитарности) режима
Индекс гендерного неравенства ( <a href="http://hdr.undp.org">http://hdr.undp.org</a> )	<i>GENDER_ineq</i>	Агрегированный расчетный показатель — отрицательная мера гендерного равенства
Явка на выборы ( <a href="https://www.idea.int">https://www.idea.int</a> )	<i>VOTER</i>	Мера политической активности (явка на выборы, % населения)
Инновационное развитие ( <a href="http://hdr.undp.org">http://hdr.undp.org</a> )	<i>RD</i>	Процент ВВП, направляемый на инновационное развитие
Социальные расходы ( <a href="https://stats.oecd.org">https://stats.oecd.org</a> )	<i>soc_GDP</i>	Процент ВВП, направляемый на социальные нужды государства
ВВП на душу населения ( <a href="https://www.imf.org">https://www.imf.org</a> )	<i>GDP_cap</i>	ВВП на душу населения в постоянных ценах
Экономическое неравенство ( <a href="http://hdr.undp.org">http://hdr.undp.org</a> )	<i>INCOME_ineq</i>	Неравенство в распределении доходов (агрегированный показатель, рассчитанный на основе индекса Аткинсона, что позволяет учесть социальную чувствительность к изменениям дохода)
«Я доверяю незнакомому человеку» ( <a href="https://www.worldvaluessurvey.org">https://www.worldvaluessurvey.org</a> )	<i>TRUST</i>	Уровень обобщенного межличностного доверия (опросы, % всех положительных ответов)
«Я считаю религию важной составляющей жизни» ( <a href="https://www.worldvaluessurvey.org">https://www.worldvaluessurvey.org</a> )	<i>RELIGION</i>	Мера уровня религиозности общества (опросы, % всех положительных ответов)
«Я чувствую себя счастливым человеком» ( <a href="https://www.worldvaluessurvey.org">https://www.worldvaluessurvey.org</a> )	<i>HAPPINESS</i>	Мера счастья (опросы, % всех положительных ответов)
«Я ощущаю себя частью местного сообщества» ( <a href="https://www.worldvaluessurvey.org">https://www.worldvaluessurvey.org</a> )	<i>COLLECTIVITY</i>	Показатель, характеризующий ощущение причастности к коллективу (коллективизм), — отрицательная мера индивидуализма (опросы, % всех положительных ответов)

в индексах, как правило, присутствует ранжирующая структура: количество опрошенных, ответивших «не согласен», «согласен», «полностью согласен». Заметим и то, что показатель *VOTER* характеризуется дополнительным параметром — «обязательность посещения выборов». При таких условиях или ранжировании были учтены все позитивные ответы (или действия)<sup>7</sup>.

Предварительная работа с данными показала важные взаимосвязи и подтвердила некоторые зависимости, обнаруженные в более ранних исследованиях: корреляционная матрица (табл. 2) выявила среднюю положительную зависимость благотворительности от обобщенного доверия, уровня ВВП на душу населения и счастья. Также были обнаружены зависимости между некоторыми регрессорами. Счастье, толерантность, доверие и экономическое благосостояние продемонстрировали относительно высокие значения положительной корреляции между собой.

Кроме того, первоначальный анализ выявил сильную зависимость между экономическим, гендерным неравенством и индексом человеческого капитала, отражающим уровень доступности образования и здравоохранения в стране. В данном случае высокие показатели корреляции обусловлены прежде всего тем, что факторы являются взаимосвязанными компонентами более общего понятия — *социального благосостояния*<sup>8</sup>. Традиционное исключение всех коррелированных

<sup>7</sup> Как и для альтруизма — всякое проявление принималось за существенное.

<sup>8</sup> Насколько нам известно, Социальное благосостояние (Social Wellbeing) в исследовательской традиции экономической науки не имеет явно устоявшейся детерминации. Однако показатели здравоохранения, образования и различных видов неравенства, как правило, включены во множество его основных компонентов (например, (Bakar et al., 2015)).

Таблица 2. Матрица корреляций зависимой переменной с регрессорами

	<i>WGI</i>	<i>TOLERANCE</i>	<i>HCI</i>	<i>GDP_cap</i>	<i>lim_FREEDOM</i>	<i>GENDER_ineq</i>	<i>VOTER</i>	<i>RD</i>	<i>soc_GDP</i>	<i>INCOME_ineq</i>	<i>TRUST</i>	<i>RELIGION</i>	<i>HAPPINESS</i>	<i>COLLECTIVITY</i>
<i>WGI</i>	1,00													
<i>TOLERANCE</i>	<b>0,56</b>	1,00												
<i>HCI</i>	0,33	0,18	1,00											
<i>GDP_cap</i>	0,59	0,44	0,76	1,00										
<i>lim_FREEDOM</i>	-0,31	-0,20	-0,62	-0,58	1,00									
<i>GENDER_ineq</i>	-0,30	-0,21	<b>-0,91</b>	-0,80	0,70	1,00								
<i>VOTER</i>	0,30	0,30	0,05	0,18	0,06	0,03	1,00							
<i>RD</i>	0,33	0,21	<b>0,79</b>	0,76	-0,41	<b>-0,73</b>	0,06	1,00						
<i>soc_GDP</i>	0,16	0,24	0,61	0,54	-0,55	-0,70	0,02	0,45	1,00					
<i>INCOME_ineq</i>	-0,17	-0,08	<b>-0,77</b>	-0,61	0,58	<b>0,82</b>	0,02	-0,59	-0,60	1,00				
<i>TRUST</i>	<b>0,55</b>	0,53	0,48	0,70	-0,41	-0,53	0,35	0,44	0,45	-0,49	1,00			
<i>RELIGION</i>	-0,37	-0,34	<b>-0,74</b>	-0,65	0,69	<b>0,74</b>	-0,10	-0,64	-0,48	<b>0,71</b>	-0,54	1,00		
<i>HAPPINESS</i>	<b>0,50</b>	0,51	0,22	0,50	-0,06	-0,17	0,16	0,31	0,00	-0,12	0,54	-0,22	1,00	
<i>COLLECTIVITY</i>	<b>-0,40</b>	-0,36	-0,35	-0,35	0,16	0,21	-0,28	-0,26	-0,21	0,20	-0,43	0,33	-0,15	1,00

**Примечание.** В таблице полужирным шрифтом выделены наиболее содержательные значения коэффициентов, интерпретация которых обсуждается в тексте.

Источник: расчеты автора.

переменных (кроме одной) приводит к менее содержательным результатам, чем попытка их объединения. При первом способе предпочтительный фактор выполняет роль прокси-переменной, при втором — интегральный фактор приводит к более комплексному оцениванию социального благосостояния.

Необходимое формирование единого показателя из коррелированных индексов осуществлялось методом главных компонент (МГК). Данные из *GENDER\_ineq* и *INCOME\_ineq* были предварительно умножены на отрицательную единицу: таким образом, для обоих факторов большему значению стал соответствовать более высокий уровень равенства. Очевидно, измененные переменные показали высокую положительную корреляцию с *HCI*.

Последующее вычисление главных компонент было выполнено для каждого года отдельно. Минимум объясненной дисперсии первой главной компоненты (ГК1) за 10 лет составил 87%, а коэффициенты при факторах (ГК1) за разные годы продемонстрировали очень близкие значения (табл. 3).

В соответствии с расчетными показателями первой главной компоненты трехмерное облако было спроецировано на одномерное пространство для каждого момента времени и нормировано

Таблица 3. Результаты анализа данных, выполненного на основе метода главных компонент

Главные компоненты		2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Объясненная дисперсия	ГК1	0,90	0,91	0,93	0,89	0,89	0,90	0,87	0,87	0,89	0,89
	ГК2	0,08	0,07	0,05	0,08	0,09	0,08	0,10	0,10	0,08	0,08
	ГК3	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03
Коэффициенты (ГК1)	Индекс человеческого капитала	0,58	0,57	0,57	0,58	0,58	0,58	0,59	0,59	0,59	0,58
	Гендерное равенство	0,59	0,59	0,59	0,60	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59
	Экономическое равенство	0,56	0,56	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,56	0,56

Источник: расчеты автора.

**Таблица 4.** Показатель *soc\_Wellbeing* (часть данных), полученный методом главных компонент из *GENDER\_ineq*, *INCOME\_ineq* и *HCI*

Страна	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Австралия	7,92	7,79	7,83	7,86	7,75	7,79	7,96	8,22	7,84	7,84
Австрия	8,09	7,92	8,23	8,17	8,00	7,77	8,09	8,29	8,07	8,32
Аргентина	2,16	2,38	2,16	2,69	2,82	2,60	2,74	2,68	2,65	2,62
Великобритания	7,21	7,51	7,58	7,37	7,50	7,80	7,74	7,46	7,65	7,65
Венгрия	6,49	6,56	6,59	6,43	6,54	6,33	6,34	6,06	5,87	6,01
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Чили	2,79	3,06	2,87	2,62	2,55	2,42	2,81	3,32	3,12	3,20
Швейцария	8,94	8,72	8,78	8,94	9,08	8,72	8,79	8,39	8,52	8,56
Швеция	9,10	9,10	9,11	8,99	8,94	8,98	9,01	9,00	9,19	9,18
Эквадор	2,07	0,66	0,41	1,03	1,08	1,08	0,84	1,49	1,31	1,25
Эстония	7,14	7,14	6,94	7,06	6,84	7,02	6,81	7,20	7,95	8,16
Япония	9,15	8,91	8,89	8,87	8,90	8,98	9,30	10,29	10,02	8,76

**Примечание.** Значения нормированы на [0,10].

*Источник:* расчеты автора.

на отрезок [0,10] с целью упрощения интерпретаций нового индекса. Таким образом, получилась переменная — Социальное благосостояние (*soc\_Wellbeing*), значения которой отражены в табл. 4. Композитный фактор необходимо рассматривать как обобщение социальной справедливости, упоминавшейся в обзоре литературы:

$$\text{Социальное благосостояние (ГК1, Var} \geq 0,87\text{): } 0,6 \times (\text{Индекс человеческого капитала}) + 0,6 \times (\text{Гендерное равенство}) + 0,6 \times (\text{Экономическое равенство}).$$

Корреляционный анализ обнаружил сильные зависимости рассмотренных компонент социального благосостояния от уровня религиозности и инновационного развития. Положительная связь *RELIGION* с неравенством и отрицательная с *HCI* требуют осторожности в интерпретациях: сложность феномена культуры исключает однозначность оценок таких взаимосвязей и подразумевает дополнительные пояснения при эконометрическом анализе. Высокие значения корреляции *RD* свидетельствуют о возможности нивелирования эффекта переменной другими факторами (прежде всего *HCI*) при последующем составлении регрессионных моделей, объясняющих *WGI*.

В предварительном анализе, кроме того, стоит обратить внимание на проблему двусторонней связи. Во-первых, в исследованиях было выявлено, что распространение альтруизма способствует росту уровня счастья (Schwarze et al., 2005). Вопрос эндогенности этой переменной разрешим наиболее простым способом — сдвигом значений *HAPPINESS* на один период времени<sup>9</sup>, так как традиционный способ с применением прокси-переменной (зд. число солнечных дней в году) приводит к трудности сопоставлений в силу географических причин<sup>10</sup>. Во-вторых, в работе (Bourles et al., 2013) было доказано, что высокий уровень альтруизма способствует снижению социального неравенства. Для решения проблемы данной двусторонней связи использовался метод инструментальных переменных. Детерминанта *soc\_Wellbeing* была объяснена через ВВП на душу населения, социальные расходы государства и демократичность режима:

$$\text{Социальное благосостояние} = 3,17^{***} + 0,10 (\text{Социальные расходы})^{***} + 0,08 (\text{ВВП на душу})^{***} - 1,16 (\text{Отсутствие политических свобод})^{***}.$$

Предположение, что индивидуальный альтруизм не оказывает прямого влияния на социальную политику государства, экономическое благосостояние и уровень политических свобод в рамках

<sup>9</sup> Метод может быть использован в связи с тем, что альтруистическое поведение в данный момент времени не может влиять на ощущение счастья в предыдущий период.

<sup>10</sup> В контексте межстранового анализа прокси-переменная, отражающая число солнечных дней, приводит к большим погрешностям: среднее значение для стран со значительной дифференциацией природно-климатических условий (из-за территориальной протяженности, рельефа и др.) не будет информативным.

одного момента времени<sup>11</sup>, позволяет использовать переменную *soc\_Wellbeing* как независимую детерминанту при моделировании *WGI*.

Результаты предварительного анализа были использованы при дальнейшем регрессионном моделировании, которое представлено ниже.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки индивидуального уровня альтруизма использовались три подхода эконометрического анализа: модель пула (*pooled-model*), регрессия с фиксированными эффектами (*FE*) и регрессия со случайными эффектами (*RE*), их результаты отражены в табл. 5. Спецификации моделей были оценены с помощью стандартных тестов Вальда и Бройша–Пагана, которые во всех случаях показали предпочтительность модели пула регрессиям с фиксированными и случайными эффектами.

Модель 1 включает все базовые показатели, проанализированные в более ранних исследованиях, и детерминанты, которые необходимо рассмотреть с позиции философии сотрудничества (Polterovich, 2017; Полтерович, 2018). Индексы обобщенного доверия и религиозности продемонстрировали в регрессии положительные коэффициенты, однако были оценены как незначимые. Одна из новых переменных, технологическое развитие (*RD*), также была оценена с положительным коэффициентом при низком *t-value*. Стоит отметить, что статистическая незначимость не гарантирует отсутствия влияния этих факторов на уровень альтруизма и требует дальнейшего изучения. Например, общий уровень доверия, продемонстрировавший среднюю положительную корреляцию с *WGI* в первоначальном анализе данных, был дополнительно проанализирован в модели 6 при исключении переменных с низкой значимостью и показателей, которые могли нивелировать его эффект — толерантность и ощущение счастья (табл. 5).

Таблица 5. Оценки моделей панельной регрессии

Зависимая переменная <i>WGI</i> (общий уровень индивидуального альтруизма в стране)	Модель					
	1	2	3	4	5	6
	Все основные детерминанты ( <i>pooled</i> )	Последовательное исключение наименее значимых с теоретической точки зрения факторов из модели 1 ( <i>pooled</i> )	Модель 2 с фиксированными эффектами ( <i>FE</i> )	Модель 2 со случайными эффектами ( <i>RE</i> )	Включение дамми-переменной ( <i>pooled</i> )	Исследование влияния переменной «доверие» ( <i>pooled</i> )
Социальное благосостояние (ГК1: <i>GENDER_ineq</i> , <i>INCOME_ineq</i> , <i>HCI</i> ) = 3,17*** + 0,10 (Социальные расходы)*** + 0,08 (ВВП на душу)*** – 1,16 (Отсутствие политических свобод)***; тест на слабые инструменты, <i>p-value</i> = 0	1,27*** (0,38)	1,31*** (0,23)	1,31*** (0,23)	1,31*** (0,23)		1,20*** (0,30)
Толерантность	0,24*** (0,04)	0,27*** (0,04)	0,27*** (0,04)	0,27*** (0,04)	0,33*** (0,04)	
Политическое участие	0,09* (0,04)	0,12** (0,04)	0,12** (0,04)	0,12** (0,04)	0,12** (0,03)	0,12** (0,04)
Уровень счастья (сдвигнут на 1 год)	0,41*** (0,08)	0,42*** (0,08)	0,42*** (0,08)	0,42*** (0,08)	0,42*** (0,07)	

<sup>11</sup> При этом важно отметить, что подход не противоречит долгосрочному влиянию альтруизма (в некоторый момент времени) на показатели рассмотренных инструментальных переменных (в последующие моменты).

Окончание таблицы 5. Оценки моделей панельной регрессии

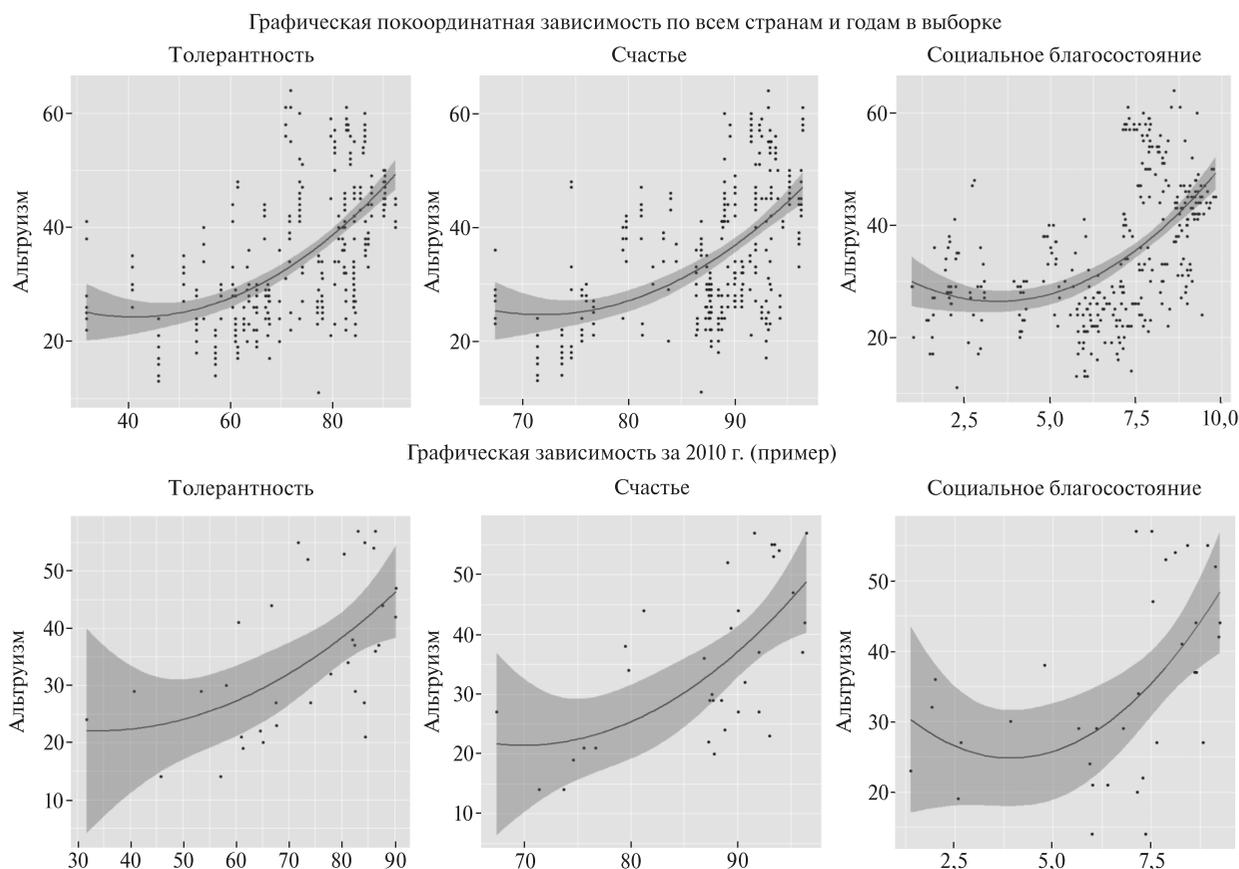
Зависимая переменная <i>WGI</i> (общий уровень индивидуального альтруизма в стране)	Модель					
	1	2	3	4	5	6
	Все основные детерминан- ты (pooled)	Последова- тельное ис- ключение наименее значимых с теорети- ческой точ- ки зрения факторов из модели 1 (pooled)	Модель 2 с фиксиро- ванными эффектами (FE)	Модель 2 со случайными эффектами (RE)	Включение дамми- переменной (pooled)	Исследова- ние влияния переменной «доверие» (pooled)
Доверие	0,02 (0,18)					0,18*** (0,04)
Религия	0,04 (0,03)					
Инновации	0,27 (0,64)					
Коллективизм	-0,23*** (0,07)					-0,28*** (0,07)
Дамми-переменная (1 – развитая страна, 0 – развивающаяся)					6,15*** (1,14)	
Константа	-16,01 (9,81)	-38,38*** (6,03)		-38,36*** (6,03)	-38,06*** (6,07)	-36,31*** (7,74)
Наблюдения	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$	$N = 340,$ $T = 10,$ $n = 34$
Adjusted R <sup>2</sup>	0,48	0,47	0,46	–	0,46	0,37
F-stat / p-value	40,18 / 0,0	74,75 / 0,0	73,15 / 0,0	–	73,3 / 0,0	49,6 / 0,0
pFtest / p-value		v / 0,991	X / 0,991			
PlmTest / p-value		v / 0,053		X / 0,053		
VIF	< 3,4	< 1,5			< 1,3	< 2,2
BP-test / p-value	26,38 / 0,0 (+)	7,90 / 0,1	7,90 / 0,1	7,90 / 0,1	3,23 / 0,5	16,79 / 0,0 (+)

**Примечание.** В таблице символами «\*\*\*», «\*\*», «\*» отмечены оценки, значимые на уровне 1, 5 и 10% соответственно; символом «V» («X») — статистическая (не)предпочтительность модели; (+) — наличие гетероскедастичности в модели; в скобках указано значение стандартной ошибки для коэффициентов регрессии; через символ «/» приводится значение p-value для статистических тестов.

*Источник:* расчеты автора.

Модель 2 была получена методом пошаговой регрессии обратного порядка из модели 1, последовательным исключением наименее значимых с теоретической точки зрения индексов. Результаты данной модели показали положительное влияние социального благосостояния (объясненного через ВВП на душу населения, социальные расходы государства и уровень политических свобод<sup>12</sup>), гражданской активности и счастья на альтруизм, которое уже было обнаружено в предыдущих исследованиях на более маленьких выборках. Впервые тестируемая переменная — культура толерантности — также была оценена как значимый положительный фактор формирования альтруистического поведения. Добавление в модель 2 фиксированных (модель 3) и случайных эффектов (модель 4) не является статистически обоснованным, однако необходимо заметить, что коэффициенты в этих регрессиях близки к коэффициентам модели пула.

<sup>12</sup> Здесь и далее переменная *социальное благосостояние* учитывается исключительно через указанные факторы — для предотвращения проблемы эндогенности, что обсуждалось ранее в предварительном анализе.



**Рис. 1.** Графический анализ зависимости альтруизма от социокультурных детерминант

Источник: расчеты автора.

Статистическая устойчивость сквозной регрессии может быть объяснена тем, что анализ тестируемой выборки наиболее чувствителен к пространственной структуре данных в силу особенностей культурного контекста (прежде всего инертности). Таким образом, согласно результатам модели 2 более толерантная, счастливая, социально благополучная и политически активная страна характеризуется более высоким уровнем альтруизма в обществе. Проведение лонгитюдных исследований в будущем должно обеспечить чувствительность эконометрического анализа к инертным показателям социокультурного развития внутри страны<sup>13</sup>.

Межстрановой графический анализ альтруизма и социально-экономических детерминант (рис. 1) демонстрирует необходимость тестирования нелинейных регрессионных моделей (табл. 6). Добавление квадратичных зависимостей для показателей счастья, социального благосостояния и толерантности обнаружилось низкие t-value для коэффициентов уравнения (модель 7). Однако последующее исключение линейных членов<sup>14</sup> этих переменных привело к статистически значимым результатам (модель 8):

$$\text{Альтруизм} = 0,094(\text{Социальное благосостояние})^{2***} + 0,002(\text{Толерантность})^{2***} + 0,002(\text{Счастье})^{2***} + 0,080(\text{Политическое участие}) - 0,257(\text{Коллективизм})^{***} + 17,877^*$$

<sup>13</sup> Социокультурные данные, отражающие десятилетний период развития страны, представляют собой, как правило, константные последовательности, которые не позволяют исследовать зависимости *WGI* от показателей на страновом уровне. Предполагается, что исследование выборки в гораздо более широком временном диапазоне сделает эконометрический анализ чувствительным к индивидуальным эффектам, т.е. позволит учесть межстрановые различия в панельных регрессиях.

<sup>14</sup> Исключение линейных членов на данном этапе может быть оправдано математическими обоснованиями и особенностями измерений индексов (например, тип данных *WGI* очень близок к ординальному, хотя формально таким не является). Вопрос социально-экономических интерпретаций остается открытым.

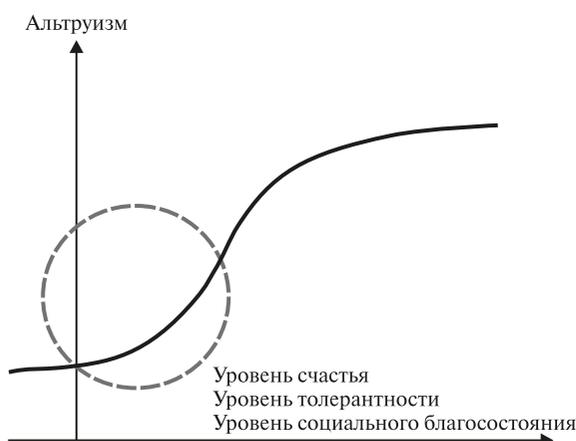
Таблица 6. Исследование параболических зависимостей

Зависимая переменная <i>WGI</i> (общий уровень индивидуального альтруизма в стране)	Модель 7. Тестирование нелинейных зависимостей (pooled)	Модель 8. Модель 7 без линейных членов (pooled)
(Социальное благосостояние) <sup>2</sup> , расчетное	-0,057 (0,108)	0,094*** (0,021)
Социальное благосостояние, расчетное	1,64 (1,20)	
(Толерантность) <sup>2</sup>	0,004 (0,002)	0,002*** (0,000)
Толерантность	-0,272 (0,281)	
Политическое участие	0,085* (0,040)	0,080* (0,038)
(Уровень счастья) <sup>2</sup> , сдвинут на 1 год	0,008 (0,009)	0,002*** (0,000)
Уровень счастья, сдвинут на 1 год	-0,961 (1,581)	
Коллективизм	-0,248*** (0,067)	-0,247*** (0,064)
Константа	61,488 (65,530)	17,877* (7,342)
Наблюдения	$N = 340, T = 10, n = 34$	$N = 340, T = 10, n = 34$
Adjusted R <sup>2</sup>	0,49	0,49
F-stat / p-value	40,40 / 0,0	63,95 / 0,0
BP-test / p-value	15,46 / 0,051	8,29 / 0,15

**Примечание.** В таблице символами «\*\*\*», «\*\*», «\*» отмечены оценки, значимые на уровне 1, 5 и 10% соответственно; в скобках указано значение стандартной ошибки для коэффициентов регрессии; через символ «/» приводится значение p-value для статистических тестов.

*Источник:* расчеты автора.

Зависимости, обнаруженные в данной модели, могут привести к интересным интерпретациям глобальной динамики. Исследуемый промежуток времени указывает на то, что страна с большими значениями перечисленных факторов обладает гораздо более высоким уровнем альтруизма.

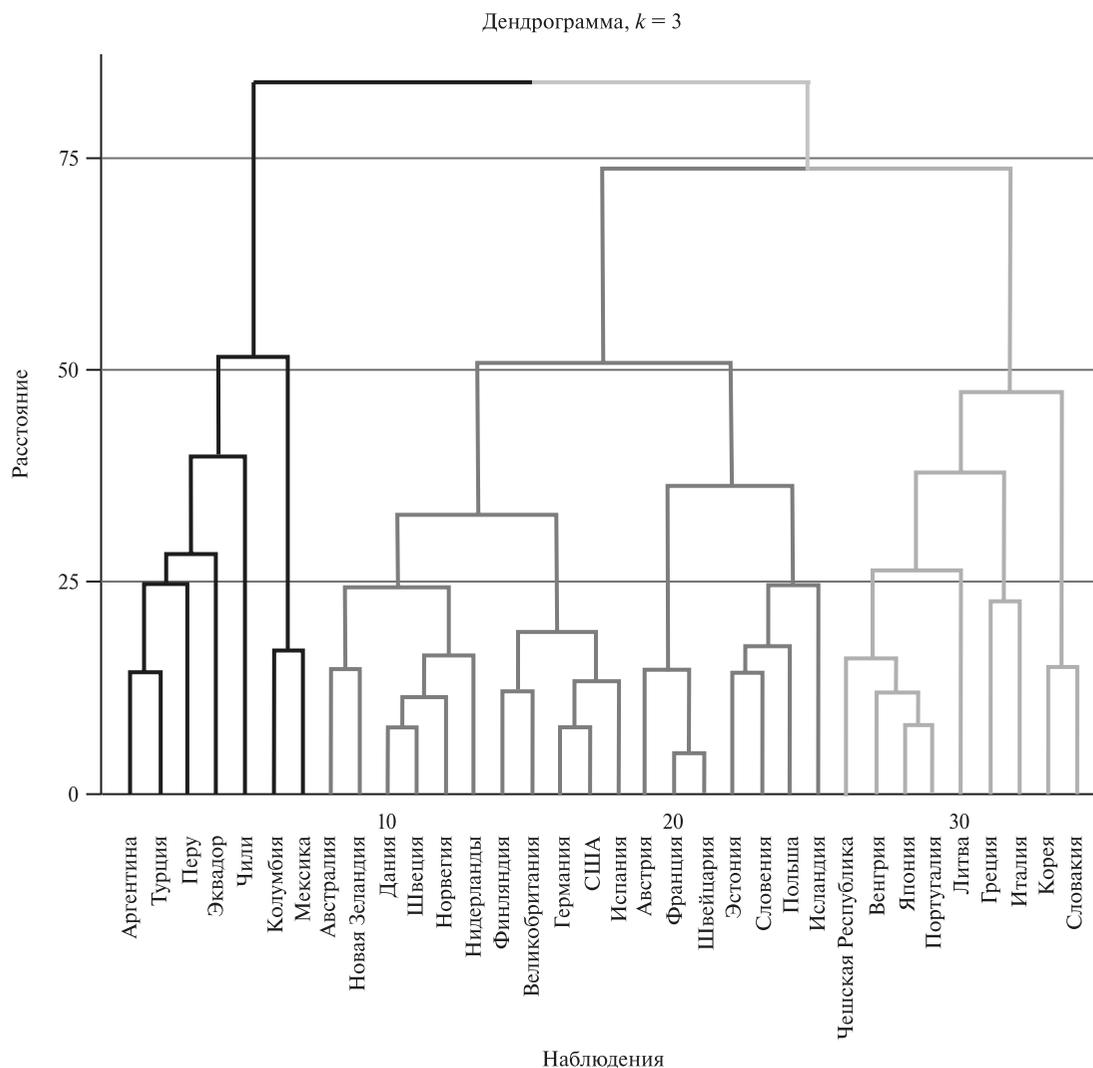


**Рис. 2.** Гипотеза: нелинейные формы зависимости альтруизма от социально-экономических детерминант, в глобальном контексте

**Примечание.** Выделенная область характеризует наблюдаемую зависимость, остальная часть кривой построена из теоретических соображений.

*Источник:* расчеты автора.

Однако появляется вопрос о постоянстве такой зависимости в широком пространственно-временном континууме. С одной стороны, глобальное развитие сотрудничества и, как следствие, рост всеобщего благосостояния должны в долгосрочной перспективе сопровождаться затуханием темпов возрастания уровня альтруизма. Кроме того, это предположение подтверждает явная экономическая ограниченность альтруистического поведения в отличие, например, от толерантности и счастья. С другой стороны, необходимо учитывать, что переход к периоду интенсивного роста числа альтруистических поступков мог иметь продолжительный характер ввиду длительного формирования институтов гражданской культуры до точки бифуркации, в частности — до смягчения проблемы безбилетника, появления социальной ответственности, репутационных и иных механизмов (Полтерович, 2018). Гипотеза, получившая формализованное представление на рис. 2, очевидным образом требует серьезных уточнений и эмпирической проверки в будущем.



**Рис. 3.** Результат кластерного анализа (дивизионный метод, Евклидова метрика)

**Примечание.** На дендрограмме выделено три подгруппы стран: темно-серым цветом обозначен кластер развивающихся стран, серым — ведущие развитые страны, светло-серым — консервативный блок развитых стран.  
 Источник: расчеты автора.

Несмотря на устойчивость сквозных регрессий, исследование проблемы на подвыборках по-прежнему остается целесообразной задачей. Включение дамми-переменной (модель 5) позволило выявить, что альтруизм в развитых странах (по классификации МВФ, 25 стран из выборки) при одинаковом уровне политической активности, толерантности и счастья выше, чем в развивающихся (9 стран из выборки).

Далее был проведен иерархический кластерный анализ: дивизионный метод с Евклидовой метрикой позволил сформировать три подвыборки стран на основе таких показателей, как счастье, толерантность, социальное благосостояние и политическое участие (рис. 3). В первый кластер вошли развивающиеся страны (Турция, Аргентина, Эквадор, Чили, и др.); во второй — ведущие развитые (Дания, Норвегия, Нидерланды, Финляндия, Германия, США, Австрия, Швейцария и др.). Третья подгруппа стала промежуточной (Корея, Греция, Италия, Япония, Португалия, Чехия и др.) — она включала развитые страны (за исключением Венгрии) с более низким уровнем экономического благосостояния и более консервативными ценностями (низкая культура толерантности) относительно второго кластера.

На подвыборках рассматривались модели трех типов: сквозная регрессия и регрессии со случайными и фиксированными эффектами. В каждом случае статистически предпочтительными оказались модели пула (табл. 7) в силу особенностей исследуемого объекта (инертности), что обсуждалось ранее.

Таблица 7. Факторы формирования альтруизма для подгрупп стран

Зависимая переменная <i>WGI</i>	Кластер 1 (развивающиеся)				Кластер 2 (ведущие развитые)				Кластер 3 (консервативный блок менее развитых)			
	Модель				Модель				Модель			
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)	Все основные детерминанты (pooled)					
Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 9 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 9 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 9 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 9 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 9 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 13 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 13 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 13 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 13 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 13 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 17 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 17 (pooled)	Последовательное включение наименее значимых переменных из модели 17 (pooled)
Социальное благосостояние, расчетное	1,63* (0,64)	1,66* (0,64)	1,63* (0,64)	1,65* (0,64)	-0,30 (1,26)	-0,30 (1,26)	-0,30 (1,26)	-0,30 (1,26)	0,10 (0,75)	0,10 (0,75)	0,10 (0,75)	0,10 (0,75)
Толерантность	0,33*** (0,11)	-0,15** (0,05)	-0,16** (0,05)	-0,15** (0,05)	-0,41** (0,15)	-0,41** (0,15)	-0,41** (0,15)	-0,41** (0,15)	-0,11 (0,07)	-0,11 (0,07)	-0,11 (0,07)	-0,11 (0,07)
Политическое участие	-0,10 (0,07)	-0,15** (0,05)	-0,16** (0,05)	-0,15** (0,05)	0,10 (0,07)	0,14* (0,06)	0,14* (0,06)	0,14* (0,06)	-0,02 (0,07)	-0,02 (0,07)	-0,02 (0,07)	-0,02 (0,07)
Уровень счастья (сдвинут на год)	-0,10 (0,17)	-0,15** (0,05)	-0,16** (0,05)	-0,15** (0,05)	1,06*** (0,18)	1,06*** (0,18)	1,06*** (0,18)	1,06*** (0,18)	0,69*** (0,04)	0,69*** (0,04)	0,69*** (0,04)	0,69*** (0,04)
Доверие	-0,34 (0,23)	-0,34 (0,23)	-0,34 (0,23)	-0,34 (0,23)	-0,04 (0,06)	-0,04 (0,06)	-0,04 (0,06)	-0,04 (0,06)	0,06 (0,08)	0,06 (0,08)	0,06 (0,08)	0,06 (0,08)
Религия	-0,05 (0,19)	-0,05 (0,19)	-0,05 (0,19)	-0,05 (0,19)	-0,18** (0,06)	-0,18** (0,06)	-0,18** (0,06)	-0,18** (0,06)	0,15*** (0,03)	0,15*** (0,03)	0,15*** (0,03)	0,15*** (0,03)
Инновации	11,35 (6,32)	11,35 (6,32)	11,35 (6,32)	11,35 (6,32)	1,33 (1,41)	1,33 (1,41)	1,33 (1,41)	1,33 (1,41)	1,21 (0,91)	1,21 (0,91)	1,21 (0,91)	1,21 (0,91)
Коллективизм	-0,03 (0,22)	-0,03 (0,22)	-0,03 (0,22)	-0,03 (0,22)	-0,16 (0,09)	-0,16 (0,09)	-0,16 (0,09)	-0,16 (0,09)	-0,51*** (0,14)	-0,51*** (0,14)	-0,51*** (0,14)	-0,51*** (0,14)
Константа	21,50 (33,96)	34,93*** (4,34)	34,93*** (4,34)	34,93*** (4,34)	-5,60 (17,70)	-36,68** (12,14)	-36,68** (12,14)	-36,68** (12,14)	7,80 (15,00)	-31,12*** (6,51)	-31,12*** (6,51)	-31,12*** (6,51)
Наблюдения	N = 70, T = 10, n = 7				N = 180, T = 10, n = 18				N = 90, T = 10, n = 9			
Adjusted R <sup>2</sup>	0,24	0,17 v / 0,36	0,10 X / 0,36	-	0,28	0,21 v / 0,97	0,17 X / 0,97	-	0,53	0,45 v / 0,94	0,45 X / 0,94	-
pFtest / p-value		v / 0,36 v / 0,93	X / 0,36	X / 0,93		v / 0,10	X / 0,10	X / 0,10		v / 0,14	X / 0,14	X / 0,14
PImTest / p-value												
VIF	Мультиколлинеарность	< 1,1	0,19 / 0,91	0,19 / 0,91	< 3,1	< 1,2	< 1,2	< 1,2	< 5,2	< 1,5	< 1,5	< 1,5
BP-test / p-value	20,14 / 0,0 (+)	0,19 / 0,91	0,19 / 0,90	0,19 / 0,91	28,36 / 0,0 (+)	1,22 / 0,54	1,22 / 0,54	1,22 / 0,54	13,31 / 0,11	2,62 / 0,26	2,62 / 0,26	2,62 / 0,26

**Примечание.** В таблице символами «\*», «\*\*», «\*\*\*» отмечены оценки, значимые на уровне 1, 5 и 10% соответственно; символом «V» («X») — статистическая (не)предпочтительность модели; (+) — наличие гетероскедастичности в модели; в скобках указано значение стандартной ошибки для коэффициентов регрессии; через символ «/» приводится значение p-value для статистических тестов.

Источник: расчеты автора.

Таблица 8. Корреляционные матрицы для кластеров

Переменные	<i>WGI</i>	<i>COLLECTIVITY</i>	<i>TOLERANCE</i>	<i>RD</i>	<i>VOTER</i>	<i>TRUST</i>	<i>RELIGION</i>	<i>HAPPINESS</i>	<i>Soc_Wellbeing_hat</i>
<b>Кластер 1. Развивающиеся</b>									
<i>WGI</i>	1,0								
<i>COLLECTIVITY</i>	0,0	1,0							
<i>TOLERANCE</i>	0,3	0,3	1,0						
<i>RD</i>	-0,1	-0,2	-0,4	1,0					
<i>VOTER</i>	<b>-0,3</b>	-0,0	-0,3	0,2	1,0				
<i>TRUST</i>	-0,0	-0,1	-0,2	0,7	0,2	1,0			
<i>RELIGION</i>	-0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	-0,4	1,0		
<i>HAPPINESS</i>	-0,1	0,1	0,2	0,1	-0,2	0,2	-0,0	1,0	
<i>Soc_Wellbeing_hat</i>	<b>0,3</b>	-0,0	0,3	-0,1	-0,1	0,4	-0,9	-0,3	1,0
<b>Кластер 2. Ведущие развитые</b>									
<i>WGI</i>	1,0								
<i>COLLECTIVITY</i>	-0,3	1,0							
<i>TOLERANCE</i>	0,1	-0,0	1,0						
<i>RD</i>	0,1	-0,1	0,0	1,0					
<i>VOTER</i>	<b>0,3</b>	<b>-0,3</b>	<b>0,4</b>	0,1	1,0				
<i>TRUST</i>	<b>0,3</b>	<b>-0,3</b>	<b>0,6</b>	<b>0,3</b>	<b>0,5</b>	1,0			
<i>RELIGION</i>	-0,2	0,1	<b>-0,4</b>	<b>-0,3</b>	<b>-0,4</b>	<b>-0,3</b>	1,0		
<i>HAPPINESS</i>	<b>0,4</b>	-0,2	<b>0,4</b>	0,1	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	0,1	1,0	
<i>Soc_Wellbeing_hat</i>	<b>0,3</b>	-0,0	0,2	<b>0,7</b>	<b>0,3</b>	<b>0,6</b>	<b>-0,3</b>	<b>0,4</b>	1,0
<b>Кластер 3. Консервативный блок менее развитых</b>									
<i>WGI</i>	1,0								
<i>COLLECTIVITY</i>	-0,1	1,0							
<i>TOLERANCE</i>	-0,0	-0,6	1,0						
<i>RD</i>	<b>0,3</b>	-0,1	0,1	1,0					
<i>VOTER</i>	<b>0,3</b>	-0,4	0,0	0,4	1,0				
<i>TRUST</i>	0,2	0,0	0,1	-0,3	0,1	1,0			
<i>RELIGION</i>	-0,0	0,3	-0,2	-0,5	0,2	-0,1	1,0		
<i>HAPPINESS</i>	<b>0,6</b>	0,2	-0,0	0,4	0,1	0,3	-0,4	1,0	
<i>Soc_Wellbeing_hat</i>	0,2	-0,1	0,4	-0,1	-0,0	-0,1	-0,1	0,3	1,0

Источник: расчеты автора.

**Примечание.** В таблице полужирным шрифтом выделены наиболее содержательные значения коэффициентов, интерпретация которых обсуждается в тексте.

Регрессионный анализ первого кластера показал, что для развивающихся стран значимой положительной детерминантой альтруизма является социальное благосостояние (модель 10), при этом на рост альтруистического поведения отрицательно влияет переменная, отражающая гражданскую активность. Корреляционный анализ (табл. 8) подтверждает обратную зависимость, что может быть объяснено политическими особенностями рассматриваемой подгруппы. Индекс *VOTER* отражает явку на выборы: в данном кластере во всех странах, за исключением Колумбии, голосование является юридической обязанностью. Показатель можно интерпретировать как индикатор авторитарного режима (и, возможно, патернализма), что объясняет отрицательный коэффициент переменной в модели. Кроме того, в корреляционном анализе стоит обратить внимание на положительную связь толерантности с альтруистическим поведением, характерную для развивающихся стран.

Факторами формирования альтруизма в развитых странах, согласно эконометрическим расчетам, являются прежде всего счастье и гражданская активность (модель 14 и 18). Однако между второй и третьей подгруппой наблюдаются некоторые различия.

Для блока более развитых и прогрессивных<sup>15</sup> стран (второй кластер) характерны относительно высокие коэффициенты корреляции между большинством переменных. Это обусловило исключение ряда регрессоров в конечном уравнении (модель 13). Например, счастье нивелирует эффект доверия, толерантности и социального благосостояния, при этом факторы имеют средние положительные значения корреляции с альтруизмом в табл. 8 и, вероятно, влияют на формирование альтруистического поведения. Также, согласно результатам корреляционного анализа, именно в наиболее развитых странах коллективизм показывает значимую обратную связь с *WGI*, в то время как в других кластерах — коэффициент близок к 0. Для консервативного блока развитых стран (третий кластер) толерантность, доверие и социальное благосостояние играют меньшую роль в формировании альтруизма, при этом наблюдается более сильная положительная зависимость между альтруизмом и инновационным развитием.

Следует объяснить, почему множества значимых факторов могут различаться для подвыборок. Одна из причин — сложность фактора счастья, его дифференциации для разных групп стран в культурно-историческом контексте. Как было показано выше, у ведущих развитых стран удовлетворенность жизнью относительно тесно связана с социально-экономическими компонентами; в промежуточном кластере зависимости становятся более слабыми; для развивающихся стран — близкими к нулевым значениям. При этом для консервативного блока развитых стран счастье и альтруизм показывают высокие значения корреляции, для прогрессивных стран — средние, а для развивающихся — незначительные. Получается, что более счастливые развитые страны готовы больше жертвовать<sup>16</sup>, однако в случае ведущих развитых стран это определено в большей степени толерантностью, доверием и социальным благосостоянием, а для другой подгруппы — непосредственно ощущением счастья (и иными скрытыми компонентами, требующими отдельного изучения<sup>17</sup>). Благотворительность в развивающихся странах напрямую зависит от культуры толерантности, социального равенства, доступности образования и здравоохранения, но не определяется счастьем.

Выявленная отрицательная связь между коллективизмом и альтруистическим поведением (в группе ведущих развитых стран) сопоставима<sup>18</sup> с теоретическими построениями динамики коллаборативных отношений (Полтерович, 2015), фундаментом которых, как было показано выше, является альтруизм. Согласно философии сотрудничества индивидуализм вне крайних форм не только не противоречит механизмам сотрудничества, но и способствует формированию активного осознанного взаимодействия. На исследуемых эмпирических данных было подтверждено, что это возможно при развитых институтах гражданской культуры и на высоком уровне социально-экономического благосостояния. Зависимость между альтруизмом и инновационно-технологическим развитием в консервативном блоке развитых стран также не противоречит теории. Более высокий коэффициент корреляции в подвыборке по сравнению с другими группами стран может быть объяснен промежуточным положением кластера: для ведущих стран уровень инновационного развития в среднем уже достаточно высокий, в то время как для развивающихся стран более характерно экстенсивное развитие.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эконометрические расчеты, впервые выполненные на широкой межстрановой выборке в социокультурном понимании, подтвердили положительное влияние таких факторов формирования индивидуального альтруизма, как политическая активность, общий уровень счастья и социальное благосостояние — на более глобальном уровне. Использование в регрессионном анализе детерминант, предлагаемых философией сотрудничества, позволило выявить новые, не менее важные зависимости. Прежде всего стоит отметить культуру толерантности, которая продемонстрировала устойчивую положительную связь с альтруистическим поведением.

<sup>15</sup> Определение «прогрессивная страна» условно, так как использовано исключительно с целью упрощения описания подвыборки развитых стран с более высокой культурой толерантности (относительно промежуточной группы). Соответственно, аналогично применено определение «консервативный».

<sup>16</sup> Данная формулировка интерпретации эконометрического анализа обусловлена, как и прежде, структурой данных, слабо чувствительных ко времени.

<sup>17</sup> Насколько нам известно, факторы формирования удовлетворенности жизнью в различных подгруппах стран до сих пор не изучались (с делением по экономическому, культурно-историческому и иному принципам).

<sup>18</sup> Необходимо отметить, что индекс *COLLECTIVITY* отражает конкретный вид восприятия коллективных отношений, трактовка отрицательных взаимосвязей происходит на более обобщенном уровне понимания индивидуализма и коллективизма.

Деление стран на кластеры и проведение внутригруппового регрессионного анализа позволило внести уточнения в результаты исследования. Согласно расчетам детерминантой альтруизма для развитых стран является в первую очередь счастье; для развивающихся — социальное благосостояние. Проявления гражданской культуры выступают фундаментальной компонентой для обеих категорий государств, однако при включении данной переменной в уравнение необходимо учитывать особенности политического устройства. Дифференциация внутри группы развитых стран также выявила новые закономерности: для кластера стран с более высокой культурой толерантности была обнаружена значимая положительная корреляция между альтруизмом и индивидуализмом, для более консервативного блока — между альтруизмом и инновационным развитием.

Кроме того, была выдвинута гипотеза о глобальной динамике альтруистического поведения — в зависимости от уровня развития институтов гражданского общества. Предположение о нелинейной форме связи альтруизма с социокультурными факторами требует дополнительного детального анализа. Выявленные закономерности могут быть использованы для дальнейшего изучения иных проявлений сотрудничества как гаранта мира всеобщего благосостояния, например, в рамках исследования вопросов эффективности государственной международной помощи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Зак Ф.Л.** (2021). О некоторых моделях альтруистического поведения // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 49 (1). С. 12–53. [Zak F.L. (2021). On some models of altruistic behaviour. *Journal of the New Economic Association*, 49, 1, 12–53 (in Russian).]
- Полтерович В.М.** (2015). От социального либерализма — к философии сотрудничества // *Общественные науки и современность*. № 4. С. 41–64. [Polterovich V.M. (2015). From social liberalism towards the philosophy of collaboration. *Social Sciences and Contemporary World*, 4, 41–64 (in Russian).]
- Полтерович В.М.** (2018). К общей теории социально-экономического развития. Часть 2. Эволюция механизмов координации // *Вопросы экономики*. № 12. С. 77–102. [Polterovich V.M. (2018). Towards a general theory of socioeconomic development. Part 2. Evolution of coordination mechanisms. *Voprosy Ekonomiki*, 12, 77–102 (in Russian).]
- Adelman C., Barnett J.N., Riskin E.** (2016). *Index of global philanthropy and remittances*. Available at: <https://s3.amazonaws.com/>
- Bakar A.A., Osman M.M., Bachok S., Ibrahim M., Mochamed M.Z.** (2015). Modelling economic wellbeing and social wellbeing for sustainability: A theoretical concept. *Procedia Environmental Science*, 28, 286–296.
- Bekkers R., Wiepking P.** (2011a). A literature review of empirical studies on philanthropy. Eight mechanisms that drive charitable giving. *Nonprofit and Voluntary Sector Quarterly*, 40, 3, 924–973.
- Bekkers R., Wiepking P.** (2011b). Who gives? A literature review of predictors of charitable giving. Part one: Religion, education, age, and socialization. *Voluntary Sector Review*, 2, 3, 337–365.
- Bourles R., Bramouille Y.** (2013). Altruism in networks. *Working Papers of Aix-Marseille School of Economics*, 1, 1–31.
- Brooks A.** (2005). Does social capital make you generous? *Social Science Quarterly*, 86, 1, 1–15.
- Brown E., Ferris J.** (2007). Social capital and volunteering: An analysis of the impact of social capital on individual giving and volunteering. *Nonprofit and Voluntary Sector Quarterly*, 36, 1, 85–99.
- Carkoglu A., Aytac S.E., Campbell D.A.** (2018). Determinants of formal giving in Turkey. *Journal of Muslim Philanthropy & Civil Society*, 1, 1, 40–50.
- Fukuyama F.** (1995). *Trust: The social virtues and the creation of prosperity*. New York: Free Press.
- Gulrajani L., Calleja R.** (2019). *The principles aid index*. Available at: <https://principled-aid-index.odi.digital>
- Houston D.J.** (2006). “Walking the walk” of public service motivation: Public employees and charitable gifts of time, blood, and money. *Journal of Public Administration Research and Theory*, 16, 1, 67–86.
- Hrung W.B.** (2004). After-life consumption and charitable giving. *American Journal of Economics and Sociology*, 63, 3, 731–745.
- Kolm S.-Ch.** (2006). The structure of non-altruistic giving. In: S.-Ch. Kolm, M.J. Ythier. *Handbook of the economics of giving, altruism and reciprocity*. Vol. 1. North-Holland: Elsevier.
- Kurzban R., Burton-Chellow M.N., West S.A.** (2014). The evolution of Altruism in Humans. *Annual Review of Psychology*, 7, 575–599.
- List J.A., Price M.K.** (2012). Charitable giving around the world: Thoughts on how to expand the pie. *CESifo Economic Studies*, 58, 1–30.
- Materia E., Rossi L., Guasticchi G.** (2005). Income inequality and nations’ altruism. *Lancet*, 365, 9469, 1462–1463.

- Oakley B.A., Knafo A., Madhavan G., Wilson D.S.** (2012). *Pathological altruism*. New York: Oxford University Press.
- Polterovich V.** (2017). Positive Collaboration: Factors and mechanisms of evolution. *Russian Journal of Economics*, 3, 24–41.
- Rose-Ackerman S.** (1996). Altruism, non-profits and economic theory. *Journal of Economic Literature*, 34, 701–728.
- Rubin P.H.** (2014). Pathological altruism and pathological regulation. *Cato Journal*, 34, 1, 171–183.
- Schwarze J., Winkelmann R.** (2005). What can happiness research tell us about altruism? Evidence from the German socio-economic panel. *DIW Discussion Papers*, 475, 1–28.
- Shukor S.A., Anwar I.F., Sabri H.** (2017). Giving behaviour: Who donates cash WAQF? *Malaysian Journal of Consumer and Family Economics*, 5, 87–100.
- Smith T.** (2005). *Altruism and empathy in America: Trends and correlates*. Available at: <http://www-news.uchicago.edu/releases/06/060209.altruism.pdf>
- Steinberg R.S.** (1990). Taxes and giving: New findings. *Voluntas*, 1, 61–79.
- Taniguchi H., Marshall G.** (2014). The effects of social and trust and institutional trust on formal volunteering and charitable giving in Japan. *Voluntas: International Journal of Voluntary and Nonprofit Organizations*, 25, 150–175.
- Trivers R.L.** (1971). The evolution of reciprocal altruism. *Quarterly Review of Biology*, 46, 35–57.
- Tov W., Diener E.** (2013). Subjective well-being. *Research Collection School of Social Sciences*, 1395, 1239–1245.
- Xiao Y., Wong K., Cheng Q., Yip P.S.F.** (2021). Understanding better than average effect on altruism. *Frontiers in Psychology*, 11, 1–14.
- Yablo P.D., Field N.P.** (2007). The role of culture in altruism: Thailand and the United States. *Psychologia: An International Journal of Psychology in the Orient*, 50, 3, 236–251.
- Yen S.T.** (2002). An econometric analysis of household donations in the USA. *Applied Economics Letters*, 9, 13, 837–841.

## Socio-economic determinants of altruistic behavior

© 2022 M.D. Mikitchuk

**M.D. Mikitchuk,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: mikitchuk\_md@mail.ru*

Received 28.03.2022

*The author would like to express gratitude to Academician of the Russian Academy of Sciences V.M. Polterovich and senior lecturer of the Department of Econometrics, Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University L.A. Korableva for valuable recommendations and support.*

**Abstract.** The problem of identifying the factors of individual altruism in the socio-cultural context and at the intercountry level is posed and solved for the first time. Econometric analysis of panel data on 34 countries for 2010–2019 confirmed the results, obtained in local screenings for particular regions and population groups. Namely, such factors as social welfare, happiness and civic engagement showed statistical significance in the regression analysis of the sample under study. Furthermore, there are reasons to assume that some relations may be parabolic in nature and, thus, indicate the nonlinear development of the altruism phenomenon. In addition, the previously overlooked socio-economic determinants stipulated by the philosophy of collaboration were tested on empirical level. Through the inclusion of new variables, it was possible to identify the special role of the culture of tolerance in the generation of altruistic behavior. Also, econometric calculations revealed that the nature of some factors' impact depends on the level of economic development of a certain country. According to the results, primary positive determinants of altruism for developed countries are happiness and political activity, while for developing countries — social well-being. Hierarchical cluster analysis made it possible to identify and further study a subgroup of developed countries with more advanced culture of tolerance. The findings showed the importance of determining the phenomenon of happiness, complexity of which presets the principle differentiation of altruism factors for different groups of countries. The results of this work can be used for further study of collaborative mechanisms, in particular, the study of motivation and effectiveness of international development assistance.

**Keywords:** altruism, philosophy of collaboration, collaborative mechanisms, cross-country analysis, panel data analysis, socio-cultural determinants.

**JEL Classification:** B52, O10, C53.

For reference: **Mikitchuk M.D.** (2022). Socio-economic determinants of altruistic behavior. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 28–44. DOI: 10.31857/S042473880021695-3

## О некоторых парадоксальных эффектах механизма налоговых каникул

© 2022 г. А.Д. Слестников

**А.Д. Слестников**

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: slast@cemi.rssi.ru; aslast@mail.ru

Поступила 19.04.22

**Аннотация.** В статье рассматривается модель стимулирования инвестиций в проект создания нового предприятия в условиях неопределенности экономической среды и в рамках российской системы налогообложения предприятий. Предполагается, что инвестор может отложить инвестирование проекта до наступления более благоприятной для него ситуации. В качестве механизма стимулирования выступают налоговые каникулы фиксированной длительности. При принятии решения о финансировании инвестор ориентируется на выбор такого момента инвестирования, чтобы показатель ожидаемого чистого приведенного дохода от реализованного проекта был максимальным. Показано, что оптимальный момент инвестирования и оптимальный ожидаемый чистый приведенный доход инвестора от реализованного проекта могут зависеть от длительности налоговых каникул немонотонным образом. При этом поведение этих показателей определяется пороговыми значениями нормы амортизации основных фондов и длительности налоговых каникул. Весь диапазон возможных норм амортизации разбивается на три области, в которых каждый показатель либо монотонный по длительности налоговых каникул, либо имеет один экстремум. Установлено существование «наихудших налоговых каникул», как с точки зрения момента инвестирования, так и с точки зрения ожидаемого чистого приведенного дохода инвестора. Показано, что при разумных значениях норм амортизации такие наилучшие для оптимального момента инвестирования каникулы лежат в диапазоне от 3 до 5 лет, а для оптимального ожидаемого чистого приведенного дохода не превышают 3 лет. Введена чувствительность пороговых значений норм амортизации и длительности каникул к изменению параметров проекта (среднему темпу роста добавленной стоимости и волатильности).

