СОДЕРЖАНИЕ

EDN: NIQVDA
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 3–13**

МЕХАНИКА МАШИН

УДК. 621.833.6

ЭВОЛЬВЕНТНЫЕ САМОТОРМОЗЯЩИЕСЯ ИНВЕРСНЫЕ ПЕРЕДАЧИ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

© 2022 г.
Г. А. Тимофеев[1,*], В. В. Панюхин[1], М. В. Самойлова[1]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
**e-mail: timga@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.
После доработки 23.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Многие электромеханические приводы, особенно в подъено-транспортных машинах, требуют жесткого фиксирования выходного звена в заданном положении и исключения его самопроизвольного движения под действием нагрузки. Для этого привод обычно оснащают тормозом. Однако во многих случаях можно обойтись без специального тормозного устройства (или существенно его уменьшить), если включить в состав привода самотормозящийся зубчатый механизм, который совмещает функции передачи движения и автоматического торможения привода после выключения двигателя. Рассмотрена геометрия и силовое нагружение эвольвентных самотормозящихся инверсных передач внешнего и внутреннего зацепления, которые применяются для получения нужного направления вращения выходного вала самотормозящейся передачи, позволяя в некоторых случаях обойтись без промежуточных зубчатых колес.

Ключевые слова: электромеханический привод, самоторможение, инверсные передачи внутреннего и внешнего зацепления, тормоз

DOI: 10.31857/S0235711922050157

Косозубые зубчатые передачи широко применяются в машиностроении, поскольку по эксплуатационным характеристикам они превосходят прямозубые. Методики их геометрического и прочностного расчета известны и регламентированы ГОСТ 16530-83 и ГОСТ 21354-87. Однако входящие в них зависимости могут быть использованы, как правило, при углах наклона зубьев до 60°. Область больших значений углов исследована пока недостаточно, а именно в ней самотормозящиеся передачи приобретают многие интересные и полезные свойства.

Одним из таких свойств является возможность получения большого передаточного отношения за счет возможности существенного, вплоть до единицы, уменьшения числа зубьев шестерни [1–5].

Другое полезное свойство (которое давно используется в технике) – возможность самоторможения, которое за счет совмещения функций преобразования движения и автоматического торможения позволяет создавать простые и компактные конструкции приводов машин и приборов [6, 7].

Еще одним интересным и во многих случаях полезным, свойством передач с большими углами наклона зубьев является возможность получения инверсных передач, т.е. передач с положительным передаточным отношением при внешних зубьях и отрицательным передаточным отношением при зацеплении внешних зубьев шестерни с внутренними зубьями колеса. Такие передачи позволяют при конструировании при-

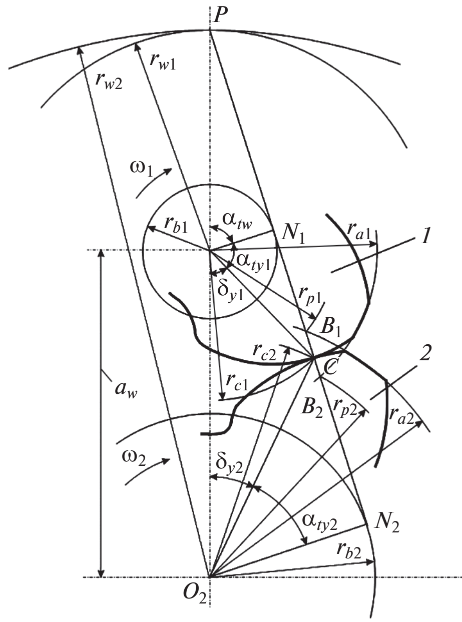

Рис. 1. Схема внешнего инверсного зацепления.

водов избежать в ряде случаев использования промежуточных (паразитных) колес, к тому же они обладают наименьшими потерями в режиме оттормаживания [8–11].

Рациональное использование этих свойств позволит создать новые конструкции приводов, превосходящих по отдельным характеристикам существующие.

Принятая классификация зубчатых зацеплений к внешним зацеплениям относит такие, при которых аксоидные поверхности зубчатых колес касаются внешним образом [1–5] или такие, в которых оба колеса имеют внешние зубья [2, 3]. К внутренним зацеплениям традиционная классификация относит зацепления с аксоидами, касающимися внутренним образом, или такие, в которых одно колесо имеет внешние зубья, а другое – внутренние. Все зубчатые зацепления, соответствующие этой принятой терминологии, обладают одним общим признаком: полюс зацепления и само зацепление находятся по одну сторону от оси шестерни.

Однако существуют зацепления, в которых полюс зацепления и само зацепление находятся по разные стороны от оси шестерни. Поскольку передаточное отношение в этом случае имеет противоположный знак по сравнению с обычным зацеплением, такие зацепления можно назвать инверсными. Передаточное отношение обычного внешнего зацепления отрицательно, а инверсного внешнего – положительно; обычного внутреннего – положительно, а инверсного внутреннего – отрицательно [8–12].

Для обеспечения положительного передаточного отношения в инверсном зацеплении внешние зубья (витки) колес имеют одинаковые направления винтовой нарезки. Поэтому аксоидные поверхности этих зацеплений касаются внутренним образом (рис. 1) [10, 11].

Для обеспечения отрицательного передаточного отношения в инверсном зацеплении внешние зубья (витки) шестерни и внутренние зубья колеса имеют противоположные направления винтовой нарезки. Поэтому аксоидные поверхности этих зацеплений касаются внешним образом (рис. 2).

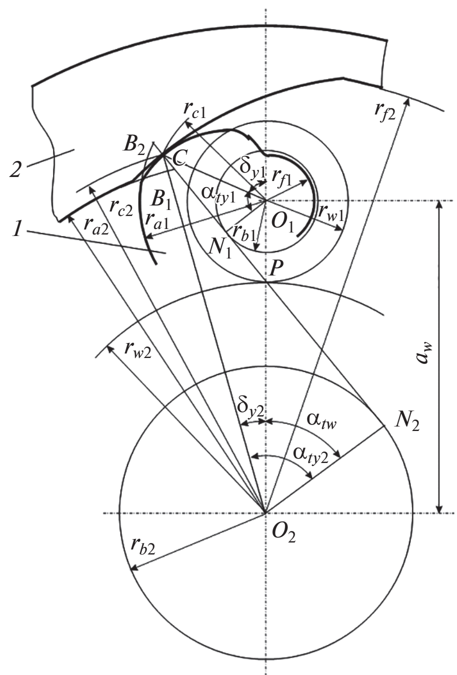

Рис. 2. Схема внутреннего инверсного зацепления.

Наиболее предпочтительными здесь остаются эвольвентные профили, которые во многих случаях можно заменить практически равноценными круговыми или любыми другими, используемыми при изготовлении червяков [13]. Для всех таких профилей в процессе зацепления торцовая проекция точек приложения равнодействующих нормальных усилий занимает на линии зацепления неизменное положение в точке C [10].

При использовании круговых профилей торцовые радиусы кривизны ρ_{tc1} и ρ_{tc2} в зацеплениях соответствуют отрезкам N_1C и N_2C (рис. 1, 2) и определяются по формуле

$\rho_{tc1,2} = \sqrt{r_{c1,2}^2 - r_{b1,2}^2}$, а осевые – по формуле $\rho_{xc1,2} = r_{b1,2} \tan \beta_{c1,2} \sqrt{1 - \dfrac{r_{b1,2}^2}{r_{c1,2}^2}}$.

Осевые зазоры между нерабочими боковыми поверхностями зубьев в инверсных зацеплениях появляются не только из-за разницы величин углов наклона зубьев на рабочих поверхностях, но и из-за того, что направления наклона зубьев в зацеплениях колес с внутренним касанием аксоидных поверхностей (рис. 1) совпадают, а с внешним касанием (рис. 2) – противоположны. Поэтому величина осевых зазоров на окружностях рабочих радиусов r_{c1} и r_{c2} определяется не разностью, как в обычных зацеплениях, а суммой осевых перемещений каких-либо двух точек, движущихся по дугам окружностей с радиусами $r_{y1} = r_{c1}$ и $r_{y2} = r_{c2}$, соответствующим удвоенным углам $\delta_{y1} = \delta_{c1}$ и $\delta_{y2} = \delta_{c2}$ на рис. 1, 2

$$\Delta_{xc} = 2\left(\delta_{c1} r_{c1} \operatorname{ctg} \beta_{c1} + \delta_{c2} r_{c2} \operatorname{ctg} \beta_{c2}\right). \tag{1}$$

Из рис. 1 найдем углы δ_{c1} и δ_{c2} для внешнего инверсного зацепления

$$\delta_{c1} = \pi - \left(\alpha_{tc1} + \alpha_{tw}\right), \quad \delta_{c2} = \alpha_{tw} - \alpha_{tc2}. \tag{2}$$

Из рис. 2 найдем углы δ_{c1} и δ_{c2} для внутреннего инверсного зацепления

$$\delta_{c1} = \pi - (\alpha_{tc1} + \alpha_{tw}), \quad \delta_{c2} = \alpha_{tc2} - \alpha_{tw}. \tag{3}$$

Подставив значения углов δ_{c1} и δ_{c2} из (2) и (3) в уравнение (1) и выразив углы β_{c1} и β_{c2} через угол β, получим:

– для внешнего инверсного зацепления

$$\Delta_{xc} = \frac{m}{\sin\beta}\left[(z_2 - z_1)\alpha_{tw} + z_1(\pi - \alpha_{tc1}) - z_2\alpha_{tc2}\right];$$

– для внутреннего инверсного зацепления

$$\Delta_{xc} = \frac{m}{\sin\beta}\left[z_2\alpha_{tc2} - (z_1 + z_2)\alpha_{tw} + z_1(\pi - \alpha_{tc1})\right].$$

Осевой шаг эвольвентных профилей на окружности вершин каждого из колес складывается из осевой толщины зубьев S_{xa}^E на этой окружности, осевой толщины зуба S_{xp}^E на окружности нижних точек активного профиля сопряженного колеса и осевого зазора Δ_{xa}^E: $p_x = S_{xa1}^E + S_{xp2}^E + \Delta_{xa1}^E + S_{xp1}^E + S_{xa2}^E$.

Значения осевых зазоров Δ_{xa1}^E и Δ_{xa2}^E на окружностях вершин между нерабочими сторонами эвольвентных профилей в осевой плоскости, проходящей через точку контакта рабочих профилей, можно получить переход от модуля к осевому шагу p_x:

– для внешнего инверсного зацепления

$$\Delta_{xa1,2}^E = \frac{p_x}{\pi}\left[(z_2 - z_1)\alpha_{tw} - z_1(\pi - \alpha_{ta1}) - z_2\alpha_{tp2}\right]; \tag{4}$$

– для внутреннего инверсного зацепления

$$\Delta_{xa1,2}^E = \frac{p_x}{\pi}\left[z_2\alpha_{tp2} - (z_1 + z_2)\alpha_{tw} - z_1(\pi - \alpha_{ta1})\right]. \tag{5}$$

Осевые зазоры Δ_{xa1} и Δ_{xa2} на окружностях вершин можно найти при помощи уравнений

$$\Delta_{xa1} = \frac{1}{2}\left(p_x - S_{xa1} - S_{xp2} - \Delta_{xa1}^E\right),$$

$$\Delta_{xa2} = \frac{1}{2}\left(p_x - S_{xa2} - S_{xp1} - \Delta_{xa2}^E\right),$$

где значения Δ_{xa1}^E и Δ_{xa2}^E взяты из (4) и (5).

Толщины зубьев с круговыми профилями s_{xa} и s_{xp} в уравнении (4) можно найти из схемы осевого сечения зуба шестерни на рис. 3.

В соответствии с этой схемой искомые толщины можно выразить как:

– для внешнего зацепления

$$s_{xa1} = s_{xc1} - 2(r_{a1} - r_{c1})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xa1} + \alpha_{xc1})\right]; \tag{6}$$

$$s_{xa2} = s_{xc2} - 2(r_{a2} - r_{c2})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xa2} + \alpha_{xc2})\right]; \tag{7}$$

$$s_{xp1} = s_{xc1} + 2(r_{c1} - r_{p1})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xc1} + \alpha_{xp1})\right]; \tag{8}$$

$$s_{xp2} = s_{xc2} + 2(r_{c2} - r_{p2})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xc2} + \alpha_{xp2})\right]; \tag{9}$$

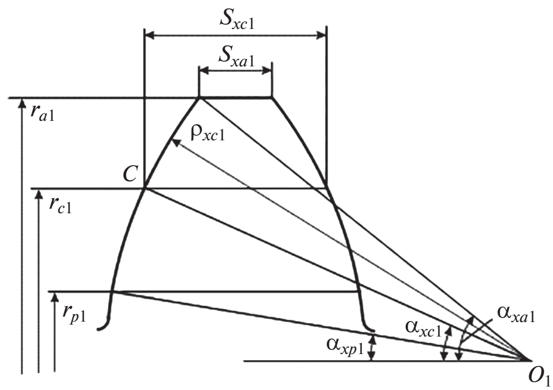

Рис. 3. Схема осевого сечения зуба шестерни с круговым профилем.

– при внутреннем зацеплении формулы для шестерни (7) и (8) остаются в силе, а для колеса меняются

$$s_{xa2} = s_{xc2} + 2(r_{a2} - r_{c2})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xa2} + \alpha_{xc2})\right]; \tag{10}$$

$$s_{xp2} = s_{xc2} - 2(r_{c2} - r_{p2})\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha_{xc2} + \alpha_{xp2})\right]. \tag{11}$$

Осевые углы $\alpha_{xc1,\,2}$ в формулах (6)–(11) определяются из зависимости

$$\operatorname{tg}\alpha_{xc1,2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{nc1,2}}{\sin\beta_{c1,2}}.$$

Осевые углы $\alpha_{xa1,\,2}$ и $\alpha_{xp1,\,2}$ можно найти из схемы на рис. 3:

– для внешнего зацепления

$$\begin{aligned} \sin\alpha_{xa1} &= \sin\alpha_{xc1} + \frac{r_{a1} - r_{c1}}{\rho_{xc1}}, \\ \sin\alpha_{xa2} &= \sin\alpha_{xc2} + \frac{r_{a2} - r_{c2}}{\rho_{xc2}}; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha_{xp1} &= \sin\alpha_{xc1} - \frac{r_{c1} - r_{p1}}{\rho_{xc1}}, \\ \sin\alpha_{xp2} &= \sin\alpha_{xc2} - \frac{r_{c2} - r_{p2}}{\rho_{xc2}}; \end{aligned} \tag{13}$$

– при внутреннем зацеплении формулы для шестерни (12) и (13) остаются в силе, а для колеса меняются

$$\sin\alpha_{xa2} = \sin\alpha_{xc2} - \frac{r_{a2} - r_{c2}}{\rho_{xc2}},$$

$$\sin\alpha_{xp2} = \sin\alpha_{xc2} + \frac{1}{\rho_{xc2}}(r_{c2} - r_{p2}).$$

Радиусы $r_{p1,2}$ в этих формулах определяются так [4]:

– для внешнего зацепления

$$r_{p1} = \sqrt{\left(a_w \sin\alpha_{tw} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}\right)^2 + r_{b1}^2},$$

$$r_{p2} = \sqrt{\left(a_w \sin\alpha_{tw} - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}\right)^2 + r_{b2}^2};$$

– для внутреннего зацепления

$$r_{p1} = \sqrt{\left(\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin\alpha_{tw}\right)^2 + r_{b1}^2},$$

$$r_{p2} = \sqrt{\left(\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - a_w \sin\alpha_{tw}\right)^2 + r_{b2}^2}.$$

Осевые толщины s_{xc1} и s_{xc2} зубьев с круговыми эвольвентными зубьями одинаковы, и их можно определить из известной зависимости для эвольвентных колес:

– для внешнего инверсного зацепления

$$s_{xc1,2} = \frac{2r_{c1,2}}{\tan\beta_{c1,2}}\left(\frac{\pi}{2z_{1,2}} + \frac{2x_{1,2}\tan\alpha}{z_{1,2}} + \operatorname{inv}\alpha_t - \operatorname{inv}\alpha_{tc1,2}\right); \quad (14)$$

– для внутреннего инверсного зацепления:

$$s_{xc1,2} = \frac{2r_{c1,2}}{\tan\beta_{c1,2}}\left(\frac{\pi}{2z_{1,2}} - \frac{2x_{1,2}\tan\alpha}{z_{1,2}} - \operatorname{inv}\alpha_t + \operatorname{inv}\alpha_{tc1,2}\right). \quad (15)$$

Большинство геометрических параметров инверсных зацеплений можно определить в том же порядке и по тем же формулам, что и для обычных зацеплений. Исключение составляют лишь формулы для определения следующих параметров:

– межосевое расстояние a_w

$$a_w = \sqrt{r_{c1}^2 + r_{c2}^2 \pm 2r_{c1}r_{c2}\left|\cos\left(\alpha_{tc1} + \alpha_{tc2}\right)\right|};$$

– радиусы начальных окружностей r_{w1} и r_{w2}

$$r_{w1,2} = \frac{z_{1.2}a_w}{z_2 \mp z_1}.$$

Осевые толщины зубьев на контактных окружностях s_{xc1} и s_{xc2} определяются по формулам (14) или (15).

Базовой модификацией среди инверсных передач является зацепление колес с внешними зубьями. Это зацепление обладает свойствами как внутреннего, так и внешнего обычных зацеплений. Если судить по виду зубьев – оно внешнее, по знаку передаточного отношения – внутреннее. Скорость скольжения в точке контакта определяется в нем зависимостью [2, 3]

$$v_{12} = l_{PC}\left(\omega_1 - \omega_2\right).$$

Скорость скольжения v_{12}, хотя и пропорциональна разности угловых скоростей, тем не менее, из-за большого расстояния l_{PC} имеет весьма значительную величину, что обычному внутреннему зацеплению не свойственно. Основная особенность базовой модификации инверсных передач состоит в том, что делительный диаметр колеса *2* много больше диаметра вершин (рис. 1).

Наличие у внешнего инверсного зацепления свойств как внутреннего, так и внешнего обычных зацеплений наводит на мысль дополнить это зацепление вспомогательным колесом *2'* с внутренними зубьями, образованными теми же эвольвентами, что и внешние зубья колеса *2*, и с тем же делительным диаметром. Зацепление шестерни *1* как с колесом *2*, так и с колесом *2'* имеет одно и то же передаточное отношение и один и тот же угол зацепления.

Значит, одинаковыми для зацеплений колес *1* и *2*, а также колес *1* и *2'*, являются следующие параметры: угол профиля в торцовом сечении, угол зацепления, межосевое расстояние, радиусы основных, начальных и делительных окружностей, размеры шестерни. Отличается зацепление колес *1* и *2'* только размерами колеса *2*. Найдем такой коэффициент смещения колеса *2*, при котором будут выполняться соотношения

$$d_{a2} = 2a_w - d_{f1} - 2c^*m; \tag{16}$$

$$d_{f2} = 2a_w - d_{a1} - 2c^*m. \tag{17}$$

Выразив входящие сюда величины через параметры исходного контура, придем к соотношению

$$x_2 = 2h_a^* - x_1 - \frac{z_2}{2\cos\beta}\left(1 - \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{tw}}\right) - \frac{z_1}{2\cos\beta}\left(1 + \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{tw}}\right) + \Delta y.$$

При равносмещенном внутреннем зацеплении, когда $x_1 = x_2'$, получим

$$x_2 = 2h_a^* - x_1 - \frac{z_1}{2\cos\beta}.$$

Основная часть коэффициента перекрытия во внешнем инверсном зацеплении приходится на осевую составляющую, однако для исключения кромочного контакта торцовая составляющая должна оставаться положительной. Ее величину определим с помощью рис. 1, выразив длину активного участка линии зацепления B_1B_2

$$B_1B_2 = N_1B_2 + N_2B_1 - PN_2 + PN_1.$$

Выразив все слагаемые через радиусы внешних окружностей, получим искомую зависимость

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \tan\alpha_{ta1} + z_2 \tan\alpha_{ta2} - (z_2 - z_1)\tan\alpha_{tw}}{2\pi}.$$

Это выражение не соответствует ни внутреннему [2, 3], ни внешнему [1, 2] зацеплениям. Таким образом, при расчете внешнего инверсного зацепления необходимо сначала определить параметры вспомогательного внутреннего зацепления колес *1* и *2'* и размеры шестерни, а затем по формулам (16) и (17) размеры колеса *2*.

Аналогичный прием используем для расчета внутреннего инверсного зацепления шестерни с внешними зубьями и колеса с внутренними при разных направлениях нарезки контактирующих витков, схема которого показана на рис. 2. Особенность этого зацепления заключается в том, что по своему внешнему виду оно напоминает внутреннее зацепление, однако аксоидные поверхности касаются здесь внешним образом, поэтому передаточное отношение, в отличие от внутреннего зацепления, отрицательно.

При определении основных геометрических соотношений необходимо учитывать то обстоятельство, что начальная окружность колеса пересекает отрицательную часть зубьев. Если зацепление на рис. 2 дополнить колесом с внешними зубьями, образованными теми же эвольвентами, что и внутренние зубья, получим то же сочетание основного и вспомогательного зацеплений, что и при построении профилей внешнего инверсного зацепления на рис. 1, с той лишь разницей, что теперь основное и дополнительное зацепление меняются местами. Значит, при расчете внутреннего инверсного зацепления следует сначала определить параметры вспомогательного внешнего за-

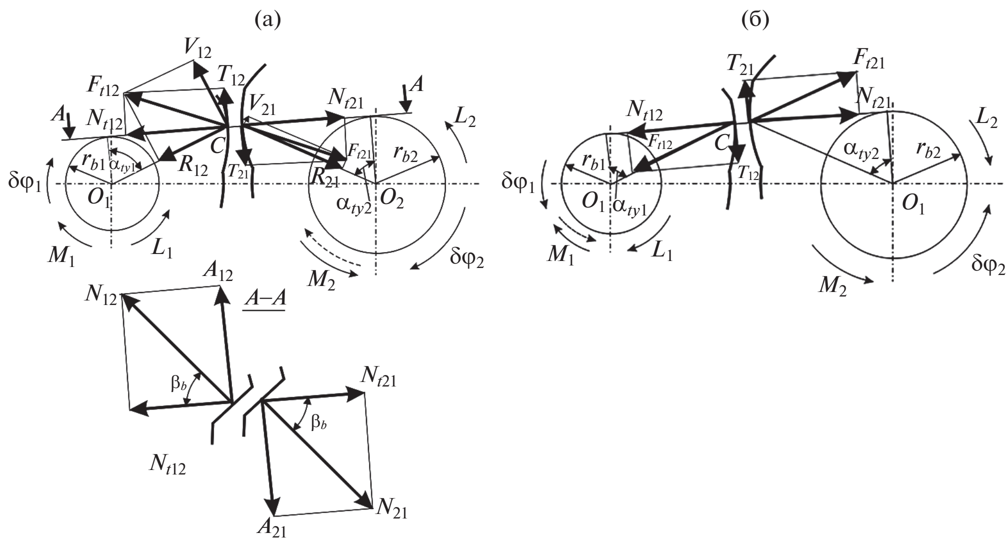

Рис. 4. Составляющие нормальной реакции в инверсном зацеплении: (а) – прямой ход; (б) – обратный ход.

цепления и размеры шестерни, а потом по известному межосевому расстоянию и размерам шестерни вычислить размеры реального колеса.

Исследование внутреннего инверсного зацепления, аналогичное проведенному ранее для внешнего инверсного, привело к выводу, что толщина зуба колеса здесь определяется таким образом: надо подсчитать ее по формуле для внешнего зацепления [11], а затем присвоить результату противоположный знак. Коэффициент торцового перекрытия внутреннего инверсного зацепления определяется по формуле

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \tan\alpha_{ta1} - z_2 \tan\alpha_{ta2} + (z_1 + z_2)\tan\alpha_{tw}}{2\pi}.$$

Цилиндрическая инверсная самотормозящаяся передача состоит из шестерни *1*, которую будем считать входным звеном, и колеса *2*, которое будем считать выходным (рис. 4).

К передаче приложены активные силы: движущий момент $\bar{M}_1$ и нагрузка $\bar{M}_2$. Считаем заданным коэффициент трения скольжения f_{12} в зацеплении звеньев, суммарное воздействие остальных видов сопротивления движению звеньев – трения качения в зацеплении, трения в опорах, сопротивления среды и прочих, обозначим моментами сопротивления $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$. В качестве обобщенной координаты данного одноподвижного механизма выберем угол поворота входного звена φ_1. К варьирующим параметрам отнесем угол профиля зуба α и угол наклона линии зуба β.

На шестерню *1* при любом состоянии передачи действует реакция со стороны колеса *2* – $\vec{F}_{12}$, проекция которой $\vec{F}_{t12}$ на торцевую плоскость разложена на нормальную составляющую $\bar{N}_{t12}$ и силу трения скольжения $\bar{T}_{12}$. На колесо *2* действует ответная реакция со стороны первого звена $\vec{F}_{21}$, проекция которой $\vec{F}_{t21}$ на торцевую плоскость разложена на нормальную составляющую $\bar{N}_{t21}$ и силу трения скольжения $\bar{T}_{21}$.

Проекция нормальной составляющей реакции на торцевую плоскость равна

$$N_t = N\cos\beta.$$

Положение составляющих реакций $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ при прямом и обратном ходе показано на рис. 4. Найдем величину нормальной составляющей $N_{12} = N_{21} = N$ реакции $\vec{F}_{21}$. Для этого запишем уравнение равновесия колеса *2* в тяговом режиме прямого хода

$$\left[N_{t21}\cos\alpha_{ty2} - T_{21}\sin\alpha_{ty2}\right]\delta r_{y2} = \left(M_2 + L_2\right)\delta\varphi_2. \tag{18}$$

Это уравнение не содержит функции sign перед работой силы трения, поскольку точка контакта находится по одну сторону от полюса во все время движения. С учетом $T \le \max T = fN$ и $N_t = N\cos\beta_b$. Получаем формулу для нормальной составляющей реакции

$$N = \frac{M_2 + L_2}{\left(\cos\beta_b - f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{ty2}\right) r_{b2}}. \tag{19}$$

Через величину нормальной составляющей можно выразить и величину полной реакции $F_{12} = F_{21} = F$ по формуле

$$F = N\sqrt{\left(f_{12}^0\right)^2 + 1}, \tag{20}$$

осевых проекций $A_{12} = A_{21} = A$ нормальных составляющих реакции на ось вращения по формуле $A = N\sin\beta_b$ и проекций $F_{t12} = F_{t21} = F_t$ реакций $F_{12} = F_{21} = F$ на торцовую плоскость по формуле

$$F_t = N\sqrt{\left(f_{12}^0\right)^2 + \cos^2\beta_b}. \tag{21}$$

Из рис. 4а находим окружные V_{ij} и радиальные R_{ij} составляющие торцовых проекций

$$V_{12} = N\left[\cos\beta_b\cos\alpha_{ty1} + f_{12}^0\sin\alpha_{ty1}\right]; \tag{22}$$

$$V_{21} = N\left[\cos\beta_b\cos\alpha_{ty2} - f_{12}^0\sin\alpha_{ty2}\right]; \tag{23}$$

$$R_{12} = N\left[\cos\beta_b\sin\alpha_{ty1} - f_{12}^0\cos\alpha_{ty1}\right]; \tag{24}$$

$$R_{21} = N\left[\cos\beta_b\sin\alpha_{ty2} + f_{12}^0\cos\alpha_{ty2}\right]. \tag{25}$$

Таким образом, при внешнем инверсном зацеплении, как и при обычном, окружные проекции нормальной реакции различны по величине для разных звеньев, то же можно сказать и о радиальных проекциях.

Найдем теперь величину нормальной составляющей $N_{12} = N_{21} = N$ реакции $\vec{F}_{21}$ в тяговом режиме обратного хода. Для этого запишем уравнение равновесия колеса *2* в этом состоянии

$$\left[N_{t21}\cos\alpha_{ty2} + T_{21}\sin\alpha_{ty2}\right]\delta r_{y2} = \left(M_2 - L_2\right)\delta\varphi_2. \tag{26}$$

Уравнение отличается от (18) знаками перед слагаемыми, учитывающими работу сил трения. С учетом $T \le \max T = fN$ и $N_t = N\cos\beta_b$ получаем формулу для нормальной составляющей реакции

$$N = \frac{M_2 - L_2}{\left(\cos\beta_b + f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{ty2}\right) r_{b2}}. \tag{27}$$

Полная реакция и ее осевые и торцовые проекции F, A сохраняются, поскольку их величина не зависит от направления силы трения, а окружные и радиальные составляющие изменяются

$$V_{12} = N\left[f_{12}^0 \sin\alpha_{ty1} - \cos\beta_b \cos\alpha_{ty1}\right]; \tag{28}$$

$$V_{21} = N\left[\cos\beta_b \cos\alpha_{ty2} + f_{12}^0 \sin\alpha_{ty2}\right]; \tag{29}$$

$$R_{12} = N\left[\cos\beta_b \sin\alpha_{ty1} + f_{12}^0 \cos\alpha_{ty1}\right]; \tag{30}$$

$$R_{21} = N\left[\cos\beta_b \sin\alpha_{ty2} - f_{12}^0 \cos\alpha_{ty2}\right]. \tag{31}$$

Сопоставление формул (19) и (27) показывает, что при переходе к обратному ходу нормальная реакция, а значит, и полная вместе с осевой и торцовой проекциями, уменьшаются в κ раз

$$\kappa = \frac{M_2 - L_2}{M_2 + L_2}\frac{\cos\beta_b + f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{ty2}}{\cos\beta_b - f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{ty2}}. \tag{32}$$

В обычном зацеплении при смене прямого хода на обратный нормальная реакция вместе со своими составляющими в κ раз возрастает. Полученные для внешнего инверсного зацепления зависимости (18)–(32) и последовавшие из них выводы справедливы и для внутреннего инверсного зацепления.

Выводы. 1. В инверсных цилиндрических передачах полюс зацепления и само зацепление находятся по разные стороны от оси шестерни, поэтому их передаточное отношение имеет противоположный знак по сравнению с обычным зацеплением. **2.** При расчете внешнего инверсного зацепления необходимо сначала определить параметры внутреннего зацепления шестерни и вспомогательного колеса с внутренними зубьями, образованными теми же эвольвентами, что и внешние зубья реального колеса и с тем же делительным диаметром. **3.** При расчете внутреннего инверсного зацепления следует вначале определить параметры вспомогательного внешнего зацепления и размеры шестерни, а потом по известному межосевому расстоянию и размерам шестерни вычислить размеры реального колеса.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайнев А.Ф.* Механика машин. Фундаментальный словарь. М.: Машиностроение, 2000. 904 с.
2. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / Под ред. И.А. Болотовского. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.
3. *Гавриленко В.А.* Основы теории эвольвентой зубчатой передачи. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1969. 432 с.
4. *Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др.* Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / Под ред. Г.А. Тимофеева. 8-е изд. перераб. и доп. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 566 с.
5. *Андриенко Л.А., Байков Б.А., Захаров М.А. и др.* Детали машин: учебник для вузов / Под ред. О.А. Ряховского. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. 465 с.
6. *Турпаев А.И.* Самотормозящие механизмы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1976. 208 с.
7. *Панюхин В.И.* Самотормозящиеся зубчатые передачи // Вестник машиностроения. 1979. № 2. С. 22.

8. *Тимофеев Г.А., Панюхин В.В.* Анализ критериев самоторможения // Вестник машиностроения. 2002. № 9. С. 3.
9. *Кулешов В.В.* Самотормозящиеся зубчатые передачи с параллельными осями // Челябинск: Челябинский дом печати, 1999. 92 с.
10. *Кулешов В.В.* Элементы механической логики самотормозящихся зубчатых зацеплений // Сб. “Теория и практика зубчатых передач. Труды Международной конференции”. Ижевск, 1998. С. 248.
11. *Бушенин Д.В.* Несоосные винтовые механизмы. М.: Машиностроение, 1985. 112 с.
12. *Болотовский И.А., Безруков В.И., Васильева О.Ф. и др.* Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.

EDN: CSFVIX
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 5, с. 14–26

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.121.2

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ РЕЖИМА СВОБОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ

© 2022 г. Д. А. Индейцев[1,2], П. П. Удалов[1,*], И. А. Попов[1], А. В. Лукин[1]

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

[2]*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: pp_udalov@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.02.2022 г.
После доработки 08.04.2022 г.
Принята к публикации 20.04.2022 г.

В статье рассмотрена модель колебаний чувствительного элемента полусферического волнового твердотельного гироскопа с учетом геометрической и электрической нелинейностей системы. Рассмотрены уравнения движения чувствительного элемента при параметрическом возбуждении колебаний. Построены переходные кривые при учете вязкого трения. Получены аналитические выражения для установившихся амплитуды и фазы в области параметрического резонанса на собственной частоте резонатора. Исследовано влияние фактора отрицательной электростатической жесткости электродной системы возбуждения на процесс генерации параметрических колебаний.

Ключевые слова: нелинейные колебания, полусферический ТВГ, установившиеся колебания, параметрические колебания, параметрический резонанс

DOI: 10.31857/S0235711922040095

Приборы навигации – незаменимая часть современных систем связи, наземных, космических систем ориентации тел в пространстве. Основу данных приборов составляет работа чувствительных элементов – гироскопов и акселерометров. Принцип работы твердотельного волнового гироскопа (ТВГ) основан на возникновении прецессии возбужденной формы изгибных колебаний резонатора при сообщении платформе, на которой установлен гироскоп, заданного углового движения. Угловая скорость прецессии формы пропорциональна угловой скорости основания. Этот эффект носит имя Брайана [1–3]. Как правило, чувствительный элемент ТВГ выполнен в виде полусферы [4, 5]. В качестве источника возбуждения колебаний в ТВГ служит каскад электродов, на которые подаются питающие напряжения [6, 7]. Существуют различные режимы работы гироскопа, которые характеризуются специфическими законами управления питающим напряжением. В частности, разработаны законы управления в форме обратных связей по состоянию резонатора, обеспечивающие минимальную из возможных скоростей ухода гироскопа – режим обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля [8]. На практике распространены и более простые в части системы возбуждения алгоритмы, например, гироскопы, работающие на периодическом гармоническом возбуждении. Вследствие периодичности возбуждающей силы в системах данного типа наблюдается эффект параметрического резонанса [1–4], заключающийся в образо-

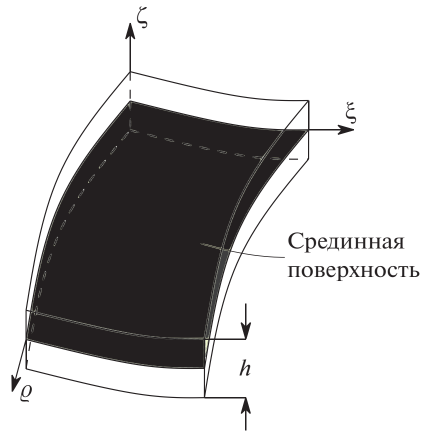

Рис. 1. Локальная система координат оболочки.

вании зон раскачки колебаний, зависящих от геометрических и физических параметров системы.

В работе [7] рассматриваются методы компенсации дрейфов стоячей волны полусферического резонатора ТВГ вследствие неравномерности расстояния между электродами и резонатором. Показано, что подавление дрейфа гироскопа можно реализовать при помощи управления амплитудами и фазами возбуждения на отдельных электродах. В работах [9, 10] проводится общее построение зависимости собственной частоты тонкой полусферы, приводятся аналитические построения линейной математической модели колебаний чувствительного элемента ТВГ. В работе [11] обсуждаются вопросы, связанные с учетом неидеальности распределения плотности материала и построением модифицированных выражений для собственных частот колебаний резонатора. В работах [3, 5] дается общее описание оптимизационных алгоритмов механической балансировки резонаторов с использованием генетических алгоритмов оптимизации.

Основная цель настоящей статьи заключается в рассмотрении нелинейной модели колебаний полусферического резонатора и получении аналитических выражений для амплитуды и фазы колебаний с учетом фактора смещения собственной частоты резонатора, вызванного силами электростатического поля.

Математическая модель. При выводе уравнений движения полусферического резонатора ТВГ применим теорию Кирхгофа–Лява [12]. Условимся, что физические параметры резонатора постоянны во времени и пространстве. Вектор перемещений в локальной системе координат ξ, ϱ представляется как сумма касательных перемещений (ξ,ϱ), $v(\xi,\varrho)$ точек срединной поверхности и нормального к ней перемещения $w(\xi,\varrho)$ [3].

Согласно теории Кирхгофа–Лява компоненты тензоров деформации e и напряжений σ должны удовлетворять условиям

$$e_{\xi\zeta} = e_{\varrho\zeta} = e_{\zeta\zeta}, \quad \sigma_{\zeta\zeta} = 0,$$

где ζ – нормальная координата точек срединной поверхности.

Изображение локальной системы координат оболочки показано на рис. 1.

Обобщенный закон Гука [12] выражается как

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(e_{\xi\xi} + \nu e_{\varrho\varrho}\right), \quad \sigma_\varrho = \frac{E}{1-\nu^2}\left(e_{\varrho\varrho} + \nu e_{\xi\xi}\right), \quad \tau_{\xi\varrho} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{\xi\varrho},$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Разложим компоненты тензора деформаций e, удержав только линейные члены относительно ζ

$$e_{\xi\xi} = \varepsilon_1 + \zeta K_1, \quad e_{\varrho\varrho} = \varepsilon_2 + \zeta K_2, \quad e_{\xi\varrho} = \omega + \zeta K_{12},$$

где ε_1, ε_2, ω – компоненты тензора тангенциальных деформаций; K_1, K_2, K_{12} – компоненты тензора изгибных деформаций.

Для полусферы имеем $\xi = \theta$, $\varrho = \varphi$ – сферические координаты; R, h – радиус и толщина срединной поверхности в недеформированном состоянии. Тогда справедливы формулы [13]

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = e_1 + \frac{1}{2}\vartheta_1^2, \quad \varepsilon_2 = e_2 + \frac{1}{2}\vartheta_2^2, \quad \omega = \omega_{12} + \vartheta_1\vartheta_2, \\ K_1 = \varkappa_1 - \frac{1}{2R}\vartheta_2^2, \quad K_2 = \varkappa_2 - \frac{1}{2R}\vartheta_1^2, \quad K_{12} = 2\tau. \end{gathered} \tag{1}$$

Условимся, что поддерживаются колебания, соответствующие собственной форме колебаний с индексом осевой симметрии m. Представим компоненты вектора перемещений срединной полусферической поверхности в полярном, азимутальном и радиальном направлениях как u_m, v_m, w_m.