**Ключевые слова:** инвестиционный проект, налоговые каникулы, стохастический процесс прибыли, момент инвестирования, ожидаемый NPV инвестора, парадоксальные эффекты.

**Классификация JEL:** H21, H25, D81, C61.

Для цитирования: Слестников А.Д. (2022). О некоторых парадоксальных эффектах механизма налоговых каникул // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 45–56. DOI: 10.31857/S042473880021694-2

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Известное выражение Бенджамина Франклина гласит, что «в этом мире нет ничего определенного, кроме смерти и налогов»<sup>1</sup>. И если с первым вряд ли можно поспорить, то в отношении налогов это не совсем так. В истории современной России, начиная с 1991 г., неоднократно менялась как сама система налогов, так и ее отдельные элементы — изменялись ставки, какие-то налоги исчезали и возникали, налоговые льготы отменялись и возрождались уже на новом уровне и т.д. Как считают некоторые авторы, даже простое обсуждение налоговой политики (на государственном уровне) уже вносит неопределенность и способно повлиять на решения инвесторов.

Обычно считается, что неопределенность, в том числе и в налоговой политике, играет дестимулирующую роль, снижая инвестиционную активность в реальном секторе. Однако, как показывают многочисленные эмпирические и модельные исследования, влияние налоговой политики в условиях неопределенности на инвестиции, в частности на инвестирование проектов в реальном секторе, может носить сложный характер, иногда весьма далекий от интуитивных представлений. Ситуация еще более усложняется, когда у инвестора есть возможность гибкого принятия решений и откладывания инвестиций до наступления более благоприятной для него обстановки (концепция реальных опционов). Возникают налоговые парадоксы, когда изменение параметров налоговой системы (налоговых ставок или льгот) может приводить, при определенных условиях,

<sup>1</sup> «...But in this world nothing can be said to be certain, except death and taxes» (из письма Б. Франклина к J.-B. Le Roy, 1789).

к последствиям противоположной направленности, например как к ускорению, так и к замедлению инвестирования проектов.

Так, в (Hassett, Metcalf, 1999) авторы изучали модель, в которой для описания неопределенности использовались случайные процессы двух различных типов: непрерывный (диффузионный) и дискретный (скачкообразный). Непрерывный процесс отражал динамику цен и спроса на товары, а скачкообразный моделировал изменения в налоговой политике, которые авторы связывали в первую очередь с появлением и изменением условий инвестиционных налоговых кредитов<sup>2</sup>. В качестве непрерывного процесса здесь, как и в большинстве близких работ (в том числе упоминаемых ниже) использовались процессы геометрического броуновского движения, что широко принято в теории реальных опционов и финансовой математике (см., например, (Dixit, Pindyck, 1994)). Было показано, что процессы разных типов оказывают существенно разное влияние на привлечение инвестиций. Если неопределенность цен (и тем самым прибыли) способствует откладыванию инвестирования на более поздний срок, то скачки в налоговой политике (в случайные моменты времени) стимулируют более раннее инвестирование. В (Pawlina, Kort, 2005) рассмотрен случай, когда объем необходимых для реализации проекта инвестиций может меняться, причем вероятность изменений (например, в результате изменения налоговой политики) зависит от состояния системы, а именно от ожидаемой дисконтированной стоимости инвестируемого проекта. Авторы провели численное исследование и обнаружили, что величина и волатильность скачков в инвестициях могут немонотонно влиять на момент инвестирования.

Другой подход к моделированию неопределенности налогов связан с представлением их как случайного процесса, коррелированного с процессом текущей прибыли (см., например, (Niemann, 2011)). В рамках такого подхода гипотеза о том, что увеличение налоговой неопределенности (волатильности процесса налоговых выплат) подавляет реальные инвестиции, не получает подтверждения, а может как замедлять, так и ускорять инвестиции в зависимости от соотношения между волатильностями налогов и прибыли.

Потенциальными источниками парадоксальных налоговых эффектов могут стать такие факторы, как наличие прогрессивной шкалы налогообложения, возможность отказа от продолжения реализации проекта, частичная обратимость сделанных инвестиций.

В работе (Alvarez, Koskela, 2008) было показано, что в случае прогрессивного налогообложения при достаточно большой волатильности момент инвестирования положительно зависит от волатильности и отрицательно — от ставки налога, что искажает традиционные положения о принятии инвестиционных решений. Различные эффекты влияния прогрессивной шкалы налогообложения на интенсивность и время инвестирования обсуждались также в (Wong, 2011).

Если у инвестора имеется возможность как финансировать проект, так и прекратить его реализацию (при появлении неблагоприятных условий), то возрастание ставки налога может привести к парадоксальному эффекту стимулирования более ранних инвестиций (см., например, (Schneider, Sureth, 2010)). Решающую роль при этом играет именно возможность выхода из проекта, в то время как без нее такой эффект отсутствует. Аналогичные результаты в рамках несколько иной системы налогообложения были установлены в (Niemann, Sureth, 2013). Неоднозначное влияние неопределенности и налоговых ставок на инвестирование и деинвестирование в условиях различных вариантов частичного возврата сделанных инвестиций исследовались в (Agliardi, 2001; Sureth, 2002) и др.

Еще один потенциальный источник налоговых парадоксов связан с нелинейностью правил налогообложения прибыли фирм при наличии налоговых скидок и убытков. Так, в (MacKie-Mason, 1990) изучались эффекты, возникающие при различных схемах возмещения убытков и скидок в налогообложении, которые действовали в американской горнодобывающей промышленности, и было установлено, в частности, что увеличение ставки налога в условиях неопределенности цен может стимулировать инвестирование.

Отметим также работу (Gries et al., 2012), в которой рассматривается модель с простой системой налогов без явного учета амортизации и налоговых вычетов, но с налогообложением процентной ставки. В этих рамках авторы определяют и исследуют три налоговых режима — множеств в пространстве параметров модели — в каждом из которых рост налоговой ставки замедляет

<sup>2</sup> Подробный анализ основных налоговых изменений в развитых странах во второй половине XX в. можно найти, например, в (Cummins et al., 1996; Auerbach, Hines, 1994).

инвестирование (нормальный режим), не оказывает на них никакого влияния (нейтральный) или же ускоряет инвестиции (парадоксальный).

Почти во всех работах по обозначенной выше тематике налоговые парадоксы рассматривались по отношению к изменению ставки налога. Однако совершенно аналогично можно говорить и об эффектах, производимых на инвестиционные решения различными механизмами стимулирования. Из немногочисленных исследований в этом направлении отметим статью (Jou, 2000), в которой рассматривается модель со случайными ценами на выпускаемую продукцию, постоянными затратами и налоговыми каникулами (с нулевой ставкой налога). Предполагается, что создаваемая по проекту фирма может на какое-то время приостановить, а затем возобновить свое функционирование. В результате анализа модели автор приходит к «парадоксальным» выводам, что увеличение длительности налоговых каникул может дестимулировать инвестирование проекта, а рост ставки налога, наоборот, может его стимулировать.

Несколько иные аспекты, связанные с влиянием налоговых каникул на инвестирование, изучали в (Azevedo et al., 2019). Там рассматривалась модель привлечения инвестиций с помощью налоговых каникул, в течение которых уменьшается ставка налога и отсутствует возможность прекратить реализацию проекта. Было установлено, что при небольшом снижении ставки длительность налоговых каникул может немонотонно влиять на момент прихода инвестора. Хотя для большинства случаев неопределенность приостанавливает инвестиции, однако большая степень неопределенности в сочетании с высокой ликвидационной стоимостью (при закрытии проекта) может способствовать ускорению инвестиций. Отметим еще, что результаты, касающиеся немонотонной зависимости инвестиционной активности от длительности налоговых каникул, обсуждались также в (Аркин и др., 2002; Аркин, Слестников, 2007).

В настоящей статье рассматривается модель инвестирования проекта создания нового предприятия в условиях неопределенности экономической среды и в рамках российской системы налогообложения прибыли. В качестве механизма привлечения инвестора выступают налоговые каникулы фиксированной длительности. Описание модели и соответствующая оптимизационная задача приводятся в разд. 2, а подробный анализ зависимости показателей, связанных с реализацией проекта (оптимальный момент инвестирования и ожидаемый NPV от реализованного проекта), — в разд. 3. Полученные результаты и выводы из численных расчетов обсуждаются в разд. 4.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В качестве объекта инвестирования будем рассматривать проект создания в некотором регионе нового производственного предприятия. Основными гипотезами, которые делаются относительно такого рода проектов и их инвестирования, являются следующие:

- в каждый момент времени инвестор может либо сделать вложения в проект, либо отложить решение об инвестировании до наступления более благоприятного момента (свобода выбора);
- решение об инвестировании принимается исключительно по экономическим показателям, связанным с проектом, на основе текущей информации о рыночных ценах на затрачиваемые ресурсы и выпускаемую продукцию (отсутствие неэкономических факторов);
- сделанные инвестиции являются необратимыми, т.е. не могут быть изъяты из проекта и использованы для других целей;
- денежные потоки от реализованного проекта имеют неопределенный характер в силу случайных колебаний цен на расходуемые ресурсы и выпускаемую продукцию.

Функционирование предприятия после инвестирования проекта будет происходить в рамках российской системы налогообложения предприятий. Срок жизни проекта (существования предприятия) полагается бесконечным.

Предположим, что проект становится доступным для инвестирования в нулевой момент времени, а инвестирование осуществляется в момент времени  $t$ . Для исследования в аналитическом виде все денежные потоки рассматриваются в непрерывном времени, и входящие в них величины (выручка, затраты и т.п.) всюду далее будут иметь смысл «потоков», т.е. стоимостей в (малую) единицу времени.

После уплаты налогов<sup>3</sup> чистый денежный поток по проекту в момент  $t$  равен

$$\begin{aligned} \pi_t^\tau - S_t^\tau(1 + \gamma_{\text{соц}}) - D_t^\tau - P_t^\tau - \gamma_{\text{пр}}(\pi_t^\tau - S_t^\tau(1 + \gamma_{\text{соц}}) - D_t^\tau - P_t^\tau) = \\ = (1 - \gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - S_t^\tau(1 + \gamma_{\text{соц}}) - P_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}} D_t^\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\pi_t^\tau$  — добавленная стоимость (без учета НДС),  $S_t^\tau$  — расходы на оплату труда,  $D_t^\tau$  — амортизационные отчисления,  $P_t^\tau$  — налог на имущество предприятия,  $\gamma_{\text{пр}}$  — ставка налога на прибыль,  $\gamma_{\text{соц}}$  — ставка страховых взносов.

Сделаем предположения относительно структуры денежных потоков:

1) объем инвестиций  $I_t$ , необходимых для начала реализации проекта в момент времени  $t$ , а также добавленная стоимость  $\pi_t^\tau = \pi_t^\tau$  моделируются как случайные процессы геометрического броуновского движения, заданные на некотором вероятностном пространстве с потоком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$  (информация о системе до момента  $t$ ) и описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dI_t = I_t(\alpha_I dt + \sigma_I dw_t^I), \quad d\pi_t^\tau = \pi_t^\tau(\alpha_\pi dt + \sigma_\pi dw_t^\pi), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $w_t^I, w_t^\pi$  — стандартные винеровские процессы, коррелированные между собой (с коэффициентом корреляции  $\phi$ ); параметры процессов (2) имеют естественную экономическую интерпретацию:  $\alpha_\pi$  — средний темп роста добавленной стоимости,  $\sigma_\pi$  — дисперсия темпа роста добавленной стоимости (волатильность), аналогично и для процесса необходимых инвестиций; лаг капитальных вложений отсутствует, т.е. сделанные инвестиции сразу же начинают приносить прибыль;

2) амортизационные отчисления  $D_t^\tau$  определяются исходя из начальной стоимости основных фондов (за которую принимается стоимость инвестиций  $I_t$ ) как  $D_t^\tau = I_\tau k_{t-\tau}$ , где  $k_s, s \geq 0$  — ставка амортизации (в малую единицу времени) такая, что  $k_s \geq 0, \int_0^\infty k_s ds = 1$ ;

3) расходы на оплату труда пропорциональны добавленной стоимости:  $S_t^\tau = \tilde{\mu} \pi_t^\tau$ , где  $\tilde{\mu}$  — доля заработной платы в добавленной стоимости (зарплатоемкость проекта);

4) налог на имущество рассчитывается как  $P_t^\tau = \gamma_{\text{им}} I_\tau r_{t-\tau}$ , где  $\gamma_{\text{им}}$  — ставка налога на имущество,  $r_{t-\tau} = 1 - \int_0^{t-\tau} k_s ds = \int_{t-\tau}^\infty k_s ds$  — остаточная стоимость основных фондов.

Систему налогообложения прибыли предприятий помимо налогов будем характеризовать также налоговыми каникулами детерминированной длительности  $\nu$  по налогу на прибыль, во время которых ставка налога на прибыль равна  $\gamma_{\text{пр}}^0$ . Налоговые каникулы начинаются с момента начала функционирования предприятия, т.е. в нашей модели с момента инвестирования  $\tau$ .

Ожидаемые чистые доходы инвестора после уплаты налогов, приведенные к моменту инвестирования  $\tau$ , при наличии налоговых каникул длительности  $\nu$  описываются формулой

$$\begin{aligned} V_\tau = E_\tau \left( \int_\tau^{\tau+\nu} [(1 - \gamma_{\text{пр}}^0)(\pi_t^\tau - S_t^\tau(1 + \gamma_{\text{соц}}) - P_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}}^0 D_t^\tau] e^{-\rho(t-\tau)} dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau+\nu}^\infty [(1 - \gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - S_t^\tau(1 + \gamma_{\text{соц}}) - P_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}} D_t^\tau] e^{-\rho(t-\tau)} dt \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho$  — ставка дисконтирования,  $E_\tau(\cdot) = E(\cdot | \mathcal{F}_\tau)$  — условное математическое ожидание при известной информации до момента времени  $\tau$ .

Поведение инвестора предполагается рациональным в том смысле, что, располагая (в каждый момент времени) информацией о рыночных ценах, имеющих отношение к данному проекту, он может либо принять решение об инвестировании, либо отложить его до наступления более благоприятной ситуации. При принятии решения инвестор ориентируется на показатель ожидаемого чистого дисконтированного дохода (NPV). Таким образом, задача инвестора состоит в том, чтобы на основе указанной выше информации выбрать момент инвестирования  $\tau$  так, чтобы ожидаемый чистый доход от реализованного проекта, приведенный к нулевому (базовому) моменту времени, был максимальным:

$$E(V_\tau - I_\tau) e^{-\rho\tau} \chi\{\tau < \infty\} \rightarrow \max_\tau, \quad (4)$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ ) моментам  $\tau$  (вообще говоря, допускается, что  $\tau$  может принимать и бесконечное значение с положительной вероятностью,

<sup>3</sup> В данной модели рассматриваются налоги на добавленную стоимость (хотя они и не участвуют в чистом денежном потоке), на прибыль, на имущество, а также страховые взносы. Формула (1) соответствует схеме с полным возмещением убытков.

т.е. проект может остаться неинвестированным), а  $\chi\{\tau < \infty\}$  — индикаторная функция, равная 1 при конечном моменте инвестирования  $\tau$  и 0 — в противном случае (т.е. при отсутствии инвестирования на бесконечном интервале времени). Момент инвестирования (правило инвестирования)  $\tau^*$ , являющийся решением задачи (4), и будет характеризовать поведение инвестора.

**Оптимальный момент инвестирования.** На основе сформулированных выше предположений можно получить явное выражение в формуле (3). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\text{им}} &= \gamma_{\text{им}} / \rho, \quad \mu = (1 + \gamma_{\text{соц}}) \tilde{\mu}, \quad \Delta\gamma_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} - \gamma_{\text{пр}}^0, \quad \hat{\gamma}_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}}^0 + \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v}, \\ K(s) &= \int_s^{\infty} k_t e^{-\rho t} dt, \quad \hat{K}(s) = \int_s^{\infty} k_t (e^{-\rho t} - e^{-\rho t}) dt, \quad H(s) = K(s) + \tilde{\gamma}_{\text{им}} \hat{K}(s), \end{aligned} \quad (5)$$

тогда

$$\begin{aligned} V_{\tau} &= E_{\tau} \left( \int_{\tau}^{\tau+v} [(1 - \gamma_{\text{пр}}^0) ((1 - \mu)\pi_t - \gamma_{\text{им}} I_{\tau} r_{t-\tau}) + \gamma_{\text{пр}}^0 I_{\tau} k_{t-\tau}] e^{-\rho(t-\tau)} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau+v}^{\infty} [(1 - \gamma_{\text{пр}}) ((1 - \mu)\pi_t - \gamma_{\text{им}} I_{\tau} r_{t-\tau}) + \gamma_{\text{пр}} I_{\tau} k_{t-\tau}] e^{-\rho(t-\tau)} dt \right) = \\ &= \pi_{\tau} \frac{(1 - \mu)(1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}})}{\rho - \alpha_{\pi}} + I_{\tau} \left( \int_0^v [\gamma_{\text{пр}}^0 k_t - \gamma_{\text{им}} (1 - \gamma_{\text{пр}}^0) r_t] e^{-\rho t} dt + \int_v^{\infty} [\gamma_{\text{пр}} k_t - \gamma_{\text{им}} (1 - \gamma_{\text{пр}}) r_t] e^{-\rho t} dt \right) = \\ &= \pi_{\tau} \frac{(1 - \mu)(1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}})}{\rho - \alpha_{\pi}} + I_{\tau} (\gamma_{\text{пр}}^0 H(0) - \tilde{\gamma}_{\text{им}} (1 - K(0)) + \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)), \\ V_{\tau} - I_{\tau} &= \pi_{\tau} \frac{(1 - \mu)(1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}})}{\rho - \alpha_{\pi}} - I_{\tau} (H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H = 1 - \gamma_{\text{пр}}^0 K(0) + \tilde{\gamma}_{\text{им}} (1 - \gamma_{\text{пр}}^0) (1 - K(0))$ .

Таким образом, ожидаемые чистые приведенные доходы инвестора от создаваемого предприятия являются линейной комбинацией двух геометрических броуновских процессов. Для процессов такого типа решение задачи оптимальной остановки (4) хорошо известно — его можно найти, например, в (McDonald, Siegel, 1986; Hu, Øksendal, 1998), а для более общего случая в (Аркин, Слостников, 2008).

Для формулировки соответствующего результата введем обозначения. Пусть  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_{\pi}^2 + \sigma_I^2 - 2\varphi\sigma_{\pi}\sigma_I$  — общая волатильность проекта,  $\beta$  — положительный корень квадратного уравнения  $0,5\tilde{\sigma}^2\beta(\beta - 1) + (\alpha_{\pi} - \alpha_I)\beta - (\rho - \alpha_I) = 0$ . Тогда справедливо следующее представление для оптимального момента инвестирования (решения задачи (4)).

**Утверждение 1.** Пусть  $\tilde{\sigma} > 0$  и выполнены условия:  $\alpha_{\pi} - 0,5\sigma_{\pi}^2 \geq \alpha_I - 0,5\sigma_I^2$ ,  $\rho > \max(\alpha_I, \alpha_{\pi})$ . Тогда оптимальный момент инвестирования конечен с вероятностью 1 и равен

$$\tau^*(v) = \min\{t \geq 0: \pi_t \geq p^*(v)I_t\}, \quad (7)$$

где

$$p^*(v) = \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{\rho - \alpha_{\pi}}{(1 - \mu)(1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}})} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)].$$

Согласно этому утверждению, оптимальный момент инвестирования совпадает с первым моментом, когда отношение величины добавленной стоимости  $\pi_t$  в текущий момент времени к объему необходимых инвестиций  $I_t$  в тот же момент времени превысит порог  $p^*(v)$  (далее мы будем называть его оптимальным уровнем инвестирования). Заметим, что оптимальный уровень инвестирования позволяет сравнивать время прихода инвестора (которое является случайной величиной) при разных налоговых каникулах. А именно, если  $p^*(v_1) > p^*(v_2)$ , то  $\tau^*(v_1) < \tau^*(v_2)$  с вероятностью 1, то

$$H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v) \geq H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(0) = 1 - \gamma_{\text{пр}} K(0) + \tilde{\gamma}_{\text{им}} (1 - K(0))(1 - \gamma_{\text{пр}}) > 0.$$

Для того чтобы избежать нулевого (вырожденного) оптимального момента инвестирования  $\tau^*(v) = 0$ , будем считать, что начальные условия таковы, что  $p^*(v) > \pi_0 / I_0$  для всех  $v \geq 0$ .

Зная оптимальный момент инвестирования, можно вывести явную формулу для ожидаемого NPV от проекта при оптимальном поведении инвестора, т.е.

$$N^*(v) = E\left(V_{\tau^*(v)} - I_{\tau^*(v)}\right) e^{-\rho\tau^*(v)}. \quad (8)$$

**Утверждение 2.** Если выполнены условия утверждения 1, то

$$N^*(v) = I_0 \left(\pi_0 / (I_0 p^*(v))\right)^\beta [H - \Delta\gamma_{\text{пп}} H(v)] / (\beta - 1), \quad (9)$$

где  $p^*(v)$  определено в (7).

Соответствующие формулы есть, например, в (McDonald, Siegel, 1986; Ну, Øksendal, 1998).

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НАЛОГОВЫХ КАНИКУЛ

Как показывается ниже, зависимость оптимального момента инвестирования  $\tau^*(v)$  и оптимального ожидаемого NPV инвестора  $N^*(v)$  от длительности налоговых каникул существенно связана с величиной потока амортизационных отчислений и может носить немонотонный характер. Далее ради краткости обозначений будем иногда писать  $\tau^*$ ,  $p^*$  и  $N^*$ , опуская их зависимость от длительности налоговых каникул  $v$ .

**Оптимальный уровень инвестирования.** Запишем оптимальный уровень инвестирования  $p^*$  в виде

$$p^*(v) = \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{\rho - \alpha_\pi}{1 - \mu} \times \hat{p}(v), \quad (10)$$

где  $\hat{p}(v) = (H - \Delta\gamma_{\text{пп}} H(v)) / (1 - \hat{\gamma}_{\text{пп}})$ . Далее имеем:

$$\begin{aligned} \hat{p}'(v) &= -\frac{\Delta\gamma_{\text{пп}} H'(v)}{1 - \hat{\gamma}_{\text{пп}}} + [H - \Delta\gamma_{\text{пп}} H(v)] \frac{\hat{\gamma}'_{\text{пп}}}{(1 - \hat{\gamma}_{\text{пп}})^2} = \frac{\Delta\gamma_{\text{пп}}}{1 - \gamma_{\text{пп}}} (k_v e^{-\rho v} + \tilde{\gamma}_{\text{им}} \rho e^{-\rho v} r_v) - \\ &- \frac{\Delta\gamma_{\text{пп}} (\rho - \alpha_\pi)}{(1 - \hat{\gamma}_{\text{пп}})^2} [H - \Delta\gamma_{\text{пп}} H(v)] e^{-(\rho - \alpha_\pi)v} \propto k_v + \gamma_{\text{им}} r_v - \frac{\rho - \alpha_\pi}{1 - \hat{\gamma}_{\text{пп}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пп}} H(v)] e^{\alpha_\pi v}, \end{aligned} \quad (11)$$

где знак  $\propto$  обозначает положительную пропорциональность, т.е. равенство с точностью до положительного множителя. Соотношение (11) с учетом утверждения 1 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dp^*(v)}{dv} &\propto k_v + \gamma_{\text{им}} r_v - \frac{\beta - 1}{\beta} (1 - \mu) p^* e^{\alpha_\pi v} \propto I_{\tau^*} (k_v + \gamma_{\text{им}} r_v) - \frac{\beta - 1}{\beta} (1 - \mu) \pi_{\tau^*} e^{\alpha_\pi v} = \\ &= (D_{\tau^*+v}^* + P_{\tau^*+v}^*) - \frac{\beta - 1}{\beta} (1 - \mu) E_{\tau^*} (\pi_{\tau^*+v}). \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношение (12) допускает наглядную экономическую интерпретацию. Величина  $DP = D_{\tau^*+v}^* + P_{\tau^*+v}^*$  представляет собой сумму амортизационных отчислений  $D_{\tau^*+v}^*$  и налога на имущество предприятия  $P_{\tau^*+v}^*$  на момент окончания налоговых каникул  $\tau^* + v$ . Аналогично, величина  $\Pi = E_{\tau^*} (\pi_{\tau^*+v})$  есть математическое ожидание (прогноз) добавленной стоимости на момент  $\tau^* + v$ , сделанное в оптимальный момент инвестирования  $\tau^*$ .

Таким образом, знак производной  $dp^* / dv$ , определяющий локальное поведение оптимального уровня инвестирования (а тем самым и оптимального момента инвестирования), зависит от соотношения между значениями суммы начисленной амортизации и налога на имущество  $DP$ , с одной стороны, и прогноза добавленной стоимости  $\Pi$ , с другой стороны, на момент окончания налоговых каникул. Если преобладает добавленная стоимость, а точнее,  $\Pi(1 - \mu)(\beta - 1) / \beta > DP$ , то  $dp^* / dv < 0$ , и увеличение налоговых каникул ведет к снижению оптимального уровня инвестирования, а тем самым к уменьшению времени инвестиционного ожидания, т.е. стимулирует инвестиционную активность. Однако если сумма амортизации и налога на имущество достаточно велика по сравнению с добавленной стоимостью и выполняется противоположное неравенство, то получается парадоксальный результат: увеличение налоговых каникул ведет к росту  $p^*$  и тем самым к более позднему приходу инвестора, т.е. *снижает* инвестиционную активность.

**Оптимальный ожидаемый NPV инвестора.** Из утверждения 2 и монотонности  $H(v)$  следует, что в той области, где оптимальный уровень инвестирования  $p^*(v)$  убывает по  $v$ , показатель  $N^*(v)$  будет возрастающей функцией от  $v$ . Далее, из формул (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dN^*(v)}{dv} &\propto -\beta \frac{\hat{p}'(v)}{\hat{p}(v)} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] - \Delta\gamma_{\text{пр}} H'(v) = -\beta \frac{\hat{\gamma}'_{\text{пр}}}{1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] + \\ &+ (\beta - 1) \Delta\gamma_{\text{пр}} H'(v) = \beta \frac{\Delta\gamma_{\text{пр}} (\rho - \alpha_{\pi})}{1 - \gamma_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} - (\beta - 1) \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-\rho v} (k_v + \tilde{\gamma}_{\text{им}} \rho r_v) \propto \\ &\propto \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{\rho - \alpha_{\pi}}{1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] e^{\alpha_{\pi} v} - (k_v + \gamma_{\text{им}} r_v) \propto (1 - \mu) E_{\tau^*}(\pi_{\tau^* + v}) - (D_{\tau^* + v}^{\tau^*} + P_{\tau^* + v}^{\tau^*}). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда видно, что вид производной  $dN^*/dv$  почти такой же, как у  $dp^*/dv$ , только с противоположным знаком. Поэтому характер зависимости  $N^*(v)$  от  $v$  в целом аналогичен зависимости  $p^*$  от  $v$  с точностью до противоположного характера монотонности (убывание вместо возрастания, и наоборот). Направление монотонности (убывание или возрастание) определяется, как и выше, соотношением между суммой  $(D_{\tau^* + v}^{\tau^*} + P_{\tau^* + v}^{\tau^*})$  амортизационных отчислений и налога на имущество предприятия, с одной стороны, и прогнозом добавленной стоимости  $E_{\tau^*}(\pi_{\tau^* + v})$ , с другой стороны, на момент окончания налоговых каникул. И также как для оптимального момента инвестирования, здесь возникает парадоксальный эффект, когда увеличение налоговых каникул может привести к уменьшению ожидаемого NPV.

**Нелинейная амортизация.** Продемонстрируем описанные эффекты на модели с непрерывным вариантом нелинейного метода амортизации. При использовании этого метода начисленная амортизация пропорциональна остаточной стоимости, а его вариант в непрерывном времени можно описать экспоненциальной ставкой амортизации  $k_t = \eta e^{-\eta t}$ ,  $t > 0$ , при этом величину  $\eta > 0$  с некоторой долей условности будем называть нормой амортизации.

Для такого варианта амортизации для определенных выше величин имеем

$$r_v = e^{-\eta v}, \quad H = \left[ \rho + (\eta + \gamma_{\text{им}})(1 - \gamma_{\text{пр}}^0) \right] / (\rho + \eta), \quad H(v) = (\eta + \gamma_{\text{им}}) e^{-(\rho + \eta)v} / (\rho + \eta). \quad (14)$$

Обозначим:

$$a_0 = (\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \rho)(1 - \gamma_{\text{пр}}^0), \quad a_1 = \Delta\gamma_{\text{пр}} (\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \alpha_{\pi}), \quad (15)$$

$$a_2 = (\rho - \alpha_{\pi})[\rho + (\eta + \gamma_{\text{им}})(1 - \gamma_{\text{пр}}^0)], \quad a_3 = \Delta\gamma_{\text{пр}} (\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \rho). \quad (16)$$

Чтобы не повторяться, будем далее предполагать, что выполнены условия утверждения 1.

Характер зависимости оптимального уровня инвестирования  $p^*(v)$  от длительности налоговых каникул  $v$  полностью описывается следующим образом.

**Утверждение 3.** Пусть  $\alpha_{\pi} + \eta > 0$ . Тогда:

1) если  $(\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \alpha_{\pi})(1 - \gamma_{\text{пр}}) \leq (\rho - \alpha_{\pi})\rho$ , то  $p^*(v)$  убывает по  $v$ ;

2) если  $(\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \alpha_{\pi})(1 - \gamma_{\text{пр}}) > (\rho - \alpha_{\pi})\rho$ , то  $p^*(v)$  возрастает по  $v$  при  $0 \leq v \leq v^*$  и убывает по  $v$  при  $v > v^*$ , где  $v^*$  — корень уравнения

$$a_1 e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} + a_2 e^{(\eta + \alpha_{\pi})v} = a_0. \quad (17)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из соотношения (11) с учетом (14) имеем

$$\begin{aligned} p'(v) &\propto (\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \rho)(1 - \gamma_{\text{пр}}^0 - \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v}) - (\rho - \alpha_{\pi})[\rho + (\eta + \gamma_{\text{им}})(1 - \gamma_{\text{пр}}^0 - \\ &- \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho + \eta)v})] e^{(\eta + \alpha_{\pi})v} = f(v), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $f(v) = a_0 - a_1 e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} - a_2 e^{(\eta + \alpha_{\pi})v}$ . Заметим, что  $f'(v)$  монотонно убывает по  $v$  и

$$f'(0) = a_1(\rho - \alpha_{\pi}) - a_2(\eta + \alpha_{\pi}) \propto -(\eta + \gamma_{\text{им}})(1 - \gamma_{\text{пр}}) - \rho < 0,$$

тем самым  $f'(v) < 0$  при всех  $v \geq 0$ .

Теперь, если  $f(0) = (\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \alpha_{\pi})(1 - \gamma_{\text{пр}}) - (\rho - \alpha_{\pi})\rho \leq 0$ , то  $f(v) \leq 0$  при всех  $v \geq 0$  и, значит,  $p(v)$ , а тем самым и  $p^*(v)$  убывает по  $v$ , что доказывает п. 1 утверждения 3.

Если  $f(0) > 0$ , то функция  $f(v) \propto p'(v)$  один раз меняет знак с положительного на отрицательный в точке  $v^*$  такой, что  $f(v^*) = 0$ , т.е. в корне уравнения (17). В этом случае  $p(v)$  возрастает, если  $0 \leq v \leq v^*$ , и убывает, если  $v > v^*$ .

Таким образом, тип зависимости оптимального момента инвестирования от длительности налоговых каникул определяется пороговым значением нормы амортизации  $\eta^*$ , которое связано с максимальным решением  $\bar{\eta}$  квадратного уравнения

$$(\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \alpha_{\pi}) = (\rho - \alpha_{\pi})\rho / (1 - \gamma_{\text{пр}}). \quad (19)$$

Заметим, что уравнение (19) всегда имеет два корня, один из которых отрицателен, а другой может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку норма амортизации должна быть положительной, то  $\eta^* = \max(0, \bar{\eta})$ , т.е. в качестве  $\eta^*$  следует взять положительный корень уравнения (19), если он существует, или 0, если оба корня отрицательные (в этом случае выполняется п. 2 утверждения 3).

Результат, аналогичный утверждению 3, имеет место и для оптимального ожидаемого NPV. Для его строгой формулировки нам понадобится дополнительное ограничение на величину нормы амортизации. Обозначим через  $\hat{\eta}$  максимальный корень квадратного (по  $\eta$ ) уравнения

$$-(\rho - \alpha_{\pi})(a_1\beta - a_3) + a_2\beta(\eta + \alpha_{\pi}) = 0, \quad (20)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  определены в (15)–(16). Корни уравнения (20) могут быть как положительными, так и отрицательными.

**Утверждение 4.** Пусть  $\alpha_{\pi} + \eta > 0$  и  $\eta > \hat{\eta}$ . Тогда:

1) если

$$(\eta + \gamma_{\text{им}}) \left( \eta + \frac{\beta\alpha_{\pi} - \rho}{\beta - 1} \right) \leq \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{(\rho - \alpha_{\pi})\rho}{1 - \gamma_{\text{пр}}}, \quad (21)$$

то  $N^*(v)$  монотонно возрастает по  $v$ ;

2) если справедливо противоположное к (21) неравенство, то  $N^*(v)$  убывает по  $v$  при  $0 \leq v \leq v_N^*$  и возрастает по  $v$  при  $v > v_N^*$ , где  $v_N^*$  — корень уравнения

$$(a_1\beta - a_3)e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} + a_2\beta e^{(\eta + \alpha_{\pi})v} = (\beta - 1)a_0. \quad (22)$$

**Доказательство.** Аналогично проделанному при доказательстве утверждения 3, нетрудно вывести соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dN^*(v)}{dv} &\propto -\beta \frac{\hat{p}'(v)}{\hat{p}(v)} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] - \Delta\gamma_{\text{пр}} H'(v) = -\beta \frac{\hat{\gamma}'_{\text{пр}}}{1 - \hat{\gamma}_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] + \\ &+ (\beta - 1)\Delta\gamma_{\text{пр}} H'(v) = \beta \frac{\Delta\gamma_{\text{пр}}(\rho - \alpha_{\pi})}{1 - \gamma_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} - (\beta - 1)\Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-\rho v} (k_v + \tilde{\gamma}_{\text{им}}\rho r_v) \propto \\ &\propto \beta \frac{\rho - \alpha_{\pi}}{1 - \gamma_{\text{пр}}} [H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(v)] e^{\alpha_{\pi}v} - (\beta - 1)(k_v + \gamma_{\text{им}}r_v) \propto g(v), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $g(v) = -a_0(\beta - 1) + (a_1\beta - a_3)e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} + a_2\beta e^{(\eta + \alpha_{\pi})v}$ . Заметим, что  $g'(v) > 0$  при всех  $v \geq 0$ , поскольку

$$\begin{aligned} g'(v) &= -(\rho - \alpha_{\pi})(a_1\beta - a_3)e^{-(\rho - \alpha_{\pi})v} + a_2\beta(\eta + \alpha_{\pi})e^{(\eta + \alpha_{\pi})v} \propto -(\rho - \alpha_{\pi})(a_1\beta - a_3) + \\ &+ a_2\beta(\eta + \alpha_{\pi})e^{(\eta + \rho)v} \geq -(\rho - \alpha_{\pi})(a_1\beta - a_3) + a_2\beta(\eta + \alpha_{\pi}) > 0, \quad \eta > \hat{\eta}, \end{aligned}$$

так как коэффициент при квадратичном члене положителен (пропорционален  $\beta(1 - \gamma_{\text{пр}}) + \Delta\gamma_{\text{пр}}$ ) и, значит, квадратичная функция остается положительной после максимального корня.

Теперь, как и при доказательстве утверждения 3, если  $g(0) = -a_0(\beta - 1) + (a_1\beta - a_3) + a_2\beta > 0$ , т.е. выполнено неравенство (21), то  $g(v) > 0$  при всех  $v \geq 0$  и, значит,  $N^*(v)$  возрастает по  $v$ . Если же  $g(0) < 0$ , т.е. выполнено противоположное к (21) неравенство, то производная  $dN^*(v)/dv$  один раз меняет знак с отрицательного на положительный в точке  $v_N^*$  такой, что  $g(v_N^*) = 0$ , т.е. в корне уравнения (22). В этом случае  $N^*(v)$  убывает, если  $0 \leq v \leq v_N^*$ , и возрастает, если  $v > v_N^*$ .

Таким образом, как и в случае с оптимальным моментом инвестирования, тип зависимости оптимального ожидаемого NPV связан с критическим значением нормы амортизации  $\eta_N^*$ , определяемым через максимальный корень  $\bar{\eta}$  уравнения

$$(\eta + \gamma_{\text{им}}) \left( \eta + \frac{\beta\alpha_{\pi} - \rho}{\beta - 1} \right) = \frac{\beta(\rho - \alpha_{\pi})\rho}{(\beta - 1)(1 - \gamma_{\text{пр}})}, \quad (24)$$

который может быть как положительным, так и отрицательным. Порог, при превышении которого появляется немонотонная зависимость NPV от длительности налоговых каникул, можно теперь определить как  $\eta_N^* = \max(0, \hat{\eta}, \bar{\eta})$ .

Поскольку  $(\beta\alpha_\pi - \rho)/(\beta - 1) < \alpha_\pi$  и  $\beta/(\beta - 1) > 1$ , то для корней уравнений (19) и (24) справедливо неравенство:  $\bar{\eta} > \hat{\eta}$ . Поэтому для критических норм амортизации выполняется неравенство  $\eta^* < \eta_N^*$ . Для пороговых значений длительности каникул  $v^*$  и  $v_N^*$ , в которых происходит изменение типа зависимости, из соотношения (23) имеем

$$\frac{dN^*(v^*)}{dv} \propto a_0 - a_3 e^{-(\rho - \alpha_\pi)v^*} - \beta [a_0 - a_1 e^{-(\rho - \alpha_\pi)v^*} - a_2 e^{(\eta + \alpha_\pi)v^*}] =$$

$$= a_0 - a_3 e^{-(\rho - \alpha_\pi)v^*} \propto 1 - \gamma_{np}^0 - \Delta\gamma_{np} e^{-(\rho - \alpha_\pi)v^*} \geq 1 - \gamma_{np} > 0,$$

поскольку  $v^*$  — корень уравнения (17). Отсюда и из п. 2 утверждения 4 следует, что  $v_N^* < v^*$ .

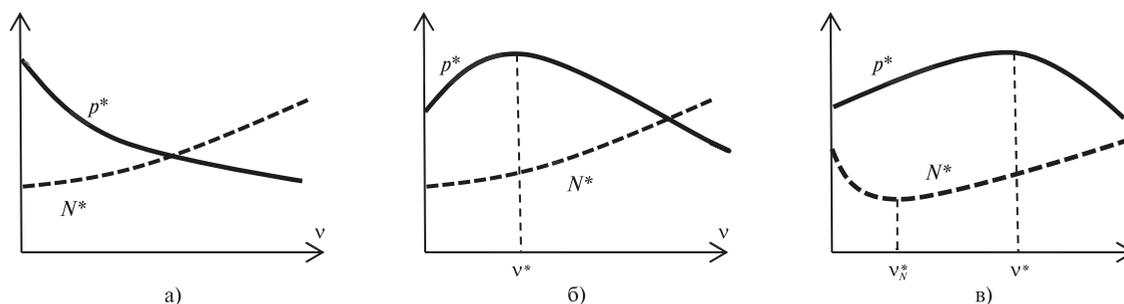
#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ, РАСЧЕТЫ И ВЫВОДЫ

С точки зрения типа зависимости оптимального момента инвестирования и оптимального ожидаемого NPV от длительности налоговых каникул весь диапазон норм амортизации  $\{\eta > 0\}$  разбивается на три области:  $\{0 < \eta < \eta^*\}$ ,  $\{\eta^* \leq \eta < \eta_N^*\}$  и  $\{\eta \geq \eta_N^*\}$ , которые условно можно назвать областями малой, средней и большой амортизации соответственно. Для анализа оптимального ожидаемого NPV область возможных норм амортизации следует ограничить снизу величиной  $\max(0, \hat{\eta})$ , но, как будет сказано ниже, для разумных норм амортизации это не является существенным ограничением. Соответствующие графики зависимости  $p^*(v)$  и  $N^*(v)$  от длительности налоговых каникул  $v$  для указанных областей норм амортизации условно представлены на рисунке.

В области малых норм амортизации (характерных для имущества с большим сроком полезного использования) поведение  $p^*(v)$  и  $N^*(v)$  соответствует экономической интуиции: с ростом длительности налоговых каникул инвестор приходит раньше, а его ожидаемое оптимальное NPV от проекта увеличивается (см. рисунок, панель а).

Для средних норм амортизации возникает парадоксальная ситуация, когда увеличение налоговых каникул может и не приводить к более раннему приходу инвестора. А именно если  $0 \leq v \leq v^*$ , рост налоговых каникул будет *увеличивать* оптимальный момент инвестирования, и только при  $v > v^*$  будет наблюдаться естественный эффект: рост каникул стимулирует инвестора к более раннему приходу. Поэтому, чтобы ускорить реализацию проекта, надо предоставить ему достаточно длительные налоговые каникулы, в то время как маленькие налоговые каникулы могут замедлить приход инвестора (в сравнении с отсутствием каникул). Отметим еще, что при средних нормах амортизации оптимальный ожидаемый NPV сохраняет свою монотонную зависимость от длительности каникул (см. рисунок, панель б).

При больших нормах амортизации, характерных для имущества с маленьким сроком полезного использования, возникает два парадоксальных эффекта. Сначала, при увеличении длительности каникул до порогового значения  $v_N^*$  оптимальный момент инвестирования возрастает, в то время как оптимальный ожидаемый NPV убывает. Затем при дальнейшем росте длительности каникул (до величины  $v^*$ ) NPV инвестора начинает возрастать, как и оптимальный момент инвестирования. И только при



**Рисунок.** Зависимость оптимального уровня инвестирования (сплошная линия) и оптимального NPV инвестора (пунктирная) от длительности налоговых каникул при малых (а), средних (б) и больших (в) нормах амортизации

достаточно больших каникулах зависимости и оптимального момента инвестирования и оптимального ожидаемого NPV инвестора приобретает интуитивно понятный характер (рисунок, панель в).

Таким образом, если норма амортизации превышает некоторый (достаточно маленький) уровень, возникают две величины длительности каникул ( $v_N^*$  и  $v^*$ ), которые можно рассматривать как наихудшие с точки зрения оптимального ожидаемого NPV инвестора и оптимального времени прихода инвестора соответственно. Тем самым, если использовать налоговые каникулы для стимулирования инвестора (более раннего прихода и увеличения NPV), то длительность каникул не должна быть маленькой.

Чтобы продемонстрировать описанные выше парадоксальные эффекты, были сделаны расчеты на условно-реальных численных примерах. Рассматривались существующие в настоящее время в РФ ставки налогов на прибыль и на имущество  $\gamma_{пр} = 20\%$ ,  $\gamma_{им} = 2,2\%$ . Во время каникул ставка налога на прибыль была нулевой, ставка дисконтирования полагалась равной  $\rho = 10\%$  (все — в годовом исчислении).

В качестве норм нелинейной амортизации  $\eta$  разумно взять величины в диапазоне примерно от 0,15 до 0,5, что соответствует нормам, пересчитанным в годовом исчислении из месячных норм, зафиксированных в ст. 259.2 Налогового кодекса РФ для четвертой—седьмой амортизационных групп имущества со сроком полезного использования от 5 до 20 лет.

Расчеты по определению описанных выше пороговых значений норм амортизации  $\eta^*$ ,  $\eta_N^*$  и длительностей налоговых каникул  $v^*$ ,  $v_N^*$  проводились для инвестиционных проектов, характеристики которых (средний темп роста добавленной стоимости и волатильность) менялись в достаточно широком диапазоне. Отметим, что величина  $\hat{\eta}$ , ограничивающая снизу нормы амортизации в утверждении 4, как правило, не попадает в область разумных норм (оказывается очень маленькой) и тем самым не вносит дополнительных ограничений при вычислениях. Из результатов проведенных расчетов можно сделать следующие заключения.

1. Пороговое значение амортизации  $\eta^*$ , при превышении которого появляется немонотонная зависимость оптимального уровня инвестирования (и, следовательно, момента инвестирования) от длительности налоговых каникул, слабо чувствительно к изменению среднего темпа роста добавленной стоимости  $\alpha_\pi$  и не зависит от волатильности проекта. Значения, принимаемые  $\eta^*$ , малы и не превышают 0,1. Тем самым, при разумных нормах амортизации (указанных выше) имеет место *немонотонность* оптимального момента инвестирования проекта по длительности налоговых каникул.

2. Длительность налоговых каникул  $v^*$ , для которой оптимальный уровень инвестирования (и оптимальный момент инвестирования) достигает максимума, как правило, лежит в пределах от 3 до 5 лет и не очень чувствительна к норме амортизации.

3. Критическая норма амортизации  $\eta_N^*$  сильно чувствительна к волатильности проекта. При малой волатильности эта величина может лежать в области разумных нормативов амортизации, однако при росте волатильности она увеличивается и выходит за пределы этой области. Таким образом, при достаточно больших волатильностях проекта оптимальный NPV инвестора будет монотонно возрастать с увеличением длительности налоговых каникул.

4. Длительность налоговых каникул  $v_N^*$ , для которой оптимальный ожидаемый NPV инвестора достигает минимума, не очень чувствительна к изменениям среднего темпа роста добавленной стоимости  $\alpha_\pi$  и нормы амортизации. При малых волатильностях величина  $v_N^*$  не превышает 3 лет, с ростом волатильности уменьшается и с какого-то порогового значения обращается в 0.

Таким образом, если ограничиться разумными значениями нормы амортизации (для имущества со сроком полезного использования от 5 до 20 лет), можно сделать следующие выводы.

Во-первых, оптимальный уровень инвестирования, характеризующий оптимальный момент инвестирования, зависит от длительности налоговых каникул немонотонным образом. Более того, существуют налоговые каникулы (лежащие, как правило, в интервале от 3 до 5 лет), наихудшие с точки зрения момента инвестирования проекта.

Во-вторых, немонотонная зависимость от длительности налоговых каникул возникает также и для оптимального ожидаемого NPV инвестора в случае достаточно маленькой волатильности проекта (этой ситуации на рисунке соответствует панель в). Здесь также существуют налоговые каникулы (длительность которых не превышает 3 лет), при наличии которых ожидаемый NPV инвестора будет наименьшим (по всем каникулам). А при большой волатильности такие наихудшие для инвестора каникулы исчезают, и зависимость ожидаемого NPV инвестора от длительности налоговых каникул становится монотонно возрастающей (см. рисунок, панель б).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Аркин В.И., Слостников А.Д.** (2007). Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы // *Экономика и математические методы*. Т. 43. Вып. 2. С. 76–100. [**Arkin V.I., Slastnikov A.D.** (2007). Theory of investment expectation, investment incentives and tax reforms. *Economics and Mathematical Methods*, 43, 2, 76–100 (in Russian).]
- Аркин В.И., Слостников А.Д.** (2008). Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 53. № 3. С. 516–533. [**Arkin V.I., Slastnikov A.D.** (2008). A variational approach to optimal stopping problems for diffusion processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 53, 3, 516–533 (in Russian).]
- Аркин В.И., Слостников А.Д., Аркина С.В.** (2002). Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизма амортизации. М.: ЕЕРС. [**Arkin V.I., Slastnikov A.D., Arkina S.V.** (2003). *Investment stimulation by a depreciation mechanism*. Moscow: EERC (in Russian).]
- Agliardi E.** (2001). Taxation and investment decisions: A real options approach. *Australian Economic Papers*, 40 (1), 44–55.
- Alvarez L.H.R., Koskela E.** (2008). Progressive taxation, tax exemption, and irreversible investment under uncertainty. *Journal of Public Economic Theory*, 10, 149–169.
- Auerbach A.J., Hines J.R.** (1988). Investment tax incentives and frequent tax reforms. *American Economic Review*, 78 (2), 211–216.
- Azevedo A., Pereira P.J., Rodrigues A.** (2019). Foreign direct investment with tax holidays and policy uncertainty. *International Journal of Finance & Economics*, 24, 2, 727–739.
- Cummins J.G., Hassett K.A., Hubbard R.G.** (1994). A reconsideration of investment behavior using tax reforms as natural experiments. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, 181–249.
- Dixit A.K., Pindyck R.S.** (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Gries T., Prior U., Sureth C.** (2012). A tax paradox for investment decisions under uncertainty. *Journal of Public Economic Theory*, 14 (3), 521–545.
- Hassett K.A., Metcalf G.E.** (1999). Investment with uncertain tax policy: Does random tax policy discourage investment? *Economic Journal*, 109, 372–393.
- Hu Y., Øksendal B.** (1998). Optimal time to invest when the price processes are geometric Brownian motion. *Finance and Stochastics*, 2, 295–310.
- Jou J.-B.** (2000). Irreversible investment decisions under uncertainty with tax holidays. *Public Finance Review*, 28, 1, 66–81.
- MacKie-Mason J.K.** (1990). Some nonlinear tax effects on asset values and investment decisions under uncertainty. *Journal of Public Economics*, 42, 301–327.
- McDonald R., Siegel D.** (1986). The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics*, 101, 707–727.
- Niemann R.** (2011). The impact of tax uncertainty on irreversible investment. *Review of Managerial Science*, 5, 1, 1–17.
- Niemann R., Sureth C.** (2013). Sooner or later? — Paradoxical investment effects of capital gains taxation under simultaneous investment and abandonment flexibility. *European Accounting Review*, 22 (2), 367–390.
- Pawlina G., Kort P.M.** (2005). Investment under uncertainty and policy change. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 1193–1209.
- Schneider G., Sureth C.** (2010). Capitalized investments with entry and exit options and paradoxical tax effects. *Review of Managerial Science*, 4 (2), 149–169.
- Sureth C.** (2002). Partially irreversible investment decisions and taxation under uncertainty: A real option approach. *German Economic Review*, 3 (2), 185–221.
- Wong K.P.** (2011). Progressive taxation and the intensity and timing of investment. *Economic Modelling*, 28, 1–2, 100–108.

## Some paradoxical effects of the tax holidays mechanism

© 2022 A.D. Slastnikov

**A.D. Slastnikov,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;  
e-mail: slast@cemi.rssi.ru; aslast@mail.ru*

Received 19.04.2022

**Abstract.** The paper studies a model for investment stimulating in a project to create a new enterprise under an uncertain economic environment in the framework of the Russian taxation system. It is assumed that the investor can postpone financing the project until a more favorable situation for him. Tax holidays (with fixed duration) are used as a mechanism for attracting investors. When making a decision on financing, investor chooses such an investment moment so that the expected net present value from the implemented project would be maximal. It is shown that the optimal time of investment and the expected net present value from the implemented project depend non-monotonously on the duration of tax holidays. At the same time, the behavior of these indicators is determined by the threshold values of depreciation rate and tax holidays' duration. It is shown that the range of all possible depreciation rates is divided into three areas, in which each of the above mentioned optimal time of investment and the expected net present value is either a monotone function in terms of tax holidays' duration, or has one extremum. The worst tax holidays' period, both from the point of view of investment time and the investor's expected net present value was established. It is shown that with "reasonable" values of depreciation rates, such worst holidays for the optimal investment moment lie in the range from 3 to 5 years, and for the optimal expected net present value does not exceed 3 years. The sensitivity of these thresholds to varying in project parameters (value added average growth rate, volatility and depreciation rate) is derived.

**Keywords:** investment project, tax holidays, stochastic process, investment timing, expected investor's NPV, paradoxical effects.

**JEL Classification:** H21, H25, D81, C61.

For reference: **Slastnikov A.D.** (2022). Some paradoxical effects of the tax holidays mechanism. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 45–56. DOI: 10.31857/S042473880021694-2

**Эколого-экономические модели в минерально-сырьевом секторе России:  
формирование инвестиционной политики на основе  
государственно-частного партнерства**

© 2022 г. И.П. Глазырина, С.М. Лавлинский, Л.Л. Яковлева

**И.П. Глазырина,**  
ИПРЭК СО РАН, Чума; e-mail: iglazyrina@bk.ru

**С.М. Лавлинский,**  
ИМ СО РАН, Новосибирск; e-mail: lavlin@math.nsc.ru

**Л.Л. Яковлева,**  
Забайкальский госуниверситет, Чума; e-mail: lidia70@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2022

*Работа выполнена в рамках государственного контракта Института математики им. С.Л. Соболева (проект FWNF-2022-0019). Статья подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-010-00151).*

**Аннотация.** В статье предложена математическая модель формирования программы освоения минерально-сырьевой базы, в которой в явном виде формализован механизм государственно-частного партнерства и учтено негативное воздействие технологий добычи полезных ископаемых на окружающую среду. Основу модели составляет игра Штакельберга и аппарат двухуровневого математического программирования. Это позволяет учесть особенности иерархии взаимодействия государства и частного инвестора в минерально-сырьевом секторе и на этой основе построить практическую методологию формирования «зеленой» программы освоения природных богатств ресурсного региона. База данных модели строится на основе специальных прогнозных моделей, детально описывающих процессы реализации проектов различных видов. Предлагаемый подход апробирован на реальных данных, описывающих фрагмент минерально-сырьевой базы Забайкальского края. В фокусе численного эксперимента — оценка зависимости эффективности сформированной в модели инвестиционной политики от уровня благоприятности инвестиционного климата, масштаба затрат на природоохранные мероприятия и стоимостной оценки ущерба от экологических нарушений, порождаемого примененными технологиями добычи полезных ископаемых. Результаты моделирования позволяют сформулировать ряд содержательных выводов, на основе которых могут быть построены реальные стратегические планы строительства производственной инфраструктуры, стимулирующие приход частного инвестора, готового работать в русле идей «зеленой» экономики.

**Ключевые слова:** ресурсный регион, устойчивое развитие, механизмы партнерства государства и инвестора, раздел природно-ресурсной ренты, модель Штакельберга, двухуровневые задачи математического программирования.

**Классификация JEL:** С6, Q32.

Для цитирования: Глазырина И. П., Лавлинский С. М., Яковлева Л. Л. (2022). Эколого-экономические модели в минерально-сырьевом секторе России: формирование инвестиционной политики на основе государственно-частного партнерства // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 57–69. DOI: 10.31857/S042473880020029-0

Формирование механизмов стимулирования частных инвестиций и оценка их результативности — до сих пор не решенная российским государством задача. Устоявшаяся практика принятия таких решений в недропользовании оперирует преимущественно политическими аргументами и самыми простыми оценками эффективности принимаемых решений, основанными на анализе технологических проектов и текущих сырьевых цен.

Эту задачу невозможно решить в отрыве от общих проблем стратегического планирования, ядро которого — задача формирования программы освоения минерально-сырьевой базы (МСБ). В рамках такой программы необходимо решить, какая производственная инфраструктура нужна для развития территории и привлечения инвесторов и можно ли пойти на дополнительную трату бюджетных средств для оказания помощи инвестору в инфраструктурном и природоохранном строительстве.