Тогда для полусферической оболочки справедливы равенства [7]

$$\begin{gathered} e_1 = \frac{1}{R}\left(w_m + \frac{\partial u_m}{\partial\theta}\right), \quad e_2 = \frac{1}{R}\left(w_m + u_m \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_m}{\partial\varphi}\right), \\ \omega_{12} = \frac{1}{R}\left(-v_m\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_m}{\partial\theta}\right), \quad \varkappa_1 = -\frac{1}{R^2}\left(w_m + \frac{\partial^2 w_m}{\partial\theta^2}\right), \\ \varkappa_2 = -\frac{1}{R^2}\left(w_m + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w_m}{\partial\varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial w_m}{\partial\theta}\right), \quad 2\tau = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left(-\frac{\partial^2 w_m}{\partial\theta\partial\varphi} + \cot\theta\frac{\partial w_m}{\partial\theta}\right), \\ \vartheta_1 = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w_m}{\partial\theta} - u_m\right), \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w_m}{\partial\varphi} - v_m\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Рассматриваемый резонатор ТВГ закреплен на ножке в вершине полусферы. Такие граничные условия допускают движения, состоящие в чистых изгибаниях полусферы, поэтому рассматриваемые низкочастотные движения тонкой полусферы будут являться колебаниями релеевского типа [12], для которых хорошо работает допущение о нерастяжимости полусферы и достаточной величине радиальных перемещений w_m в сравнении с тангенциальными перемещениями u_m, v_m. В дальнейших рассуждениях примем, что в формулах (1), (2) для углов поворота ϑ_1, ϑ_2 можно пренебречь тангенциальными перемещениями u_m, v_m [12]

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{R}\frac{\partial w_m}{\partial\theta}, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w_m}{\partial\varphi}. \tag{3}$$

Согласно теории Новожилова–Голденвейзера [12, 13] о тонких изотропных оболочках, потенциальная энергия изгиба П представляется как

$$\Pi = \frac{Eh^3R^2}{24\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\left(K_1+K_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(K_1K_2 - K_{12}^2\right)\right]\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{4}$$

Подставляя выражения (1)–(3) в выражение (4), получим

$$\Pi = \Pi_l + \Pi_n,$$

где

$$\Pi_l = \frac{Eh^3R^2}{24\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varkappa_1+\varkappa_2\right)^2 - 2\left(1-\nu\right)\left(\varkappa_1\varkappa_2 - 4\tau^2\right)\right]\sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$\Pi_n = \frac{Eh^3}{96\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\left(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2\right)\left(\left\{\vartheta_1^2+\vartheta_2^2\right\} - 4R\left\{\varkappa_1+\varkappa_2\right\}\right) - \right. \tag{5}$$

$$\left. - 2\left(1-\nu\right)\left(\vartheta_1^2\vartheta_2^2 - 2R\left\{\theta_1^2\varkappa_1^2 + \theta_2^2\varkappa_2^2\right\}\right)\right]\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Представим компоненты перемещения точек тонкостенной нерастяжимой оболочки в форме

$$\begin{aligned} u_m &= U_m(\theta)\left[p(t)\cos m\varphi + q(t)\sin m\varphi\right], \\ v_m &= V_m(\theta)\left[p(t)\sin m\varphi - q(t)\cos m\varphi\right], \\ w_m &= W_m(\theta)\left[p(t)\cos m\varphi + q(t)\sin m\varphi\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где t – время; $p(t)$, $q(t)$ – модальные координаты; $U_m(\theta)$, $V_m(\theta)$, $W_m(\theta)$ – функции Релея, определяющие собственные формы чистого изгибания нерастяжимой полусферической оболочки [9, 10].

$$U_m(\theta) = -V_m(\theta) = \sin\theta\tan^m\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad W_m(\theta) = -\left(m+\cos\theta\right)\tan^m\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{7}$$

Подставляя выражения (2), (6), (7) в выражения (5), получим

$$\Pi_l = \frac{\pi m^2\left(m^2-1\right)^2 Eh^3}{6\left(1+\nu\right)R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{2m}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\theta}d\theta\left[p^2(t)+q^2(t)\right], \quad \Pi_n = \frac{Eh^3}{96\left(1-\nu^2\right)}P,$$

$$\begin{gathered} P = \int_0^{\frac{\pi}{2}}P^1(\theta)\,d\theta\left\{p^2(t)+q^2(t)\right\} + \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}}P^2(\theta)\,d\theta\left\{p^3(t)+q^3(t)\right\} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}P^3(\theta)\,d\theta\left\{p^3(t)q(t)+q^3(t)p(t)\right\} + \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}}P^4(\theta)\,d\theta\left\{p^2(t)q(t)+q^2(t)p(t)\right\}, \end{gathered} \tag{8}$$

где величины $P^1(\theta)d\theta$–$P^4(\theta)d\theta$ – подынтегральные выражения при соответствующих функциях $p(t)$, $q(t)$. Вследствие громоздкости запись данных выражений здесь не приводится. Для их определения можно использовать методы компьютерной алгебры, реализованные, например, в программном комплексе Matlab [14].

Кинетическая энергия T полусферической оболочки задается как

$$T = \frac{\pi\rho h R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[U_m^2(\theta) + V_m^2(\theta) + W_m^2(\theta)\right]\sin\theta d\theta\left[\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)\right], \tag{9}$$

где ρ — плотность резонатора, $(\dot{\ })$ — обозначение производной по времени t.

Для возбуждения колебаний в резонаторе данного типа на практике прибегают к использованию каскада электродов, расположенных на расстоянии d от поверхности полусферы. Им сообщается разность потенциалов по отношению к электродам, расположенным на поверхности резонатора. При соответствующем выборе распределения напряжений по электродам такое возбуждение может приводить к возникновению параметрических колебаний [7].

Электрическая энергия Π_c N электродов имеет вид [3]

$$\Pi_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i^2}{C_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}U_i^2 C_i,$$

где q_i, C_i, U_i — электрический заряд, электроемкость и напряжение на i-м электроде.

При вычислении емкости C_i относительно резонатора используем следующее выражение [8]:

$$C_i = \frac{\varepsilon_0\bar{R}^2}{2d}\int_{\varphi_{1i}}^{\varphi_{2i}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin\theta}{1 - \frac{w_m}{d}}d\theta d\varphi, \quad \bar{R} = R + d + \frac{1}{2}h, \tag{10}$$

где φ_{1i}, φ_{2i}, θ_1, θ_2 — угловые координаты i-го электрода.

Разложим выражение (10) для электроемкости C_i в ряд Тейлора по малому относительному перемещению кромки резонатора $\frac{w_m}{d}$, удержав при этом слагаемые вплоть до четвертой степени малости, и подставим выражение для емкости C_i в выражение для электрической энергии Π_c

$$\begin{gathered}\Pi_c = \frac{3\pi\varepsilon_0\bar{R}^2}{8d^5}\int_{\theta_1}^{\theta_2}W_m^4(\theta)\sin\theta d\theta\left[p^2(t) + q^2(t)\right]^2 + \frac{\pi\varepsilon_0\bar{R}^2}{d}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta + \\ + \frac{\pi\varepsilon_0\bar{R}^2}{2d^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}W_m^2(\theta)\sin\theta d\theta\left[p^2(t) + q^2(t)\right].\end{gathered} \tag{11}$$

В прикладных задачах [1–5] в качестве рабочей формы колебаний выбирается вторая изгибная форма ($m = 2$).

С учетом этого запишем выражения (8) как

$$\Pi_l = \frac{6\pi E h^3}{1+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\theta}d\theta\left[p^2(t) + q^2(t)\right],$$

$$\Pi_n = \frac{\pi E h^3}{384R^4\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_{nl}(\theta)\,d\theta\left[p^2(t) + q^2(t)\right]^2, \tag{12}$$

$$P_{nl}(\theta) = \frac{3(W_2'(\theta))^4 \sin^4\theta + 8W_2^2(\theta)[6 + \nu(W_2'(\theta))^2 \sin^2\theta]}{\sin^3\theta},$$

где ( )' обозначает производную по координате θ.

Лагранжиан системы L запишем как

$$L = T - \Pi + \Pi_c.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа, описывающие динамику полусферического резонатора, принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L}{\partial p} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{13}$$

Подставляя выражения (9)–(12) в выражение (13) в предположении о том, что обкладки конденсаторов запитываются напряжением вида

$$U = U_0 + U_A \cos\lambda_U t,$$

получим

$$\begin{gathered}
\ddot{p} + \left(\lambda_e^2 - 2\varepsilon\left[4\eta^2\cos\lambda_U t + \cos 2\lambda_U t\right]\right)p + \\
+\left(\delta_g - 3\varepsilon\frac{\beta}{d^2}\left[4\eta^2\cos\lambda_U t + \cos 2\lambda_U t\right]\right)p\left(p^2 + q^2\right) = 0, \\
\ddot{q} + \left(\lambda_e^2 - 2\varepsilon\left[4\eta^2\cos\lambda_U t + \cos 2\lambda_U t\right]\right)q + \\
+\left(\delta_g - 3\varepsilon\frac{\beta}{d^2}\left[4\eta^2\cos\lambda_U t + \cos 2\lambda_U t\right]\right)q\left(p^2 + q^2\right) = 0,
\end{gathered} \tag{14}$$

где λ_U – частота возбуждающего напряжения;

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 U_A^2}{4\rho h d^3}\frac{\bar{R}^2}{R^2}\frac{I_4}{I_1}; \quad \eta = \frac{U_0}{U_A}; \quad \sigma_\lambda = \frac{1}{4}\left(\eta^2 + \frac{1}{2}\right); \quad \lambda_e^2 = \lambda_2^2 - 4\varepsilon\sigma_\lambda;$$

$$\delta_g = \alpha - 3\varepsilon\left(2\eta^2 + 1\right)\beta; \quad \alpha = \frac{Eh^2}{96\rho R^6\left(1 - \nu^2\right)}\frac{I_3}{I_1}; \quad \beta = \frac{I_5}{I_1};$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[U_2^2(\theta) + V_2^2(\theta) + W_2^2(\theta)\right]\sin\theta d\theta; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\theta}d\theta; \tag{15}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3(W_2'(\theta))^4 \sin^4\theta + 8W_2^2(\theta)[6 + \nu(W_2'(\theta))^2 \sin^2\theta]}{\sin^3\theta}d\theta;$$

$$I_4 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} W_2^2(\theta)\sin\theta d\theta; \quad I_5 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} W_2^4(\theta)\sin\theta d\theta,$$

где λ_2 – собственная частота второй изгибной собственной формы полусферического резонатора

$$\lambda_2^2 = \frac{12Eh^2}{(1 + \nu)\rho R^2}\frac{I_2}{I_1}.$$

Далее введем безразмерные величины

$$\hat{p} = \frac{p}{d}, \quad \hat{q} = \frac{q}{d}, \quad \hat{t} = \frac{1}{2}\lambda_2 t, \quad \hat{\delta} = \frac{4\lambda_e^2}{\lambda_2^2}, \quad \hat{\delta}_g = \frac{4\delta_g}{\lambda_2^2}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{\lambda_2^2}.$$

Для учета вязкого трения добавим в уравнение (14) силы диссипации с безразмерным коэффициентом трения $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \frac{2\mu}{\lambda_2}, \tag{16}$$

где μ — коэффициент диссипации.

Также положим, что

$$\hat{\delta} = 4 - 4\hat{\varepsilon}\sigma_\lambda, \quad \lambda_U = \lambda_2. \tag{17}$$

Первое выражение (17) показывает уменьшение собственной частоты резонатора при воздействии на него электрическим полем, а второе выражение означает, что частота возбуждения равняется собственной частоте λ_2 идеального резонатора с постоянными физическими свойствами и остается постоянной на протяжении всей работы навигационного прибора. Записывая это так, мы предполагаем, что, исходя из экспериментальных или конечно-элементных оценок о собственных формах и частотах колебаний резонатора, настройка частоты возбуждения λ_U проводится по предварительным спектральным данным датчика. В реальности же собственная частота объекта отлична от конечно-элементной оценки, что связано, например, с наличием физических и геометрических неоднородностей чувствительного элемента [1, 7, 11]. В таких случаях для удержания контролируемой частоты возбуждения на резонансной и для удержания резонансных колебаний при смещении резонансной частоты ввиду внешних факторов применяют методы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) [6, 7]. В дальнейшем положим, что в рассматриваемом случае система управления частотой возбуждения отсутствует, и известна лишь только собственная частота идеальной полусферы λ_2. Другой вариант работы датчика без системы управления, не рассматриваемый в статье, заключается в варьировании частоты возбуждения λ_U до момента наблюдения рабочей формы колебаний резонатора, что тоже требует предварительных спектральных данных об объекте исследования.

Наконец, перепишем систему (17) в безразмерном виде

$$\begin{gathered}
\ddot{\hat{p}} + \left(4 - 4\hat{\varepsilon}\sigma_\lambda - 2\hat{\varepsilon}\left[4\eta^2\cos 2\hat{t} + \cos 4\hat{t}\right]\right)\hat{p} + 2\hat{\mu}\dot{\hat{p}} + \\
+ \left(\hat{\delta}_g - 3\hat{\varepsilon}\beta\left[4\eta^2\cos 2\hat{t} + \cos 4\hat{t}\right]\right)\hat{p}\left(\hat{p}^2 + \hat{q}^2\right) = 0, \\
\ddot{\hat{q}} + \left(4 - 4\hat{\varepsilon}\sigma_\lambda - 2\hat{\varepsilon}\left[4\eta^2\cos 2\hat{t} + \cos 4\hat{t}\right]\right)\hat{q} + 2\hat{\mu}\dot{\hat{q}} + \\
+ \left(\hat{\delta}_g - 3\hat{\varepsilon}\beta\left[4\eta^2\cos 2\hat{t} + \cos 4\hat{t}\right]\right)\hat{q}\left(\hat{p}^2 + \hat{q}^2\right) = 0,
\end{gathered} \tag{18}$$

для типичных параметров резонатора ($U_A = 200$ В, $\rho = 2210$ кгм$^{-3}$, $R = 15$ мм, $h = 0.1R$, $d = 1.9$ мм, $\lambda_2 = 5.5$ кГц, параметр $\hat{\varepsilon} = 2.57 \times 10^{-6}$), что позволяет применить метод осреднения для аналитического исследования уравнений (18). В дальнейшем символ (^), обозначающий безразмерные величины, опущен.

Исследование установившихся колебаний ТВГ в зонах раскачки параметрических колебаний. Перенормируем коэффициенты $\mu \to \varepsilon\chi$, $\delta_g \to \varepsilon\delta_g$ и запишем уравнения (18) как

$$\begin{aligned}
&\ddot{p} + 4p = \varepsilon\Big(4\sigma_\lambda - 2\Big[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t\Big]\Big)p - 2\mu\dot{p} - \\
&-\Big(\delta_g - 3\beta\Big[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t\Big]\Big)p\left(p^2 + q^2\right) = 0, \\
&\ddot{q} + 4q = \varepsilon\Big(4\sigma_\lambda - 2\Big[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t\Big]\Big)q - 2\mu\dot{q} - \\
&-\Big(\delta_g - 3\beta\Big[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t\Big]\Big)q\left(p^2 + q^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Предположим, что

$$p = P\cos(2t + \beta_p), \quad q = Q\cos(2t + \beta_q), \tag{20}$$

где $P, Q, \beta_p, \beta_q = P(t), Q(t), \beta_p(t), \beta_q(t)$ – амплитуды и фазы модальных координат p, q.

Продифференцируем уравнение (20) и предположим, что функции P, Q, β_p, β_q не зависят от времени t

$$\dot{p} = -2P\sin(2t + \beta_p), \quad \dot{q} = -2Q\sin(2t + \beta_q). \tag{21}$$

Далее снова дифференцируем уравнения (20) с учетом зависимости фаз и амплитуд от времени

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \dot{P}\cos(2t + \beta_p) - 2P\sin(2t + \beta_p) - P\dot{\beta}_p\sin(2t + \beta_p), \\
\dot{q} &= \dot{Q}\cos(2t + \beta_q) - 2Q\sin(2t + \beta_q) - Q\dot{\beta}_q\sin(2t + \beta_q).
\end{aligned} \tag{22}$$

Проводя сравнение между выражениями (21), (22), приходим к условию [15]

$$\begin{aligned}
\dot{P}\cos(2t + \beta_p) - P\dot{\beta}_p\sin(2t + \beta_p) = 0, \\
\dot{Q}\cos(2t + \beta_q) - Q\dot{\beta}_q\sin(2t + \beta_q) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Дифференцирование (21) по t дает

$$\begin{aligned}
\ddot{p} &= -2\dot{P}\sin(2t + \beta_p) - 4P\cos(2t + \beta_p) - 2P\dot{\beta}_p\cos(2t + \beta_p), \\
\ddot{q} &= -2\dot{Q}\sin(2t + \beta_q) - 4Q\cos(2t + \beta_q) - 2Q\dot{\beta}_q\cos(2t + \beta_q).
\end{aligned} \tag{24}$$

Подставим уравнения (20), (22), (24) в уравнения (19) и получим

$$\begin{aligned}
&\dot{P} = -\frac{\varepsilon P}{2}([4\sigma_\lambda + [4\eta^2\cos 2t + \cos 4t]\sin(4t + 2\beta_p) + \\
&+ 4\chi\sin^2(2t + \beta_p) - 0.5(\delta_g - 3\beta[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t])\times \\
&\times[P^2\cos^2(2t + \beta_p) + Q^2\cos^2(2t + \beta_q)]\sin(4t + 2\beta_p)), \\
&\dot{Q} = -\frac{\varepsilon Q}{2}([4\sigma_\lambda + [4\eta^2\cos 2t + \cos 4t]\sin(4t + 2\beta_q) + \\
&+ 4\chi\sin^2(2t + \beta_q) - 0.5(\delta_g - 3\beta[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t])\times \\
&\times[P^2\cos^2(2t + \beta_p) + Q^2\cos^2(2t + \beta_q)]\sin(4t + 2\beta_q)), \\
&P\dot{\beta}_p = -\frac{\varepsilon P}{2}([4\sigma_\lambda + 2[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t]\cos^2(2t + \beta_p) + \\
&+ 2\chi\sin(4t + 2\beta_p) - (\delta_g - 3\beta[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t])\times \\
&\times[P^2\cos^2(2t + \beta_p) + Q^2\cos^2(2t + \beta_q)]\cos^2(2t + \beta_p)),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$Q\dot{\beta}_q = -\frac{\varepsilon Q}{2}([4\sigma_\lambda + 2[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t]\cos^2(2t+\beta_q) +$$
$$+ 2\chi\sin(4t+2\beta_q) - (\delta_g - 3\beta[4\eta^2\cos 2t + \cos 4t])\times$$
$$\times[P^2\cos^2(2t+\beta_p) + Q^2\cos^2(2t+\beta_q)]\cos^2(2t+\beta_q)).$$

Таким образом, для нахождения нетривиальных динамических режимов получаем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\varepsilon F_1(P,Q,\beta_p,\beta_q,t), \quad \dot{Q} = -\varepsilon F_2(P,Q,\beta_p,\beta_q,t),\\ \dot{\beta}_p &= -\varepsilon F_3(P,Q,\beta_p,\beta_q,t), \quad \dot{\beta}_q = -\varepsilon F_4(P,Q,\beta_p,\beta_q,t), \end{aligned} \tag{26}$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 являются правыми частями системы (25).

Вследствие предположения о малости величины ε правые части уравнений (26) также являются малыми, откуда следует, что величины P, Q, β_p, β_q являются медленно меняющимися функциями времени.

При данных условиях усредним выражения (26) по периоду собственных колебаний π

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \dot{P}dt &= -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_1(P,Q,\beta_p,\beta_q,t)\,dt,\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \dot{Q}dt &= -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_2(P,Q,\beta_p,\beta_q,t)\,dt,\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \dot{\beta}_p dt &= -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_3(P,Q,\beta_p,\beta_q,t)\,dt,\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \dot{\beta}_q dt &= -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_4(P,Q,\beta_p,\beta_q,t)\,dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Из уравнений (27) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\varepsilon P}{16}\left\{16\chi + 4\sin 2\beta_p + 3\beta\left(P^2+Q^2\right)\sin 2\beta_p - \delta_g Q^2\sin 2\left(\beta_p-\beta_q\right)\right\},\\ \dot{Q} &= -\frac{\varepsilon Q}{16}\left\{16\chi + 4\sin 2\beta_p + 3\beta\left(P^2+Q^2\right)\sin 2\beta_q - \delta_g P^2\sin 2\left(\beta_q-\beta_p\right)\right\},\\ \dot{\beta}_p &= -\frac{\varepsilon}{16}\left\{16\sigma_\lambda + 4\cos 2\beta_p - \delta_g\left(3P^2 + Q^2\left(2\cos\left(\beta_p-\beta_q\right)+1\right)\right) + \right.\\ &\quad \left. + 3\beta\left(2P^2\cos 2\beta_p + Q^2\left\{\cos 2\beta_p + \cos 2\beta_q\right\}\right)\right\},\\ \dot{\beta}_q &= -\frac{\varepsilon}{16}\left\{16\sigma_\lambda + 4\cos 2\beta_q - \delta_g\left(3Q^2 + P^2\left(2\cos\left(\beta_q-\beta_p\right)+1\right)\right) + \right.\\ &\quad \left. + 3\beta\left(2Q^2\cos 2\beta_q + P^2\left\{\cos 2\beta_q + \cos 2\beta_p\right\}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения (28) представляют собой динамические уравнения для амплитуд и фаз колебаний полусферического резонатора. Предположим, что при задании определенных начальных условий мы возбуждаем только одну модальную форму, например, P

$$P|_{t=0} = P_0 \neq 0, \quad Q|_{t=0} = Q_0 \neq 0, \quad \beta_p|_{t=0} = \beta_p^0 = 0, \quad \beta_q|_{t=0} = \beta_q^0 = 0. \tag{29}$$

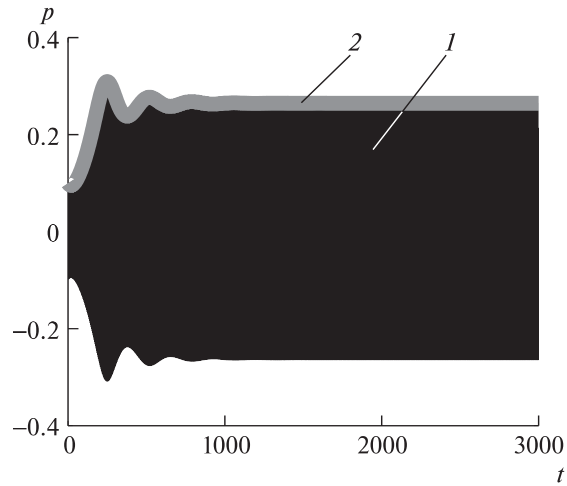

Рис. 2. График зависимости амплитуды P от времени t в случае прямого численного счета *1* и метода осреднения *2* при $\chi = 0.1$, $\eta = 0.25$, $\delta_g = 20$, $\beta = 1.27$, $\varepsilon = 0.05$, $\sigma_\lambda = 0$.

Подставляя выражение (29) в выражении (28), получим

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\varepsilon P}{16}\left\{16\chi + 4\sin 2\beta_p + 3\beta P^2 \sin 2\beta_p\right\}, \\ \dot{\beta}_p &= -\frac{\varepsilon}{16}\left[16\sigma_\lambda + 4\cos 2\beta_p - 3\left(\delta_g - 2\beta\cos 2\beta_p\right)P^2\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Рис. 2 показывает прямое численное решение с использованием встроенной функции ode45 в среде Matlab [14] и решение методом осреднения в случае задания одинаковых начальных условий вида

$$\left[p, \dot{p}, q, \dot{q}\right]\Big|_{t=0} = \left[0.1, 0, 0, 0\right], \quad \left[P, Q, \beta_p, \beta_q\right]\Big|_{t=0} = \left[0.1, 0, 0, 0\right]. \tag{31}$$

Решение системы (30) представляет собой огибающую сигнала выражения (19) при начальных условиях (31) (рис. 2). Таким образом, исследование системы (30) позволяет получить аналитические зависимости амплитуды и фазы установившихся колебаний резонатора от геометрических и физических параметров системы.

Далее определим параметры установившихся колебаний. Для этого обнулим левые части уравнения (30) и получим

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\sqrt{3\beta}}\sqrt{\frac{\cos 2\beta_p^0 + 4\sigma_\lambda}{B - 2\cos 2\beta_p^0}}, \quad B = \frac{\delta_g}{\beta}, \\ &\sin 4\beta_p^0 - 2\left(4\sigma_\lambda + B\right)\sin 2\beta_p^0 + 8\chi\left(2\cos 2\beta_p^0 - B\right) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Выражения (32) задают зависимость стационарных амплитуды и фазы колебаний в зависимости от параметров системы, в частности частотной расстройки σ_λ. Для существования ненулевых значений амплитуд найдем граничное значение $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda^c$ из условия $P = 0$.

Тогда придем к следующей алгебраической системе относительно неизвестных σ_λ^c, β_p^c:

$$\sigma_\lambda^c = -\frac{1}{4}\cos 2\beta_p^c,$$

$$\sin 4\beta_p^c - 2\left(4\sigma_\lambda^c + B\right)\sin 2\beta_p^c + 8\chi\left(2\cos 2\beta_p^c - B\right) = 0,$$

из которой получим

$$\cos 2\beta_p^c = \pm\sqrt{1-16\chi^2}, \quad \cos 2\beta_p^c = \frac{B}{2}. \tag{33}$$

Из структуры выражения для амплитуды P в уравнении (32) и определения параметра $\sigma_\lambda \geq 0.125$ (15) видно, что из множества решений (33) остается лишь $\cos 2\beta_p^c = -\sqrt{1-16\chi^2}$, и соответствующее ему значение параметра частотной расстройки σ_λ^c.

$$\sigma_\lambda^c = \frac{1}{4}\sqrt{1-16\chi^2}. \tag{34}$$

Таким образом, получен интервал $[0.125, \sigma_\lambda^c]$, который определяет диапазон существования нетривиальных стационарных решений. Уравнение (34) задает максимальную величину параметра σ_λ, выше которого стационарные колебания не существуют. Для рассматриваемого резонатора добротность имеет порядок 10^5–10^6 [3], откуда с учетом выражений (17), (34) размерный параметр максимальной частотной расстройки находится в интервале $\bar{\sigma}_\lambda^c = 3.5$–$11.2$ Гц.

Согласно (15) уравнение (34) имеет вид

$$\eta_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{1-16\chi^2} - 1}. \tag{35}$$

Для достижения максимальной амплитуды колебаний чувствительного элемента полусферического ТВГ необходимо подбирать отношение постоянной составляющей и амплитуды возбуждающего сигнала η согласно уравнению (35). Критический уровень параметра трения χ_η^c, выше которого не будет колебаний, равен $\chi_\eta^c = \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.217$. Параметр η принимает максимальное значение при $\chi = 0$, которое равняется $\eta_{\max}^c = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$.

Результаты. На рис. 3, 4 изображены резонансные кривые установившихся колебаний в зависимости от параметра частотной расстройки σ_λ и параметра напряжения η. В случае нахождения σ_λ в интервале $[0.125, \sigma_\lambda^c]$ наблюдаются нетривиальные значения амплитуд, что объясняется попаданием параметров резонатора и системы возбуждения в зону раскачки параметрических колебаний. Ширина диапазона $[0.125, \sigma_\lambda^c]$ нетривиальных амплитуд увеличивается при уменьшении трения χ.

Рис. 4 показывает зависимость критического напряжения η_c от параметра трения χ. Величина η_c означает, что при определенном значении параметра трения χ максимальные колебания будут наблюдаться при достижении $\eta = \eta_c$.

Заключение. Полученные аналитические зависимости позволяют оценить амплитуду колебаний резонатора ТВГ в режиме параметрического возбуждения как функцию всех основных параметров системы — геометрических размеров (в том числе углового

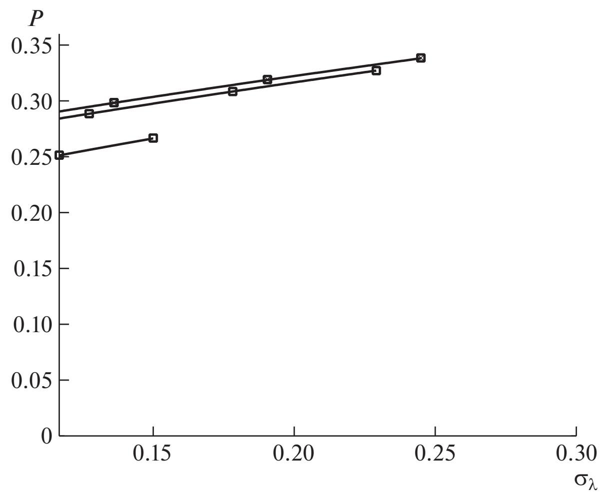

Рис. 3. График зависимости амплитуды установившихся колебаний P от параметра σ_λ при $\chi = 0.05, 0.1, 0.2$, $\delta_g = 4$, $\beta = 1.27$, $\varepsilon = 0.05$ (сплошные линии – аналитические выражения (34), квадратики – прямое численное решение системы (14).

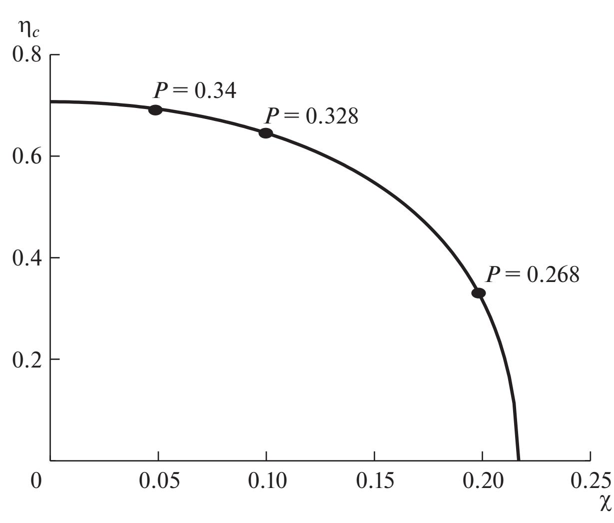

Рис. 4. График зависимости критического значения параметра напряжения η_c от параметра трения χ.

положение электродов возбуждения), параметров материала и внешнего воздействия, что позволяет выполнять проектирование датчика и подбирать требуемые компоненты систем возбуждения и съема колебаний. Полученную оценку ширины зоны параметрического резонанса в зависимости от добротности системы можно использовать при проектировании как оценку сверху, поскольку в реальном резонаторе в силу наличия потерь, связанных с возбуждением второй формы и влиянием несовершеств (допуски, дефекты, несимметрии) реальный уровень затухания будет выше. Полученные безразмерные кривые (рис. 3) показывают для типичного значения параметров системы достаточно пологий характер графиков изменения амплитуды по мере увеличения постоянной составляющей напряжения вплоть до срыва колебаний, вызванного изменением собственной частоты системы. Можно сделать вывод, что в схеме работы гироскопа без ФАПЧ применение постоянной составляющей способно дать увеличение амплитуды до 40%, наблюдаемое на границе срыва. Рассмотренную модель также можно использовать для проектирования микромеханических полосовых фильтров и детекторов, в которых в качестве чувствительного элемента используется полусфера.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, https://rscf.ru/project/21-71-10009/

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matveev V.A., Basarab M.A., Lunin B.S.* Development of the theory of cylindrical vibratory gyroscopes with metallic resonators // Vestnik RFBR. 2015. V. 87 (3). P. 84.
2. *Zhang Y., Wu Y., Wu X., Xi X., Wang J.* A novel vibration mode testing method for cylindrical resonators based on microphones // Sensors. 2015. V. 15 (1). P. 1954.
3. *Basarab M.A., Lunin B.S., Kolesnikov A.V.* Numerical-analytical solution of the differential equation of free oscillations of an elastic ring when an arbitrary law of rotation of the basement // Dyn. Complex Syst. XXI Century. 2020. V. 2. P. 5.
4. *Matthews A., Rybak F.J.* Comparison of hemispherical resonator gyro and optical gyros // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 1992. V. 7 (5). P. 40.
5. *Xu Z., Yi G., Qi Z., Huang C., Fang H.* Structural optimization research on hemispherical resonator gyro based on finite element analysis // 35th Chinese Control Conference (CCC). IEEE. 2016. P. 5737.
6. *Rozelle D.M.* The hemispherical resonator gyro: From wineglass to the planets // Proc. 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. 2009. V. 134. P. 1157.
7. *Shatalov M., Coetzee C.* Dynamics of rotating and vibrating thin hemispherical shell with mass and damping imperfections and parametrically driven by discrete electrodes // Gyroscopy and Navigation. 2011. V. 2 (1). P. 27.
8. *Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017. 194 с.
9. *Strutt J.W.* The theory of sound, Vol. 1, Macmillan, New York, 1877. P. 408.
10. *Strutt J.W.* The theory of sound, Vol. 2, Macmillan, New York, 1896. P. 504.
11. *Xu Z., Zhu W., Yi G., Fan W.* Dynamic modeling and output error analysis of an imperfect hemispherical shell resonator // Journal of Sound and Vibration. 2021. V. 498. P. 115964.
12. *Гольденвейзер А.Л., Лидских В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
13. *Григоренко Я.М., Мукоед А.П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 289 с.
14. *Gilat A.*, MATLAB: An introduction with Applications. New York: John Wiley & Sons, 2004. P. 418.
15. *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. New York: John Wiley & Sons, 2008. P. 424.

EDN: XESMJR
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 27–42**

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3: 534.1

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СКОШЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПАНЕЛИ

© 2022 г. Н. С. Азиков[1,*], А. В. Зинин[2]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
**e-mail: nik_azikov@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.
После доработки 17.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Проведен анализ свободных колебаний и устойчивости симметричных по толщине слоистых косоугольных композитных панелей. Панель моделируется пластиной, имеющей в плане форму параллелограмма, каждый край которого может иметь независимый способ закрепления. Решение задачи поперечных колебаний и устойчивости осуществляется в перемещениях методом Ритца. Получены значения собственных частот колебаний и критических усилий сжатия скошенных слоистых композитных панелей с различными граничными условиями на контуре в зависимости от геометрии элемента, граничных условий на контуре и уровней осевой нагрузки.

Ключевые слова: композитные материалы, скошенные панели, угол скоса, свободные колебания, частота колебаний, устойчивость

DOI: 10.31857/S0235711922050030

Успешное применение полимерных композиционных материалов в технических системах и объектах в значительной степени определяется технологическими возможностями их производства и структурными особенностями композитов как гетерогенных материалов. В результате наиболее эффективными в этой области инженерными решениями стали тонкостенные многослойные композитные конструкции, конструктивно-технологические параметры которых в наибольшей степени соответствуют требованиям функциональности и надежности всей конструкции и наилучшим образом реализуют преимущества композитных материалов. Так, тонкостенные композитные конструкции можно выполнить в виде слоистых пластин, имеющих форму параллелограмма, стороны которого адекватны локальной системе координат конструктивного узла, в состав которого входит панель [1–5]. Тонкостенные композитные панели скошенной формы широко и эффективно применяются в качестве несущих и формообразующих элементов в конструкциях авиакосмической и автомобильной техники, в агрегатах морских судов и машиностроения, объектах строительства и гидротехнических сооружений, приборостроения и др. Скошенные панели применяются в обшивке стреловидных крыльев и хвостового оперения самолетов [6, 7] и корпусов кораблей [8], сетчатых (анизогридных) каркасов [9], элементы оболочек и лонжеронов летательных аппаратов [10], панели солнечных батарей космического аппарата [11], узлов строительных сооружений [12] и др.

Условия эксплуатации композитных элементов для указанных областей применения таковы, что композитные обшивки и панели подвергаются многократному воздействию интенсивных аэродинамических и функциональных нагрузок, которые могут приводить к динамическим эффектам, колебаниям, резонансным явлениям, и как следствие, – к разрушению. В таких условиях несущую способность элементов конструкции и прочностную надежность всего объекта во многом определяет динамическая реакция отдельных конструктивных элементов, и динамический анализ и определение частотных характеристик и форм колебаний является обязательным условием проектирования надежных и долговечных конструкций из полимерных композитов.

Обзор литературы. Свободные колебания многослойных анизотропных пластин изучали многие исследователи, которыми были предложены различные кинематические модели для прогнозирования динамического поведения композитных конструкций в зависимости от различных факторов – граничных условий, условий нагружения и геометрии конструкций. Однако методы и результаты динамического анализа композитных косоугольных пластин в современной литературе представлены ограничено. Это связано, прежде всего, со сложностью расчетных методов анализа косоугольных анизотропных объектов и определенными вычислительными трудностями из-за использования неортогональной системы координат, когда строгие формулировки при решении основных уравнений требуют дополнительных ресурсов [3, 5].

Анализ современных исследований свободных колебаний косоугольных композитных панелей показал, что классическая теория пластин Кирхгофа (CLPT) [1, 2, 13] и теория деформации сдвига Уфлянда–Миндлина (FSDT) [14–16] являются наиболее используемыми при решении динамических задач теориями пластин. Более сложные трехмерные теории, в которых каждый слой рассматривается как однородная анизотропная среда [1, 12], трудно реализуемы вычислительно при увеличении количества слоев пластины. Теория эквивалентной однослойной пластины (ESL) [2] позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной путем принятия подходящих допущений относительно изменения смещений и напряжений по толщине пластины.

Однако ограничения теорий Кирхгофа и Уфлянда–Миндлина, не учитывающих наличие или изменение по толщине деформации поперечного сдвига, вызвали развитие уточненных методов анализа композитных пластин на основе теории сдвиговой деформации высшего порядка (HSDT) [2, 17], которая не требует поправочных коэффициентов сдвига из-за более реалистичного представления деформации поперечного сечения. Чаще всего для этого в модели вводят некоторые функции формы, в которых компоненты перемещения представлены степенным рядом по координате толщины. Поэтому в настоящее время получили распространение полиномиальная теория высшего порядка, обладающая высокой точностью [12, 18], менее трудоемкая не полиномиальная теория высшего порядка [19], теория "зигзага" Муроками [20], в которой повышенная точность результатов достигается за счет включения зигзагообразной функции для аппроксимации перемещений по толщине пластины, и другие.

Как правило, для решения задач свободных колебаний композитных пластин неортогональной формы применяют приближенные аналитические или численные методы. Известные вычислительные процедуры, такие как разложение в ряд, методы Рэлея–Ритца, расширенный метод Канторовича, безэлементный метод Галеркина, метод подвижных наименьших квадратов Ритца и др. обладают высокой точностью, но являются трудоемкими при расчетах пластин со сложной геометрией и нетрадиционными граничными условиями. В последнее время появились более производительные методы дифференциальных квадратур, методы дискретной сингулярной свертки и бессеточные методы, которые становятся все более популярными при численном решении начальных и краевых задач в инженерных приложениях. Эти методы могут дать точные решения при динамическом анализе с относительно меньшими затратами вычислительных ресурсов.

Таким образом, теория сдвиговой деформации первого порядка (FSDT) Миндлина на сегодняшний день является наиболее широко используемой теорией для динамического анализа скошенных слоистых панелей, а дифференциальный квадратурный метод (DQM), метод Рэлея—Ритца и метод конечных элементов МКЭ — наиболее часто применяемые численные методы для решения этой проблемы. Обширный обзор современных достижений в области статического и динамического анализа композитных слоистых косоугольных пластин представлен в [18]. Кратко остановимся на наиболее важных работах последних лет, не вошедших в упомянутый обзор.

Заслуживает внимания одна из немногих экспериментальных работ [21], в которой представлены экспериментальные и конечно-элементные исследования свободных колебаний изотропных и многослойных композитных скошенных пластин. Было изучено влияние угла скоса и соотношения сторон на собственные частоты косоугольных пластин. Расчетные значения собственных частот определены конечно-элементным анализом с использованием элементов CQUAD8; экспериментальные характеристики колебательного процесса получены при проведении пинг-теста модельных образцов композитных панелей. Моделирование показало, что все экспериментальные значения частот меньше полученных МКЭ, а также установлено, что расхождение расчетных и экспериментальных результатов увеличивается с увеличением угла скоса панелей.

В работе [22] представлено исследование вибрации композитных панелей численным методом — методом движущихся наименьших квадратов Ритца (MLS-Ritz), позволяющим устранить вычислительные трудности при динамическом анализе пластины с большим углом наклона из-за медленной сходимости вследствие сингулярности напряжений в тупых углах пластины.

Развитием численного анализа ортотропных пластин является метод DSC-Ritz, разработанный для анализа свободных колебаний пластин и оболочек в работе [23], который сочетает локальные базисы приближений дискретной сингулярной свертки (DSC) и метод Рэлея—Ритца с двумерными полиномиальными граничными функциями. Математической основой алгоритма DSC является теория распределений и вейвлет-анализ. Новый подход продемонстрировал точность глобальных методов для интеграции и гибкость локальных методов для работы со сложной геометрией и граничными условиями.

Влияние нерегулярности в виде круглого выреза в скошенных слоистых пластинах на их частотные характеристики исследовано в работе [24] на основе теории деформации сдвига первого порядка методом конечных элементов в среде ANSYS. Показано, что частоты собственных колебаний для первых гармоник увеличивались с увеличением угла скоса сторон пластины, количества слоев и соотношения ширины и толщины пластины. Максимальные значения частоты собственных колебаний получены для жесткого закрепления краев пластины.