Эти проблемы находятся в центре внимания настоящей работы. Цель статьи — разработка модели, которую можно было бы положить в основу практической методологии формирования «зеленой» программы освоения МСБ. Для этого мы предлагаем использовать модель Штакельберга и аппарат двухуровневого математического программирования и таким образом учесть особенности иерархии взаимодействия государства с частными инвесторами в минерально-сырьевом секторе. Такой подход позволяет найти компромисс интересов бюджета и частного инвестора и сформировать программу освоения природно-ресурсного комплекса, эффективную с точки зрения перспектив устойчивого развития (Минакир 2019; Натхов, Полищук, 2017; Рюмина, 2001; Korhonen, Snakin, 2005; Lehtonen, 2004).

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Механизм государственно-частного партнерства (ГЧП) (Варнавский, 2009; Резниченко, 2010; Слостников, 2010) широко используется в мире и является эффективным инструментом достижения компромисса интересов в различных сферах экономики. Здесь уже утвердилась классическая модель партнерства, предполагающая строительство частной компанией объекта государственной собственности и его передачу государству либо сразу после окончания строительства, либо по прошествии определенного времени эксплуатации объекта (Broadbent, Laughlin, 2003; Grimsey, Levis, 2004; Hodge, Greve, 2007). В минерально-сырьевом комплексе развитых стран такая форма государственно-частного партнерства позволяет существенно расширить источники финансирования проектов, заинтересовать недропользователей в освоении новых месторождений в труднодоступных районах (Lakshmanan, 2011; Mackie, Worsley, Eliasson, 2014).

В российском минерально-сырьевом секторе пока только идет процесс становления института ГЧП. На сегодняшний день на малоосвоенных территориях реализовано несколько проектов на основе механизма, в определенном смысле альтернативного классическому. Этот механизм предполагает, что государство помогает инвестору в создании инфраструктуры и реализации части необходимых природоохранных мероприятий.

Практический опыт реализации российских проектов ГЧП показал, что используемая форма партнерства обременительна для государства в финансовом плане. Кроме того, она требует точно выверенной методологии принятия решения. Именно поэтому все попытки Правительства РФ стимулировать использование различных форм партнерских отношений с частным бизнесом в этой сфере не сопровождались принятием экономически выверенных управленческих решений.

Настоящая статья продолжает исследования авторами проблематики сотрудничества государства и частного инвестора в минерально-сырьевом секторе (Glazyrina, Lavlinskii, 2017; Глазырина, Лавлинский, 2018). В этих работах рассматривался именно российский вариант партнерства, в котором инфраструктуру строило только государство. Здесь мы пытаемся исследовать возможные способы трансформации российской модели ГЧП, использующей средства Инвестиционного фонда РФ, в направлении классических форм партнерства. Для этого предполагается, что и в инфраструктурном, и в природоохранном строительстве могут участвовать оба партнера.

Для малоосвоенной сырьевой территории такая форма партнерства в природно-ресурсном секторе предусматривает реализацию следующего сценария. Инвестор не может запустить свои проекты освоения месторождений, поскольку нет необходимой инфраструктуры. Поэтому он согласует с государством некоторый перечень инфраструктурных проектов, которые открывают интересные его проекты освоения, и реализует эти инфраструктурные проекты за свой счет. Государство компенсирует его затраты с некоторым лагом, например начиная с момента поступления налогов от добычи полезных ископаемых частным инвестором.

Такая иерархическая схема взаимодействия государства и частного инвестора может быть описана с помощью модели Штакельберга, в которой роль лидера отведена государству. Использование аппарата двухуровневого математического программирования позволяет найти равновесные решения, на основе которых может быть сформирована эффективная программа освоения природно-ресурсного потенциала территории (Lavlinskii, Panin, Pliasunov, 2016). Такой подход позволяет предложить практически значимую методологию формирования стратегических планов развития, учитывающих особенности российского минерально-сырьевого комплекса.

В общем случае в ресурсном регионе государство имеет дело с набором месторождений и группой потенциальных инвесторов, за каждым из которых стоят конкретные технологические проекты

освоения, реализуемые при определенном перечне условий. В такой ситуации механизм ГЧП — базовый элемент программы освоения минерально-сырьевой базы территории, в рамках которой государство берет на себя обязательство восполнить недостающую производственную инфраструктуру и помочь инвесторам в реализации природоохранных проектов.

Входными данными модели формирования инвестиционной политики, определяющей детали партнерства, являются следующие данные:

- набор производственных проектов освоения месторождений, реализуемых частным инвестором;
- набор инфраструктурных проектов, которые могут быть реализованы как частным инвестором, так и государством;
- перечень природоохранных проектов, необходимых для компенсации ущерба от экологических нарушений, вызванных реализацией производственных проектов; часть природоохранных проектов может быть реализована государством.

Выход модели — ключевые параметры инвестиционной политики, определяющие график компенсаций и механизм стимулирования инвестора (разделения затрат). Формально эти параметры полностью определяют программу освоения месторождений и перечни инфраструктурных и природоохранных проектов, реализуемых государством и частным инвестором соответственно.

Учет негативного воздействия на окружающую среду формализован в модели следующим образом. Для каждого производственного проекта освоения месторождения в программе фиксируется перечень природоохранных проектов, реализация которых только частично нейтрализует негативное воздействие последствий применения технологий добычи полезных ископаемых, как правило, достаточно «грязных». Для невозмещенного экологического ущерба (нарушенных ландшафтов, загрязненных естественных водоемов и источников, и т.п.) вводится стоимостная оценка такого ущерба, построенная на основе анализа системы компенсирующих мероприятий, необходимых для нейтрализации негативного воздействия на природную среду. Эти мероприятия программой освоения не предусмотрены, хотя в целях устойчивого развития должны были бы быть проведены. Соответствующий график затрат на реализацию таких мероприятий в модели играет роль стоимостной оценки ущерба от экологических нарушений и может рассматриваться как негативный экологический след, характеризующий экологичность программы освоения (Рюмина, 2009; Blazek, 2004).

Обозначим через  $NP$ ,  $NI$  и  $NE$  — число производственных, инфраструктурных и природоохранных проектов;  $T$  — горизонт планирования;  $i = 1, \dots, NP$ ;  $j = 1, \dots, NI$ ;  $k = 1, \dots, NE$ ; номер года  $t = 1, \dots, T$ .

**Производственный проект  $i$ :**  $CFP_{it}$  — поток наличности;  $EPP_{it}$  — стоимостная оценка ущерба от экологических нарушений;  $DBP_{it}$  — доходы бюджета от проекта.

**Инфраструктурный проект  $j$ :**  $ZI_{jt}$  — график затрат;  $EPI_{jt}$  — стоимостная оценка ущерба от экологических нарушений;  $VDI_{jt}$  — внепроектные доходы бюджета от реализации проекта, связанные с общим развитием экономики территории.

**Природоохранный проект  $k$ :** характеризуется графиком затрат  $ZE_{kt}$ .

**Взаимосвязь проектов:**  $\mu_{ij}$  — показатель технологической связности производственных и инфраструктурных проектов, равный 1, если для реализации производственного проекта  $i$  необходима реализация инфраструктурного проекта  $j$ , иначе — 0;  $\nu_{ik}$  — показатель связности производственных и природоохранных проектов, равный 1, если реализация производственного проекта  $i$  влечет необходимость реализации природоохранного проекта  $k$ , иначе — 0.

**Дисконты и бюджетные ограничения:**  $DG$  — дисконт государства;  $DI$  — дисконт инвестора;  $BudG_t$ ,  $BudI_t$  — бюджетные ограничения государства и инвестора.

Введем следующие **целочисленные переменные:**  $\bar{x}_j = 1$ , если государство (лидер) заявляет о готовности запустить инфраструктурный проект  $j$ , иначе —  $\bar{x}_j = 0$ ;  $x_j = 1$ , если государство запускает инфраструктурный проект  $j$ , иначе —  $x_j = 0$ ;  $\bar{y}_k = 1$ , если государство (лидер) заявляет о своей готовности взять на себя реализацию природоохранного проекта  $k$ , иначе —  $\bar{y}_k = 0$ ;  $y_k = 1$ , если государство запускает природоохранный проект  $k$ , иначе —  $y_k = 0$ ;  $z_i = 1$ , если инвестор запускает производственный проект  $i$ , иначе —  $z_i = 0$ ;  $u_k = 1$ , если инвестор реализует природоохранный проект  $k$ , иначе —  $u_k = 0$ ;  $v_j = 1$ , если инвестор реализует инфраструктурный проект  $j$ , иначе —  $v_j = 0$ .

**Вещественные переменные:**  $\bar{W}_t$  и  $W_t$  — предлагаемый лидером (государством) и реализованный график компенсации затрат инвестора на инфраструктуру.

Модель формирования инвестиционной политики может быть представлена в виде следующей задачи двухуровневого математического программирования.

**Задача государства** — максимизировать чистый приведенный доход государства:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \left( \sum_{i=1}^{NP} (DBP_{it} - EPP_{it}) z_i + \sum_{j=1}^{NI} (VDI_{jt} - EPI_{jt}) (x_j + v_j) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{NI} ZI_{jt} x_j - \sum_{k=1}^{NE} ZE_{kt} y_k - W_t \right) / (1 + DG)^t \Rightarrow \max \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{1 \leq t \leq \omega} \left[ \sum_{j=1}^{NI} ZI_{jt} \bar{x}_j + \sum_{k=1}^{NE} ZE_{kt} \bar{y}_k + \bar{W}_t \right] \leq \sum_{1 \leq t \leq \omega} BudG_t, \quad \omega = 1, \dots, T, \quad (2)$$

$$\bar{W}_t = 0, \quad t = 1, \dots, T_0, \quad (3)$$

$$\bar{W}_t \geq 0, \quad t = T_0 + 1, \dots, T, \quad (4)$$

$$(x, y, z, u, v) \in F^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{W}), \quad (5)$$

$$\bar{x}_j, \bar{y}_k \in \{0; 1\}, \quad j = 1, \dots, NI, \quad k = 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, NI, \quad (6)$$

где  $F^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{W})$  — множество оптимальных решений задачи инвестора.

**Задача инвестора** — максимизировать суммарный чистый приведенный доход инвестора:

$$\sum_{t=1}^T \left( \sum_{i=1}^{NI} CFP_{it} z_i - \sum_{l=1}^{NE} ZE_{lt} u_l - \sum_{j=1}^{NI} ZI_{jt} v_j + W_t \right) / (1 + DI)^t \Rightarrow \max \quad (7)$$

при условиях

$$\sum_{t=1}^T \left( - \sum_{j=1}^{NI} ZI_{jt} v_j + W_t \right) / (1 + DI)^t \geq 0, \quad (8)$$

$$\sum_{1 \leq t \leq \omega} \left( - \sum_{i=1}^{NP} CFP_{it} z_i + \sum_{l=1}^{NE} ZE_{lt} u_l + \sum_{j=1}^{NI} ZI_{jt} v_j - W_t \right) \leq \sum_{1 \leq t \leq \omega} BudI_t, \quad \omega = 1, \dots, T, \quad (9)$$

$$x_j + v_j \geq z_i u_{ij}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad j = 1, \dots, NI, \quad (10)$$

$$x_j + v_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, NI, \quad (11)$$

$$y_k + u_k \geq z_i v_{ik}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad j = 1, \dots, NI, \quad (12)$$

$$y_k + u_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, NE, \quad (13)$$

$$u_k \leq \sum_{i=1}^{NP} v_{ik} z_i, \quad i = 1, \dots, NP, \quad k = 1, \dots, NE, \quad (14)$$

$$\sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i=1}^{NP} (DBP_{it} - EPP_{it}) z_i - W_t \right] / (1 + DG)^t \geq 0, \quad (15)$$

$$y_k \leq \bar{y}_k, \quad k = 1, \dots, NE, \quad (16)$$

$$x_j \leq \bar{x}_j, \quad k = 1, \dots, NE, \quad (17)$$

$$W_t \leq \bar{W}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (18)$$

$$x_j, y_k, z_i, u_k, v_j \in \{0; 1\}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad j = 1, \dots, NI, \quad k = 1, \dots, NE. \quad (19)$$

В сформулированной модели инвестор максимизирует свое  $NPV$ , а государство в качестве основной цели видит получение как можно больших доходов для бюджета с учетом затрат на инфраструктуру и охрану природы, а также стоимостной оценки ущерба от экологических нарушений в выбранной программе освоения МСБ. Компенсационные выплаты инвестору за построенную им инфраструктуру государство начинает по прошествии  $T_0$  лет (например, с момента поступления первых налоговых платежей инвестора) (3), (4). Их график должен обеспечить государству баланс бюджетных доходов, оценок ущерба и платежей инвестору (15), а также компенсировать затраты инвестора на инфраструктуру с дисконтом (8).

Ограничения (10)–(14) формализуют взаимосвязь производственных, инфраструктурных и природоохранных проектов. Каждый инфраструктурный и природоохранный проект может быть запущен только одним из партнеров и должен быть необходим для реализации какого-либо производственного проекта. И инфраструктурный, и природоохранный проект может быть закреплён за государством только при условии, что государство включило его в свой перечень (16), (17).

На выходе модели — ключевые параметры инвестиционной политики  $x_j, y_k, z_i, u_k, v_j, W_i$ , определяющие механизм стимулирования инвестора (разделения затрат) и программу освоения МСБ региона, эффективную в долгосрочном плане.

В некоторых случаях важно учитывать и нейтрализацию опасных и особо опасных веществ, эмиссия которых может быть незначительной в каждый отдельный год, но в результате накопления может привести к ущербам катастрофических масштабов (Glazyrina, Chavkin, 2021). Поэтому в модели необходимо предусмотреть большие интервалы для параметра  $EPP$ . Параметр  $ZE$  зависит преимущественно от уровня экологичности используемых инвестором технологий — как производственных, так и природоохранных. Лучшие технологии требуют, как правило, больших затрат. Поэтому важно, чтобы инвестор был поставлен в регулирующие (со стороны государства) рамки, не позволяющие ему поддаваться соблазнам экономии на природоохранных мерах. Для экспертов в Европейский союз одним из таких инструментов станет, по-видимому, Carbon Border Adjustment Mechanism<sup>1</sup>.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

База данных модели (1)–(19) строится на основе специальных прогнозных моделей, детально описывающих процессы реализации проектов всех видов (Лавлинский, 2008). Использованные реальные данные описывают фрагмент минерально-сырьевой базы Забайкальского края, состоящий из 50 месторождений полиметаллических руд. В примере реализуется 50 экологических и 10 инфраструктурных проектов (железная дорога, ЛЭП, автомобильные дороги), построенных таким образом, чтобы при реализации полной инфраструктурной и природоохранной программы могли быть запущены все проекты освоения месторождений.

Таким способом разработанный модельный полигон позволяет учесть специфику моделируемого объекта — долгосрочный характер инвестиционных процессов, нестационарную рыночную конъюнктуру, устоявшуюся технологию управления природными ресурсами. Методика изучения свойств равновесия по Штакельбергу основана на анализе чувствительности решений соответствующей двухуровневой задачи булевого программирования к изменению основных параметров модели. Этот вопрос практически важен, прежде всего потому, что для многих параметров модели известны лишь рабочие диапазоны значений. Так, в процессе формирования программы освоения недр эксперт располагает лишь данными проектов, а значительная часть таких параметров, как дисконты участников партнерства, природоохранные затраты и ущербы, могут быть оценены им только приближенно.

Именно эти «слабо определенные» параметры находятся в фокусе проблематики настоящей статьи. Ключевой вопрос — зависимость эффективности сформированной в (1)–(19) инвестиционной политики от уровня благоприятности инвестиционного климата, масштаба затрат на природоохранные мероприятия и стоимостной оценки ущерба от экологических нарушений, порождаемых примененными технологиями добычи полезных ископаемых.

В модели качество инвестиционного климата определяется дисконтами инвестора и государства. Мы будем считать, что благоприятные инвестиционные условия описываются парой  $A = \{DG = 0,01; DI = 0,11\}$ , а сегодняшний инвестиционный климат в ресурсных регионах с высоким уровнем транзакционных издержек и неблагоприятными макроэкономическими условиями — парой  $B = \{DG = 0,05; DI = 0,15\}$  (Глазырина, Лавлинский, 2018).

Зафиксированные в базе данных графики затрат на реализацию природоохранных проектов строятся на основе раздела ОВОС в ТЭО проектов и определяют единичный масштаб экологических затрат. Поскольку в проектной документации сведения об экономической оценке ущерба от экологических нарушений отсутствуют, в модели предполагается, что она пропорциональна объему капитальных вложений и дифференцируется по металлам (технологиям). Выбор диапазонов

<sup>1</sup> См. <https://ercst.org/border-carbon-adjustments-in-the-eu-issues-and-options/>

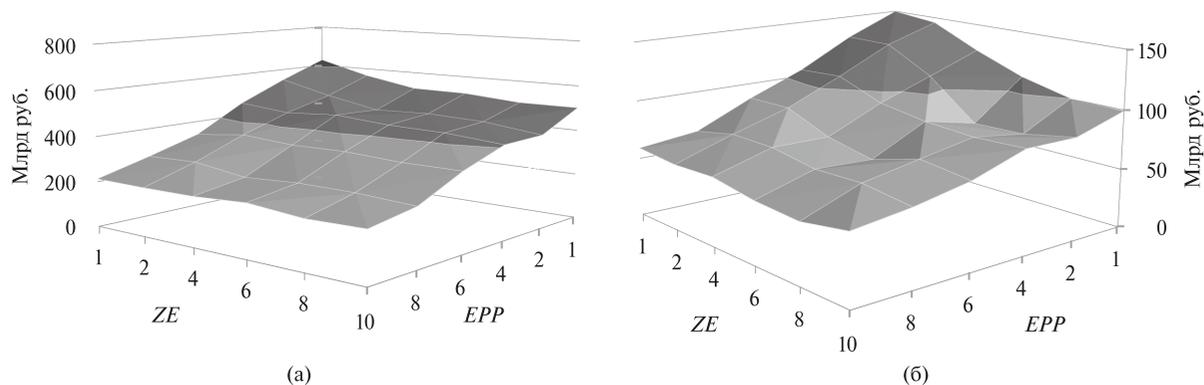


Рис. 1. Целевая функция государства

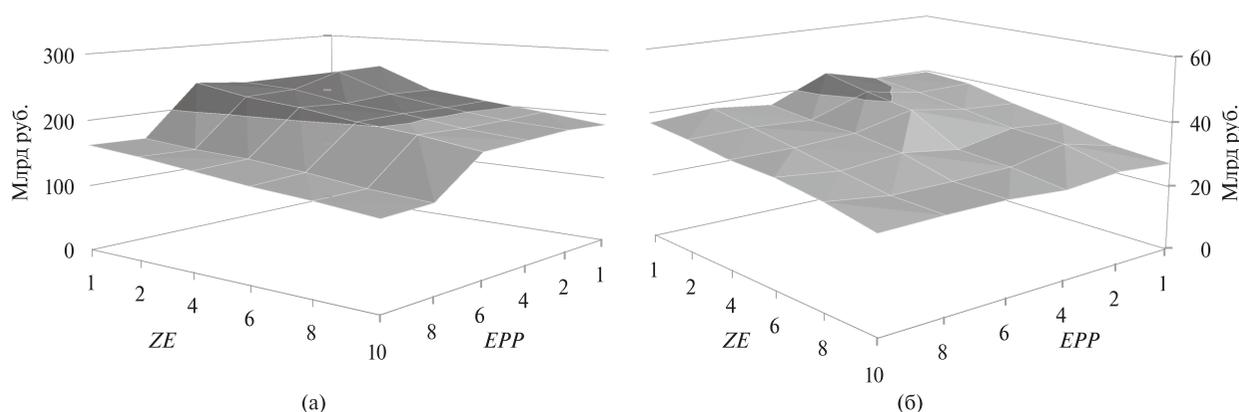


Рис. 2. Целевая функция инвестора

коэффициентов пропорциональности основан на опыте работы авторов с месторождениями Красноярского края с близкими по геологическим характеристикам свойствами (Лавлинский, 2008; Lavlinskii, 2010). Такой выбор определяет единичный масштаб ущерба от экологических нарушений и соответствующий график его стоимостной оценки.

В ходе численных экспериментов мы будем при заданном качестве инвестиционного климата (*A* или *B*)кратно увеличивать масштабы природоохранных затрат и ущерба, имитируя рост уровня затрат на охрану природы и последствия использования все более «грязных» технологий добычи. На последующих рисунках представлены результаты расчетов, в которых изучалась реакция решений задачи (1)–(19) на изменение масштаба природоохранных затрат и ущерба в рамках того или иного инвестиционного климата.

На рис. 1 и 2 представлена зависимость целевой функции государства и частного инвестора от экологических параметров модели. На рост масштаба загрязнений реагирует, в основном, государство — так устроен его функционал. Скорость такой реакции зависит от инвестиционного климата — в условиях *A* верхней половине диапазона значений функционала соответствует весь спектр значений масштаба затрат используемых относительно «чистых» технологий добычи. В рамках условий *B* с ростом затрат резко падает эффективность политики государства, и мы уже не можем использовать самые дорогие технологии с высокими природоохранными свойствами.

В условиях *A* с ростом природоохранных затрат инвестор теряет в эффективности с практически постоянной скоростью. С ростом масштаба ущерба значение функционала инвестора образует ступеньку (рис. 2). Для худших инвестиционных условий на целевую функцию инвестора в основном влияет уровень затрат, а зависимость от *EPP* становится более сложной.

Такое поведение функционалов объясняется особенностями равновесных инфраструктурных и производственных программ, реализуемых инвестором и государством при изменении *EPP*, *ZE*

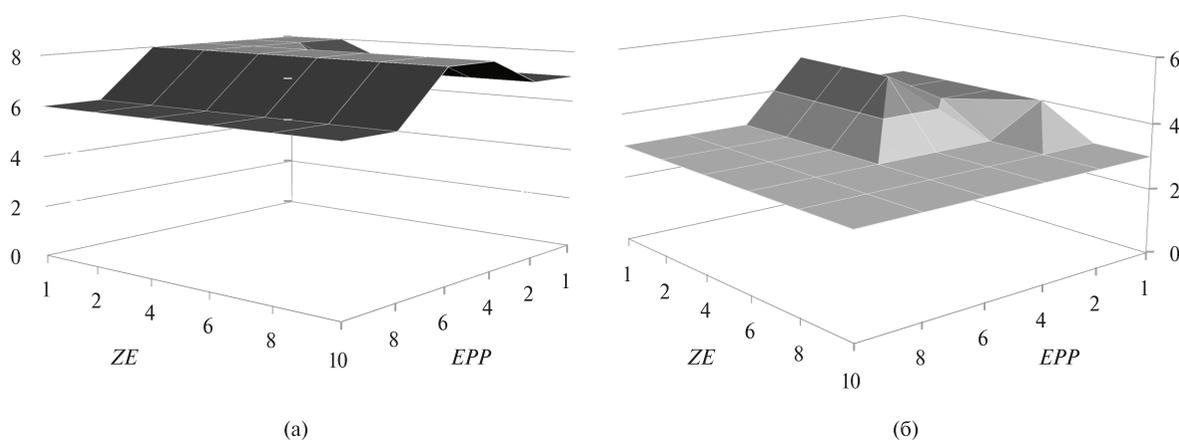


Рис. 3. Общее число реализованных инфраструктурных проектов

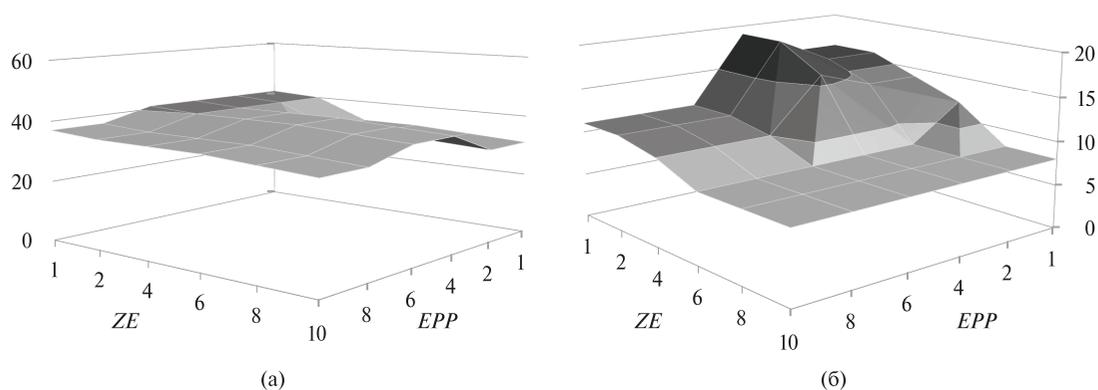


Рис. 4. Число производственных проектов, реализованных инвестором

и параметров инвестиционного климата. Сравнивая рис. 3 и 4, можно утверждать, что интенсивность производственной программы (число реализованных проектов освоения) в значительной степени определяется интенсивностью совместно реализованной программы инфраструктурного строительства, которая, в свою очередь, весьма чувствительна к уровню благоприятности инвестиционного климата.

Так, в условиях *A* партнеры для относительно «чистых» технологий реализуют 7–8 проектов из 10 возможных. При этом рост масштаба затрат в большей степени воздействует на производственный фронт, заставляя инвестора сокращать число запускаемых проектов добычи. При увеличении масштаба ущерба партнеры снижают активность инфраструктурного строительства, сокращая объем возможного фронта добычи полезных ископаемых и порождая спад функционала инвестора (рис. 4).

При неблагоприятном инвестиционном климате число запускаемых инфраструктурных проектов резко сокращается, и вся активность локализуется в секторе невысоких природоохранных затрат и ущерба. При дальнейшем росте *ZE* и *EPP* реализуется минимальная инфраструктурная программа с 8–10 производственными проектами из 50 возможных.

Кроме того, расчеты показывают, какую существенную роль, как для инвестора, так и для государства, играет качество инвестиционного климата. Причем не только регионального, но и в стране в целом: в минерально-сырьевом сегменте дисконты инвесторов во многом зависят от волатильности национальной валюты, поскольку они часто связаны с импортом технологий, а реализация продукции ориентирована на внешние рынки. Дисконт государства также связан с устойчивостью рубля: значительная доля импорта в потреблении косвенно влияет на внутреннюю инфляцию. При любых комбинациях природоохранных затрат и ущерба значение целевой функции в условиях *A* в разы выше, чем в условиях *B*. Это соотношение сигнализирует

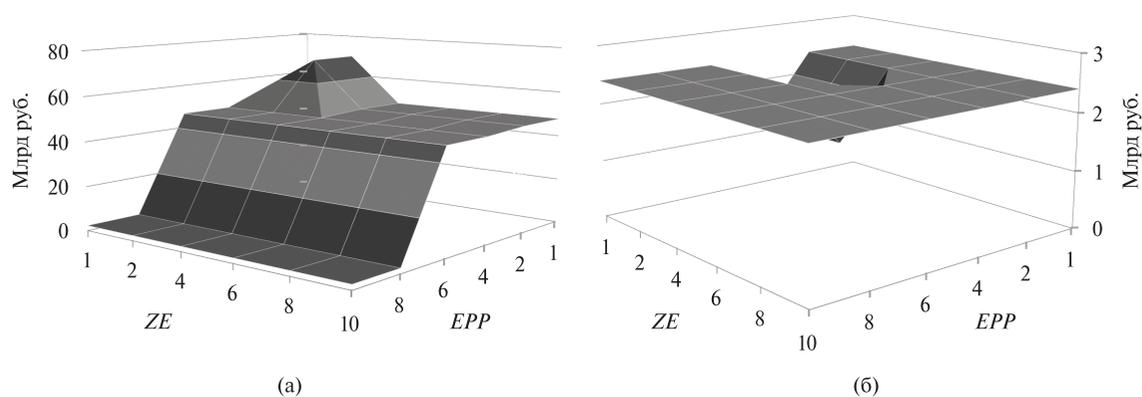


Рис. 5. Затраты инвестора на инфраструктуру

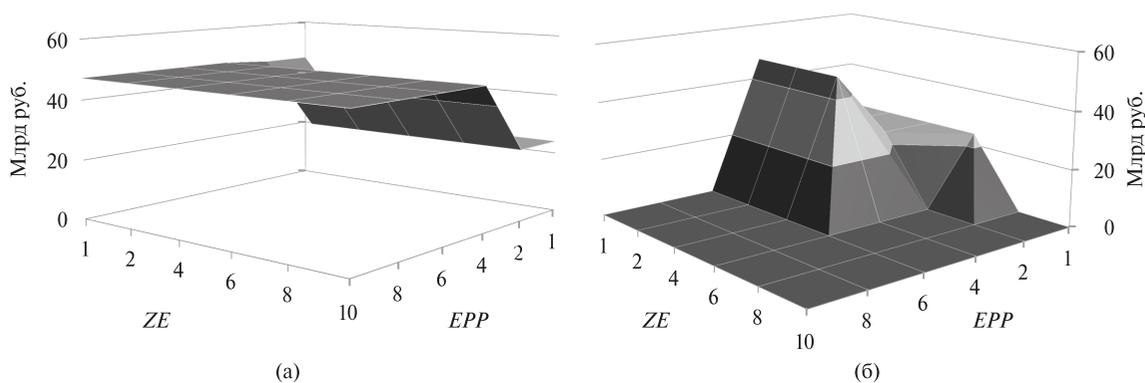


Рис. 6. Затраты государства на инфраструктуру

о том, что усилия, направленные, в частности, на снижение волатильности курса национальной валюты и предсказуемости внутренней и внешней политики (в том числе уменьшение зависимости курса от мировых сырьевых рынков, предотвращение геополитической напряженности и др.), могут дать гораздо более высокий экономический результат, чем формирование новых институтов развития, нацеленных на привлечение инвестиций. Дальневосточный опыт применения таких институтов демонстрирует противоречивые результаты (Минакир, 2019; Минакир, Найден, 2020).

Каким образом инфраструктурный фронт делится между партнерами?

В условиях *A* инвестор проявляет максимальную активность в строительстве инфраструктуры для проектов добычи, использующих «чистые» технологии с небольшими затратами. Для всех прочих технологий затраты инвестора на инфраструктуру не зависят от масштаба *ZE* и определяются масштабом ущерба. Зависимость имеет вид ступени и фиксирует резкое — в десятки раз — падение инфраструктурных затрат инвестора при существенном увеличении масштаба ущерба. Примерно такую же реакцию инвестора вызывает ухудшение инвестиционного климата — для условий *B* фронт инфраструктурного строительства инвестора минимален на всем спектре изменения экологических параметров технологий добычи (рис. 5–6).

Государство в неблагоприятных условиях сценария *B* не берет на себя никаких инфраструктурных проектов, как только инвестор начинает использовать технологии с уровнем затрат и ущерба выше среднего. В условиях *A* государство меняет инвестиционную политику, строя инфраструктуру для всех технологий и регулируя уровень затрат только в зависимости от *EPP*.

В результате в благоприятном инвестиционном климате с ростом масштаба ущерба государству приходится наращивать свою долю в общем объеме инфраструктурных затрат, стартуя от уровня

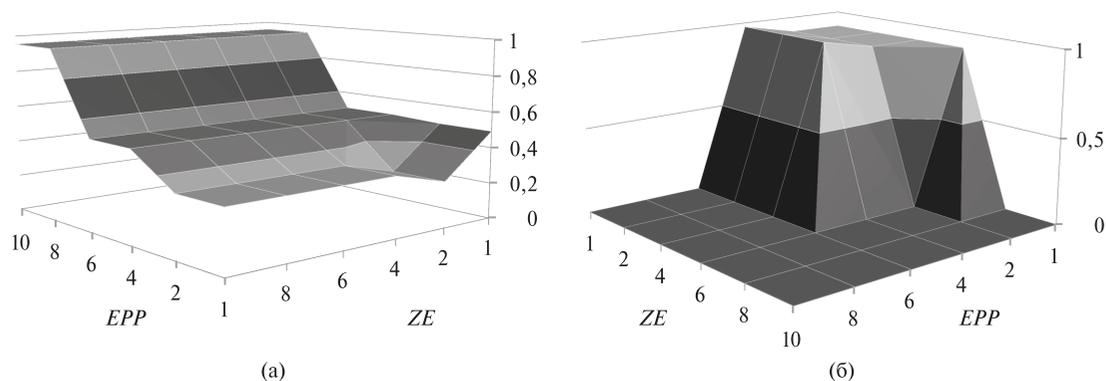


Рис. 7. Доля государства в затратах на инфраструктурное строительство

35–40% до уровня 90–95%. В условиях *B* государство берет на себя практически все инфраструктурные затраты для технологий с уровнем затрат и ущерба ниже среднего (рис. 7).

Такая стратегия определяет результаты раздела природно-ресурсной ренты в зависимости от экологических параметров используемых технологий. На рис. 8 представлен объем ренты<sup>2</sup>, полученной государством в виде налоговых платежей. Анализ поверхностей позволяет утверждать, что в благоприятных инвестиционных условиях государство практически не теряет ренты при использовании дорогих «зеленых» технологий. Переход к более «грязным» проектам добычи резко увеличивает долю затрат государства и снижает объем ренты, получаемой государством. При переходе к инвестиционным условиям *B* уровень рентных доходов государства падает кратно, и для повышения эффективности это обстоятельство должно заставить выбирать технологии с малым уровнем экологических затрат и ущерба. На практике государство далеко не всегда действует рационально, поскольку лица, принимающие решение, часто имеют другую доминирующую мотивацию — например улучшить показатели привлечения инвестиций. Поэтому не исключено, что будут реализованы проекты с худшими экологическими последствиями, что иногда провоцирует местные экологические конфликты.

Каким образом между партнерами делится фронт природоохранного строительства?

В работе (Глазырина, Лавлинский, 2018; Glazyrina, Lavlinskii, 2017) показано, что для российской модели ГЧП, в которой инфраструктуру строит только государство, в некоторых случаях эффективной оказывается стратегия дополнительной помощи государства и в реализации части природоохранных проектов. В модели (1)–(19), в которой фронт как инфраструктурного, так и природоохранного строительства теоретически делится между партнерами, такого не происходит — как показывают расчеты, государство не берет на себя ни одного природоохранного проекта ( $y_k = 0, k = 1, \dots, NE$ ). Это связано с наличием механизма компенсаций с фиксированным лагом (3).

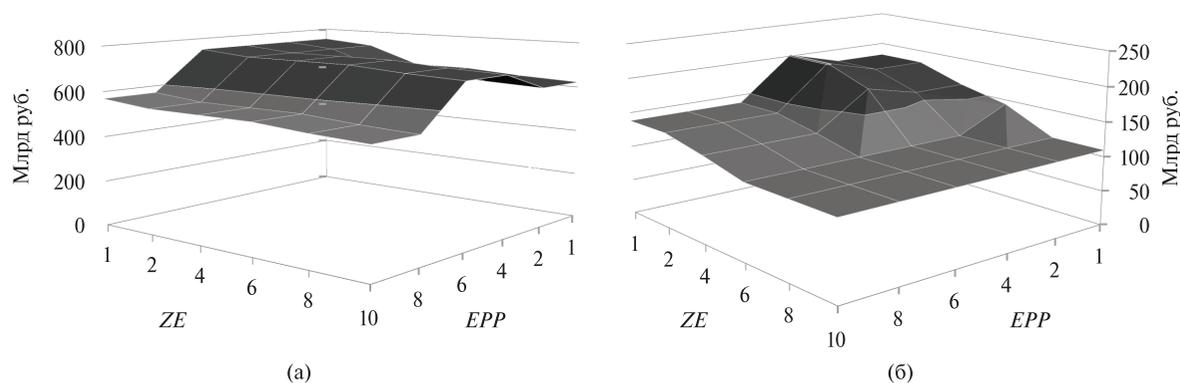


Рис. 8. Объем ренты, получаемой государством

<sup>2</sup> Рентной оценки совокупности месторождений, включенных в программу (Глазырина, Лавлинский, 2018).

Государству невыгодно брать на себя реализацию части природоохранных проектов, финансирование которых начинается достаточно рано и в жестком графике. Ему проще предоставить помощь такого рода в виде расширенных компенсаций, компенсирующих не только расходы инвестора на инфраструктуру (8), но и часть его природоохранных затрат.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В регионах Сибири и Дальнего Востока при реализации минерально-сырьевых проектов возникают новые экологические риски, связанные с многократным усилением негативного воздействия на окружающую среду. Увеличение постоянно и временно проживающего на данной территории населения также приводит к дополнительным экологическим издержкам, росту объемов коммунальных отходов и стоков и общей деградации локальных экосистем. Это обстоятельство необходимо учитывать при формировании программы освоения минерально-сырьевой базы. Во многих случаях необходимо создавать средозащитную инфраструктуру практически с нуля. В рамках такой программы необходимо решить, какая производственная инфраструктура нужна для развития территории и привлечения инвесторов и можно ли пойти на дополнительное расходование бюджетных средств для оказания помощи инвестору в инфраструктурном и природоохранном строительстве.

Такая постановка вопроса иногда встречает возражения сторонников применения принципа «загрязнитель платит» (*polluter pays principle*<sup>3</sup>). Однако бенефициаром реализуемых проектов является не только производственная компания, но и общество в целом, получающее оплачиваемые рабочие места и поступления в бюджеты всех уровней и, таким образом, — часть рентных доходов. Использование их для природоохранных целей согласуется с идеей экологического предназначения природно-ресурсной ренты, которую авторы разделяют и считают убедительно обоснованной в рамках экономической теории (Рюмина, 2001, 2009) Похожий механизм используется при планировании ГЧП в некоторых развивающихся странах (Lall, 1999).

Результаты имитационного моделирования позволили выявить скрытые риски снижения доходов, количественно оценить различия в эффективности проектов как для инвестора, так и для государства при различных инвестиционных условиях и широком спектре необходимых природоохранных расходов. Вышеописанная двухуровневая модель математического программирования (1)–(19) может служить основой практической методологии формирования инвестиционной политики государства в малоосвоенном ресурсном регионе. Учет в модели экологических факторов и особенностей иерархии взаимодействия государства и частного инвестора в минерально-сырьевом секторе позволяет найти компромисс интересов бюджета и частного инвестора, основанный на идеях «зеленой» экономики. Генерируемая в модели программа освоения природно-ресурсного комплекса может послужить основой формирования реальных стратегических планов строительства производственной инфраструктуры, стимулирующих приход частного инвестора на территорию.

Полученные нами данные дают возможность определить количественные параметры расходов публичных финансовых ресурсов, при которых участие государства может принести наилучшие результаты. Проведенные численные эксперименты на реальной информации позволяют говорить о практической значимости предлагаемого инструментария. По результатам экспериментов могут быть сформулированы следующие основные выводы, позволяющие поддержать процесс управления минерально-сырьевым сектором.

В условиях регионов с благоприятным инвестиционным климатом и развитыми институтами, совокупно обеспечивающими невысокий дисконт потенциального инвестора, эффективной для государства является стратегия привлечения инвестора с «чистыми» технологиями добычи, обеспечиваемыми достаточным уровнем природоохранных затрат. Механизм партнерства в этих условиях дестимулирует инвестора использовать проекты добычи со значительным воздействием на окружающую среду.

Ухудшение инвестиционного климата приводит к сокращению объемов инфраструктурного строительства и снижению темпов освоения минерально-сырьевой базы. В этих условиях эффективно использовать проекты добычи только с минимальным уровнем природоохранных затрат и ущерба от экологических нарушений.

<sup>3</sup> OECD: Better policies for better lives (<https://www.oecd.org/env/>).

«Зеленые» технологии и благоприятный инвестиционный климат вместе стимулируют активность инвестора в инфраструктурном строительстве. Пропорции разделения затрат на реализацию таких проектов смещаются в сторону государства при росте неблагоприятного воздействия технологий на окружающую среду и ухудшении условий работы инвестора в регионе.

Государству, заинтересованному в получении рентных доходов, целесообразно в рамках бюджетных ограничений участвовать в инфраструктурном строительстве и стимулировать использование «зеленых» природоохранных технологий добычи полезных ископаемых. При прочих равных условиях улучшение инвестиционного климата приводит к значительному росту ренты, получаемой государством в виде налоговых платежей.

Механизм компенсаций, заложенный в основу классической модели ГЧП, позволяет эффективно помогать инвестору и в реализации части природоохранных проектов. Для государства предпочтительнее механизм расширенных компенсаций, покрывающих не только расходы инвестора на инфраструктуру, но и часть его природоохранных затрат.

Стратегия выбора более высоких текущих затрат на реализацию природоохранных проектов и вследствие этого более низкого постпроектного ущерба от экологических нарушений является предпочтительной как для государства, так и для инвестора, независимо от качества инвестиционного климата.

Таким образом, основной задачей государства на малоосвоенной ресурсной территории в процессе формирования инвестиционной политики является выбор согласованных стратегических планов создания инфраструктуры и реализации природоохранных мероприятий. Сложившийся на территории инвестиционный климат определяет институциональные особенности такого выбора. В его основе — взаимосвязанные процедуры распределения затрат и взаиморасчетов, эффективность которых определяется уровнем взаимного доверия государства и инвестора. Если такой уровень доверия достигнут, то предлагаемый математический инструментарий позволяет сформировать инвестиционную политику, эффективную в долгосрочном плане.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Варнавский В.Г.** (2009). Государственно-частное партнерство. Т. 1. М.: ИМЭМО РАН. [Varnavskiy V.G. (2009). *Public private partnership*. Vol. 1. Moscow: IMEMO RAN (in Russian).]
- Глазырина И.П., Лавлинский С.М.** (2018). Транзакционные издержки и проблемы освоения минерально-сырьевой базы ресурсного региона // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 2 (38). С. 121–143. [Glazyrina I.P., Lavlinskii S.M. (2018). Transaction costs and problems in the development of the mineral and raw-material base of the resource region. *Journal of the New Economic Association*, 2 (38), 121–143 (in Russian).]
- Лавлинский С.М.** (2008). Модели индикативного планирования социально-экономического развития ресурсного региона. Новосибирск: Издательство СО РАН. [Lavlinskii S.M. (2008). *Models of indicative planning of socio-economic development of a resource region*. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (in Russian).]
- Минакир П.А.** (2019). Дальневосточные институциональные новации: имитация нового этапа // *Пространственная экономика*. Т. 15. № 1. С. 7–17. [Minakir P.A. (2019). Far Eastern institutional innovations: Imitation of a new stage. *Spatial Economics*, 15, 1, 7–17 (in Russian).]
- Минакир П.А., Найден С.Н.** (2020). Социальная динамика на Дальнем Востоке: дефект идей или провал институтов? // *Регион: Экономика и Социология*. № 3 (107). С. 30–61. [Minakir P.A., Naiden S.N. (2020). Social dynamics in the Far East: Defective ideas or failure of institutions? *Region: Economics and Sociology*, 3 (107), 30–61 (in Russian).]
- Натхов Т.В., Полищук Л.И.** (2017). Политэкономика институтов: как важно быть инклюзивным. Размышления над книгой Д. Асемоглу, Дж. Робинсона “Why Nations Fail”. Ч. 1: Институты и экономическое развитие. Институциональный выбор // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 2. С. 12–38. [Natkhov T.V., Polishchuk L.I. (2017). The political economy of institutions: The importance of being inclusive. Reflections on the book by D. Acemoglu, J. Robinson “Why Nations Fail”. Part 1: Institutions and economic development. Institutional Choice. *Journal of the New Economic Association*, 2, 12–38 (in Russian).]
- Резниченко Н.В.** (2010). Модели государственно-частного партнерства // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 8, Менеджмент*. № 4. С. 58–83. [Reznichenko N.V. (2010). Models of public-private partnership. *Bulletin of St. Petersburg University. Ser. 8, Management*, 4, 58–83 (in Russian).]

- Рюмина Е. В.** (2001). Экологическая версия предназначения природной ренты // *Экономическая наука современной России*. № 2. С. 11–22. [**Ryumina E.V.** (2001). Ecological version of the destination of natural rent. *Economics of Contemporary Russia*, 2, 11–22 (in Russian).]
- Рюмина Е. В.** (2009). Экономический анализ ущерба от экологических правонарушений. М.: Наука. [**Ryumina E.V.** (2009). *Economic analysis of damage from environmental offenses*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Сластников А. Д.** (2010). Оптимизация участия государства в софинансировании проектов в условиях государственно-частного партнерства // *Экономика и математические методы*. Т. 46. № 4. С. 69–81. [**Slastnikov A.D.** (2010). Optimization of state participation in project co-financing in the conditions of public-private partnership. *Economics and Mathematical Methods*, 46, 4, 69–81 (in Russian).]
- Blazek M.** (2004). Analytical tools for environmental design and management. *Ecological Economics*, 49, 4, 446–462.
- Broadbent J., Laughlin R.** (2003). Public private partnerships: An introduction. *Accounting, Auditing and Accountability Journal*, 16, 3, 332–341.
- Glazyrina I., Chavkin A.** (2021). New estimates of eco-intensity considering the hazardous industrial pollution accumulation. In: *E3S Web of Conferences*, 258, 08003. DOI: 10.1051/e3sconf/202125808003
- Glazyrina I., Lavlinskii S.** (2017). Economic and ecological models in Russia's mining sector. *Regional Research of Russia*, 7, 2, 180–187.
- Grimsey D., Levis M.** (2004). *Public private partnerships: The worldwide revolution in infrastructure provision and project finance*. Cheltenham, UK, Northampton, MA: Edward Elgar.
- Hodge G., Greve C.** (2007). Public-private partnerships: An international performance review. *Public Administration Review*, 6, 37–49.
- Korhonen J., Snakin J.** (2005). Analyzing the evolution of industrial ecosystems: Concepts and application. *Ecological Economics*, 52, 2, 112–119.
- Lakshmanan T.R.** (2011). The broader economic consequences of transport infrastructure investments. *Journal of Transport Geography*, 19, 1, 1–12.
- Lall S.V.** (1999). The role of public infrastructure investments in regional development: Experience of Indian states. *Economic and Political Weekly*, 34, 12, 717–725.
- Lavlinskii S.M.** (2010). Public-private partnership in a natural resource region: Ecological problems, models, and prospects. *Studies on Russian Economic Development*, 21, 1, 71–79.
- Lavlinskii S., Panin A., Pliasunov A.** (2016). Comparison of models of planning the public-private partnership. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 10 (3), 1–17.
- Lehtonen M.** (2004). The environmental-social interface of sustainable development: Capabilities, social capital, institutions. *Ecological Economics*, 49, 2, 156–177.
- Mackie P., Worsley T., Eliasson J.** (2014). Transport appraisal revisited. *Research in Transportation Economics*, 47, 3–18.

## Ecological and economic models in the mineral and resource sector of Russia: Formation of investment policy based on public-private partnership

© 2022 I.P. Glazyrina, S.M. Lavlinskii, L.L. Yakovleva

**I.P. Glazyrina,**

*Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology, Siberian Branch of RAS, Chita, Russia; e-mail: iglazyrina@bk.ru*

**S.M. Lavlinskii,**

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia; e-mail: lavlin@math.nsc.ru*

**L.L. Yakovleva,**

*Transbaikal State University, Chita, Russia; e-mail: lidia70@mail.ru*

Received 12.02.2022

*The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0019). This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-010-00151).*

**Abstract.** The article proposes a mathematical model for the elaboration of a program for the development of the mineral resource industries. It explicitly formalizes the mechanism of public-private partnership and takes into account the negative impact of mining technologies on the environment. The model is based on the Stackelberg game and the tools of bi-level mathematical programming. This makes it possible to take into account the peculiarities of the hierarchy of interaction between the government bodies and the private investor in the mineral resource sector and to build a practical methodology for the formation of a “green” program for the natural resources’ use. The model database is built on the basis of special predictive models that describe in detail the processes of implementing various types of projects. The proposed approach has been tested on real data describing a fragment of the mineral resource base of the Trans-Baikal Territory. The goal of the numerical experiment is to assess the correlation of the investment policy effectiveness formed in the model on the quality of the investment climate, the scale of costs for environmental protection measures and the cost assessment of the environmental damage generated by the applied mining technologies. The simulation results allow us to formulate a number of conclusions for the development of strategic plans for the construction of industrial infrastructure, attracting a private investor who is ready to work in line with the ideas of “green” economy.

**Keywords:** resource region, sustainable development, state-investor partnership mechanisms, natural resource rent section, Stackelberg model, bilevel mathematical programming problem.

**JEL Classification:** C6, Q32.

For reference: **Glazyrina I.P., Lavlinskii S.M., Yakovleva L.L.** (2022). Ecological and economic models in the mineral and resource sector of Russia: Formation of investment policy based on public-private partnership. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 57–69. DOI: 10.31857/S042473880020029-0

---

---

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

---

---

**Параметры и показатели мониторинга состояния предприятия**

© 2022 г. В.Ф. Пресняков

**В.Ф. Пресняков,**

ЦЭМИ РАН; Москва; e-mail: presvasilij@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.02.2022

**Аннотация.** Для целей внутреннего управления возможности использовать данные, собираемые статистическими и налоговыми органами, ограничены даже не столько по причине их недостаточности, сколько по несовпадению предметных областей, на которые ориентированы данные государственного статистического наблюдения. Мониторинг состояния предприятия необходим для внутреннего управления, связанного с разработкой вариантов его адаптации к изменениям среды. В статье определяются объекты и процессы на предприятии, от которых зависят его способности меняться под влиянием усложнения деловой среды и ускорения происходящих в обществе и народном хозяйстве изменений. Со стороны общества объектами такого описания служат используемые предприятием ресурсы, цели и нормы и правила исполнения процессов. Со стороны народного хозяйства объектами являются производственные процессы, акты-вы предприятия и участники его деятельности. В статье выявляются параметры, необходимые для качественной оценки соответствия процессов на предприятии социально-экономическим характеристикам состояния общества, и устанавливаются экономические показатели — количественные характеристики параметров этих же процессов. Вводится понятие «социально-экономическое состояние предприятия», включающее структурированное множество параметров, выражающих качественные оценки использования в процессах конкретных ресурсов, целей, норм и правил с точки зрения их приемлемости для участников деятельности предприятия. Для мониторинга исполнения предприятием ролей в народном хозяйстве используется понятие «производственно-хозяйственное состояние предприятия», включающее в себя структурированное множество показателей процессов, значения которых должны быть согласованы друг с другом. Приведены параметры, обеспечивающие информационное отображение системных императивов на примере параметров хозяйственно-технологического процесса на предприятии. Приводятся пример дефиниции параметров и показателей, а также показаны связи параметров социально-экономического состояния предприятия и показателей его производственно-хозяйственного состояния.

**Ключевые слова:** предприятие, социально-экономическое состояние предприятия, производственно-технологическое состояние предприятия, параметры состояния, системные императивы функционирования предприятия, показатели состояния, предметные области анализа состояния предприятия, роли предприятия в народном хозяйстве.

**Классификация JEL:** С81.

Для цитирования: Пресняков В.Ф. (2022). Параметры и показатели мониторинга состояния предприятия // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 70–78. DOI: 10.31857/S042473880021700-9

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях проблемы, с которыми приходится сталкиваться предприятию, а также возможности их эффективного решения, во все большей мере порождаются нарастающим усложнением деловой среды и ускорением происходящих в ней изменений. В книге Т. Петцингера «Новые пионеры: мужчины и женщины, которые изменяют работу и рынок» описывается новейшая социальная революция, которая полностью изменяет облик современного западного бизнеса и создает новую экономику — экономику возможностей (opportunity-rich economy). По мнению Т. Петцингера, в основе успеха лежит создание рабочего пространства, основанного на сотрудничестве и непосредственном взаимодействии людей, а также рынка, в параметрах которого учитываются не только сугубо экономические, но и ценностные позиции (Petzinger, 1999). Отсюда тот отмечаемый повсеместно интерес к созданию адаптивных организационных структур и систем управления, способных своевременно отслеживать сигналы из разных точек и уровней экономической системы.

Одним из основных направлений решения адаптационных задач в условиях новой экономики является прогнозирование и стратегическое планирование развития народного хозяйства

и предприятий, о которых много говорят, но реальных достижений в разработке мало (Крюков и др., 2019). Прогнозы быстро устаревают и не сбываются, а построение стратегических планов во многих случаях даже не доводится до завершения. В лучшем случае ограничиваются разработкой программ по отдельным направлениям социального и экономического развития, часто плохо связанных между собой и, соответственно, плохо выполняемых.

Сегодня у предприятий возникают задачи чисто предпринимательские, связанные с оценкой и активизацией предпринимательского потенциала бизнеса и перспектив его развития, т.е. задачи инновационного плана, без решения которых невозможно определить их собственное место в народном хозяйстве и социальной среде и эффективно управлять их развитием. Аналитическая деятельность, связанная с решением этих задач, предполагает, помимо знаний традиционного экономического и менеджерского блоков, овладение современной методологией и инструментарием работы с информацией о событиях, которые еще только могут произойти и повлиять на бизнес. Нужны данные о способности предприятий реагировать на меняющуюся среду. Иными словами, требуются не статистические данные, а данные постоянного мониторинга состояния предприятия, создающего информационную базу для ответа на изменения среды<sup>1</sup>. Причем показатели состояния предприятия должны содержать не только данные технологического и хозяйственного характера, но и данные об отношениях участников его деятельности.

Применительно к предприятию это означает, что информационное отображение должно обеспечивать анализ соответствия его функционирования тем требованиям, которые к нему предъявляются со стороны народного хозяйства и общества. О необходимости такого подхода к анализу экономических явлений писал С.М. Вишнев: «Момент необходимости и момент сознательного воздействия должны быть и в теории, и в практике согласованы таким образом, чтобы не вступать в конфликт между собой, а, напротив, поддерживать и подкреплять друг друга» (Вишнев, 1968, с. 3).

Основная идея, лежащая в основе предлагаемого исследования, заключается в том, что информационное отображение любого экономического агента должно описывать его состояние не как набор свойств применительно к той или иной частной, конкретной задаче, а как комплекс взаимосвязанных объективно существующих многоаспектных его характеристик, обусловленных многообразием функций экономического агента в экономическом пространстве.

## ОБЪЕКТЫ И ПРЕДМЕТНЫЕ ОБЛАСТИ АНАЛИЗА СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБЩЕСТВА И ПРЕДПРИЯТИЯ

Многие исследователи искали смысл гражданского общества, разрабатывали его основные концепции. В теориях речь идет о трех видах характеристик, определяющих отношения людей и формы организации их совместной жизнедеятельности.

Во-первых, это характеристики собственности, базирующиеся на совокупности накопленных материальных и нематериальных активов, — созданных трудом всех предшествовавших поколений, принадлежащих стране или ее резидентам и находящимся на экономической территории данной страны и за ее пределами (национальное богатство), а также разведанных и вовлеченных в экономический оборот природных и других ресурсов, находящихся на ту или иную дату в собственности резидентов данной страны, за вычетом их финансовых обязательств как резидентам, так и нерезидентам (Национальное богатство, 1999, с. 463).

Собственность всегда была главной причиной конфликта экономических интересов между разными социальными слоями и группами. Сегодня предприятия в силу организационной текучести и технологической сложности нуждаются в защите от собственнических и оппортунистических интересов отдельных групп участников их деятельности.

Во-вторых, это характеристики, которые формируются под влиянием *национальной идеи* — совокупности представлений, традиций и понятий представителей нации или этноса, позволяющих воспроизводить «общность людей как целое и причислять каждого индивида к данной социальной целостности» (Национальная идея, 2009, с. 201).

На уровне отдельного хозяйства (в нашем случае предприятия) национальная идея приобретает форму целей существования хозяйства и целей участников его деятельности. В советские времена это были

<sup>1</sup> Это не значит, что статистические данные вообще не нужны. Нужны, но главным образом для выявления текущих проблем хозяйствующих субъектов.

**Таблица 1.** Объекты и предметные области анализа социально-экономического состояния предприятия

Состояние общества	Социально-экономические характеристики состояния общества	Национальное имущество	Объекты анализа социально-экономического состояния общества	Ресурсы (материальные и нематериальные активы — имущество)	Предметные области анализа социально-экономического состояния общества	Хозяйственно-технологические процессы	Предметные области параметров состояния хозяйствующего субъекта (предприятия)
		Национальная идея		Цели		Хозяйственно-управленческие процессы	
		Общественный договор		Нормы и правила		Хозяйственно-организационные процессы	

цели демонстрации своей приверженности властным структурам, сегодня цели зачастую направлены на оппортунистические устремления получить как можно большую выгоду из сложившихся обстоятельств.

В-третьих, это характеристики, происхождение которых связано с общественным договором, — соглашением управляемыми относительно правил, по которым ими управляют (Договор общественный, 1999, с. 170–171).