М. Гюрсес (M. Gürses) [25] применил метод дискретной сингулярной свертки (DSC) для анализа свободных колебаний симметрично армированных косоугольных пластин, используя теорию сдвиговых деформаций первого порядка. В предлагаемом подходе четырехугольная неортогональная физическая область преобразуется в прямоугольную с помощью трансформации геометрических координат. Затем процедуры DSC применяются для дискретизации преобразованного набора управляющих уравнений.

Авторы статьи [26] использовали теорию деформации сдвига первого порядка в процедуре многоквадратической радиальной базисной функции (MQRBF) для предсказания поведения свободных колебаний симметрично слоистых композитных пластин средней толщины. Поперечный прогиб и два поворота слоистой пластины независимо аппроксимируются с помощью приближения базисной функции. Численные эксперименты демонстрируют возможности и эффективность использованного метода для задач на собственные значения, а также сходимость и точность вычислений.

Для построения задачи на собственные значения, связанной с собственными частотами пластины, Ю. Киани (Y. Kiani) [27] применил метод Ритца, в котором виртуальная деформация и кинетическая энергия пластины получены с использованием теории пластин сдвиговой деформации первого порядка, а функции формы представлены ортогональными полиномами, подобранными в соответствии с процессом Грама–Шмидта. Показано, что разработанный метод решения является общим и может применяться для произвольных граничных условий пластины.

А.С. Ашур (A.S. Ashour) [28] выполнил анализ свободных колебаний тонких косоугольных пластин с жестко закрепленными краями с использованием метода конечных полос переходной матрицы (метод Канторовича). Собственные частоты пластин получены итеративно, как значения, которые приводят к сингулярности матрицы перехода после наложения конкретных граничных условий на пластины. Численные результаты получены для различных значений углов скоса панели из различных композитных материалов с различной схемой укладки слоев. Сравнение с имеющимися в литературе результатами показывают точность и эффективность метода.

Р. Кумар с соавторами (R. Kumar and al.) [17] на основе теории деформации сдвига более высокого порядка (HSDT) изучали параметрический резонанс композитных скошенных пластин, подвергающихся неоднородному и линейно изменяющемуся периодическому краевому нагружению при различных граничных условиях. Функционал полной энергии, включающий дополнительную энергию изгиба из-за изменения кривизны и энергию сдвига из-за сдвиговой деформации, решается методом Рэлея–Ритца в сочетании с функциями ортонормированных полиномов граничных характеристик. Методом Болотина получены границы области параметрического резонанса с аппроксимацией более высокого порядка. Эти границы прослеживаются периодическим решением уравнений Матье–Хилла.

Дж. Н. Редди и др. изучали поведение при свободных колебаниях многослойных композитных пластин, используя теорию сдвиговой деформации второго порядка и обобщенное решение типа Лью в сочетании с концепцией пространства состояний. В работах [2] представлены точные решения типа Навье для изгиба и собственных колебаний слоистых упругих цилиндрических и сферических оболочек на основе HSDT и результаты конечно-элементного анализа свободных колебаний многослойных пластин с антисимметричным углом наклона, включая деформацию поперечного сдвига.

Б. Адхикари (B. Adhikari) [19] использовал для анализа свободных колебаний композитных панелей неполиномиальную теорию более высокого порядка, основанную на нелинейном распределении поперечных касательных напряжений по толщине пластины. Управляющие уравнения движения выводятся с помощью уравнения Лагранжа и дискретизируются с помощью процедуры конечных элементов.

Х. Тай и С.Э. Ким [29] исследовали отклики на свободные колебания многослойных композитных пластин, используя усовершенствованную теорию пластин с двумя переменными, а П. Малекзаде [30] применил теорию тонких пластин для анализа многослойных композитных косоугольных тонких пластин методом дифференциальной квадратуры, в котором геометрическая нелинейность моделируется с использованием деформации Грина в сочетании с предположениями фон Карамана.

Особо следует отметить работы [31–33], посвященные не только определению параметров собственных колебаний косоугольных композитных панелей, но и решающие задачи оптимизации структуры таких панелей для обеспечения наилучшего динамического отклика. В этих исследованиях использована современная методология вычислительного искусственного интеллекта, позволяющая решать задачи параметрической идентификации в виде поиска хорошего начального приближения с возможностью дальнейшего уточнения найденной оценки одним из численных методов.

В [31] выполнен динамический анализ и проведена оптимизация основной частоты многослойных квадратных и скошенных пластин с использованием вариационных принципов, методологии нейронной сети и генетического алгоритма. Собственные частоты композитных пластин рассчитаны методом Рэлея–Ритца для различной геометрии пластины, углов скоса и краевых условий пластины, и предложенные нейронные сети были обучены и протестированы на основе этих данных. Генетический алгоритм и предложенные нейронные сети успешно предсказали собственные частоты композитных пластин, а предсказанные частоты и оптимальные многослойные последовательности хорошо согласуются с имеющимися в литературе. Предложенный метод находит оптимальную конструкцию, максимизирующую собственную частоту композитных пластин без получения локального оптимума для всех краевых условий и параметров конструкции. Показано, что собственные частоты косоугольных пластин увеличиваются с ужесточением условий на краях пластины. Т. Фарсади (T. Farsadi) [32] также использовал генетический алгоритм для оптимизации собственных частот и форм колебаний композитных скошенных пластин переменной жесткости. Для решения основных уравнений движения используется обобщенный дифференциально-квадратурный метод решения. Переменная жесткость достигается путем непрерывного изменения углов волокон в соответствии с двумя выбранными функциями криволинейной траектории укладки волокна в композитных слоистых материалах. Кроме того, используются предположения о линейной кинематической деформации, а теория деформации сдвига первого порядка используется для обобщения формулировки на случай пластин средней толщины, включая эффекты поперечного сдвига. Похожие задачи динамического анализа и структурной оптимизации косоугольных композитных панелей в работе [33] решены на основе оригинального комплексного подхода, сочетающего высокую точность метода конечных элементов с возможностями искусственного интеллекта в виде реализации метаэвристических (“популяционных”) алгоритмов. Конечно-элементная модель построена согласно теории сдвиговой деформации первого порядка с учетом инерционных перемещений. Оптимизационные процедуры реализованы с использованием трех мощных метаэвристических алгоритмов, инспирированные процессами реальной природы – генетического алгоритма (genetic algorithm (GA) в его классической форме, варианта оптимизации роя частиц (particle swarm optimization (PSO) и варианта поиска с кукушкой (cuckoo search (CS)). Эти алгоритмы используют принципы искусственного интеллекта и представляют новый класс стохастических поисковых методов оптимизации структуры слоистых панелей различной геометрии для максимального улучшения их динамических характеристик.

Постановка задачи. В настоящей статье проведен анализ динамического отклика скошенной композитной панели с целью оценки частотных параметров свободных колебаний конструкции в зависимости от степени скошенности панели и граничных условий на контуре, а также рассмотрены вопросы устойчивости косоугольных композитных элементов и влияния осевой сжимающей нагрузки на динамические характеристики при колебаниях.

Рассмотрим многослойную углепластиковую панель (рис. 1), имеющую в плане форму параллелограмма.

Направление армирования совпадает с осью ξ. Геометрию панели определяют следующие параметры: соотношение сторон панели $l/b = 1$, угол скоса, толщина элементарного слоя композита равна 0.15 мм; общее число слоев $k = 10$. Слои расположены симметрично по толщине с углами армирования $\pm\varphi_i$ к продольной оси. Механические характеристики элементарного слоя углепластика со схемой армирования $[0°/\pm45°]_s$ указаны в табл. 1.

Проведем исследование влияния угла скоса χ на частоту собственных колебаний и критические усилия сжатия панели в продольном направлении (рис. 1) со следующими граничными условиями (рис. 2): схема 1 – кромки слева и снизу защемлены, справа и сверху – шарнирно оперты; схема 2 – все кромки панели шарнирно оперты; схе-

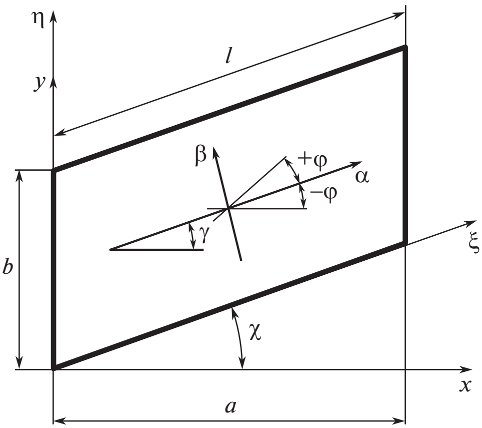

Рис. 1. Геометрические параметры косоугольной панели.

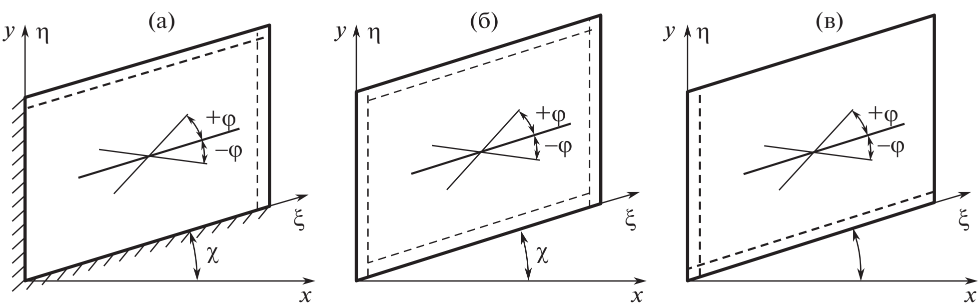

Рис. 2. Граничные условия по контуру панели: (а) – схема 1 (З–Ш–З–Ш); (б) – схема 2 (Ш–Ш–Ш–Ш); (в) – схема 3 (Ш–С–Ш–С).

ма 3 – края панели слева и снизу шарнирно оперты, справа и сверху – свободны от закрепления.

Используем полученные в [1, 3, 4] основные соотношения для косоугольных слоистых панелей, связывающие деформации и напряжения в координатах армирования

Таблица 1. Характеристики механических свойств углепластика

Характеристика	Вдоль волокон	Поперек волокон
Плотность, кг/м^3	1540	
Модуль упругости, ГПа	110	17.5
Коэффициент Пуассона	0.260	0.041
Модуль сдвига в плоскости слоя, ГПа	7.5	
Предел прочности при растяжении, МПа	1350	75
Предел прочности при сжатии, МПа	860	240
Предел прочности при сдвиге в плоскости слоя, МПа	56	

$\{\alpha\beta z\}$ элементарного слоя композитного материала, с деформациями и напряжениями в прямоугольном базисе $\{xyz\}$ и деформациями и напряжениями в косоугольном базисе $\{\xi\eta z\}$.

Полные деформации точек координатной поверхности в соответствующих базисах определяются следующим образом:

$$\lfloor e\rfloor_{\alpha\beta} = \lfloor e_\alpha\; e_\beta\; e_{\alpha\beta}\rfloor^T = \lfloor \varepsilon_\alpha\; \varepsilon_\beta\; \varepsilon_{\alpha\beta}\rfloor^T + z\lfloor \zeta_\alpha\; \zeta_\beta\; \zeta_{\alpha\beta}\rfloor^T =$$

$$= \lfloor u_{,\alpha}\; v_{,\beta}\; u_{,\beta} + v_{,\alpha}\rfloor - z\lfloor w_{,\alpha\alpha}\; w_{,\beta\beta}\; 2w_{,\alpha\beta}\rfloor^T,$$

$$\lfloor e\rfloor_{xy} = \lfloor e_x\; e_y\; e_{xy}\rfloor^T = \lfloor \varepsilon_x\; \varepsilon_y\; \varepsilon_{xy}\rfloor^T + z\lfloor \zeta_x\; \zeta_y\; \zeta_{xy}\rfloor^T =$$

$$= \lfloor u_{,x}\; v_{,y}\; u_{,y} + v_{,x}\rfloor - z\lfloor w_{,xx}\; w_{,yy} 2\, w_{,xy}\rfloor^T,$$

$$\lfloor e\rfloor_{\xi\eta} = \lfloor e_\xi\; e_\eta\; e_{\xi\eta}\rfloor^T = \lfloor \varepsilon_\xi\; \varepsilon_\eta\; \varepsilon_{\xi\eta}\rfloor^T + z\lfloor \zeta_\xi\; \zeta_\eta\; \zeta_{\xi\eta}\rfloor^T =$$

$$= \lfloor u_{,\xi}\; v_{,\eta}\; u_{,\eta} + v_{,\xi}\rfloor - z\lfloor w_{,\xi\xi}\; w_{,\eta\eta}\; 2\, w_{,\xi\eta}\rfloor^T.$$

Деформации, определенные в различных базисах, связаны между собой соотношениями

$$\lfloor e\rfloor_{\alpha\beta} = \left[R^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right]\lfloor e\rfloor_{xy} = \left[R^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right]\left[R^{\xi\eta}_{\varepsilon}\right]\lfloor e\rfloor_{\xi\eta},$$

$$\left[R^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma\pm\varphi) & \sin^2(\gamma\pm\varphi) & 0.5\sin 2(\gamma\pm\varphi) \\ \sin^2(\gamma\pm\varphi) & \cos^2(\gamma\pm\varphi) & -0.5\sin 2(\gamma\pm\varphi) \\ -\sin 2(\gamma\pm\varphi) & \sin 2(\gamma\pm\varphi) & \cos 2(\gamma\pm\varphi) \end{bmatrix},$$

$$\left[R^{\xi\eta}_{\varepsilon}\right] = \begin{bmatrix} \sec^2\chi & \mathrm{tg}^2\chi & -\mathrm{tg}\,\chi\sec\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{tg}\,\chi & \sec\chi \end{bmatrix}.$$

Напряжения, возникающие в слоях композитной панели, представим в виде

$$\lfloor \sigma\rfloor_{\alpha\beta} = \lfloor \sigma_\alpha\; \sigma_\beta\; \tau_{\alpha\beta}\rfloor^T, \quad \lfloor \sigma\rfloor_{xy} = \lfloor \sigma_x\; \sigma_y\; \tau_{xy}\rfloor^T, \quad \lfloor \sigma\rfloor_{\xi\eta} = \lfloor \sigma_\xi\; \sigma_\eta\; \tau_{\xi\eta}\rfloor^T,$$

$$\lfloor \sigma\rfloor_{\alpha\beta} = \left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right]\lfloor \sigma\rfloor_{xy} = \left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right]\left[R^{\xi\eta}_{\sigma}\right]\lfloor \sigma\rfloor_{\xi\eta},$$

$$\left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma\pm\varphi) & \sin^2(\gamma\pm\varphi) & \sin 2(\gamma\pm\varphi) \\ \sin^2(\gamma\pm\varphi) & \cos^2(\gamma\pm\varphi) & -\sin 2(\gamma\pm\varphi) \\ -0.5\sin 2(\gamma\pm\varphi) & 0.5\sin 2(\gamma\pm\varphi) & \cos 2(\gamma\pm\varphi) \end{bmatrix},$$

$$\left[R^{\xi\eta}_{\sigma}\right] = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & 0 \\ \sin\chi\,\mathrm{tg}\,\chi & \sec\chi & 2\,\mathrm{tg}\,\chi \\ \sin\chi & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Физические соотношения между напряжениями и деформациями получим с помощью матриц обобщенных жесткостей

$$\lfloor \sigma\rfloor_{\alpha\beta} = \left[A^{\alpha\beta}\right]\lfloor e\rfloor_{\alpha\beta}, \quad \lfloor \sigma\rfloor_{xy} = \left[A^{xy}\right]\lfloor e\rfloor_{xy}, \quad \lfloor \sigma\rfloor_{\xi\eta} = \left[A^{\xi\eta}\right]\lfloor e\rfloor_{\xi\eta},$$

$$\lfloor \sigma\rfloor_{\alpha\beta} = \left[A^{\alpha\beta}\right]\lfloor e\rfloor_{\alpha\beta} = \left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right]\left[A^{xy}\right]\lfloor e\rfloor_{xy} = \left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right]\left[R^{\xi\eta}_{\sigma}\right]\left[A^{\xi\eta}\right]\lfloor e\rfloor_{\xi\eta}.$$

Элементы обобщенных матриц в свою очередь связаны между собой следующими зависимостями:

$$\left[A^{\alpha\beta}\right]=\left[R^{\sigma}_{\alpha\beta}\right]^{-1}\left[E_{\alpha\beta}\right]\left[R^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right],\quad \left[A^{\xi\eta}\right]=\left[R^{\xi\eta}_{\sigma}\right]\left[A^{xy}\right],$$

где $\left[E_{\alpha\beta}\right]$, $\left[A^{xy}\right]$ – квадратные матрицы приведенных модулей упругости, модуля сдвига и коэффициентов Пуассона

$$\left[E_{\alpha\beta}\right]=\begin{bmatrix}\bar{E}_\alpha & \mu_{\alpha\beta}\bar{E}_\alpha & 0\\ \mu_{\beta\alpha}\bar{E}_\beta & \bar{E}_\beta & 0\\ 0 & 0 & G_{\alpha\beta}\end{bmatrix},\quad \left[A^{xy}\right]=\begin{bmatrix}\bar{E}_x & \mu_{xy}\bar{E}_y & 0\\ \mu_{yx}\bar{E}_x & \bar{E}_y & 0\\ 0 & 0 & G_{xy}\end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_\alpha = E_\alpha/(1-\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}),\quad \bar{E}_x = E_x/(1-\mu_{xy}\mu_{yx}).$$

Элементы матрицы вычисляются с учетом схемы армирования композитного пакета [2]

$$A_{11}^{\alpha\beta} = \bar{E}_\alpha\cos^4(\gamma\pm\varphi)+\bar{E}_\beta\sin^4(\gamma\pm\varphi)+2E_{\alpha\beta}\sin^2(\gamma\pm\varphi)\cos^2(\gamma\pm\varphi),$$

$$A_{12}^{\alpha\beta} = A_{21}^{\alpha\beta} = \bar{E}_\alpha\mu_{\alpha\beta}+\left(\bar{E}_\alpha+\bar{E}_\beta-2E_{\alpha\beta}\right)\sin^2(\gamma\pm\varphi)\cos^2(\gamma\pm\varphi),$$

$$A_{13}^{\alpha\beta} = A_{31}^{\alpha\beta} =$$

$$=\sin(\gamma\pm\varphi)\cos(\gamma\pm\varphi)\left[\bar{E}_\alpha\cos^2(\gamma\pm\varphi)-\bar{E}_\beta\sin^2(\gamma\pm\varphi)-E_{\alpha\beta}\cos 2(\gamma\pm\varphi)\right];$$

$$A_{22}^{\alpha\beta} = \bar{E}_\alpha\sin^4(\gamma\pm\varphi)+\bar{E}_\beta\cos^4(\gamma\pm\varphi)+2E_{\alpha\beta}\sin^2(\gamma\pm\varphi)\cos^2(\gamma\pm\varphi),$$

$$A_{23}^{\alpha\beta} = A_{32}^{\alpha\beta} =$$

$$=\sin(\gamma\pm\varphi)\cos(\gamma\pm\varphi)\left[\bar{E}_\alpha\sin^2(\gamma\pm\varphi)-\bar{E}_\beta\cos^2(\gamma\pm\varphi)+E_{\alpha\beta}\cos 2(\gamma\pm\varphi)\right],$$

$$A_{33}^{\alpha\beta} = \left(\bar{E}_\alpha+\bar{E}_\beta-2\bar{E}_\alpha\mu_{\alpha\beta}\right)\sin^2(\gamma\pm\varphi)\cos^2(\gamma\pm\varphi)+G_{\alpha\beta}\cos^2 2(\gamma\pm\varphi);$$

$$E_{\alpha\beta} = \bar{E}_\alpha\mu_{\alpha\beta}+2G_{\alpha\beta}.$$

Динамический анализ косоугольной композитной панели. Уравнение колебаний панели в общем случае анизотропии свойств материала слоев имеет вид

$$\begin{gathered}D_{11}^{\xi\eta}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+4D_{13}^{\xi\eta}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\eta}+2\left(D_{12}^{\xi\eta}+D_{33}^{\xi\eta}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+4D_{23}^{\xi\eta}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi\partial\eta^3}+\\ +D_{22}^{\xi\eta}\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4}+N_\xi\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $[D]^{\xi\eta}$ – матрица изгибных жесткостей

$$[D]^{\xi\eta}=\begin{bmatrix}D_{11}^{\xi\eta} & D_{12}^{\xi\eta} & D_{13}^{\xi\eta}\\ D_{21}^{\xi\eta} & D_{22}^{\xi\eta} & D_{23}^{\xi\eta}\\ D_{31}^{\xi\eta} & D_{32}^{\xi\eta} & D_{33}^{\xi\eta}\end{bmatrix}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left[A_{\xi\eta}\right]z\,dz,$$

где w, h – прогиб и толщина панели; ρ – удельный вес композитного материала; N_ξ – усилие, возникающее в панели в продольном направлении.

Полагая закон движения точек панели в виде гармонической функции $w = W\cos\omega t$, где ω — частота колебаний панели, запишем уравнение колебаний (1) в виде

$$D_{11}^{\xi\eta}W_{,\xi\xi\xi\xi} + 4D_{13}^{\xi\eta}W_{,\xi\xi\xi\eta} + 2\left(D_{12}^{\xi\eta} + D_{33}^{\xi\eta}\right)W_{,\xi\xi\eta\eta} + 4D_{23}^{\xi\eta}W_{,\xi\eta\eta\eta} + \\ + D_{22}^{\xi\eta}W_{,\eta\eta\eta\eta} + N_{\xi}W_{,\xi\xi} - \rho\omega^2 hW_{,tt} = 0.$$

Решение задачи поперечных колебаний скошенной панели найдем методом Релея—Ритца, для чего функцию перемещений представим в виде двойного ряда

$$W = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\bar{w}_{1m}(\xi)\bar{w}_{2n}(\eta), \tag{2}$$

где A_{mn} — амплитуда прогиба для чисел полуволн m, n; $\bar{w}_{1m}$, $\bar{w}_{2n}$ — собственные формы, определяемые граничными условиями задачи.

Используем для представления собственных форм $\bar{w}_{1m}$, $\bar{w}_{2n}$ функции Крылова [3] в виде

$$\begin{aligned} S(\lambda_p r) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\lambda_p r + \cos\lambda_p r\right), & T(\lambda_p r) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\lambda_p r + \sin\lambda_p r\right), \\ U(\lambda_p r) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\lambda_p r - \cos\lambda_p r\right), & V(\lambda_p r) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\lambda_p r - \sin\lambda_p r\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Свойства функций Крылова позволяют успешно описывать динамические эффекты в граничных областях пластины, где наблюдается краевой эффект в виде резкого изменения перемещений и усилий. Для рассматриваемых в задаче граничных условий (рис. 2) собственные формы будут иметь вид

$$\text{Схема 1:}\quad \bar{w}_{k\text{р}}(r) = \sin(\lambda_p r), \quad \lambda_p = \frac{\pi p}{R};$$

$$\text{Схема 2:}\quad \bar{w}_{k\text{р}}(r) = U(\lambda_p r) - \frac{S(\lambda_p R)\cdot V(\lambda_p r)}{T(\lambda_p R)}, \quad \lambda_p = \frac{\pi(4p+1)}{4R};$$

$$\text{Схема 3:}\quad \bar{w}_{k\text{р}}(r) = T(\lambda_p r) - \frac{U(\lambda_p R)\cdot V(\lambda_p r)}{S(\lambda_p R)}, \quad \lambda_p = \frac{\pi(4p-3)}{4R},$$

где $k = 1, 2$; $r = \xi, \eta$; $R = l, b$; $p = \{m, n\} = 1, 2, 3\ldots$

Следует отметить, что вследствие неортогональности производных функций Крылова необходимо решать общую задачу на собственные значения. Для этого запишем интегральную форму функционала полной энергии деформирования панели в виде

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^b\Big\{D_{11}^{\xi\eta}W_{,\xi\xi\xi\xi} + 4D_{13}^{\xi\eta}W_{,\xi\xi\xi\eta} + 2\left(D_{12}^{\xi\eta} + D_{33}^{\xi\eta}\right)W_{,\xi\xi\eta\eta} + 4D_{23}^{\xi\eta}W_{,\xi\eta\eta\eta} + \\ + D_{22}^{\xi\eta}W_{,\eta\eta\eta\eta} + N_{\xi}W_{,\xi\xi} - \rho\omega^2 hW\Big\}d\xi d\eta, \tag{4}$$

и подставим в нее функцию перемещения в виде ряда (2).

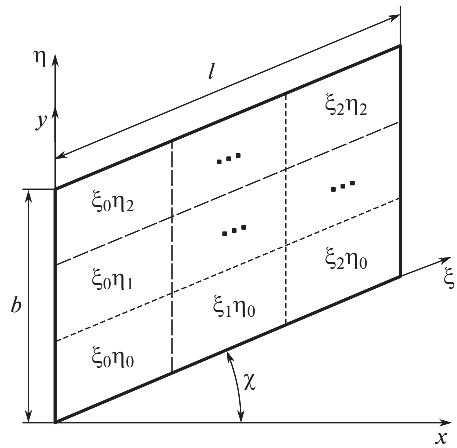

Рис. 3. Представление области интегрирования панели.

Для вычисления интеграла (4) воспользуемся алгоритмом Симпсона [4, 5], согласно которому область интегрирования разбивается на t частей с помощью сетки координатных линий, параллельных осям ξ и η (рис. 3). Разбивая рассматриваемую область интегрирования (поверхность пластины) на 30 частей с размерностью каждой 3 × 3, получим кубатурную формулу Симпсона для вычисления интеграла полной энергии (4)

$$\int_0^l\int_0^b f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_t\sum_t \frac{rq}{9}\{f(\xi_0,\eta_0)+f(\xi_2,\eta_0)+f(\xi_0,\eta_2)+f(\xi_2,\eta_2)+$$
$$+4\left[f(\xi_1,\eta_0)+f(\xi_0,\eta_1)+f(\xi_2,\eta_1)+f(\xi_1,\eta_2)\right]+16f(\xi_1,\eta_1)\}.$$

Здесь $r = b/t$, $q = l/t$.

Выполнив минимизацию полученного после интегрирования выражения для полной энергии по параметрам A_{mn}, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд A_{mn}

$$\left([\Omega] - N_\xi\left[\Upsilon_\xi\right] - \frac{1}{4}\rho\omega^2 hlb[\mathrm{E}]\right)\lfloor A\rfloor = 0. \tag{5}$$

Здесь $[\Omega] = \int_0^l\int_0^b \lfloor W_{,\xi\xi}\; W_{,\eta\eta}\; 2W_{,\xi\eta}\rfloor^T [D]^{\xi\eta}\lfloor W_{,\xi\xi}\; W_{,\eta\eta}\; 2W_{,\xi\eta}\rfloor d\xi d\eta$; $[\Upsilon_\xi] = \int_0^l\int_0^b \left(W_{,\xi}\right)^2 d\xi d\eta$ – квадратные матрицы коэффициентов; [E] – единичная матрица.

Условие существования нетривиального решения однородной системы уравнений (5) в виде

$$\det\left([\Omega] - N_\xi\left[\Upsilon_\xi\right] - \frac{1}{4}\rho\omega^2 hlb[\mathrm{E}]\right) = 0, \tag{6}$$

преобразуем к безразмерному виду, введя векторы безразмерных частот $\lfloor \varsigma^2 \rfloor$ и [Ω*]:

$$\lfloor\varsigma^2\rfloor = \omega^2\frac{\rho h l^2 b^2}{\pi^4\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}};\ [\Omega^*] = \frac{\pi^4}{l^2b^2}\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}\,[\Omega].$$

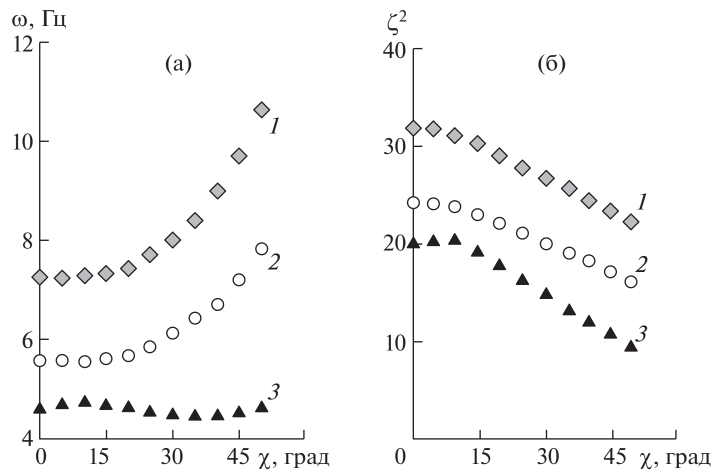

Рис. 4. Изменение частотных характеристик углепластиковых панелей в зависимости от угла скоса для различных схем закрепления краев; (а) – собственная частота ω; (б) – безразмерный параметр ς^2; *1* – схема 1; *2* – схема 2; *3* – схема 3.

Затем из условия отсутствия сжимающих усилий в панели находим частотные параметры колебательного процесса ς^2 и ω^*

$$\det\left([\Omega^*] - \left\lfloor \varsigma^2 \right\rfloor [\mathrm{E}]\right) = 0.$$

Результаты вычисления частот свободных колебаний панелей с различными граничными условиями в зависимости от угла скоса χ представлены на рис. 4.

Динамический анализ косоугольных углепластиковых панелей показывает, что небольшие отступления от прямоугольной формы (χ < 25–30°) не сказываются на частотных параметрах тонкостенных композитных элементов. Для схемы закрепления с двумя свободными кромками пластины (рис. 2, схема № 3) частота собственных колебаний остается практически неизменной и для больших углов скоса χ = 50–60°. Тенденция увеличения значений собственной частоты при больших углах скоса (χ > 30°) прогнозируется расчетом для схем закрепления без свободных краев (рис. 2, схемы № 1 и 2), что обусловлено, вероятно, повышенной жесткостью всей механической системы при фиксации всего периметра пластины. Для пластин, скошенных до угла 50° и закрепленных по схемам 1 и 2, частота собственных колебаний возрастает на 40–50% по сравнению с панелями прямоугольной формы.

Учет осевой нагрузки. Проведем анализ влияния угла скоса на устойчивость и динамическое поведение панели, определив критическое значение усилия T_ξ^* при осевом сжатии. Выражая критическую нагрузку через коэффициент устойчивости при продольном сжатии k_ξ^* ($k_\xi^* = \min\left(\left\lfloor k_\xi \right\rfloor\right)$) в форме

$$T_\xi^* = \frac{\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}\, k_\xi^*,$$

получим однородную систему уравнений (5) для продольного изгиба в виде

$$\left([\Omega^*] - k_\xi\,[E]\right)\left\lfloor A \right\rfloor = 0. \qquad (7)$$

Таблица 2. Расчетные значения параметров устойчивости панелей в зависимости от угла скоса χ

Угол скоса χ	Схема 1 З–Ш–З–Ш			Схема 2 Ш–Ш–Ш–Ш			Схема 3 Ш–С–Ш–С		
	ω^*	k_ξ^*	T_ξ^*	ω^*	k_ξ^*	T_ξ^*	ω^*	k_ξ^*	T_ξ^*
град	Гц	–	кН/м	Гц	–	кН/м	Гц	–	кН/м
0	7.26	8.90	8.30	5.56	6.13	5.72	4.61	0.82	0.77
5	7.23	8.84	8.29	5.54	6.09	5.76	4.68	0.83	0.79
10	7.25	8.68	8.50	5.55	5.98	5.86	4.75	0.82	0.81
15	7.34	8.48	8.99	5.60	5.83	6.18	4.69	0.80	0.85
20	7.44	8.26	9.81	5.69	5.68	6.74	4.63	0.77	0.92
25	7.70	8.09	11.03	5.84	5.57	7.60	4.56	0.74	1.00
30	8.01	7.94	12.79	6.05	5.53	8.91	4.51	0.70	1.13
40	8.97	7.55	18.33	6.71	5.76	13.91	4.49	0.65	1.57
45	9.69	7.39	22.80	7.19	5.64	17.41	4.55	0.64	1.97
50	10.63	7.36	30.08	7.84	5.57	22.78	4.65	0.64	2.60

В случае шарнирного опирания кромок панели (рис. 2, схема 2) элементы матрицы $[\Omega^*]$ можно определить аналитически

$$[\Omega^*] = \begin{cases} n^2\sqrt{\dfrac{D_{11}^{\xi\eta}}{D_{22}^{\xi\eta}}}\dfrac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + 2\dfrac{D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}}{\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}} + \sqrt{\dfrac{D_{22}^{\xi\eta}}{D_{11}^{\xi\eta}}}\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}, \\ -\dfrac{64}{\pi^2}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_m}\dfrac{ij}{\left(m^2 - i^2\right)\left(n^2 - j^2\right)}\left[\left(m\dfrac{b}{l}\right)^2\dfrac{D_{13}^{\xi\eta}}{\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}} + n^2\dfrac{D_{23}^{\xi\eta}}{\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}}\right]. \end{cases}$$

Здесь первая строка определяет соотношения для диагональных элементов матрицы, вторая – для внедиагональных элементов при $(m \pm i) = 1, 3, 5\ldots$; $(n \pm j) = 1, 3, 5\ldots$.

В остальных случаях закрепления панели матрица $[\Omega^*]$ является несимметричной, поэтому для определения коэффициентов $\lfloor k \rfloor_\xi$ использовался двойной QR-алгоритм Френсиса [34]. Данный алгоритм заключается в построении последовательности матриц, которые при выполнении некоторых условий сходятся к верхней треугольной матрице с собственными значениями на главной диагонали. Первоначально исходная матрица приводится к верхней почти треугольной матрице Гессенберга с помощью преобразований подобия, после чего матрица Гессенберга трансформируется в верхнюю треугольную матрицу, для которой может быть определено минимальное действительное собственное значение. Методики приведения исходной несимметричной матрицы к верхней почти треугольной и поиск собственных значений верхней почти треугольной матрицы реализованы в прикладных программных комплексах [35].

Вектор коэффициентов устойчивости определим из условия равенства нулю детерминанта однородной системы уравнений (7).

Результаты вычисления коэффициентов устойчивости k_ξ^* и критических усилий сжатия T_ξ^* в зависимости от углов скоса приведены в табл. 2. Из расчетов следует, что абсолютные значения параметров устойчивости панелей k_ξ^* и T_ξ^* зависят от условий закрепления конструкции.

Наиболее низкие показатели соответствуют закреплению пластины по схеме 3 с двумя свободными кромками. Угол скоса сторон панели также существенно влияет на

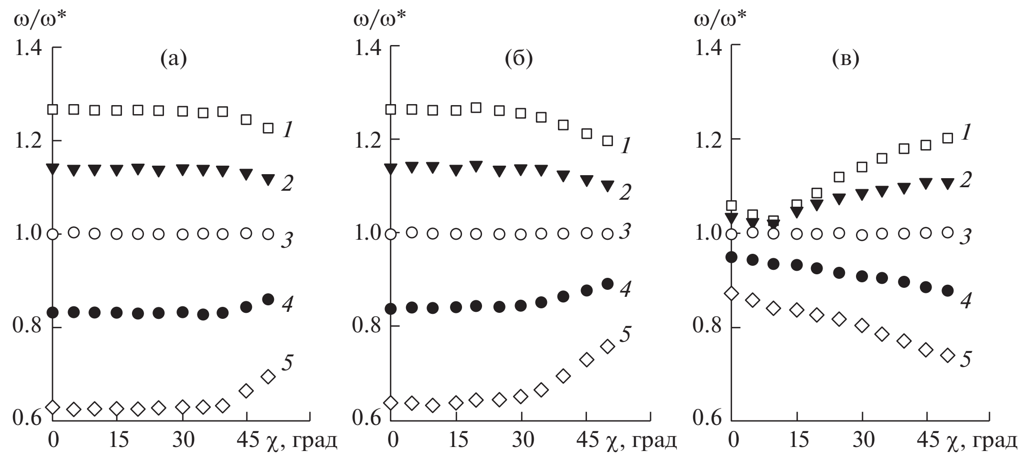

Рис. 5. Параметрические зависимости нормированной частотной характеристики ω/ω^* от угла скоса χ для различных вариантов закрепления: (а) – схема 1; (б) – схема 2; (в) – схема 3; *1* – $\omega/\omega^* = 0.4$; *2* – $\omega/\omega^* = 0.7$; *3* – $\omega/\omega^* = 1.0$; *4* – $\omega/\omega^* = 1.4$; *5* – $\omega/\omega^* = 1.7$.

величину критической нагрузки сжатия, которая при углах $\chi > 45°$ в 3.4–4.0 раза превосходит критические значения для прямоугольных конструкций.

Далее проведем оценку влияния нагрузки сжатия в осевом направлении, действующей на контуре панели в осевом направлении, на собственные частоты колебаний панели. Для этого будем дискретно в долях критического усилия сжатия варьировать значения продольной нагрузки в виде

$$N_\xi = \pm\psi T_\xi^* \quad (\psi = 0.3...0.6). \tag{8}$$

Подставляя (8) в систему (5) и преобразуя однородную систему к безразмерному виду

$$\left([\Omega^*] \mp \psi k_\xi^* \left[\Upsilon_\xi\right] - \left\lfloor \varsigma^2 \right\rfloor [\mathrm{E}]\right)\lfloor A \rfloor = 0,$$

получим условие существования нетривиального решения в детерминантной форме

$$\det\left([\Omega^*] \mp \psi k_\xi^* \left[\Upsilon_\xi\right] - \left\lfloor \varsigma^2 \right\rfloor [\mathrm{E}]\right) = 0.$$

Расчетные значения собственных частот колебаний косоугольных панелей из углепластика представлены на рис. 5 в виде графиков параметрических зависимостей нормированной частотной характеристики от угла скоса для трех исследованных вариантов закрепления. Показаны тренды изменения собственной частоты для четырех уровней продольного усилия сжатия для областей докритического устойчивого равновесия (два уровня) и закритического деформирования (два уровня) в сравнении с частотой ω^* при нагружении критическим уровнем сжимающей силы. Повышение усилия сжатия на всем интервале докритического и закритического нагружения приводит к возрастанию собственных частот конструкции для всех условий закрепления краев панели.

Для схем закрепления без свободных кромок (схемы 1 и 2) установлено отсутствие влияния скошенной формы с углами $\chi < 40°$ на отношение собственных частот докритического и закритического интервалов нагрузок к частоте ω^*, соответствующей критической нагрузке. Значимое влияние угла скоса на частотные характеристики проявляется лишь для больших значений $\chi > 40–45°$, при этом докритические нагрузки увеличивают значение собственной частоты панели, тогда как закритический уровень нагружения приводит к ее снижению. Для схемы закрепления с двумя шарнирно опертыми сторонами и двумя свободными (схема 3) влияние уровня осевой нагрузки носит иной характер – действие докритических уровней нагрузок приводит к уменьшению значений собственной частоты с ростом скошенности пластины, тогда как для нагрузок закритического уровня тенденция противоположная.

Выводы. 1. Динамический анализ косоугольных углепластиковых панелей показывает определяющую роль способа закрепления на частотные характеристики при свободных колебаниях системы. Эффективным в связи с этим следует признать использование в расчетной модели функций Крылова, позволяющих успешно описывать краевые эффекты в граничных областях пластины. **2.** Для исследованных схем закрепления установлено, что при небольших отклонениях от прямоугольной формы пластины (угол скоса $\chi < 25°$) влияние скошенности на динамический отклик конструкциии практически отсутствует. Для более жестких схем закрепления без свободных краев прогнозируется тенденция увеличения значений собственной частоты при больших углах скоса $\chi > 30°$. **3.** Важным фактором при динамическом анализе является нагружение осевым сжимающим усилием, определяющим устойчивость конструкции. Повышение усилия сжатия на всем интервале докритического и закритического нагружения приводит к возрастанию собственных частот конструкции для всех граничных условий на контуре.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis, (2nd ed). New York: CRC Press, 2004. 831 p.
3. *Азиков Н.С., Зинин А.В., Гайдаржи Ю.В., Сайфуллин И.Ш.* Прочность при закритическом деформировании косоугольных композиционных панелей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 5. С. 62.
4. *Азиков Н.С., Гайдаржи Ю.В.* Устойчивость слоистых скошенных панелей // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 3. С. 361.
5. *Гайдаржи Ю.В., Азиков Н.С., Зинин А.В.* Численное моделирование и анализ прочности и устойчивости вафельной оболочки // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2021. № 2. С. 91.
6. *Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогур А.И., Фирсанов В.В.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 20.
7. *Kiani Y.* Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates // Aerospace Science and Technology. 2016. V. 58. P. 130467-9
https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.08.018
8. *Garg A.K.* Free Vibration of Skew Fiber-reinforced Composite and Sandwich Laminates using a Shear Deformable Finite Element Model // J. of Sandwich Structures and Materials. 2006. V. 8 (1). P. 33.
https://doi.org/10.1177/1099636206056457
9. *Azikov N.S., Zinin A.V.* A Destruction Model for an Anisogrid Composite Structure // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 47. № 5. P. 423.

10. *Фирсанов В.В., Фам В.Т., Чан Н.Д.* Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 14. С. 6.
11. *Гайдачук В.Е., Кириченко В.В., Кондратьев А.В., Сливинский В.И. и др.* Расчет композитной панели солнечной батареи с сотовым заполнителем при различных случаях ее нагружения // В сб.: Материалы IV Международной конференции “Эффективность сотовых конструкций в изделиях авиационно-космической техники”. Днепропетровск, 2011. С. 40.
12. *Нуримбетов А.У., Дудченко А.А.* Современное состояние вопроса анализа собственных частот и форм колебаний конструкции из композиционных материалов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 323. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-323-336
13. *Васильев В.В.* О преобразованиях Кирхгофа и Томсона–Тэта в классической теории пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 5. С. 98.
14. *Elishakoff I., Hache F., Challamel N.* Vibrations of asymptotically and variationally based Uflyand–Mindlin plate models // Int. J. of Engineering Science. 2017. V. 116. P. 58. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.003
15. *Фирсанов В.В., Нгуен Л.Х.* Анализ напряженно-деформированного состояния композиционных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом пьезоэлектрического эффекта // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 4. С. 37.
16. *Hou Y., Wel G.W., Xiang Y.* DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 2004. V. 62 (2). P. 262. https://doi.org/10.1002/nme.1186
17. *Kumar R., Kumar A., Panda S.K.* Parametric resonance of composite skew plate under non-uniform in-plane loading // Structural Engineering and Mechanics. 2015. V. 55. № 2. P. 435. https://doi.org/10.12989/sem.2015.55.2.435
18. *Haldar S., Pal S., Kalita K., Sagunthala R.* Free vibration of skew laminates – a brief review and some benchmark results. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects // Int. J. of Maritime Engineering. 2019. V. 161. Part A4. P. 357. https://doi.org/10.3940/nna.ijme.20I9.a4.540
19. *Adhikari B., Dash P.* Geometrically nonlinear free vibration analysis of laminated composite plates: A finite element assessment of a higher order non-polynomial shear deformation theory // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2019. V. 28 (1). P. 1. https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1553259
20. *Khan M., Kumar S.* Smart damping of skew composite plates using Murakami zigzag function // SN Applied Sciences. 2021. V. 3 (4). https://doi.org/10.1007/S42452-021-04426-6
21. *Srinivasa C.V., Suresh Y.J., Prema Kumar W.P.* Experimental and finite element studies on free vibration of skew plates // Int. J. of Advanced Structural Engineering. 2014. V. 6. P. 48. https://doi.org/10.1007/s40091-014-0048-3
22. *Zhou L., Zhen W.X.* Vibration of skew plates by the MLS-Ritz method // Int. J. of Mechanical Sciences. 2008. V. 50 (7). P. 1133. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.05.002
23. *Xiang Y., Lai S. K., Zhou L., Lim C. W.* DSC-Ritz element method for vibration analysis of rectangular Mindlin plates with mixed edge supports // European J. of Mechanics, A/Solids. 2010. V. 29 (4). P. 619. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.12.007
24. *Sai Vivek K.* Free Vibration of Skew Laminated Composite Plates with Circular Cutout by Finite Element Method // Int. J. of Modern Engineering Research. 2016. V. 6. Iss. 6. P. 15.
25. *Gürses M., Civalek Ö., Korkmaz A.K., Ersoy H.* Free vibration analysis of symmetric laminated skew plates by discrete singular convolution technique based on first-order shear deformation theory // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 2009. V. 79 (3). P. 290. https://doi.org/10.1002/nme.2553
26. *Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N.* Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2005. V. 194 (39–41). P. 4265. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.0041

27. *Kiani Y.* Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates // Aerospace Science and Technology. 2016. V. 58. P. 130467-9.
https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.08.018
28. *Ashour A.S.* The free vibration of symmetrically angle-ply laminated fully clamped skew plates // J. of Sound and Vibration. 2009. V. 323 (1–2). P. 444.
https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.12.027
29. *Thai H., Kim S.* Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory // Int. J. of Mechanical Sciences. 2010. V. 52. P. 626.
30. *Malekzadeh P.* A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates // J. of Thin-Walled Structures. 2007. V. 45 (2). P. 237.
31. *Rashed J., Peyman Y., Shahrokh H.* Stacking Sequence Optimization of Laminated Composite Plates for Free Vibration using Genetic Algorithm and Neural Networks // Int. Conf. on Advances in Mechanical Engineering – ICAME'15At, 2015, Istanbul, Turkey.
https://doi.org/10.13140/rg.2.1.4124.0402
32. *Farsadi T., Asadi D., Kurtaran H.* Fundamental frequency optimization of variable stiffness composite skew plates // Acta Mechanica. 2021. V. 232. P. 555.
https://doi.org/10.1007/s00707-020-02871-9
33. *Kalita K., Dey P., Haldar S., Gao X.-Z.* Optimizing frequencies of skew composite laminates with metaheuristic algorithms // Engineering with Computers. 2020. V. 36. P. 741.
https://doi.org/10.1007/s00366-019-00728-x
34. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
35. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 237 с.

EDN: HJIZEA
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 43–52**

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3:539.42

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ РОСТА СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В СЖАТОМ ДИСКЕ

© 2022 г. А. М. Покровский[1,*], Ю. Г. Матвиенко[2], М. П. Егранов[1]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[2]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: pokrovsky@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.
После доработки 20.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В настоящее время оценка прочности и живучести конструкций с трещинами представляет собой актуальный вопрос современной механики разрушения, прогнозирование траектории трещины – одна из задач такого анализа. В настоящей работе на примере диаметрально сжимаемого круглого диска со сквозной центральной трещиной (бразильского диска) из полиметилметакрилата решена задача прогнозирования траектории магистральной трещины с помощью критерия максимальных тангенциальных напряжений в двух постановках. Показано, что учет T-напряжений в двухпараметрическом критерии повышает точность моделирования траектории роста трещины, по сравнению с однопараметрическим критерием. Получены результаты значения угла страгивания трещины с использованием аналитических формул и численного моделирования методом конечных элементов. Проведена верификация полученных результатов расчетов посредством сравнения с экспериментальными данными.

Ключевые слова: механика разрушения, коэффициент интенсивности напряжений, T-напряжения, бразильский диск, двухпараметрический критерий разрушения, траектория трещины, трещина обобщенного нормального отрыва

DOI: 10.31857/S0235711922050133

Распространение трещин является критически важным вопросом в инженерной практике из-за его сильного влияния на качество и работоспособность конструкций. Зачастую поле напряжений в ответственных элементах конструкций неоднородно, поэтому построение траектории трещины при смешанном нагружении является актуальной задачей современной механики разрушения.

В настоящее время предложен и широко используется целый ряд критериев разрушения. Эрдоган (Erdogan) и Си (Sih) предложили критерий максимальных тангенциальных напряжений (МТН) [1], Хусейн (Hussain) и соавторы – критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии деформации [2], Си – критерий минимума плотности энергии деформации [3]. Физическое обоснование критериев различно и область их применения может варьироваться в зависимости от материала, вида конструкции или детали. Локальные критерии позволяют получить направление роста трещины в малой окрестности около вершины трещины, полную траекторию можно построить с помощью итерационных алгоритмов.

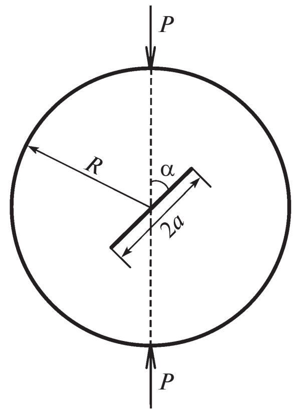

Рис. 1. Схема бразильского диска.

Несмотря на то, что результаты, полученные с помощью описанных критериев, в основном, хорошо соотносятся с экспериментальными данными, все равно остается ряд задач, в которых наблюдаются значительные расхождения между теоретическими и экспериментальными данными. Одной из причин этого расхождения является использование только сингулярных членов в разложении функции напряжений в окрестности вершины трещины. Вильямс (Williams) [4] предложил разложение, в которое кроме сингулярных членов входит несингулярный член, называемый Т-напряжениями, которые лежат в плоскости трещины и не зависят от расстояния до ее вершины.

Вильямс и Эвинг (Ewing) впервые предложили критерий максимальных тангенциальных напряжений с учетом КИН и Т-напряжений в задаче о наклонной трещине в пластине [5]. Позднее Смит (Smith) и соавторы развили этот подход и представили обобщенный критерий максимальных тангенциальных напряжений [6]. Они показали, что учет Т-напряжений оказывает существенное влияние на начальный угол роста трещины и момент начала разрушения. Значительный вклад в изучение влияния Т-напряжений на трещиностойкость разных материалов и конструкций внесли Аятоллахи (Ayatollahi), Алиха (Aliha) и другие авторы [7–9]. Подобным образом развиваются и энергетические критерии [10, 11].

Влияние Т-напряжений на трещиностойкость в последнее время исследуются все активнее. Здесь, в первую очередь, необходимо отметить развиваемую в работах [12–16] двухпараметрическую механику разрушения. Обстоятельный обзор и обобщение полученных результатов по изучению Т-напряжений приведены в монографии [12] и статье [17].

Целью настоящей статьи является сопоставление однопараметрического и двухпараметрического критерия МТН на примере задачи по моделированию траектории роста трещины обобщенного нормального отрыва в бразильском диске.

Постановка задачи. Одним из образцов для определения механических характеристик хрупких материалов является бразильский диск (БД) – диаметрально сжимаемая круглая пластинка со сквозной центральной трещиной (рис. 1).

Особенностью БД является тот факт, что при изменении относительной длины трещины $\rho = \dfrac{a}{R}$ и угла ее наклона к линии действия сжимающей силы F, можно получить любую смешанность нагружения – от нормального отрыва до поперечного сдвига.

В статье рассматриваются результаты испытаний серии образцов со следующими геометрическими характеристиками: радиус диска $R = 40$ мм, полудлина трещины

$a = 10$ мм, толщина диска $t = 4$ мм, угол наклона трещины $\alpha \in [0°, 7°, 15°, 22°, 30°, 45°, 60°, 75°]$.

Материал диска – полиметилметакрилат (ПММА), его механические характеристики: модуль упругости $E = 3000$ МПа, предел прочности при сжатии $\sigma_B = 70$ МПа, вязкость разрушения $K_{\mathrm{I}c} = 40$ МПа$\sqrt{\text{мм}}$.

Формулировка критериев МТН. Вначале остановимся на однопараметрическом методе. При использовании разложения Вестергарда для описания напряженного состояния у вершины трещины угол страгивания θ^* можно вычислить по формуле [18]

$$\theta^* = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}\,\mathrm{sign}\,(K_{\mathrm{I}})}{4\lambda}\right), \tag{1}$$

где $\lambda = K_{\mathrm{I}}/K_{\mathrm{II}}$; K_{I}, K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) I и II типов.

Выражение для тангенциальных напряжений в полярной системе координат имеет вид [4]

$$\sigma_\theta\,(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta\right], \tag{2}$$

где r – радиус-вектор, проведенный из вершины трещины; θ – угол относительно оси, проходящей через плоскость трещины.

Вводя понятие эффективного КИН, и записывая формулу для тангенциальных напряжений в виде

$$\sigma_\theta\,(r,\theta) = \frac{K_{\text{э}}}{\sqrt{2\pi r}},$$

можно получить выражение для эффективного КИН

$$K_{\text{э}} = \cos\frac{\theta^*}{2}\left[K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta^*\right].$$

Приравнивая, согласно силовому критерию разрушения Ирвина эффективный КИН вязкости разрушения $K_{\mathrm{I}c}$, приходим к условию разрушения

$$K_{\text{э}} = \cos\frac{\theta^*}{2}\left[K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta^*\right] = K_{\mathrm{I}c}. \tag{3}$$

Далее рассмотрим двухпараметрический метод. В этом случае для описания напряженного состояния у вершины трещины используют разложение Вильямса

$$\sigma_{ij}\,(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}A_n r^{\frac{n}{2}-1} f_{A,ij}^{(n)}(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}B_n r^{\frac{n}{2}-1} f_{B,ij}^{(n)}(\theta),$$

где A_n, B_n – амплитудные, масштабные коэффициенты, зависящие от геометрии образца с трещиной, а также от нагрузки; $f_{A,ij}^{(n)}(\theta)$, $f_{B,ij}^{(n)}(\theta)$ – тригонометрические функции угла θ, определяемые из решения краевых задач о нормальном отрыве и поперечном сдвиге.

Коэффициенты при сингулярных членах в разложении Вильямса связаны с КИН следующими соотношениями

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{2\pi}A_1,$$
$$K_{\mathrm{II}} = -\sqrt{2\pi}B_1.$$

Первый несингулярный член разложения – Т-напряжения определяется выражением

$$T = 4A_2.$$

Запишем формулу для тангенциальных напряжений в вершине трещины, удерживая два первых слагаемых [12]

$$\sigma_\theta(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[K_\mathrm{I}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_\mathrm{II}\sin\theta\right] + T\sin^2\theta. \quad (4)$$

Согласно критерию МТН, трещина распространяется вдоль линии действия максимальных растягивающих тангенциальных напряжений, поэтому

$$\left.\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (5)$$

Подставляя формулу (4) в условие (5), и заменяя r на r_c, получаем уравнение для вычисления угла страгивания трещины θ^*

$$K_\mathrm{I}\sin\theta^* + K_\mathrm{II}(3\cos\theta^* - 1) - \frac{16}{3}T\sqrt{2\pi r_c}\sin\frac{\theta^*}{2}\cos\theta^* = 0, \quad (6)$$

где $r_c = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}c}}{\sigma_0}\right)^2$ – размер зоны предразрушения [19]; σ_0 – локальная прочность в зоне предразрушения, для хрупких материалов – предел прочности.

Двухпараметрическое условие разрушения получаем аналогично тому, как это было сделано в однопараметрическом подходе. Отличие заключается лишь в выражении для тангенциальных напряжений. Условие разрушения, в который входит эффективный КИН будет выглядеть следующим

$$K_э = \cos\frac{\theta^*}{2}\left[K_\mathrm{I}\cos^2\frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2}K_\mathrm{II}\sin\theta^*\right] + T\sqrt{2\pi r_c}\sin^2\theta^* = K_{\mathrm{I}c}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (7) размер зоны предразрушения, и принимая локальную прочность материала за предел прочности, окончательно получим условие разрушения в следующем виде

$$\cos\frac{\theta^*}{2}\left[K_\mathrm{I}\cos^2\frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2}K_\mathrm{II}\sin\theta^*\right] + T\frac{K_{\mathrm{I}c}}{\sigma_в}\sin^2\theta^* = K_{\mathrm{I}c}. \quad (8)$$

Таким образом, в двухпараметрическое условие разрушения, кроме K_I, K_II и $K_{\mathrm{I}c}$ входят еще и Т-напряжения и предел прочности. Для моделирования траектории распространения трещины при использовании однопараметрического МТН необходимо вычислять КИН первого и второго типов для каждого шага продвижения трещины, а при использовании двухпараметрического МТН еще и Т-напряжения.

Расчет параметров механики разрушения. КИН и Т-напряжения можно определить численно с помощью МКЭ или с помощью аналитических соотношений. Аткинсон получил уравнения для нахождения K_I и K_II в бразильском диске [20],

$$\begin{aligned} K_\mathrm{I} &= \frac{P}{\pi Rt}\sqrt{\pi a}\sum_{i=1}^{n} T_i\left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} A_i(\theta), \\ K_\mathrm{II} &= -2\frac{P}{\pi Rt}\sqrt{\pi a}\sin 2\theta\sum_{i=1}^{n} S_i\left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} B_i(\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где $T_i\left(\frac{a}{R}\right)$, $S_i\left(\frac{a}{R}\right)$ – функции относительной длины трещины; $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ – функции угловой координаты; i – число удерживаемых членов ряда.

Соотношение для определения Т-напряжений в бразильском диске получено авторами [21, 22]

$$T = \frac{P}{\pi Rt}f_1 + 2\frac{P}{\pi Rt}\sum_{i=1}^{n}(C_i(\theta)f_i - C_i(\theta) - D_i(\theta))\left(\frac{a}{R}\right)^{2(i-1)}, \quad (10)$$

где f_i – постоянные в разложении; $C_i(\theta)$, $D_i(\theta)$ – функции угловой координаты.

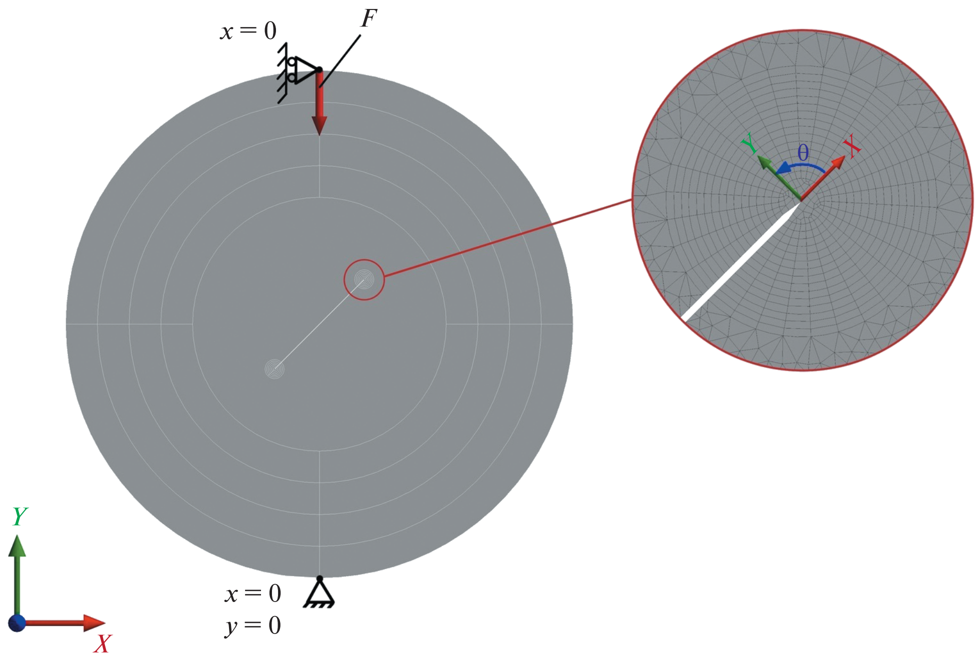

Рис. 2. Расчетная КЭ-модель.

При продвижении трещины, она становится не прямолинейной, и аналитические методы расчета КИН и Т-напряжений становятся непригодными. Поэтому при моделировании траектории распространения трещины КИН и Т-напряжения вычислялись с помощью встроенной функции, основанной на вычислении М-интеграла в программном комплексе ANSYS Workbench. Расчетная модель состояла из 20614 8-узловых плоских элементов (рис. 2). На рис. 3 приведено сравнение КИН и Т-напряжений, полученных по аналитическим формулам (9), (10) и численно с помощью МКЭ для исходной трещины при внешней нагрузке $F_1 = 1$ Н.

Значение КИН (рис. 3), рассчитанное численно и аналитически, хорошо совпадают. Т-напряжения различаются значительно для углов наклона трещины $\theta > 28°$. Как видно из рисунка именно при этом угле наклона трещины значение K_I становится отрицательным, а при отрицательных значениях K_I, как отмечено в работе [20], аналитическое решение (10) не справедливо.

Расчет угла страгивания трещины и разрушающей нагрузки. С помощью уравнений (1) и (6) определены углы страгивания трещины θ^* при использовании аналитического и численного расчета КИН и Т-напряжений. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными приведено на рис. 4. Как видно из рисунка двухпараметрический критерий дает немного лучшие результаты по сравнению с экспериментальными данными.

Разрушающая нагрузка вычисляется на основе значений КИН и Т-напряжений, полученных с помощью аналитических соотношений и численного расчета МКЭ. Эффективный КИН определяется по уравнениям (3) и (7). Ввиду линейности рассматри-

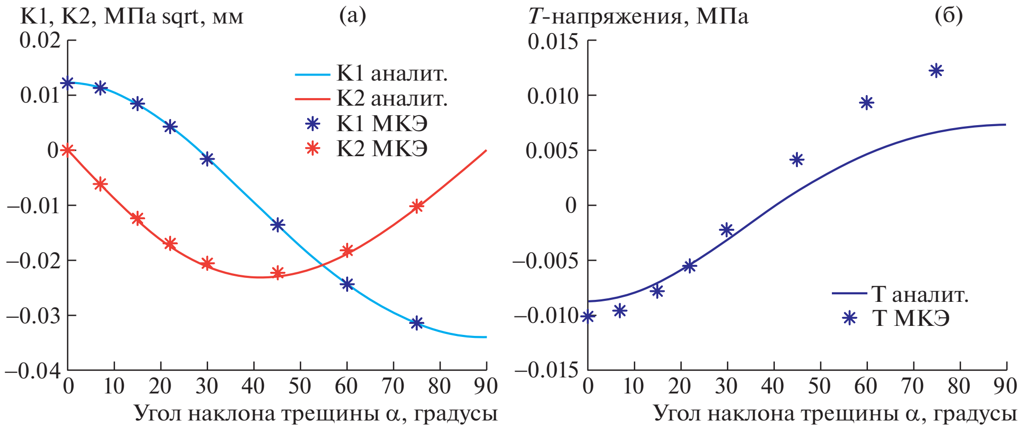

Рис. 3. Значение КИН (а) Т-напряжений (б), рассчитанные по аналитическим формулам и численно с помощью МКЭ.

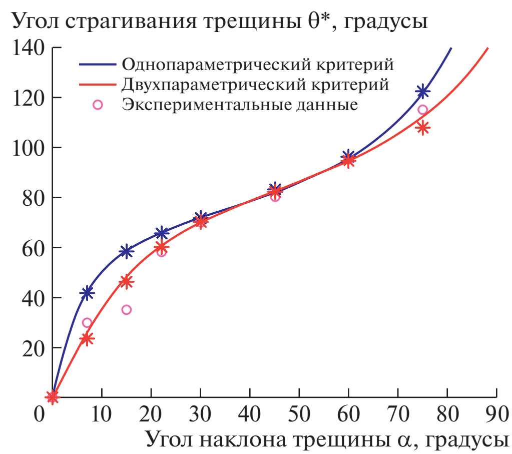

Рис. 4. Сравнение углов страгивания трещины θ*, град.

ваемой задачи, разрушающую нагрузку можно вычислить с помощью следующего уравнения

$$F_c = F_1 \frac{K_{Ic}}{K_э}.$$

Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными приведено на рис. 5.

Моделирование траектории трещины. Моделирование траектории трещины проводилось с использованием шагового алгоритма, который заключается в следующем: 1) создается конечно-элементная модель диска с исходной трещиной; 2) для этой трещины вычисляются K_I, K_{II} и T-напряжения и определяется угол, характеризующий направление роста трещины относительно исходной ориентации, по формулам (1)

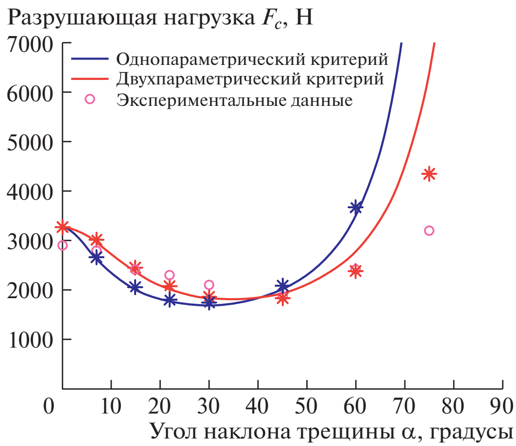

Рис. 5. Сравнение значений разрушающей нагрузки F_c, Н.

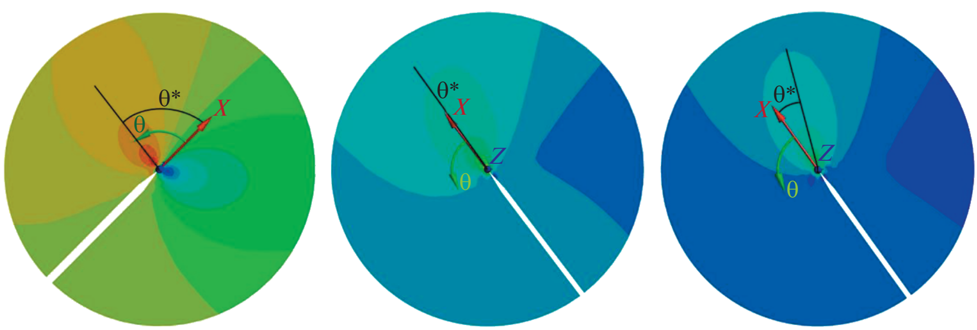

Рис. 6. Тангенциальные напряжения и угол распространения трещины.

для однопараметрического критерия и (6) для двухпараметрического; 3) под этим углом трещина продлевается на заданный шаг, который вычисляется в процессе численного эксперимента. Создается конечно-элементная модель диска с подросшей трещиной; 4) все повторяется, начиная с п. 2. Моделирование продолжается пока трещина не пройдет через весь диск.

Распределение тангенциальных напряжений и угол распространения трещины вблизи ее вершины для трех шагов описанного алгоритма приведены на рис. 6.

Для выбора шага по длине трещины расчеты проводятся с разными шагами и сравнивается траектория. Если при уменьшении шага траектория не изменяется, значит можно использовать данный шаг.

В качестве иллюстрации работы разработанных программных средств на рис. 7 представлены траектории роста трещины в диске с углом наклона трещины $\alpha = 45°$, полученные с различным шагом по длине трещины с помощью однопараметрического и двухпараметрического критериев МТН. В табл. 1 приведено изменение КИН, Т-напряжений и угла θ^* в процессе роста трещины для двухпараметрического критерия при шаге 3 мм, данные в столбцах А относятся к однопараметрическому критерию, а в столбцах Б – к двухпараметрическому.

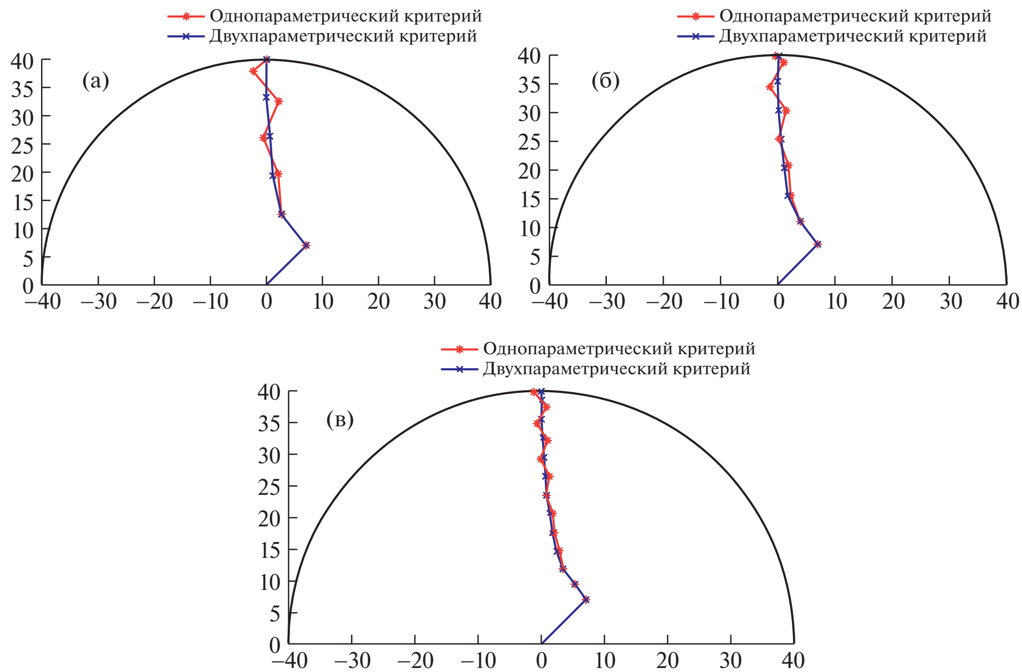

Рис. 7. Траектории роста трещины, полученные с помощью однопараметрического и двухпараметрического критериев МТН с шагом: 7 мм (а), 5 мм (б), 3 мм (в).

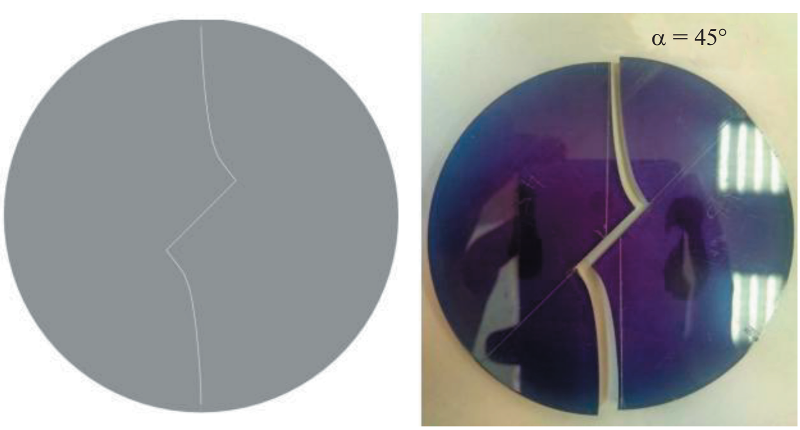

Рис. 8. Сравнение смоделированной и экспериментальной траектории трещины, угол $\alpha = 45°$.

Оба критерия (рис. 7) позволяют получить схожую траекторию трещины. Тем не менее, при любом из рассмотренных шагов прироста трещины, траектория, построенная с помощью двухпараметрического критерия, учитывающего Т-напряжения, является более гладкой. Кроме того, из рисунка видно, что траектории, полученные по двухпараметрическому критерию МТН для шагов 3 и 5 мм практически не отличают-

Таблица 1. Изменение параметров механики разрушения для трещины с углом наклона $\theta = 45°$ с шагом $l = 3$ мм

Шаг, №	K_{I}, МПа$\sqrt{\text{мм}}$		K_{II}, МПа$\sqrt{\text{мм}}$		Т-напряжения, МПа	$K_э$, МПа$\sqrt{\text{мм}}$		θ^*, °	
	А	Б	А	Б	А	А	Б	А	Б
1	−28.34	−24.94	−46.81	−41.19	7.64	40.29	40.26	82.3	83.3
2	46.13	40.46	0.59	1.46	−14.35	46.14	40.5	−1.5	−2.57
3	42.68	37.42	8.91	8.06	−12.7	45.29	39.03	−21.9	−15.1
4	47.67	40.96	−1.31	5.72	−18.2	47.72	41.63	3.2	−9.0
5	52.20	46.22	6.19	2.31	−22.64	53.28	46.31	−13.2	−3.1
6	59.45	52.48	−6.71	1.46	−27.23	60.56	52.51	12.6	−1.7
7	66.19	60.18	14.29	1.25	−31.93	70.49	60.20	−22.5	−1.2
8	74.78	69.60	−22.13	0.77	−38.64	83.44	69.61	28.8	−0.6
9	79.15	81.31	38.74	1.71	−48.53	100.8	81.34	−39.8	−1.2
10	87.13	97.06	−56.54	1.97	−63.81	124.1	97.09	45.6	−1.1
11	87.72	122.49	93.65	2.04	−96.23	163.3	122.5	−55.0	−0.9
12	53.02	196.88	−182.8	10.34	−256.81	241.4	193.1	65.0	−1.9

ся, что свидетельствует об адекватном моделировании траектории, начиная с шага, равного 5 мм.

На рис. 8 представлено сравнение численного моделирования траектории роста трещины с использованием двухпараметрического критерия с данными эксперимента. Из рисунка видно, что численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Заключение. В настоящей статье с помощью двух формулировок критерия максимальных тангенциальных напряжений проведено моделирование разрушения бразильского диска, определены разрушающая нагрузка, угол страгивания трещины и траектория трещины, достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с данными эксперимента. В результате проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы: **1.** Учет Т-напряжений в критерии разрушения позволяет получить более точное значение угла страгивания трещины и разрушающей нагрузки. **2.** Траектория трещины обобщенного нормального отрыва, построенная с учетом Т-напряжений является более гладкой и лучше совпадает с экспериментальной.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00351).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdogan F., Sih G.C.* On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear // J. of Basic Engineering. 1963. V. 85 (4). P. 519.
2. *Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J.* Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II // Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Maryland, 27–29 August, 1973. P. 2.
3. *Sih G.C.* Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // Int. J. of Fracture. 1974. V. 10 (3). P. 305.
4. *Williams M.L.* On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // J. of Applied Mechanics. 1957. V. 24 (1). P. 109.
5. *Williams J.G., Ewing P.D.* Fracture under complex stress – the angled crack problem // Int. J. of Fracture. 1972. V. 26 (8). P. 441.
6. *Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J.* The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2001. V. 24 (2). P. 137.
7. *Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M.* On determination of mode II fracture toughness using semi-circular bend specimen // Int. J. of Solids and Structures. 2006. V. 43 (17). P. 5217.
8. *Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M.* Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion // Int. J. of Solids and Structures. 2009. V. 46 (2). P. 311.
9. *Saghafi H., Ayatollahi M.R., Sistaninia M.* A modified MTS criterion for mixed mode fracture toughness assessment of brittle materials // Material Science and Engineering A. 2010. V. 527 (21). P. 5624.
10. *Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Berto F.* A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2015. V. 79. P. 70.
11. *Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Razavi S.M.J., Berto F.* Mode I fracture analysis of PMMA using modified energy-based models // Physical Mesomechanics. 2015. V. 18 (4). P. 13.
12. *Матвиенко Ю.Г.* Двухпараметрическая механика разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. 208 с.
13. *Матвиенко Ю.Г.* Двухпараметрическая механика разрушения в современных проблемах прочности // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2013. № 5. С. 37.
14. *Степанова Л.В.* Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряжённо-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 63.
15. *Степанова Л.В.* Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряжённо-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 80.
16. *Степанова Л.В., Росляков П.С.* Многопараметрический анализ поля напряжений у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2015. Т. 10. № 132. С. 52.
17. *Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R.* A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Engineering Fracture Mechanics. 2014. V. 132. P. 218.
18. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 246 с.
19. *Schmidt R.A.* A microcrack and its significance to hydraulic fracturing and fracture toughness testing // Proceedings 21st US Symposium on Rock Mechanics, Rolla, Missouri, 28–30 May 1980. P. 581.
20. *Atkinson C., Smelser R.E., Sanchez J.* Combined mode fracture via the cracked Brazilian disc test // Int. J. of Fracture. 1982. V. 18. P. 279.
21. *Fett T.* Stress intensity factors and T-stress for internally cracked circular disks under various boundary conditions // Engineering Fracture Mechanics. 2001. V. 68 (9). P. 1119.
22. *Hua W., Li Y., Dong S., Li N., Wang Q.* T-stress for a centrally cracked Brazilian disc under confining pressure // Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 149 (11). P. 37.

EDN: NVXQFC
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 5, с. 53–59

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 004.9:621.7

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛА НА МОДИФИЦИРОВАННОЙ КОНСТРУКЦИИ ЛИТЕЙНО-КОВОЧНОГО МОДУЛЯ

© 2022 г. В. И. Одиноков[1], Э. А. Дмитриев[1], А. И. Евстигнеев[1], Д. А. Потянихин[1,*], А. Е. Квашнин[1]

[1]*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия*
**e-mail: potyanikhin@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.10.2021 г.
После доработки 14.06.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В статье представлена математическая постановка и приведены результаты расчетов численным методом задачи о деформировании металла на литейно-ковочном модуле новой конструкции, у которого один из двух боковых бойков неподвижен и имеет прямую вертикальную поверхность. Результатом решения являются поля напряжений и скорости перемещений по пространственной области. В качестве деформируемого металла выбран свинец. Показана эффективность залечивания дефектов сплошности в процессе деформации по усовершенствованному способу на новой конструкции литейно-ковочного модуля по сравнению с конструкцией, где оба бойка подвижны.

Ключевые слова: моделирование, кристаллизующийся металл, деформация заготовки, залечивание дефектов, литейно-ковочный модуль, математическая модель, программный комплекс

DOI: 10.31857/S023571192205011X

В основу процесса получения заготовок на литейно-ковочном модуле (ЛКМ) легло изобретение [1]. Различные схемы деформации затвердевающего металла исследованы в [2–7]. В последние годы интерес к исследованию интегрированного процесса литья и ковки изделий проявляют зарубежные исследователи [8–11]. В настоящей статье приводятся теоретические исследования новой конструкции ЛКМ [12] и показывается эффективность ее использования по сравнению с конструкцией, исследованной в работах [13, 14].

На рис. 1 представлены рассматриваемые схемы ЛКМ: рис. 1а – схема [1]; рис. 1б – схема новой конструкции ЛКМ. По схеме (рис. 1а), жидкий металл подается из ковша *1* в сборный охлаждаемый кристаллизатор, состоящий из пары бойков *2*, вращающихся на эксцентриковых валах *3*, и пары бойковых плит *4*, плотно прилегающих к бойкам *2* и совершающих перемещение в вертикальной плоскости от эксцентриков, находящихся на нижних приводных валах. При этом эксцентрики, приводящие в движение вертикальные плиты, повернуты относительно эксцентриков, приводящих боковые бойки, на 90°. Тогда, при сближении боковых бойков, деформирующих закристаллизовавшийся металл, вертикальные плиты поднимаются вверх, проскальзывая по сдавливаемой боковыми бойками заготовке, а когда боковые бойки расходятся, вертикальные плиты подают заготовку вниз.

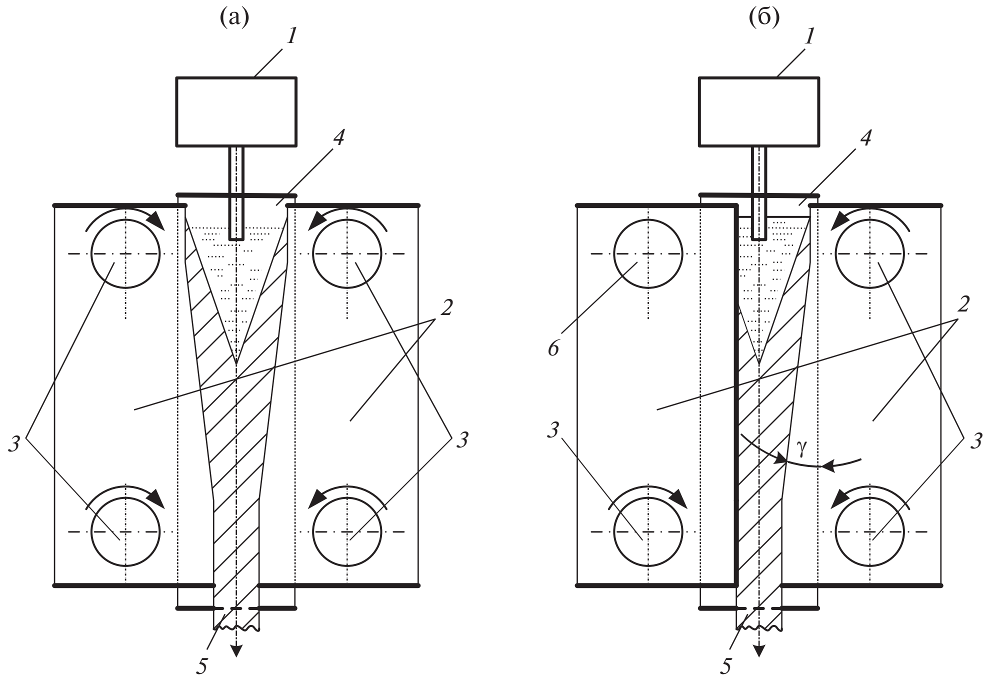

Рис. 1. Схемы конструкций литейно-ковочного модуля: (а) – двухсторонняя деформация металла при симметричном обжиме по круговой траектории; (б) – односторонняя деформация металла при обжиме по круговой траектории.