Организации различаются между собой как по уровням своей правовой и имущественной защищенности, так и той, которой обладают участники их деятельности. Разница состоит в разной роли конституционных и гражданских прав — и официальных, и неписанных — внутриорганизационных правил, которыми должны руководствоваться участники деятельности предприятий при исполнении ими своих обязанностей и в своих взаимодействиях между собой (Тихомиров, 1995). Внутренние рабочие правила регулирования взаимодействий для участников деятельности организации, как отмечал Дж. Коммонс, часто являются более влиятельными — люди в организации в своих должностных действиях вынуждены в первую очередь руководствоваться ими, а не нормами закона, так как «защищенность их положения в организации напрямую зависит от отношений с «системой», а не от соблюдения требований закона» (Commons, 1970, p. 371)).

Трем социально-экономическим характеристикам общества — национальное богатство, национальная идея и общественный договор, определяющим состояние общества, соответствуют три группы процессов на уровне предприятия. Это хозяйственно-технологические, хозяйственно-управленческие и хозяйственно-организационные процессы (табл. 1).

В анализе хозяйственно-технологических процессов объектом исследования являются ресурсы, а предметом — привлечение, хранение и преобразование ресурсов. Объектом хозяйственно-управленческих процессов являются цели, отражающие интересы участников, хозяйственные и производственные установки предприятия. Объектом анализа хозяйственно-организационных процессов являются нормы и правила, их исполнение. Предметом анализа является поведение участников деятельности предприятия, формирование хозяйственных результатов и производственные регламенты.

Социально-экономическое состояние предприятия представляет собой совокупность качественных оценок параметров процессов предприятия с точки зрения приемлемости параметров для участников деятельности предприятия. Неприемлемость параметров процессов для участников влечет за собой конфликты между ними, высокие транзакционные издержки и в пределе может приводить к банкротству предприятия.

## ОБЪЕКТЫ И ПРЕДМЕТНЫЕ ОБЛАСТИ АНАЛИЗА ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРЕДПРИЯТИЯ

Исполнение процессов в обществе является зоной ответственности народного хозяйства. Существует множество определений того, что такое *народное хозяйство*. Эти определения появились из термина «хозяйство» (Шмоллер, 2012). В *хозяйство* включаются технические способы, применяемые людьми для создания средств жизнеобеспечения, и те отношения, в которые вступали

**Таблица 2.** Объекты и предметные области анализа хозяйственно-технологического состояния народного хозяйства и предприятия

Народное хозяйство		
Характеристики состояния народного хозяйства		
Технологический уклад	Хозяйственная структура	Занятость населения
Роли предприятия в народном хозяйстве		
Технологическая система	Хозяйствующий субъект	Система коллективного действия
Объекты анализа хозяйственно-технологического состояния предприятия		
Производственный процесс	Активы	Участники производственной деятельности
Предметные области факторных показателей хозяйственно-технологического состояния предприятия		

совместно живущие люди в интересах обеспечения себе материального благополучия. В народном хозяйстве отдельные хозяйства связаны между собой посредством обмена и разделения труда на уровне народа и государства, как прежде были связаны соседские хозяйства.

При таком подходе к определению понятия *народного хозяйства* подчеркиваются три аспекта исполнения им своей функции — производственный, хозяйственный и организационный.

**Производственный аспект народного хозяйства** задается необходимым множеством технологических *переделов*, в ходе которых происходит превращение ресурсов в продукт. Задача анализа производственного аспекта заключается в том, чтобы выявить влияние множества переделов на результаты производства и установить влияние на переделы со стороны специализации и концентрации производства и регламентации труда.

**Хозяйственный аспект народного хозяйства** выражает степень применимости, а также масштабы и интенсивность использования технологий для нужд общества. (Струве, 2017). Он связывает между собой характеристики применяемых технологий с требуемыми количествами потребляемых ресурсов и объемами выпуска.

**Организационный (коллективный) аспект функционирования народного хозяйства** предполагает наличие в обществе определенных организационно-правовых форм коллективной деятельности юридических и физических лиц, каждый из которых, с одной стороны, является обладателем определенного вида ресурса и вносит свой вклад в совместную деятельность, а, с другой стороны, участвует в использовании результатов функционирования целого.

На уровне предприятия трем аспектам функционирования народного хозяйства соответствуют три роли: технологической системы, хозяйствующего субъекта и системы коллективного действия, у каждой из которых есть свои объекты регулирования, — производственный процесс, активы и участники деятельности предприятия (табл. 2). Этим объектам соответствуют *предметные области*, в каждой из которых группируются *факторные* показатели, влияющие на исполнение процессов.

Производство может быть эффективным только тогда, когда в нем используется технологический процесс, в котором тот, кто осуществляет производственную деятельность, способен применить особые знания для производства продукта или оказания услуги. На уровне предприятия таким процессом является *производственный процесс*, представляющий собой комбинации факторов производства, определенных количественно и качественно по отношению к конкретному результату, — производству законченного промежуточного или конечного продукта.

Концепция *хозяйственной единицы*, или субъекта хозяйствования, обеспечивает правовую реализацию концепции *действующего предприятия*, так как является ее юридическим следствием. Она устанавливает, что активы и пассивы хозяйственной единицы должны учитываться и рассматриваться отдельно от активов и пассивов ее владельцев и других хозяйственных единиц.

Анализ функционирования предприятия как системы коллективного действия направлен на формирование состояния организационного равновесия предприятия, при котором никто из его участников не может увеличить свою функцию полезности без риска понести более высокие потери из-за вероятности разрушения кооперации одним из участников (Masahiko, 1986, p. 88–89).

### ПРЕДМЕТНЫЕ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ И ФАКТОРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

При объяснении коллективных, хозяйственных и технологических аспектов деятельности предприятия важно понять, на чем основывается сбалансированное взаимодействие его внутренних подсистем и какова их сравнительная роль в достижении характеристик, необходимых для обеспечения успешного функционирования предприятия на длительную перспективу. В анализе процессов на предприятии используются понятия, установленные в экономических исследованиях, в частности, в *теориях фирм* (Клейнер, Пресняков, Карпинская, 2018а, 2018б).

Объектом технологической деятельности предприятия являются производственные процессы, а предметом — производственная функция, производственная структура и производственные регламенты. Для хозяйственного аспекта объектом являются активы предприятия, а предметом — процессы формирования их запасов, установки их использования и правила хозяйственной деятельности. Для коллективного аспекта объектом анализа являются участники деятельности предприятия, а предметом — их вклад в имущество предприятия, агентные отношения, нормы и правила их поведения.

Параметры процессов, с одной стороны, соотносятся с социально-экономическими характеристиками общества на предмет их соответствия состоянию общества, а с другой — значения показателей служат оценке способности предприятия вносить вклад в состояние народного хозяйства. Соответствия предметных областей параметров и показателей состояния анализа предприятия показаны в табл. 3. Параметры, содержащиеся в каждой предметной области, используются для оценки состояния исполнения предприятием требований к нему со стороны общества — поддержания существования его членов, а показатели — для характеристики вклада предприятий в способность народного хозяйства обеспечивать средствами существования его членов.

Для мониторинга исполнения предприятием своих ролей в народном хозяйстве предлагается исходить из понятия «производственно-хозяйственное состояние предприятия». Производственно-хозяйственное состояние предприятия включает совокупность показателей процессов, значения которых должны быть согласованы с точки зрения применяемых производственных процессов, активов и участников производственной деятельности.

Таким образом, каждая предметная область анализа состояния предприятия содержит параметры, оценки которых отражают соответствие процессов на предприятии требованиям общества, и показатели, значения которых характеризуют уровень соответствия процессов достигнутым в народном хозяйстве лучшим способам исполнения подобных процессов.

**Таблица 3.** Предметные области параметров и экономических показателей состояния предприятия

Производственно-хозяйственное состояние		Объекты анализа производственно-хозяйственного состояния предприятия		
		Участники	Хозяйственная деятельность предприятия	Производственный процесс
Социально-экономическое состояние		Предметные области факторных показателей состояния предприятия		
Объекты социально-экономического состояния предприятия	Ресурсы	Имущественный вклад участников	Активы	Производственная функция
	Цели	Интересы участников	Хозяйственные установки	Интересы производства
	Нормы и правила	Поведение участников	Организационно-правовая форма деятельности	Регламенты производства
	Предметные области параметров состояния предприятия			

## СИСТЕМНЫЕ ИМПЕРАТИВЫ ОБЩЕСТВА

Системный подход к проблемам социального мира неизбежно приводит к необходимости поиска критически значимого набора системных императивов, от уровня осуществления которых зависит выживание, интеграция и развитие общества. Неисполнение императивов так, как они понимаются участниками деятельности конкретного хозяйствующего субъекта, в нашем случае — предприятия, вызывает конфликты и разрушения взаимодействия между ними.

К числу таких императивов следует причислить этический, информационный, хозяйственный, производственный, кадровый, пространственный и социальный аспекты — все, в которых взаимодействия людей характеризуются конфликтностью интересов (Зотов, Пресняков, Гребенников, 2014):

— этические императивы опираются на разделяемый общий смысл и взаимопонимание между участниками деятельности предприятия в отношении должного и недолжного;

— информационные императивы устанавливают границы, в которых создается, перемещается и потребляется информация, обеспечивая исполнение профессиональных обязанностей участниками деятельности предприятия;

— хозяйственные императивы определяют приемлемые для участников условия предоставления имеющихся у них ресурсов для совместной деятельности и выполнения связанных с этим обязательств;

— производственные императивы отражают использование активов, которые предоставляют участники совместной деятельности;

— партнерские императивы отражают способности участников формировать неформальные активы, наделяющие предприятие статусными и конкурентными преимуществами и уменьшающие деловые риски;

— пространственные императивы выражают готовность и способности участников вступать в деятельность предприятия вне зависимости от их размещения, формы и способа участия в его деятельности;

социальные императивы являются следствием необходимости предприятия участвовать в социальном развитии своего персонала, заботиться об укреплении лояльности участников к объектам, участниками которых они являются, и избегать антагонистических отношений с внешними участниками их деятельности — местным населением, административными властями, поставщиками и потребителями, инвесторами и заемщиками, профессиональными сообществами.

Взгляды исследователей могут существенно расходиться по вопросу о числе этих императивов, их относительной значимости и характере структурных образований в обществе, предназначенных для их выполнения. По мере развития и усложнения общественного бытия минимальная дихотомия социальных, в том числе экономических, процессов дополняется новыми аспектами, отражающими как новое качество общественного бытия, так и критическое значение в нем новых императивов жизнедеятельности общества. Примером последних может служить экология — как признание необходимости вписывать жизнедеятельность общества в ограничения природных экосистем. Причем, если раньше экологические проблемы воспринимались как сугубо местные или, самое большее, как региональные, то в последующем мы стали свидетелями глобализации экологических последствий решений и действий, принимаемых на уровне местных интересов и частных организаций. Сегодня на повестку дня уже встали проблемы влияния промышленности на климат планеты в целом (Кондратенко, 2021).

Источники исполнения этих императивов лежат во всех процессах — в хозяйственно-технологических, хозяйственно-управленческих и организационно-хозяйственных, и именно эти аспекты этих процессов должны служить предметом анализа достижения социально-экономических характеристик общества (Пресняков, 1991).

Главное при анализе всех этих императивов состоит в том, что любой из них в социальной системе несет на себе отпечатки всех других, которые выражают себя в первом как его аспекты. Так, хозяйственные императивы нельзя понять без оценки информационных, производственных, социальных и других аспектов деятельности хозяйствующего субъекта и влияния императивов одного аспекта на исполнение других императивов. Поэтому представление об обществе как о совокупности процессов в структурно дифференцированных подсистемах одновременно подразумевает, что процессы и подсистемы, в которых они протекают, тоже имеют многоаспектный характер и отражаются на исполнении всех других процессов.

**Таблица 4.** Параметры хозяйственно-технологических процессов на предприятии

Системные аспекты функционирования предприятия в обществе	Имущественный вклад участников	Активы предприятия	Производственная функция
Этический	Предпринимательская активность	Добрая воля (good will)	Технологическая этика (права на технологию)
Юридический	Знания	Информационные активы	Информационная емкость
Хозяйственный	Финансы	Капитал	Капиталоемкость
Производственный	Компетенции	Производственные фонды	Фондоемкость
Партнерский	Умения	Персонал — квалификационные группы	Трудоемкость
Пространственный	Землепользование	Землевладение	Местоемкость
Социальный	Социальные ресурсы	Непроизводственные фонды	Природоемкость

Параметры, обеспечивающие информационное отображение системных императивов, показаны в табл. 4 на примере параметров хозяйственно-технологических процессов на предприятии. Результаты анализа исполнения предприятием этих императивов должны служить самому предприятию для установления причин и сущности возникающих у него проблем в отношениях между участниками его деятельности.

Процедура определения параметров является основополагающей, так как в зависимости от принятого определения параметра будет формироваться и его измеритель в виде показателя (Богомолова и др., 2013). Следует заметить, что во многих случаях законодательное определение терминов в предметных областях параметров и показателей предприятий отсутствует и возникает необходимость выбора определения из встречающихся в литературе (или вводить своё определение) для того или иного термина (Пресняков, Петухова. 2020).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая система параметров и показателей предназначена для мониторинга социально-экономического и хозяйственно-технологического состояния предприятия. Данные о состоянии предприятия необходимы для решения двух задач. Одна задача связана с установлением нужного соответствия взаимосвязанных параметров для преодоления возможности возникновения конфликтов между участниками из-за несогласованности их интересов. Другая задача касается выявления и упорядоченности функциональной взаимозависимости объективных показателей процессов и преодоления несогласованности в действиях участников. Функциональное согласование процессов на предприятии при наличии открытой или скрытой (потенциальной) конфликтности интересов участников его деятельности не является достаточным условием эффективности его функционирования. Необходимым и достаточным условием согласованности процессов, имеющих системное значение для предприятия, является транзакционный способ этого согласования.

Сложность комплексного решения изложенных в статье задач требует усилий большого коллектива. В статье на примере предприятия предложена постановка проблем, связанных с установлением показателей и параметров хозяйствующего субъекта для мониторинга его функционирования. Необходимо уточнить состав параметров и показателей предприятия и их определения. Необходимо согласовывать источники данных для показателей со способами их обработки. Очевидно, что характеристики состояния должны быть установлены и для других хозяйствующих субъектов и выявлены связи между характеристиками субъектов разного уровня. Нужна апробация результатов на практике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Богомолова А.В., Дышкант Н.Ф., Крылов А.Ю., О.В., Юдина Т.Н.** (2013). УИС РОССИЯ: эксперимент по реализации онтологии предметной области «государственное управление» для поиска в базах данных и по аналитическим публикациям. В сб.: «Интернет и современное общество: сборник научных статей XVI Всероссийской объединенной конференции IMS-2013», Санкт-Петербург, 9–11 октября. 304 с.  
**[Bogomolova A.V., Dyshkant N.F., Krylov A.Yu., Petukhova O.V., Yudina T.N.** (2013). UIS RUSSIA: an experiment on the implementation of the ontology of the subject area “public administration” for search in databases and

analytical publications. In: *Internet and modern society: Collection of scientific articles of the XVI All-Russian United Conference IMS-2013*. St. Petersburg, October 9–11. 304 p. (in Russian).]

- Вишнев С.М.** (1968). Экономические параметры (введение в теорию показателей экономических систем и моделей). М.: Наука. 190 с. [**Vishnev S.M.** (1968). *Economic parameters (introduction to the theory of indicators of economic systems and models)*. Moscow: Nauka. 190 p. (in Russian).]
- Договор общественный (1999). Экономическая энциклопедия. Науч.-ред. совет изд-ва «Экономика», ИЭ РАН. М.: ОАО «Издательство Экономика», 1055 с. [Public contract (1999). In: *Economic encyclopedia*. Scientific & Editorial board of the Publishing house “Economics”, Institute of Economics, Russian Academy of Sciences. Moscow: OJSC “Ekonomika Publishers”. 1055 p. (in Russian).]
- Зотов В.В., Пресняков В.Ф., Гребенников В.Г.** (2014). Зоны формирования избыточных транзакционных издержек на предприятии. В сб.: *Теория и практика институциональных преобразований*. Б.А. Ерзнкян (ред.). Вып. 30. М.: ЦЭМИ РАН. С. 89–113. [**Zotov V.V., Presnyakov V.F., Grebennikov V.G.** (2014). Zones of excessive transaction costs' formation at the enterprise. In: *Theory and practice of institutional transformations*. B.A. Yerznkyan (ed.). Issue 30. Moscow: SEMI RAS, 89–113 (in Russian).]
- Клейнер Г.Б., Пресняков В.Ф., Карпинская В.А.** (2018а). Поведение предприятия в моделях теории фирмы // *Экономическая наука современной России*. № 2 (81). С. 7–23. [**Kleiner G.B., Presnyakov V.F., Karpinskaya V.A.** (2018a). The behavior of the enterprise in the models of the theory of the firm. *Economics of Contemporary Russia*, 2 (81), 7–23 (in Russian).]
- Клейнер Г.Б., Пресняков В.Ф., Карпинская В.А.** (2018б). Поведение предприятия в моделях теории фирмы // *Экономическая наука современной России*. № 3 (82). С. 7–21. [**Kleiner G.B., Presnyakov V.F., Karpinskaya V.A.** (2018b). The behavior of the enterprise in the models of the theory of the firm. *Economics of Contemporary Russia*, 3 (82), 7–21 (in Russian).]
- Кондратенко М.** (2021). ESG — принципы: что это такое и зачем компаниям их соблюдать. РБК Тренды. Режим доступа: <https://trends.rbc.ru/trends/green/614b224f9a7947699655a435> [**Kondratenko M.** (2021). ESG principles: What they are and why companies should comply with them. *RBC Trends*. Available at: <https://trends.rbc.ru/trends/green/614b224f9a7947699655a435> (in Russian).]
- Крюков В.А., Суслов В.И., Баранов А.О., Блам Ю.Ш., Заболотский А.А.** (2019). О содержании проекта прогноза научно-технологического развития Российской Федерации на период до 2030 г. // *Проблемы прогнозирования*. № 3. С. 40–48. [**Kryukov V.A., Suslov V.I., Baranov A.O., Blam Yu. Sh., Zabolotsky A.A.** (2019). About the content of the draft forecast of scientific and technological development of the Russian Federation for the period up to 2030. *Studies on Russian Economic Development*, 3, 40–48 (in Russian).]
- Национальная идея (2009). Большая актуальная политическая энциклопедия. А. Беляков, О. Матвейчев (общ. ред.). М.: Эксмо. 412 с. [The national idea (2009). In: *A large up-to-date political encyclopedia*. A. Belyakov, O. Matveichev (gen. eds.). Moscow: Eksmo. 412 p. (in Russian).]
- Национальное богатство (1999). Экономическая энциклопедия. Науч.-ред. совет изд-ва «Экономика», ИЭ РАН. М.: ОАО «Издательство экономика». 1055 с. [National wealth (1999). In: *Economic encyclopedia*. Scientific & Editorial board of the Publishing house “Economics”, Institute of Economics, Russian Academy of Sciences. Moscow: OJSC “Ekonomika Publishers”. 1055 p. (in Russian).]
- Пресняков В.Ф.** (1991). Модель поведения предприятия. М.: Наука. 192 с. [**Presnyakov V.F.** (1991). *Model of enterprise behavior*. Moscow: Nauka. 192 p. (in Russian).]
- Пресняков В.Ф., Петухова О.В.** (2020). Предприятие как объект информационного отображения. В сборнике научных трудов: *Теория и практика институциональных преобразований в России*. Б.А. Ерзнкян (ред.). Вып. 49. М.: ЦЭМИ РАН. С. 22–32. [**Presnyakov V.F., Petukhova O.V.** (2020) Enterprise as an object of information display. In: *Theory and practice of institutional transformations in Russia. Collection of scientific papers*. B.A. Yerznkyan (ed.). Moscow: SEMI RAS, 49, 22–32 (in Russian).]
- Струве П.Б.** (2017). Экономическая история России. М.: Эксмо. 576 с. [**Struve P.B.** (2017). *Economic history of Russia*. Moscow: Eksmo. 576 p. (in Russian).]
- Тихомиров Ю.А.** (1995). Публичное право. Учебник. М.: Издательство БЕК. 496 с. [**Tikhomirov Yu.A.** (1995) *Public law*. Textbook. Moscow: BEK Publishing House. 496 p. (in Russian).]
- Шмоллер Г.** (2012). Народное хозяйство: наука о народном хозяйстве и ее методы. Пер. с нем. В.М. Нечаева; вступ. ст. А.А. Мануйлова. Изд. 2-е. М.: Librocom. 168 с. [**Schmoller G.** (2012). *National economy: The science of the national economy and its methods*. 2<sup>nd</sup> ed. Trans. from German by V.M. Nechaev; introd. by A.A. Manuylov. Moscow: Librocom. 168 p. (in Russian).]
- Commons J.R.** (1934). *Institutional economics*. New York: Macmillan. 921 p.
- Masahiko A.** (1986). *The co-operative game theory of the firm*. Oxford: Clarendon Press. 219 p.
- Petzinger T.** (1999). *The new pioneers*. New York: Prentice-Hall. 302 p.

## Parameters and indicators of enterprise status monitoring

© 2022 V.F. Presnyakov

**V.F. Presnyakov,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia; e-mail: presvasilij@yandex.ru*

Received 11.02.2022

**Abstract.** For the purposes of internal management, the possibilities of using the data collected by statistical and tax authorities are limited not so much because of their insufficiency, but because of the discrepancy in the subject areas that the data of state statistical observation are focused on. Enterprise status monitoring is necessary to develop options for its adaptation to changes in the environment. The article defines the objects and processes at the enterprise, on which its ability to change depends on complexity of business environment and acceleration of changes in society and the national economy. On the part of the company, the objects of such a description are the resources used by the enterprise, goals and norms and rules for the processes' execution. On the part of national economy, the objects are production processes, assets of the enterprise and participants in its activities. The article identifies the parameters necessary for a qualitative assessment of the conformity of processes at the enterprise with the socio-economic characteristics of the state of society, and establishes economic indicators — quantitative characteristics of the parameters of the same processes. The concept of «socio-economic condition of the enterprise» is introduced, which includes a structured set of parameters expressing qualitative assessments of the use of specific resources, goals, norms and rules in processes from the point of their acceptability for the participants of the enterprise's activities. To monitor the performance of enterprise's roles in the national economy, the concept of «production and economic condition of the enterprise» is used, which includes a structured set of process indicators, the values of which must be consistent with each other. The parameters providing the information display of system imperatives are given on the example of the parameters of the economic and technological process at the enterprise. An example of the definition of parameters and indicators is given, as well as the relationship between the parameters of the socio-economic state of the enterprise and the indicators of its production and economic condition is shown.

**Keywords:** enterprise, socio-economic status of enterprise, production and technological status of enterprise, status parameters, system imperatives of functioning of the enterprise, status indicators, subject areas of analysis of enterprise status, role of enterprise in the national economy.

**JEL Classification:** C81.

For reference: **Presnyakov V.F.** (2022). Parameters and indicators of enterprise status monitoring. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 70–78. DOI: 10.31857/S042473880021700-9

===== МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ =====

**Агент-ориентированная модель «Интеллектуальная Россия»:  
конструкция модели и анализ начальной популяции**

© 2022 г. А.А. Акиншин, О.И. Кузнецова, Н.К. Хачатрян, С.В. Борисова

**А.А. Акиншин,**

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: aaa@cemi-ras.ru

**О.И. Кузнецова,**

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: olgaku1992@bk.ru

**Н.К. Хачатрян,**

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: nerses@cemi.rssi.ru; nerses\_khachatryan@yandex.ru

**С.В. Борисова,**

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: boriss@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-010-00339).*

**Аннотация.** В последние годы большую популярность получило прогнозирование на основе агент-ориентированного моделирования. Это объясняется существенным увеличением вычислительных мощностей и, как следствие, возможностью проведения большого числа экспериментов. Моделирование основано на создании децентрализованных агентов и исследовании их поведения, определяющего поведение всей системы в целом. В данной статье описан процесс разработки агент-ориентированной модели «Интеллектуальная Россия». Подробно описано формирование начальной популяции агентов-людей, имитирующей население регионов России, и изложены правила их действий. Каждому агенту-человеку в начальной популяции назначаются индивидуальные свойства, в том числе вычисляются уровни удовлетворенности и трудового потенциала. Регионы России характеризуются совокупными показателями агентов-людей, проживающих на их территории, а также рядом постоянных экзогенных показателей. Изложенные в статье правила действия агентов должны определить, в частности, внутреннюю миграцию и структуру занятых по видам экономической деятельности, что позволит прогнозировать уровень трудового потенциала работников каждой отрасли в регионе. Получена начальная популяция агентов с использованием статистических данных, для которой проанализированы и визуализированы полученные в результате запуска модели характеристики регионов и отраслей.

**Ключевые слова:** агент-ориентированная модель, прогнозирование, регионы России, отрасли экономики, уровень трудового потенциала, уровень удовлетворенности, компьютерные эксперименты.

**Классификация JEL:** C53, C80, J21.

Для цитирования: Акиншин А.А., Кузнецова О.И., Хачатрян Н.К., Борисова С.В. (2022). Агент-ориентированная модель «Интеллектуальная Россия»: конструкция модели и анализ начальной популяции // Экономика и математические методы. Т. 58. № 3. С. 79–93. DOI: 10.31857/S042473880021777-3

## ВВЕДЕНИЕ

Агент-ориентированное моделирование — один из самых активно развивающихся методов компьютерного моделирования. Он требует значительных технических мощностей для решения масштабных задач, поэтому он стал распространяться только сейчас — с активным развитием ПК и появлением доступа к суперкомпьютерам.

Этот инструмент позволяет моделировать поведение одного агента и наблюдать за поведением популяции таких агентов и всей системы, в том числе в динамике. Причем в роли агента может выступать практически любой объект, который можно описать: это может быть атом или частица,

человек или животное, фирмы или страны, военные единицы или вирусы, и даже потоки и процессы. Каждый такой агент наделяется конкретными свойствами и возможными вариантами действий в различных ситуациях (алгоритмом поведения). Агенты в модели действуют и взаимодействуют автоматически на каждом шаге модельного времени, формируя в результате каждой такой итерации данные о себе и общие данные о своей популяции. Агент-ориентированные модели (АОМ) часто используются для прогнозирования: сформировав начальную популяцию, можно наблюдать над ее поведением и в будущие периоды.

Стоит отметить, что в России тема прогнозирования особенно актуальна ввиду действующего закона о государственном стратегическом планировании (в первую очередь — в плане промышленного и экономического развития)<sup>1</sup>. Также АОМ как аналитический и прогнозный инструмент может быть полезен практически для национальных проектов России: «Демография», «Здравоохранение», «Экология», «Наука» «Производительность труда и поддержка занятости» и пр.<sup>2</sup>

АОМ не являются оптимизационными, но они подходят для проведения множественных компьютерных экспериментов. Таким образом, от вариации входных данных на старте запуска модели будут зависеть результаты в итоге. Поэтому такого рода модели могут быть очень эффективными на стадии именно принятия решений.

АОМ имеют ряд преимуществ, например, — очень гибкий инструмент, который можно изменять, дополнять, адаптировать на любой стадии разработки и апробации. В отличие от классических методов экстраполяции агент-ориентированные модели могут включать огромное число показателей. Каждая модель может быть уникальной в зависимости от поставленных целей и задач. Кроме того, АОМ может включать различные методы: клеточные автоматы, элементы теории игр, сложных систем, мультиагентных систем и эволюционного программирования, методы Монте-Карло и пр.

Традиционно АОМ используется в сфере логистики, пространственного распределения (Дорошенко, 2019; Низамутдинов, Атнабаева, Ахметзянова, 2020), демографии (Макаров и др., 2016; Макаров и др., 2018б; Макаров и др., 2019а; Макаров и др., 2019в). Однако в настоящее время спектр применения таких моделей растет (Макаров и др., 2018а; Макаров и др., 2019б; Наумов, 2019). Например, набирает популярность тема создания *искусственного общества* для моделирования социально-экономических процессов (Хачатрян, Кузнецова, 2018; Хачатрян, Кузнецова, 2020б; Кузнецова, 2021).

В качестве примера можно привести демографическую АОМ России (Бахтизин и др., 2021), которая была использована не только для прогнозирования численности и структуры населения РФ до 2030 г., но и для оценки эффективности федеральной программы материнского капитала. Было проведено два типа компьютерных экспериментов (с учетом программы и без нее) и выявлено, что к концу расчетного периода (к 2030 г.) численность населения страны при проведении программы превышает численность населения без ее проведения на 3 млн человек (около 2,14% общей численности населения).

В качестве еще одного примера можно рассмотреть модель Вологодской области<sup>3</sup>. Она имитирует сложную социально-экономическую структуру субъекта РФ (Вологодской области). В рамках модели предусмотрено функционирование нескольких типов агентов на разных уровнях: люди, предприятия, муниципальные районы. Модель предназначена для апробации различных управленческих решений на уровне распределения бюджета и изменения экономической политики региона.

На международной арене можно отметить крупный журнал JASSS<sup>4</sup>, где публикуются работы по агент-ориентированному моделированию ученых из США, Великобритании, Испании, Германии, Пакистана, Китая и многих других стран.

<sup>1</sup> Федеральный закон «О стратегическом планировании в Российской Федерации» от 28 июня 2014 г. № 172-ФЗ. Принят Государственной Думой 20 июня 2014 г.

<sup>2</sup> Национальные проекты России. Проекты: <https://xn-80aarpemcchfmo7a3c9ehj.xn-p1ai/>

<sup>3</sup> Лаборатория искусственных обществ и информационных технологий (ABM laboratory), Общее описание модели Вологодской области «Губернатор» (<http://abm.center/info/publications/420328/>).

<sup>4</sup> The Journal of Artificial Societies and Social Simulation (<https://www.jasss.org/JASSS>).

В качестве примера можно привести АОМ, которая оценивает макроэкономические последствия так называемого вымогательства (Platas-López, Guerra-Hernández, Grimaldo, 2021). В модели рассматривается ситуация здоровой экономики с умеренными инфляцией и безработицей, воспроизводятся процессы взаимодействия работников, фирм и банков (рынок труда, рынок товаров, кредитный рынок). Для ряда агентов предусмотрена возможность осуществлять некую преступную деятельность, определяемую как вымогательство (extortion). Таким образом, оценивается влияние вымогательства на макроэкономическую ситуацию. Авторы утверждают, что даже низкий уровень вымогательства ведет к значительному снижению ВВП и росту безработицы, кроме того, вымогательство пагубно влияет на уровень потребления, инфляции, а также на распределение богатства. Причем вымогательство на рынках лучше предотвращать на ранней стадии, так как все способы борьбы с ним в ходе эксперимента не были достаточно эффективными, чтобы предотвратить снижение макроэкономических показателей.

В продолжение темы рынка труда можно привести в пример еще одну АОМ (Takacs, Squazzoni, 2015). Она моделирует идеализированную ситуацию на рынке труда, где уровень работников примерно одинаковый. Тем не менее, неравенство в сфере занятости все равно неизбежно возникает. Это происходит в силу асимметрии информации: работодатель ориентируется скорее на уровень амбициозности претендентов, чем на их реальный уровень знаний и умений. Интересный результат состоит в том, что ситуация тем хуже, чем выше должности претендентов.

Еще одна АОМ, разработанная учеными из Китая, представляет собой пространственную модель использования сельскохозяйственных угодий (Wang et al., 2021). Эта модель призвана оценить влияния нескольких государственных программ (восстановления лесов, а также субсидирования сельскохозяйственной деятельности) использования сельскохозяйственной земли.

Дополнительно можно отметить, что АОМ может использоваться и в довольно неожиданных направлениях. Например, для предсказания поведения толпы и формирования возможных беспорядков на спортивных мероприятиях (Clements, Fadai, 2022), спортивных симуляций с целью выявления наиболее эффективной игровой стратегии (Hulme et al., 2019) и даже симуляций игр на выживание (Rosenbusch, Röttger, Rosenbusch, 2020).

АОМ «Интеллектуальная Россия», описываемая в данной статье (далее — модель), используется для создания искусственного общества жителей России с целью оценки и прогнозирования динамики развития той или иной отрасли в регионах с точки зрения трудового потенциала.

В первую очередь модель призвана оценить средний *уровень трудового потенциала* в регионах России по предложенной авторами методологии посредством использования агент-ориентированного моделирования и выявить *точки концентрации*. Это поможет рассмотреть различные варианты стимулирования более равномерного распределения трудового потенциала по регионам, а также развития наиболее отсталых регионов и отраслей экономики. Решение данной задачи (в том числе, в виде готового программного продукта) может быть полезным при принятии управленческих решений на региональном и федеральном уровнях.

Работу над моделью можно условно разделить на два этапа. На первом этапе по регионам России формируется популяция агентов-людей на начальный момент модельного времени, всем агентам назначаются их индивидуальные свойства (возраст, пол и пр.). Регионы России характеризуются совокупными показателями агентов-людей внутри региона, а также рядом постоянных экзогенных показателей (престиж, климат). На втором этапе работы модели реализуются алгоритмы действий агентов-людей, на основе которых формируются прогнозные показатели. В представленной статье дано описание выполнения первого этапа работы над моделью и изложены правила действий агентов, которые на втором этапе лягут в основу формирования алгоритмов поведения агентов-людей.

## 1. ОПИСАНИЕ ПЕРВОГО ЭТАПА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для формирования начальной популяции необходимо задать свойства каждого агента-человека и описать сферу его жизнедеятельности, как социальную, так и профессиональную.

### 1.1. Агенты и их свойства

На данный момент в модели присутствует один тип агентов — агенты-люди. Каждый агент-человек наделяется следующим набором свойств:

- 1) идентификационный номер (ID);
- 2) пол;
- 3) возраст;
- 4) регион проживания;
- 5) идентификационный номер семьи (ID семьи);
- 6) уровень образования (высшее, среднее профессиональное, среднее общее, основное общее, образование отсутствует);
- 7) сфера деятельности/статус (ребенок, студент, безработный, пенсионер, занятый в одной из отраслей);
- 8) рабочий стаж;
- 9) уровень квалификации (образование, опыт, профессиональные навыки; подробное описание см. в (Хачатрян, Акиншин, Кузнецова, 2020а));
- 10) группа доходности (используется при распределении общего объема денежных доходов по 20%-м группам населения, подробное описание см. в (Хачатрян, Акиншин, Кузнецова, 2020а));
- 11) размер дохода (присваивается индивидуальный уровень дохода внутри границ группы доходности, подробное описание см. в (Хачатрян, Акиншин, Кузнецова, 2020а));
- 12) ученая степень (для агентов, занятых в отрасли «Наука и инновации»);
- 13) уровень удовлетворенности;
- 14) уровень трудового потенциала.

Свойства 2–4, 6–8 и 10–12 агентов задаются в соответствии с реальными статистическими данными по регионам России, официально публикуемыми Федеральной службой государственной статистики (Росстат)<sup>5</sup>, Единой межведомственной информационно-статистической системой (ЕМИСС)<sup>6</sup>.

Последние два свойства: уровень удовлетворенности и уровень трудового потенциала — рассчитываются с использованием характеристик как самого агента, так и региона его проживания. Приведем их подробное описание.

*Уровень удовлетворенности агента* формируется, исходя из личных свойств агента и характеристик региона его проживания, и вычисляется для каждого агента на основе следующих показателей:  $X_1$  — отношение индивидуального уровня заработной платы агента к среднему уровню заработной платы в отрасли, в которой он занят, в рамках региона проживания;  $X_2$  — отношение индивидуального уровня заработной платы агента к прожиточному минимуму в регионе;  $X_3$  — отношение численности занятых в отрасли «Деятельность в области здравоохранения и социальных услуг» к общей численности агентов в регионе;  $X_4$  — отношение численности занятых в отрасли «Образование» к общей численности агентов-детей в регионе;  $X_5$  — отношение численности занятых в отрасли «Наука и инновации» к общей численности агентов в регионе;  $X_6$  — престиж региона (задается экспертно в начальный момент времени и в дальнейшем не меняется);  $X_7$  — климат региона (задается экспертно в начальный момент времени и в дальнейшем не меняется).

Показатели  $X_1, X_2$  нормируются следующим образом:

$$X_{ij,n} = (X_{ij,n} - x_{i,n}^{min}) / (x_{i,n}^{max} - x_{i,n}^{min}), \quad (1)$$

где  $i$  — номер показателя,  $j$  — номер агента,  $n$  — номер региона;  $x_{i,n}^{max}$  — максимальное значение показателя  $i$  среди всех агентов региона  $n$ ;  $x_{i,n}^{min}$  — минимальное значение  $i$  показателя среди всех агентов региона  $n$ .

Особенность модели состоит в том, что агенты имеют *разные приоритеты* ( $k_i$ ) в отношении показателей  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Поэтому при вычислении уровня удовлетворенности агентов разных

<sup>5</sup> Федеральная служба государственной статистики (rosstat.gov.ru).

<sup>6</sup> ЕМИСС (fedstat.ru).

**Таблица 1.** Веса показателей в определении уровня удовлетворенности для разных групп агентов

Показатель	Зарботная плата к среднему уровню заработной платы, $k_1$	Зарботная плата к прожиточному минимуму, $k_2$	Здравоохранение, $k_3$	Образование, $k_4$	Наука и инновации, $k_5$	Престиж, $k_6$	Климат, $k_7$
Агент состоит в браке, имеет детей	0,3	0	0,3	0,3	0	0,05	0,05
Агент состоит в браке, не имеет детей	0,2	0	0,1	0	0,6	0,1	0
Студент	0,5	0	0,1	0	0,1	0,3	0
Безработный	0	0,5	0,2	0	0	0,2	0,1
Пенсионер	0	0,2	0,4	0	0	0,1	0,3
Занятый	0	0	0,1	0	0,6	0,3	0

групп, представляющего собой средневзвешенное значение всех показателей  $X_i$ , используется свой набор весовых коэффициентов для каждой группы (табл. 1).

Значения коэффициентов значимости  $k_i$  вычислялись на основании последовательного перебора наборов значений этих коэффициентов. Было проведено 16 экспериментов, в результате которых выявлен набор значений с минимальной волатильностью уровня удовлетворенности и уровня трудового потенциала по исследуемым годам; см. подробное описание в (Акиншин, Хачатрян, Кузнецова, 2021).

Формула расчета уровня удовлетворенности ( $S_{j,n}$ ) для каждого отдельного агента  $j$  из региона  $n$  имеет вид

$$S_{j,n} = k_1 X_{1j,n} + k_2 X_{2j,n} + k_3 X_{3j,n} + k_4 X_{4j,n} + k_5 X_{5j,n} + k_6 X_{6j,n} + k_7 X_{7j,n}. \tag{2}$$

Со временем (на каждом следующем шаге модельного времени) статус агента может меняться, соответственно, будут меняться и его приоритеты. Например, агент, состоящий в браке, но не имеющий детей, будет иметь наибольший приоритет в уровне личного дохода. Но с рождением ребенка тот же агент поменяет приоритеты и будет в большей степени ориентироваться на уровни здравоохранения и образования в регионе. Аналогичным примером может быть переход агента из статуса «Занятый» в статус «Безработный» или наоборот.

Уровень трудового потенциала агента рассчитывается аналогичным образом и включает следующие свойства агента  $Y_i$ : возраст —  $Y_1$ ; стаж —  $Y_2$ ; уровень образования —  $Y_3$ ; уровень квалификации —  $Y_4$ ; уровень удовлетворенности —  $Y_5$ .

Все показатели  $Y_i, i = 1, \dots, 5$ , также нормируются по формуле (1). Уровень трудового потенциала агента вычисляется как средневзвешенное всех значений  $Y_i$ , причем в этом случае применяются веса  $h_i$  — единые для всей популяции агентов (табл. 2).

Увеличение значений показателей  $Y_i, i = 1, \dots, 5$ , за исключением возраста  $Y_1$ , напрямую влияет на рост трудового потенциала. Возраст же дает максимальный вклад в трудовой потенциал в определенной точке (70 лет), а затем этот вклад начинает убывать. В связи с этим получаем формулу для вычисления уровня трудового потенциала для каждого агента:

$$P_j = h_1(Y_{1j})Y_{1j} + h_2Y_{2j} + h_3Y_{3j} + h_4Y_{4j} + h_5Y_{5j}, \tag{3}$$

где  $h_1(Y_1)$  — возрастает на множестве значений аргумента  $Y_1 \leq 70$ , а далее убывает.

Поскольку свойства агента меняются каждый момент модельного времени, то будет меняться и уровень трудового потенциала.

**Таблица 2.** Веса показателей в определении уровня трудового потенциала

Показатели	Возраст, $h_1$	Стаж, $h_2$	Уровень образования, $h_3$	Уровень квалификации, $h_4$	Уровень удовлетворенности, $h_5$
Веса показателей	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3



Рис. 1. Схема присвоения свойств агентам

### 1.2. Формирование начальной популяции

Вначале внутри каждого региона создается популяция с определенным количеством агентов (соответствующим реальной численности жителей субъекта РФ). Далее каждому агенту назначаются его индивидуальные свойства 1–14. Присвоение свойств производится в определенной последовательности, согласно разработанной авторами методике, по схеме, представленной на рис. 1.

### 1.3. Характеристики и отраслевая структура регионов

На следующем шаге для каждого региона задаются характеристики и отраслевая структура экономики. Каждый регион характеризуется уровнем доходности, качеством здравоохранения и образования, уровнем развития науки и инноваций, состоянием окружающей среды и привлекательностью региона, а также *индексом удовлетворенности*. Подробное описание характеристик региона представлено в табл. 3.

Таблица 3. Показатели, характеризующие регион

Показатель	Описание
Уровень доходности	Отношение среднего значения заработной платы к прожиточному минимуму в регионе
Здравоохранение	Отношение численности занятых в отрасли «Деятельность в области здравоохранения и социальных услуг» к общей численности агентов в регионе
Образование	Отношение численности занятых в отрасли «Образование» к общей численности агентов-детей в регионе
Наука и инновации	Отношение численности занятых в отрасли «Наука и инновации» к общей численности агентов в регионе
Престиж	Задается экспертно в начальный момент времени и в дальнейшем не меняется
Климат	Задается экспертно в начальный момент времени и в дальнейшем не меняется
Индекс удовлетворенности	Средний уровень удовлетворенности по всем агентам, проживающим в регионе

В каждом регионе в соответствии с официальными данными Росстата определена отраслевая структура экономики. По видам экономической деятельности (ОКВЭД2) рассматриваются отрасли:

- 1) сельское, лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство;
- 2) добыча полезных ископаемых;
- 3) обрабатывающие производства;
- 4) обеспечение электрической энергией, газом и паром; кондиционирование воздуха;
- 5) водоснабжение, водоотведение, организация сбора и утилизации отходов, деятельность по ликвидации загрязнений;
- 6) строительство;
- 7) торговля оптовая и розничная, ремонт автотранспортных средств и мотоциклов;
- 8) транспортировка и хранение;
- 9) гостиницы и предприятия общественного питания;
- 10) информация и связь;
- 11) операции с недвижимым имуществом;
- 12) образование;
- 13) здравоохранение и социальные услуги;
- 14) наука и инновации (исследователи);
- 15) прочее.

Отрасли характеризуются свойствами занятых в них агентов. Особенно показательным является уровень *трудового потенциала отрасли*, определяемый как среднее значение по всем персональным показателям уровня трудового потенциала агентов в отрасли. Такой усредненный показатель можно назвать *индексом трудового потенциала отрасли*.

## 2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРВОГО ЭТАПА

Программная реализация модели требует значительных вычислительных ресурсов — оперативной памяти и ресурсов процессора. При создании начальной популяции были использованы следующие доступные программно-аппаратные средства.

*Одно- или многопроцессорный сервер на базе процессоров с многоядерной архитектурой. Язык программирования C# 7.3. Среда разработки Visual Studio 2017, 2019.*

Применялись средства распараллеливания вычислений, реализованные в библиотеке параллельных задач TPL (Task Parallel Library) в пространстве имен System.Threading.Tasks. Использовался класс Parallel, который является частью TPL, он предназначен для упрощения параллельного выполнения кода. Parallel включает ряд методов, которые позволяют распараллелить выполнение задачи: Parallel.For — позволяет выполнять итерации цикла параллельно; Parallel.ForEach — осуществляет итерацию по коллекции, реализующей интерфейс IEnumerable, подобно циклу foreach, но выполняет параллельный перебор.

Применение этих средств на этапе начального создания популяции позволило значительно (до десятков раз по сравнению с «линейной» программой в зависимости от числа доступных ядер) сократить время вычислений. Например, на 16-ядерном сервере (2 x Intel Xeon E5–2640v2), при доступных программе 15 ядрах (30 потоках), время вычислений сократилось более чем в 20 раз по сравнению с непараллельной версией программы.

Эффективное распараллеливание на данном этапе возможно на уровне одновременного выполнения одинаковых задач назначения свойств для агентов различных регионов. Одновременно обрабатывается до  $N$  регионов (где  $N$  — число доступных программе потоков). Так как число агентов в различных регионах значительно отличается, то и время завершения соответствующих потоков различно. Это приводит к непропорциональному уменьшению времени работы программы в зависимости от числа доступных ядер/потоков.

## 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результатом работы модели являются выгружаемые в виде csv-файлов базы данных (БД). Они формируются на каждом шаге модельного времени (т.е. каждый модельный год) и представляют собой таблицу, где столбцы — свойства агентов, строки — сами агенты (пронумерованные в соответствии с персональными ID). Аналогичные БД формируются по семьям, а также по регионам.

На первом этапе формируется начальная популяция агентов-людей. В результате выгружается таблица, представляющая характеристики агентов-людей в начальный момент модельного времени, что позволяет рассчитать индексы удовлетворенности и трудового потенциала для каждого региона и отрасли. Начальная популяция была сформирована на основе статистических данных за 2019 г.

Часть характеристик агентов-людей имеет стохастический характер (в частности, заработная плата отдельного агента, уровни его квалификации, удовлетворенности и др.), для них была подтверждена устойчивость (более подробное описание см. в (Хачатрян, Акиншин, Кузнецова, 2020a)).

Ниже представлен анализ рассчитанных для начальной популяции индексов по отраслям и регионам.

На рис. 2 приведены лучшие по индексу удовлетворенности регионы, на рис. 3 — худшие. Каждый столбец диаграммы показывает значение индекса удовлетворенности в регионе для отдельно взятой отрасли.

Можно заметить, что среди ТОП-10 регионов (рис. 3) не наблюдается значительного разброса индекса удовлетворенности как по отраслям, так и по регионам — в большинстве случаев он не превышает 0,3. Тем не менее, выделяется отрасль науки и инноваций (исследователей): в Петербурге и Москве, а также в Московской и Нижегородской областях уровень удовлетворенности значительно выше среднего и почти достигает 0,5. В Республиках Саха (Якутия) и Коми, а также Архангельской и Белгородской областях, уровень удовлетворенности исследователей, наоборот, значительно ниже среднего.

Среди 10 худших регионов по индексу удовлетворенности (рис. 4) можно увидеть более ощутимый разброс, однако максимальное значение не превышает и 0,2.

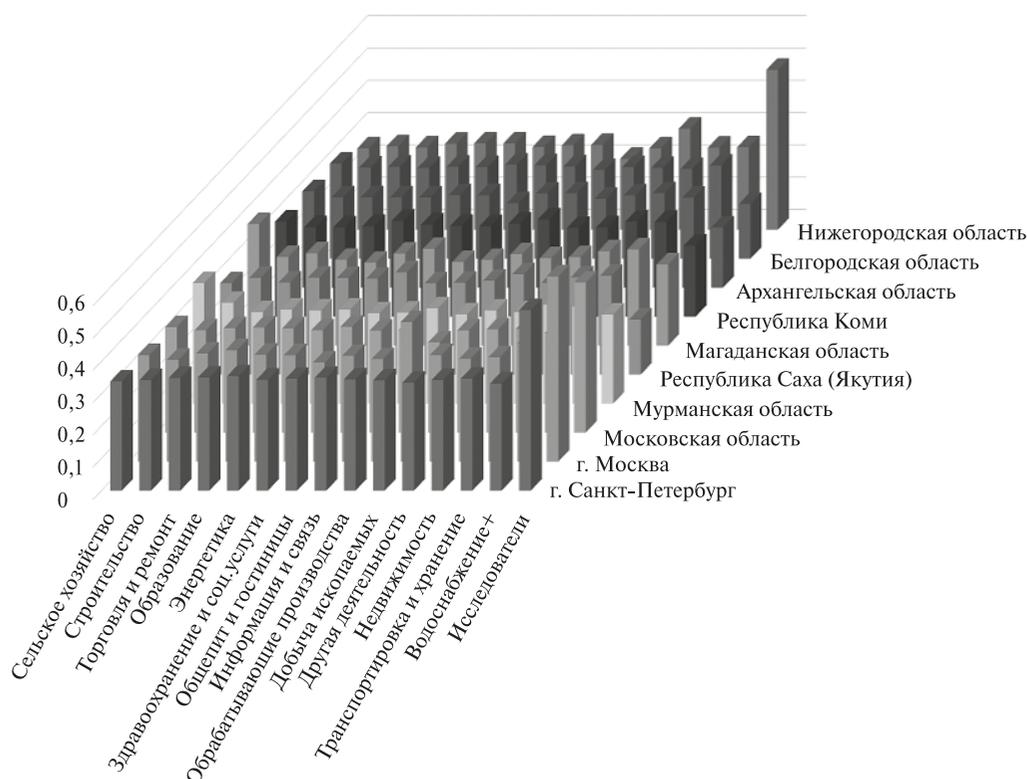


Рис. 2. Лучшие 10 регионов по индексу удовлетворенности в разрезе отраслей

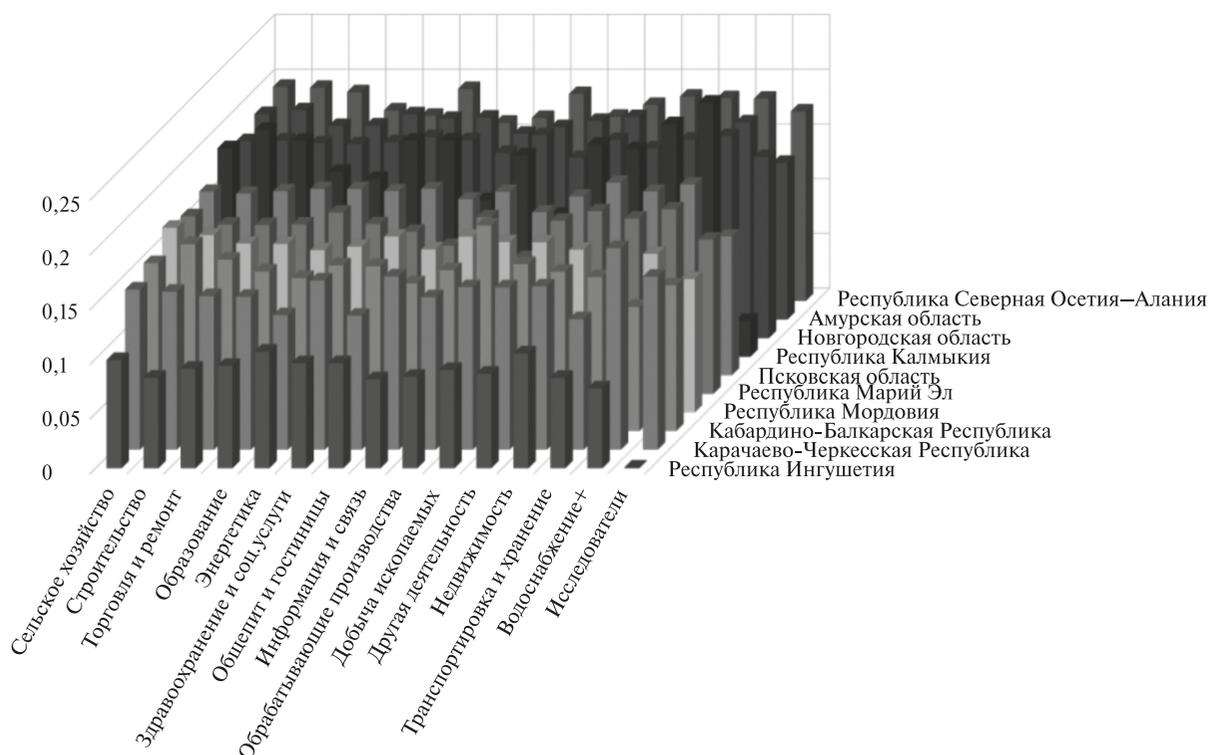


Рис. 3. Худшие 10 регионов по индексу удовлетворенности в разрезе отраслей

На рис. 4–5 представлены лучшие и худшие регионы по индексу трудового потенциала в разрезе отраслей. В лучших регионах (рис. 4) индекс трудового потенциала в среднем варьирует около значения 0,4; в худших регионах по этому показателю (рис. 5) — 0,3. На обоих рисунках можно также выделить сферу науки и инноваций (исследователей), для которой значение индекса трудового потенциала заметно выше, чем в других отраслях региона.