Схема устройства (рис. 1б) отличается от схемы (рис. 1а) тем, что левый боковой боек неподвижен и имеет прямую вертикальную поверхность. Боковые плиты *4* так же, как и в первой схеме (рис. 1а), приводятся в движение эксцентриковыми втулками, сидящими на нижних приводных валах. Левый боковой боек установлен на цилиндрических втулках на валах *3* и *6*.

При этом кинематика схемы деформации металла значительно отличается. По первой схеме (рис. 1а) закристаллизовавшийся металл подхватывается с двух сторон и симметрично обжимается боковыми бойками, движущимися по круговой траектории навстречу друг другу.

По второй схеме (рис. 1б) правый боек деформирует закристаллизовавшийся металл, двигаясь по круговой траектории. При этом металл, деформируясь правым бойком, скользит по вертикальному прямому бойку. Этому скольжению препятствуют силы трения, создающие подпор движению, а значит увеличивающие величины сдвиговых деформаций. Это должно положительно влиять на структуру получаемой заготовки и способствовать более интенсивному залечиванию имеющихся в литом металле пузырей, раковин, трещин.

Чтобы нагляднеи показать эффективность конструкции (рис. 1б), проведем моделирование процесса деформации свинцовой заготовки, имеющей дефекты (в виде пустот), по аналогии с процессом, описанным в работе [14].

Математическая постановка задачи. На рис. 2а представлена расчетная схема процесса (рис. 1б) с учетом симметрии в плоскости $x_3 = 0$. При этом будем рассматривать деформацию сплошной заготовки. Примем деформируемый материал несжимаемым, изотропно упрочняющимся, массовыми и инерционными силами будем пренебрегать. Каждая материальная точка проходит область деформации за несколько оборотов бокового бойка, число которых зависит от величины угла γ и величины эксцентрика e_2 (рис. 2а), определяющего ход вертикальных боковых плит. Рассмотрим процесс деформации заготовки с неподвижным боковым бойком при повороте эксцентрикового вала на 180°. Используя теорию течения [15] и декартову систему координат, запишем определяющую систему уравнений

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\lambda^*\xi_{ij}, \quad \xi_{ij}\delta_{ij} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
$$\xi_{ij} = 0.5\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right), \quad \lambda^* = \frac{T}{H}, \quad T = T(H, E, \theta), \quad H = \left(2\xi_{ij}\xi_{ij}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $i, j = 1,2,3$ (суммирование по повторяющимся индексам i, j); σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ξ_{ij} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций; v_i — проекции скоростей перемещения на координатные оси x_i ($i = 1,2,3$); θ — температура; функция $T = T(H, E, \theta)$ определяется из эксперимента; H — интенсивность скоростей деформаций сдвига; E — степень деформации.

Начальные условия: $\tau = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0$; $E = E_0$, где α — текущий угол поворота эксцентрикового вала; E_0 — начальная степень деформации металла.

Граничные условия (рис. 2а): полагаем, что граница исследуемой области описывается системой ортогональных поверхностей, тогда с учетом плоскости симметрии имеем

$$\begin{gathered} \sigma_{11}\big|_{S_t} = \sigma_{12}\big|_{S_t} = \sigma_{13}\big|_{S_t} = 0, \quad t = 2,7; \quad \sigma_{22}\big|_{S_3} = \sigma_{21}\big|_{S_3} = \sigma_{23}\big|_{S_3} = 0; \\ \sigma_{23}\big|_{S_t} = 0, \quad t = 1,4,5,6; \quad \sigma_{23}\big|_{S_t} = -\psi_t\tau_S\frac{(\upsilon_{SL})_t}{\upsilon}\cos\left(n_i^t, x_i\right), \quad t = 1,4,5,6; \\ \sigma_{31}\big|_{S_8} = \sigma_{32}\big|_{S_8} = 0; \quad \sigma_{32}\big|_{S_9} = 0; \quad \sigma_{31}\big|_{S_9} = -\psi_9\tau_S\frac{(\upsilon_{SL})_9}{\upsilon}; \\ v_2\big|_{S_1} = 0; \quad v_2\big|_{S_t} = -(\upsilon_n)_t, \quad t = 4,5,6; \quad v_3\big|_{S_t} = 0, \quad t = 8.9. \end{gathered} \tag{2}$$

На внутренних поверхностях полости (дефекта) выполняются условия

$$\begin{gathered} \sigma_{11}\big|_{S_t} = \sigma_{12}\big|_{S_t} = \sigma_{13}\big|_{S_t} = 0, \quad t = 10,\ 11; \\ \sigma_{22}\big|_{S_t} = \sigma_{21}\big|_{S_t} = \sigma_{23}\big|_{S_t} = 0, \quad t = 12,\ 13; \\ \sigma_{33}\big|_{S_t} = \sigma_{32}\big|_{S_t} = \sigma_{13}\big|_{S_t} = 0, \quad t = 14,\ 15. \end{gathered} \tag{3}$$

В соотношениях (2), (3) τ_S — предел текучести материала при сдвиге; υ — нормирующая скорость, $(\upsilon_{SL})_t = (\upsilon_M - \upsilon_T)_t$ — скорость скольжения металла υ_M относительно скорости инструмента деформации υ_T на t-й поверхности контакта; $(\upsilon_n)_t$ — скорость перемещения инструмента по нормали на t-й поверхности контакта; n_i^t — нормаль к поверхности контакта инструмента S_t; ψ_t — коэффициенты трения на поверхностях S_t; скорость перемещения $(v_n)_i$ ($t = 4,5,6$) определяется кинематикой движения бойков.

Весь процесс движения бойков разобьем на малые временные шаги $\Delta\tau_m$. Для решения уравнений (1) при наличии граничных условий (2), (3) использовался, как и в работе [14], численный метод, описанный в работе [13]. Результатом решения являются поля напряжений и скоростей перемещений на каждом временном шаге.

Результат решения задачи. Рассмотрена задача по холодной деформации свинцового образца. Задавались геометрические и кинематические параметры (рис. 2) $h_0 = 15$ мм; $h_1 = 4$ мм; $b = 30$ мм; $l_1 = 45$ мм; $R_1 = 50$ мм; $e_1 = 3$ мм; $e_2 = 10$ мм; $\gamma = 8°$;

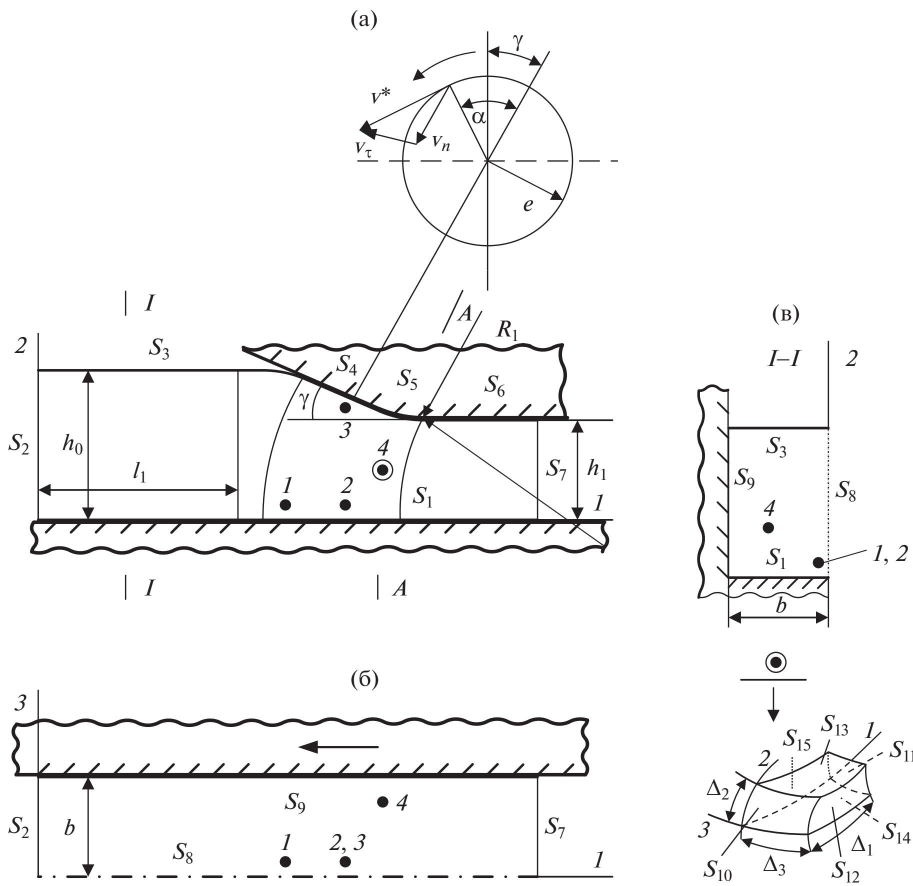

Рис. 2. Расчетная схема процесса деформирования заготовки, имеющей дефекты в виде пустот с учетом симметрии в плоскости $x_3 = 0$.

$n_0 = 100$ об/мин – скорость вращения приводного вала; $\psi_1 = 1.75$; $\psi_t = 0.7$ ($t = 4,\ 5,\ 6$); $\psi_9 = 0.1$.

При теоретических расчетах, как и в работе [14], принималась модель деформируемой среды $T = T(H, E, \theta)$ в системе (1) в виде (гипотеза единой кривой)

$$T = 16.873\Gamma^{0.36}H^{0.09} \text{ (МПа)}. \tag{4}$$

Формула (4) построена по экспериментальным данным [16] с учетом $T = \sigma_S/\sqrt{3}$, $H = \xi/\sqrt{3}$, $\Gamma = E/\sqrt{3}$. Коэффициенты в (4) найдены методом наименьших квадратов. Погрешность аппроксимации не превышает 5%. Выберем временной шаг $\Delta\tau = 0.955$ с, что соответствует повороту приводного вала на 10°. Для малых деформаций справедливо $\xi_{ij} = \partial\varepsilon_{ij}/\partial\tau$ [15], где ε_{ij} – компоненты тензора малых деформаций. Тогда $H = \partial\Gamma_k/\partial\tau \Rightarrow \Gamma_k = \int H\partial\tau \approx \sum_p H_p^k\Delta\tau$, где H_p^k – значение H в k-м элементе на p шаге нагружения.

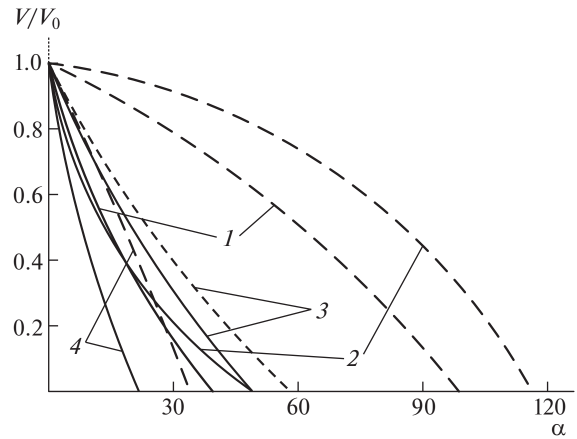

Рис. 3. Зависимость относительного объема пустот 1–4 (рис. 2) от угла поворота эксцентрикового вала: пунктирная линия – по способу деформации (рис. 1а); сплошная линия – по способу деформации (рис. 1б).

Исследовались четыре положения пустот до деформации. На рис. 2 они обозначены точками. Начальные координаты пустот: 1) $x_1 = 55.97$ мм; $x_2 = 1.25$ мм; $x_3 = 3.75$ мм; 2) $x_1 = 65.12$ мм; $x_2 = 1.25$ мм; $x_3 = 3.75$ мм; 3) $x_1 = 65.12$ мм; $x_2 = 11.44$ мм; $x_3 = 3.75$ мм; 4) $x_1 = 72.27$ мм; $x_2 = 5$ мм; $x_3 = 22.5$ мм.

Геометрические размеры пустот равны размерам сетки в начальный момент времени: $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3 = 3 \times 1.25 \times 3.75$ мм^3.

На рис. 3 приведены результаты расчетов.

Сплошными линиями показаны графики изменения объема пустот по способу (рис. 1б), пунктирными – по способу (рис. 1а). Видно, что второй способ деформации (рис. 1б) намного эффективнее, чем деформация по способу (рис. 1а).

На рис. 4 приведены эпюры σ_{ii} при деформации свинцовой полосы без дефектов. На рис. 4а пунктирными линиями нанесены эпюры σ_{11}, σ_{22} при способе деформации (рис. 1а). При этом плоскость $x_2 = 0$ является плоскостью симметрии, на которой $\sigma_{21}\big|_{S_1} = 0$. Некоторые результаты решения данного способа деформации свинцовой заготовки приведены в работе [14]. Сплошными линиями обозначены эпюры σ_{ii} по способу (рис. 1б).

На рис. 4б, в, приведены эпюры σ_{33}. Цифрой *1* обозначены эпюры σ_{33} при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; цифрой *2* – эпюры σ_{33} при $x_2 = h_{ST}$, $x_3 = b$, где h_{ST} – текущая высота полосы вдоль x_1. Сплошными линиями обозначены эпюры по способу деформации (рис. 1б), пунктирными – эпюры по способу деформации (рис. 1а). На рис. 4г приведены эпюры σ_{22} по способу (рис. 1б) в поперечном сечении А-А (рис. 2). Сплошные линии соответствуют $\alpha = 30°$, пунктирные – $\alpha = 60°$.

Выводы. Проведенный анализ показывает, что деформация металла по способу (рис. 1б) предпочтительней, так как величина сжимающих напряжений σ_{11}, σ_{22} значительно выше, чем по способу (рис. 1а). Это должно положительно влиять на структуру получаемой заготовки, т.к. имеющиеся в литом металле дефекты сплошности (пузыри, раковины, трещины) залечиваются более интенсивно.

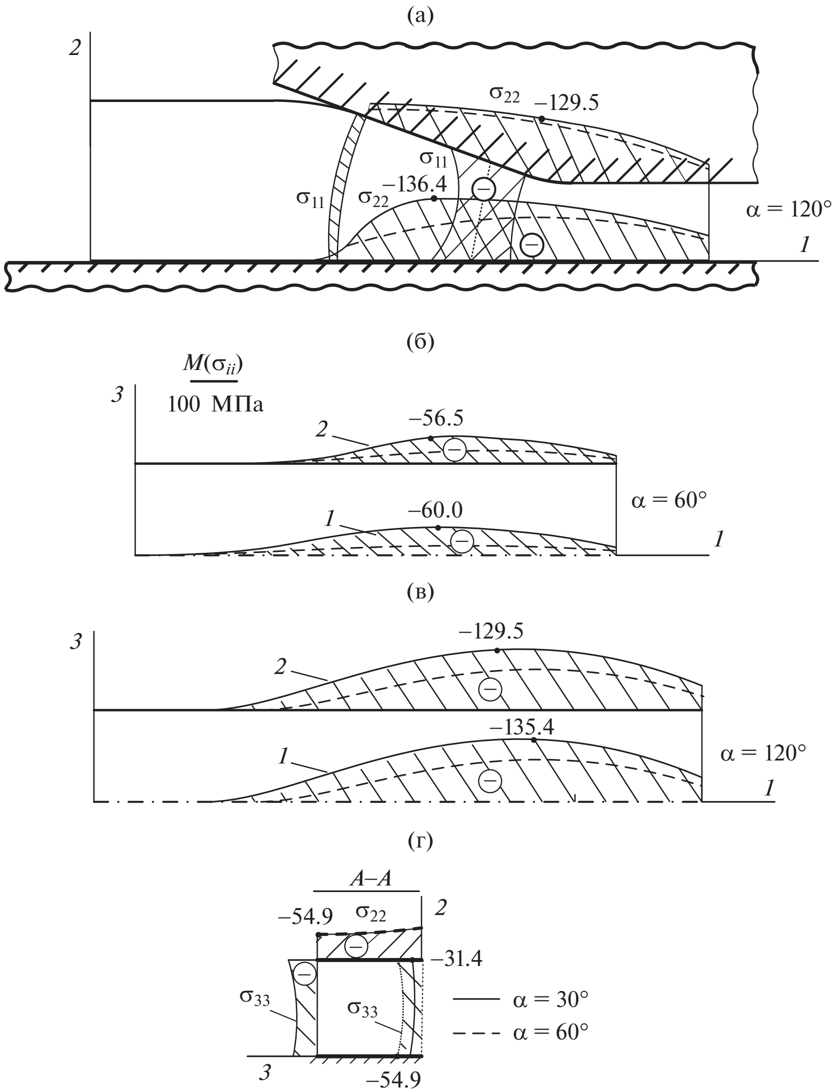

Рис. 4. Деформация свинцовой полосы без дефектов: эпюры σ_{11} и σ_{22} для угла поворота приводного вала при $\alpha = 120°$ (а); эпюры напряжений σ_{33} для угла поворота приводного вала $\alpha = 60°$ (б) и $\alpha = 120°$ (в) (пунктирная линия – по способу деформации (рис. 1а), сплошная линия – по способу деформации (рис. 1б)); (г) эпюры σ_{22} и σ_{33} по способу (рис. 1б) в поперечном сечении А–А для угла поворота приводного вала $\alpha = 30°$ (сплошная линия) и $\alpha = 60°$ (пунктирная линия).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Одиноков В.И.* Устройство для непрерывного литья заготовок. РФ Патент 2041011, 1995.

2. *Стулов В.В.* Исследование и разработка технологического процесса получения непрерывнолитых деформированных заготовок: Автореферат дис. ... докт. техн. наук. Владивосток: Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН, 1998. 35 с.

3. *Бахматов П.В.* Исследование технологического процесса получения непрерывнолитых деформированных полых заготовок: Автореферат дис. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО "КнАГТУ". 2003, 24 с.

4. *Зайцев А.В.* Исследование процесса получения непрерывнолитых деформированных заготовок на литейно-ковочном модуле: Автореферат дис. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО "КнАГТУ", 2004. 24 с.

5. *Черномас В.В.* Разработка конструкции и исследование процесса получения непрерывнолитых деформированных заготовок на литейно-ковочном модуле: Автореферат дис. ... докт. техн. наук. Владивосток: Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН, 2007. 24 с.

6. *Скляр С.Ю.* Математическое моделирование тепловых и деформационных процессов на литейно-ковочном модуле вертикального типа: автореферат дис. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО "КнАГТУ", 2011. 16 с.

7. *Соснин А.А.* Теоретическое и экспериментальное исследование совмещенного процесса литья и деформации металла: автореферат дис. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО "КнАГТУ" 2012. 20 с.

8. *Dedov S., Lehmann G., Kawalla R.* Application of combined casting-forging process for production of durable lightweight aluminum parts // Key Engineering Materials. 2013. V. 554–557. P. 264. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.264

9. *Krüger L., Jentsch E., Brunke L., Keßler A., Wolf G., Lehnert T., Schubert N., Wagner A., Landgrebe D.* Development of an innovative lightweight piston through process combination "casting – forging" // Procedia Manufacturing. 2019. V. 27. P. 172. https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.12.061

10. *Zhenglong L., Qi Z.* Simulation and experiment research on squeeze casting combined with forging of automobile control arm // Proceedings of the ASME 2018 Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition. 2018. V. 2. 144113. https://doi.org/10.1115/IMECE2018-86006

11. *Böhmichen U., Schubert N., Lehnert T., Sterzing A., Mauermann R.* From casting to forging – The combined simulation for a steel component // Engineering Reports. 2021. e12400. https://doi.org/10.1002/eng2.12400

12. *Черномас В.В., Одиноков В.И., Саликов С.Р.* Устройство для непрерывного литья и деформации металла. РФ Патент 2463126, 2012.

13. *Одиноков В.И., Ловизин Н.С., Скляр С.Ю.* Моделирование процесса деформации металла на литейно-ковочном модуле // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 9. С. 129.

14. *Одиноков В.И., Бондаренко С.В.* Моделирование процесса деформации металла, имеющего дефекты, на литейно-ковочном модуле // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 85.

15. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.

16. *Кроха В.А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации. Справочник. Москва: Машиностроение, 1980. 160 с.

EDN: LSOTXM
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 5, с. 60–67

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ БИОМИМЕТИЧЕСКОЙ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

© 2022 г.

Г. Ж. Сахвадзе

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: sakhvadze@mail.ru

Поступила в редакцию 03.03.2022 г.
После доработки 13.04.2022 г.
Принята к публикации 20.04.2022 г.

В статье изучается влияние новой технологии биомиметической лазерно-ударно-волновой обработки на коэффициент интенсивности напряжений применительно к образцам из алюминиевого сплава Д16. Разработана 3*D* конечно-элементная модель для изучения влияния биомиметической лазерно-ударно-волновой обработки на коэффициенты интенсивности напряжений и остаточную усталостную долговечность образцов. Показано, что при такой обработке коэффициенты интенсивности напряжений обработанных образцов эффективно снижаются, что значительно увеличивает их остаточную усталостную долговечность.

Ключевые слова: биомиметика, лазерно-ударно-волновая обработка, остаточные напряжения, коэффициент интенсивности напряжений, остаточная усталостная долговечность, алюминиевый сплав Д16

DOI: 10.31857/S0235711922040125

Наблюдения за природными явлениями, а также проведенные многочисленные эксперименты показывают, что листья растений и крылья насекомых выдерживают длительную переменную нагрузку без растрескивания, что дает основание детально изучить их структуры, чтобы извлечь из них оптимальную форму и размеры для анализа механизма их устойчивости к растрескиванию [1–6]. Например, в работе [3] предложена простая, но эффективная конечно-элементная модель распространения трещин в крыльях стрекозы, где показано, что поперечные жилки в крыльях насекомых являются важными структурными элементами для замедления распространения трещин.

Известно, что технология лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО) позволяет предотвратить образование трещин и повышает трещиностойкость материалов, в том числе алюминиевых сплавов [7, 8]. ЛУВО вызывает локальную пластическую деформацию на поверхности, а также способствует измельчению зерен с помощью прикладывания мгновенного сверхкороткого высокоэнергетического лазерного импульса, что, в свою очередь, способствует замедлению образования трещин [9, 10].

Таким образом, биомиметика (подход к созданию технологических схем, при котором основные идеи и элементы заимствованы из живой природы) является перспективным методом, который успешно можно применить, например, в сочетании с технологией ЛУВО, для повышения сопротивляемости к распространению трещин (трещиностойкости). Этой цели и посвящена настоящая статья.

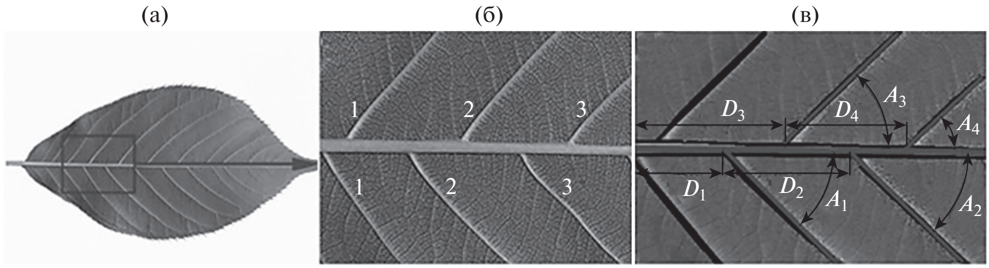

Рис. 1. Извлечение биомиметических параметров из листьев растений: (а) – исследуемая область; (б) – увеличенное изображение исследуемой области; (в) – биомиметические параметры (D_1–D_4) и (A_1–A_4).

В настоящей статье исследуются особенности применения так называемой биомиметической лазерно-ударно-волновой обработки (БЛУВО) материалов [11]. При применении БЛУВО возникает синергетический эффект вследствие сочетания классической технологии ЛУВО и теории биомиметики. Из структуры листьев растений извлекаются биомиметические параметры, которые в дальнейшем используются для создания трехмерной конечноэлементной модели, с помощью которой анализируются динамика КИН и, соответственно, остаточная усталостная долговечность образцов из алюминиевого сплава Д16.

На рис. 1 показаны биомиметические параметры, извлеченные из листьев растений (вишни) [11].

Для проектирования различных биомиметических структур, которые в дельнейшем используются при БЛУВО, применяется метод центрального композитного проектирования (МЦКП) [12]. Этот метод генерирует наборы данных, которые равномерно распределяются по всему пространству проектирования. В этой модели случайным образом генерируются множество выборок в соответствии с их параметрами нормального распределения (μ и σ). В табл. 1 приведены отобранные из всего многообразия три характерные модели, которые будут изучаться в дальнейшем.

На рис. 2 показаны значения извлеченных из листьев вишни параметров A_1 и A_2 для моделей М19, М23 и М15.

Как видим, значение параметра A_1 для модели М15 больше, чем для моделей М19 и М23, что, например, на начальном этапе роста трещины должно способствовать большему суммарному углу поворота трещины по сравнению с углами поворота в моделях М19 и М23.

Исследуемый материал. Исследуемый образец – алюминиевый сплав Д16 (зарубежный аналог – алюминиевый сплав 2024-T351) широко используется в авиа- и машиностроении, например, в обшивке самолетов, поскольку обладает хорошими технологи-

Таблица 1. Модели образцов, отобранных для дальнейшего анализа, из множества вариаций, предложенных методом центрального композитного проектирования (МЦКП)

Номер модели образца	Рассчитанные биомиметические параметры				
	D_1	D_2	D_3	D_4	θ°
М15	5.3550	1.7230	0.3086	0.2650	56.2725
М19	0.0370	3.5970	0.4858	0.2650	38.2216
М23	2.2550	0.3140	0.3086	0.4158	38.2216

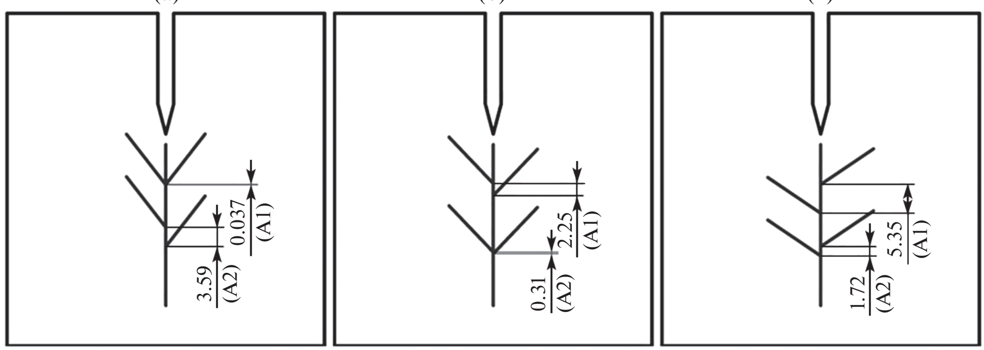

Рис. 2. Схема исследуемых моделей: (а) – M19; (б) – M23; (в) – M15.

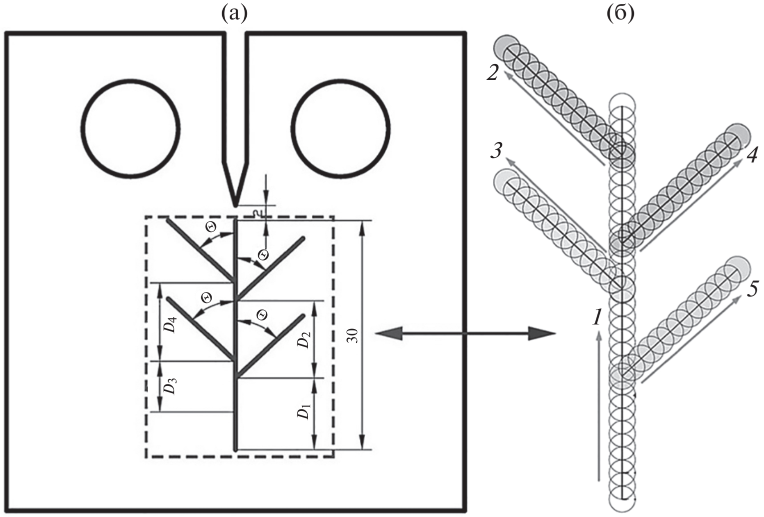

Рис. 3. (а) – схематизация биомиметической ЛУВО (БЛУВО); (б) – направления сканирования вдоль главной жилы *1* и четырех вторичных жил *2–5*.

ческими свойствами, высокой прочностью и уникальным соотношением прочность/плотность.

Исследуемый образец моделируется пластинкой с длиной 62.5 мм, шириной 60 мм и толщиной 2 мм (рис. 3). Граничные условия – защемление по краям (особенности моделирования подробнее приведены в [12]).

Процесс моделирования БЛУВО разделяется на два этапа: на этап воздействия лазерного импульса и на этап релаксации [12]. Конечноэлементная модель (КЭМ) исследуемого образца разработана в пакете Abaqus. Этап лазерного импульсного воздействия обычно моделируется явным решателем (Abaqus/explicit). По окончании явного анализа результаты воздействия последнего лазерного импульса становятся в качестве начальных условий. Затем используется неявный анализ (Abaqus/Standard) для моделирования стадии релаксации напряжений. На этом этапе динамические процессы в образце уже релаксированы и достигнуто состояние статического равновесия.

Расчет коэффициентов интенсивности напряжений с помощью *M*-интеграла. Для исследования задачи по определению КИН в растянутом образце с трещиной используется теория линейного упругого разрушения, с помощью которой определяются поля напряжений вокруг вершины трещины [13–18]. Кроме того, будем считать, что имеем плоское напряженное состояние. Тогда расчеты обычно ведутся с помощью J-интеграла [19]

$$J = \frac{1}{A_q}\int_V \left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dV, \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{1}$$

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где A_q – это фактическая суммарная площадь распространяющейся трещины; V – контур интегрирования; σ_{ij} – тензор напряжений; ε_{ij} – тензор деформации; $i, j = 1, 2, 3$ – координаты вершины трещины x, y и z, (в расчетах – x_1, x_2, x_3); u_i – перемещение у вершине трещины; W – плотность энергии деформации линейного упругого тела; q – функция, используемая при численном счете, она равна единице у вершины трещины и равна нулю в любой другой произвольной точке области интегрирования; δ_{1j} – символ Кронекера.

Обозначив через K_{I}, K_{II} и K_{III} коэффициент s интенсивности упругих напряжений, J-интеграл можно записать через КИН следующим образом [19]:

$$J = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right) + \frac{1+\nu}{E}K_{\mathrm{III}}^2, \tag{3}$$

где E – модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона.

В соответствии с принципом суперпозиции, тензор напряжений, тензор деформаций, а также тензор перемещений можно записать в виде суммы

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad u_{ij} = u_{ij}^{(1)} + u_{ij}^{(2)}, \tag{4}$$

где верхний индекс (1) обозначает данных, полученных с помощью конечноэлементного моделирования, а верхний индекс (2) представляет собой данные аналитического решения у вершины трещины. В таких случаях часто вместо классического J-интеграла используется т.н. M-интеграл [19], формулу которого получим, подставляя (4) в (1)

$$M^{(1,2)} = \frac{1}{A_q}\int_V \left(\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)}\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dV. \tag{5}$$

Поскольку материал линейно-упругий, коэффициенты интенсивности напряжений также можно записать в виде суммы (по аналогии с тензорами напряжений, деформаций и перемещений)

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}^{(2)}, \quad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}}^{(1)} + K_{\mathrm{II}}^{(2)}, \quad K_{\mathrm{III}} = K_{\mathrm{III}}^{(1)} + K_{\mathrm{III}}^{(2)}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), получим окончательную формулу для определения M-интеграла через КИН

$$M^{(1,2)} = \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}K_{\mathrm{I}}^{(1)}K_{\mathrm{I}}^{(2)} + \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}K_{\mathrm{II}}^{(1)}K_{\mathrm{II}}^{(2)} + \frac{2(1+\nu)}{E}K_{\mathrm{III}}^{(1)}K_{\mathrm{III}}^{(2)}. \tag{7}$$

При численном анализе для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_i поступаем по схеме, предложенной в [19]: верхний индекс (1) выбирается в качестве интересующего нас решения: $K_i^{(1)} = K_i$, а верхний индекс (2) принимается равным единице: $K_i^{(2)} = 1$. Два других коэффициента интенсивности напряжений принимаются равными нулю как для верхнего индекса (1), так и для индекса (2). Подставляя эти значения в уравнение (10) и приравнивая уравнения (8) и (10), получаем окончательные уравнения для определения КИН

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_q}\int_V\left(\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)}\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dV,$$

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_q}\int_V\left(\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)}\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dV, \tag{8}$$

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\frac{1}{A_q}\int_V\left(\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)}\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dV,$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(1)}$ получаются с помощью МКЭ-анализа, а $\sigma_{ij}^{(2)}$ и $u_i^{(2)}$ – аналитического решения (как видим, при такой постановке задачи $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{II}}$).

Граничные условия образцов при БЛУВО для расчета коэффициентов интенсивности напряжений – защемление по краям. Одноосная растягивающая нагрузка направлена вдоль положительного направления оси X, величина нагрузки составляет 800 Н, частота составляет 10 Гц, а коэффициент асимметрии – 0.1. Следовательно, максимальная и минимальная растягивающая нагрузка цикла нагружения для расчета коэффициентов интенсивности напряжения составляют 800 Н и 80 Н, соответственно. Растягивающее приспособление располагается в двух специально сделанных отверстиях, где левая точка является неподвижной точкой, а правая точка – точкой приложения растягивающей нагрузки (рис. 4). Предварительно изготовлена усталостная трещина длиной 4 мм.

Определение остаточной усталостной долговечности. Уравнение для прогнозирования остаточной усталостной долговечности (в литературе применяется также термин “остаточный усталостный ресурс”) для изделий машиностроения можно получить из формулы Пэриса [19]

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K\right)^m, \tag{9}$$

где C и m – материальные константы, полученные экспериментально; ΔK – диапазон изменения коэффициента интенсивности напряжений (K_{I}); a_0, a_c – начальная длина трещины и критическая длина трещины, соответственно. Путем интегрирования уравнения (9) получаем формулу для определения остаточной усталостной долговечности изделия

$$N = \int_{a_0}^{a_c}\frac{1}{C\left(\Delta K\right)^m}da. \tag{10}$$

Полученные результаты и их анализ. Влияние БЛУВО на коэффициент интенсивности напряжений и остаточную усталостную долговечность. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в процессе распространения усталостной трещины в материале определяются с помощью M-интеграла. Как показывают расчеты, КИН выбранных 60 образцов, обработанных по технологии БЛУВО, по сравнению с необработанным образцом, уменьшаются, правда, с разной степенью.

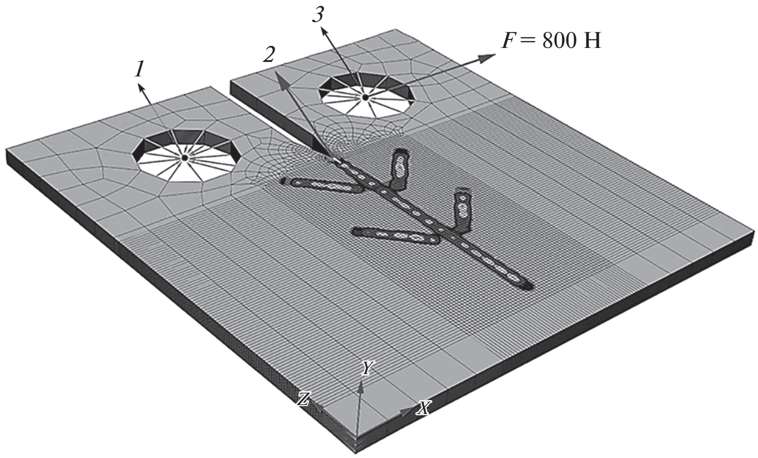

Рис. 4. Схема 3D конечноэлементного моделирования технологии ЛУВО: *1*, *3* – центральные точки установки растягивающего приспособления; *2* – заранее сделанная усталостная трещина длиной 4 мм; *3* – точка приложения растягивающей нагрузки.

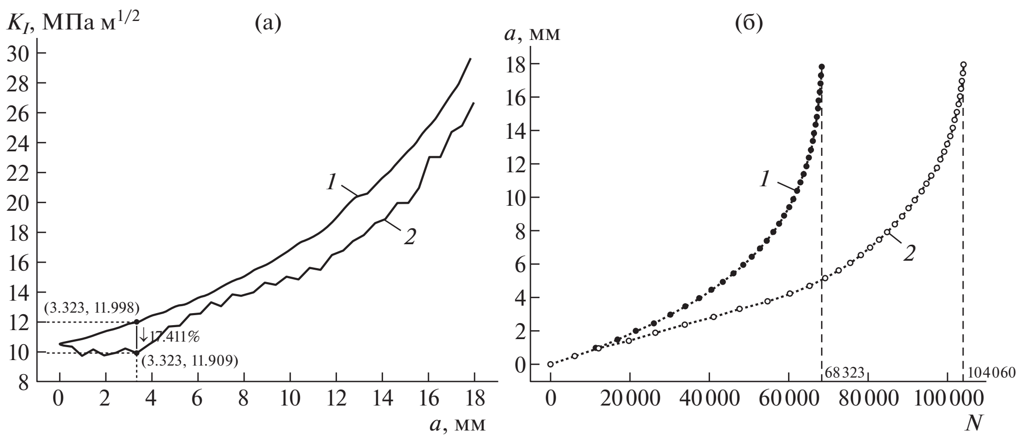

Рис. 5. (а) – изменение коэффициента интенсивности напряжений K_I в зависимости от длины трещины *a*; (б) – изменение остаточной усталостной долговечности *N* в зависимости от длины трещины *a* для модели М19.

1 – необработанный образец; *2* – образец после БЛУВО.

Изменения коэффициента интенсивности напряжений и остаточной усталостной долговечности для модели М19 показаны на рис. 5а, б.

Как видим, по сравнению с необработанным образцом, коэффициенты интенсивности напряжений для модели М19, обработанной по технологии БЛУВО, уменьшаются, а остаточная усталостная долговечность – увеличивается. Коэффициент интенсивности напряжений у вершины трещины максимально снижается при распространении трещины на 3.323 мм – на 17.411% (с 11.998 МПа м$^{1/2}$ до 9.909 МПа м$^{1/2}$).

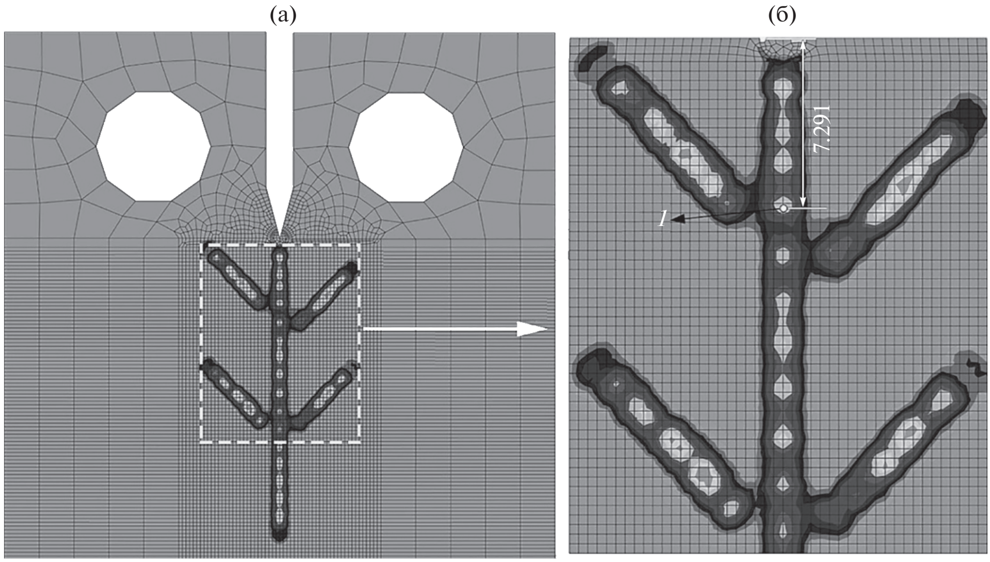

Рис. 6. (а) – распределения остаточных напряжений в модели M19; (б) – увеличенное изображение зоны БЛУВО.
1 – зона максимального снижения коэффициента интенсивности напряжений у вершины трещины.

Из рис. 6 показано распределение остаточных напряжений в модели M19. Видно, что область максимального снижения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) находится в области БЛУВО.

Основная причина этого явления заключается в том, что сжимающие остаточные напряжения (СОН), возникающие при БЛУВО, по модулю намного превосходят растягивающие остаточные напряжения (РОН), что способствует тому, что часть растягивающей нагрузки, приложенной к образцам, уравновешивается сжимающими остаточными напряжениями. Следовательно, в области БЛУВО резко снижается КИН и повышается остаточная усталостная долговечность. Таким образом, имеем, что остаточная усталостная долговечность модели M19, обработанной по технологии БЛУВО, увеличивается на 152.3% (с 68 323 до 104 060) по сравнению с необработанным образцом.

Таким образом, на коэффициент интенсивности напряжений влияют как остаточные напряжения, так и биомиметические структуры, возникшие при БЛУВО на поверхности исследуемого материала. Образец, обработанный с использованием технологии БЛУВО, демонстрирует лучшую способность к замедлению распространения трещины, при этом остаточная усталостная долговечность образцов значительно увеличивается, а скорость роста трещин – снижается.

Выводы. Разработана 3*D* конечноэлементная модель, моделирующая технологию БЛУВО, где классическая технология ЛУВО гармонично сочетается с теорией биомиметики, обеспечивая получение синергетического эффекта. Показано, что коэффициент интенсивности напряжений образцов, обработанных по технологии БЛУВО, меньше, чем у необработанного образца, т.к. сжимающие остаточные напряжения, расположенные в приповерхностной области, уравновешивают часть растягивающей нагрузки, приложенной к образцам. Соответственно, у образцов, обработанных по технологии БЛУВО, повышается остаточная усталостная долговечность. Показано, что биомиметические структуры, возникшие при БЛУВО на поверхности исследуемого материала, также повышает остаточную усталостную долговечность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jing Z., Zhou H., Zhang P. et al.* Effect of thermal fatigue on the wear resistance of graphite cast iron with bionic units processed by laser cladding WC // Appl. Surf. Sci. 2013. V. 271. P. 329.
2. *Rajabi H., Darvizeh A., Shafiei A. et al.* Numerical investigation of insect wing fracture behavior // J. Biomech. 2015. V. 48. P. 89.
3. *Zhang Z., Zhang L., Yu Z. et al.* Liang, In-situ mechanical test of dragonfly wing veins and their crack arrest behavior // Micron. 2018. V. 110. P. 67.
4. *Wang C., Huang Y., Zan Q. et al.* Biomimetic structure design – a possible approach to change the brittleness of ceramics in nature // Mater. Sci. Eng. 2000. V. 11 (1). P. 9.
5. *Zhang Z., Ren L., Zhou H. et al.* Effect of thermal fatigue loading on tensile behavior of H13 die steel with biomimetic surface // J. Bionic Eng. 2010. V. 7 (4). P. 390.
6. *Wu L., Wang T., Hu Y. et al.* A method for improving the crack resistance of aluminum alloy aircraft skin inspired by plant leaf // Theor. Appl. Fract. Mech. 2020. V. 106. P. 102444.
7. *Liao Y., Ye C., Cheng G.J.* A review: Warm laser shock peening and related laser processing technique // Opt. Laser Technol. 2016. V. 78. P. 15.
8. *Sun R., Li L., Zhu Y., Guo W. et al.* Microstructure, residual stress and tensile properties control of wire-arc additive manufactured 2319 aluminum alloy with laser shock peening // J. Alloy. Compd. 2018. V. 747. P. 255.
9. *Yang K., Li J. Wang Q. et al.* Effect of laser remelting on microstructure and wear resistance of plasma sprayed Al2O3-40%TiO2 coating // Wear. 2019. V. 426–427. P. 314.
10. *Liu J., Wu L. Song M. et al.* Crack resistance behaviour of aluminium alloy for aircraft skin with bionic coupling units processed by laser cladding // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2020. V. 43. P. 2756.
11. *Сахвадзе Г.Ж., Сахвадзе Г.Г.* Особенности остаточных напряжений, возникающих при биомиметической лазерно-ударно-волновой обработке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2022. № 1. С. 54.
12. *Keller S., Chupakhin S., Staron P. et al.* Experimental and numerical investigation of residual stresses in laser shock peened AA2198 // J. Mater. Process. Technol. 2018. V. 255. P. 294.
13. *Dorman M., Toparli M., Smyth N. et al.* Effect of laser shock peening on residual stress and fatigue life of clad 2024 aluminium sheet containing scribe defects // Mater. Sci. Eng.: A. 2012. V. 548. P. 142.
14. *Adu-Gyamfi S., Ren X.D., Larson E.A. et al.* The effects of laser shock peening scanning patterns on residual stress distribution and fatigue life of AA2024 aluminium alloy // Opt. Laser Technol. 2018. V. 108. P. 177.
15. *Sakhvadze G.Zh., Sakhvadze G.G., Kavtaradze R.Z.* Increasing the Crack Resistance of Materials by Means of Laser Shock Processing // Russian Engineering Research. 2021. V. 41. № 1. P. 27.
16. *Huang S., Sheng J., Wang Z. et al.* Finite element and experimental analysis of elevated-temperature fatigue behavior of IN718 alloy subjected to laser peening // Int. J. Fatigue. 2020. V. 131. 105337.
17. *Song M., Wu L., Liu J. et al.* Effects of laser cladding on crack resistance improvement for aluminum alloy used in aircraft skin // Opt. Laser Technol. 2021. V. 133. 106531.
18. *Bohan L., Wang C., Junliang D. et al.* Numerical simulation on laser shock peening of TC4 titanium alloy // J. Aerospace Power. 2021. V. 5.
19. *Hu Y., Song M., Liu J. et al.* Effects of stop hole on crack turning, residual fatigue life and crack tip stress field // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2020. V. 42 (5).

EDN: XAHNHK
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 68–74**

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 533.9(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ В МОЛЕКУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ

© 2022 г.

М. В. Котельников[1], С. С. Крылов[1], Г. С. Филиппов[1,2,*]

[1]*Московский авиационный институт, Москва, Россия*
[2]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: filippov.gleb@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.
После доработки 17.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В статье рассмотрена математическая модель разреженной пристеночной плазмы. Для решения уравнений Власова–Пуассона разработан алгоритм последовательных итераций по времени после импульсного изменения одного или нескольких параметров задачи. Задача является многомерной нестационарной и многопараметрической. Разработаны принципиальные особенности, которые позволили проводить вычисления без использования суперкомпьютеров. Приведены результаты математического моделирования параметров пристеночной плазмы вблизи плоского элемента конструкции космического летательного аппарата, движущегося в ионосфере по круговой орбите.

Ключевые слова: пристеночная плазма, электрический зонд, космический летательный аппарат

DOI: 10.31857/S0235711922050078

Пристеночная разреженная плазма имеет место вблизи летательных аппаратов, движущихся в ионосфере Земли, вблизи приборов и различных измерительных систем, установленных на спутниках, вблизи элементов конструкции электрореактивных двигателей и т.д. Знание свойств пристеночной плазмы необходимо в теории и практике электрических зондов, в плазмохимии, электронике и многих других технологических системах, где используется плазма в качестве рабочего тела, или предназначенных для работы в плазме.

Математическая модель разреженной пристеночной плазмы, включающая в себя кинетические уравнения Власова для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля, дополнена системой начальных и граничных условий.

Аналитические решения задачи Власова–Пуассона в настоящее время невозможны, за исключением некоторых частных случаев, поэтому в настоящей статье основное внимание уделено численному решению задачи. Будем ориентироваться на вычислительную технику средней мощности. На основании анализа работ зарубежных авторов [1–11], а также многолетних исследований в этой области [12] был выбран алгоритм последовательных итераций по времени после импульсного изменения одного или нескольких параметров задачи, например, потенциал стенки, ограничивающей плазменное образование. Исследование эволюционного процесса приводится либо методом крупных частиц Ю.М. Давыдова, либо методом характеристик [12].

В процессе эволюции пристеночная плазма достигает стационарного состояния, определяемого параметрами задачи (например, конечным значением потенциала стенки после его импульсного изменения).

Рассматриваемая задача является многомерной (до шести фазовых переменных), нестационарной и многопараметрической (до шести параметров).

Для сокращения необходимых ресурсов ЭВМ (в том числе и машинного времени счета до установления) были проведены методические исследования, которые позволили оптимально выбрать шаги по времени, шаги по фазовым переменным, размер расчетной области и другие параметры, которые зависят от формы обтекаемого плазмой тела и свойств в пристеночной плазме.

Отметим некоторые особенности, которые были выявлены при проведении методических расчетов в задачах пристеночной плазмы.

Выбор шага по времени Δt. Как показано в работе [13], условие устойчивости Неймана применительно к гиперболическим уравнениям будет выполняться, если использовать схему Лакса [14]. Анализ устойчивости схемы, проведенный в [13] для случая линейных дифференциальных уравнений, приводит к неравенству

$$\left|\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}\right| \le 1, \tag{1}$$

где u — физическая скорость среды, $L \times 10^3$; Δx — шаг по пространственной координате. Из (1) вытекает ограничение на шаг по времени Δt

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{u_{\max}}, \tag{2}$$

где $u_{\max}$ в методе крупных частиц есть максимальная скорость центров крупных частиц. Условие (2) известно в литературе как условие Куранте—Фридрихса—Леви (КФЛ).

В задачах пристеночной плазмы система Власова—Пуассона нелинейна. Однако, учитывая наглядный физический смысл неравенства (2), его используют для выбора оценочного значения шага по времени с дальнейшим уточнением в предварительных расчетах, которые показали, что оно оказывается слишком жестким. Шаг по времени Δt может быть увеличен в 3—5 раз по сравнению с его величиной, вытекающей из формулы (2), без нарушения устойчивости и точности решения. Физическая причина такого вывода заключается в следующем: при наличии заряженной стенки в плазме наиболее быстрые частицы оказываются вблизи этой стенки и ею поглощаются, т.е., выбывают из рассмотрения. Иными словами, в условие КФЛ входят скорости очень малого числа короткоживущих частиц, не отражающих динамику всего массива.

Усовершенствованный метод характеристик. Классический метод характеристик подробно изложен в литературе [14, 15]. Однако методические расчеты показали, что путем изменений в классической схеме можно сократить время проведения вычислений. В результате появился усовершенствованный метод характеристики. В отличие от классического метода характеристик, алгоритм которого предполагает интегрирование системы уравнений характеристики от текущего момента времени до нуля, предполагается интегрировать систему уравнений характеристик только один раз и сместиться вдоль характеристики на предыдущий временной слой. Далее путем интерполяции по значениям функции распределения на предыдущем временном слое получить значение функции распределения для рассматриваемого узла расчетной сети.

Как показали тестовые расчеты, машинное время счета до установления в этом случае в несколько раз меньше, чем соответствующее время с использованием классических методик [16]. Если эволюция затягивается, то это время может быть меньше на порядок и более.

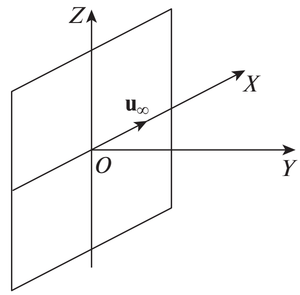

Рис. 1. Проводящая плоскость, расположенная параллельно вектору скорости спутника.

Алгоритм параллельного счета. Система Власова–Пуассона включает в себя два кинетических уравнения – для ионов и электронов. Эти уравнения не связаны друг с другом и удобны для использования алгоритма параллельного счета. Из существующих в настоящее время средств распараллеливания наиболее перспективной оказалась библиотека Open MP, использование которой не предполагает существенных изменений кодов и сводится к вставке в нужные места программы необходимых директив. Методические исследования показали, что время счета до установления решения уменьшается примерно на 40%. Для дальнейшего ускорения счета представляется перспективным распараллеливание циклических процессов метода крупных частиц, осуществляющих смещение центров крупных частиц на Лагранжевом этапе. Поскольку каждая крупная частица смещается независимо от других, такие циклы являются взаимно независимыми, что позволяет их распараллелить.

Рассмотренные выше и другие методические разработки позволяют существенно сократить время вычислительных экспериментов с пристеночной плазмой и проводить их на ЭВМ средней мощности.

В качестве примера приведем результаты математического моделирования параметров пристеночной плазмы вблизи плоского элемента конструкции космического летательного аппарата, движущегося в ионосфере по круговой орбите. Плоскость расположена параллельно вектору скорости аппарата и имеет значение "плавающего" потенциала, соответствующего данной орбите.

Считаются заданными: характерный размер плоскости $L > 10^3 r_D$, это означает что концевые и краевые эффекты малы; потенциал в случае проводящей плоскости $\varphi = \varphi_{\text{плав}}$; высота над поверхностью Земли h = 250 км; 500 км; 1000 км; скорость $u_\infty = u_{\substack{\text{первая}\\ \text{космич.}}}$; температура и концентрации заряженных частиц на орбитах.

Рассматриваемая плоскость представлена на рис. 1.

С учетом сдвиговой симметрии по осям Z и X функции распределения заряженных частиц зависят только от двух фазовых переменных (y, ν_y) и имеют вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nu_y \frac{\partial f_i}{\delta y} + \frac{1}{2} E_y \frac{\partial f_i}{\partial \nu_y} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \delta_e^{1/2} \nu_y \frac{\partial f_e}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon_e^{-1} \delta_e^{1/2} E_y \frac{\partial f_e}{\partial \nu_y} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = n_e - n_i, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi; \tag{5}$$

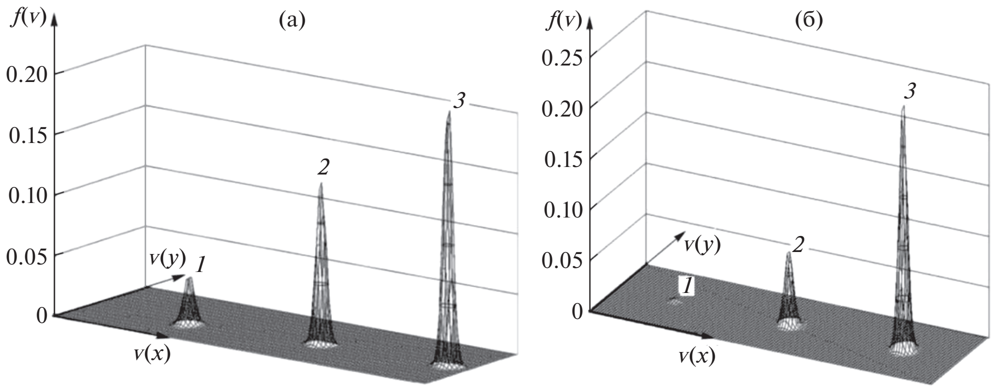

Рис. 2. (а) – ФРИ; $h = 250$ км; $\varphi_0 = -10.4$; $\varepsilon = 0.76$; $r_D = 0.26$ см; (б) – ФРЭ; $h = 250$ км; $\varphi_0 = -10.4$; $\varepsilon = 0.76$; $r_D = 0.26$ см.

$$\varepsilon_e = \frac{T_e}{T_i}, \quad \mu_e = \frac{m_e}{m_i}, \quad \delta_e = \frac{\varepsilon_e}{\mu_e}. \tag{6}$$

Начальные и граничные условия для функций распределения $f_{i,e}(y, \nu_y)$ для плоскости, ориентированной параллельно потоку, имеют вид

$$f_\alpha\left(t, y_\infty, \nu_y\right) = f_\alpha\left(0, y, \nu_y\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\nu_y^2\right), \quad \alpha = i, e. \tag{7}$$

Граничное условие на проводящей плоскости определяется условием его идеальной каталитичности, а на внешней границе – максвеловские функции распределения с учетом направленной скорости.

Граничные условия для потенциала запишутся как

$$\varphi\big|_{y=0} = \varphi_{\text{плав}}; \quad \varphi\big|_{y=y_\infty} = 0. \tag{8}$$

Система (3)–(8) записана в безразмерном виде с использованием следующей системы масштабов:

$$M_L = r_{D_i} = \left(\frac{\varepsilon_0 k T_i}{e^2 n_{i\infty}}\right)^{1/2}, \quad (\mathrm{M}_v)_\alpha = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2}, \quad \mathrm{M}_n = n_\infty, \quad \mathrm{M}_\varphi = \frac{hT_i}{e}. \tag{9}$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей. В (3)–(4) использованы следующие обозначения: r_D – радиус Дебая; f_α – функции распределения заряженных частиц; v – скорость; t – время; $T_\alpha, n_\alpha, m_\alpha$ – температура, концентрация, масса заряженных частиц; E, φ – напряженность и потенциал электрического поля; индексы: $\alpha = i$, e, i – ион, e – электрон, ∞ – внешняя граница расчетной области; $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м; $k = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Кл.

На рис. 2а, б приведены функции распределения ионов (ФРИ) и электронов (ФРЭ) для проводящей плоскости, расположенной параллельно вектору скорости потока на высоте $h = 250$ км от поверхности земли.

Из рис. 2а, б следует: **1)** при отрицательном потенциале плоскости высота куполов ФР снижается по мере приближения к плоскости, поскольку концентрация ионов снижается за счет поглощения плоскостью, а электронов – за счет отталкивания от плоскости; **2)** в точке “1” купол ФРИ заметно выше, чем купол ФРЭ. Это связано с

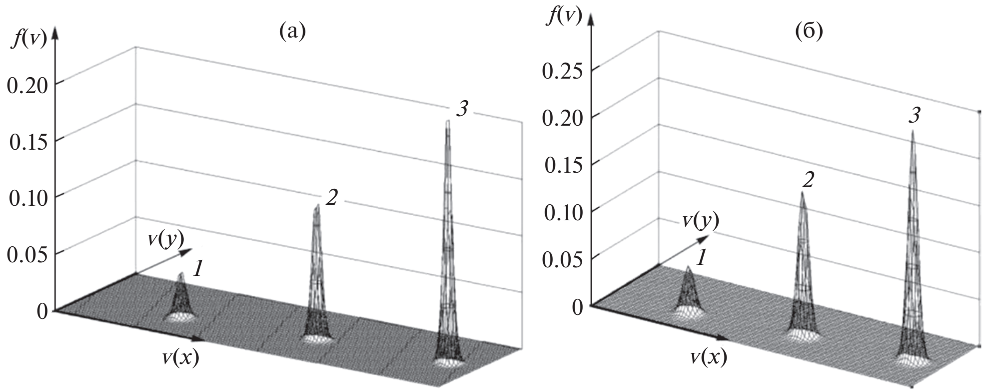

Рис. 3. (а) – ФРИ; $h = 500$ км, $\varphi_0 = -12.1$; $\varepsilon = \dfrac{T_i}{T_e} = 0.6$; $r_D = 1.0$ см; (б) – ФРИ; $h = 1000$ км, $\varphi_0 = -9.0$; $\varepsilon = 0.83$; $r_D = 1.5$ см.

тем, что $m_e \ll m_i$, и, соответственно, тепловая скорость электронов много больше тепловой скорости ионов. Поэтому при условии равенства потоков на стенку концентрация электронов должна быть меньше концентрации ионов; **3)** высота куполов ФРИ и ФРЭ в точке “3” примера одинакова. Это означает, что концентрация ионов и электронов примерно равны, т.е. размер расчетной области полностью захватывает возмущенную зону вблизи стенки.

На рис. 3а, б представлена ФРИ для плоскости, если орбита спутника расположена на высотах $h = 500$ и $h = 1000$ км.

Расчет проведен в ионосферной плазме, соответствующей этим высотам. По внешнему виду они напоминают ФРИ (рис. 2а), однако для более детального анализа нужно учесть, что с изменением высоты орбиты изменяется масштаб обезразмеривания ФРИ и ФРЭ. Масштаб ФРИ с учетом (9) $M_f = \dfrac{M_n}{M_{v_i}^3} = \dfrac{n_\infty}{\left(\dfrac{2kT_i}{m_i}\right)^{3/2}}$, откуда следует, что с повышением орбиты T_i растет, а n_∞ и m_i уменьшается, следовательно, масштабный коэффициент уменьшается, а безразмерное значение f_i растет. Если бы масштабные коэффициенты были одинаковы, то наполнение куполов ФРИ с повышением радиуса орбиты снижалось.

По известным ФРИ и ФРЭ рассчитываются их моменты: концентрация заряженных частиц, их скорости; плотность токов и др. Путем решения уравнения Пуассона находятся распределения электрических полей в пристеночной области.

На рис. 4а, б, в приведены распределения вдоль нормали и поверхности концентрации ионов n_i и электронов n_e.

На рис. 4 отчетливо виден слой положительного объемного заряда и участок квазинейтральной области. При проведении сравнительного анализа следует учитывать, что масштабные коэффициенты обезразмеривания меняются в зависимости от высоты орбиты.

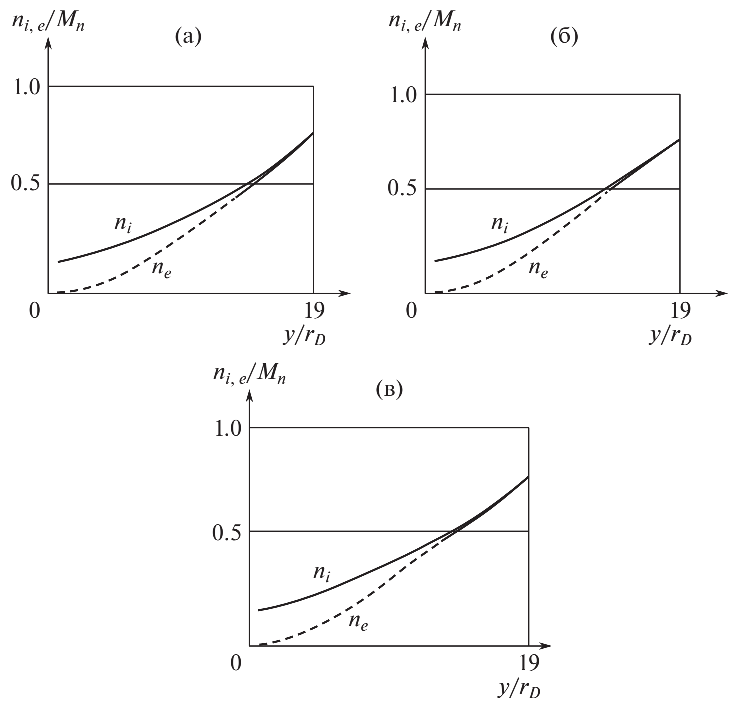

Рис. 4. Распределение $n_{i,e}(y)$ при значениях h: (а) – 250 км; (б) – 500 км; (в) – 1000 км.

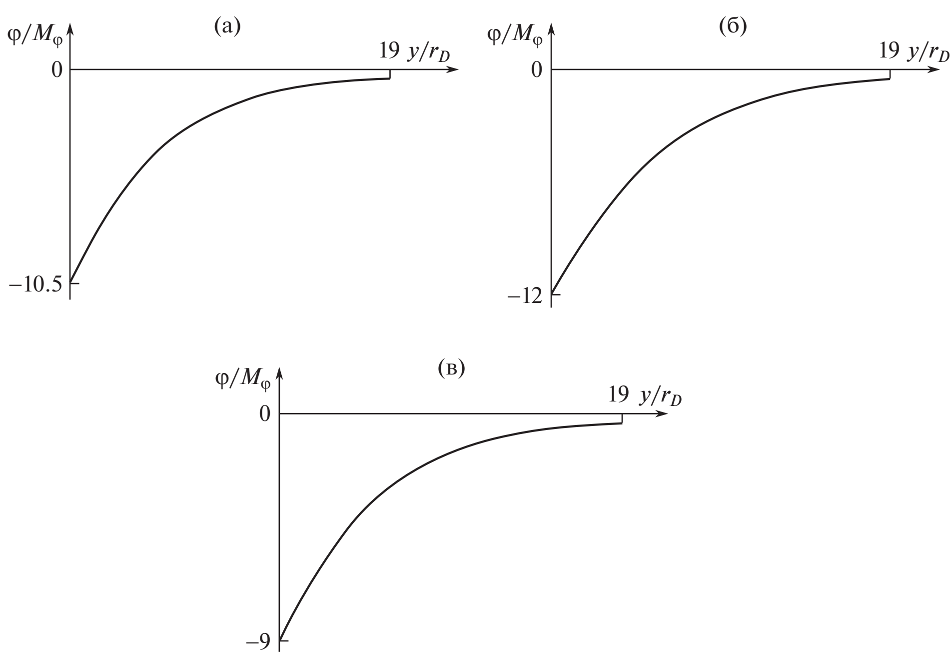

Рис. 5. Распределение потенциала $\varphi_0(y_0)$ для высот h: (а) – 250 км; (б) – 500 км; (в) – 1000 км.

На рис. 5 приведены зависимости $\varphi_0 = \frac{\varphi_{плав}}{M_\varphi}$ от координаты $y_0 = \frac{y}{M_L}$ при тех же условиях, что и на рис. 4.

Безразмерный "плавающий" потенциал нелинейно зависит от высоты (рис. 5). Графики $\varphi_0(y_0)$ следует анализировать с учетом изменения масштаба обезразмеривания в зависимости от h.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baker D.N., Pulkkinen T.I., Angelopoulos V., Baumjohann W., McPherron R.L.* Neutral line model of substorms: Past results and present view // J. of Geophysical Research-Space Physics. 1996. V. 101 (A6). P. 12975.
2. *Buonsanto M.J.* Ionospheric storms – A review // Space Science Reviews. 1999. V. 88. Iss. 3–4. P. 563.
3. *Fejer B.G., Scherliess L., de Paula E.R.* Effects of the vertical plasma drift velocity on the generation and evolution of equatorial spread F // J. of Geophysical Research-Space Physics. 1999. V. 104. Iss. A9. P. 19859.
4. *McFadden J.P., Carlson C.W., Larson D., Bonnell J., Mozer F., Angelopoulos V., Glassmeier K.H., Auster U.* The THEMIS ESA First Science Results and Performance Issues // Space Science Reviews. 2008. V. 141. Iss. 1–4. P. 477.
5. *Bilitza D., Altadill D., Zhang Y.L., Mertens C., Truhlik V., Richards P., McKinnell L.A., Reinisch B.* The International Reference Ionosphere 2012-a model of international collaboration // J. of Space Weather and Space Climate. 2014. V. 4. A07.
6. *Newell P.T., Sotirelis T., Wing S.* Diffuse, monoenergetic, and broadband aurora: The global precipitation budget // J. of Geophysical Research-Space Physics. 2009. V. 114.
7. *Liu J.Y., Chen Y.I., Chuo Y.J., Chen C.S.* A statistical investigation of preearthquake ionospheric anomaly // J. of Geophysical Research-Space Physics. 2006. V. 111. Iss. A5. A05304.
8. *Bilitza D., McKinnell L.A., Reinisch B., Fuller-Rowell T.* The international reference ionosphere today and in the future // J. of Geodesy, 2011. V. 85. Iss. 12. P. 909.
9. *Lyons L.R., Nagai T., Blanchard G.T., Samson J.C., Yamamoto T., Mukai T., Nishida A., Kokubun S.* Association between Geotail plasma flows and auroral poleward boundary intensifications observed by CANOPUS photometers // J. of Geophysical Research-Space Physics. 1999. V. 104. Iss. A3. P. 4485.
10. *Wygant J.R., Keiling A., Spann J. et al.* Polar spacecraft based comparisons of intense electric fields and Poynting flux near and within the plasma sheet-tail lobe boundary to UVI images: An energy source for the aurora // J. of Geophysical Research-Space Physics, 2000. V. 105. Iss. A8. P. 18675.
11. *Foster J.C., Coster A.J., Rich F.J. et. al.* Multiradar observations of the polar tongue of ionization // J. of Geophysical Research-Space Physics, 2005. V. 110. Iss. A9.
12. *Алексеев Б.В., Котельников В.А.* Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 239 с.
13. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
15. *Alexeev B.V., Kotelnikov V.A., Gurina T.A.* Distribution Funetion of Charged Particlas in Satellite Track- Prog // Int. Conf. Plasma Physics, Kiev, 1967. V. 4. P. 217.
16. *Котельников В.А., Котельников В.М., Филиппов Г.С.* Физические, математические и численные модели пристеночной плазмы. Учебное пособие. М.: Ижевск, 2018. 279 с.

EDN: LTUGQD
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 75–83**

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 536.2:518.355.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ В МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ СТЕНКЕ: ЧЕЛОВЕК–ТКАНЫЙ ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬ–ВНЕШНЯЯ СРЕДА

© 2022 г.

А. А. Шульженко[1],*, М. Б. Модестов[1]

[1]Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

**e-mail:aa_shulzhenko.01@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.
После доработки 05.04.2022 г.
Принята к публикации 20.04.2022 г.

Проводилось моделирование реакции человека на тепловой сигнал тканого электронагревателя. Изменения температуры во времени отслеживались в пространстве, представляющем тонкую стенку между поверхностью тела человека и внешней средой. Новизна исследования заключается в попытке представить тело человека активным элементом такой системы, которое обладает способностью не только осуществлять потовыделение, но и подключать другие механизмы терморегуляции. При синтезе сигналов и анализе результатов имитационного моделирования проводилось их сопоставление с результатами ранее проведенных натурных испытаний. Статья может представлять интерес для широкого круга специалистов, занимающихся исследованием системы терморегуляции человека, физиологией.

Ключевые слова: тканый электронагреватель, терморегуляция человека, тепловая система, тонкая стенка, физиология

DOI: 10.31857/S0235711922040137

В медицине, в настоящее время, используются самые различные методы исследования человека с помощью тепловых воздействий и с применением различных устройств, позволяющих контролировать температурные изменения, вызванные включением системы терморегуляции, ее подсистем.

Среди них – метод, при котором изменения температуры кожи вызывались за счет падающего лучистого теплового потока. Температура окружающей среды варьировалась в пределах 30.5–36.0°C [1].

Хорошо известен неинвазивный метод измерения средней температуры тела и средней температуры кожи при двух температурах окружающей среды во время физических упражнений. При этом методе стимуляция тепловых изменений в организме обеспечивалась не только за счет температуры окружающей среды, но и за счет физических упражнений и восстановления после них [2, 3].

При проведении тепловых исследований применялся полуинвазивный метод, построенный на использовании телеметрической таблетки. При использовании такого метода была получена более быстрая реакция на изменение температуры ядра, чем при использовании зонда [4], однако, перемещение таблетки носит непредсказуемый характер, что вызывает и непредсказуемое влияние на температурные измерения.

Еще один метод изучения теплового состояния организма человека при различных функциональных пробах — метод динамической инфракрасной термографии. Метод является неинвазивным. Он позволяет с помощью тепловизора получать термограммы, т.е. инфракрасные тепловые поля, как поверхности всего тела, так и его отдельных частей, изменяющихся во времени [5, 6].

Проводились измерения температуры барабанной перепонки с помощью пироэлектрических ушных термометров, которые измеряют инфракрасную энергию, излучаемую барабанной перепонкой пациента за откалиброванный промежуток времени. Данный метод является неинвазивным. Однако, как и предыдущий, он производит только фиксацию температуры при устоявшейся температуре внешнего воздействия [7].

Довольно часто используется инвазивный метод теплового исследования человека при осуществлении внешнего воздействия водяных тепловых ванн при различных температурах. В этом случае, измерение температур проводится с помощью игольчатой термопары длиной 2.5 см, вводимой через мышцу предплечья до тех пор, пока она не достигала кости [8]. Подкожные температуры измерялись на плохо определяемых глубинах с помощью второй термопары, вставленной наклонно в предплечье.

Инвазивные методы с использованием термодов также получили практическое распространение [9].

Все рассмотренные методы обладают недостатками, т.к.: или они носят инвазивный характер; или при их реализации необходим объемный теплоноситель, применение которого существенно снижает эффективность получения отклика на тепловое воздействие; или они используются для определения теплового состояния при фиксированной температуре на поверхности тела.

Способность высокоэластичных компактных тканых электронагревателей обеспечивать контактным способом нарастающий, прецизионный нагрев исследуемого объекта, как целиком, так и его отдельных частей, создает предпосылки для их использования не только в изделиях технического назначения, но и в медицине.

Например, существует проблема получения количественного представления о тепловых процессах, происходящих на поверхности тела человека при температурах более 38°C [10].

Использование тканых электронагревателей, расположенных на теле человека, с термопарами на их поверхностях, при проведении натурных испытаний позволило получить неинвазивным путем количественные данные о тепловых изменениях в этом диапазоне температур [11].

На рис. 1 показаны результаты натурных испытаний. Режим потовыделения начинается уже на второй минуте температурных изменений, происходящих в теле человека, и продолжается до конца эксперимента. При достижении температуры 38.4°C (58 минута) наблюдаются дополнительные тепловые изменения на поверхности тела человека (сначала рост, а затем снижение температуры ниже уровня 38.4°C).

В области тепловой системы, представляющей собой тонкую стенку, действовали следующие источники тепла, и находились слои, где возможно было изменение параметров, зависящих от уровня воздействующих температур: внешняя окружающая среда, тканый электронагреватель, тело человека, промежуток между телом человека и тканым электронагревателем, в котором происходит изменение параметров, вызванное потовыделением.

Однако, видимых причин к подъему температур в области 58 минуты со стороны всех перечисленных источников, способных вызвать этот подъем температур в системе, кроме самого человека, нет [11]. Поэтому, можно предположить, что при достижении температуры 38.4°C человек сам осуществляет генерацию тепла.

Дополнительным подтверждением наличия генерации тепла являются сведения, ранее установленные исследователями системы терморегуляции человека, о том, что при температуре на поверхности тела, превышающей 38°C, наблюдается повышение

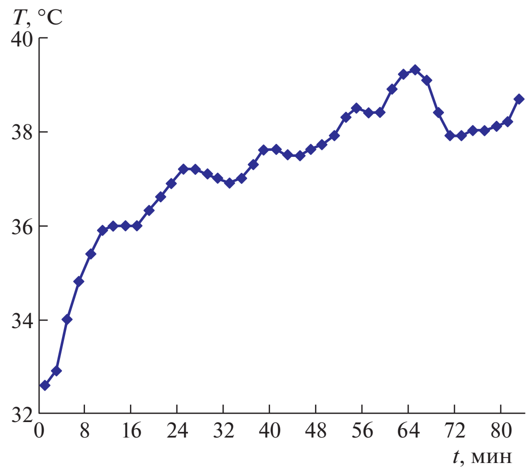

Рис. 1. Результаты натурных испытаний при подаче на человека теплового сигнала до уровня более 38°C и большой длительности сигнала, генерируемого тканым электронагревателем.

частоты импульсации терморецепторов человека, что свойственно терморецепторам при подъеме температуры [12, 13].

Полученные экспериментальные данные фиксируют наличие температурного подъема в теле человека. Однако расплывчивость характера температурных изменений, возникающих за счет сложного пути прохождения, как сигнала нагревателя, так и отклика на тепловое воздействие нагревателя в области тепловой системы, расположенной на поверхности тела человека, не позволяет получить более четкое представление о тепловой реакции, происходящей в теле человека.

Целью настоящей статьи является получение более четкого теплового сигнала, соответствующего реакции тела человека на воздействующий тепловой сигнал тканого электронагревателя.

Для более детальной расшифровки данных, полученных с помощью натурных испытаний, будем использовать математический эксперимент. При эксперименте на математическую модель тепловой системы со стороны человека подаются сигналы, имитирующие тепловую реакцию тела человека. Затем, уже полученный в области тепловой системы (в нашем случае – в области тканого электронагревателя, т.к. во время эксперимента термопары располагались именно там) суммарный тепловой сигнал сравнивается с результатами натурных испытаний. Совпадение этих результатов будет говорить о соответствии модели теплового сигнала действительным тепловым процессам, поступающим со стороны тела человека.

При осуществлении математического эксперимента очень важно сделать правильное, наиболее близкое к реальному состоянию описание тепловой системы, в пределах которой проводились натурные испытания, и будет проводиться имитационное моделирование.

Сформулируем математическую задачу. Будем рассматривать тепловую систему в виде тонкой стенки, расположенной по оси X от x_0 до x_3, имеющую следующую структуру: поверхность тела человека–промежуток между этой поверхностью и тканым электронагревателем–тканый электронагреватель–внешний теплоизоляционный слой–внешняя окружающая среда. Тепловые процессы будем рассматривать не только вдоль пространственной оси, расположенной по нормали к площади поверхности тонкой стенки, но и во времени. Уровни суммарных температур, создаваемые при проведении исследования на поверхности тела, не превышают привычные для человека. Внешней средой с одной стороны тонкой стенки является окружающая среда. Будем полагать, что температура окружающей среды в процессе всего рассмотрения не меняется и равна T_{sr}. При моделировании будем оперировать разностями температур относительно температуры окружающей среды T_{sr}. С другой стороны тонкой стенки, будем считать, что внешней средой является человек, т.к. габариты его много больше площади поверхности исследуемой тонкой стенки. Данная внешняя среда является активной. Она способна реагировать на тепловые воздействия со стороны тканого электронагревателя, также являющегося активным элементом тонкой стенки. Изменения температуры тела человека во времени, происходящие за счет внутренних тепловых процессов, будем представлять, в виде

$$\begin{cases} \Delta T_{ch}(t,x) = \Delta T_{ch1}, & \text{при} \quad t = 0, \quad x = x_0, \\ \Delta T_{ch}(t,x) = \Delta T_{ch}(t), & \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta T = T - T_{sr}$; T – текущее значение температуры; $\Delta T_{ch}(t) = T_{ch}(t) - T_{sr}$ – текущее значение разности температуры на поверхности человека относительно температуры внешней среды; T_{ch1} – значение температуры на поверхности тела человека в начальный момент времени; T_{ch} – текущее значение температуры в области поверхности тела человека; $\Delta T_{ch1} = T_{ch1} - T_{sr}$ – разность температур на поверхности тела человека в начальный момент времени относительно температуры внешней среды; t – текущее значение времени; x – текущее значение расстояния по оси X, расположенной по нормали по отношению к поверхности тонкой стенки; x_0 – координата в тонкой стенке на поверхности тела человека.

Граничные условия на теле человека, в которые входит переменная температура тела человека, можно записать

$$-\lambda_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x} = -\alpha_{ch} k \left(\Delta T_{ch}(t) - \Delta T\right) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_0, \tag{2}$$

где α_{ch} – теплоотдача во внешнюю среду (в тело человека); k – коэффициент пропорциональности.

Для описания тепловых процессов, происходящих в слое – в промежутке между телом человека и тканым электронагревателем, будем использовать одномерное уравнение Фурье с переменным во времени коэффициентом теплопроводности, т.к. в этой области происходит потовыделение и дальнейшее испарение пота существенно изменяющее этот коэффициент

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(t) \frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_0 < x < x_1, \tag{3}$$

где λ_1 – коэффициент теплопроводности среды промежутка между телом человека и тканым электронагревателем; ρ_1 – плотность среды промежутка; c_1 – теплоемкость среды промежутка; x_1 – координата по оси X на поверхности нагревателя со стороны промежутка.