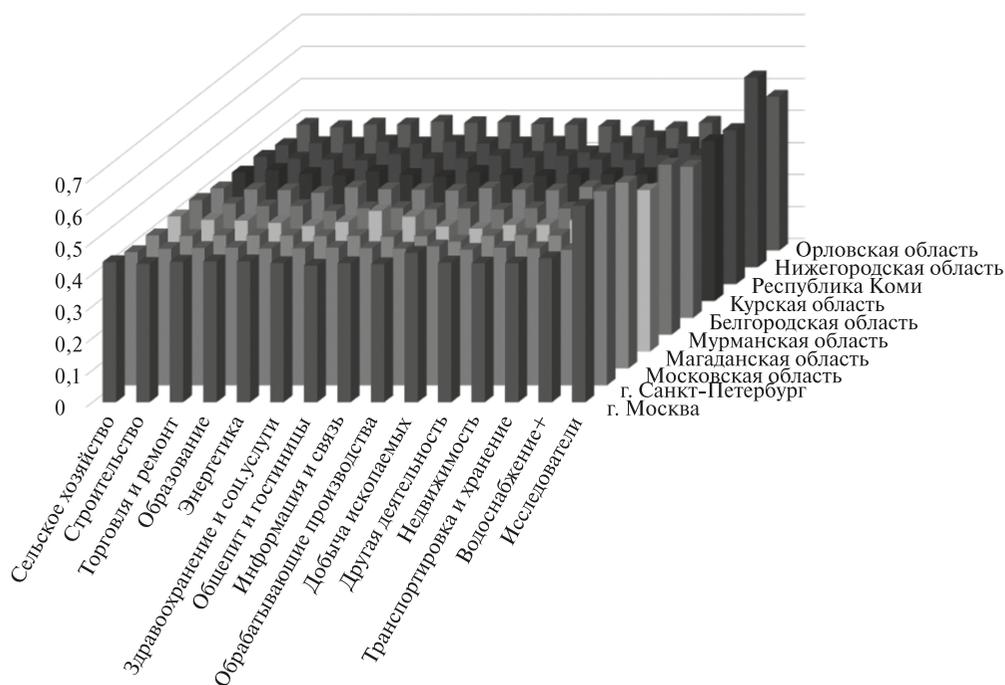


Рис. 4. Лучшие 10 регионов по индексу трудового потенциала в разрезе отраслей

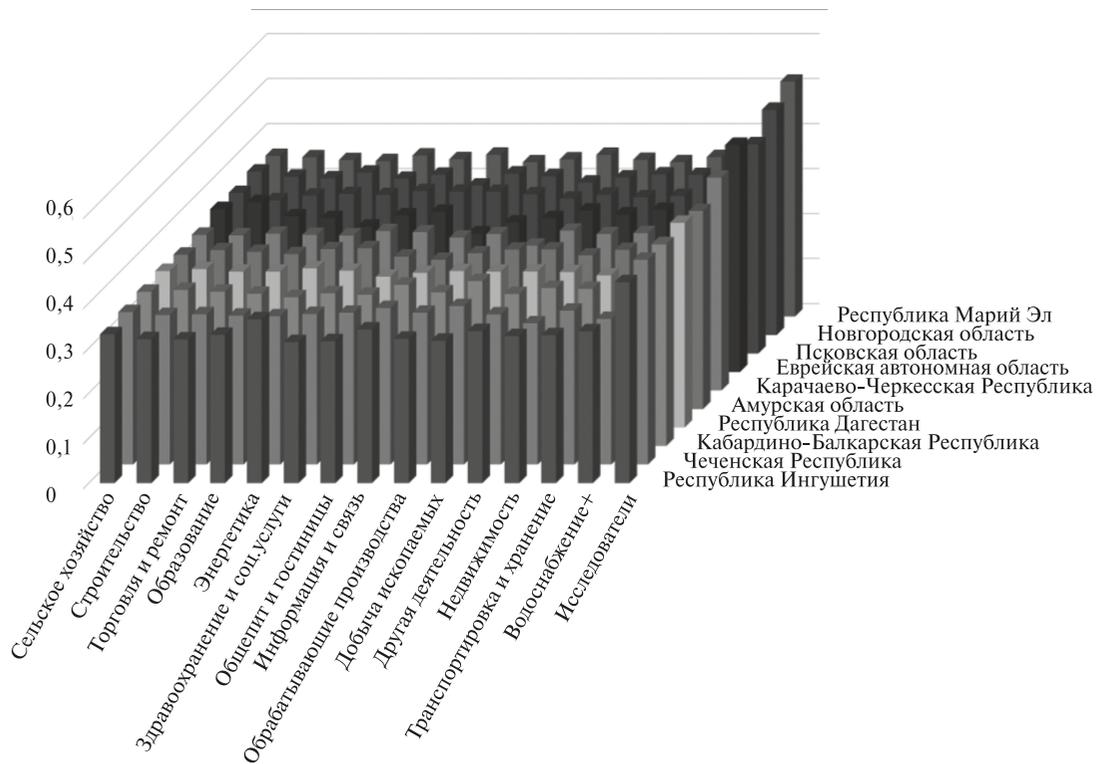


Рис. 5. Худшие 10 регионов по индексу трудового потенциала в разрезе отраслей

На рис. 6 можно видеть распределение уровня удовлетворенности агентов по возрастам. Высота каждого столбика гистограммы отражает численность агентов по всем регионам для каждой возрастной группы, уровень удовлетворенности которых попадает в заданный промежуток. Анализ гистограмм позволяет сделать следующие выводы:

– наибольшее число агентов имеет низкий уровень удовлетворенности (от 0,2 до 0,3) и относится к возрастной группе 28–57 лет;

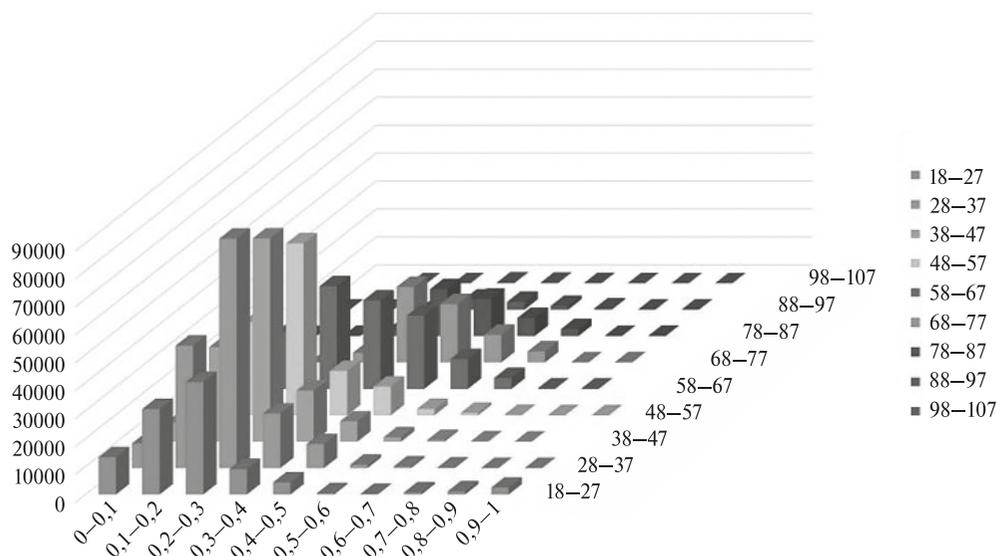


Рис. 6. Распределение агентов по уровню удовлетворенности и возрасту

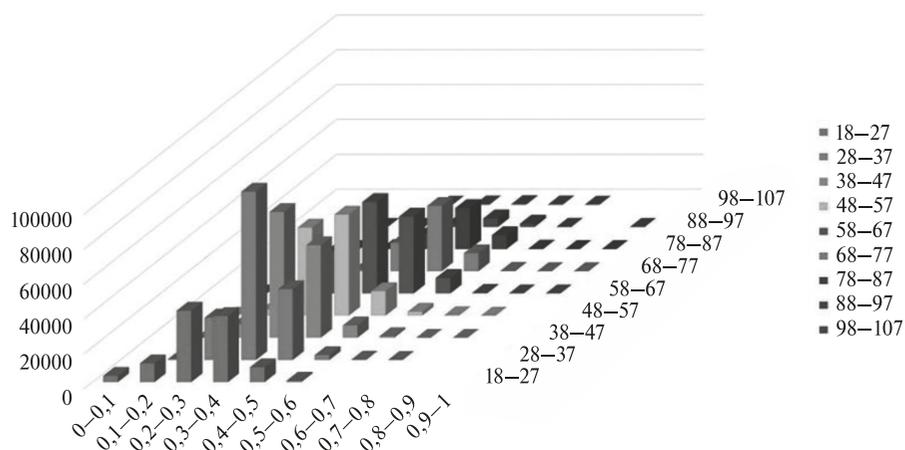


Рис. 7. Распределение агентов по уровню трудового потенциала и возрасту

– для значений уровня удовлетворенности от 0,3 до 0,4 и от 0,4 до 0,5 можно видеть две примерно одинаковые по численности группы агентов в возрастных категориях 28–57 и 58–77 лет соответственно;

– наибольшая численность агентов со значением уровня удовлетворенности от 0,5 до 0,7 приходится на возрастную группу 58–87 лет;

– наибольшее значения уровня удовлетворенности (от 0,8 до 1,0) имеет небольшая по численности группа агентов возрастной категории 18–27 лет.

На рис. 7 представлено распределение уровня трудового потенциала агентов по возрастам.

Анализ гистограмм в этом случае позволяет сделать следующие выводы:

– наибольшее число агентов имеет невысокий уровень трудового потенциала (от 0,3 до 0,4) и относится к возрастной группе 28–47 лет;

– для значений уровня трудового потенциала от 0,4 до 0,5 можно видеть примерно одинаковые по численности группы агентов в трех возрастных категориях 38–47, 48–57 и 58–67 лет;

– для значений уровня трудового потенциала от 0,5 до 0,6 и от 0,6 до 0,7 можно видеть две примерно одинаковые по численности группы агентов в возрастных категориях 58–77 лет.

В качестве основных выводов можно отметить следующее. В целом значения уровня удовлетворенности и уровня трудового потенциала незначительно варьируют в зависимости от региона и отрасли, хотя есть и исключения. Отдельно можно выделить сферу «Наука и инновации» — ее волатильность по индексу удовлетворенности по регионам значительно выше, чем в других отраслях. По значению индекса трудового потенциала эта отрасль превышает остальных как в лучших, так и в худших регионах.

Формирование начальной популяции агентов завершает первый этап работы над моделью. Далее будут изложены правила действия агентов, которые на втором этапе лягут в основу формирования алгоритмов действий агентов-людей.

#### 4. ОПИСАНИЕ ВТОРОГО ЭТАПА МОДЕЛИРОВАНИЯ: ДЕЙСТВИЯ АГЕНТОВ В МОДЕЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

На втором этапе работы реализуются алгоритмы действий агентов-людей, на основе которых формируются прогнозные показатели. Перейдем к описанию правил действий агентов, которые будут задавать динамику модели, определяемую следующими типами процессов: демографически-ми; сменой статуса агента; «самостоятельным» поведением агента.

Таблица 4. Типы действий агентов

Типы процессов	Демографические и другие процессы	Изменение статуса агента	Поведение агента (варианты действий)
Осуществление	Автоматически и/или исходя из статистики	Автоматически по наступлению определенных критериев и с учетом статистики	Самостоятельное принятие решение агентом
Реализация	Увеличение возраста. Смерть. Рождение. Увеличение трудового стажа. Увеличение уровня квалификации	Ребенок → студент. Студент → занятый. Студент → безработный. Занятый → безработный. Безработный → занятый. Занятый → пенсионер. Безработный → пенсионер.	Переезд в другой регион. Смена сферы деятельности. Повышение квалификации. Решение ничего не менять

Таблица 5. Правила поведения агента

Действие	Условия	
	Описание	Значения характеристик
Переезд в другой регион	Неприемлемый уровень удовлетворенности	$S_{j,k}$
	Высокий относительный уровень квалификации	$Q_{j,k} > \alpha_3$
Смена сферы деятельности без переезда в другой регион	Низкий уровень удовлетворенности	$\lambda_1 < S_{j,k} < \lambda_2$
	Значение относительного уровня заработной платы ниже порогового	$X_1 < \beta$
Повышение квалификации	Невысокий уровень удовлетворенности	$\lambda_2 < S_{j,k} < \lambda_3$
	Низкий уровень квалификации	$\alpha_1 < Q_{j,k} < \alpha_2$
Решение ничего не менять	Высокий уровень удовлетворенности или случаи, не описанные выше	$S_{j,k} > \lambda_3$

Описание реализации этих процессов в модели представлено в табл. 4.

В каждый момент модельного времени агент оценивает свое текущее состояние, исходя из личных свойств, характеристик региона проживания, а также с учетом своих приоритетов. В зависимости от значений личного *уровня удовлетворенности*  $S_{j,k}$ ; относительного уровня квалификации  $Q_{j,k}$  (отношение уровня квалификации агента к среднему уровню квалификации по региону) и относительного уровня заработной платы (показатель  $X_1$ ) агент принимает решение о каком-либо действии (рис. 8).

Действия агента определяются пороговыми значениями уровня удовлетворенности  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ); относительного уровня квалификации  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ( $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ) и относительного уровня зарплаты  $\beta$ . В табл. 5 описаны условия принятия агентом решения о том или ином действии.

Пороговые значения калибруются с использованием статистических данных по внутренней миграции и структуре занятых по видам экономической деятельности.

При любом действии агента изменяются его свойства, соответственно, меняются характеристики регионов и отраслей в регионе, что позволит спрогнозировать их будущее развитие или упадок.



Рис. 8. Схема принятия решения агентом

## 5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВТОРОГО ЭТАПА

Возможная реализация второго этапа, связанного с моделированием поведения агентов на основе ранее созданной популяции, — распараллеливание вычислений с использованием технологии MPI (Message Passing Interface). С программной точки зрения каждый агент может быть представлен отдельным процессом (поток), взаимодействующим с другими агентами через механизм сообщений. Использование коммутаторов (MPI\_Comm) позволяет выделить группу агентов, например, в пределах одного региона.

С начала работы над моделью в качестве языка программирования был выбран C#. Однако на доступной разработчикам вычислительной платформе (Linux, MPICH) в качестве основного языка программирования MPICH приложений используется C++. В связи с этим для выполнения программ, написанных на C#, используется mono — кроссплатформенный фреймворк, реализующий .NET Framework в Linux. Функциональность модели, непосредственно выполняющая процедуры распараллеливания, вынесена в часть проекта, написанную на C++. При сборке проекта необходимо подключить модули mono и MPICH и применить компиляторы mcs и mpicxx. Запуск собранного проекта выполняется с использованием mono. Таким образом, удается реализовать функциональность проекта, написанного на C# в среде Linux/MPICH, с помощью средств параллельных вычислений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для обеспечения точности прогнозных значений в моделировании особую важность имеет формирование начального состояния. Поэтому перенос популяции и ее свойств из реальности в виртуальное пространство с достаточной степенью достоверности требует проработки в первую очередь, что и было выполнено и подтверждено.

В статье описан процесс разработки агент-ориентированной модели, которая воспроизводит искусственное общество граждан России (по состоянию на 2019 г.) с дальнейшей целью прогнозирования состояния популяции с точки зрения трудового потенциала в региональном и отраслевом разрезе. Представлено описание конструкции модели, свойств агентов, технической реализации модели, правил поведения агентов.

Также был произведен анализ и визуализация характеристик начальной популяции: оценены состояния отраслей и регионов с точки зрения уровня трудового потенциала и уровня удовлетворенности агентов. По обоим показателям можно выделить отрасль «Наука и инновации», имеющую наибольшие значения как по индексу удовлетворенности, так и по индексу трудового потенциала; при этом лучшими регионами оказались г. Москва и Санкт-Петербург, а также Московская и Нижегородская области.

Следующий шаг работы авторов над моделью — моделирование действий агентов во времени, в результате которых будут формироваться прогнозные значения, в том числе по уровням удовлетворенности и трудового потенциала как на уровне самих агентов, так и на уровнях отраслей и регионов. Это позволит спрогнозировать динамику развития отраслей в том или ином регионе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Акиншин А.А., Хачатрян Н.К., Кузнецова О.И.** (2021). Имитационная модель российского общества: хранение данных модели, обработка и представление результатов // *Вестник ЦЭМИ*. Т. 4. № 1. DOI: 10.33276/S265838870015583-4. Режим доступа: <https://cemi.jes.su/s265838870015583-4-1/> [**Akinshin A.A., Khachatryan N.K., Kuznetsova O.I.** (2021). Simulation model of the Russian society: storage of model data, processing and presentation of results. *Herald of Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences*, 4, 1. DOI: 10.33276/S265838870015583-4. Available at: <https://cemi.jes.su/s265838870015583-4-1/> (in Russian).]
- Бахтизин А.Р., Макаров В.Л., Сушко Е.Д., Максаков А.А.** (2021). Демографическая агент-ориентированная модель России и оценка ее применимости для решения практических управленческих задач // *Искусственные общества*. Т. 16. № 2. DOI: 10.18254/S207751800015357-1. Режим доступа: <https://artsoc.jes.su/s207751800015357-1-1/> [**Bakhtizin A.R., Makarov V.L., Sushko E.D., Maksakov A.A.** (2021). Demographic agent-based model of Russia and assessment of its applicability for solving practical management problems. *Artificial Societies*, 16, 2. DOI: 10.18254/S207751800015357-1. Available at: <https://artsoc.jes.su/s207751800015357-1-1/> (in Russian).]
- Дорошенко Т.А.** (2019). Разработка агент-ориентированной модели образовательной миграции населения региона // *Вестник Евразийской науки*. Т. 11. № 5. Режим доступа: <https://esj.today/PDF/17ECVN519.pdf> [**Doroshenko T.A.** (2019). Development of an agent-based model of educational migration in the region. *The Eurasian Scientific Journal*, 5 (11). Available at: <https://esj.today/PDF/17ECVN519.pdf> (in Russian).]

- Кузнецова О.И.** (2021). Агент-ориентированная модель «Интеллектуальная Россия»: исследование уровня трудового потенциала и уровня удовлетворенности в региональном и отраслевом разрезе // *Искусственные общества*. Т. 16. № 4. DOI: 10.18254/S207751800017946–9. Режим доступа: <https://artsoc.jes.su/s207751800017946-9-1/> [**Kuznetsova O.I.** (2021). Agent-based model “Intellectual Russia”: Study of the level of labor potential and the level of satisfaction in the regional and sectoral sections. *Artificial Societies*, 16, 4. DOI: 10.18254/S207751800017946-9. Available at: <https://artsoc.jes.su/s207751800017946-9-1/> (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д., Агеева А.Ф.** (2018а). Агент-ориентированная модель Евразии и имитация реализации крупных инфраструктурных проектов // *Экономика региона*. Т. 14. № 4. С. 1102–1116. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Sushko E.D., Ageeva A.F.** (2018a). An agent-based model of Eurasia and simulation of consequences of large infrastructure projects. *Economy of Region*, 14, 4, 1102–1116 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д., Васенин В.А., Борисов В.А., Роганов В.А.** (2016). Суперкомпьютерные технологии в общественных науках: агент-ориентированные демографические модели // *Вестник Российской академии наук*. Т. 86. № 5. С. 412–421. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Sushko E.D., Vasenin V.A., Borisov V.A., Roganov V.A.** (2016). Supercomputer technologies in social science: Agent-oriented demographic models. *Herald of the Russian Academy of Sciences*, 86, 5, 412–421 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С.** (2019а). Имитационное моделирование системы умный город: концепция, методы и примеры // *Национальные интересы: приоритеты и безопасность*. Т. 15. № 2. С. 200–224. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S.** (2019a). Simulation modeling of the smart city system: The concept, methods and cases. *National Interests: Priorities and Security*, 15, 2, 200–224 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С.** (2019б). Разработка программной платформы для крупномасштабного агент-ориентированного моделирования сложных социальных систем // *Программная инженерия*. Т. 10. № 4. С. 167–177. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S.** (2019b). Development of software framework for large-scale agent-based modeling of complex social systems. *Software Engineering*, 10, 4, 167–177 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С., Ровенская Е.А., Стрелковский Н.В.** (2019в). Укрупненная агент-ориентированная имитационная модель миграционных потоков стран Европейского Союза // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 1. С. 3–15. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S., Rovenskaya E.A., Strelkovsky N.V.** (2019c). Aggregated agent-based simulation model of migration flows of the European Union countries. *Economics and Mathematical Methods*, 55, 1, 3–15 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д., Сушко Г.Б.** (2018б). Разработка агент-ориентированной демографической модели России и ее суперкомпьютерная реализация // *Вычислительные методы и программирование*. Т. 19. № 4. С. 368–378. [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Sushko E.D., Sushko G.B.** (2018b). Development of an agent-based demographic model of Russia and its supercomputer implementation. *Numerical Methods and Programming*, 19, 4, 368–378 (in Russian).]
- Наумов И.В.** (2019). Исследование межрегиональных взаимосвязей в процессах формирования инвестиционного потенциала территорий методами пространственного моделирования // *Экономика региона*. Т. 15. № 3. С. 720–735. [**Naumov I.V.** (2019). Investigation of the interregional relationships in the processes of shaping the territories’ investment potential using the methods of spatial modelling. *Economy of Regions*, 15, 3, 720–735 (in Russian).]
- Низамутдинов М.М., Атнабаева А.Р., Ахметзянова М.И.** (2020). Исследование процессов межрегиональной миграции на основе имитационного моделирования // *Известия Уфимского научного центра РАН*. № 3. С. 93–99. [**Nizamutdinov M.M., Atnabaeva A.R., Akhmetzyanova M.I.** (2020). Research of interregional migration processes based on simulation modelling. *Proceedings of the RAS Ufa Scientific Centre*, 3, 93–99 (in Russian).]
- Хачатрян Н.К., Акиншин А.А., Кузнецова О.И.** (2020а). Имитационная модель российского общества. Создание и анализ виртуальной популяции // *Искусственные общества*. Т. 15. № 4. DOI: 10.18254/S207751800012620–1. Режим доступа: <https://arxiv.gaugn.ru/s207751800012620-1-1/> [**Khachatryan N.K., Akinshin A.A., Kuznetsova O.I.** (2020 a). Simulation model of Russian society. Creation and analysis of virtual population. *Artificial Societies*, 15, 4. DOI: 10.18254/S207751800012620-1. Available at: <https://arxiv.gaugn.ru/s207751800012620-1-1/> (in Russian).]
- Хачатрян Н.К., Кузнецова О.И.** (2018). Компьютерное моделирование вариантов распределения инновационной активности по регионам России // *Вестник ЦЭМИ*. Т. 1. № 1. DOI: 10.33276/S0000105-8-1. Режим доступа: <https://cemi.jes.su/s11111110000105-8-1/> [**Khachatryan N.K., Kuznetsova O.I.** (2020). Computer modelling of options of distribution of innovative activity on regions of Russia. *Vestnik CEMI, RAS*, 1, 1. DOI: 10.33276/S0000105-8-1. Available at: <https://cemi.jes.su/s11111110000105-8-1/> (in Russian).]
- Хачатрян Н.К., Кузнецова О.И.** (2020б). Компьютерное моделирование вариантов пространственного развития научно-технологической сферы в Российской Федерации // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 3. С. 45–55. [**Khachatryan N.K., Kuznetsova O.I.** (2020). Computer modelling of options of spatial development of scientific and technological sphere in the Russian Federation. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 3, 45–55 (in Russian).]
- Clements A.J., Fadai N.T.** (2022). Agent-based modelling of sports riots. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 597. DOI: 10.1136/bjssports-2017-098871. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127279>

- Hulme A., Thompson J., Nielsen R.O., Read G.J.M., Salmon P.M.** (2019). Towards a complex systems approach in sports injury research: Simulating running-related injury development with agent-based modelling. *British Journal of Sports Medicine*, 53 (9). DOI: 10.1177/1046878120914336. Available at: <https://bjsm.bmj.com/content/53/9/560>
- Platas-López A., Guerra-Hernández A., Grimaldo F.** (2021). On the macroeconomic effect of extortion: An agent-based approach. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 24 (1), 3. DOI: 10.18564/jasss.4496. Available at: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/24/1/3.html>
- Rosenbusch H., Röttger J., Rosenbusch D.** (2020). Would Chuck Norris certainly win the hunger games? Simulating the result reliability of battle Royale games through agent-based models. *Simulation & Gaming*, 51 (4). DOI: 10.1177/1046878120914336. Available at: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1046878120914336>
- Takacs K., Squazzoni F.** (2015). High standards enhance inequality in idealized labor markets. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 18 (4), 2. DOI: 10.18564/jasss.2940. Available at: <https://www.jasss.org/18/4/2.html>
- Wang Y., Zhang Qi, Sannigrahi S., Qirui Li, Tao S., Bilborrow R., Li J., Song C.** (2021). Understanding the effects of China's agro-environmental policies on Rural Households' Labor and Land allocation with a spatially explicit agent-based model. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 24 (3), 7. DOI: 10.18564/jasss.4589. Available at: <https://www.jasss.org/24/3/7.html>

## Agent-based model “Intellectual Russia”: Model construction and initial population analysis

© 2022 A.A. Akinshin, O.I. Kuznetsova, N.K. Khachatryan, S.V. Borisova

**A.A. Akinshin,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia;*  
e-mail: [aaa@cemi-ras.ru](mailto:aaa@cemi-ras.ru)

**O.I. Kuznetsova,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia;*  
e-mail: [olgaku1992@bk.ru](mailto:olgaku1992@bk.ru)

**N.K. Khachatryan,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia;*  
e-mail: [nerses@cemi.rssi.ru](mailto:nerses@cemi.rssi.ru); [nerses-khachatryan@yandex.ru](mailto:nerses-khachatryan@yandex.ru)

**S.V. Borisova,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia;*  
e-mail: [boriss@cemi.rssi.ru](mailto:boriss@cemi.rssi.ru)

Received 30.03.2022

*The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-010-00339).*

**Abstract.** In recent years forecasting with agent-based modeling has become very popular. This is due to a significant increase in computing power and as a result the possibility of conducting a large number of experiments. Agent-based modeling is based on the creation of decentralized agents and the study of their behavior which determines the behavior of the entire system as a whole. This article describes the developing of agent-based model, including information about the creation of initial population of human agents (that simulates the Russian regions' population) and algorithms of their actions (that form the basis for their autonomous behavior). Each human agent of the initial population gets his own individual characteristics including the level of satisfaction and the level of labor potential. All Russian regions are characterized by aggregate indicators of human agents living in its territory, as well as a number of permanent exogenous indicators. The algorithms of action described in this article should determine internal migration processes and the structure of employees by type of economic activity. This will allow predicting the level of labor potential of employees in each industry in the region. The model creates the initial population of human agents using official statistical data and also form the aggregated data on characteristics of regions and industries, that are analyzed and visualized in the article.

**Keywords:** agent-based model, forecasting, Russian regions, industries, level of labor potential, level of satisfaction, computer experiments.

**JEL Classification:** C53, C80, J21.

For reference: **Akinshin A.A., Kuznetsova O.I., Khachatryan N.K., Borisova S.V.** (2022). Agent-based model “Intellectual Russia”: Model construction and initial population analysis. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 79–93. DOI: 10.31857/S042473880021777-3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Статическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе транспортной задачи с квадратичными добавками по стоимости

© 2022 г. И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков

**И.А. Лесик,**

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: lesik56@mail.ru

**А.Г. Перевозчиков,**

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: pere501@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.03.2022

**Аннотация.** Предлагается постановка непрерывной статической модели рынка разработки программного обеспечения (РПО) на базе транспортной задачи (ТЗ) с квадратичными добавками (КД) по стоимости. В отличие от существующей ТЗ с фиксированными доплатами (ФД) по стоимости предлагается постановка по минимизации суммы стоимостей транспортировки, которые могут содержать нефиксированные добавки (НД), пропорциональные квадратам объемов назначений. Таким образом, предлагается квадратичная постановка ТЗ с НД. Показано, что ТЗ с КД может быть сведена к задаче выпуклого программирования, которую можно численно решить субградиентным методом либо методом сопряженных градиентов для двойственной задачи. Приводится интерпретация ТЗ с КД как задачи о назначении (ЗН) с нефиксированными скидками (НС) по цене, учитывающими разницу между оптовой и розничной ценой. Это позволяет применить поставленную задачу для построения цифровых платформ (ЦП) на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для загрузки заданий исполнителям.

**Ключевые слова:** транспортная задача с квадратичными добавками по стоимости, сведение к задаче выпуклого программирования, метод Б.Т. Поляка, двойственная задача, метод сопряженных направлений.

**Классификация JEL:** O12, C51.

Для цитирования: Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2022). Статическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе транспортной задачи с квадратичными добавками по стоимости // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 94–101. DOI: 10.31857/S042473880021697-5

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача определения оптимальных планов назначения исполнителей по работам в статической модели рынка разработки программного обеспечения (РПО) на базе транспортной задачи (ТЗ) с квадратичными добавками (КД) по стоимости. В отличие от существующей ТЗ с фиксированными добавками (ФД) по критерию минимума стоимости (Корбут, Финкельштейн, 1969) предлагается использовать постановку, которая вместо фиксированных добавок может иметь нефиксированные добавки (НД), пропорциональные квадратам объемов назначения. Таким образом, предлагается постановка ТЗ с квадратичными добавками (КД) по стоимости.

Такие добавки возникают в задачах о назначении (ЗН) с линейными скидками (ЛС) по цене, учитывающими разницу между оптовой и розничной ценой. Соответствующие доходы, получающиеся умножением цены на объем назначения, будут содержать уже квадратичную часть. В существующих платформах PBS<sup>1</sup>, LSF<sup>2</sup> (Platform LSF 7 Update 6, 2009), NQE<sup>1</sup>, I-SOFT (Ding et al., 2012), EASY<sup>3</sup>, LoadLeveler<sup>4</sup> для решения транспортной задачи и ее частного случая — задачи о назначениях — рассматривается в основном статический вариант задачи с горизонтом планирования один период. Поэтому в настоящей работе мы сосредоточились на ТЗ с КД по стоимости. Такая схема

<sup>1</sup> Официальный сайт компании Altair Engineering, Inc. PBS Works (2006) (<http://www.pbsworks.com/>).

<sup>2</sup> Официальный сайт компании Platform Computing Corporation. Platform LSF 7 Update 6 (2009). An overview of new features for Platform LSF administrators. ([http://www.platform.com/workload-management/whatsnew\\_lst7u6.pdf](http://www.platform.com/workload-management/whatsnew_lst7u6.pdf)).

<sup>3</sup> Официальный сайт продукта Condor: «What is Condor?», 2006. (<http://www.cs.wisc.edu/condor/description.html>).

<sup>4</sup> Официальный сайт компании «Интерфейс»: IBM Tivoli Workload Scheduler LoadLeveler (2007). (<http://www.interface.ru/home.asp?artId=6283>).

будет более общей, чем построенная на основе ТЗ с линейными добавками (ЛД), поскольку предполагает наличие переменной части дохода, пропорциональной квадрату объема поставок по соответствующему маршруту. Для цифровых платформ (ЦП) на рынке РПО цена интерпретируется как цена одного дня для каждого назначения, которая может учитывать скидку на объем поставки. Таким образом, учитывается не только базовая розничная цена, но и скидка на опт. Оптимизация производится в интересах цифровой платформы, которая является своего рода оптовым поставщиком и хотела бы продавать свой ресурс в розницу насколько это возможно. Ставится задача максимизации дохода. Это позволяет учесть разницу между оптовой и розничной ценой, которая может быть для каждого назначения определена построением соответствующего линейного тренда по ретроспективным данным. Таким образом предложенная ТЗ с КД является уточнением классической ТЗ по стоимости в части разницы между оптовыми и розничными ценами.

Практическая значимость работы связана с применением предложенной статической модели для распределения ресурсов и заданий на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для создания соответствующих цифровых транзакционных платформ (ЦТП) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Несмотря на постоянное увеличение объема сделок, на рынке РПО отсутствуют глобальные платформы универсальных платформ распределения заданий PBS, LSF, NQE, I-SOFT, EASY, LoadLeveler, которые могли бы быть использованы в динамическом алгоритме загрузки заданий хотя бы для получения начального плана, который в динамической модели является элементом управления. Это приводит к большому числу посредников в цепочке, ведущей от заказчика к исполнителю, что уменьшает стоимость работ для исполнителя до 10 раз по сравнению со стоимостью, которую готовы были платить заказчики. Таким образом, создание цифровой платформы на рынке РПО могло бы привести к более справедливому распределению доходов и увеличению величины общественного благосостояния. Максимизация же последнего равносильна, как известно, определению глобального равновесия на рынке РПО в соответствии с теоремой Дебре (Debreu, 1954).

В общетеоретическом плане концепция равновесия (Макаров, Рубинов, 1973) на распределенном рынке однородного товара относится к мезоэкономике (Мезоэкономика развития, 2011) и лежит в основе синтеза транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом и предложением, рассмотренная в работах (Васин, Григорьева, Лесик, 2017; Васин, Григорьева, Лесик, 2018; Васин, Григорьева, Цыганов, 2017).

Основным результатом работы являются определение и исследование статической ТЗ с КД по стоимости. Показано, что поставленная непрерывная задача может быть сведена к задаче выпуклого программирования, которую можно решить методом Б.Т. Поляка, описанным в (Поляк, 1983), либо методом сопряженных переменных для двойственной задачи. Это позволяет применить поставленную задачу для построения цифровых платформ (ЦП) на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для загрузки заданий исполнителям.

## 1. ПОСТАНОВКА ТЗ С КД ПО ЦЕНЕ

Пусть, как в обычной транспортной задаче (ТЗ), через  $i = 1, \dots, m$  обозначены пункты производства (разработчики ПО) некоторого однородного товара (человеко-дней при стандартном 8-часовом дне чистого рабочего времени, определяемого по таймеру), через  $j = 1, \dots, n$  — пункты его потребления (заказчики ПО). Даны величины:  $a_i > 0$  — объем производства в пункте производства  $i$ ;  $b_j > 0$  — объем потребления в пункте потребления  $j$ , отнесенные к одному дню (горизонту планирования). Ищутся величины  $x_{ij} \geq 0$  (объем «перевозок» из пункта  $i$  в пункт  $j$ , удовлетворяющие обычным транспортным ограничениям

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad i \in M = \{1, \dots, m\}, \quad j \in N = \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где предполагается, что  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , и максимизирующие функцию

$$\sum_{ij} x_{ij} c_{ij}(x_{ij}), \quad (2)$$

$$c_{ij}(x_{ij}) = \max(d_{ij} - c_{ij} x_{ij}, 0). \quad (3)$$

Здесь  $d_{ij}$  — базовые розничные цены одного дня производителя с учетом прибыли цифровой платформы, например 30%;  $c_{ij} x_{ij}$  — скидка к цене на оптовую поставку объема  $x_{ij}$ . Поскольку нет смысла назначать  $x_{ij}$  больше, чем величина  $d_{ij} / c_{ij}$ , можно считать выполненными ограничения

$$x_{ij} \leq d_{ij} / c_{ij}. \quad (4)$$

Таким образом, задача (1)–(3) сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\sum_{ij} (d_{ij}x_{ij} - c_{ij}x_{ij}^2) \rightarrow \max \quad (5)$$

при ограничениях (1), (4), которую можно решить методом Поляка (Поляк, 1983) или методом сопряженных направлений (см. там же) для двойственной задачи, если исключить из (1)  $n + m - 1$  зависимых переменных. Далее будем считать, что ограничения (1), (4) совместны.

## 2. ИСКЛЮЧЕНИЕ ЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исключим зависимые переменные. Например,

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 0, \quad x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 2, \dots, n, \quad (6)$$

при этом появляется  $m + n - 1$  дополнительных неравенств помимо условия неотрицательности переменных. Подставляя (6) в показатель (5), получим выражение

$$\begin{aligned} I(x) = & (d_{11} - c_{11}x_{11})x_{11} + \sum_{i=2}^m (d_{i1} - c_{i1}x_{i1})x_{i1} + \sum_{j=2}^n (d_{1j} - c_{1j}x_{1j})x_{1j} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n (d_{ij} - c_{ij}x_{ij})x_{ij} = [d_{11} - \\ & - c_{11} \left\{ a_1 - \sum_{j=2}^n \left( b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \right) \right\}] \left\{ a_1 - \sum_{j=2}^n \left( b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \right) \right\} + \sum_{i=2}^m \left[ d_{i1} - c_{i1} \left( a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij} \right) \right] \left( a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij} \right) + \\ & + \sum_{j=2}^n \left[ d_{1j} - c_{1j} \left( b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \right) \right] \left( b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \right) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n (d_{ij} - c_{ij}x_{ij})x_{ij} \rightarrow \max \end{aligned} \quad (7)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{d_{11}}{c_{11}} & \geq a_1 - \sum_{j=2}^n \left( b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \right) = a_1 - \sum_{j=2}^n b_j + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 0, \\ \frac{d_{i1}}{c_{i1}} & \geq x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 0, \quad \frac{d_{1j}}{c_{1j}} \geq x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \geq 0, \\ \frac{d_{ij}}{c_{ij}} & \geq x_{ij} \geq 0, \quad i = 2, \dots, m; \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Такую задачу максимизации (7), (8) можно решить методом Поляка.

## 3. ПЕРЕХОД К ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ

Предположим для простоты, что рассматривается задача с неуравновешенным балансом

$$x_{ij} \geq 0 \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=2}^m x_{ij} \leq b_j, \quad i \in M = \{1, \dots, m\}, \quad j \in N = \{1, \dots, n\}. \quad (9)$$

Ограничения (4) несущественны и их можно опустить. Вместо максимизации показателя (5) можно минимизировать обратную функцию

$$J(x) = -I(x) = \sum_{ij} (c_{ij}x_{ij}^2 - d_{ij}x_{ij}). \quad (10)$$

Задача (9), (10) является частным случаем общей задачи квадратичного программирования

$$\min_{x \in Q} [0, 5 \langle Cx, x \rangle - \langle d, x \rangle],$$

где

$$Q = \{x \mid Ax \leq b\}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C = 2p \operatorname{diag} \left\{ d_{ij}^0 / M_{ij} \right\} \in E^{mn \times mn}, \quad d = p \left\{ (1 - c_{ij}^0) \right\} \in E^{mn}, \quad x \in E^{mn}, \\ b = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \in E^{m+n+mn}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2p} \operatorname{diag} \left\{ \frac{M_{ij}}{d_{ij}^0} \right\}, \quad A \in E^{(m+n+mn) \times mn}. \end{aligned} \quad (12)$$

Двойственная задача имеет вид (Поляк, 1983, с. 196–197):

$$\min_{y \geq 0} [0, 5 \langle C^{-1}(d - A^T y), d - A^T y \rangle + \langle b, y \rangle] - \quad (13)$$

и может быть решена конечным методом сопряженных направлений из (Поляк, 1983, с. 194–195). Здесь  $y \in E^{m+n+mn}$ . Решение предыдущей задачи получается по формуле  $x^* = C^{-1}(d - A^T y^*)$ .

#### 4. ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**Пример 1.** Предположим, что

$$\|c_{ij}\| = \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ a_i/b_j \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \|d_{ij}\| = \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ a_i/b_j \end{matrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 5/3 \\ 1 & 1 & 5/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и ограничения (4) несущественны и их можно опустить. Тогда

$$I(x) = [c_{11} - d_{11}\{a_1 - (b_2 - x_{22}) - (b_3 - x_{23})\}]\{a_1 - (b_2 - x_{22}) - (b_3 - x_{23})\} + [c_{21} - d_{21}(a_2 - x_{22} - x_{23})](a_2 - x_{22} - x_{23}) + [c_{12} - d_{12}(b_2 - x_{22})](b_2 - x_{22}) + [c_{13} - d_{13}(b_3 - x_{23})](b_3 - x_{23}) + [c_{22} - d_{22}x_{22}]x_{22} + [c_{23} - d_{23}x_{23}]x_{23} \rightarrow \max \quad (14)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_1 - (b_2 - x_{22}) - (b_3 - x_{23}) &\geq 0, & a_2 - x_{22} - x_{23} &\geq 0, \\ b_2 - x_{22} &\geq 0, & b_3 - x_{23} &\geq 0, & x_{22}, x_{23} &\geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$a_2 \geq x_{22} + x_{23} \geq b_2 + b_3 - a_1, \quad b_2 \geq x_{22} \geq 0, \quad b_3 \geq x_{23} \geq 0, \quad (16)$$

или с учетом значения параметров

$$4 \geq x_{22} + x_{23} \geq 2, \quad 4 \geq x_{22} \geq 0, \quad 3 \geq x_{23} \geq 0. \quad (17)$$

Найдем значения компонентов градиента показателя (14):

$$\begin{aligned} I'_{x_{22}}(x) &= -d_{11}(a_1 - b_2 - b_3 + x_{22} + x_{23}) + [c_{11} - d_{11}(a_1 - b_2 - b_3 + x_{22} + x_{23})] + d_{21}(a_2 - x_{22} - x_{23}) - \\ &\quad - [c_{21} - d_{21}(a_2 - x_{22} - x_{23})] + d_{12}(b_2 - x_{22}) - [c_{12} - d_{12}(b_2 - x_{22})] + [c_{22} - 2d_{22}x_{22}] = (c_{22} + c_{11} - \\ &\quad - c_{21} - c_{12}) + 2[d_{21}a_2 + d_{12}b_2 + d_{11}(b_2 + b_3 - a_1)] - 2x_{22}[d_{11} - d_{21} - d_{12} + d_{22}] - 2x_{23}[d_{11} + d_{21}], \\ I'_{x_{23}}(x) &= -d_{11}(a_1 - b_2 - b_3 + x_{22} + x_{23}) + [c_{11} - d_{11}(a_1 - b_2 - b_3 + x_{22} + x_{23})] + d_{21}(a_2 - x_{22} - x_{23}) - \\ &\quad - [c_{21} - d_{21}(a_2 - x_{22} - x_{23})] + d_{13}(b_3 - x_{23}) - [c_{13} - d_{13}(b_3 - x_{23})] + [c_{23} - 2d_{23}x_{23}] = (c_{11} - c_{21} - \\ &\quad - c_{13} + c_{23}) + 2[d_{11}(b_2 + b_3 - a_1) + d_{21}a_2 + d_{13}b_3] - 2x_{22}(d_{11} + d_{21}) - 2x_{23}(d_{11} + d_{21} + d_{13} + d_{23}). \end{aligned}$$

Найдем точку максимума показателя (14) внутри допустимой области, для чего приравняем нулю производные

$$\begin{aligned} I'_{x_{22}}(x) &= -2x_{22} - 5x_{23} + 7 = 0; \\ I'_{x_{23}}(x) &= -5x_{22} - 35x_{23}/3 + 20 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая первое уравнение на 7, а второе — на 3 и вычитая, получаем  $7I'_{x_{22}}(x) - 3I'_{x_{23}}(x) = x_{22} - 11 = 0 \Rightarrow x_{22} = 11$ . Отсюда  $x_{22} = 11 \Rightarrow x_{23} = -15/5 = -3$ .

Изобразив найденную точку на плоскости, убеждаемся, что она вне области (17), изображенной на рис. 1, и ближайшей к ней является точка (4, 0), которая, следовательно, и является решением задачи.

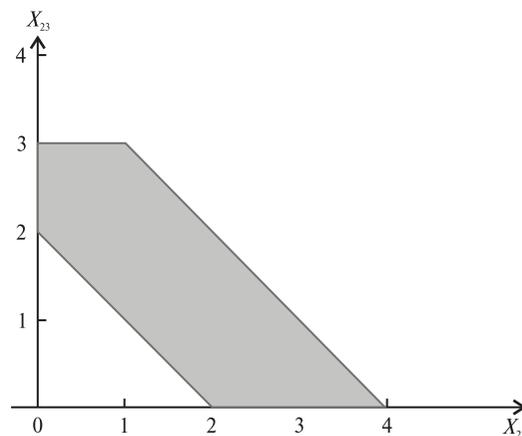


Рис. 1. Допустимая область

Собирая все найденные  $x_{ij}$ , получим приближенное решение квадратичной задачи

$$\|x_{ij}\| = \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ a_i / b_j \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

На основе этого решения квадратичной задачи можно тестировать метод Поляка, используя на каждой итерации формулы для компонентов градиента показателя.

## 5. МЕТОД СУБГРАДИЕНТНОГО ПОДЪЕМА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Рассмотрев задачу максимизации (7), (8), приходим к задаче выпуклого программирования на множестве допустимых значений, заданной системой неравенств:

$$F_k(x) \geq 0, \quad k=1, \dots, l \quad (19)$$

с линейными функциями  $F_k(x)$  и условие принадлежности объемлющему параллелепипеду  $W$ :

$$x_{ij} \in W_{ij} = [0, a_{ij}] \quad \forall(i, j), \quad (20)$$

которую можно свернуть в одно скалярное неравенство при помощи функции

$$\min_{k=1, \dots, l} F_k(x) \geq 0. \quad (21)$$

Такую задачу можно решить методом Поляка (Поляк, 1983):

$$\begin{aligned} x_{ij}^{k+1} &= P_{W_{ij}}(x_{ij}^k + \lambda_k v_{ij}^k) \quad \forall(i, j), \quad k=0, 1, \dots, \\ v^k &\in \begin{cases} \partial I(x^k), F(x^k) \geq 0, \\ \partial F(x^k), F(x^k) < 0, \end{cases} \quad \lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $k$  — номер шага;  $\lambda_k$  — программный шаг метода;  $P_{W_{ij}}(x_{ij})$  — оператор проектирования на компоненту  $W_{ij}$  объемлющего параллелепипеда  $W$ . Очевидно, что множество допустимых решений  $X$  ограничено и имеет внутренние точки. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 259) справедлива следующая теорема сходимости.

**Теорема 2.** *Последовательность  $[x^k]$  в методе (22) сходится к множеству решений задачи минимизации (19)–(21).*

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена практически значимая методология определения загрузки работ по исполнителям на рынке РПО, обеспечивающих учет скидок на опт. Основным результатом работы является постановка ТЗ с КД по стоимости, сведение ее к задаче квадратичного программирования, из которой следует, что ее можно решить методом Поляка. Рассмотрен модельный пример решения ТЗ с КД по стоимости, который можно использовать для тестирования метода Поляка. Получена двойственная постановка задачи и предложен метод сопряженных градиентов для ее решения.

Практическая значимость работы определяется применением в транзакционных платформах на рынке РПО для загрузки заданий по терминологии, обоснованной в работе (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Построена статическая модель загрузки заданий с двумя группами агентов — компаниями—разработчиками ПО и компаниями—заказчиками ПО, которые могут опередить свои резервные цены на рынке повременной аренды разработанного ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Дискриминируемыми агентами являются компании—заказчики ПО, которые оплачивают услуги оператора платформы в виде процентных надбавок, включенных оператором в цену работы компаний—разработчиков ПО. Имеются в виду платформы-рынки, взаимодействие экономических агентов на которых носит эпизодический характер разовых сделок. Предполагается удаленное взаимодействие, т.е. возможность коммуникации между агентами, находящимися на любом расстоянии друг от друга.

Допускается возможность масштабирования, что означает теоретическое отсутствие ограничений для расширения поля взаимодействия (числа пользователей). Такое расширение возможно за счет перекрестного сетевого эффекта, когда численность одного вида пользователей влияет на

численность другого вида (спрос порождает предложение, и наоборот). Предполагается возможность ТПП оказывать влияние на объем коммуникации через уровень и структуру цен. Исходя из базовых характеристик поля взаимодействия платформа РПО относится к двусторонним рынкам. Для одноранговых (peer-to-peer) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021) ТЦП, к которым относятся платформы на рынке РПО, организующих торговые трансакции, непосредственными агентами являются поставщики — агенты, разрабатывающие ПО, и потребители — агенты, использующие разработанное ПО для повременной сдачи в аренду.

Операторы платформы на рынке РПО могут получать доход в виде платы пользователей за покупку, которые, в свою очередь, получают доход в виде платы за временное использование разработанных ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005), цена которого определяет резервные цены потребителей.

Следует отметить, что настоящая статья является продолжением серии статей (Перевозчиков, Лесик, 2014, 2016, 2020, 2021), в части замены базовой статической ТЗ с НДС по времени ТЗ с КД по стоимости, которая может служить фундаментальной основой для построения соответствующих цифровых платформ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А.** (2017). Синтез транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом // *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. № 55. С. 74–90. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2017). Synthesis of the transport system of a multi-node competitive market with variable demand. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 55, 74–90 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А.** (2018). Задача оптимизации транспортной системы энергетического рынка. В сб.: *IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018). Труды*. А.А. Васин, А.Ф. Измаилов (отв. ред.). С. 247–251. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2018). The problem of optimizing the transport system of the energy market. In: *The IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Proceedings*. A.A. Vasin, A.F. Izmailov (resp. eds.), 247–251 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Цыганов Н.И.** (2017). Оптимизация транспортной системы энергетического рынка // *Доклады Академии наук*. Т. 475. № 4. С. 377–381. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Cyganov N.I. (2017). Optimization of the transport system of the energy market. *Doklady Akademii Nauk*, 475, 4, 377–381 (in Russian).]
- Васин А.А., Морозов В.В.** (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс. [Vasin A.A., Morozov V.V. (2005). *Game theory and models of mathematical economics*. Moscow: MAKS Press (in Russian).]
- Корбут А.А., Финкильштейн Ю.Ю.** (1969): Дискретное программирование. Под ред. Д.Б. Юдина. М.: Наука. [Korbut A.A., Finkilstein Yu.Yu. (1969). *Discrete programming*. D.B. Yudin (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Макаров В.Л., Рубинов Ф.М.** (1973). Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука. [Makarov V.L., Rubinov F.M. (1973). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibrium*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Мезоэкономика развития (2011). Под ред. Г.Б. Клейнера. М.: Наука. [Mesoeconomics of development (2011). G.B. Kleiner (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.** (2014). Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия // *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. № 46. С. 76–88. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014). Non-stationary model of investment in fixed assets of the enterprise. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 46, 76–88 (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.** (2016). Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 1. С. 140–148. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2016). Determination of optimal production volumes and sales prices in a linear model of a multi-product monopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 1, 140–148 (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.** (2020). Динамическая модель инвестиций в научные исследования олигополии // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 102–114. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2020).

- A dynamic model of investment in scientific research of an oligopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 102–114 (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.** (2021). Динамическая модель разработки программного обеспечения на основе задачи о назначении на узкие места // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 4. С. 102–114. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2021). A dynamic model of software development based on the problem of assignment to bottlenecks. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 4, 102–114 (in Russian).]
- Поляк Б.Т.** (1983). Введение в оптимизацию. М.: Наука. [Polyak B.T. (1983). *Introduction to optimization*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В.** (2016). Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределительных вычислительных системах // *Системні дослідження та інформаційні технології*. № 2. С. 20–35. [Sergienko A.M., Simonenko V.P., Simonenko A.V. (2016). Improved assignment algorithm for task schedulers in heterogeneous distributed computing systems. *System Research and Information Technologies*, 2, 20–35 (in Russian).]
- Сухарев А.Г., Тимохов, В.В., Федоров В.В.** (1986). Курс методов оптимизации. М.: Наука. [Sukharev A.G., Timokhov V.V., Fedorov V.V. (1986). *Course in optimization methods*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Устюжанина Е.В., Дементьев В.Е., Евсюков С.Г.** (2021). Транзакционные цифровые платформы: задача обеспечения эффективности // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 1. С. 5–18. [Ustyuzhanina E.V., Dementiev V.E., Evsyukov S.G. (2021). Transactional digital platforms: The task of ensuring efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 1, 5–18 (in Russian).]
- Федоров В.В.** (1979). Численные методы максимина. М.: Наука. [Fedorov V.V. (1979). *Numerical methods of maximin*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Финкильштейн Ю.Ю.** (1976). Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука. [Finkilstein Yu.Yu. (1976). *Approximate methods and applied problems of discrete programming*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Форд Л., Фалкерсон Д.** (1966). Потoki в сетях. М.: Мир. [Ford L., Fulkerson D. (1966). *Flows in networks*. Moscow: Mir (in Russian).]
- Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В., Хачатуров Р.В.** (2012). Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 52. № 6. С. 999–1000. [Khachaturov V.R., Khachaturov R.V., Khachaturov R.V. (2012). Optimization of supermodular functions (supermodular programming). *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 52, 6, 999–1000 (in Russian).]
- Balinski M.L.** (1961). Fixed-cost transportation problems. *Naval Res. Log. Quart.*, 8, 1, 41–54.
- Debreu G.** (1954). Valuation equilibrium and Pareto optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 40, 588–592.
- Ding X., Wang K., Gibbons P.B., Zhang X.** (2012). BWS: Balanced work stealing for time-sharing multicores. *Proceedings of the 7-th ACM European Conference on Computer Systems*. EuroSys, 12, 365–378. New York.

## Market static model for software development based on a transport problem with quadratic cost additions

© 2022 I.A. Lesik, A.G. Perevozchikov

**I.A. Lesik,**

*Scientific and production association “Russian Basic Information Technology”, Moscow, Russia;  
e-mail: lesik56@mail.ru*

**A.G. Perevozchikov,**

*Scientific and production association “Russian Basic Information Technology”, Moscow, Russia;  
e-mail: pere501@yandex.ru*

Received 11.03.2022

**Abstract.** The authors propose to formulate a market continuous static model for software development based on the transport problem with quadratic cost additions. In contrast to the existing transport problem with fixed cost surcharges, the authors propose a statement that minimizes the sum of transportation costs, which may contain non-fixed additions proportional to the squares of the volumes of appointments. Thus, a quadratic formulation of the transport problem with non-fixed additions is proposed. It is shown that transport problem with quadratic additions can be reduced to a convex programming problem, which can be solved numerically by the subgradient method, or by the conjugate gradient method for the dual problem. The authors describe the interpretation of transport problem with quadratic additions as an assignment problem with non-fixed price discounts, taking into account the difference between the wholesale and retail prices. This makes possible to apply the set task to build digital platforms in the software development market for loading assignments to performers.

**Keywords:** transport problem with quadratic cost additions, reduction to a convex programming problem, Polyak’s method, dual problem, conjugate directions method.

**JEL Classification:** O12, C51.

For reference: **Lesik I.A., Perevozchikov A.G.** (2022). Market static model for software development based on a transport problem with quadratic cost additions. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 94–101. DOI: 10.31857/S042473880021697-5

===== МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ =====

**Математическое моделирование многопродуктового рассредоточенного рынка  
в системе мирового хозяйства**

© 2022 г. А.Г. Коваленко, А.В. Злотов

**А.Г. Коваленко,**

*Самарский Государственный университет; Самара, e-mail: alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru*

**А.В. Злотов,**

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; Москва; e-mail: Zlot\_a@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.12.2021

**Аннотация.** В статье строятся математические модели, которые являются развитием модели экономики Вальраса, как централизованной, так и децентрализованной пространственно-рассредоточенной экономической системы с взаимодействиями субъектов совершенной и несовершенной конкуренции. Новизна данной модели определяется введением в модели субъектов рынка: 1) домашних хозяйств, с описанием их функционирования с помощью функций полезности, эти хозяйства для своего существования потребляют ресурсы — различные виды товаров, а для получения товаров производят различные виды труда; 2) многопродуктовых предприятий, покупающих различные виды товарных и трудовых ресурсов; 3) перекупщиков, распространяющих продукты между локальными рынками и осуществляющих перемещение различных видов труда по транспортной сети от домашних хозяйств до предприятий. При поиске состояния равновесия используются задачи субъектов рынков в экстремальных постановках. Организуя различные виды взаимодействий субъектов на товарных рынках, строятся рынки как совершенной, так и несовершенной конкуренции. Разработаны численные методов анализа описанных моделей. Численные методы поиска состояния равновесия рассматриваемых моделей строятся на основе методов векторной оптимизации.

**Ключевые слова:** модель Эрроу–Дебре, несовершенная и совершенная конкуренция, домашние хозяйства, предприятия, перекупщики, сетевые задачи, теория гидравлических систем, поиск состояний равновесия.

**Классификация JEL:** C02.

Для цитирования: **Коваленко А.Г., Злотов А.В.** (2022). Математическое моделирование многопродуктового рассредоточенного рынка в системе мирового хозяйства // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 102–114. DOI: 10.31857/S042473880021698-6

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания экономической системы и существования ее равновесия была изложена еще в работе Л. Вальраса (Вальрас, 2000, с. 448). В ней он писал, что «эта теория является математической, изложение и доказательство существования равновесия должно быть математическим». Моделям рынков несовершенной конкуренции (анализ рыночной власти и ее регулирование) посвящены работы нобелевских лауреатов К. Дж. Эрроу и Ж. Дебре (см. (Никайдо, 1972, с. 514)), а моделям рынков несовершенной конкуренции — нобелевского лауреата Ж. Тироля (Тироль, 1996). Однако в построенных ими моделях отсутствует пространственно-ценовая дифференциация рынков.

Данная статья посвящена следующему этапу развития моделей рассредоточенного рынка. В экономической системе взаимовлияние субъектов зависит от степени удаленности, лидерства в пределах локального рынка, взаимного расположения в структуре связей системы. Большое число локальных рынков и возможность варьирования в них субъектами, владеющими стратегической переменной, дают огромное количество вариантов рыночных структур. Для анализа этих структур мы предлагаем численные методы оптимизации, численные методы ТГС (Меренков, Хасилев, 1985), теории игр. Применение численных методов для анализа экономических систем привнес В. Леонтьев (Leontief, 1985), который применял эти методы для моделей межотраслевого баланса.

## 1. ОПИСАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Модель экономической системы состоит из следующих подсистем.

– Множества *домашних хозяйств*, основой существования которых является потребление продукции, покупаемой на различных рынках. Бюджетные средства, на которые покупаются товары, домашние хозяйства получают за счет продажи своего труда, а также за счет акций от предприятий, акций от перекупщиков, осуществляющих куплю–продажу товаров.

– Множества *предприятий*, потребляющих:

а) труд домашних хозяйств (обмен «деньги — труд» осуществляется на рассредоточенных рынках труда);

б) товары — ресурсы, выпускаемые другими предприятиями (товарно-денежный обмен на рассредоточенных товарных рынках);

в) ресурсы территории, на которой они находятся;

г) прибыль предприятий распределяется на оплату труда, оплату приобретаемых ресурсов, оплату по акциям домашних хозяйств–собственников предприятий.

– Множества *перекупщиков*, которые покупают товары у предприятий; перепродают их, транспортируют товары посредством соответствующей транспортной системы и продают домашним хозяйствам;

– *Транспортной системы*, по которым носители труда (представители домашних хозяйств) несут свой труд от мест проживания до мест потребления (предприятий), взамен получая оплату за труд.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СУБЪЕКТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### 2.1. Модели поведения домашних хозяйств на основе функций полезности в структуре экономической системы

В соответствии с современным представлением экономической теории под домашним хозяйством будем понимать совокупность лиц, совместно добывающих и потребляющих необходимые предметы (блага) существования. Домашнее хозяйство может состоять из одного человека, живущего самостоятельно. Деятельность, направленную на добычу средств существования, будем называть *трудом*. Использование, применение добытых предметов существования будем называть *потреблением*. Домашнее хозяйство — это низший, неделимый субъект экономической системы.