Для отражения температурных изменений в области тканого электронагревателя будем использовать одномерное уравнение Фурье с внутренним источником

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + q_v \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_1 < x < x_2, \tag{4}$$

где λ_2 – коэффициент теплопроводности материала нагревателя; ρ_2 – плотность материала теплового источника; c_2 – теплоемкость материала теплового источника; q_v – теплопродукция внутреннего источника; x_2 – координата по оси X на поверхности нагревателя со стороны теплоизоляционного слоя.

Тепловые процессы в области теплоизоляционного слоя описываются с помощью одномерного уравнения Фурье

$$\rho_3 c_3 \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_2 < x < x_3, \tag{5}$$

где λ_3 – коэффициент теплопроводности материала теплоизоляционного слоя; ρ_3 – плотность материала теплового источника; c_3 – теплоемкость материала теплового источника; x_3 – координата по оси X на внешней поверхности теплоизоляционного слоя.

Так как размеры тонкой стенки крайне малы, то на границе между промежутком и тканым электронагревателем будем использовать граничные условия IV рода

$$\begin{cases} -\lambda_1 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} = -\lambda_2 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_1, \\ \Delta T_{h1}(t, x) = \Delta T_{i1}(t, x) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_1, \end{cases} \tag{6}$$

где ΔT_{h1} – разность температур со стороны промежутка в точке x_1 и внешней среды; ΔT_{i1} – разность температур нагревателя и внешней среды в точке x_1.

Между тканым электронагревателем и теплоизоляционным слоем, также будем применять граничные условия IV рода

$$\begin{cases} -\lambda_2 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} = -\lambda_3 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_2, \\ \Delta T_{h2}(t, x) = \Delta T_{i2}(t, x) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_2, \end{cases} \tag{7}$$

где ΔT_{h2} – разность температур на поверхности нагревателя со стороны нагревателя и внешней среды; ΔT_{i2} – разность температур на поверхности нагревателя со стороны теплоизоляционного слоя и внешней среды в точке x_2.

На границе теплоизоляционного слоя и внешней окружающей среды будем использовать граничные условия III рода

$$-\lambda_3 \frac{\partial \Delta T}{\partial x} = -\alpha_{sr} \Delta T \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_3, \tag{8}$$

где α_{sr} – теплоотдача в окружающую среду.

В целом, сформулированную задачу с помощью (1)–(8), можно представить выражением

$$\begin{cases} \Delta T = \Delta T_{ch} = \Delta T_{ch1} \quad \text{при} \quad 0 = t, \quad x = x_0, \\ \Delta T = \Delta T_{ch}(t), \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_0, \\ \Delta T = \Delta T_{sr} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x = x_3, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x} = -\alpha_{ch} k (\Delta T_{ch}(t) - \Delta T) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_0, \\ \rho_1 c_1 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(t) \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\right) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_0 < x < x_1, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} = -\lambda_2 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_1, \\ \Delta T_{h1}(t, x) = \Delta T_{i1}(t, x) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_1, \\ \rho_2 c_2 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial t} = \lambda_2 \dfrac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + q_v \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_1 < x < x_2, \\ -\lambda_2 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} = -\lambda_3 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_2, \\ \Delta T_{h2}(t, x) = \Delta T_{i2}(t, x) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_2, \\ \rho_3 c_3 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial t} = \lambda_3 \dfrac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x_2 < x < x_3, \\ -\lambda_3 \dfrac{\partial \Delta T}{\partial x} = -\alpha_{sr} \Delta T \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x = x_3. \end{cases} \tag{9}$$

Решение задачи (9) возможно при сбалансированности тепловых параметров элементов системы, т.е. при использовании тепловых параметров, обладающих, как пра-

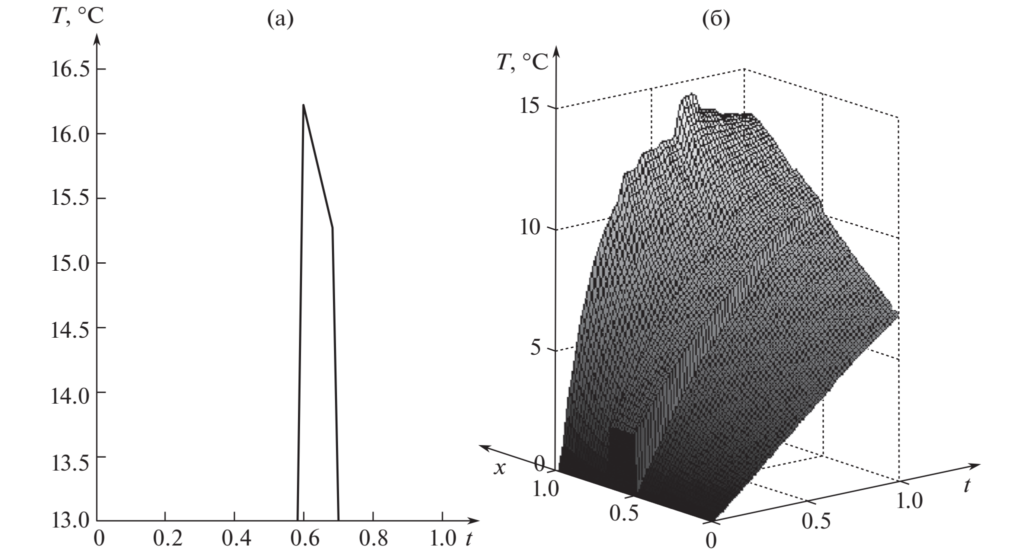

Рис. 2. Температурное распределение: (а) – модели создаваемого человеком сигнала, отражающего только генерацию тепла при достаточном уровне теплового воздействия тканого электронагревателя; (б) – суммарный сигнал, распространяющейся в тепловой системе тонкой стенки при воздействии модели сигнала типа (а).

вило, небольшими теплоемкостями и малыми массами в областях: промежутка между телом человека и нагревателем, внешнего изоляционного слоя и нагревателя, а также достаточно высокой теплопроводностью нагревательных элементов [14].

Для получения дополнительного, более четкого представления о реакции человека, соответствующей результатам натурных испытаний, т.е. к возникновению сначала подъема температуры, а затем, к ее существенному снижению, проведем численный эксперимент с помощью программы, разработанной на основе сформулированной задачи (9).

На тепловую систему со стороны тела человека будем воздействовать тепловым сигналом. Таких тепловых сигналов существует множество. Они могут быть различными по форме, уровню, длительности и времени начала их появления. В настоящей статье ограничимся исследованием некоторых, наиболее вероятных сигналов, вызывающих результирующие реакции суммарных тепловых полей в области тонкой стенки, аналогичные реакциям, полученным в ходе натурных испытаний. При моделировании воздействия на тепловую систему различных сигналов со стороны тела человека, чтобы получить однозначность при сопоставлении реакции на их воздействие, будем фиксировать все остальные ее параметры.

Рассмотрим воздействие теплового сигнала в виде импульса, показанного на рис. 2а, у которого температура, до подъема и после ее снижения, равна температуре тела T_{ch1}.

Результат воздействия подобного импульса на тепловую систему показан на рис. 2б. Как видим, после достижения времени $t = 0.6$, наблюдается рост температуры, аналогичный росту температуры, полученному при проведении натурных испытаний (рис. 1). Можно сделать вывод, что при проведении натурных тепловых испытаний, математического моделирования рассматриваемой тепловой системы и натурных испытаний активности терморецепторов при воздействии на человека сигнала более 38°C (по результатам натурных испытаний эта температура была равна 38.4°C) человек действительно генерирует тепловой сигнал.

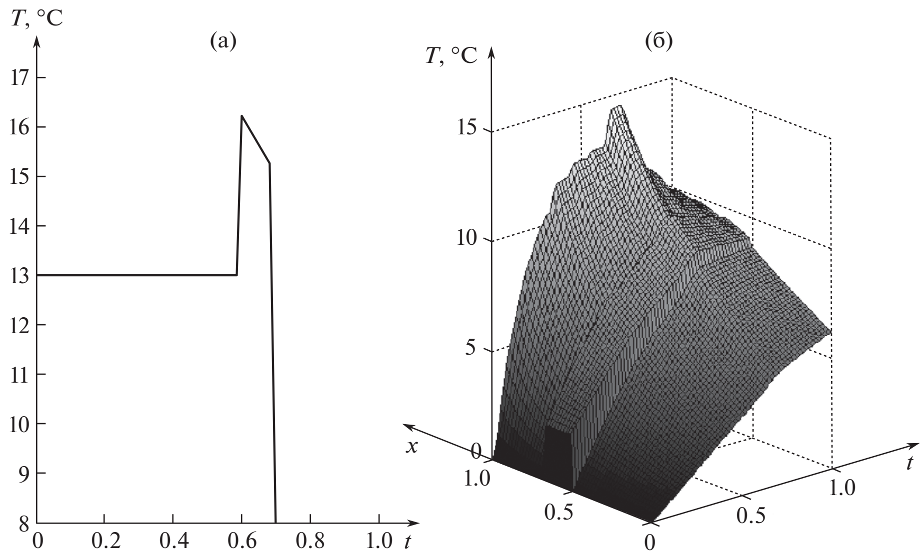

Рис. 3. Температурное распределение: (а) – модели сигнала, создаваемого человеком, отражающего, как генерацию тепла, так и рост теплоотдачи, при достаточном уровне теплового воздействия тканого электронагревателя; (б) – суммарный сигнал, распространяющейся в тепловой системе тонкой стенки, при воздействии сигнала типа (а).

Однако, сигнал, показанный на рис. 2а, в промежутке между тканым электронагревателем и телом, где обычно располагается термопара, не обеспечивает снижения уровня суммарной температуры, аналогичного снижению уровня температуры тела человека, полученному в результате натурных испытаний (рис. 1). Связано это с тем, что уровень подаваемого сигнала, при его снижении заканчивается на уровне начальной температуры тела человека ΔT_{ch1}. В этом случае, никаких дополнительных подключений подсистем, реагирующих на повышение внешних температур, за исключением уже включенного потовыделения, не происходит. Можно сделать вывод, что большее снижение температуры может происходить только при возникновении других реакций на повышение температуры в теле человека.

Теперь подадим на математическую тепловую модель сигнал, показанный на рис. 3а. Он представляет собой скачок температуры на поверхности тела человека от температуры ΔT_{ch1}, как и в предыдущем опыте, а, затем, более резкое снижение температуры до значений, лежащих ниже начальной температуры тела человека ΔT_{ch1}. Результат такого воздействия на тепловую систему, в виде суммарного теплового сигнала в тепловой системе, продемонстрирован на рис. 3б. Он достаточно точно совпадает с результатом натурных испытаний.

Таким образом, согласно проведенному моделированию был получен сигнал, приходящий со стороны человека, в котором нашли отражение две его тепловые реакции.

Первая реакция – подъем температуры за счет генерации тепла человеком.

Вторая реакция влечет за собой в области между тканым электронагревателем и телом изменение температуры от максимального значения до минимального значения, находящегося ниже начальной температуры человека ΔT_{ch1} (рис. 3а).

Именно эта часть теплового сигнала отражает изменения условий в тепловой системе, которые происходят благодаря включению других подсистем системы терморегуляции в нагреваемой области человека, способных обеспечить подобное снижение суммарной температуры в тепловой системе за счет повышения теплоотдачи. Согласно ранее проведенным исследованиям [10, 12, 13], к таким подсистемам системы терморегулирования относятся подсистемы, влияющие: на перераспределение крови в организме за счет сужения сосудов “ядра” и расширения сосудов “оболочки” тела; на увеличение объемной скорости кожного кровотока; на увеличение объема циркулирующей крови в подкожных кровеносных сосудах и т.д.

Выводы. Контактный метод нагрева ткаными электронагревателями тела человека при уровне температур свыше 38°C и длительном времени воздействия создает условия, при которых человек генерирует тепловой подъем и обеспечивает возможность не только измерения уровня этого теплового подъема, но и фиксации всего теплового процесса во времени.

Рост температуры тела человека за счет генерации тепла самим человеком в области температур, превышающих 38°C, проходящий под воздействием теплового сигнала тканого электронагревателя, является командой для включения дополнительных возможностей системы терморегуляции с целью компенсации избыточного внешнего теплового воздействия на человека для поддержания температурного гомеостаза. Об этом говорит и снижение температур, обусловленное включением терморегуляционных процессов, обеспечивающих повышение теплоотдачи.

Применение комбинированного метода с одновременным использованием, как математического моделирования, так и результатов натурных испытаний, позволило получить в дополнение к результатам натурных испытаний форму и количественные данные о тепловых изменениях, происходящих у человека, более точно отражающие происходящие физиологические процессы в области температур, превышающих 38°C.

Математическое моделирование процессов, происходящих в тепловой системе – тонкой стенке, позволяет избежать проблем при проведении натурных испытаний, связанных с небольшими габаритами тепловой системы и возможностью внесения искажений при измерениях.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nadel E.R., Horvath S.M., Dawson C.A., Tucker. A.* Sesivity to control and peripheral thermal stimulation in man // J. Appl. Physiol. 1970. V. 29. № 5. P. 603.
2. *Smith C.J., Havenith G.* Body mapping of sweating patterns in male athletes in mild exercise induced hyperthermia // Eur. J. Appl. Physiol. 2011. V. 111. P. 1391.
3. *Teunissen L.P.J., de Haan A., de Koning J.J., Daanen H.A.M.* Telemetry pill versus rectal and esophageal temperature during extreme rates of exercise-induced core temperature change // Physiol Meas. 2012. V. 33. P. 915.
4. *Byrne C., Lim C.L.* The ingestible telemetric body core temperature sensor: a review of validity and exercise applications // Br. J. Sports Med. 2007. V. 41. P. 126.
5. *Хижняк Л.Н., Хижняк Е.П., Маевский Е.И.* Возможность применения миниатюрных инфракрасных камер нового поколения в медицинской диагностики // Вестник новых медицинских технологий. 2018. Т. 25. № 4. С. 101.
6. *Лобанов А.А., Кочкин Р.А., Андронов С.В., Попов А.И., Протасова И.В., Лобанова Л.П., Бичкаева Ф.А., Богданова Е.Н., Кобелькова И.В.* Применение термографии лица и кистей рук для диагностики нарушений адаптации к условиям Арктики // Вестник новых медицинских технологий. 2019. № 4. С. 203.
7. *Pušnik I., Drnovšek J.* Infrared ear thermometers – parameters influencing their reading and accuracy // Physiol Meas. 2005. V. 26. P. 1075.
8. *Mitsui J., Akimaru T., Miyashita M.* Changes of body temperature at rest and during exercise in water // J. Free Access. 1982. V. 31. Iss. 3. P. 178.

9. *Иванов К.П., Минут-Сорохтина О.П., Майстрах Е.В.* Физиология терморегуляции. Л.: Наука,1984. 470 с.
10. *Morrison S.F., Nakamura K.* Central neural pathways for thermoregulation. Front Biosci // Landmark Ed. 2011. V. 1 (16). P. 74.
11. *Shul'zhenko A.A., Modestov M.B.* Temperature response of a person to a heat signal / Editors Z. Hu, S. Petoukhov, M. He / Advances in Artificial Systems for Medicine and Education book series // The Fourth International Conference of Artificial Intelligence, Medical Engineering, Education. 2020. V. 1126. P. 149.
12. *Hensel H.* Thermoreception and temperature regulation: Monographs of the Physiological Society. London: Academic Press. 1981. № 38. 321 p.
13. *Евтушенко А.А.* Функциональные изменения активности генов термочувствительных TRP ионных каналов при температурных воздействиях на организм в норме и при артериальной гипертензии: Дис. ... канд. биол. наук. Новосибирск: НИИФФМ. 2016. 160 с.
14. *Шульженко А.А., Модестов М.Б.* Моделирование тепловых процессов нагревательной системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 2. С. 116.

EDN: KWNKVK
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 84–92**

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 676.052

УЧЕТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ВСКИПАНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ УСТАНОВКИ ПАРОВОГО ВЗРЫВА

© 2022 г. **О. Р. Ганиев[1], И. Н. Гришняев[1,*]**

[1]Институт машиноведения им А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
**e-mail: iisi@inbox.ru*

Поступила в редакцию 27.04.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Описаны научные основы вскипания жидкости в установках парового взрыва. Показано, что для обеспечения детонационного режима вскипания установка должна обеспечивать относительную величину перегрева жидкости близкую к предельной и частоту зародышеобразования $>10^8$ м$^{-3}$ с$^{-1}$. Определены условия, при которых заданные значения можно реализовать. На их основе спроектирована и изготовлена установка парового взрыва. Проведены исследования по обработке лигниноцеллюлозного сырья на созданной установке, которые показали целесообразность предложенного подхода при проектировании установок парового взрыва.

Ключевые слова: обработка лигниноцеллюлозного сырья, установки парового взрыва, детонационный режим вскипания жидкости

DOI: 10.31857/S0235711922050054

Лигноцеллюлозное сырье (ЛЦС) (древесные опилки, отходы сельскохозяйственных культур и т.п.) является потенциальным материалом для производства сахаров, биоэтанола, химических веществ и композиционных материалов. Оно состоит из целлюлозной сети, встроенной в матрицу гемицеллюлозы/лигнина. Водородные связи и Ван-дер-ваальсовы силы между цепями целлюлозы приводят к кристаллической структуре. При этом лигнин и гемицеллюлоза в основном представляют собой аморфную фазу клеточной стенки растений [1].

В настоящее время для разрушения матрицы клеточной стенки растений, удаления или изменение структурных единиц лигнина и гемицеллюлозы с одновременным сохранением структуры целлюлозы используются физические, биологические, химические и физико-химические процессы, которые называют предобработкой ЛЦС.

Каждый из этих процессов обладает своими преимуществами и недостатками, однако общим для них является то, что любая версия предобработки остается самой дорогой стадией в процессе производства сахаров, биотоплива и химических веществ из лигноцеллюлозного сырья.

В последнее время большое развитие в предобработке ЛЦС получил метод физико-химической предобработки – взрывной дефибрации по декомпрессионному принципу (или паровой взрыв). Лигниноцеллюлозное сырье подвергают кратковременному воздействию перегретого пара под давлением (время – секунды/минуты, температура 200–300°C, давление 2.0–7.5 МПа) и далее давление сбрасывают, что вызывает паровой взрыв ЛЦС. Механический эффект резкого уменьшения давления приводит к разделению волокон вследствие взрывной декомпрессии. При таких условиях лигнин плавится, частично разрушается, прекращает взаимодействовать с целлюлозой, и выходит из структуры целлюлозы. Кроме того, под действием парового взрыва происходит гидролиз ацетильных групп гемицеллюлоз, что позволяет при продолжении процесса в том же реакторе, но при иных условиях (при температуре 180–220°C и давлении 0.2 МПа) добиться катализируемого уксусной кислотой гидролиза гемицеллюлоз. Поэтому процесс паровзрывной обработки ЛЦС получил название автогидролиз. Удаление лигнина и гемицеллюлоз очищает поверхность целлюлозного волокна и увеличивает доступ к ним гидролитических ферментов.

К достоинствам автогидролиза относится относительная нетребовательность к размеру частиц исходного сырья (в соответствии с [2] на измельчение и сортировку сырья уходит около трети всей энергии, затрачиваемой на процесс получения биотоплива), что, в совокупности с экологической безопасностью и отказом от энергоемкой химической предобработки, приводит к существенному выигрышу в стоимости процесса.

В настоящее время в литературе описано большое количество реализаций установок парового взрыва, однако отсутствуют данные учитываемые при их проектировании и изготовлении. Это затрудняет работу исследователям, которые впервые сталкиваются с такой задачей. В настоящей статье описаны физические основы, которые предлагается принимать к сведению при разработке установок парового взрыва, и показана реализация на конкретном примере.

Термодинамические условия вскипания жидкости при паровом взрыве. Для определения требований к вновь создаваемому оборудованию по паровому взрыву, рассмотрим физику происходящих процессов при паровом взрыве гемицеллюлозного сырья.

Главный вопрос, который необходимо решить при описании физических процессов, протекающих в реакторе при паровом взрыве – откуда берутся зародыши пара? Обычные их источники – загрязнения системы: растворенный в жидкости газ, газонасыщенные твердые частицы или участки стенок реактора, плохо смачиваемые включения, трещины и т.п. Образующиеся таким путем зародыши называются гетерогенными. Обнаружить их присутствие легко, но включить в систему физического описания процесса трудно, поскольку нет априорных данных о природе затравочных центров.

Экспериментально и теоретически показано: чем больше перегрев жидкости, тем за более короткий срок и под влиянием меньшего внешнего воздействия она теряет устойчивость и переходит в новое стабильное состояние. В качестве предельных (максимально достижимых) перегревов жидкости естественно принять такие, при которых любые бесконечно малые внешние воздействия переводят ее из метастабильного состояния в стабильное. Совокупность таких предельных состояний определяет границу термодинамической устойчивости – спинодаль [3].

Опыты показали, что достичь границы термодинамической устойчивости – спинодали, в настоящее время не удается. Достигнутые перегревы жидкости значительно меньше предсказываемых теорией, а их величины зависят от конкретных условий проведения эксперимента. Причиной преждевременного вскипания перегретой жидкости служит образование в ее объеме гетерогенных пузырьков пара критического размера (имеющих критический радиус кривизны $r_к$). Присутствие в жидкости пузырьков пара с радиусом больше критического $r > r_к$ приводит к ее последующему испарению в этот пузырек и переходу жидкости в новое стабильное состояние. Пузырьки пара с радиусом меньше критического захлопываются под действием сил поверхностного натяжения [3].

Максимального перегрева можно достичь при отсутствии в жидкости готовых (гетерогенных) центров кипения. Для исключения их влияния на вскипание перегретой жидкости можно сократить время нахождения жидкости в перегретом состоянии до значения, меньшего времени активации готовых центров кипения. В этом случае жидкость будет вскипать только на пузырьках пара, образующихся спонтанно. Для их образования также требуется время, и тем меньшее, чем выше перегрев жидкости.

Внутренняя причина гомогенного зародышеобразования (спонтанного) связана с флуктуациями при тепловом движении коллектива взаимодействующих частиц жидкости. Она определяется работой образования критического зародыша [3]

$$W^* = \frac{16\pi\sigma^3}{3\left(p_s - p'\right)^2\left(1 - \nu'/\nu''\right)^2}, \tag{1}$$

где σ, ν', ν'' – поверхностное натяжение и удельные объемы жидкости и газа; p_s – равновесное давление при данной температуре и плоской границе раздела. Одним штрихом здесь отмечены величины, относящиеся к жидкости двумя штрихами к пару. Теплофизические свойства для расчета берутся при заданных T и p'.

Формула (1) характеризует высоту барьера свободной энергии, который нужно преодолеть системе за счет флуктуаций. Из нее видно, что с увеличением перегрева жидкости этот барьер снижается (за счет факторов $(p_s - p')^2$, σ^3), следовательно, возрастает вероятность его преодоления. В этом смысле устойчивость жидкости по отношению к внешним воздействиям уменьшается.

Величину достижимого перегрева можно характеризовать флуктуационной частотой образования жизнеспособных зародышей паровой фазы в единице объема жидкости J, м$^{-3}$ с$^{-1}$.

Поскольку природа загрязняющих примесей, как правило, неизвестна и изменяется от одной порции жидкости к другой, то величина частоты J удовлетворительно воспроизводится только при высоких перегревах жидкости, когда числом зародышей новой фазы на готовых центрах кипения можно пренебречь, по сравнению с числом зародышей, образующихся флуктуационно. Опыты показали, что для большинства случаев такая ситуация наступает при общей частоте зародышеобразования $J > 10^8$ м$^{-3}$ с$^{-1}$. Теория флуктуационного зародышеобразования и эксперимент показали, что дальнейшее увеличение J на несколько порядков приводит к дополнительному перегреву не более чем на 5–10%. Поэтому часто за величину максимально достижимого перегрева принимают перегрев, соответствующий частоте зародышеобразования J, равной 10^8–10^{10} м$^{-3}$ с$^{-1}$ [3].

Величина J определяется следующим выражением [3]

$$J = N_1 B \exp\left(-G\right), \tag{2}$$

где $N_1 = 10^{28}$ м$^{-3}$ – число молекул в единице объема жидкости; B – кинетический множитель; $G = \dfrac{W^*}{kT}$ – число Гиббса.

Кинетический множитель B в выражении (2) учитывает динамику роста пузырька. Различные варианты теории гомогенного зародышеобразования отличаются в основном оценкой этого множителя.

В работе [4] для случая стационарного зародышеобразования получено выражение для кинетического множителя

$$B = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kT}{\sigma}}\left(\frac{d\dot{n}}{dr}\right)_*. \tag{3}$$

Все величины в этой формуле берутся при температуре перегретой жидкости. В (3) член $\left(\dfrac{d\dot{n}}{dr}\right)_*$ означает уравнение движения растущего пузырька и скорости изменения числа молекул в пузырьке. В [4] приведено значение для кинетического множителя $B \approx 10^{10}$ с$^{-1}$. Выражение (3) используется для расчета достигаемого перегрева жидкости $T_п$.

Параметры N_1, B мало изменяются с ростом перенасыщения, а в основном меняется $\exp(-G)$. Поэтому для оценок J можно использовать упрощенную формулу [4]

$$\ln J = 88 - G. \tag{4}$$

Подогрев стенок реактора, а также слой пара над обрабатываемым целлюлозным материалом снижают теплоотвод от жидкости и способствуют росту перегрева жидкости и снижению ее прочности.

Перегрев при взрывном автогидролизе создается сбросом давления от значения p_0, равного или превышающего давление насыщенных паров p_s при заданной температуре T, до давления, которое ниже p_s. Спад давления приводит к глубокому заходу жидкости в метастабильное состояние.

При этом жидкость, стремящаяся перейти в стабильное состояние, может остаться в однофазном или перейти в двухфазное парожидкостное состояние. Распад перегретой жидкости на две фазы сопровождается резким изменением давления, температуры и ее скорости. Особым свойством перегретой жидкости можно считать цепную (лавинообразную) активацию низкотемпературных центров кипения, что приводит к взрывному вскипанию жидкости.

Характер вскипания изменяется в зависимости от относительной величины перегрева [3]

$$\varepsilon = \frac{(T - T_s)}{T_n - T_s}, \tag{5}$$

где T, T_s, T_n – температуры жидкости, ее насыщенных паров и предельного (достижимого) перегрева.

При малых перегревах, когда $\varepsilon \ll 1$, обычно наблюдают кипение на отдельных центрах (гетерогенных); в этом случае в парожидкостную смесь превращается малая часть перегретой жидкости, непосредственно прилегающая к центрам кипения.

При перегревах близких к предельным $(\varepsilon \approx 1)$ вскипание носит взрывной характер, а в парожидкостную смесь превращается весь объем перегретой жидкости. В этом случае говорят о детонационном вскипании жидкости. Под ним понимают лавинообразное образование центров кипения в объеме перегретой жидкости и последующее быстрое ее испарение.

Рассмотрим характерные времена процессов при вскипании жидкости. Выделим два вида течения процесса. В первом случае превалирующим является вскипание жидкости на гетерогенных центрах кипения. Во втором – преобладают процессы гомогенного вскипания.

Характерное время вскипания на готовых центрах $\tau_{\text{гет}}$ можно оценить из соотношения [5]

$$\frac{3}{4}\pi\Omega\Psi^3\tau_{\text{гет}}^{3\alpha} \approx 1, \tag{6}$$

где Ω – эффективное число гетерогенных центров в единице объема жидкости; Ψ – функция теплофизических параметров и перегрева жидкости, определяемая выражением

$$\Psi = \frac{2}{\rho'' L}\sqrt{\lambda' c' \rho'}\,(T - T_s),$$

где $\rho' = 1/v'$ – плотность; λ' – коэффициент теплопроводности; c' – теплоемкость на метастабильном участке изобары; L – удельная теплота испарения при заданном давлении.

Обозначим T_* температуру перегретой жидкости, при которой с большой скоростью идет гомогенное зародышеобразование. Эта температура в системах со сбросом давления определяется температурой в реакторе в момент открытия клапана. Она может быть равна равновесной температуре T_s системы “жидкость–пар” в этот момент, либо достигать максимальной температуры перегрева T_n для данного давления. При открытии запорного клапана температура в реакторе стремится к температуре внешней среды. В этом случае температура в объеме реактора убывает со скоростью $\dot{T}$ и достигает температуры насыщения T_s для давления внешней среды за время

$$\tau_* = \frac{\left(T_* - T_s\right)}{\dot{T}}. \tag{7}$$

Необходимое условие для преобладания механизма гомогенного зародышеобразования в присутствии готовых центров формулируется как [5]

$$\tau_{\text{гет}}/\tau_* \gg 1.$$

Подставляя в это выражение значения входящих параметров, взятых из формул (6) и (7) получим [5]

$$\left(\frac{3}{4\pi\Omega\left\langle\Psi^3\right\rangle}\right)^{\frac{1}{3\alpha}} \frac{\dot{T}}{\left(T_* - T_s\right)} \gg 1. \tag{8}$$

Неравенство (8) позволяет оценить необходимую скорость изменения температуры и перевода жидкости в глубокое метастабильное состояние. При паровом взрыве эта скорость пропорциональна скорости сброса давления. Поэтому формулу (8) можно использовать для оценки необходимой скорости декомпрессии реактора.

При разгерметизации расширяющийся пар в реакторе увеличивается в объеме за счет перехода в это фазовое состояние метастабильной жидкости. При выходе из реактора, пар создает волну разряжения, его энергия расширения частично затрачивается на выталкивание материала, оставшаяся часть энергии находится в самом паре в виде тепла.

Изменение давления как внутри лигниноцеллюлозного сырья, так и в реакторе будет зависеть от скорости снижения давления, которая определяется площадью проходного сечения клапана и скоростью изменения этого сечения при открытии клапана. Рассмотрев уравнение неразрывности [6] применительно к реактору, можно записать, что расходы пара при сбросе давления до и после клапана одинаковы, т.е.

$$v_{\text{реак}} S_{\text{реак}} = v_{\text{п.ср}} S_{\text{к}}, \tag{9}$$

где $v_{\text{реак}}$ – скорость пара в реакторе при декомпрессии; $S_{\text{реак}}$ – площадь внутреннего сечения реактора; $v_{\text{п.ср}}$ – средняя скорость пара через клапан; $S_{\text{к}}$ – площадь внутреннего сечения выходного клапана.

Используя уравнение Бернулли, запишем для реактора [7]

$$p_0 - p_{\text{кон}} = \xi \frac{\rho_n v_{\text{реак}}^2}{2}. \tag{10}$$

Выразив из (9) $v_{\text{реак}}$ и подставив его в (10) найдем выражение для определения сечения сбросного клапана [8]

$$S_{\text{к}} = \frac{S_{\text{реак}}}{v_{\text{п.ср}}} \sqrt{\frac{2\left(p_0 - p_{\text{кон}}\right)\nu''}{\xi}}, \tag{11}$$

Таблица 1. Основные параметры работы установки парового взрыва

$P_{\text{реак}}$, МПа	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
T_s, °C	212.4	223.9	233.8	250.3	263.9	275.6	285.8
T_n, °C	310	312	313	315	320	324	328
$\nu' \times 10^{-3}$, м^3/кг	1.1766	1.1972	1.2163	1.2521	1.2858	1.3187	1.3514
ν'', м^3/кг	0.0995	0.0799	0.0666	0.0495	0.0394	0.0324	0.0273
$\nu \times 10^{-3}$, м^3/кг	1.1725	1.1897	1.2084	1.2512	1.2750	1.3013	1.3307
c_p, кДж/(кг К)	4.550	4.612	4.684	4.868	4.979	5.115	5.280
$\sigma \times 10^{-3}$, н/м	34.98	31.85	30.14	26.05	22.69	21.35	17.21
$J \times 10^8$, м$^{-3}$с$^{-1}$	7.24	7.24	7.24	7.24	9.77	9.77	9.77
ε	0.75	0.83	0.89	1.0	1.0	1.0	1.0
$d_{\text{к}}$, мм	17.7	16.8	16.0	14.9	14.0	13.4	12.8

где ξ – коэффициент гидравлического сопротивления, зависящий от конструкции клапана.

На основе приведенной теории гомогенного зародышеобразования сформулируем основные требования к параметрам парового взрыва: **1)** обеспечение относительной величины перегрева жидкости близкой к предельной $\varepsilon \approx 1$; **2)** обеспечение частоты зародышеобразования $>J \sim 10^8$ м$^{-3}$ с$^{-1}$.

Проектирование лабораторной установки парового взрыва. Рассмотрим возможность выполнения указанных требований на основе стандартного автоклава (реактора), имеющего: рабочий объем $V_{\text{реак}} = 0.0015$ м^3 (диаметр 0.1 м и высоту 0.2 м); рабочую температура 200–300°С; рабочее давление 0.1–10.0 МПа.

Примем во внимание: **1)** по объемной плотности гетерогенных центров данных мало, поэтому при больших перегревах обычно предполагают, что величина гомогенных центров парообразования растет намного круче, чем Ω и в качестве времени их роста берут малую долю времени $\tau_{\text{гет}}$, например, $\tau_{\text{гом}} = 0.01\tau_{\text{гет}}$ [3]; **2)** вскипание жидкости при соблюдении условия (8) не только с сильным, но и со слабым знаком неравенства называется взрывным вскипанием. Этот режим соответствует температурам $T \geq T_{\text{рав}}$, где при $T_{\text{рав}}$ достигается равенство гетерогенных и гомогенных центров парообразования $J\tau_{\text{гом}} = \Omega$; **3)** давление в реакторе перед открытием сбросного клапана равно равновесному для данной температуры; **4)** давление внешней среды равно атмосферному, температура 20°С.

Введем допущение о том, что время роста гомогенных центров парообразования $\tau_{\text{гом}}$ совпадает со временем декомпрессии реактора $\tau_{\text{д}}$.

Определим условия, при которых заданные требования к паровому взрыву будут реализовываться. Рассчитанные параметры работы установки на основе справочных данных, приведенных в [5, 9], сведены в табл. 1.

На основе полученных данных можно сделать следующие выводы: **1)** установка с заданными исходными параметрами обеспечивает детонационный режим вскипания жидкости во всем рассмотренном диапазоне давлений и температур; **2)** для обеспечения оптимальных условий детонационного вскипания жидкости ее температура в момент начала декомпрессии должна быть равна равновесной температуре для данного давления; **3)** увеличение температуры перегрева жидкости перед декомпрессией, более равновесной, приводит к ухудшению выполнения условия (8), так как возрас-

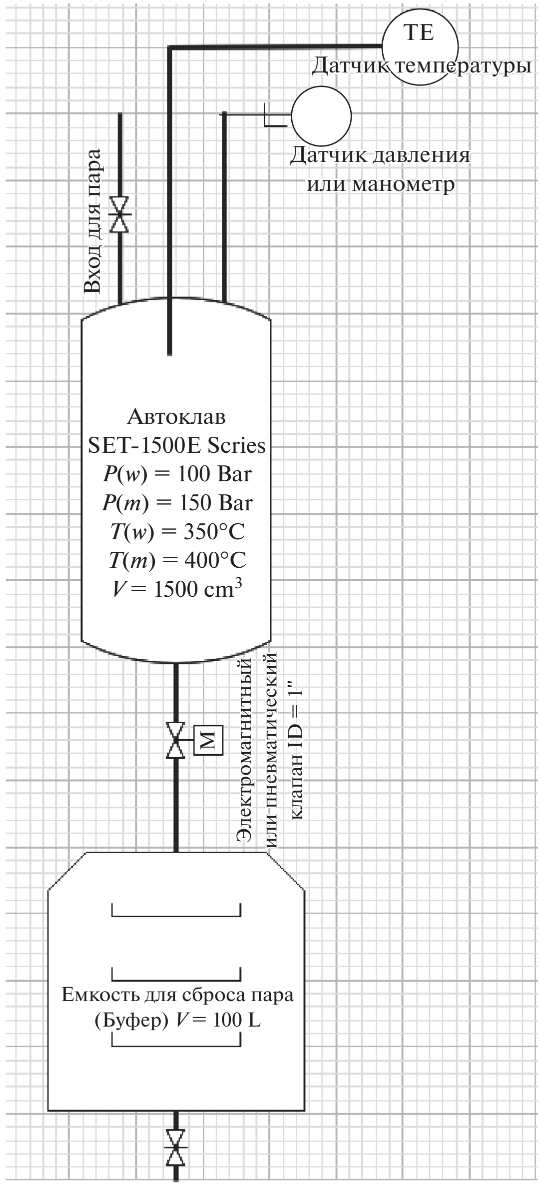

Рис. 1. Гидравлическая схема установки взрывного автогидролиза ЛЦС.

тают функции теплофизических параметров и перегрева жидкости Ψ и в соответствии с (6) уменьшается $\tau_{\text{гет}}$; **4)** диаметр проходного сечения сбросного клапана должен быть >17.7 мм.

Для проектирования лабораторной установки парового взрыва были заданы следующие исходные данные: 1) диаметр реактора 0.1 м; 2) высота реактора 0.2 м; 3) рабочее давление (с учетом запаса прочности) 10 МПа; 4) рабочая температура 250°C; 5) диаметр проходного сечения клапана сброса давления 0.02 м.

Рис. 2. Фотографии древесной стружки после автогидролиза при 220°C, 2.3 МПа, 1 мин.

С учетом этих данных спроектирована и изготовлена установка парового взрыва, гидравлическая схема которой приведена на рис. 1.

Особенностью установки является специальная конструкция быстродействующего электромагнитного клапана (Dy = 1.5″), обеспечивающая выполнение условий неравенства (8). Ключевое значение имеет скорость открытия, которая обеспечивает высокую скорость распространения фронта волны разряжения давления в реакторе и, соответственно, перепад давления. Скорость открытия клапана при давлении пара в реакторе 25–30 атм. составляет величину порядка 20 мс.

Примеры экспериментальных исследований на лабораторной установке. Работы на лабораторной установке осуществлялись следующим образом. Рабочая емкость установки автогидролиза прогревалась до температуры 90°C. Навеска обрабатываемого материала (50 г по с.в. для опилок/стружки и 30 г для соломы) загружалась в сетчатый металлический контейнер (для исключения контакта ЛЦС с горячей стенкой реактора и равномерности прогрева и насыщения паром). Контейнер размещался в реакторе. Далее реактор герметизировался и осуществлялась подача насыщенного пара.

Управление открытием сбросного клапана и регистрация параметров обработки (время, температура, давление) осуществлялось программным комплексом на персональном компьютере.

Обработка осуществлялась при следующих характерных термобарических условиях (насыщенный водяной пар): 180°C, 10 атм.; 200°C, 15 атм; 220°C, 23 атм; 234°C, 30 бар и времени выдержки одна и три минуты.

Автогидролизованная масса выстреливалась в приемный бункер. По завершению процесса обработки отбирались образцы материала из приемного бункера и реакционной камеры. Полученные образцы направлялись на дальнейшую обработку (делигнификацию) и ферментативный гидролиз.

На рис. 2 представлены фотографии обработанной паровзрывным способом древесной стружки.

Средний геометрический размер частиц, например, соломы мискантуса, после парового автогидролиза составил 108.9 мкм, удельная поверхность с учетом фактора формы частиц 2727 см^2/г.

С увеличением температуры, давления и времени обработки образцы автогидролизного сырья существенно изменяют свои физико-механические характеристики.

Увеличивается степень дисперсности и разволокненности ЛЦС, материал становится менее прочным, приобретает темную окраску.