Пусть  $W$  — конечное множество видов товаров экономической системы;  $w$  — вид товара,  $w \in W$ ;  $L$  — конечное множество видов труда экономической системы;  $l$  — вид труда. Математические модели домашних хозяйств в микроэкономическом анализе широко известны (Гальперин, Игнатъев, Моргунов, 2000г). Модели строятся на основе теории бинарных отношений, задаваемых в пространствах векторов потребления и труда. Эти отношения позволяют строить так называемые порядковые функции полезности, максимизация которых при бюджетном ограничении описывает задачу потребителя.

Но возникает вопрос, откуда берется бюджет. Его нужно заработать, т.е. за счет труда. Современная микроэкономика использует естественное деление предметов (так как дальнейший анализ связан с обменом, то будем применять термин «товар») потребления на отдельные виды. И для каждого вида существует соответствующая единица измерения, позволяющая проводить количественное сравнение векторов товаров в пределах одного вида.

Сложнее дело обстоит с моделями труда. Труд — деятельность, направленная, прямо или косвенно, на приобретение товаров потребления. Естественным является деление труда на отдельные виды. Под видом труда будем понимать однородные деятельности, неотличимые друг от друга (например, деятельность слесарей, токарей, плотников и т.д.). Виды деятельности могут делиться на подвиды. Будем считать, что такое разбиение конечно. Характерной чертой вида труда служит возможность его измерения. Наиболее естественной (но не обязательной) единицей измерения физических видов труда при производстве той или иной продукции служит объем затрачиваемой энергии, или затрачиваемого времени. Будем считать, что каждый вид труда измеряется в условных единицах (у.е.). Два вида можно считать одинаковыми, если они могут производить одинаковую продукцию и различие может быть лишь в затратах (энергии/времени).

Обозначим через  $xw$  вектор товаров потребления,  $xl$  — вектор выполняемого труда, тогда каждая компонента вектора  $x = (xw, xl)$  имеет свою единицу измерения. Если  $XW$  — пространство видов предметов потребления, пространство  $XL$  — видов труда, то прямое произведение  $X = XW \times XL$  этих пространств дает полное пространство, описывающее состояние экономической системы.

Будем считать, что для любого домашнего хозяйства в пространстве  $X$  можно определить бинарное отношение строгого порядка «>»<sup>1</sup> и порядка эквивалентности «≈», устанавливающее предпочтение на нем, что позволяет построить функцию полезности  $u = u(x) = u(xw, xl)$ .

Обозначим через  $DX$  множество домашних хозяйств в экономической системе. Пусть  $i \in DX$ . Считаем, что для любых  $x, y \in X$  домашнее хозяйство  $i$  либо  $x \succ_i y$ , либо  $y \succ_i x$ , либо  $x \approx_i y$ . Введенный порядок позволяет получить функцию полезности  $u_i = u_i(x) = u_i(xw, xl)$ . Обычно для домашнего хозяйства вектор  $xw \in XW$  является благом,  $xl \in XL$  — антиблагом.

Так как каждому  $i$  принадлежит свой вектор товаров и свой вектор видов труда, будем применять  $XW_i$  и  $XL_i$ .

Каждое домашнее хозяйство узла  $i \in DX$  на суммарный доход приобретает товары потребления и поставляет свой труд на рынки труда. Суммарный доход состоит из: 1) дохода  $D_i^1$  от продажи своих видов труда; 2) дохода  $D_i^2$  от владения акциями предприятий (сюда входят вложения в предприятия и перекупщиков в предыдущие периоды); 3) дохода  $D_i^3$  от владения акциями перекупщиков.

Будем считать, что каждое домашнее хозяйство  $i \in DX$  в результате своей деятельности максимизирует свою полезность. Максимум полезности домашнего хозяйства будет иметь вид

$$u_i = u_i(x) = u_i((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}, (xl_v)_{v \in V_L^-(i)}) \rightarrow \max_{\Theta_{DX}(i)},$$

где  $\Theta_{DX}(i)$  — вектор переменных (параметров), по которым проводится оптимизация, в частности  $\Theta_{DX}(i) = ((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}; (xl_v)_{v \in V_L^-(i)})$ ;  $V_W^+(i)$  — множество дуг, по которым товар поступает с товарных рынков;  $V_L^-(i)$  — множество дуг, по которым труд выходит на рынки труда. Для  $v \in V_W^+(i)$  цена товара, поступающего по дуге  $v$  из узла  $hl(v)$ , равна  $P_{hl(v)}$ , поэтому затраты на приобретение товаров будут иметь вид  $\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{hl(v)} xw_v$ , а бюджетное ограничение —  $\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{hl(v)} xw_v \leq D_i^1 + D_i^2 + D_i^3$ .

**Доход от продажи труда.** Первая часть от продажи труда вычисляется по зависимости  $D_i^1 = \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} xl_v$ , где  $V_L^-(i)$  — множество дуг, выходящих из узла  $i$  в узлы рынков труда  $h2(v)$ ,  $v \in V_L^-(i)$ ;  $P_{h2(v)}$  — цена труда в этих узлах.

**Доход по акциям предприятий.** Обозначим через  $J_i$  множество предприятий, акционером которого является домашнее хозяйство  $i$ ,  $J_i \subset PR$ . Пусть для предприятия  $j$ ,  $j \in J_i$ , прибыль равна  $\pi_j$ ;  $I_j$  — множество домашних хозяйств-акционеров предприятия  $j$ , между которыми распределяется эта прибыль;  $\alpha_j^k$  — доля прибыли, получаемая домашним хозяйством  $k$  от предприятия  $j$ . Коэффициенты  $\alpha_j^k$  должны обладать свойствами  $\sum_{k \in I_j} \alpha_j^k = 1$ ,  $\alpha_j^k \geq 0$ ,  $k \in I_j$ . Тогда вторая часть бюджета домашнего хозяйства будет равна  $D_i^2 = \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j$ .

**Доход по акциям от перекупщиков.** Пусть  $w$  — некоторый продукт,  $w \in W$ ,  $u$  — перекупщик этого товара,  $u \in V_W$ ;  $VW = \bigcup_{w \in W} V_w$  — множество всех перекупщиков;  $JV_i$  — множество перекупщиков, акционером которого является домашнее хозяйство  $i$ . Возьмем перекупщика  $ju \in JV_i$ , его прибыль как перекупщика равна  $\pi_{ju}$ ;  $IV_{ju}$  — множество домашних хозяйств-акционеров перекупщика  $ju$ , между которыми распределяется эта прибыль;  $\beta_{ju}^k$  — доля прибыли, получаемая домашним хозяйством  $k$  от перекупщика  $ju$ . Коэффициенты  $\beta_{ju}^k$  должны обладать свойствами:  $\sum_{k \in IV_{ju}} \beta_{ju}^k = 1$ ,  $\beta_{ju}^k \geq 0$ ,  $k \in IV_{ju}$ . Тогда третья часть бюджета домашнего хозяйства будет равна  $D_i^3 = \sum_{ju \in JV_i} \beta_{ju}^i \pi_{ju}$ .

**Задача домашнего хозяйства.** Для узла  $i$  задача домашнего хозяйства  $DX(i)$  определяется как

$$u_i = u_i(x) = u_i((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}, (xl_v)_{v \in V_L^-(i)}) \rightarrow \max_{\Theta_{DX}(i)} \quad (1)$$

при бюджетном ограничении

$$\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{hl(v)} xw_v \leq \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} xl_v + \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j + \sum_{ju \in JV_i} \beta_{ju}^i \pi_{ju}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Например, запись  $x \succ_i y$  означает, что  $x$  предпочтительнее  $y$  для домашнего хозяйства  $i$ .

Так как мы считаем, что домашние хозяйства непосредственно связаны дугами с узлами локальных рынков экономической системы, потоки по дугам обозначены  $q_v$ , начало дуги —  $hl(v)$ , конец дуги —  $h2(v)$ , то можем записать задачу домашнего хозяйства ДХ( $i$ ) как

$$\begin{cases} u_i = u_i(x) = u_i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}; (q_v)_{v \in V_L^-(i)}) \rightarrow \max_{(q_v)_{v \in V_W^+(i)}; (q_v)_{v \in V_L^-(i)}}, \\ \sum_{v \in V_W^+(i)} P_{hl(v)} q_v \leq \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} q_v + \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j + \sum_{j \in J_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv}. \end{cases} \quad (3)$$

Для дуги  $v \in V_W^+(i)$  узел  $hl(v)$  принадлежит рынку товара  $w$ , для которого  $hl(v) \in E_w$ ; для дуги  $v \in V_L^-(i)$  узел  $h2(v)$  принадлежит рынку труда  $l$ , для которого узел  $h2(v) \in E^l$ .

**2.2. Модели поведения предприятий на основе функций полезности в структуре экономической системы**

Пусть ПР — множество предприятий экономической системы, которые выпускают товары из множества  $W$ . Каждое предприятие может выпускать несколько видов товаров. Для узла  $i \in \text{ПР}$ , ПР( $i$ ) — предприятие узла  $i$ ;  $V_W^-(i)$  — множество дуг, по которым предприятие ПР( $i$ ) отправляет произведенный товар на соответствующие рынки.

Для любой дуги  $v \in V_W^-(i)$  начало  $hl(v) = i$ . Конец дуги  $j = h2(v)$  принадлежит множеству  $E_w$  рынка  $R_w$  товара  $w$ ,  $w \in W$ . Дуга  $v$  определяет вид товара, отправляемого из предприятия.

Обозначим через  $V_W^+(i)$  — множество дуг, по которым на предприятие ПР( $i$ ) поступают товары в качестве потребляемых ресурсов. Для любой дуги  $v \in V_W^+(i)$  имеем  $h2(v) = i$ . Начало дуги  $j = hl(v) \in E_w$  рынка  $R_w$  товара  $w \in W$ . Дуга  $v$  определяет вид товара, получаемого предприятием. Подробное описание товарных рынков будет приведено далее.

В производстве товаров предприятием ПР( $i$ ) принимают участие различные виды труда. Обозначим через  $V_L^+(i)$  — множество дуг, по которым поступает труд на это предприятие. Пусть  $v \in V_L^+(i)$ ,  $j = hl(v)$ . Среди множества видов труда найдется такой вид  $l \in L$ , что  $j \in E_l$ , где  $E_l$  — множество узлов конечного ориентированного графа  $G_l = \langle E_l, V_l, H_l \rangle$ , описывающего структуру связей локальных рынков труда вида  $l$ . Подробно структуры рынков труда будут описаны далее.

Пусть  $v \in V_W^-(i)$ ,  $q_v$  — объем продукта, отправляемого по дуге  $v$  в узел  $j = h2(v)$ . Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов  $E_w$ ,  $w \in W$ . Аналогично, если  $v \in V_W^+(i)$ , то  $q_v$  — объем продукта, получаемого в качестве потребляемого ресурса по дуге  $v$  из узла  $j = hl(v)$ . Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов  $E_w$ ,  $w \in W$ .

Вектор собственных ресурсов территории, принадлежащей предприятию, обозначим через  $r_i$ , ( $r_i \leq_i \bar{r}_i$ ), где  $r_i$  — предельный объем ресурсов предприятия,  $\leq_i$  — знак неравенства в пространстве, размерности вектора  $r_i$ . Модель выпуска товаров запишем как  $(q_v)_{v \in V_W^-(i)} \in F^i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)$ , где  $F^i$  — множество достижимости объемов выпускаемой продукции при заданных значениях аргументов  $((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)$ . Вектор собственных ресурсов  $r_i$  можно интерпретировать как ресурсы, добываемые на территории и распределяемые для потребления (вообще говоря, в переработанном виде) на других предприятиях и по домашним хозяйствам экономической системы.

**Задача предприятия ПР( $i$ ).**

$$\pi_i = \sum_{v \in V_W^-(i)} P_{h2(v)} q_v - \left( \sum_{v \in V_W^+(i)} P_{hl(v)} q_v + \sum_{v \in V_L^+(i)} P_{hl(v)} q_v + \langle P_n r_i, r_i \rangle \right) \rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПР}}(i)} \quad (4)$$

при ограничениях

$$(q_v)_{v \in V_W^-(i)} \in F^i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i), \quad r_i \leq_i \bar{r}_i,$$

где  $\Theta_{\text{ПР}}(i)$  — список переменных, по которым берется максимум. Так, на рынках, в которых предприятие является монополистом, в этот список, помимо прочих, могут войти переменные  $P_{h2(v)}$ ,  $v \in V_W^-(i)$ ,  $P_{hl(v)}$ ,  $v \in V_W^+(i)$ ,  $P_{hl(v)}$ ,  $v \in V_L^+(i)$ .

**2.3. Модели поведения перекупщиков на основе функций полезности в структуре экономической системы**

Пусть  $w$  — вид товара,  $w \in W$ . Этому виду товара соответствует рассредоточенный рынок  $R_w$ , имеющий структуру, задаваемую графом  $G_w = \langle E_w, V_w, H_w \rangle$ . Рассмотрим дугу  $v \in V_w$ . Будем считать,

что  $P_{h2(v)} \geq P_{h1(v)}$ , или  $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)} \geq 0)$ . В этом случае перекупщик ПРК( $v$ ), соответствующий дуге  $v$ , покупает товар (и становится его собственником) в объеме  $q_v \geq 0$  на рынке узла  $h1(v)$  по цене  $P_{h1(v)}$ , транспортирует и продает на рынке узла  $h2(v)$  по цене  $P_{h2(v)}$ . Прибыль перекупщика будет иметь вид

$$F_v = P_{h2(v)}q_v - \left( P_{h1(v)}q_v + \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right).$$

Первое слагаемое — выручка от продажи в узле  $h2(v)$ , второе — издержки, которые содержат покупку товара в узле  $h1(v)$ ; покупку ресурсов на рынках  $h1(u)$ ,  $u \in V_v^+$  где  $V_v^+$  — множество дуг, по которым поступают ресурсы; стоимость ресурсов, являющихся собственностью перекупщика,  $r_v$  — искомый вектор объемов ресурсов, используемых при транспорте купленной продукции,  $r_v$  — вектор максимальных объемов этих ресурсов,  $Pr_v$  — вектор цен на эти ресурсы, компоненты вектора цен являются внешними переменными.

После преобразования получим

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left( \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right).$$

Задача перекупщика ПРК( $v$ ) примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left( \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)}, 0 \leq q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}, r_v), \\ 0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v,$$

где  $f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}, r_v)$  — производственная функция, ограничивающая объем перевозки;  $\Theta_{\text{ПРК}}(v)$  — перечень параметров, по которым берется максимум.

Пусть  $P_{h2(v)} \leq P_{h1(v)}$ . В этом случае перекупщик покупает товар (становится его собственником) в объеме  $q_v$  в узле  $h2(v)$  по цене  $P_{h2(v)}$ , транспортирует в узел  $h1(v)$  и продает по цене  $P_{h1(v)}$ . Так как поток движется от конца дуги к ее началу, то  $q_v \leq 0$ . Прибыль перекупщика будет иметь вид

$$F_v = P_{h1(v)}(-q_v) - \left( P_{h2(v)}(-q_v) + \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right),$$

где первое слагаемое — это выручка от всей операции, второе — издержки. После несложных преобразований получаем:

$$F_v = -(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left( \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right).$$

Экстремальная задача перекупщика примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left( \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)}, \\ 0 \leq -q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}, r_v), \\ 0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v.$$

Объединяя оба случая, получим задачу перекупщика ПРК( $v$ )

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})q_v - \left( \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)}q_{h1(u)} + \langle Pr_v, r_v \rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{\text{ПРК}}(v)}, \\ |q_v| \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}, r_v), \\ 0_v \leq_v r_v \leq_v \bar{r}_v, \\ \text{sign}(y_v) = \text{sign}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}), \quad (5)$$

где  $|q_v|$  — объем перевозок по дуге  $v$ , ограничиваемый значением производственной функции  $f_v$ ; знак  $q_v$  совпадает со знаком  $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$  и определяет направление движения потока по дуге; покупка ресурсов на рынках  $h1(u)$ ,  $u \in V_v^+$ , где  $V_v^+$  — множество дуг, по которым поступают ресурсы;  $r_v$  — искомый вектор объемов ресурсов, который используется при транспорте купленной продукции;  $Pr_v$  — стоимость ресурсов перекупщика, т.е. вектором цен на ресурсы являются внешние переменные;  $r_v$  — вектор максимальных объемов этих ресурсов,  $\Theta_{\text{ПРК}}(v)$  — список параметров перекупщика дуги  $v$ , по которым ведется максимизация, в этот список, в зависимости от структуры локального рынка, могут входить переменные  $P_{h2(v)}$ ,  $P_{h1(v)}$ ,  $q_v$ , компоненты вектора  $r_v$ .

**Замечание.** В модели считается, что связь предприятий, перекупщиков и домашних хозяйств с локальным рынком осуществляется без посредников (перекупщиков).

3. ПРОСТРАНСТВЕННО РАССРЕДОТОЧЕННЫЕ ТОВАРНЫЕ РЫНКИ

3.1. Описание структуры модели

Пусть как и выше,  $W$  — множество видов товаров экономической системы. Каждому виду  $w \in W$  рынка соответствует свой однопродуктовый пространственно-рассредоточенный рынок  $R_w$ . Структуру рынка задаем ориентированным графом  $G_w = \langle E_w, V_w, H_w \rangle$ , где  $E_w$  — множество узлов, осуществляющих обмен товаром;  $V_w$  — множество дуг — перекупщиков товара;  $H_w$  — отображение для дуг  $H_w(v) = (h1(v), h2(v))$ ,  $h1(v)$  — узел, начало дуги  $v$ ;  $h2(v)$  — узел, конец дуги  $v$ .

Каждому  $i \in E_w$  поставим в соответствие переменную  $P_i$ , которая обозначает цену обмена товара. Каждому  $v \in V_w$  соответствует переменная  $q_v$  — объем перевозимого перекупщиком товара,  $q_v \geq 0$ , если направление потока совпадает с направлением дуги,  $q_v < 0$ , в противном случае. Переменная  $q_v$  определяется моделью перекупщика этой дуги.

3.2. Граничные условия, условия продуктового баланса однопродуктового рынка товара

Разобьем множество узлов  $E_w$  товара  $w$  на 3 непересекающиеся части:  $E_w = E_w^1 \& E_w^2 \& E_w^3$ , где  $E_w^1 \cap E_w^2 = \emptyset$ ,  $E_w^1 \cap E_w^3 = \emptyset$ ,  $E_w^2 \cap E_w^3 = \emptyset$ ,

$$\begin{cases} z_i - \text{свободная переменная,} \\ P_i - \text{константа, } P_i = P_i^*, \end{cases} \quad i \in E_w^1; \tag{6}$$

$$\begin{cases} z_i - \text{константа, } z_i = B_i^*, \\ P_i - \text{свободная переменная,} \end{cases} \quad i \in E_w^2; \tag{7}$$

$$z_i = B_i^*(P_i), \quad i \in E_w^3. \tag{8}$$

Для  $z_i = B_i^*(P_i)$  эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. В условиях равновесия выполняется равенство

$$\left( \sum_{v \in V^+} q_v - \sum_{v \in V^-} q_v \right) + \left( \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v \right) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v = z_i, \quad i \in E_w^2 \cup E_w^3. \tag{9}$$

Здесь первое слагаемое обозначает сумму потоков, которые ввозят перекупщики в узел, за вычетом потоков, которые вывозят перекупщики из узла;  $V^+(i)$  — множество дуг, входящих в узел  $i$ ,  $V^-(i)$  — множество дуг, выходящих из узла  $i$ . Второе слагаемое — сумма потоков товаров узлов  $h1(v)$ ,  $v \in V_{\text{ПР}}^+(i)$ , ввозимых для продажи в узел  $i$ , минус потоки товара, которые вывозят предприятия  $h2(v)$ ,  $v \in V_{\text{ПР}}^-(i)$  из узла  $i$ . Эти предприятия используют вывозимые потоки как ресурсы для своего производства. Третье слагаемое — сумма потоков товаров, которые вывозят перекупщики из узла и используют как ресурсы для транспорта товара. Дуги  $v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)$  нестандартного определения, начало дуги  $h1(v)$  — это узел  $i$ , конец дуги —  $h2(v)$ , который так же является дугой из множества ПРК. Четвертое — сумма потоков товаров, которые вывозят домашние хозяйства для потребления. Начало дуги  $v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)$  является узлом  $i$ , т.е.  $h1(v) = i$ .

Выражение, стоящее в (9) справа — внешнеторговый баланс. Для узлов  $i \in E_w^1$  в состоянии равновесия внешнеторговый баланс является величиной расчетной и вычисляется выражением

$$\left( \sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v \right) + \left( \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v \right) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v = z_i, \quad i \in E_w^1. \tag{10}$$

3.3. Баланс денежных потоков в узлах рынков

В узлах осуществляется товарно-денежный обмен, вместе с движением товаров происходит перенос их эквивалентной стоимости. Расчет эквивалентной стоимости обмена товаров выводится из соотношения (9):

$$\left( \sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i \right) + \left( \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v P_i \right) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v P_i = z_i P_i$$

или

$$\left( \sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} q_v P_i \right) - \left( \sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v P_i \right) = z_i P_i.$$

Направление движения денежных потоков, которые участвуют в обмене, противоположно направлению товарных движений потоков. Отметим, что если система замкнутая, т.е.  $z_i = 0$ , то

$$\left( \sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} q_v P_i \right) - \left( \sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)} q_v P_i \right) = 0.$$

#### 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТРУДА В ЭКОНОМИКО-ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МИРОВОГО ХОЗЯЙСТВА

##### 4.1. Описательная модель

В основу построения модели пространственно рассредоточенного рынка труда положим модель передвижения носителей видов труда между источниками труда — домашними хозяйствами, и потребителями труда — предприятиями. Для описания структуры рынков труда, как и при описании товарных рынков, воспользуемся понятием графа. Каждому виду труда  $l \in L$  соответствует свой граф  $G_l$ . В нем узлы — локальные рынки труда — места непосредственной связи рынков с предприятиями, и места пересадок при движении по транспортной сети. Рынками труда пользуются и перекупщики, поэтому в граф добавляются нестандартные дуги, начало которых находится в узле — рынке труда, конец — дуга, соответствующая перекупщику. Будем считать, что остановочные пункты находятся в непосредственной близости от потребителей и поставщиков труда. Такой подход не умаляет связи с действительностью. Одному и тому же участку транспортной сети может соответствовать несколько различных дуг графа различных видов труда.

##### 4.2. Математическая модель рынка труда

Как и выше,  $L$  — конечное множество видов труда экономико-географической системы. Пусть  $l \in L$ , рассредоточенный рынок труда  $l$  обозначим  $R_l$ . Ему соответствует конечный ориентированный граф  $G_l = \langle E_l, V_l, H_l \rangle$ , описывающий структуру связей локальных рынков труда вида  $l$ ;  $E_l$  — остановочные пункты и пункты пересадок, где носители труда могут сменить маршрут движения. Пусть  $i \in E_l$ ,  $V^+(i)$ ,  $V^-(i)$  — множества дуг соответственно входящих и выходящих из узла  $i$  в инцидентные узлы из  $E_l$ , через  $V_{\text{ДХ}}^+(i)$ ,  $V_{\text{ПР}}^-(i)$ ,  $V_{\text{ПРК}}^-(i)$  обозначены множества дуг соответственно входящих в домашние хозяйства (множество ДХ) и выходящих в направлении предприятий (множество ПР) и в направлении перекупщиков (множество ПРК). Обозначим через  $P_i$  цену труда в узле  $i$ , для  $v \in V_l$ ,  $q_v$  — величина потока труда вида  $l$ , перемещаемого по дуге  $v$ .

##### 4.3. Ценовая взаимосвязь субъектов рынков труда

Возможны 2 случая:

**Случай 1.**  $P(h2(v)) \geq P(h1(v))$ , поток движется от узла  $h1(v)$  к  $h2(v)$ , поэтому  $q_v \geq 0$ . Обозначим через  $\theta_v(q_v)$  — стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке  $q_v$  по дуге  $v$ . В состоянии равновесия будет выполняться  $P(h2(v)) = P(h1(v)) + \theta_v(q_v)$ .

**Случай 2.**  $P(h2(v)) < P(h1(v))$ , поток труда движется от узла  $h2(v)$  к узлу  $h1(v)$ . В этом случае  $q_v < 0$ ,  $\theta_v(-q_v)$  — стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке  $q_v$  по дуге  $v$ . В состоянии равновесия будет выполняться  $P(h1(v)) = P(h2(v)) + \theta_v(-q_v)$ .

Объединяя оба случая, получаем, что для любого  $q_v$ :

$$P(h2(v)) - P(h1(v)) = \text{sign}(q_v) \theta_v(|q_v|)$$

или

$$\theta_v(|q_v|) = \text{sign}(P(h2(v)) - P(h1(v))) (P(h2(v)) - P(h1(v))).$$

Обозначим через  $\theta_v^{-1}$  — обратную функцию для  $\theta_v$ , тогда

$$|q_v| = \theta_v^{-1} |P(h2(v)) - P(h1(v))| \text{ или } q_v = \text{sign}(P(h2(v)) - P(h1(v))) \theta_v^{-1} |P(h2(v)) - P(h1(v))|.$$

Если  $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$ , предыдущую зависимость можно записать

$$q_v = \text{sign}(\Delta_v) \theta_v^{-1}(\Delta_v). \quad (11)$$

##### 4.4. Граничные условия

Пусть  $E_l = E_l^1 \cup E_l^2 \cup E_l^3$ , где  $E_l^1 \cap E_l^2 = \emptyset$ ,  $E_l^1 \cap E_l^3 = \emptyset$ ,  $E_l^2 \cap E_l^3 = \emptyset$ . На рынке труда:

$$\begin{cases} z_i - \text{свободная переменная,} \\ P_i - \text{константа, } P_i = P_i^*, \end{cases} \quad i \in E_l^1; \quad (12)$$

$$\begin{cases} z_i - \text{константа, } z_i = B_i^* \\ P_i - \text{свободная переменная,} \end{cases} \quad i \in E_i^2; \quad (13)$$

$$z_i = B_i^*(P_i), \quad i \in E_i^3. \quad (14)$$

Для  $i \in E_i^3$  внешнеторговый баланс  $z_i$  связан с ценой  $P_i$  функцией  $B_i^*(P_i)$ . Для этой функции эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. Соотношения (12) соответствуют случаю, когда моделируемая система не может повлиять на цены систем узлов  $i \in E_i^1$ , соотношения (13) соответствуют случаю, когда объем потребления (поставки) узлами  $i \in E_i^2$  постоянный и не зависит от цены равновесия в узле.

#### 4.5. Узловой баланс труда

Пусть  $i \in E_i \setminus E_i^1$  (т.е.  $i \in E_i^2 \cup E_i^3$ ),  $v \in (V^+(i) \cup V^-(i)) \cup (\cup_{\text{ДХ}}^+(i) \cup V_{\text{ПР}}^-(i)) \cup V_{\text{ПРК}}^-(i)$ , для каждого  $i \in E_i$  в состоянии равновесия выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v &= B_i(P_i). \\ \text{Для } i \in E_i^1 \quad \sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} q_v - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} q_v &= z_i, \end{aligned} \quad (15)$$

которое является формулой расчета экспортно-импортного сальдо.

### 5. УЗЛОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ В МОДЕЛИ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИКО-ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МИРОВОГО ХОЗЯЙСТВА

#### 5.1. Продуктовый баланс в виде экстремальной задачи

«Невидимая рука» локального продуктового рынка. Рассмотрим произвольный вид товара  $w \in W$ ,  $i \in E_w^2 \cup E_w^3$ . Узлы  $i \in E_w^1$  не берем, так как для них переменная  $P_i$  — константа, на переменную  $z_i$  ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (10).

Зафиксируем для всех узлов–товарных рынков  $j \in E_w \setminus \{i\}$  и всех рынков труда  $j \in E_i$  значение цены  $P_j$ . Переменные  $P_j$ ,  $j \in (E_w \setminus \{i\}) \cup E_i$ , дальше будем обозначать  $P_{-i}$ . Если в узле  $i$  рынок — совершенная конкуренция, то переменная  $P_i$  независимая, переменные  $P_{-i}$  ее функции, и (9) можно записать

$$F = \left( \sum_{v \in V^+(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V^-(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) \right) + \left( \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^+(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) \right), \quad (16)$$

где  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  — функция отклика потока товара на переменную  $P_i$  при постоянных значениях переменных  $P_{-i}$  для:  $V^+(i)$  — перекупщиков-продавцов в узел  $i$  на цену  $P_i$ ;  $V^-(i)$  — перекупщиков-покупателей из узла  $i$  на цену  $P_i$ ;  $v \in V_{\text{ПР}}^+(i)$  — предприятий  $h1(v)$ -продавцов на цену  $P_i$ ;  $v \in V_{\text{ПР}}^-(i)$  — предприятий  $h2(v)$ -покупателей на цену  $P_i$ ;  $v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)$  — перекупщиков  $h2(v)$  покупателей на цену  $P_i$ ;  $v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)$  — домашних хозяйств  $h2(v)$  на цену  $P_i$ .

Левую часть равенства (16) будем называть *небалансом* в узле  $i$  при цене  $P_i$  и обозначать  $N_i(P_i, P_{-i})$ , тогда (16) примет вид

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0. \quad (17)$$

В дальнейшем уравнения (17) будем называть для узла  $i$  центральными.

**Определение НР1.** Будем говорить, что узел  $i$  находится в состоянии равновесия при цене  $P_i^*$  при фиксированных  $P_{-i}$ , если выполняется  $N_i(P_i^*, P_{-i}) = 0$ . Значение  $P_i^*$  будем называть равновесной ценой рынка узла  $i$  при фиксированных  $P_{-i}$ .

**Определение НР2.** Будем говорить, что экономическая система находится в состоянии равновесия, если все товарные рынки и рынки труда находятся в состоянии равновесия.

Таким образом, из задач домашнего хозяйства (3); задачи предприятий (4); задачи перекупщика (15) и из условий на границах связи с другими экономическими системами (граничных условий) (6)–(8) и продуктового баланса (9), (10) получаем эквивалентную задачу, состоящую из граничных условий (6)–(8) и системы узловых уравнений (17).

Пусть  $\bar{P}_j, j \in E_w^1 \cup E_w^2 \cup E_w^3$  — решение системы узловых уравнений (17) и граничных условий (11)–(14), тогда  $\forall i \in E_w^2 \cup E_w^3 \bar{P}_i$  является решением одного уравнения

$$N_i(P_i, \bar{P}_{-i}) = 0 \quad (18)$$

с одним неизвестным —  $P_i$ . Задачу (18) поиска состояния равновесия в узле можно записать в виде экстремальной задачи

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V^+(i)} \text{sign}(P_i - P_{h1(v)}) \theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sign}(P_{h2(v)} - P_i) \theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \\ + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} (q_v) = B_i(P_i). \end{aligned} \quad (19)$$

Если  $N_i(P_i, \bar{P}_{-i}) = 0$ , то в (19) имеем  $NB_i(\bar{P}_i, \bar{P}_{-i}) = 0$ . Учитывая, что  $NB_i(P_i) \geq 0$ , получаем, что  $\bar{P}_i$  — оптимальное решение (19).

Справедливо в обратную сторону: если в задаче (19)  $\bar{P}_i$  оптимальное решение и  $NB_i(\bar{P}_i, \bar{P}_{-i}) = 0$ , то  $N_i(\bar{P}_i, \bar{P}_{-i}) = 0$ , т.е. выполняется (18).

Используя термин Адама Смита, задачу (19) будем называть задачей «невидимой руки рынка» узла  $i \in E_w^2 \cup E_w^3$ . Если в некотором узле  $i \in E_w^2 \cup E_w^3$  значение  $P_i$  оказалось таким, что  $NB_i(P_i, \bar{P}_{-i}) > 0$ , то «невидимая рука рынка» осуществляет переход узла к такой цене  $P_i'$ , при которой  $NB_i(P_i', \bar{P}_{-i})$  будет минимальной, т.е. стремиться к состоянию равновесия. Равновесие во всей сети будет соответствовать ценам  $P_i^*, i \in E_w^2 \cup E_w^3$ , при которых  $NB_i(P_i^*, \bar{P}_{-i}^*) = 0, i \in E_w^2 \cup E_w^3$ , т.е. все узлы будут в состоянии равновесия. В ТГС такой подход является одним из подходов поузловой увязки сети.

*Алгоритм «невидимой руки товарного рынка»*

$i \in E_w^2 \cup E_w^3$ . Организуем варьирование переменной  $P_i$  для минимизации функционала (19). Для каждого значения  $P_i$  выполняем:

- 1)  $\forall v \in V^+(i)$  и значения  $P_i$  ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на основе решения задачи перекупщика (5);
- 2)  $\forall v \in V^-(i)$  и значения  $P_i$  ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на основе решения задачи перекупщика (5);
- 3)  $\forall v \in V_{\text{ПР}}^+(i)$  предприятия-продавца  $j = h1(v) \in \text{ПР}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных  $P_{-i}$ ;
- 4)  $\forall v \in V_{\text{ПР}}^-(i)$  предприятия-покупателя  $j = h2(v) \in \text{ПР}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных  $P_{-i}$ ;
- 5)  $\forall v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)$  перекупщика-покупателя  $u = h2(v) \in \text{ВВ} = \bigcup_{w \in W} V_w$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных значениях  $P_{-i}$ ;
- 6)  $\forall v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)$  домашнего хозяйства  $j = h2(v) \in \text{ДХ}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (3);
- 7) ищем отклик экспортно-импортного сальдо  $z_i = B_i^*(P_i, P_{-i})$  внешних субъектов узла  $i$ ;
- 8) используя полученные в п. 1–6 значения  $q_v$ , а также значение  $z_i$  из узла  $i$  на основе зависимости (9), получаем значение функционала «руки рынка»  $NB_i(P_i, \bar{P}_{-i})$ .

Используя значение  $P_i$  и  $NB_i(P_i, \bar{P}_{-i})$ , отбраковываем заведомо неоптимальные решения.

**Замечание 1.** Нетрудно убедиться, что в описываемом алгоритме осуществляется минимизация функции одной переменной с вычислением только значений функции, поэтому в алгоритме можно использовать алгоритмы одномерной оптимизации порядка 0.

**Замечание 2.** Переход в состояние равновесия в одном узле может вывести из состояния равновесия другие узлы. В работе (Коваленко, 1986) приведены теоремы, в которых доказано, что если локальные однопродуктового рынка каждого узла стремятся к состоянию равновесия, то и вся система сходится к состоянию равновесия. Однако, как показывают оценки сходимости, переход всей системы в состояние равновесия может быть достаточно длительным процессом.

**Замечание 3.** Описываемая система представляет собой игру с состоянием равновесия по Нэшу. «Невидимые руки рынков» узлов  $i \in E_w^2 \cup E_w^3$  являются субъектами этой игры. Функционалы (19) описывают критерии минимизации каждого субъекта игры и взаимовлияние между ними.

**5.2. Условия баланса труда в виде экстремальной задачи**

«Невидимая рука локального рынка труда». Пусть для вида труда  $l \in L, i \in E_i^2 \cup E_i^3$ . Узлы  $i \in E_i^1$  не берем, так как для них переменная  $P_i$  — константа, на переменную  $z_i$  ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (15).

Будем считать, что для всех узлов товарных рынков и рынков труда  $j \in E_j \setminus \{i\}$  значение цены  $P_j$  зафиксировано. Переменные  $P_j, j \in E \setminus \{i\}$ , дальше будем обозначать  $P_{-i}$ . В условиях совершенной конкуренции все субъекты рынка  $i$  являются ценополучателями, поэтому для всех  $v \in V_i$  справедливо (11), где  $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$ , или  $q_v = \text{sign}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) \theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$ . Для  $v \in V^+(i)$  имеем  $h2(v) = i$ , для  $v \in V^-(i) - h1(v) = i$ , поэтому (13) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sign}(P_i - P_{h1(v)}) \theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sign}(P_{h2(v)} - P_i) \theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} (q_v) = B_i(P_i). \tag{20}$$

Для  $v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)$  функция  $q_v$  является откликом на переменную  $P_i$  при фиксированных  $P_{-i}$  для задач домашних хозяйств ДХ( $j$ ),  $j = h1(v)$ . Для  $v \in V_{\text{ПР}}^-(i)$  функция  $q_v$  будет откликом на переменную  $P_i$  при фиксированных  $P_{-i}$  в задаче предприятий ПР( $j$ ) для  $j = h2(v)$ . Для  $v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)$  функция  $q_v$  — отклик на переменную  $P_i$  при фиксированных  $P_{-i}$  в задаче перекупщика ПРК( $u$ ) для  $u = h2(v)$ . (Напомним, что перекупщикам в системе обозначений соответствуют дуги графа, поэтому конец дуги  $v$  ссылается на дугу  $u$ .) Таким образом, (20) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sgn}(P_i - P_{h1(v)}) \theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sgn}(P_{h2(v)} - P_i) \theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} (q_v) - B_i(P_i) = 0. \tag{21}$$

Левую часть равенства (21) будем называть небалансом

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sign}(P_i - P_{h1(v)}) \theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sign}(P_{h2(v)} - P_i) \theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) + \sum_{v \in V_{\text{ДХ}}^+(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПР}}^-(i)} (q_v) - \sum_{v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)} (q_v) - B_i(P_i) = 0$$

в узле  $i$  при цене  $P_i$  и фиксированных ценах  $P_{-i}$  и обозначим  $N_i(P_i, P_{-i})$ , тогда в состоянии узлового равновесия должно выполняться

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0. \tag{22}$$

Обозначив  $NB_i(P_i, P_{-i}) = (N_i(P_i, P_{-i}))^2$ , задачу поиска состояния равновесия в (22) запишем как

$$P_i^* = \arg \min_{P_i \text{ при } P_{-i} = \text{const}} NB_i(P_i, P_{-i}). \tag{23}$$

Используя термин Адама Смита, задачу (23) будем называть задачей «невидимой руки рынка» узла  $i \in E_i^2 \cup E_i^3$ . Если для всех  $i \in E_i^2 \cup E_i^3$  (т.е. и для товарных рынков тоже) значения  $P_i^*$  таковы, что  $NB_i(P_i^*, P_{-i}^*) = 0$ , то получившиеся значения дают состояния равновесия совершенной конкуренции для экономической системы в целом.

**6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УЗЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ В МОДЕЛИ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Переход от совершенной конкуренции к несовершенной заключается в смене лидерства «руки рынка» на лидерство одного из субъектов рынка. В зависимости от этого мы получаем ту или иную структуру локального рынка, и, соответственно, структуру всей системы. Поиск состояния равновесия всей системы, как и выше, заключается в поузловой увязке всех узловых задач. Приведем модели узловых задач для некоторых структур несовершенной конкуренции и алгоритмы поиска состояния равновесия в них.

### 6.1. Алгоритм лидерства производителя — продавца на товарном рынке. Узловая монополия

Пусть в узле  $i$  производитель  $j = h1(u)$ ,  $u \in V_{\text{пр}}^+(i)$ , занял положение лидера. Мы получаем монополию производителя  $j$  в узле  $i$ . В условиях монополии производителя  $j$  в узле  $i$  рыночная власть переходит к нему. Он имеет возможность выбора значения стратегической переменной  $P_i$ , варьируя ее с целью максимизации своей прибыли. При этом отметим, что, как и раньше, в узле должно быть выполнено условие продуктового баланса. Так как  $i = h2(u)$ , задача лидера примет вид

$$\pi_j = P_i q_u + \sum_{v \in V_{\text{пр}}^-(j) \setminus \{u\}} P_{h2(v)} q_v - \left( \sum_{v \in V_{\text{пр}}^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \sum_{v \in V_L^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \langle P r_j, r_j \rangle \right) \rightarrow \max_{\Theta_{\text{пр}}(j)} \quad (24)$$

при ограничении

$$(q_u, (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^-(j) \setminus \{u\}}) \in F^i \left( (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^+(i)}, (q_v)_{v \in V_L^+(i)}, r_i \right), \quad r_j \leq \bar{r}_j.$$

Искомые переменные  $\Theta_{\text{пр}}(j) = (P_i, q_u, (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^-(j) \setminus \{u\}}, (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^+(j)}, (q_v)_{v \in V_L^+(j)}, r_j)$ , по которым берется максимум, разобьем на 3 части:  $P_i, q_u$ , и  $((q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^-(j) \setminus \{u\}}; (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^+(j)}; (q_v)_{v \in V_L^+(j)}; r_j)$ . В соответствии с этим строим трехуровневую схему максимизации  $\pi_j$ .

**1 уровень.** Организация перебора по переменной  $P_i$ .

**2 уровень.** Для каждого фиксированного  $P_i$  решаем:

а)  $\forall k = h1(v)$ ,  $v \in V^+(i) \setminus \{u\}$  задачи ПР( $k$ ), получаем объем продаж  $q_v$  предприятиями — совершенными конкурентами;

б)  $\forall k = h2(v)$ ,  $v \in V^-(i)$  задачи ПР( $k$ ), получаем объем  $q_v$  потребления ресурсов с рынка  $i$ ;

в)  $\forall v \in V^+(i)$  задачи перекупщиков ПРК( $v$ ), получаем объем ввоза  $q_v$ ;

г)  $\forall v \in V^-(i)$  задачи перекупщиков ПРК( $v$ ), получаем объем вывоза  $q_v$ ;

д)  $\forall v \in V_{\text{дх}}^-(i)$ ,  $k = h2(v)$ , по задаче домашнего хозяйства ДХ( $k$ ) находим объем потребления  $q_v$  с рынка  $i$ ;

е) рассчитываем  $z_i(P_i)$ .

**3 уровень.**

А. На основе продуктового баланса (9) находим объем производства, который должен выпустить монополист:

$$q_u = - \left( \sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v \right) - \left( \sum_{v \in V_{\text{пр}}^+(i) \setminus \{u\}} q_v - \sum_{v \in V_{\text{пр}}^-(i)} q_v \right) - \left( - \sum_{v \in V_{\text{прк}}^+(i)} q_v \right) - \left( - \sum_{v \in V_{\text{дх}}^-(i)} q_v \right) + z_i.$$

Б. При заданном  $P_i$  и полученном  $q_u$  решаем задачу (24), в результате получаем  $\pi_j$ . В этом случае максимум берется по переменным  $(q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^-(j) \setminus \{u\}}, (q_v)_{v \in V_{\text{пр}}^+(j)}, (q_v)_{v \in V_L^+(j)}, r_j$ .

Как и выше, мы не уточняем, каким образом осуществляется вариация по переменной  $P_i$ , для этого может быть применена вариация любого метода одномерной оптимизации 0-порядка. Также не уточняем методы решения задач второго уровня. Это можно делать любым из методов условной оптимизации. Так как каждая из этих задач может в качестве начального приближения брать решение от предыдущей итерации, то интересным является метод возвращающих направлений, модифицирующий метод возможных направлений Зонтендейка (Zoutendijk, 1960)

### 6.2. Алгоритм лидерства домашнего хозяйства в узле. Узловая монополия

Для того чтобы получить модель монополии в узле, следует лидерство предприятия заменить на лидерство домашнего хозяйства. Место задачи (24) займет задача (2).

### 6.3. Алгоритм лидерства перекупщика, инцидентного локальному рынку. Узловая монополия перекупщика

Рассмотрим случай, когда на рынке узла  $i$  перекупщик  $u \in V^+(i)$ ,  $i = h2(u)$ , является лидером. (Случай  $u \in V^-(i)$  аналогичен.) Как и ранее, организуем варьирование переменной  $P_i$  для максимизации функционала задачи перекупщика (5) при  $u \in V^+(i)$ .

Для каждого значения  $P_i$  выполняем:

1)  $\forall v \in V^+(i) \setminus u$  и значения  $P_i$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на основе решения задачи перекупщика (5);

- 2)  $\forall v \in V^-(i)$  и значения  $P_i$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на основе решения задачи перекупщика (5);
- 3)  $\forall v \in V_{\text{ПР}}^+(i)$  предприятия-продавца  $j = h1(v) \in \text{ПР}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных  $P_{-i}$ ;
- 4)  $\forall v \in V_{\text{ПР}}^-(i)$  предприятия-покупателя  $j = h2(v) \in \text{ПР}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных  $P_{-i}$ ;
- 5)  $\forall v \in V_{\text{ПРК}}^-(i)$  перекупщика-покупателя  $u = h2(v) \in VV = \bigcup_{w \in W} V_w$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (4) узла  $j$  при фиксированных значениях  $P_{-i}$ ;
- 6)  $\forall v \in V_{\text{ДХ}}^-(i)$  домашнего хозяйства  $j = h2(v) \in \text{ДХ}$ , ищем отклик  $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$  на цену  $P_i$  на основе решения задачи (3);
- 7) ищем отклик — экспортно-импортное сальдо  $z_i = B_i^*(P_i, P_{-i})$  внешних субъектов узла  $i$ ;
- 8) используя полученные в п. 1–6 значения  $q_v$ , а также значение  $z_i$  из п. 7 на основе зависимости (9), получаем значение функционала задачи перекупщика (5) при  $u \in V^+(i)$ ;
- 9) используя значение  $P_i$  и значение функционала задачи перекупщика (5) при  $u \in V^+(i)$ , отбрасываем заведомо неоптимальные решения.

Замечания 1 и 2 справедливы и для приведенного алгоритма.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как отмечено в обзоре (Коваленко, 2001, с. 92–106), модели общего равновесия имеют широкое применение в прикладных экономических исследованиях пространственно рассредоточенных систем благодаря тому, что они позволяют количественно оценивать взаимосвязи между различными подсистемами экономической системы, а также воздействие различных факторов. Но как отмечено в (Изотов, 2014, с. 138–167), что «несмотря на многочисленные попытки, не удалось найти сколько-нибудь общие и естественные условия, обеспечивающие единственность и устойчивость равновесия». Предложенные модели фактически развивают и уточняют модели Эрроу–Добре, и позволяют ответить на вопросы, поставленные в (Изотов, 2014, с. 138–167). В реальной экономике, как функции полезности, так и производственные функции, используемые для описания, могут быть линейными. Изменение цен в узлах может приводить к скачкам в экстремальных задачах, описывающих поведение субъектов рынков, что, в свою очередь, приводит к нарушению равновесия всей системы. Для получения ответов на фундаментальные вопросы, поставленные в (Изотов, 2014, с. 138–167), целесообразно применение функций с постоянной эластичностью.

Для моделей рассредоточенного рынка однородного продукта совершенной конкуренции (это пространственно рассредоточенный слой модели общего равновесия) сходимость к состоянию равновесия доказывается в (Коваленко, 2006). Но в доказательстве используются особые свойства функций спроса и предложения. Решение аналогов ТГС не вызывала сомнения единственности решения, но в ТГС при решении задач для описания движения потока используются квадратичные функции. Проблемы неустойчивости и неединственности возникают при учете режима течения потока (ламинарный, турбулентный и т.д.). При переходе «ламинарный → турбулентный» гидравлического удара не бывает — слишком малы пертурбации. Просто хаос в потоке скачком нарастает вместо порядка (ламинарный режим).

Данная работа содержит инструментарий для поиска состояния равновесия для случаев, когда в любом локальном рынке может быть монополист. В результате получаем огромное количество различных структур, начиная от совершенной конкуренции, каскадов монополий (Коваленко, 2006) до централизованного управления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

- Вальрас Л.** (2000). Элементы чистой политической экономии. М.: Изограф. 448 с. [Walras L. (2000). *Elements of pure political economy*. Moscow: Izograf. 448 p. (in Russian).]
- Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.Н.** (2000). Микроэкономика. Под общей редакцией В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа. [Galperin V.M., Ignatyev S.M., Morgunov V.N. (2000). *Microeconomics*. Under the general editorship V.M. Galperin. Saint Petersburg: Ekonomicheskaja shkola (in Russian).]
- Изотов Д.А.** (2014). Эмпирические модели общего экономического равновесия // *Пространственная экономика*. № 3. С. 138–167. [Izotov D.A. (2014). Empirical models of general economic equilibrium. *Spatial Economics*, 3, 138–167 (in Russian).]

- Коваленко А.Г.** (2001). Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка // *Экономика и математические методы*. Т. 37. № 2. С. 92–106. [**Kovalenko A.G.** (2001). Mathematical models of interbranch balance in a dispersed market. *Economics and Mathematical Methods*, 37, 2, 92–106 (in Russian).]
- Коваленко А.Г.** (2006). Развитие математических моделей и методов теории гидравлических сетей и их применение для моделирования рассредоточенного рынка. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. РГБ ОД, 71:06–1/237. Москва. 307 с. [**Kovalenko A.G.** (2006). *Development of mathematical models and methods of the theory of hydraulic networks and their application for modeling a dispersed market*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences: 05.13.18. RSL DD. Moscow (in Russian).]
- Коваленко А.Г.** (2012). К вопросу о взаимосвязи децентрализованного многопродуктового пространственно-рассредоточенного рынка и централизованного управления этой экономической системой // *Журнал экономической теории. Секция экономики*. № 3. С. 148–154. [**Kovalenko A.G.** (2012). On the question of the relationship between a decentralized multi-product spatially dispersed market and the centralized management of this economic system. *Journal of Economic Theory. Series "Economics"*, 3, 148–154 (Russian).]
- Меренков А.П., Хасилев В.Я.** (1985). Теория гидравлических цепей. М.: Наука. 278 с. [**Merenkov A.P., Khasilev V.Ya.** (1985). *Theory of hydraulic circuits*. Moscow: Nauka. 278 p. (in Russian).]
- Никайдо Х.** (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир. 514 с. [**Nikaido H.** (1972). *Convex structures and mathematical economics*. Moscow: Mir. 514 p. (in Russian).]
- Полтерович В.М.** (1998). Кризис экономической теории // *Экономическая наука современной России*. № 1. С. 46–66. [**Polterovich V.M.** (1998). Crisis of economic theory. *Economics of Contemporary Russia*, 1, 46–66 (in Russian).]
- Тироль Ж.** (1996) Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа 745 с. [**Tyrol J.** (1996). *Markets and market power: The theory of industrial organization*. St. Petersburg: Ekonomicheskaya Shkola Publishers. 745 p. (in Russian).]
- Leontief W.** (1985). *Essays in economics: Theories, theorizing, facts, and policies*. New Brunswick, Oxford: Transaction books, Cop. First published in New York: Oxford University Press, 1966.

## Mathematical modeling of a multi-product dispersed market in the system of the world economy

© 2022 A.G. Kovalenko, A.V. Zlotov

**A.G. Kovalenko,**

*Federal public autonomous educational institution of the higher education "Samara National Research University under the name of the academician S.P. Korolev", Samara; Russia;  
e-mail: alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru*

**A.V. Zlotov,**

*Federal Research Center "Informatics and Control" RAS; Moscow, Russia; e-mail: Zlotov\_a@mail.ru*

Received 02.12.2021

**Abstract.** Mathematical models are built that is the development of the Walras model of the economy, both centralized and decentralized spatially dispersed economic system with the interactions of subjects of perfect and imperfect competition. The novelty of this model is determined by the introduction into the model of market entities: households, with a description of their functioning using utility functions, these households consume resources for their existence — various types of goods and produce various types of labor to obtain goods; multi-product enterprises that buy various types of commodity and labor resources; resellers who distribute products between local markets and carry out the movement of various types of labor along with the transport network from households to enterprises. When searching for an equilibrium state, the tasks of market subjects in extreme formulations are used. By organizing various types of interactions between subjects in commodity markets, markets of both perfect and imperfect competition are built. Numerical methods for the analysis of the described models have been developed. Numerical methods for finding the equilibrium state of the considered models are based on vector optimization methods.

**Keywords:** Arrow–Debré model, imperfect and perfect competition, households, enterprises, resellers, network problems, theory of hydraulic systems, search for equilibrium states.

**JEL Classification:** C02.

For reference: **Kovalenko A.G., Zlotov A.V.** (2022). Mathematical modeling of a multi-product dispersed market in the system of the world economy. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 102–114. DOI: 10.31857/S042473880021698-6

===== МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ =====

## Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward exotic contracts

© 2022 A.V. Kulikov, N.O. Malykh, I.S. Postevoy

**A.V. Kulikov,**

*Phystech School of Applied Mathematics and Informatics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia; e-mail: avkulikov15@gmail.com*

**N.O. Malykh,**

*Phystech School of Applied Mathematics and Informatics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia; e-mail: malykh@phystech.edu*

**I.S. Postevoy,**

*Phystech School of Applied Mathematics and Informatics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia; e-mail: e-mail: postevoi@phystech.edu*

Received 17.04.2022

*The authors thank anonymous reviewers for valuable observations on the earlier variant.*

**Abstract.** In the following article, we consider forward contracts, which are financial instruments used to buy or sell some assets at a certain point in the future, and at the fixed price. Such contracts are customizable and traded over-the-counter, unlike futures, which are standardized contracts traded at exchanges. Particularly, we focus on in-arrears interest rate forward contracts (in-arrears FRA). The difference from the vanilla FRA: floating rate is immediately paid after it is fixed. We calculate the convexity adjustment to the forward simple interest rate in the single-factor Vasicek stochastic model for such contracts with different payment dates. With the help of the no-arbitrage market condition it is shown that such adjustments should be non-negative when payments occur before the end of accrual period and should be negative when payments occur after accrual period. We also studied in-arrears forward and option contracts, where fixed interest rate and principal, on which this rate is accrued, are denominated in different currencies (so called quanto in-arrears FRA and quanto in-arrears options). We checked that quanto in-arrears FRA equals in-arrears FRA in case when rates and principal are from the same currency market, and that quanto in-arrears option contract prices are greater than those of vanilla options.

**Keywords:** convexity adjustment; forward rate agreement (FRA); Vasicek model; no-arbitrage market; in-arrears FRA (iFRA) / quanto iFRA (quanto in-arrears FRA); quanto FRA; LIBOR; MOSPRIME.

**JEL Classification:** G12, G13, C02.

For reference: **Kulikov A.V., Malykh N.O., Postevoy I.S.** (2022). Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward exotic contracts. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 115–128. DOI: 10.31857/S042473880021701-0

### 1. INTRODUCTION

Forward contracts are widely used financial instruments used for purchase/sell of some asset at a certain date in future at the specified fixed price.

An example of forward contract is a forward rate agreement (FRA) on interest rate as an underlying asset, which we define in the next section.

FRA is a cash settled contract with the payment based on the net difference between the floating interest rate and the fixed rate (Hull, 2017). Fixed rate makes the initial price of the FRA being equal to 0 is called *forward rate*.

There is an exotic *in-arrears contract* which is settled at the beginning of the forward period — not at the end. The forward rate of an in-arrears contract is greater than the forward rate of a vanilla contract and the difference between these two rates depends on stochastic model used to simulate financial processes and is called convexity adjustment.

Studies on this topic may be found in (Mcinerney, Zastawniak, 2015), where LIBOR in-arrears rate was considered. The adjustment was calculated using the replication strategy and solving stochastic differential equation in the LIBOR market model. Another approach using the change of measure was studied in (Palsser, 2003), where

simple lognormal stochastic model was chosen to calculate an in-arrears forward LIBOR rate. In (Gaminha, Gaspar, Oliveira, 2015), authors explored the Vasicek and Cox–Ingersoll–Ross models within LIBOR in-arrears rate. The authors obtained the adjustment from stochastic differential equation (SDE) numerical solution of convexity term SDE and found the partial closed-form solution for Vasicek model. There are also researches on in-arrears options — caps and floors (Hagan, 2003) where prices of options were found using the replication strategy for option-like pay-off. Finally, in the previous paper, written by two authors of this article, (Malykh, Postevoy, 2019), pricing of in-arrears FRA and in-arrears interest rate options using change of measure were considered.

There is also another kind of exotic forward contracts — quanto FRA, in which the notional principal amount is denominated in a currency other than the currency in which the interest rate is settled.

Such contracts were studied in (Lin, 2012), where author used forward measure pricing methodology to derive the valuation formulas within the Heath–Jarrow–Morton interest rate model. Research on quanto interest rate options may be found in (Hsieh, Chou, Chen, 2015), where authors also adopted martingale probability measure to obtain options pricing in the cross-currency LIBOR market model.

In this article we are going to continue our previous work and expand *change of measure method* in a single-factor Vasicek stochastic model (Vasicek, 1977) to consider cases, when the payment in FRA occurs in other dates, — not only at the beginning or at the end of the forward period. We prove that the convexity adjustment is negative when the settlement date takes place after the forward period. We also apply it to explore quanto FRA. Moreover, we combine it with the in-arrears FRA and come to the in-arrears quanto FRA. At the end, in-arrears quanto options are briefly considered.

## 2. DEFINITIONS

Let us introduce definitions which we use further in this paper.

**Definition 1.** Zero-coupon bond (ZCB) with maturity  $T$  is a security which promises to pay owner 1 currency unit at  $T$ . We denote ZCB price at the moment  $t$  by  $P(t, T)$ , where  $P(t, T)$  is an  $\mathcal{F}_t$ -measurable function and  $P(T, T) = 1$ .

LIBOR is the indicative rate on which banks are willing to lend money each other, LIBID is the indicative rate on which banks are willing to borrow money. We assume equivalence of LIBID and LIBOR. MOSPRIME is a Russian analogue of the LIBOR rate, i.e. MOSPRIME is the indicative rate on which banks are willing to lend money to each other in rubles. We also make standard “Black–Sholes–Merton model” assumptions: no transaction costs; no default risk; no funding risk; no liquidity risk.

Now we define LIBOR rate and forward rate agreement more precisely.

**Definition 2.** We denote LIBOR spot rate at the moment  $t$  for a time period  $\alpha > 0$  by  $L(t, t, t + \alpha)$ . Bank can lend (or borrow)  $N$  currency units at the time  $t$  for a period  $\alpha$  and get (return)  $N(1 + \alpha L(t, t, t + \alpha))$  currency units at the moment  $t + \alpha$ . Technically, MOSPRIME rate definition is similar to the LIBOR one, i.e. it is a spot rate with simple compounding. We use the LIBOR and MOSPRIME terms interchangeably through the article.

**Definition 3.** Forward rate agreement (FRA) is an over-the-counter contract for the exchange of two cash flows at a certain date in future. Floating reference rate is fixed at  $T_1$ . Buyer of this contract at  $t \leq T_1$  with maturity  $T_2$ , fixed rate  $K$  and principal  $N$ , agrees on following obligation between counterparties at  $T_2$ :

- 1) pay  $(T_2 - T_1)KN$  currency units to contract counterparty,
- 2) receive  $(T_2 - T_1)L(T_1, T_1, T_2)N$  currency units from contract counterparty.

The price of the FRA at  $T_2$  is equal to  $(T_2 - T_1)(L(T_1, T_1, T_2) - K)N$ .

For simplicity, we assume that principal amount  $N = 1$ .

**Definition 4.** Forward rate  $L(t, T_1, T_2)$  is the fixed rate  $K$  which makes price of the FRA contract at  $t$  equal to 0 for  $t \leq T_1 \leq T_2$ .

It can be shown (Hull, 2017), that  $L(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{(T_2 - T_1)P(t, T_2)}$ .

Now, we consider exotic in-arrears FRA: this contract is settled at time  $T_1$ .

**Definition 5.** In-arrears FRA (iFRA) is an over-the-counter contract for the exchange of two cash flows at a certain date. Floating reference rate is fixed at  $T_1$ . Buyer of this contract at  $t \leq T_1$  with maturity  $T_1$ , fixed rate  $K$  and principal  $N$ , agrees on following obligation between counterparties at  $T_1$  (not  $T_2$ ):

- 1) *pay*  $(T_2 - T_1)KN$  currency units to counterparty,
- 2) *receive*  $(T_2 - T_1)L(T_1, T_1, T_2)N$  currency units from counterparty.

The price of the iFRA at  $T_1$  is equal to  $(T_2 - T_1)(L(T_1, T_1, T_2) - K)N$ .

We denote  $K$  which gives iFRA a 0 (zero) price at  $t$  by  $iL(t, T_1, T_2)$ .

A portfolio of assets is called self-financed if its value changes only due to changes in the asset prices.

**Definition 6.** Self-financed portfolio  $A$  is called an arbitrage portfolio on some probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  if its price (value) at the time  $t$  is  $V^A(t) \leq 0$  and  $\exists T > t: \mathbb{P}(V^A(T) \geq 0) = 1$  and  $\mathbb{P}(V^A(T) > 0) > 0$ .

We use the assumption of absence of any arbitrage portfolio on the market.

### 3. IN-ARREARS FRA

It was shown (Malykh, Postevoy, 2019) that convexity adjustment (CA) for in-arrears FRA under single-factor Vasicek model is:

$$CA(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \times \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} (e^I - 1),$$

where

$$I = \frac{\sigma^2}{a^2} \left( \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T_1-t)} - \frac{1}{a} e^{-a(T_2-T_1)} + \frac{1}{2a} e^{-2a(T_2-T_1)} + \frac{1}{a} e^{-a(T_1+T_2)+2at} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T_2-t)} \right),$$

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)},$$

$$B(t, T) = (1 - e^{-a(T-t)}) / a,$$

$$A(t, T) = \exp \left( (B(t, T) - (T-t)) \left( \frac{\theta}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right),$$

where  $\theta$  and  $a$  are constant parameters in this model, which is given by the following SDE for instantaneous interest spot-rate:  $dr(t) = (\theta - ar(t))dt + \sigma dW(t)$ . Now we are going to study other exotic FRAs in this model.

### 4. EXOTIC FRA WITH DIFFERENT PAYMENT TIME OPTIONS

Along with the in-arrears contracts we can construct a FRA with payment date  $T_{pay}$  such as  $t < T_{pay} < T_1$ ,  $T_1 < T_{pay} < T_2$ , or  $T_2 < T_{pay}$ . We consider each of these contracts using the same change of measure technique described in (Geman, Karoui, Rochet, 1995).

Let us denote exotic forward LIBOR rate by  $iL$ . Forward rate is the expected value of the future rate under appropriate forward measure (Privault, 2012). Then

$$iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) = E_{Q_{T_{pay}}} [L(T_1, T_1, T_2) | \mathcal{F}_t] \tag{1}$$

( $E_{Q_{T_{pay}}}$  — conditional expectation value).

**Theorem 1.** *In a single-factor Vasicek model we have*

$$iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) = L(t, T_1, T_2) + L(t, T_1, T_2) \frac{P(t, T_2) 1_{T_{pay} \leq T_2} - P(t, T_{pay})}{P(t, T_{pay})} +$$

$$+ \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} \tau \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \frac{P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)} e^I - \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right) 1_{T_{pay} \leq T_2} - \frac{P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)} \right), \tag{2}$$

where

$$I = \frac{\sigma}{2a^3} \left( e^{-a|T_1 - T_{pay}|} - e^{-a(T_1 + T_{pay} - 2t)} - e^{-a(T_2 - \min(T_1, T_{pay}))} + e^{-a(T_2 - 2t + \min(T_1, T_{pay}))} - e^{-a(T_2 + \max(T_1 - 2T_{pay}, T_{pay} - 2T_1))} + \right.$$

$$\left. + e^{-a(T_2 - 2t + \max(T_1, T_{pay}))} + e^{-2a(T_2 - \min(T_1, T_{pay}))} - e^{-2a(T_2 - t)} \right)$$

( $1_{T_{pay} \leq T_2}$  — indicator function).

The case  $T_{pay} = T_1$  is considered in (Malykh, Postevoy, 2019). Now we consider other cases.

**4.1.  $t < T_{pay} < T_1$** 

Using results from (Privault, 2012), we change the measure to  $Q_{T_2}$  in (1).

$$\begin{aligned} iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) \frac{1}{P(T_{pay}, T_2)} \Big| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) (1 + (T_2 - T_{pay}) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2)) \Big| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} \left( L(t, T_1, T_2) + (T_2 - T_{pay}) E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) \Big| \mathcal{F}_t \right] \right). \end{aligned}$$

Using the tower property of conditional expectation:

$$\begin{aligned} E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) \Big| \mathcal{F}_t \right] &= E_{Q_{T_2}} \left[ E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) \Big| \mathcal{F}_{T_{pay}} \right] \Big| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_{pay}, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) \Big| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Next we find dynamic of the following process under  $Q_{T_2}$ -measure:

$$\begin{aligned} L(T_{pay}, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) &= \\ &= \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_{pay})} \left( \frac{P(T_{pay}, T_1) P(T_{pay}, T_{pay})}{P(T_{pay}, T_2) P(T_{pay}, T_2)} - \frac{P(T_{pay}, T_1)}{P(T_{pay}, T_2)} - \frac{P(T_{pay}, T_{pay})}{P(T_{pay}, T_2)} + 1 \right). \end{aligned}$$

The 2nd and the 3rd terms are the martingales under  $Q_{T_2}$ -measure. We need to know dynamic of the 1st term.

$$\begin{aligned} d \left( \frac{P(t, T_1) P(t, T_{pay})}{P(t, T_2) P(t, T_2)} \right) &= \\ &= \frac{P(t, T_1) P(t, T_{pay})}{P(t, T_2) P(t, T_2)} \left( (\zeta^{T_{pay}}(t) + \zeta^{T_1}(t) - 2\zeta^{T_2}(t)) dW^{T_2}(t) + (\zeta^{T_{pay}}(t) - \zeta^{T_2}(t)) (\zeta^{T_1}(t) - \zeta^{T_2}(t)) dt \right), \end{aligned}$$

where  $\zeta^{T_i}(t) = \sigma B(t, T_i)$ . So,

$$\begin{aligned} \frac{P(T_{pay}, T_1) P(T_{pay}, T_{pay})}{P(T_{pay}, T_2) P(T_{pay}, T_2)} &= \frac{P(t, T_1) P(t, T_{pay})}{P(t, T_2) P(t, T_2)} - \exp \left[ \int_t^{T_{pay}} \left( (\zeta^{T_{pay}}(t) + \zeta^{T_1}(t) - 2\zeta^{T_2}(t)) dW^{T_2}(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\zeta^{T_{pay}}(t) - \zeta^{T_2}(t)) (\zeta^{T_1}(t) - \zeta^{T_2}(t)) - 0.5 (\zeta^{T_{pay}}(t) + \zeta^{T_1}(t) - 2\zeta^{T_2}(t))^2 dt \right) \right]. \end{aligned}$$

Now we find expectation under  $Q_{T_2}$ -measure:

$$E_{Q_{T_2}} \left[ \frac{P(T_{pay}, T_1) P(T_{pay}, T_{pay})}{P(T_{pay}, T_2) P(T_{pay}, T_2)} \Big| \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T_1) P(t, T_{pay})}{P(t, T_2) P(t, T_2)} e^I,$$

where

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{T_{pay}} (\zeta^{T_{pay}}(t) - \zeta^{T_2}(t)) (\zeta^{T_1}(t) - \zeta^{T_2}(t)) dt = \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T_1 - T_{pay})} - e^{-a(T_1 + T_{pay} - 2t)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-a(T_2 - T_{pay})} + e^{-a(T_2 + T_{pay} - 2t)} - e^{-a(T_1 + T_2 - 2T_{pay})} + e^{-a(T_1 + T_2 - 2t)} + e^{-2a(T_2 - T_{pay})} - e^{-2a(T_2 - t)} \right). \end{aligned}$$

Putting it all together we can write

$$\begin{aligned} iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) &= L(t, T_1, T_2) + L(t, T_1, T_2) P(t, T_2) - P(t, T_{pay}) / P(t, T_{pay}) + \\ &\quad + \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})(T_2 - T_1)} \left( \frac{P(t, T_1) P(t, T_{pay})}{P(t, T_2) P(t, T_2)} e^I - \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - \frac{P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)} + 1 \right). \end{aligned}$$

**4.2.  $T_1 < T_{pay} < T_2$**

Under  $Q_{T_2}$ -measure:

$$\begin{aligned} iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) \frac{1}{P(T_{pay}, T_2)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) (1 + (T_2 - T_{pay}) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2)) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} \left( L(t, T_1, T_2) + (T_2 - T_{pay}) E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) L(T_{pay}, T_{pay}, T_2) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) = \\ &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})} \left( L(t, T_1, T_2) + (T_2 - T_{pay}) E_{Q_{T_2}} \left[ L(T_1, T_1, T_2) L(T_1, T_{pay}, T_2) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right). \end{aligned}$$

Using the same technique as in Section 4.1, we can find the solution for this contract:

$$\begin{aligned} iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) &= L(t, T_1, T_2) + L(t, T_1, T_2) \left( \frac{P(t, T_2) - P(t, T_{pay})}{P(t, T_{pay})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})(T_2 - T_1)} \left( \frac{P(t, T_1)P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)P(t, T_2)} e^I - \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - \frac{P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)} + 1 \right) \right), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{T_1} \left( (\zeta^{T_{pay}}(t) - \zeta^{T_2}(t)) (\zeta^{T_1}(t) - \zeta^{T_2}(t)) \right) dt = \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T_{pay}-T_1)} - e^{-a(T_1+T_{pay}-2t)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-a(T_2-T_1)} + e^{-a(T_1+T_2-2t)} - e^{-a(T_2+T_{pay}-2T_1)} + e^{-a(T_2+T_{pay}-2t)} + e^{-2a(T_2-T_1)} - e^{-2a(T_2-t)} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

**4.3.  $T_2 < T_{pay}$**

Forward LIBOR rate has the following formula in this time payment case:

$$iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_{pay})(T_2 - T_1)} \left( \frac{P(t, T_{pay})P(t, T_1)}{P(t, T_2)P(t, T_2)} e^I - \frac{P(t, T_{pay})}{P(t, T_2)} \right),$$

where  $I$  is taken from (3), as both cases take place after  $T_1$ .

In the case when payment occurs after accrual period, we can prove that adjustment should be always non-positive similarly to what we did in (Malykh, Postevoy, 2019) for payments before the end of accrual period.

**Theorem 2.** *Suppose that  $\mathbb{P}(L(T_1, T_1, T_2) \neq L(t, T_1, T_2)) > 0$  under real-world measure. Then the forward rate  $iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) < \text{forward rate } L(t, T_1, T_2)$ ,  $t < T_1 \leq T_2 < T_{pay}$ .*

**P r o o f.** We can prove it by contradiction assuming opposite and constructing an arbitrage portfolio.

Assume that there is a forward rate on the market and  $iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) \geq L(t, T_1, T_2)$ . Without loss of generality let  $(T_2 - T_1) = 1$  year. Without loss of generality let  $(T_2 - T_1) = 1$  year. Consider the following strategy:

1) time  $t$ : buy FRA with  $K = L(t, T_1, T_2)$ ,  $N = 1$  and sell iFRA with payment date  $T_{pay}$ ,  $K = iL(t, T_{pay}, T_1, T_2)$  and  $N = P(t, T_1) / P(t, T_2)$ . Portfolio value  $V_t = 0$ ;

2)  $T_1$ : LIBOR rate is fixed and we enter into forward contract to buy  $(L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2))P(T_1, T_2) / P(T_1, T_{pay})$  number of zero-coupon bonds (ZCB) with maturity  $T_{pay}$  at time  $T_2$ . It costs us  $F = L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)$ ;

3)  $T_2$ : FRA settlement occurs. Portfolio value is

$$V_{T_2} = (L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)) - F + (L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2))P(T_2, T_{pay})P(T_1, T_2) / P(T_1, T_{pay});$$

4)  $T_{pay}$ : iFRA settlement occurs

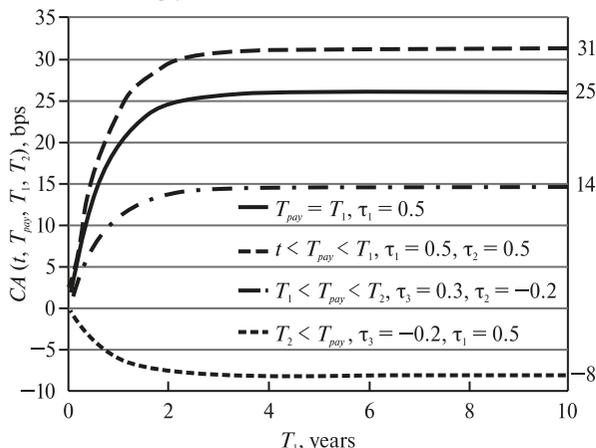
$$V_{T_{pay}} = (L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)) \frac{P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_{pay})} + \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} (iL(t, T_1, T_2) - L(T_1, T_1, T_2)).$$

We use the fact that  $(T_2 - T_1)L(t, T_1, T_2) = P(t, T_1) / P(t, T_2) - 1$  and that  $P(t, T_1) \geq P(t, T_2) \forall t \leq T_1 \leq T_2$ . Now we can rewrite out portfolio value:

$$\begin{aligned} V_{T_{pay}} &\geq (L(T_1, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)) \left( \frac{P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_{pay})} - \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right) = \left( \frac{P(T_1, T_1)}{P(T_1, T_2)} - \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right) \times \left( \frac{P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_{pay})} - \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right) = \\ &= \frac{(P(T_1, T_1)P(t, T_2) - P(T_1, T_2)P(t, T_1))(P(T_1, T_2)P(t, T_2) - P(T_1, T_{pay})P(t, T_1))}{P(T_1, T_2)P(t, T_2)P(T_1, T_{pay})P(t, T_2)} \geq \\ &\geq \frac{P(T_1, T_2)P(T_1, T_{pay})(P(t, T_2) - P(t, T_1))^2}{P(T_1, T_2)P(t, T_2)P(T_1, T_{pay})P(t, T_2)} \geq 0. \end{aligned}$$

It's worth noting that  $\mathbb{P}(V_{T_{pay}} > 0) > 0$ , because of our assumption, that  $\mathbb{P}(L(T_1, T_1, T_2) \neq L(t, T_1, T_2)) > 0$ .

We managed to construct an arbitrage portfolio which contradicts to our assumption of no-arbitrage. Hence,  $iL(t, T_{pay}, T_1, T_2) < L(t, T_1, T_2)$ .



**Fig. 1.** Comparison of adjustments: CA (convexity adjustment) for forward LIBOR rate with  $t = 0$ ;  $\theta = 0.035$ ;  $\tau = 0.5$ ;  $r(t) = 5\%$  (bps — 1 basis point is equivalent to 0.01% (1/100th of a percent) or 0.0001 in decimal form)

### 5. IN-ARREARS FRA BEHAVIOR

Using results from Section 4.1–4.3 we proved the common formula (2). We can also find the limit of adjustments when  $T_1 \rightarrow \infty$ . We denote  $\tau_1 = T_2 - T_1$ ,  $\tau_2 = T_1 - T_{pay}$ ,  $\tau_3 = T_2 - T_{pay}$ . Then

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} CA = \frac{1}{\tau_1} \exp \left\{ \left( \frac{\theta}{a} - \frac{\sigma^2}{2a} \right) \tau_1 \right\} (e^J - 1),$$

where

$$\begin{aligned} J &= (\sigma^2 / 2a^3) (e^{-a|\tau_2|} - e^{-a((\tau_3)^1_{\tau_2 > 0} + \tau_1^1_{\tau_2 \leq 0})} + \\ &+ e^{-2a((\tau_3)^1_{\tau_2 > 0} + \tau_1^1_{\tau_2 \leq 0})} - e^{-a(|\tau_2| + \tau_3 + (-\tau_2)^+)}). \end{aligned}$$

Using these properties convexity adjustment with different payment date properties is given in fig. 1.

### 6. QUANTO IN-ARREARS FRA

We consider another exotic modification of FRA — quanto FRA.

**Definition 7.** Quanto FRA is a forward contract, where buyer of this contract at  $t \leq T_1$  with maturity  $T_2$ , fixed rate  $K$  in d-currency (domestic) units and principal  $N$  in f-currency (foreign) units, agrees on following obligations with counterparties at  $T_2$ :

- 1) byuer pay  $(T_2 - T_1)KN$  f-currency units;
- 2) receive  $(T_2 - T_1)L(T_1, T_1, T_2)N$  f-currency units, where  $L$  — LIBOR rate in d-currency units.

**Definition 8.** Quanto in-arrears FRA (iqFRA) is a forward contract, where buyer of this contract at  $t \leq T_1$  with maturity  $T_2$ , fixed rate  $K$  in d-currency units and principal  $N$  in f-currency units, agrees on following obligations with counterparties at  $T_1$ :

- 1) byuer pay  $(T_2 - T_1)KN$  f-currency units,
- 2) receive  $(T_2 - T_1)L(T_1, T_1, T_2)N$  f-currency units, where  $L$  — LIBOR rate in d-currency units.

Let  $N = 1$ .

By  $iqL$  we denote forward rate of iqFRA contract. Notation  $\mathbb{E}_{Q_{T_1}^f}$  means mathematical expectation by forward measure  $T_1$  of payments in f-currency. Then  $iqL(t, T_1, T_2) = \mathbb{E}_{Q_{T_1}^f} [L(T_1, T_1, T_2) | \mathcal{F}_t]$ .

We need to change measure to  $Q_{T_1}^d$  for payments in d-currency. Radon–Nikodym derivative is

$$\frac{dQ_{T_1}^d}{dQ_{T_1}^f} = \frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(t, T_1)} \frac{P_f(t, T_1)X(t)}{P_f(T_1, T_1)X(T_1)},$$

where  $X(t)$  — spot exchange rate at time  $t$ . Then

$$iqL(t, T_1, T_2) = \mathbb{E}_{Q_{T_1}^d} \left[ L(T_1, T_1, T_2) \frac{dQ_{T_1}^f}{dQ_{T_1}^d} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{P_d(t, T_1)}{P_f(t, T_1)X(t)} \mathbb{E}_{Q_{T_1}^d} \left[ L(T_1, T_1, T_2) \frac{P_f(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_1)} X(T_1) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (4)$$

We use the fact that the forward exchange rate with maturity  $T$  is  $X_T(t) = P_f(t, T)X(t) / P_d(t, T)$ . Then  $iqL(t, T_1, T_2) = (X_{T_1}(t))^{-1} \mathbb{E}_{Q_{T_1}^d} [X_{T_1}(T_1)L(T_1, T_1, T_2) | \mathcal{F}_t]$ .

To calculate this expectation we need to:

- 1) find SDE for process  $X_{T_1}(t)$  in forward measure  $Q_{T_1}^d$ ;
- 2) find joint distribution of  $X_{T_1}(T_1)L(T_1, T_1, T_2)$  in forward measure  $Q_{T_1}^d$ .

First, write SDE of major processes:

$$\begin{aligned} \frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} &= r_d(t)dt + \sigma_{P_d} B_{P_d}(t, T) dW_{d, P_d}^Q(t), & \frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} &= r_f(t)dt + \sigma_{P_f} B_{P_f}(t, T) dW_{f, P_f}^Q(t), \\ \frac{dX(t)}{X(t)} &= (r_d(t) - r_f(t))dt + \sigma_X dW_X^Q(t). \end{aligned}$$

$W_{d, P_d}^Q$  means Wiener process for process  $P_d$  in measure  $Q$  in currency  $d$ . To find SDE of  $X_{T_1}(t)$  in risk-neutral measure  $Q$  we need to write  $P_f(t, T)$  in currency  $d$ . Changing the measure we get  $\frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} = (r_f(t) - \zeta_{P_f}^T(t)\sigma_X \rho_{P_f, X}) + \zeta_{P_f}^T(t) dW_{d, P_f}^Q(t)$ , where  $\zeta_{P_f}^T(t) = \sigma_{P_f} B_{P_f}(t, T)$  and  $\rho_{P_f, X}$  — correlation between  $P_f$  and  $X$ . Now write SDE of  $X_{T_1}(t)$ :

$$\begin{aligned} d(X_{T_1}) &= \frac{\partial X_{T_1}}{\partial P_d} dP_d + \frac{\partial X_{T_1}}{\partial P_f} dP_f + \frac{\partial X_{T_1}}{\partial X} dX + 0.5 \frac{\partial^2 X_{T_1}}{\partial P_d^2} (dP_d)^2 + \frac{\partial^2 X_{T_1}}{\partial P_d \partial P_f} (dP_d)(dP_f) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 X_{T_1}}{\partial P_d \partial X} (dP_d)(dX) + \frac{\partial^2 X_{T_1}}{\partial P_f^2} (dP_f)^2. \end{aligned}$$

Switching to  $Q^{T_1}$ -measure:

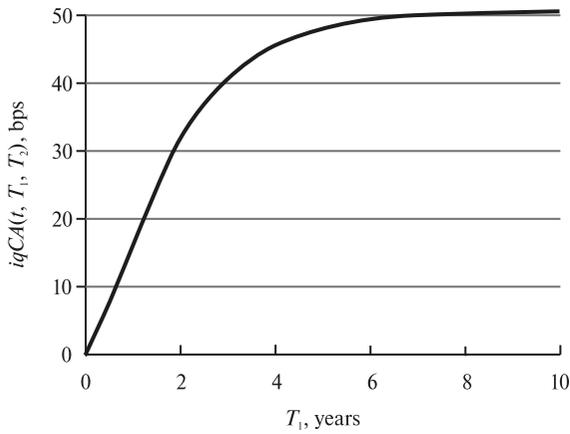
$$\begin{aligned} d(X_{T_1}) / X_{T_1} &= -\zeta_{P_d}^{T_1}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t), \\ d \ln(X_{T_1}) &= -\zeta_{P_d}^{T_1}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t) - \\ &\quad - 0.5 \left( -\zeta_{P_d}^{T_1}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t) \right)^2, \\ X_{T_1}(T_1) &= X_{T_1}(t) \exp \left( \int_t^{T_1} \left( -\zeta_{P_d}^{T_1}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 0.5 \int_t^{T_1} \left( -\zeta_{P_d}^{T_1}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Now we need to get  $L(t, T_1, T_2)$  in  $Q^{T_1}$ -measure. Remember that  $L(t, T_1, T_2) = (P_d(t, T_1) / P_d(t, T_2) - 1) / (T_2 - T_1)$ . Then, recall that:

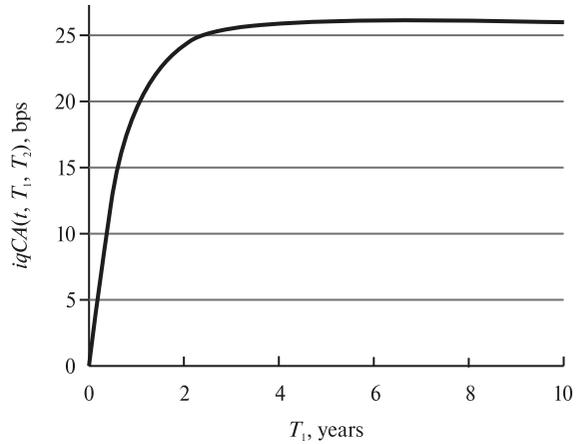
$$d \left( \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \right) = \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right) \left( dW_{d, P_d}^Q(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) dt \right).$$

Changing measure to  $Q^{T_1}$ :

$$\begin{aligned} d \left( \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \right) &= \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \left( \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right)^2 dt \right), \\ d \ln \left( \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \right) &= \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + 0.5 \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right)^2 dt, \end{aligned}$$



**Fig. 2.** Convexity adjustment for quanto in-arrears FRA with the following parameters:  $t = 0$ ;  $\sigma_d = \sigma_f = 10\%$ ;  $T_2 - T_1 = 0.5$ ;  $\theta_f = \theta_d = 0.035$ ;  $r_d(f) = 5\%$ ;  $r_f(f) = 10\%$ ;  $\rho_{P_d, P_f} = \rho_{P_d, X} = \rho_{P_f, X} = 0.3$ ;  $X(t) = 1$



**Fig. 3.** Convexity adjustment for quanto in-arrears FRA with the following parameters:  $t = 0$ ;  $\sigma_d = \sigma_f = 10\%$ ;  $\theta = 0.035$ ;  $T_2 - T_1 = 0.5$ ;  $a = 0.7$ ;  $r(t) = 5\%$ ;  $\rho_{P_d, X} = \rho_{P_f, X} = 0$ ;  $\rho_{P_d, P_f} = 1$ , both rates are identical

$$\frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} = \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{T_1} \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right)^2 dt + \int_t^{T_1} \left( \zeta_{P_d}^{T_1}(t) - \zeta_{P_d}^{T_2}(t) \right) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) \right\}.$$

So,

$$X_{T_1}(T_1) \frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} = X_{T_1}(t) \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \exp \left( 0.5 \int_t^{T_1} \left( -2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_d}^{T_2}(t) + \zeta_{P_d}^{T_2}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\rho_{P_d, P_f} - \zeta_{P_f}^{T_1}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\sigma_X\rho_{P_d, X} - 2\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\sigma_X\rho_{P_f, X} - \sigma_X^2 \right) dt + \int_t^{T_1} -\zeta_{P_d}^{T_2}(t) dW_{d, P_d}^{T_1}(t) + \int_t^{T_1} \zeta_{P_f}^{T_1}(t) dW_{d, P_f}^{T_1}(t) + \int_t^{T_1} \sigma_X dW_{d, X}^{T_1}(t) \right).$$

Using Cholesky decomposition, we decompose correlated wiener processes on independent ones:

$$dW_{d, P_d}^{T_1}(t) = a_{11}dB_1(t) + a_{12}dB_2(t) + a_{13}dB_3(t), \quad dW_{d, P_f}^{T_1}(t) = a_{21}dB_1(t) + a_{22}dB_2(t) + a_{23}dB_3(t),$$

$$dW_{d, X}^{T_1}(t) = a_{31}dB_1(t) + a_{32}dB_2(t) + a_{33}dB_3(t),$$

where  $dB_1(t)$ ,  $dB_2(t)$ , and  $dB_3(t)$  — uncorrelated Wiener processes in  $Q^{T_1}$ -measure,  $a_{ij}$  are the elements of the covariance matrix square root. So, expectation of lognormal random variable:

$$\mathbb{E}_{Q^{T_1}} \left[ X_{T_1}(T_1) \frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} \mid \mathcal{F}_t \right] = X_{T_1}(t) \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} e^I,$$

where

$$I = 0.5 \int_t^{T_1} \left( -2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_d}^{T_2}(t) + \zeta_{P_d}^{T_2}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\rho_{P_d, P_f} - \zeta_{P_f}^{T_1}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\sigma_X\rho_{P_d, X} - 2\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\sigma_X\rho_{P_f, X} - \sigma_X^2 \right) dt + 0.5 \int_t^{T_1} \left( -\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{11} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{21} + \sigma_X a_{31} \right)^2 dt + 0.5 \int_t^{T_1} \left( -\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{12} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{22} + \sigma_X a_{32} \right)^2 dt + 0.5 \int_t^{T_1} \left( -\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{13} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{23} + \sigma_X a_{33} \right)^2 dt.$$

Calculating this expression, we get the equation for the in-arrears quanto FRA:

$$iqL(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} e^I - \frac{1}{X_{T_1}(t)} \right),$$

where calculation of  $I$  is given in Appendix.

Convexity adjustment for this exotic forward contract is  $iqCA(t, T_1, T_2) = iqL(t, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)$ . Fig. 2–3 show  $iqCA(t, T_1, T_2)$  with different parameters.

In case when both rates are from the same currency market, adjustment term is similar to the in-arrears one, which is shown in the fig. 3.

7. QUANTO IN-ARREARS OPTIONS

As a part of our study of quanto in-arrears contracts we also consider quanto in-arrears options on interest rate — caplet and floorlet.

**Definition 9.** An in-arrears quanto caplet (floorlet) is a European-style call (put) option on interest rate which is fixed at  $T_1$ . Buyer of this option at  $t \leq T_1$  with maturity  $T_1$ , strike  $K$  and principal amount  $N$  is offered with the following rights at time  $T_1$ :

- 1) *pay (receive)*  $(T_2 - T_1)KN$  f-currency units;
- 2) *receive (pay)*  $(T_2 - T_1)L(T_1, T_1, T_2)N$  f-currency units, while  $L$  and  $K$  are set in d-currency units.

Formulas for option prices are given below:

$$qCpl(t, T_1, T_2, K) = (T_2 - T_1)P_f(t, T_1)E_{Q_t^f} \left[ \left( L(T_1, T_1, T_2) - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right],$$

$$qFl(t, T_1, T_2, K) = (T_2 - T_1)P_f(t, T_1)E_{Q_t^f} \left[ \left( K - L(T_1, T_1, T_2) \right)^+ | \mathcal{F}_t \right].$$

First, we find price of qCpl. We switch to d-currency — as in Section 6:

$$E_{Q_t^f} \left[ \left( L(T_1, T_1, T_2) - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] = E_{Q_t^d} \left[ \left( L(T_1, T_1, T_2) - K \right)^+ \frac{P_f(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_1)} X(T_1) | \mathcal{F}_t \right] \frac{P_d(t, T_1)}{P_f(t, T_1)X(t)} =$$

$$= X_{T_1}^{-1}(t)E_{Q_t^d} \left[ \left( L(T_1, T_1, T_2) - K \right)^+ X_{T_1}(T_1) | \mathcal{F}_t \right] = X_{T_1}^{-1}(t)E_{Q_t^d} \left[ \frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} X_{T_1}(T_1) \times 1_{\frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} > 1 + (T_2 - T_1)K} | \mathcal{F}_t \right] -$$

$$- X_{T_1}^{-1}(t)E_{Q_t^d} \left[ \left( 1 + (T_2 - T_1)K \right) X_{T_1}(T_1) \times 1_{\frac{P_d(T_1, T_1)}{P_d(T_1, T_2)} > 1 + (T_2 - T_1)K} | \mathcal{F}_t \right].$$

Calculating both mathematical expectations, we come to the analytical formula of the quanto in-arrears option price:

$$qCpl(t, T_1, T_2, K) = P_f(t, T_1) \left\{ \frac{P_d(t, T_1)}{P_d(t, T_2)} \right\} \exp\{0.5J_0\} \exp\{0.5(J_1 + J_2 + J_3)\} \times$$

$$\times N(\sqrt{J_1} - l)N(\sqrt{J_2} - l)N(\sqrt{J_3} - l) - \left( 1 + (T_2 - T_1)K \right) \exp\{-0.5Q_0\} \times$$

$$\times \exp\{0.5(Q_1 + Q_2 + Q_3)\} N(\sqrt{Q_1} - l)N(\sqrt{Q_2} - l)N(\sqrt{Q_3} - l),$$

where

$$J_0 = \int_t^{T_1} (-2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_d}^{T_2}(t) + \zeta_{P_d}^{T_2}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\rho_{P_d, P_f} - \zeta_{P_f}^{T_1}(t)^2 + 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\sigma_X \rho_{P_d, X} - 2\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\sigma_X \rho_{P_f, X} - \sigma_X^2) dt,$$

$$J_1 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{11} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{21} + \sigma_X a_{31})^2 dt, J_2 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{12} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{22} + \sigma_X a_{32})^2 dt,$$

$$J_3 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_2}(t)a_{13} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{23} + \sigma_X a_{33})^2 dt,$$

$$Q_0 = \int_t^{T_1} (\zeta_{P_d}^{T_1}(t)^2 - 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\rho_{P_d, P_f} - 2\zeta_{P_d}^{T_1}(t)\sigma_X \rho_{P_d, X} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)^2 + 2\zeta_{P_f}^{T_1}(t)\sigma_X \rho_{P_f, X} + \sigma_X^2) dt,$$

$$Q_1 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_1}(t)a_{11} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{21} + \sigma_X a_{31})^2 dt, Q_2 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_1}(t)a_{12} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{22} + \sigma_X a_{32})^2 dt,$$

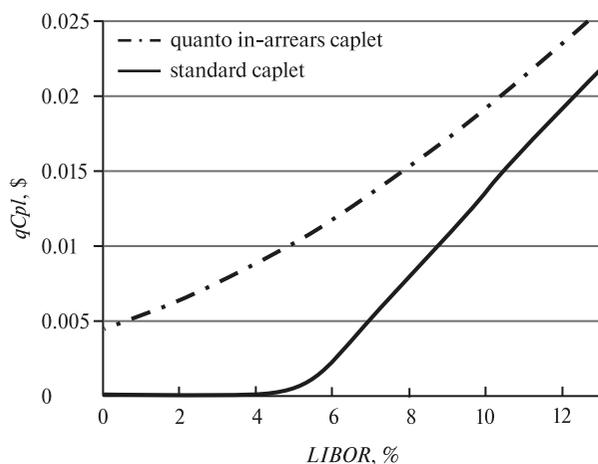
$$Q_3 = \int_t^{T_1} (-\zeta_{P_d}^{T_1}(t)a_{13} + \zeta_{P_f}^{T_1}(t)a_{23} + \sigma_X a_{33})^2 dt,$$

calculations of which are given in Appendix.

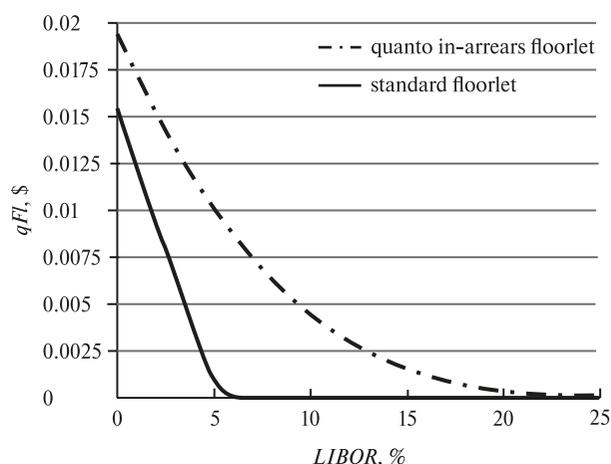
We will find the floorlet price using put-call parity of European options:

$$qFl(t, T_1, T_2, K) = qCpl(t, T_1, T_2, K) - (T_2 - T_1)P_f(t, T_1)(iqL(t, T_1, T_2) - K).$$

Fig. 4–5 show differences in quanto in arrears and standard caplet and floorlet prices with different parameters.



**Fig. 4.** Quanto in-arrears caplet price vs. Standard caplet price with the following parameters:  $t = 0$ ;  $\sigma_d = \sigma_f = 10\%$ ;  $T_{i+1} - T_i = 0.5$ ;  $\theta_f = \theta_d = 0.035$ ;  $r_d(t) = 5\%$ ;  $r_f(t) = 10\%$ ;  $\rho_{pd, pf} = \rho_{pd, X} = \rho_{pf, X} = 0.3$ ;  $X(t) = 1$



**Fig. 5.** Quanto in-arrears floorlet price vs. Standard floorlet price with the following parameters:  $t = 0$ ;  $\sigma_d = \sigma_f = 10\%$ ;  $T_{i+1} - T_i = 0.5$ ;  $\theta_f = \theta_d = 0.035$ ;  $r_d(t) = 5\%$ ;  $r_f(t) = 10\%$ ;  $\rho_{pd, pf} = \rho_{pd, X} = \rho_{pf, X} = 0.3$ ;  $X(t) = 1$

## 8. CONCLUSION

We derived the formula for calculating the forward LIBOR rate in FRA when payment is settled at different dates. It was proved that the convexity adjustment to the vanilla forward rate should be negative when payment takes place after forward period. Next, we studied quanto in-arrears FRA and checked, that it equals in-arrears FRA in case when rates and principal are from the same currency market, which is shown in the fig. 3. Finally, we briefly studied quanto in-arrears option contracts and found that their prices are greater than those of vanilla options.

## APPENDIX

Here is the calculation of the integral from the Section 6:  $I = I_0 + \dots + I_3$ , where calculations of  $I_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , are given below:

$$\begin{aligned}
 I_0 = & 0.5 \left[ \left( \sigma_{p_d} / a_{p_d} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - t)\}}{a_{p_d}} - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 + T_1 - 2t)\}}{2a_{p_d}} \right) + \left( \sigma_{p_d} / a_{p_d} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\exp\{-a_{p_d}(T_2 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2 - t)\}}{2a_{p_d}} \right) + \right. \\
 & \left. + 2\rho_{p_d, p_f} \frac{\sigma_{p_d} \sigma_{p_f}}{a_{p_d} a_{p_f}} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\exp\{- (a_{p_d} + a_{p_f})(T_1 - t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) - \left( \sigma_{p_f} / a_{p_f} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2}{a_{p_f}} + \frac{2\exp\{-a_{p_f}(T_2 - t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{2a_{p_f}} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\exp\{-2a_{p_f}(T_1-t)\}}{2a_{p_f}} \Bigg) + 2\sigma_X \rho_{p_d, X} \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1-t)\}}{a_{p_d}} \right) - \\
 & \left. - 2\sigma_X \rho_{p_f, X} \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} \right) - \sigma_X^2 (T_1-t) \right], \\
 I_i = & 0.5 \left[ \left( \sigma_{p_d} a_{1i} / a_{p_d} \right)^2 \left( T_1-t - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{2\exp\{-a_{p_d}(T_2-t)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2-t)\}}{2a_{p_d}} \right) - 2a_{1i} a_{2i} \frac{\sigma_{p_d} \sigma_{p_f}}{a_{p_d} a_{p_f}} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{2a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-t)\}}{2a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2-t) - a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) - 2a_{1i} a_{2i} \sigma_X \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \times \right. \\
 & \left. \times \left( T_1-t - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-t)\}}{a_{p_d}} \right) + \left( \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} a_{2i} \right)^2 \left( T_1-t - \frac{2}{a_{p_f}} + \frac{2\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2a_{p_f}} - \frac{\exp\{-2a_{p_f}(T_1-t)\}}{2a_{p_f}} \right) + 2a_{2i} a_{3i} \sigma_X \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} \right) + \sigma_X^2 a_{3i}^2 (T_1-t) \right], \quad i=1,2,3.
 \end{aligned}$$

Below are the calculations of the integrals from the Section 7:

$$\begin{aligned}
 J_0 = & -2 \left( \left( \sigma_{p_d} / a_{p_d} \right)^2 \left( T_1-t - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-t)\}}{a_{p_d}} - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1-t)\}}{a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2+T_1-2t)\}}{2a_{p_d}} \right) + \left( \sigma_{p_d} / a_{p_d} \right)^2 \left( T_1-t - \frac{2\exp\{-a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{a_{p_d}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\exp\{-a_{p_d}(T_2-t)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2-T_1)\}}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2-t)\}}{2a_{p_d}} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2\sigma_{p_d} \sigma_{p_f}}{a_{p_d} a_{p_f}} \rho_{p_d, p_f} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\exp\{- (a_{p_d} + a_{p_f})(T_1-t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) - \left( \sigma_{p_f} / a_{p_f} \right)^2 \left( T_1-t - \frac{2}{a_{p_f}} + \frac{2\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{2a_{p_f}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\exp\{-2a_{p_f}(T_1-t)\}}{2a_{p_f}} \right) - 2\sigma_X \rho_{p_d, X} \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \left( T_1-t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1-t)\}}{a_{p_f}} \right) - \sigma_X^2 (T_1-t) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_i &= \left( \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} a_{li} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2 \exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{2 \exp\{-a_{p_d}(T_2 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{2a_{p_d}} - \right. \\
&\left. - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_2 - t)\}}{2a_{p_d}} \right) - \frac{2a_{li}a_{2i}}{a_{p_d}a_{p_f}} \sigma_{p_d} \sigma_{p_f} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d}} + \right. \\
&\left. + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - t) - a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) - \\
&\quad - 2a_{li}a_{3i}\sigma_X \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \left( T_1 - t - \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - T_1)\}}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_2 - t)\}}{a_{p_d}} \right) + \\
&\quad + \left( a_{2i} \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2}{a_{p_f}} + \frac{2 \exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{2a_{p_f}} - \frac{\exp\{-2a_{p_f}(T_1 - t)\}}{2a_{p_f}} \right) + \\
&\quad + 2a_{2i}a_{3i}\sigma_X \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} \right) + (\sigma_X a_{3i})^2 (T_1 - t), \quad i=1,2,3. \\
Q_0 &= \left( \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2}{a_{p_d}} + \frac{2 \exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_1 - t)\}}{2a_{p_d}} \right) - \\
&\quad - 2\rho_{p_d, p_f} \frac{\sigma_{p_d} \sigma_{p_f}}{a_{p_d} a_{p_f}} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\exp\{-(a_{p_d} + a_{p_f})(T_1 - t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) - 2\sigma_X \rho_{p_d, X} \frac{\sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} \right) + \\
&\quad + \left( \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2}{a_{p_f}} + \frac{2 \exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} + \frac{1}{2a_{p_f}} - \frac{\exp\{-2a_{p_f}(T_1 - t)\}}{2a_{p_f}} \right) + \\
&\quad + 2\sigma_X \rho_{p_f, X} \frac{\sigma_{p_f}}{a_{p_f}} \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} \right) + \sigma_X^2 (T_1 - t). \\
Q_i &= \left( \frac{a_{li} \sigma_{p_d}}{a_{p_d}} \right)^2 \left( T_1 - t - \frac{2}{a_{p_d}} + \frac{2 \exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{2a_{p_d}} - \frac{\exp\{-2a_{p_d}(T_1 - t)\}}{2a_{p_d}} \right) - \frac{2a_{li}a_{2i}\sigma_{p_d}\sigma_{p_f}}{a_{p_d}a_{p_f}} \times \\
&\quad \times \left( T_1 - t - \frac{1}{a_{p_f}} + \frac{\exp\{-a_{p_f}(T_1 - t)\}}{a_{p_f}} - \frac{1}{a_{p_d}} + \frac{\exp\{-a_{p_d}(T_1 - t)\}}{a_{p_d}} + \frac{1}{a_{p_d} + a_{p_f}} - \frac{\exp\{-(a_{p_d} + a_{p_f})(T_1 - t)\}}{a_{p_d} + a_{p_f}} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2a_{1i}a_{3i}\sigma_X\sigma_{P_d}}{a_{P_d}}\left(T_1-t-\frac{1}{a_{P_d}}+\frac{\exp\{-a_{P_d}(T_1-t)\}}{a_{P_d}}\right)+\left(\frac{a_{2i}\sigma_{P_f}}{a_{P_f}}\right)^2\left(T_1-t-\frac{2}{a_{P_f}}+\frac{2\exp\{-a_{P_f}(T_1-t)\}}{a_{P-f}}\right)+ \\
& +\frac{1}{2a_{P_f}}-\frac{\exp\{-2a_{P_f}(T_1-t)\}}{2a_{P_f}}\left)+\frac{2a_{2i}a_{3i}\sigma_X\sigma_{P_f}}{a_{P_f}}\left(T_1-t-\frac{1}{a_{P_f}}+\frac{\exp\{-a_{P_f}(T_1-t)\}}{a_{P_f}}\right)+(\sigma_X a_{3i})^2(T_1-t), \quad i=1,2,3.
\end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Gaminha B., Gaspar R.M., Oliveira O.** (2015). *LIBOR convexity adjustments for the Vasicek and Cox–Ingersoll–Ross models*. Available at: <https://ssrn.com/abstract=2677712>
- Geman H., Karoui El N., Rochet J.-C.** (1995). Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. *Journal of Applied Probability*, 32 (2), 443–458.
- Hagan P.** (2003). Convexity conundrums: Pricing CMS swaps, caps, and floors. *Wilmott Magazine*, 2, 38–44.
- Hsieh T.-Y., Chou C.-H., Chen S.-N.** (2015). Quanto interest-rate exchange options in a cross-currency LIBOR market model. *Asian Economic and Financial Review*, 5 (5), 816–830.
- Hull J.C.** (2017). *Options, futures, and other derivatives*. New York: Pearson Education.
- Lin H.-J.** (2012). An easy method to price quanto forward contracts in the HJM model with stochastic interest rates. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 76 (4), 549–557.
- Malykh N.O., Postevoy I.S.** (2019). Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward in-arrears contracts on LIBOR rate. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 99, 189–198. DOI: 10.1090/tpms/1089
- Mcinerney D., Zastawniak T.** (2015). *Stochastic Interest Rates*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pelsser A.** (2003). Mathematical foundation of convexity correction. *Quantitative Finance*, 3 (1), 59–65.
- Privault N.** (2012). *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Vasicek O.** (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 177–188.

## Расчет выпуклой поправки к форвардным ставкам в модели Васичека для экзотических форвардных контрактов

© 2022 г. А.В. Куликов, Н.О. Малых, И.С. Постевой

### **А.В. Куликов,**

*Физтех-школа прикладной математики и информатики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный; e-mail: avkulikov15@gmail.com*

### **Н.О. Малых,**

*Физтех-школа прикладной математики и информатики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный; e-mail: malykh@phystech.edu*

### **И.С. Постевой,**

*Физтех-школа прикладной математики и информатики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, e-mail: postevoi@phystech.edu*

Поступила в редакцию 17.04.2022

*Авторы выражают искреннюю благодарность анонимным рецензентам за ценные замечания раннему варианту статьи.*

**Аннотация.** В данной статье мы рассмотрели оценку форвардных контрактов, которые являются популярными финансовыми инструментами для покупки или продажи каких-либо активов в заданный момент времени в будущем по указанной фиксированной цене. Условия таких контрактов могут устанавливаться в зависимости от потребностей покупателей или продавцов, а торговля ими происходит на внебиржевом рынке. Это отличает их от фьючерсов, которые торгуются на бирже на стандартизированных условиях. Фокусом нашего исследования являются форвардные контракты на процентную ставку с выплатой в момент фиксации плавающей ставки (in-arrears forward rate agreement, или in-arrears FRA). Они отличаются от обычных форвардных контрактов на ставку тем, что плавающая процентная ставка выплачивается в момент фиксации. Мы рассчитали выпуклую поправку к плавающей процентной ставке, возникающую в таких контрактах, при различных конфигурациях времени выплат в однофакторной стохастической модели Васичека. С помощью принципа безарбитражности мы показали, что поправка будет неотрицательной в случае, когда выплаты происходят до конца периода начисления, и отрицательной в случае, когда выплаты происходят после. Мы также изучили in-arrears форвардные и опционные контракты, в которых ставка и номинал, на который начисляется эта ставка, относятся к разным валютам quanto in-arrears FRA и quanto in-arrears опционы). Мы убедились, что quanto in-arrears FRA равен обычному in-arrears FRA в случае, когда валюты совпадают, и что quanto in-arrears опционы дороже обычных.

**Ключевые слова:** выпуклая поправка; форвардный контракт на процентную ставку (FRA); модель Васичека; принцип безарбитражности; форвардный контракт на процентную ставку с мгновенной выплатой (in-arrears FRA); кванто-форвардный контракт на процентную ставку с мгновенной выплатой (quanto in-arrears FRA); LIBOR; MOSPRIME, форвардный контракт на процентную ставку с мгновенной выплатой (in-arrears FRA / iFRA).

**Классификация JEL:** G12, G13, C02.

Для цитирования: **Kulikov A.V., Malykh N.O., Postevoy I.S.** (2022). Calculation of the convexity adjustment to the forward rate in the Vasicek model for the forward exotic contracts // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 115–128. DOI: 10.31857/S042473880021701-0

---

---

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

---

---

## Оптимизация портфеля облигаций федерального займа и сделок РЕПО

© 2022 г. В.М. Добровольский, Д.Ю. Голембиовский

**В.М. Добровольский,**

*МГУ им М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: VladimirDobrovolskyMSU@gmail.com*

**Д.Ю. Голембиовский,**

*МГУ им М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: golemb@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 23.01.2022

**Аннотация.** В рамках рассматриваемой модели инвестор может совершать сделки по покупке и продаже облигаций федерального займа (ОФЗ), а также сделки прямого и обратного РЕПО под залог ОФЗ. Сделки заключаются с целью размещения свободной ликвидности и получения процентного дохода. Статья посвящена задаче построения оптимального портфеля сделок. В работе рассматриваются генерация сценариев изменения цен ОФЗ, математическая постановка задачи оптимизации, оценка ее размерности в зависимости от числа активов и сценариев, а также численные эксперименты на исторических данных и построение эффективной границы доходности и риска портфеля (efficient portfolio frontier). Генерация сценариев изменений цен ОФЗ реализована с помощью исторического моделирования параметрической кривой бескупонной доходности. Критерием оптимизации задачи формирования портфеля выбрана мера риска — условная стоимость под риском (conditional value at risk, CVAR). При этом соблюдаются ограничения на среднюю доходность и самофинансирование портфеля. Предложен метод ребалансировки портфеля без дополнительных инвестиций, целью которого является минимизация риска при заданной доходности. Численные эксперименты проводились на основе ликвидных ОФЗ, торговавшихся на Московской бирже в 2014–2020 гг. Для соответствия модели реальным условиям торговли были учтены комиссии за проведение сделок, дисконт РЕПО, бид, аск (bid, ask) спрэд котировок ОФЗ, объемы торгов. Полученные при численном моделировании результаты показали, что использование торговой стратегии на основе решения поставленной задачи в среднем приносит более высокий доход по сравнению с вложениями в отдельные облигации при сопоставимом риске инвестиций. Данный эффект наблюдается при достаточно высоких требованиях к средней доходности портфеля.

**Ключевые слова:** оптимизация инвестиционного портфеля, облигации, G-кривая, РЕПО, задача линейного программирования, эффективная граница портфеля, генерация сценариев цен облигаций, короткая позиция, торговая стратегия.

**Классификация JEL:** C61.

Для цитирования: Добровольский В.М., Голембиовский Д.Ю. (2022). Оптимизация портфеля облигаций федерального займа и сделок РЕПО // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 129–141. DOI: 10.31857/S042473880018212-2

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть портфеля ценных бумаг финансовых организаций России состоит из облигаций, в том числе из облигаций федерального займа (ОФЗ). Для управления ликвидностью финансовые организации также часто прибегают к сделкам РЕПО — краткосрочному кредитованию под залог ценных бумаг. Привлечение недостающей ликвидности происходит через сделки прямого РЕПО (организация привлекает кредит, передавая контрагенту ценные бумаги, например ОФЗ, и получает их обратно по окончании срока кредита). Размещение ОФЗ в прямое РЕПО также позволяет создать финансовый рычаг, т.е. осуществить покупку облигаций на заемные средства. Размещение излишней ликвидности может быть произведено через сделки обратного РЕПО (организация выдает кредит, получая в залог ОФЗ, и обязуется вернуть их по окончании срока кредита). Продажа ОФЗ, являющихся залогом сделки обратного РЕПО, обязывает участника рынка, заключившего сделки (далее — Инвестор), купить на рынке эти облигации до окончания сделки. До осуществления покупки у Инвестора формируется *короткая позиция* в облигациях. ОФЗ являются наиболее ликвидными инструментами с фиксированным доходом на российском фондовом рынке. Риск дефолта ОФЗ традиционно оценивается как незначительный. Однако цены этих облигаций меняются в зависимости

от политики Банка России, рыночной конъюнктуры и прочих факторов. В связи с этим управление портфелем ОФЗ и сделок РЕПО является актуальной и важной задачей торгового подразделения и казначейства финансовой организации. Мотивом написания данной статьи стала потребность в современном механизме оптимизации данного портфеля, применимом на российском рынке.

Теория портфеля активов впервые была сформулирована Гарри Марковицем (Markowitz, 1952). На основе статистических оценок математического ожидания, дисперсии и ковариационной матрицы активов, входящих в портфель, выбиралось оптимальное соотношение активов. В задаче оптимизации минимизировалась дисперсия портфеля (как мера риска) при заданном ограничении на среднюю доходность. За прошедшие годы эта теория получила существенное развитие.

Неофициальным стандартом на сегодняшний день является использование в качестве меры риска условной стоимости под риском (conditional value at risk, CVAR). Н. Бусай и Д. Росен в (Busay, Rosen, 1999), а также Ф. Андерсон и С. Урясьев в (Andersson et al., 1999) использовали CVAR для оценки и оптимизации кредитного риска. В статьях (Embrechts, Resnick, Samorodnitsky, 1999; Embrechts, Kluppelberg, Mikosch, 1997) CVAR применяется в актуарных задачах. В отличие от дисперсии или, например, стоимости под риском (value at risk, VaR), данная мера риска является когерентной. Свойства когерентной меры риска сформулированы в (Artzner et al., 1999). Там же показано, что господствующая на тот момент мера VAR несубаддитивна, из-за чего не может считаться когерентной. Когерентность CVAR была доказана в статье (Rockafellar, Uryasev, 2002), и было показано, что задачу минимизации CVAR при ограничении на среднюю доходность на основе конечного множества сценариев потерь можно свести к задаче линейного программирования.

Для решения задачи необходимо генерировать сценарии, учитывающие взаимосвязанное поведение цен облигаций. Традиционным подходом к расчету цен облигаций является дисконтирование соответствующих денежных потоков по срочной структуре процентных ставок (кривая бескупонных доходностей, КБД). Моделирование КБД является предметом масштабных исследований. В частности, Ч. Нельсон и А. Сигель в (Nelson, Siegel, 1987) предложили параметрическую модель кривой Нельсона–Сигеля (КБД). Она представляет собой функцию от пяти параметров (первый параметр — срочность процентной ставки, остальные четыре — параметры кривой, определяющие ее форму). В 2017 г. Московская биржа (МБ) представила актуальную на текущий момент «Методику определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций (ОФЗ)»<sup>1</sup>. Данную кривую называют G-кривой, она является параметрической кривой Нельсона–Сигеля с добавлением корректирующих коэффициентов. К пяти параметрам классической кривой Нельсона–Сигеля добавлены еще девять. Это — корректирующие коэффициенты, уточняющие форму кривой на различных отрезках срочности.

В статье предложен подход к построению оптимального портфеля в соответствии с критерием оптимизации CVAR при ограничении на среднюю доходность для конечного числа сценариев изменения G-кривой. В отличие от таких мер риска, как VaR или дисперсия, CVAR позволяет учесть тяжелые хвосты в распределении доходностей (CVAR корректно учитывает ситуации, когда распределение не является нормальным). Построение сценариев в работе осуществляется методом исторического моделирования G-кривой (см. разд. 3). Данный подход удобен при работе с ОФЗ на российском рынке по ряду причин. Во-первых, при формировании сценариев участвуют только параметры G-кривой, что позволяет генерировать сценарии для облигаций с недостаточной историей торгов. Во-вторых, размерность сценариев не зависит от числа различных облигаций в портфеле, а только от числа параметров G-кривой. В-третьих, параметры G-кривой регулярно публикуются Московской биржей, благодаря чему необходимость в самостоятельном расчете параметров кривой отпадает.

## 2. ОПИСАНИЕ ТОРГОВОЙ СТРАТЕГИИ

Торговая стратегия, оптимизации которой посвящена статья, разрабатывалась на основе правил проведения торгов на МБ. Однако ввиду единообразия правил на различных биржах, допускающих заключение сделок по покупке/продаже облигаций, а также сделок РЕПО, данная торговая стратегия может быть адаптирована для применения и на других площадках.

<sup>1</sup> ПАО Московская биржа: «Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» (<https://fs.moex.com/files/14299/24888>).

Будем считать, что Инвестор в дату построения инвестиционного портфеля  $t$  имеет возможность купить или продать облигации, а также заключить сделки РЕПО с различными выпусками ОФЗ. Будем обозначать выпуски облигаций индексом  $i$ , который может принимать значения от 1 до  $N$ . Далее более подробно описаны правила и условия заключения сделок.

**Покупка/продажа ОФЗ.** Сделки покупки/продажи облигаций осуществляются в режиме основных торгов « $T+1$ »<sup>2</sup>. В данной статье подразумевается, что для ребалансировки портфеля сделки заключаются в конце торговой сессии. Подобная историческая статистика доступна в различных торговых системах (например, Bloomberg, Reuters, Cbonds).

В рамках данного режима торгов сделки осуществляются через центрального контрагента (ЦК), которым выступает Московская биржа. Торговая заявка содержит параметры: 1) цена — минимальная/максимальная цена, по которой участник рынка готов продать/купить облигацию; 2) объем — число облигаций, по которым участник рынка готов заключить сделку; 3) направление сделки — покупка или продажа.

В качестве цены покупки для целей исследования берется последняя цена  $ask$ . Для облигации с индексом  $i$  в момент времени  $t$  такую цену будем обозначать как  $P_{i,ask}^t$ . В качестве цены продажи — последняя цена  $bid$ . Такую цену будем обозначать  $P_{i,bid}^t$ .

Объем покупки/продажи каждой облигации определяется решением оптимизационной задачи. Объем покупки облигаций с индексом  $i$  будем обозначать как  $x_i^{buy}$ , объем продажи —  $x_i^{sell}$ . Чтобы учитывать возможности рынка удовлетворять заявки, в модели реализованы ограничения на максимальный суммарный объем сделок по каждому выпуску облигаций.

Цена, на основе которой рассчитывается стоимость портфеля, определяется как цена последней сделки в торговой сессии. Использование данной цены при оценке стоимости портфеля на балансе также является распространенной рыночной практикой. Для облигации с индексом  $i$  в момент времени  $t$  такую цену будем обозначать как  $P_{i,last}^t$ .

При покупке/продаже облигаций вместе с выплатой стоимости облигации, определяемой в результате торгов, участники рынка выплачивают также накопленный купонный доход (НКД, AI — accrued interest). Для облигации с индексом  $i$  в момент времени  $t$  НКД будем обозначать как  $AI_i^t$ .

**Сделки РЕПО.** Сделки прямого/обратного РЕПО заключаются в режиме безадресных сделок с ЦК<sup>3</sup>. В рамках описываемой торговой стратегии параметры сделки включают:

- 1) срок сделки РЕПО ( $\Delta t$ ) — сделки РЕПО заключаются срочностью семь дней;
- 2) код ценной бумаги, выступающей в качестве обеспечения, — сделки РЕПО заключаются под залог ОФЗ;
- 3) сумма РЕПО — сумма кредита, выдаваемого в рамках сделки РЕПО. Для сделок прямого РЕПО сумму РЕПО будем обозначать как  $y_i^{direct}$ , для сделок обратного РЕПО —  $y_i^{reverse}$ ;
- 4) дисконт РЕПО ( $d$ , %) — разница между стоимостью ценных бумаг, выступающих в качестве обеспечения, и суммой кредита. Дисконт вводится с целью снижения риска неполного покрытия кредита залогом в случае снижения его стоимости. В режиме безадресных сделок параметр устанавливается МБ;
- 5) число облигаций — число ценных бумаг, выступающих в качестве обеспечения в рамках сделки РЕПО (для прямого РЕПО —  $x_i^{direct}$ , для обратного —  $x_i^{reverse}$ );
- 6) расчетная цена облигации — стоимость одной ценной бумаги, являющейся обеспечением в сделке РЕПО. В режиме безадресных сделок расчетная цена определяется клиринговой организацией (национальный клиринговый центр, НКЦ). Ввиду отсутствия доступа к расчетным ценам, определяемым НКЦ, а также ввиду сравнительно небольшого (по сравнению, например, с акциями) разброса цен на ОФЗ внутри дня для численных экспериментов в качестве расчетной цены облигации используется цена последней сделки  $P_{i,last}^t$ ;
- 7) ставка РЕПО — ставка по кредиту, выраженная в процентах годовых. Ввиду большого числа спецификаций сделок РЕПО и нерегулярных сделок по каждой спецификации на Московской бирже в рамках данной работы было введено допущение о том, что ставка РЕПО по всем сделкам

<sup>2</sup> См. <https://www.nationalclearingcentre.ru/catalog/020415/9374.html>

<sup>3</sup> См. <https://www.moex.com/ru/markets/money/repo/>

недельной срочности определяется как значение индекса  $MOEXREPO1WE^4$ . Данный индекс рассчитывается Московской биржей в соответствии с «Методикой расчета индикаторов ставки РЕПО с ЦК». Далее будем обозначать ставку РЕПО как  $r_t$ . Предполагается, что ставка одинакова для сделок прямого и обратного РЕПО.

Сделка прямого РЕПО происходит следующим образом: контрагент 1 (заемщик) передает ОФЗ с индексом  $i$  в количестве  $x_i^{direct}$  контрагенту 2 (кредитор). Контрагент 2 перечисляет заемщику денежные средства в объеме  $y_i^{direct} = (P_{i,last}^t + AI_i^t)(1-d)$ . Через  $\Delta t$  дней заемщик выплачивает кредитору  $y_i^{direct} (1+r\Delta t/365)$ . Кредитор возвращает заемщику облигации, а также купоны, выплаченные в период удержания ОФЗ. Сделка обратного РЕПО является зеркальной по отношению к сделке прямого РЕПО, т.е. участник рынка, совершающий сделку обратного РЕПО, выступает контрагентом по отношению к участнику, заключающему сделку прямого РЕПО.

Порядок осуществления сделок РЕПО на Московской бирже описан в «Правилах проведения торгов на Московской бирже»<sup>5</sup>.

**Ограничение на самофинансирование.** В рамках рассматриваемой задачи условие самофинансирования портфеля означает, что средств и облигаций, имеющихся у инвестора до начала ребалансировки, должно быть достаточно для построения нового портфеля. Допускается продажа имеющихся облигаций ( $x_i^0$ ), а также облигаций, полученных в рамках сделок обратного РЕПО. Аналогично, допускается использование имеющихся денежных средств ( $x_{money}^0$ ), а также заемных средств, привлеченных в рамках сделки прямого РЕПО.

Подход, описанный в данной статье, может быть реализован организацией, имеющей непосредственный доступ к торгам на Московской бирже, так как в этом случае достаточность средств и ценных бумаг на счете проверяется во время клиринга в конце торговой сессии (т.е. уже после всех операций). При торговле через брокера достаточность средств/ценных бумаг проверяется в момент заключения сделки. Случай, при котором торговая стратегия учитывает достаточность средств при каждой операции, в рамках данной статьи не рассматривается.

Требование самофинансирования можно формализовать следующими неравенствами.

1. Положительный баланс средств:

$$x_{money}^1 = x_{money}^0 + \sum_{i=1}^N (y_i^{sell} - y_i^{buy} + y_i^{direct} - y_i^{reverse}) \geq 0, \quad (1)$$

где  $x_{money}^1$  — количество средств на балансе после ребалансировки портфеля;  $y_i^{sell} = x_i^{sell} (P_{i,bid}^t + AI_i^t)$  — сумма, полученная от продажи  $x_i^{sell}$  облигаций с индексом  $i$ ;  $y_i^{buy} = x_i^{buy} (P_{i,ask}^t + AI_i^t)$  — сумма, затраченная при покупке  $x_i^{buy}$  облигаций с индексом  $i$ .

2. Положительный баланс ценных бумаг:

$$x_i^1 = x_i^0 + x_i^{buy} - x_i^{sell} + x_i^{reverse} - x_i^{direct} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $x_i^1$  — число облигаций с индексом  $i$  после ребалансировки портфеля.

**Определение финансового результата.** В момент времени  $t + \Delta t$  цена *bid* облигации с индексом  $i$  составляет  $P_{i,bid}^{t+\Delta t}$  руб.; цена *ask* —  $P_{i,ask}^{t+\Delta t}$ ; цена, по которой осуществляется расчет стоимости позиции, составляет  $P_{i,last}^{t+\Delta t}$ ; накопленный купонный доход (НКД) равен  $AI_i^{t+\Delta t}$ .

Финансовый результат Инвестора формируется из нескольких составляющих:

1) полученные проценты по кредиту в рамках обратного РЕПО минус уплаченные проценты по кредиту в рамках прямого РЕПО;

2) изменение НКД облигаций, входящих в портфель, а также выплата купонов по ним;

3) уплата комиссий за биржевые сделки;

4) переоценка чистой стоимости облигаций, входящих в портфель.

При известной структуре портфеля, фактором неопределенности в финансовом результате Инвестора является только переоценка чистой стоимости облигаций.

<sup>4</sup> См. ПАО Московская биржа: «Методика расчета индикаторов ставки РЕПО с ЦК» (<https://fs.moex.com/files/8804/34345>).

<sup>5</sup> ПАО Московская биржа: «Правила проведения торгов на фондовом рынке, рынке депозитов и рынке кредитов ПАО «Московская Биржа ММВБ-РТС»», Часть III. Секция рынка РЕПО (<https://fs.moex.com/files/17020/35136>).

### 3. ГЕНЕРАЦИЯ СЦЕНАРИЕВ ЦЕН ОФЗ

#### 3.1. G-кривая

G-кривая представляет собой параметрическую срочную структуру процентных ставок, описывающую функциональную зависимость процентной ставки бескупонной облигации от ее срочности:

$$r(T, \beta) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \tau (1 - e^{-T/\tau}) / T - \beta_2 e^{-T/\tau} + \sum_{i=1}^9 g_i e^{(T-a_i)^2 / b_i^2},$$

где  $T$  — срочность ставки (лет);  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau, g_1, \dots, g_9)$  — набор параметров, динамически определяемых МБ;  $a_i, b_i$  — набор фиксированных параметров, определяемых по правилу:

$$a_1 = 0, a_2 = 0,6, a_{j+1} = a_j + a_2 k^{j-1}, j = 2, \dots, 8; b_1 = a_2, b_{j+1} = b_j k, j = 1, \dots, 8; k = 1,6.$$

В соответствии с методологией МБ определения КБД государственных облигаций<sup>6</sup> G-кривая описывает срочную структуру ставок непрерывно начисляемых процентов.

#### 3.2. Форвардная кривая

В рамках данной работы предполагается, что базовые ожидания участников рынка уже заложены в текущую срочную структуру процентных ставок. Чтобы учесть ожидания рынка на момент ребалансировки, в качестве точечного прогноза используется форвардная G-кривая:

$$f(T, \beta, \Delta t) = \left\{ r\left(T + \frac{\Delta t}{365}, \beta\right) \left(T + \frac{\Delta t}{365}\right) - r(\Delta t, \beta) \frac{\Delta t}{365} \right\} / T.$$

Подробно форвардные ставки описываются, например, в (Hull, 2009).

#### 3.3. Исторические отклонения от форвардной кривой

Обозначим вектор  $\beta$  параметров G-кривой в некоторый исторический момент  $\Theta$  как  $\beta_\Theta$ . В этот момент КБД можно представить как функцию  $r(T, \beta_\Theta)$ . Форвардная КБД на срок  $\Delta t$  определялась как  $f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$ . Предполагается, что данная КБД является точечным прогнозом КБД на момент времени  $\Theta + \Delta t$ . Однако в действительности в момент времени  $\Theta + \Delta t$  вектор  $\beta$  параметров G-кривой составит  $\beta_{\Theta+\Delta t}$ , а соответствующая данным параметрам КБД —  $r(T, \beta_{\Theta+\Delta t})$ . В общем случае  $r(T, \beta_{\Theta+\Delta t}) \neq f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$ . Разность между реализовавшейся на момент времени  $\Theta + \Delta t$  процентной ставкой и форвардной ставкой на момент времени  $\Theta$  для каждой фиксированной срочности  $T$  можно представить как функцию  $\Delta r(T, \Theta, \Delta t) = r(T, \beta_{\Theta+\Delta t}) - f(T, \beta_\Theta, \Delta t)$ .

#### 3.4. Сценарии КБД

На исторических данных возьмем  $N_{scen}$  последовательных отрезков времени длиной  $\Delta t$  дней. Проиндексируем отрезки индексом  $s$ . Для каждого интервала рассчитаем функцию  $\Delta r_s = \Delta r(T, \Theta_s, \Delta t)$ , где  $\Theta_s$  — начало отрезка с индексом  $s$ .

Сценарий КБД определяется как точечный прогноз (форвардная КБД), скорректированный на отклонение  $\Delta r_s$ :

$$r_s(T, \Delta t, \beta_t) = f(T, \Delta t, \beta_t) + \Delta r_s, s = 1, \dots, N_{scen},$$

где  $r_s(t, \Delta t, \beta_t)$  — сценарная КБД;  $\beta_t$  — вектор  $\beta$  параметров G-кривой на дату ребалансировки портфеля.

Далее рассмотрим пример исторического моделирования сценариев G-кривой. Пусть дата, в которую осуществляется моделирование, будет 31.07.2018. Возможные сценарии КБД формируются на 07.08.2018. Ошибки прогноза берутся как разности значений форвардной G-кривой, построенной 22.09.2016 на день 29.09.2016, и значений фактической G-кривой 29.09.2016 (сценарий № 1). В сценарии № 2 ошибки представляют собой разности форвардной кривой, построенной 21.10.2016 на дату 28.10.2016, и фактической кривой 28.10.2016.

Приведенные исторические отклонения от прогноза прибавляются к форвардной кривой на дату 07.08.2018. Таким образом, получается столько сценариев, сколько имеется исторических отклонений КБД от форвардной кривой (в рассматриваемом примере — два сценария). Форвардная кривая на 07.08.2018, а также КБД, соответствующие сценариям № 1 и № 2, и G-кривая на 07.08.2018 представлены на рис. 1.

<sup>6</sup> ПАО Московская биржа: «Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций» (<https://fs.moex.com/files/14299/24888>).

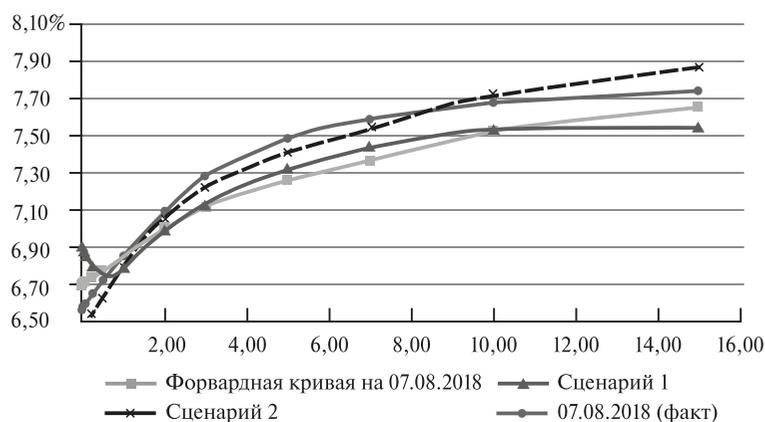


Рис. 1. Прогноз, исторические сценарии и факт КБД

### 3.5. Приведенная стоимость облигации в различных сценариях изменения КБД

Для каждой облигации в портфеле с индексом  $i$  известен будущий поток платежей  $CF_{ij}$ , где индекс  $j$  равен порядковому номеру предстоящего платежа по облигации в дату  $t_j$  дней. Всего по облигации с индексом  $i$  предусмотрено  $N_i$  купонных выплат. В соответствии с методом дисконтирования денежных потоков приведенная стоимость ОФЗ с индексом  $i$  в дату ребалансировки портфеля определяется по формуле  $PV_i^t = \sum_{j=1}^{N_i} CF_{ij} e^{-r(T_j, \beta_t) T_j}$ , где  $T_j = (t_j - t) / 365$ .

Сценарная приведенная стоимость — это приведенная стоимость облигации, срок до выплаты всех купонов которой уменьшился на  $\Delta t$ , а дисконтирование этих купонов осуществляется в соответствии со сценарием изменения КБД:

$$PV_i^s = \sum_{j: t_j > t}^{N_i} CF_{ij} \exp \left\{ -r_s \left( T_j - \frac{t}{365}, t, \beta_t \right) \left( T_j - \frac{t}{365} \right) \right\}.$$

### 3.6. Сценарии цены облигации

Так как G-кривая представляет собой модель оценки КБД, приведенная стоимость, полученная путем дисконтирования денежных потоков облигации при помощи G-кривой, является аппроксимацией рыночной цены ОФЗ + НКД (полная цена). Разность между приведенной стоимостью и рыночной ценой ОФЗ + НКД назовем *ошибкой аппроксимации*. Для облигации с индексом  $i$  обозначим данную ошибку как  $\varepsilon_i^t = (P_{i, last}^t + AI_i^t) - PV_i^t$ . Цена облигации в сценарии  $s$  определяется в этом сценарии как приведенная стоимость, скорректированная на ошибку аппроксимации, а также очищенная от НКД:

$$P_{i, last}^s = PV_i^s + \varepsilon_i^t - AI_i^{t+\Delta t}. \quad (3)$$

### 3.7. Описание и анализ задачи оптимизации

В статье (Rockafellar, Uryasev, 2000) авторы показали: когда совместная функция распределения потерь активов портфеля задана конечным набором векторов  $u_s$ ,  $S = 1, \dots, N_{scen}$  с соответствующими вероятностями  $p_s$ , задача оптимизации портфеля по критерию минимума CVAR может быть представлена в виде задачи линейного программирования

$$\min_{x, \beta, y^+} \beta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{s=1}^{N_{scen}} p_s y_s^+ \quad (4)$$

при ограничениях

$$y_s^+ \geq 0, \quad (5)$$

$$x^T u_s + \beta + y_s^+ + \Delta \Pi_s^0 \geq 0, \quad s = 1, \dots, N_{scen}, \quad (6)$$

$$-x^T \bar{u} - \Delta \bar{\Pi}^0 \geq \Delta W, \quad (7)$$

$$-x^T LI \leq \bar{LI}, \quad (8)$$

где  $x$  — вектор вложений в активы портфеля (в количестве ценных бумаг);  $\beta$  — уровень потерь по портфелю, который не будет превышен с вероятностью уровня значимости  $\alpha$  (VaR);  $y^+$  — вектор

вспомогательных переменных задачи, состоящий из  $y_s^+$ ;  $u_s$  — потери активов портфеля, соответствующие сценарию  $s$ ;  $\Delta\Pi_s^0$  — потери портфеля, состоящего из начальных вложений, соответствующие сценарию  $s$ ;  $\bar{u}$  — средние потери активов портфеля;  $\Delta\Pi^0$  — средние потери портфеля, состоящего из начальных вложений;  $\Delta W$  — минимальный средний доход, требуемый от портфеля,  $LI$  — матрица преобразования вида  $-x^T LI = (x_i^{buy} + x_i^{sell} + x_i^{direct} + x_i^{reverse})_i$ , суммирующая число ценных бумаг каждого выпуска, участвующих в ребалансировке;  $\bar{LI}$  — вектор ограничений на максимальное число ценных бумаг каждого выпуска, участвующих в ребалансировке (ограничение на объем сделок с каждой ОФЗ).

Под потерями в данной задаче подразумевается размер убытка Инвестора в денежном выражении. Если портфель приносит прибыль, потери будут принимать отрицательные значения.

Оптимизация портфеля осуществляется с помощью подбора оптимального числа облигаций для покупки/продажи, а также передачи/получения в рамках сделок РЕПО. В таком случае вектор  $x$  оптимизационных переменных для задачи (4)–(8) представляется в виде  $x = (x_1^{buy}, x_1^{sell}, x_1^{direct}, x_1^{reverse}, x_1^1, \dots, x_N^{buy}, x_N^{sell}, x_N^{direct}, x_N^{reverse}, x_N^1)$ .

Всем историческим сценариям G-кривой придается одинаковая, обратно пропорциональная числу исторических сценариев:  $p_s = 1/N_{scen}$ ,  $s = 1, \dots, N_{scen}$ . Для сценария с индексом  $s$  цена облигации с индексом  $i$  определяется по формуле (3). Сценарное изменение стоимости портфеля без учета начальных вложений:

$$\Delta\Pi_s = \sum_{i=1}^N (P_{i,mid}^s - P_{i,mid}^t) (x_i^{buy} - x_i^{sell}). \tag{9}$$

Функция потерь  $u_s$  из (6) для сценария  $s$  — это величина, противоположная финансовому результату

$$x^T u_s = - \left( \frac{\Delta t}{365} rCredit + \Delta\Pi_s + \theta\Pi - Fee \right), \quad s = 1, \dots, N_{scen}, \tag{10}$$

где  $\theta\Pi = \sum_{i=1}^N (AI_i^{t+\Delta t} - AI_i^t + \sum_{j:t_j < \Delta t} CF_{ij}) (x_i^{buy} - x_i^{sell})$  — увеличение НКД и выплата купона за период сделки РЕПО;  $Fee = c \sum_{i=1}^N (P_{i,bid}^t x_i^{sell} + P_{i,ask}^t x_i^{buy})$  — уплата комиссий за покупку и продажу ценных бумаг;  $c$  — ставка комиссии.

Часть портфеля, которая соответствует начальным вложениям, не зависит от выбора значений переменных  $x$ , однако потери этой части портфеля все равно зависят от сценария изменения цен. Потери для этой составляющей портфеля определяются по формуле:

$$\Delta\Pi_s^0 = - \sum_{i=1}^N (P_{i,last}^s + AI_i^{t+\Delta t} - P_{i,last}^t - AI_i^t) x_i^0, \tag{11}$$

$$\Delta\Pi^0 = \sum_{s=1}^{N_{scen}} p_s \Delta\Pi_s^0.$$

Минимальный доход  $\Delta W$  из ограничения (7) может быть представлен как

$$\Delta W = Y_{min} (\Delta t / 365) \Pi^0, \tag{12}$$

где  $\Pi^0 = x_{money}^0 + \sum_{i=1}^N (P_{i,last}^t + AI_i^t)$  — стоимость портфеля до ребалансировки;  $Y_{min}$  — требуемая минимальная средняя доходность, выраженная в процентах годовых.

Таким образом, задача оптимизации портфеля ОФЗ и сделок РЕПО представлена в виде задачи линейного программирования. Критерий оптимизации находится из формулы (4) с равными вероятностями, ограничения — из неравенств (5)–(8). Размерность вектора оптимизационных переменных зависит от числа облигаций в портфеле  $N$ , а также от числа сценариев  $N_{scen}$ ;  $(x, \beta^+, \beta^-, y^+) \in R^{N+2+N_{scen}}$ . Число ограничений зависит только от числа сценариев. Матрица ограничений  $A$  имеет размерность  $\dim(A) = (N_{scen} + 1, N + 2 + N_{scen})$ .

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эффективность предложенного подхода оценивалась с помощью моделирования торговой стратегии на исторических данных. Тестирование осуществлялось на историческом периоде 05.07.2017 — 19.11.2019; дата начала этого периода —  $T_{start}$ ; дата окончания —  $T_{end}$ ; дата расчета —  $t$ . На первую расчетную дату  $T_{start}$  Инвестору доступны средства в размере 1 млрд руб.; вложений в ценные бумаги на начальную дату у него нет ( $x_{money}^0 = 10^9$ ,  $x_i^0 = 0$ ).

Моделирование торговой стратегии на исторических данных можно описать циклом действий на каждую расчетную дату внутри периода.

1. Выбираются ОФЗ, находившиеся в обращении в дату  $t$ , а также в течение недели после этой даты. Число различных выпусков таких облигаций будем обозначать  $N_{[t, t+\Delta t]}$ .

2. Для данных ОФЗ производится расчет сценариев изменения цен облигаций. Расчет осуществляется на исторических данных, предшествующих расчетной дате. Число сценариев —  $N_{scen}$ .

3. На основе сценариев изменения цен, а также исторических рыночных данных на дату  $t$  (цены облигаций, НКД, ставка РЕПО), осуществляется постановка задачи оптимизации. Задача решается методом внутренней точки (оптимизация реализована средствами языка Python, использовался солвер из библиотеки `scipy.optimize.linprog`). В результате решения переменная  $\beta$  в соответствии с теоремой Рокафеллара—Урясьева принимает значение VAR-портфеля, а целевая функция — CVAR-портфеля.

4. На дату  $t + \Delta t$  по портфелю рассчитывался модельный финансовый результат.

5. Модельный финансовый результат прибавляется к средствам, доступным Инвестору ( $x_{money}^0 := x_{money}^0 + PnL$ ). За расчетную дату принимается дата  $t + \Delta t$ .

6. Пока  $t + \Delta t < T_{end}$ , переходим к шагу 1.

В портфель были включены 20 выпусков ОФЗ с погашением от 11.05.2016 до 09.08.2034. Для построения сценариев использовались только исторические данные, известные на расчетную дату (т.е. более старые, чем расчетная дата). Горизонт планирования  $\Delta t$  равен 1 неделе. За выбранный период было произведено 119 ребалансировок портфеля. Дисконт РЕПО был определен на уровне 10%. Комиссия за сделку составляла 0,01%. Уровень значимости  $\alpha$  из (4) был принят равным 95%. Ограничение на максимальный объем сделок с каждым выпуском определялось на основе недельного объема торгов. Для большинства выпусков данное ограничение составляло порядка 10 млн бумаг.

Процедура моделирования стоимости портфеля на исторических данных осуществлялась при различных ограничениях на минимальную среднюю доходность  $Y_{min}$ . В качестве ограничения использовались значения от 7 до 15% с шагом в 0,5%.

В табл. 1 описаны основные параметры ОФЗ, составляющих портфель. В табл. 2 представлены цена и НКД соответствующих ОФЗ на дату ребалансировки (26.08.2019), а также на дату расчета финансового результата портфеля (02.09.2019). Решением рассмотренной задачи стал портфель, состоящий из сделок, указанных в табл. 3.

Финансовый результат от данной стратегии за неделю составил 50,42 млн руб. (5,04%). Сюда вошли:

- прибыль от переоценки рыночной цены облигаций — 52,16 млн руб.;
- прибыль от получения/уплаты процентов по сделкам РЕПО — 21,55 млн руб.;

**Таблица 1.** Основные параметры ОФЗ, составляющих портфель

№	Код isin	Дата погашения	Ставка купона, %	Погашение основного долга
1	RU000A0JTG59	11.12.2019	6,78	В дату погашения
2	RU000A0JTYA5	27.05.2020	6,38	В дату погашения
3	RU000A0JREQ7	14.04.2021	7,58	В дату погашения
4	RU000A0JVW30	18.08.2021	7,48	В дату погашения
5	RU000A0D0G29	24.11.2021	3,24	По графику
6	RU000A0JXB41	07.12.2022	7,38	В дату погашения
7	RU000A0JTJL3	25.01.2023	6,98	В дату погашения
8	RU000A0JPLH5	19.07.2023	5,48	По графику
9	RU000A0JU4L3	16.08.2023	6,98	В дату погашения
10	RU000A0JWM07	16.09.2026	7,73	В дату погашения
11	RU000A0JS3W6	03.02.2027	8,13	В дату погашения
12	RU000A0JTK38	19.01.2028	7,03	В дату погашения
13	RU000A0JVW48	17.09.2031	8,48	В дату погашения
14	RU000A0GN9A7	06.02.2036	6,88	По графику

Таблица 2. Цены и НКД ОФЗ, руб. за одну ОФЗ

№	Название выпуска	Цена 26.08.2019	НКД 26.08.2019	Цена 02.09.2019	НКД 02.09.2019
1	Россия 2019–6,78%	1 000,23	13,97	1 000,32	15,28
2	Россия 2020–6,38%	997,40	15,60	998,37	16,83
3	Россия 2021–7,58%	1 013,30	27,28	1 015,20	28,74
4	Россия 2021–7,48%	1 013,15	1,03	1 016,00	2,47
5	Россия 2021–3,24% амортизируемая	996,21	15,85	998,90	17,10
6	Россия 2022–7,38%	1 017,70	15,21	1 020,50	16,63
7	Россия 2023–6,98%	1 006,31	4,99	1 010,17	6,33
8	Россия 2023–5,48% амортизируемая	962,09	4,97	967,90	6,03
9	Россия 2023–6,98%	1 007,50	0,96	1 012,50	2,30
10	Россия 2026–7,73%	1 039,15	32,27	1 049,17	33,76
11	Россия 2027–8,13%	1 064,03	2,68	1 071,03	4,24
12	Россия 2028–7,03%	1 000,13	5,02	1 009,51	6,37
13	Россия 2031–8,48%	1 107,98	33,76	1 115,05	35,39
14	Россия 2036–6,88% амортизируемая	943,50	2,27	961,00	3,59

– убыток от изменения НКД облигаций — (16,52) млн руб.;

– уплата комиссий — (6,7) млн руб.

Согласно теореме Рокафеллара–Урясьева параметр  $\beta$  равен уровню потерь, которые не будут превышены в  $\alpha\%$  случаев. Значение  $-\beta/x_0$  определяет VAR относительного финансового результата портфеля. Значение целевой функции соответствует оценке CVAR-портфеля.

Для того чтобы оценить качество модели, прогноз, полученный при решении оптимизационной задачи, сравнивался с реализацией, полученной в результате численного моделирования на

Таблица 3. Инвестиционная стратегия на 26.08.2019 в соответствии с решением оптимизационной задачи, ед. ценных бумаг

Ценная бумага	Купить	Продать	Передать в прямое РЕПО	Получить в обратное РЕПО	Открытая позиция
Денежные средства	–	–	–	–	–
Россия 2019–6,78%	–	5 001 150	–	5 001 150	–5 001 150
Россия 2020–6,38%	–	4 987 000	–	4 987 000	–4 987 000
Россия 2021–7,58%	–	5 066 500	–	5 066 500	–5 066 500
Россия 2021–7,48%	5 065 750	–	5 065 750	–	5 065 750
Россия 2021–3,24% амортизируемая	4 981 050	–	4 981 050	–	4 981 050
Россия 2022–7,38%	–	–	–	–	–
Россия 2023–6,98%	–	4 957 708	31 127	4 988 835	–4 957 708
Россия 2023–5,48% амортизируемая	–	4 810 450	–	4 810 450	–4 810 450
Россия 2023–6,98%	–	5 037 500	–	5 037 500	–5 037 500
Россия 2026–7,73%	5 195 750	–	5 195 750	–	5 195 750
Россия 2027–8,13%	5 320 150	–	5 320 150	–	5 320 150
Россия 2028–7,03%	–	4 899 092	34 385	4 933 477	–4 899 092
Россия 2031–8,48%	–	5 539 900	–	5 539 900	–5 539 900
Россия 2036–6,88% амортизируемая	6 133 301	–	3 301 699	–	6 133 301

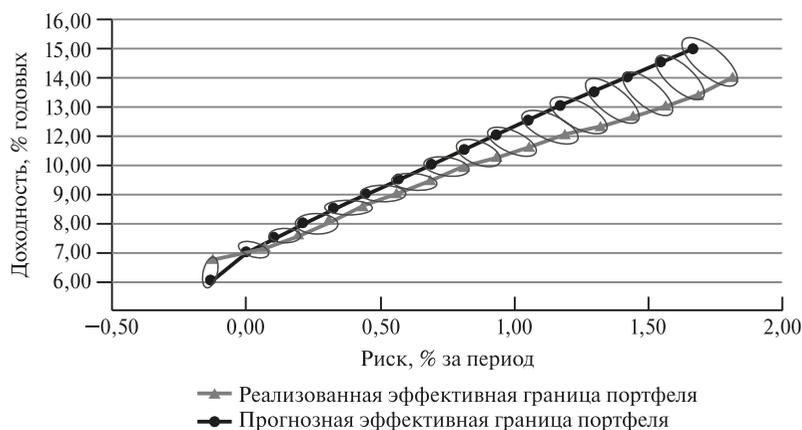


Рис. 2. Реализованная и прогнозная эффективные границы портфеля

истории. Прогнозной доходностью портфеля будем считать ограничение на минимальную доходность (параметр задачи). За реализованную доходность портфеля принимается средний относительный финансовый результат, определяемый в процентах годовых.

Прогнозом относительного риска для портфеля будем считать среднее по всем расчетным датам при одинаковом ограничении на минимальную среднюю доходность значение  $-\beta/x_0$ , полученное в результате решения оптимизационной задачи. В таком случае реализованным относительным риском будет квантиль модельного относительного финансового результата. Так как для решения оптимизационной задачи использовался 95%-ный уровень значимости, квантиль модельного относительного финансового результата брался на уровне 5%.

Бэк-тестирование CVAR не проводилось ввиду сравнительно небольшого объема статистики (для каждого уровня минимальной средней доходности — 119 наблюдений).

На рис. 2 представлены графики зависимости минимальной средней доходности (по оси Y) от прогнозного риска (по оси X, прогнозная эффективная граница портфеля), а также реализованной средней доходности (по оси Y) от реализованного риска (по оси X, реализованная эффективная граница портфеля). Для наглядности точки, определяющие реализованное и прогнозное соотношение риска и доходности, соответствующие одному и тому же портфелю, обведены овалом.

Чтобы оценить, насколько эффективно использовать данные торговые стратегии на рынке, был построен график зависимости реализованной средней доходности от реализованного риска для портфелей, состоящих из вложений в отдельные ОФЗ (далее — маргинальные портфели). Доходность и риск по маргинальным портфелям рассчитывались в соответствии с методикой, описанной ранее. На рис. 3 представлено сравнение реализованной эффективной границы портфеля и графика реализованной доходности к риску для маргинальных портфелей.

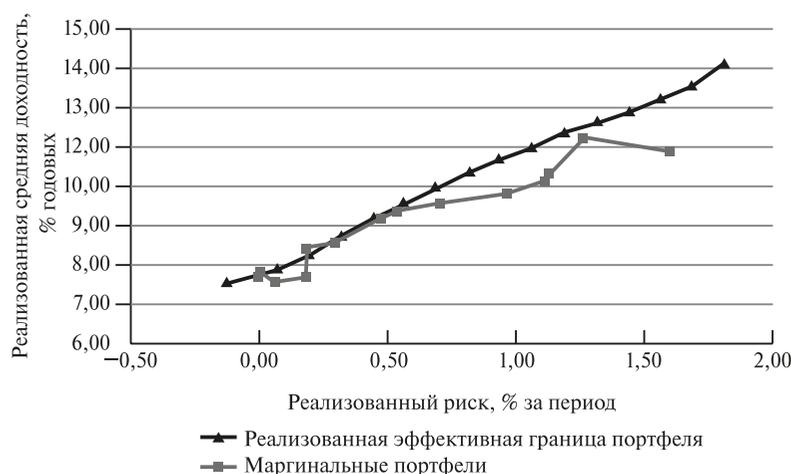


Рис. 3. Эффективная реализованная граница портфеля и характеристики маргинальных портфелей

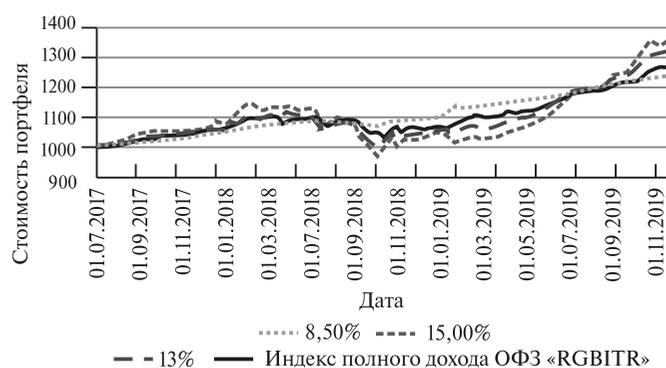


Рис. 4. Динамика стоимости портфелей с различными ограничениями на минимальную среднюю доходность в сравнении с индексом ОФЗ, млн руб.

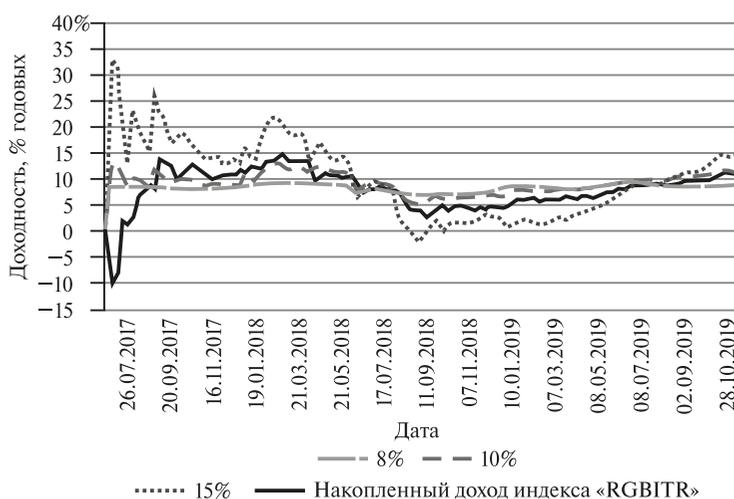


Рис. 5. Накопленный доход торговых стратегий с различными требованиями к минимальной средней доходности

Как видно, высокодоходные портфели в среднем приносят более высокий доход, чем вложения в облигации с сопоставимым уровнем риска. Кроме того, благодаря финансовому рычагу, реализованному через сделки РЕПО, можно построить портфель с более высокой средней доходностью, чем доходность любой ОФЗ, торгуемой на рынке.

На рис. 4 и 5 приведены графики стоимости и накопленной доходности портфелей при различных ограничениях на минимальную среднюю доходность в процентах годовых. Накопленная доходность определяется как средняя за период моделирования доходность, рассчитанная на шаг 4 цикла действий моделирования торговой стратегии. Графики сравнивались с графиком RGBITR — индекса Московской биржи (индекс полного дохода ОФЗ)<sup>7</sup>. Для наглядности значения индекса были масштабированы до уровня, соответствующего объему изначальных вложений в портфель, а также были учтены комиссии за ребалансировку.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была представлена торговая стратегия по управлению портфелем ОФЗ и сделок РЕПО. Стратегия учитывает такие особенности биржевой торговли на Московской бирже, как дисконт РЕПО, комиссии за проведение сделок, выплата накопленного купонного дохода, bid-ask-спрэд, клиринг и пр.

<sup>7</sup> Подробнее про методику расчета и состав индекса описано на сайте МБ (<https://www.moex.com/ru/index/RGBITR>).

Для указанной торговой стратегии на основе модели Рокафеллара–Урясьева была сформулирована задача оптимизации CVAR-портфеля для конечного числа сценариев изменения цен облигаций. Для построения этих сценариев в работе был представлен метод генерации сценарных цен облигаций на основе исторических данных. Поставленная оптимизационная задача является задачей линейного программирования сравнительно невысокой размерности, что позволяет быстро решать ее на относительно слабых компьютерных системах.

Для различных вариантов ограничения на минимальную доходность портфеля было произведено моделирование торговой стратегии на историческом периоде протяженностью более двух лет. Результаты численного моделирования показали, что реализованная доходность портфеля оказалась несколько ниже, чем прогнозная, а реализованный риск портфеля — выше, чем прогнозный; соотношение доходность—риск торговой стратегии лучше, чем аналогичное соотношение для отдельных выпусков ОФЗ. Возможность создавать финансовый рычаг путем покупки облигаций на заемные средства или формировать короткие позиции через продажу облигаций, полученных в обратное РЕПО, позволила сформировать портфели с более высокой доходностью, чем у ОФЗ, торгуемых на рынке.

За рамками настоящей работы остался следующий ряд проблем:

— при моделировании сценариев G-кривой никак не учитывается возможное изменение ошибки аппроксимации G-кривой рыночной цены облигации;

— подход, описанный в данной статье, не учитывает проверку на достаточность средств при проведении каждой сделки и предполагает, что проверка достаточности будет осуществляться во время клиринга в конце торговой сессии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Andersson F., Mausser H., Rosen D.** et al. (2001). Credit risk optimization with conditional Value-at-Risk criterion. *Math. Program.*, 89, 273–291.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.** (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 3, 203–228.
- Bucay N., Rosen D.** (1999). Credit risk of an international bond portfolio: A case study. *ALGO Res. Quart.*, 2, 241–282.
- Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T.** (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. New York: Springer.
- Embrechts P., Resnick S.I., Samorodnitsky G.** (1999). Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*, 3, 2, 30–41.
- Hull J.** (2017). *Futures, options and other derivatives*. 10 edition. London: Pearson.
- Markowitz H.** (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77–91.
- Nelson C.R., Siegel A.F.** (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60, 4, 473–489.
- Rockafellar R.T., Uryasev S.** (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2, 21–42.
- Rockafellar R.T., Uryasev S.** (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26, 7, 1443–1471.

**Optimization of portfolio of federal loan bonds and REPO trades**

© 2022 V.M. Dobrovolskiy, D. Yu. Golembiovskiy

**V.M. Dobrovolskiy,***Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: VladimirDobrovolskyMSU@gmail.com***D.Yu. Golembiovskiy,***Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: golemb@cs.msu.ru*

Received 23.01.2022

**Abstract.** Within the framework of the considered model, the Investor can make transactions for buying and sailing of federal loan bonds (OFZ), as well as direct and reverse REPO deals secured by OFZ. Transactions are made for liquidity management and increasing interest income. This paper discusses the problem of constructing an optimal portfolio of such transactions. The paper considers the approach for the generation of scenarios for OFZ price changes, the mathematical formulation of the optimization problem, the assessment of its dimension depending on the number of assets and the number of scenarios, numerical experiments on historical data and the construction of an efficient portfolio frontier. The generation of scenarios for OFZ price changes is implemented using historical modeling of a parametric zero-coupon yield curve. The optimization problem criterion is the conditional value at risk (CVAR) risk measure. Constraints on the average return and self-financing of the portfolio are taken into account. As a result, the method of portfolio rebalancing without additional investment, the purpose of which is to minimize risk for a given profitability, is proposed. Numerical experiments are based on historical data on active traded OFZ in 2014–2020. The model is close to the real world: it takes into account commissions, repo discount, bid-ask spreads, trade volumes. Numerical results show that a trading strategy based on the introduced model is more profitable on average than investments in individual OFZ with comparable risk. Note that this effect is shown for strategies with high average profit constraints.

**Keywords:** investment portfolio optimization, treasury bonds, federal loan bonds, G-curve, REPO, linear programming problem, efficient portfolio frontier, bonds prices scenarios generation, short position, trade strategy.

**JEL Classification:** C61.

For reference: **Dobrovolskiy V.M., Golembiovskiy D.Yu.** (2022). Optimization of portfolio of federal loan bonds and REPO trades. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 129–141. DOI: 10.31857/S042473880018212-2

---

---

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

---

---

**Шестая встреча Рабочей группы БРИКС по ИКТ  
и высокопроизводительным вычислительным системам**

© 2022 г. В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, М.А. Бурилина, Е.А. Хлунова

**В.Л. Макаров,**

*ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: makarov@cemi.rssi.ru*

**А.Р. Бахтизин,**

*ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: albert.bakhtizin@gmail.com*

**М.А. Бурилина,**

*ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: maribu@mail.ru*

**Е.А. Хлунова,**

*Аналитический центр МНиОП, Москва; e-mail: khlunova@mniop.ru*

Поступила 04.08.2022

Для цитирования: **Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бурилина М.А., Хлунова Е.А.** (2022). Шестая встреча Рабочей группы БРИКС по ИКТ и высокопроизводительным вычислительным системам // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 3. С. 142–144.

22–23 июня 2022 г. состоялось шестое заседание Рабочей группы стран БРИКС по ИКТ и высокопроизводительным вычислительным системам (6<sup>th</sup> Meeting of the BRICS Working Group on ICT and HPC) в формате видеоконференции (в связи с продолжающейся эпидемиологической ситуацией). Страной-организатором была Индия, а совещание проходило на онлайн-платформе Webex. Заседание прошло под председательством руководителя отдела международного сотрудничества Министерства науки и технологий Индии (Advisor & Head of International Cooperation Division, DST, India) Санджива Кумара Варшней (dr. S.K. Varshney). Со стороны России в совещании приняли участие представители следующих организаций:

- Министерство науки и высшего образования (заместитель директора Департамента цифрового развития В.В. Савченко, советник Департамента международного сотрудничества А.А. Кутузова);
- Аналитический центр МНиОП (исполнительный директор И.Р. Куклина, заместитель исполнительного директора Е.А. Хлунова);
- МГУ имени М.В. Ломоносова (директор НИВЦ В.В. Воеводин, заместитель директора НИВЦ Степаненко В.М., заведующий лабораторией НИВЦ В.Б. Сулимов);
- Центральный экономико-математический институт РАН (директор А.Р. Бахтизин, научный руководитель института В.Л. Макаров, научный сотрудник М.А. Бурилина);
- Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН (директор Б.М. Шабанов, ведущий научный сотрудник А.Г. Абрамов);
- Нижегородский государственный университет (директор Института информационных технологий, математики и механики В.П. Гергель);
- Самарский государственный технический университет (заведующий кафедрой «Электронные системы и цифровая безопасность» П.О. Скобелев);
- Российский фонд фундаментальных исследований (начальник отдела Я.В. Сорокотяга).

Всего в работе совещания приняли участие 58 человек—членов Рабочей группы из пяти стран БРИКС, в том числе научные сотрудники, государственные служащие, представители научных фондов. От имени председательствующей страны — Индии — всех участников поприветствовали представители отдела международного сотрудничества Министерства науки и технологий.

Было проведено несколько рабочих сессий, на первой из которых руководители рабочих групп рассказали о своем видении развития высокопроизводительных вычислений, пожелали успешной работы делегатам, а каждый из участников совещания представился и кратко обозначил область

своих научных интересов. От России с приветственным словом выступил заместитель директора Департамента цифрового развития Министерства науки и образования РФ В.В. Савченко. В своем выступлении он подчеркнул важность развития цифровой экономики и информационных технологий.

В рамках второй сессии представители каждой страны сделали обзорные 20-минутные доклады о развитии суперкомпьютерных технологий в своих странах с указанием приоритетных направлений:

- Бразилия — секвенирование генома, развитие медицинских технологий, борьба с COVID-19;
- Индия — дистанционное зондирование Земли, система оповещения о наводнениях, здравоохранение;
- Китай — здравоохранение, проект «Цифровая Земля»;
- ЮАР — здравоохранение, проект «Цифровая Земля».

Россия — заместитель директора научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М.В. Ломоносова по научной работе В.М. Степаненко рассказал о ходе работ в России по подготовке флагманского проекта «Цифровая Земля»; директор Центрального экономико-математического института РАН А.Р. Бахтизин и н.с. М.А. Бурилина предложили дополнить этот проект, включив в него программный модуль с социо-эколого-экономической подмоделью и подчеркнули важность создания климатической модели; заведующий лабораторией НИВЦ МГУ В.Б. Сулимов рассказал о результатах работ по проекту «Здоровье» в части применения суперкомпьютеров для моделирования лекарств и планах о создании противовирусных препаратов, совместно с иностранными коллегами.

С отдельным докладом от России о мультиагентных технологиях для решения сложных задач управления ресурсами в реальном времени выступил П.О. Скобелев.

На третьей сессии обсуждались три флагманских проекта. Первый доклад представил профессор В.М. Степаненко, доложившись в более расширенном формате о ходе реализации проекта «Цифровая земля». Проект «Цифровая Земля» позволит:

- прогнозировать климат/погоду и их воздействия на страны БРИКС;
- совершенствовать модели, методы и технологии, отвечающие решению национальных задач экологического прогнозирования;
- агрегировать платформу для обучения студентов;
- создавать планы на долгосрочное сотрудничество между странами.

Второй флагманский проект (Flagship Project on Smart Manufacturing and Integrated Precision Farming) был представлен главой китайской делегации профессором Юанем (Yuan) и посвящен разработке инновационной платформы цифровых двойников на основе AI+HPC+5G.

Третий флагманский проект (Flagship Project on Health) посвящен здравоохранению. Профессор Вэйчжун (Wenzhong) рассказал о методах цифрового моделирования в биоинформатике, а также о создании цифровых органов для борьбы с COVID-19 и другими заболеваниями.

Четвертая, заключительная сессия первого дня работы международной группы была посвящена подведению предварительных итогов, формулированию целей для результирующего обсуждения на следующий день.

На пятой сессии второго дня работы участники рабочей группы рассмотрели результаты некоторых перспективных тематических проектов, выполняемых представителями стран БРИКС.

Первый совместный доклад, посвященный разработке образцов радиочастотных приборов для 2D позиционирования, представил профессор Гарг (Garg).

Второй доклад был сделан профессором Махапатра (Mahapatra) и посвящен электронным сигналам на основе двумерных материалов для нейровычислений.

Третий доклад про гибридное производство деталей для аэрокосмической отрасли представил профессор Шеньюн (Shengyong). Расчет модели проводился на суперкомпьютере Тяньхэ-2.

На шестой сессии участники рабочей группы обсудили темы флагманских проектов НТИ БРИКС, а также заслушали доклад начальника отдела РФФИ Я.В. Сорокотяги о совместных проектах. Докладчик обратил внимание на завершение работы РФФИ в прежнем формате и подвел

итоги по имеющимся грантам, обращая внимание на статистику финансирования отобранных ранее проектов. Последняя заявочная кампания прошла в 2021 г.

Последняя, седьмая сессия была посвящена заключительным словам от представителей всех делегаций.

**Выводы.** По результатам заседаний были обсуждены и приняты перечисленные выше флагманские проекты.

Рабочая группа выразила согласие с предложением китайской стороны о дальнейшем развитии интегрированного хаба БРИКС и участии в 7th Meeting of the BRICS Working Group on ICT and HPC в 2023 г. очно на территории Китая.

## The Sixth meeting of the BRICS Working Group on ICT and high performance computation systems

© 2022 V.L. Makarov, A.R. Bakhtizin, M.A. Burilina, E.A. Khlunova

**V.L. Makarov,**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;  
e-mail: makarov@cemi.rssi.ru*

**A.R. Bakhtizin**

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;  
e-mail: albert.bakhtizin@gmail.com*

**M.A. Burilina,**

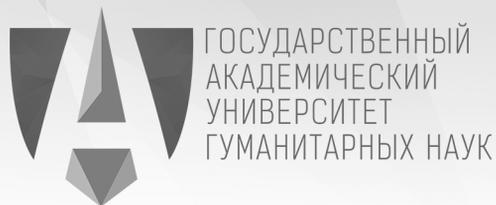
*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;  
e-mail: maribu@mail.ru*

**E.A. Khlunova,**

*International Centre for Innovations in Science, Technology and Education (ICISTE), Moscow, Russia;  
e-mail: khlunova@mniop.ru*

Received 04.08.2022

For reference: **Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Burilina M.A., Khlunova E.A.** (2022). The Sixth meeting of the BRICS Working Group on ICT and high performance computation systems. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 142–144.



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АКАДЕМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

## НА БАЗЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК с 1994 года



### Преподаватели – ведущие российские ученые

- более 30% – доктора наук
- более 45% - кандидаты наук



### Стажировки в:

- ведущих научно-исследовательских организациях
- органах государственной власти
- крупнейших общественных организациях
- бизнес-структурах



Интеграция науки  
и образования



Бюджетные  
места



Насыщенная  
студенческая жизнь



Отсрочка от армии

**БАКАЛАВРИАТ**

**МАГИСТРАТУРА**

**АСПИРАНТУРА**

### НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ:

• История

• Философия

• Политология

• Социология

• Международные отношения

• Зарубежное регионоведение

• Востоковедение и африканистика

• Психология

• Культурология

• Археология

• Менеджмент

• Юриспруденция

• Экономика

### КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ



Горячая линия: +7 (499) 238-04-12



facebook.com/gaugn



instagram.com/gaugn\_/



gaugn.ru



E-mail: info@gaugn.ru



vk.com/gaugn





# ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НА БАЗЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА РАН



## БАКАЛАВРИАТ

**Экономика**  
**Экономическая логистика**  
**Менеджмент организации**  
**Менеджмент в СМИ и рекламе**



## МАГИСТРАТУРА

**Экономика и управление наукой, технологиями и инновациями**  
**Общий и стратегический менеджмент**



## АСПИРАНТУРА

**Экономика**

ЦЭМИ РАН — крупнейший центр отечественной и мировой экономической науки, собравший под своей эгидой целое созвездие блестящих ученых с мировыми именами. Теоретические дисциплины преподают ведущие ученые, а практические занятия — специалисты бизнес-школ и консультанты по управлению, маркетингу и финансам.

Студенты факультета с первых дней могут проходить стажировки в ведущих научных институтах, принимать участие в различных проектах, международных симпозиумах и конференциях.

Выпускники факультета получают фундаментальную экономическую подготовку, умение квалифицированно разбираться во всех разделах и современных течениях экономической и управленческой науки, что дает им дополнительные преимущества для трудоустройства в органах государственного управления, коммерческих и консалтинговых компаниях, исследовательских центрах, рекламных и информационных агентствах, а также в сфере науки и высшего образования.

## 5 ПРИЧИН ПОСТУПИТЬ В ГАУГН



### ВЫДАЮЩИЕСЯ ПРЕПОДАВАТЕЛИ

Ученые из научно-исследовательских институтов РАН, включая академиков, членов-корреспондентов, докторов и кандидатов наук.



### ВОСТРЕБОВАННОСТЬ ВЫПУСКНИКОВ

Выпускники востребованы на рынке труда. Контакты с будущими работодателями устанавливаются во время практики.



### МЕЖДУНАРОДНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО

Некоторые лекции читают приглашенные специалисты из других стран. Большое внимание уделяется языковой подготовке.



### УДОБСТВО

Факультеты находятся в Москве в непосредственной близости от метро. Обучение в магистратуре и аспирантуре в основном проходит в вечернее время. Подать документы можно онлайн.



### СТУДЕНЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Студенты ГАУГН могут участвовать в многочисленных студенческих клубах («Что? Где? Когда?», Клуб политического анализа, Китайский разговорный клуб и др.).