Заключение. В статье на основе теории гомогенного зародышеобразования показано, что для обеспечения эффективной работы установки парового взрыва в реакторе должны быть созданы следующие термодинамические условия: величина перегрева жидкости близкая к предельной $\varepsilon \approx 1$ и частота зародышеобразования $J \geq 10^8$ м$^{-3}$ с$^{-1}$. Для достижения этих параметров в конструкции установки необходимо обеспечить определенные пропорции между ее объемом, проходным сечением клапана и скоростью его открытия. Последний параметр реализует время декомпрессии, необходимое для перевода жидкости в глубокое метастабильное состояние и детонационный режим ее вскипания.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fengel D., Wegener G.* Wood: Chemistry, Ultrastructure, Reactions. Walter de Gruyter, 1984. P. 1960.
2. *Hamelinck C.N., van Hooijdonk G., Faaij A.P.C.* Ethanol from lignocellulosic biomass: techno-economic performance in short-, middle- and long-term // Biomass Bioenergy. 2005. V. 28. P. 384.
3. *Накоряков Е.В., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 842 с.
5. *Скрипов В.П., Синицын Е.Н., Павлов П.А., Ермаков Г.В., Муратов Г.Н., Буланов Н.В., Байдаков В.Г.* Теплофизические свойства жидкостей в метастабильном состоянии. Справочник. М.: Атомиздат, 1980. 208 с.
6. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: ГНТИХЛ, 1961.
7. *Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П.* Справочник по теплогидравлическим расчетам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы) / Под общ. ред. П.Л. Кириллова. М.: Энергоатомиздат, 1990. 360 с.
8. *Просвирников Д.Б., Сафин Р.Г., Садртдинов А.Р.* Технология паровзрывной обработки лигноцеллюлозных материалов: Монография. Казань: Изд-во КНИТУ, 2015. 140 с.
9. *Ривкин С.Л., Александров А.А.* Термодинамические свойства воды и водяного пара. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1984. 80 с.

EDN: RZWYYJ
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 5, с. 93–98

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 621.891

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НАГРЕВА СМАЗОЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТРЕНИИ

© 2022 г.
А. Ю. Албагачиев[1], А. Н. Михеев[1], М. А. Тананов[1], А. Б. Тохметова[1],*

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: aygerim.tokhmetova@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.
После доработки 15.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В статье рассмотрены экспериментальные и теоретические исследования температуры нагрева смазочного слоя между трущимися поверхностями. Экспериментальное исследование определения температуры смазочного слоя выполнялось на универсальной машине трения УМТ-1.

Ключевые слова: моторное масло, температура смазочного слоя, коэффициент трения

DOI: 10.31857/S0235711922050029

Проблема повышения надежности и долговечности узлов трения в машинах всегда была серьезной проблемой в современной инженерии [1–6]. При трении 85–90% механической энергии превращается в теплоту [7–9]. Главным фактором для оценки работоспособности узлов трения является температурное состояние фрикционного контакта. Теплота, генерируемая в зоне контакта, распределяется между сопряженными телами и окружающей средой [10]. Целью исследования является определение температуры нагрева зоны контакта твердых тел при трении.

Материалы и методы. Трибологические испытания проводились на универсальной машине трения УМТ-1 (рис. 1) [11]. Объектом исследования является моторное масло Mobil Ultra 10W-40. В качестве образцов в виде колец с наружным диаметром 28 мм, внутренним диаметром 20 мм, высотой 15 мм (рис. 2) использовались латунь и нержавеющая сталь 12Х18Н10Т.

В торце неподвижного образца были просверлены два отверстия диаметром 2 мм для датчиков температуры и давления. Нормальная сила, приложенная к неподвижному образцу, составляла 200–500 Н. Полость, между образцами, была заполнена смазкой.

Регистрация и обработка экспериментальных данных проводилась с использованием измерительной системы, состоящей из датчика температуры, датчика частоты вращения шпинделя и микроконтроллера, данные которых отражались в персональном компьютере (ПЭВМ) (рис. 3).

Вычисления действительного значения температуры проводили при помощи микроконтроллера с использованием данных от инфракрасного датчика, датчика температуры корпуса измерителя и тарировочных таблиц, записанных в постоянной памяти (ПЗУ). Значения температуры и частоты вращения с метками времени передаются на компьютер, где обрабатываются программой составленной в среде LabView.

Для измерения температуры слоя смазки, независимо от температур образцов, применен инфракрасный бесконтактный измеритель температуры на основе датчика

Рис. 1. Универсальная машина трения УМТ-1.

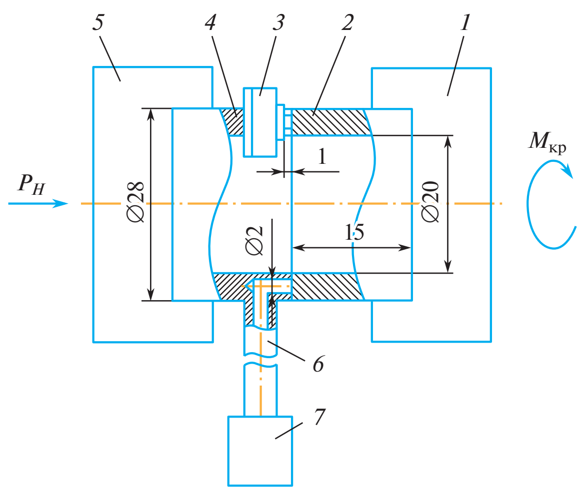

Рис. 2. Схема расположения образцов и датчиков: *1* – вращающийся патрон УМТ; *2* – вращающийся образец, нержавеющая сталь; *3* – инфракрасный датчик температуры MLX90614; *4* – неподвижный образец, латунь; *5* – неподвижный патрон УМТ; *6* – трубка для измерения давления смазки; *7* – датчик давления смазки.

Рис. 3. Система сбора данных.

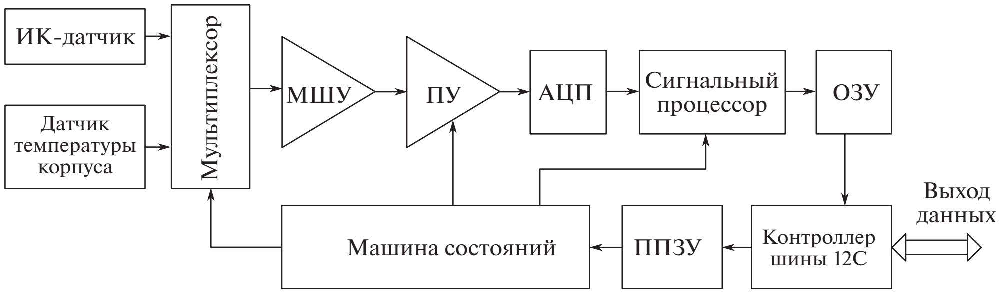

Рис. 4. Блок-схема измерителя температуры: МШУ – малошумящий усилитель; ПУ – усилитель с программируемым коэффициентом усиления; АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ППЗУ – перепрограммируемое постоянное запоминающее устройство; ОЗУ – оперативное запоминающее устройство.

MLX90614 с оптической системой. Блок-схема измерителя температуры приведена на рис. 4.

Бесконтактный измеритель температуры содержит два датчика: инфракрасный датчик теплового излучения (полупроводниковый болометр) и датчик температуры корпуса (терморезистор).

Работа измерителя контролируется внутренней машиной состояния реализованной по принципу конечного автомата, которая управляет процессом измерения и расчетами температуры объекта и корпуса, а также выполняет постобработку температур для вывода их через цифровой интерфейс I2C. Выходной сигнал ИК-датчика усиливается малошумящим усилителем и усилителем с программируемым коэффициентом усиления, преобразуется в сигма-дельта аналого-цифровым преобразователем и подается на сигнальный процессор для дальнейшей обработки. Сигнал обрабатывается программируемыми фильтрами нижних и верхних частот для дальнейшего уменьшения ширины полосы входного сигнала для достижения минимального уровня шума и заданной частоты обновления. На основании результатов измерений рассчитываются соответствующая температура корпуса прибора и температура объекта.

Оптическая система измерителя температуры показана на рис. 5 и состоит из линзы *1*, фокусирующей тепловое излучение на инфракрасном датчике *3*, и диафрагмы *2*, формирующей диаграмму направленности. На одном основании с инфракрасным датчиком размещен датчик температуры корпуса *4*.

Испытание смазочного материала проводилось при нагрузках 200 и 500 Н, с частотой вращения 100, 500, 1000 об/мин. Показания считывались и записывались в память с периодом 0.01 с.

Для каждого режима длительность испытания составляла 5 минут. Измерения проводились в интервале 1 мин в конце испытания (табл. 1). Частота вращения образца n составляла 100, 500, 1000 об/мин.

Коэффициент трения определялся по измеренному моменту трения и приложенной нагрузке. Силу трения рассчитывали по среднему диаметру образца 24 мм. Таким образом, коэффициент трения равен: $k = \dfrac{M \times 2 \times 1000}{24N}$, где M – момент трения, Н · м; N – нагрузка, Н. Площадь кольцевого образца A с наружным диаметром 28 мм и внутренним диаметром 20 мм составляет 3×10^{-4} м^3.

Теплофизические свойства неподвижного образца, изготовленного из латуни ЛС-59 составляют [12]: теплопроводность $\lambda_1 = 22.68\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м °C}}$, произведение теплоемкости и

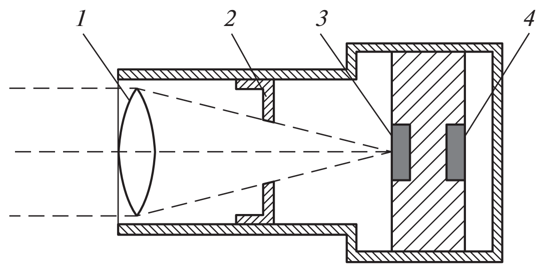

Рис. 5. Оптическая система измерителя температуры. Обозначения на рисунке: *1* – линза; *2* – диафрагма; *3* – инфракрасный датчик; *4* – датчик температуры корпуса.

плотности $c_1\rho_1 = 4.536\times10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\ {}^\circ\text{C}}$, вращающегося образца изготовленного из коррозионно-стойкой стали 12Х18Н10Т: $\lambda_2 = 126.84\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\ {}^\circ\text{C}}$, $c_2\rho_2 = 4.074\times10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\ {}^\circ\text{C}}$.

Для вычисления температуры нагрева смазочного слоя выведена формула

$$\theta = \frac{fNV\sqrt{t}}{1.73A\left(\sqrt{\lambda_1 C_1\rho_1} + \sqrt{\lambda_2 C_2\rho_2}\right)}, \tag{1}$$

где θ – температура, °C; f – коэффициент трения; N – нормальная нагрузка, Н; V – линейная скорость вращающегося образца, м/с; t – время, с.

Таблица 1. Экспериментальные данные измерения температуры смазочного слоя

№	Нагрузка, Н	Частота вращения, об/мин	Момент трения по динамометру, Н · м	Температура по ИК-датчику, °С
1	200	100	0.60	30.5
2	200	500	0.36	38.6
3	200	1000	0.32	59.0
4	500	100	0.73	48.0
5	500	500	0.41	138.0
6	500	1000	0.28	210.0

Таблица 2. Расчетные данные изменения температуры смазочного слоя

№	Нагрузка, Н	Частота вращения, об/мин	Линейная скорость вращающейся поверхности, м/с	Коэффициент трения	Температура смазочного слоя с учетом комнатной температуры, °С
1	200	100	0.125	0.250	26.345
2	200	500	0.628	0.150	39.125
3	200	1000	1.250	0.133	53.754
4	500	100	0.125	0.122	27.741
5	500	500	0.628	0.068	41.675
6	500	1000	1.250	0.047	49.820

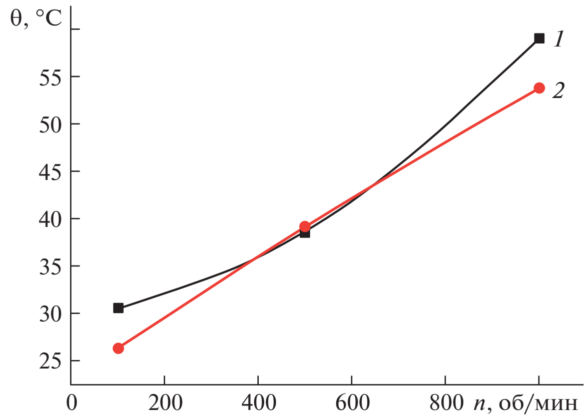

Рис. 6. Зависимость температуры смазочного слоя от частоты вращения при постоянной нагрузке 200 Н: *1* – экспериментальные исследования; *2* – теоретические исследования.

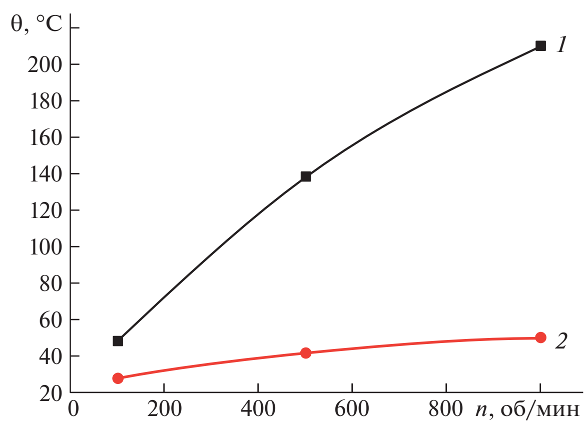

Рис. 7. Зависимость температуры смазочного слоя от частоты вращения при постоянной нагрузке 500 Н: *1* – экспериментальные исследования; *2* – теоретические исследования.

В табл. 2 показано изменение температуры смазочного слоя между сопряженными поверхностями в зависимости от коэффициента трения и теплофизических свойств металлов при линейной скорости вращения (0.125; 0.628 и 1.25 м/с).

По результатам исследования (рис. 6, 7) с увеличением частоты вращения от 100 до 1000 об/мин температура смазочного слоя возрастает от 30 до 210°С (является закономерным).

Как видно из полученных данных (рис. 7), при нагрузке 500 Н экспериментальные значения сильно отличаются от теоретических.

Корреляция экспериментальных и расчетных данных наблюдается при нормальной нагрузке 200 Н и нарушается при нагрузке 500 Н. Из этого следует, что данная формула применима для расчета при нагрузке 200 Н, а при нагрузке 500 Н она нуждается в дальнейшей корректировке, связанной с учетом температуры смазочного слоя во времени и распределением тепловых потоков между смазкой и металлическими образцами.

Выводы. Из анализа экспериментальных данных следует, что температура нагрева смазочного слоя между трущимися поверхностями увеличивается с ростом нормальной нагрузки и частоты вращения образца. Предложен аналитический метод расчета температуры смазочного слоя между трущимися поверхностями. В результате сравнения теоретических и экспериментальных данных температуры нагрева смазочного слоя установлено их соответствие при нагрузке 200 Н.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трение, изнашивание и смазка: Справочник / Под общ. ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. В 2 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Чичинадзе А.В.* Трение, износ и смазка (трибология и триботехника). М.: Машиностроение, 2003. 576 с.
3. *Persson B.N.J., Tosatti E.* Physics of Sliding friction. Kluwer, Dordrecht 1996, 460 p.
4. *Чичинадзе А.В., Берлинер Э.М., Браун Э.Д.* Трение, износ и смазка. Трибология и триботехника / Под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Машиностроение, 2003. 576 с.
5. *Bowden F.P., Tabor D.* The Friction and Lubrication of Solids. Oxford: Clarendon Press, 2001.
6. *Persson B.N.J.* Sliding Friction. Physical Principles and Applications. Springer, 2002.
7. *Rabinowicz E.* Friction and wear of materials. 2nd ed. John Wiley & Sons, inc., 1995. 315 p.
8. *Мышкин Н.К., Петроковец М.И.* Трение, износ, смазка. Физические основы и технические приложения трибологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.
9. *Попов В.А., Попов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения: от нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 350 с.
10. *Резников А.Н.* Тепловые процессы в технологических системах. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
11. Справочник по триботехнике / Под общ. ред. М. Хедбы, А.В. Чичинадзе. В 3 т. Т. 1. Теоретическиеосновы. М.: Машиностроение, 1989.
12. *Albagachiev A.Yu., Novikova N.N., Tokhmetova A.B.* Tribotechnical Characteristics of Nanomodifier 1 // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. V. 49 (5). P. 457.

EDN: EKRAYA
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН **2022, № 5, с. 99–104**

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 620.178.162

ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗНАШИВАНИЯ ЭПОКСИДНОГО СОСТАВА В НЕЗАКРЕПЛЕННОМ АБРАЗИВЕ ПРИ НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

© 2022 г.
А. М. Михальченков[1], И. Н. Кравченко[2,*], С. А. Феськов[1], М. В. Семышев[1], С. А. Величко[3], О. В. Бармина[2], Е. В. Байдакова[1]

[1]*Брянский государственный аграрный университет, с. Кокино, Выгоничский район, Брянская область, Россия*

[2]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

[3]*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Мордовия, Россия*

**e-mail: kravchenko-in71@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
После доработки 15.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В статье установлена зависимость абразивного износа при незначительных ударных воздействиях в функции времени испытаний, которая имеет прямолинейный характер. Изменение интенсивности износа во времени соответствует эффекту самоорганизации процесса изнашивания.

Ключевые слова: износ, интенсивность изнашивания, незакрепленный абразив, ускоренные испытания, время изнашивания, самоорганизация износа

DOI: 10.31857/S0235711922050108

Использование эпоксидных составов привело к созданию технологий, оказавших значительное влияние на развитие различных отраслей промышленности [1–3]. Материалы на основе эпоксидных смол имеют важное значение при использовании их в виде защитных покрытий рабочих поверхностей. В то же время в отношении поведения таких составов при абразивном изнашивании высокой интенсивности с незначительными ударными воздействиями сведения немногочисленны, отрывочны и порой противоречивы [4, 5], что сдерживает применение этих полимерных самотвердеющих материалов и композитов на их основе.

Поэтому проведение исследований на изнашивание необходимо, т.к. использование композиционных покрытий с различными наполнителями и составом открывают более широкие перспективы в области повышения долговечности деталей, эксплуатирующихся в абразивной среде [6, 7].

Постановка задачи. Необходимо выявить влияние скорости перемещения образца из эпоксидного состава на интенсивность изнашивания и определить минимально возможное время испытаний в заданной абразивной среде с обеспечением достоверности опытных данных при проведении ускоренных испытаний. Исследовался характер износа Δh и интенсивность изнашивания i во времени T при различных скоростях V перемещения образца; изменение i в функции, а также влияние скорости перемещения на время испытаний.

Рис. 1. Общий вид испытательного устройства: *1* – образец со сформированными покрытиями; *2* – абразивный материал; *3* – емкость; *4* – станина станка; *5* – шпиндель станка; *6* – оправка.

Материалы и методика испытаний. При проведении исследований применялся состав из эпоксидной смолы ЭД-20 (100 частей) и полиэтиленполиамин (отвердитель) (7 частей) [8, 9]. Абразивной средой служила смесь из строительного песка и гранитной крошки в процентном соотношении 70/30. Средние размеры частиц песка 0.21 мм; гранитных включений – 9.2 мм. Выбор изнашивающей субстанции основывался на факте наличия гравиевидных включений в грунтах. Объем абразивной среды находящийся в емкости, представляющей собой усеченный конус, составил 0.02 м^3. Испытания проводились на установке собственной конструкции (рис. 1), где на обойме *1* формируются образцы одинакового состава с целью обеспечения достоверности испытаний. При этом соблюдается идентичность испытаний для всех четырех образцов в любой момент времени. Перемещение обойме задается вращением при помощи сверлильного станка с различными числами оборотов n: 500 мин$^{-1}$; 710 мин$^{-1}$; 1000 мин$^{-1}$. Опытным путем можно установить частоту вращения образцов, обеспечивающую минимальное время проведения испытаний. Контроль износа осуществлялся известным методом “лунок”.

Результаты эксперимента и их обсуждение. Как следует из полученных графиков (рис. 2), нарастание износа происходит по прямой для всех n, т.е. характер его протекания примерно одинаков независимо от изменения скорости перемещения обоймы. Подобное явление отмечалось в работе [10] и подтверждено теоретически. Однако проведенные ранее исследования относятся к апробации на металлических сплавах и осуществлялись как реальный эксперимент непосредственно в полевых условиях. Полученные зависимости указывают на общность процессов износа в абразивной среде, как для металлических сплавов, так и для полимеров. Хотя изнашивание подчиняется единому закону ($\Delta h = kT$), коэффициент k может регламентироваться различными факторами (скоростью перемещения тела, абразивностью среды, состоянием изучае-

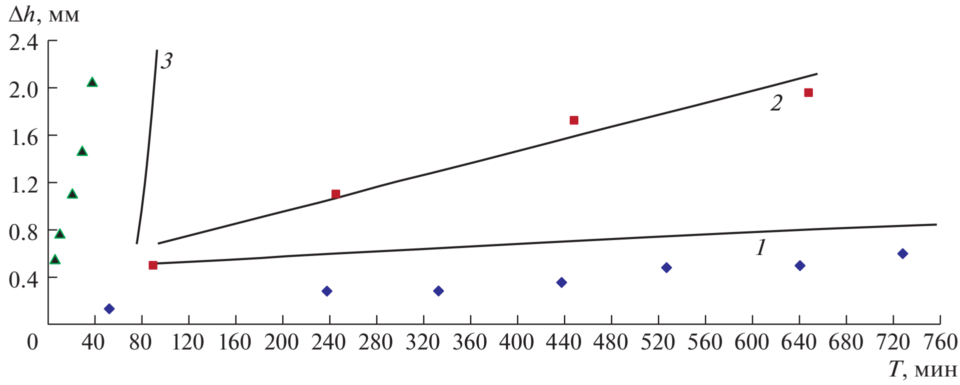

Рис. 2. Характер износа эпоксидного компаунда во времени при различных скоростях перемещения опытных образцов: *1* – n = 500 мин$^{-1}$; *2* – n = 710 мин$^{-1}$; *3* – n = 1000 мин$^{-1}$.

мого материала), либо их совокупностью. В рассматриваемом эксперименте составы изнашивающей среды и опытного полимера оставались постоянными; изменялась только скорость перемещения исследуемого тела.

Увеличение n приводит к сокращению T. Время испытаний, равное 640 мин, обеспечивает износы 0.45 мм и около 2.0 мм для числа оборотов 500 мин$^{-1}$ и 710 мин$^{-1}$ соответственно. В свою очередь при n = 1000 мин$^{-1}$ Δh = 2 мм достигается в течение 40 минут. Величину Δh, составляющую 2 мм при 500 мин$^{-1}$, можно получить за чрезмерно большой промежуток времени, что никак не укладывается в понятие "ускоренные испытания".

Построение графика зависимости времени испытаний от числа оборотов для износа Δh = 0.6 показывает резкое снижение T в диапазоне n = 500–800 мин$^{-1}$, затем процесс износа можно считать стационарным (установившимся), малозависящим от изменения скорости перемещения (рис. 3). Износ в 0.6 мм выбирался исходя из реальных условий испытаний – при n = 500 мин$^{-1}$ эта величина достигает максимального значения, дальнейшее же проведение испытаний с таким n теряет целесообразность. Кроме того, при этом Δh во всех случаях имеет место окончания приработки.

Таким образом, проведение ускоренных испытаний для подобной изнашивающей среды определяется числом оборотов образца 1000 мин$^{-1}$ и временем проведения, составляющим 20 минут.

Показателем, более полно характеризующим изнашивание, является его интенсивность i, т.к. не зависит от параметров испытаний в конкретных условиях. Характер кривых имеет две ярко выраженные области (рис. 4).

Первая область *1* – область приработки образца и вторая *2* – истирание образца при фактически полной совместимости абразивной среды и поверхности испытуемого тела. Принято считать i величиной постоянной и процессы приработки, как правило, не анализируются. Однако в последнее время на них стали обращать серьезное внимание, т.к. в реальных условиях абразивного изнашивания часто наблюдаются случаи, когда значение износа в момент приработки бывает столь велико, что изделия снимаются с дальнейшей эксплуатации.

Минимальная i присуща самой низкой скорости перемещения из применяемых в эксперименте (n = 500 мин$^{-1}$), максимальная для n = 1000 мин$^{-1}$. Причем скорость на-

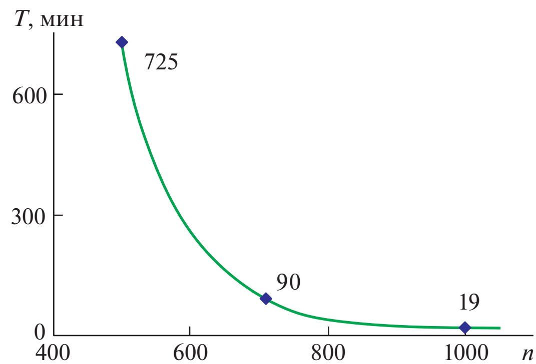

Рис. 3. Зависимость времени испытаний от числа оборотов при глубине лунки $\Delta h = 0.6$ мм.

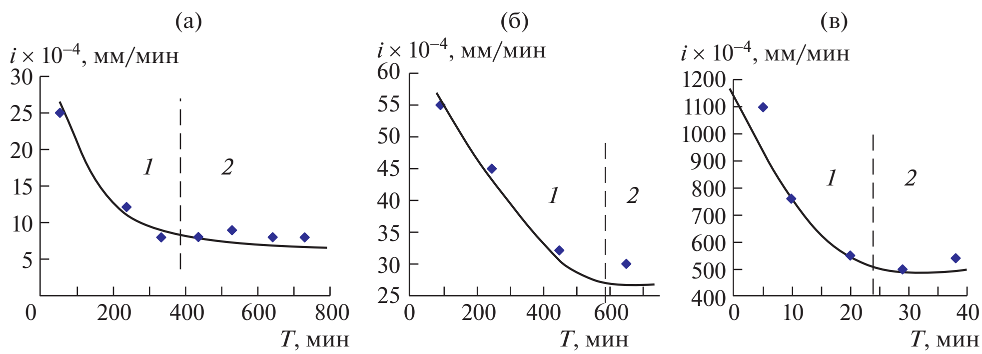

Рис. 4. Интенсивность изнашивания эпоксидного компаунда во времени для скоростей перемещения опытного образца: (а) – $n = 500$ мин$^{-1}$; (б) – $n = 710$ мин$^{-1}$; (в) – $n = 1000$ мин$^{-1}$.

растания интенсивности изнашивания при увеличении n происходит асимптотически (рис. 5).

Следует полагать, что рост скорости будет непропорционально влиять на ударные воздействия абразивных частиц, силу удара и частоту бомбардировки поверхности составляющими абразивной массы.

Резкое нарастание интенсивности изнашивания (рис. 5) связано с тем, что силовое воздействие на поверхность абразивных включений происходит по экспоненциальной зависимости.

Рост ударных нагрузок приводит к резкому увеличению контактных напряжений и разрушению поверхностного слоя. Нужно заметить, что механизм разрушения для полимеров будет иным, чем у металлических материалов.

Исходя из анализа опытных данных [11], следует, что интенсивность изнашивания эпоксидного компаунда во времени при различных скоростях перемещения изменяется по единой схеме: приработка и последующая стабилизация. $P_{\text{ост}i} = f(n)$ происходит по экспоненциальному закону. Следуя графику (рис. 5), оптимальной частотой вращения является диапазон 750–850 мин$^{-1}$ (границы обозначены штриховкой). При этом увеличение n больше установленных значений приводит к излишнему влиянию ударных воздействий, искажая картину изнашивания.

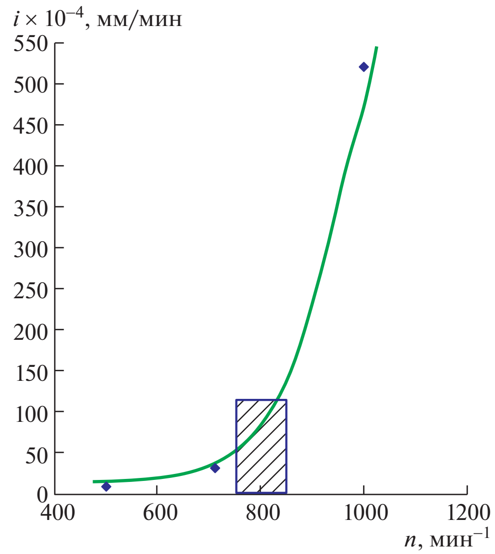

Рис. 5. Нарастание интенсивности изнашивания от числа оборотов.

Выводы. 1. Изменение износа в функции времени носит прямолинейный характер независимо от скорости перемещения опытного образца. **2.** Интенсивность изнашивания изменяется по схеме "приработка–стабилизация" с падением *i* в начальный период испытаний и независимо от частоты вращения экспериментального тела. **3.** Оптимальная скорость перемещения образца при ускоренных испытаниях составляет 750–850 мин$^{-1}$, время проведения 40 минут.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Yanyan, Khudoberdin N.I., Maung P.P., Malysheva G.V.* A method of evaluating the curing kinetics of epoxy-binder-based polymer composite materials // Polymer Science. Series D. 2020. V. 13. № 2. P. 164.

2. *Kosenko E., Zorin V., Baurova N.* Recognition of underframe corrosion of automobile bodies using infrared themography methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment 2019. ICMTME. P. 022012.

3. *Belous I.N., Shapovalov V.F., Malyavko G.P., Prosyannikov E.V., Yagovenko G.L.* The effectiveness of chemicals in the cultivation of winter rye on soil contaminated by radiation // Amazonia Investiga. 2019. V. 8. № 23. P. 759.

4. *Mikhalchenkov A.M., Biryulina Y.Y.* Construction for wear tests of abrasion-resistant adhesive composite materials // Polymer Science. Series D. 2017. V. 10. № 2. P. 150.

5. *Mikhalchenkov A.M., Kozarez I.V., Tyureva A.A., Kuzmin V.N.* Procedure for comparative accelerated testing of materials for resistance to abrasive wear as they move in a loose abrasive environment // Polymer Science. Series D. 2018. V. 11. № 1. P. 110.

6. *Kononenko A.S., Solovyeva A.A., Komogortsev V.F.* Theoretical determination of the minimum thickness of a polymer layer providing ensured protection of a shaft–bearing joint from fretting corrosion // Polymer Science. Series D. 2020. V. 13. № 1. P. 45.
7. *Mikhalchenkov A.M., Lyalyakin V.P., Solovev R.Y.* Effect of welding methods on the magnitude of residual stresses in welding up cracks in grey cast iron casing components // Welding International. 2018. V. 32. № 1. P. 67.
8. *Кравченко И.Н., Клименко А.А., Ерофеев М.Н.* РФ Патент 2527787, 2014.
9. *Михальченков А.М., Тюрева А.А., Козарез И.В.* Технология ремонта машин. Курсовое проектирование. СПб.: Лань, 2020. 232 с.
10. *Коломейченко А.В., Кравченко И.Н., Титов Н.В., Петровский Д.И., Багринцев О.О.* Исследование износостойкости композитных покрытий, полученных при карбовибродуговом упрочнении // Технология металлов. 2019. № 9. С. 36.
11. *Михальченков А.М., Бирюлина Я.Ю., Михальченкова М.А.* Интенсивность изнашивания покрытия из шламо-эпоксидной абразивостойкой композиции от скорости его перемещения // Материаловедение. 2016. № 8. С. 36.

EDN: PTIVLA
ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2022, № 5, с. 105–112

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 621.892.5.

ТЕМПЕРАТУРНАЯ СТОЙКОСТЬ ПЛАСТИЧНЫХ СМАЗОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ЗАГУЩЕННЫХ СУЛЬФОНАТАМИ КАЛЬЦИЯ

© 2022 г.
В. Д. Самусенко[1],*, С. С. Стрельникова[1], А. В. Песковец[2], И. А. Буяновский[1], И. Р. Татур[2], О. А. Кальянова[2]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
[2]*Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва, Россия*
**e-mail: samusenkovd@gmail.com*

Поступила в редакцию 02.04.2022 г.
После доработки 14.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Приведены результаты температурных испытаний пластичных смазочных материалов, приготовленных на основе сульфонатов кальция. Для приготовления смазок использовались загустители с разным щелочным числом и базовые масла, отличающиеся по структурно-групповому составу. Испытанные смазки показали схожую динамику изменения коэффициента трения от температуры, что связано с идентичным механизмом действия сульфонатного загустителя при образовании модифицированного поверхностного слоя. Оптимальным сочетанием физико-химических и трибологических свойств обладают образцы с загустителем С-300 “А” и дисперсионными средами – маслами VHVI-4 и С-9.

Ключевые слова: смазка, загуститель, сульфонат кальция, дисперсионная среда, щелочное число, трибологические испытания, температурная стойкость, коэффициент трения, износ

DOI: 10.31857/S0235711922050145

Существующие тенденции развития науки и техники ставят перед специалистами в области трибологии и химмотологии задачу обеспечить ресурсо- и энергосбережение при функционировании смазываемых тяжелонагруженных узлов трения современных машин и механизмов. Это можно достигнуть путем снижения энергетических потерь и повышения износостойкости сопряженных деталей при трении, т.е. повышения как антифрикционных, так и противоизносных свойств используемых смазочных материалов применительно к конкретным сопряжениям трущихся тел при обязательном учете соблюдения экологических требований [1, 2].

Как известно, в тех случаях, когда сложно обеспечить герметичность узлов трения или необходимо уменьшить расход смазочного материала вплоть до одноразовой его закладки в узел трения для обеспечения всего ресурса его работы, целесообразно применение пластичных смазок. Пластичные смазки представляют собой густой мазеобразный продукт, состоящий из дисперсионной среды (масла) и дисперсной фазы (загустителя). Сульфонатные смазки представляют особенный интерес, т.к. обладают хорошими исходными (обусловленными составом загустителя) противоизносными и противозадирными свойствами.

По современным представлениям [3, 4] основу сульфонатных смазок составляют мицеллярные структуры. Ядро мицеллы – карбонат кальция – может существовать в трех полиморфных модификациях: фатерит, арагонит и кальцит. Во время приготов-

Таблица 1. Физико-химические свойства загустителей

Наименование показателя	КНД-150 “А”	С-300 “А”	ССК-400D
Вязкость кинематическая при 100°С, $мм^2/с$	56.8	73.3	94.4
Щелочное число, мг КОН на 1 г продукта	132.6	288.6	404.2
Массовая доля сульфоната кальция, %	31	31.3	31

ления смазки необходимо образование именно кальцита для достижения наилучших характеристик, поэтому важно особое внимание уделять технологии приготовления смазочного материала [5]. Кристаллический кальцит, состоящий из ультратонких слоев с относительно большой площадью поверхности, будучи поверхностно активным, покрывает поверхность трения. Затем адсорбированный сульфонат кальция создает сульфонатные цепи, ориентированные перпендикулярно поверхности раздела [6]. Поэтому для смазок, загущенных сульфонатами кальция, характерны отличные противозадирные и противоизносные свойства [7–9], из-за чего отпадает необходимость добавления присадок трибологического назначения, содержащих серу, фосфор, цинк и др., что снижает токсичность получаемого смазочного материала. Кроме того, такие смазки являются хорошими ингибиторами коррозии, а также отличаются повышенной стабильностью к действию воды и даже способны до определенного предела поглощать ее, не меняя своих свойств, что делает возможным их применение в оборудовании, работающем при контакте с водой [10–12]. Таким образом, сульфонатные смазки могут найти применение во многих отраслях промышленности: автомобильная, сельскохозяйственная, строительная, пищевая, горнодобывающая, бумагоделательная, а также в металлургии.

Цель статьи – оценка влияния загустителя и дисперсионной среды сульфонатных пластичных смазочных материалов на температурную стойкость граничных смазочных слоев при трении.

Материалы и методы. Для исследования взяты образцы сульфонатных смазок, приготовленные на загустителях с разным уровнем щелочного числа: сульфонат кальция марки КНД-150 “А” (ТУ 38.1011283-2004), высокощелочной сульфонат кальция С-300 “А” (ТУ 38.301-19-115-99) и синтетический сульфонат кальция ССК-400D (ТУ BY 390401182.022-2011). В качестве дисперсионной среды использовали масло изопарафиновое VHVI-4 (ТУ 38.401-58-415-2014).

Для изучения влияния дисперсионной среды на исследуемые показатели дополнительно приготовлены образцы на следующих дисперсионных средах: масло для производства химических волокон С-9 (ТУ 38-1-01-33-70) с содержанием ароматических углеводородов 20%, полиальфаолефиновое масло ПАО-4 (ТУ 0253-014-54409843-2007), полиалкилбензол марки ПАБ-С (ТУ 2414-025-05766480-2006). В качестве загустителя для этих смазок использовали сульфонат кальция марки С-300 “А”.

В табл. 1 приведены физико-химические характеристики использованных загустителей, а в табл. 2 физико-химические характеристики использованных дисперсионных сред.

Для трибологической оценки приготовленных образцов смазочных материалов использовался температурный метод оценки смазочной способности по ГОСТ 23.221-84 на четырехшариковой машине КТ-2, в которой реализована низкая скорость относительного перемещения трущихся тел (0.24 мм/с), что практически устраняет фрикционный нагрев, а температура в узле трения задается от внешнего источника тепла [13]. Исследование проводили в диапазоне температур 30–300°С. Температура узла трения

Таблица 2. Физико-химические свойства дисперсионных сред

Наименование показателя	VHVI-4	С-9	ПАО-4	ПАБ-С
Плотность при 20°С, кг/м^3	826	865	818	873
Вязкость кинематическая при 100°С, мм^2/с	4.4	2.7	4.1	4.33
Температура вспышки в открытом тигле, °С	224	150	219	207
Температура застывания, °С	–23	–48	–61	–42

ступенчато повышалась со скоростью ~4°С в минуту. Коэффициент трения оценивался в течение 60 с через каждые 10°С. Осевая нагрузка на узел трения составляла 108.4 Н (т.е. контактная нагрузка на один шар была равна 44.2 Н, а давление в контакте верхнего и каждого из нижних шариков (по Герцу) составляет примерно 2 ГПа). Частота вращения шпинделя установки составляла 1 мин$^{-1}$. Для испытаний использовали стандартные подшипниковые шарики из стали 100Cr6 (аналог отечественной стали ШХ15) диаметром 7.94 мм. В качестве регистрируемых параметров выступали температура смазочного материала и значение момента трения, на основе которого определяли коэффициент трения.

Проводилось по три повторных испытания с каждым смазочным материалом, по средним значениям которых, строились зависимости коэффициента трения от температуры.

Результаты и их обсуждение. Все сульфонатные смазки приготовлены по технологии, разработанной на кафедре химии и технологии смазочных материалов и химмотологии РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина [5]. Содержание загустителя в испытуемых образцах составляет 67% масс. Основные физико-химические характеристики образцов приведены в табл. 3.

Анализ результатов (табл. 3) позволяет заключить, что все исследуемые образцы сульфонатных смазок обладают высоким уровнем эксплуатационных характеристик. Сульфонатная смазка № 1 имеет невысокие, по сравнению с другими образцами, значения предела прочности и эффективной вязкости, что объясняется отсутствием в загустителе КНД-150 “А” достаточного количества карбоната кальция для формирования прочной структуры (сульфонаты кальция с большим щелочным числом содержат больше карбоната кальция [14]).

Среди смазок, приготовленных на базе масла VHVI-4 с разными загустителями, оптимальными свойствами обладает образец № 2, у других образцов предел прочности и эффективная вязкость значительно ниже.

Результаты трибологических испытаний всех шести сравниваемых сульфонатных смазок в виде зависимостей коэффициентов трения от температуры приведены на рис. 1. Все испытанные образцы смазочных материалов имеют в общих чертах похожую динамику изменения коэффициента трения от температуры.

На начальном этапе с повышением температуры происходит разрушение адсорбционного граничного слоя, интенсивность разрушения которого зависит от содержания в смазках поверхностно активных веществ и их способности образовывать прочный граничный смазочный слой на поверхностях трения. В результате дезориентации молекул смазочной среды, образующих граничный слой, и разрушения этого слоя происходит увеличение доли металлического контакта по вершинам неровностей контактирующих тел, что выражается в повышении коэффициента трения. Как загуститель, так и масло в составе смазки значительно влияют на антифрикционные свойства приготовленных образцов.

Таблица 3. Основные физико-химические свойства исследуемых сульфонатных смазок

Наименование показателя	Загуститель КНД-150 “А”, масло VHVI-4 **№ 1**	Загуститель С-300 “А”, масло VHVI-4 **№ 2**	Загуститель ССК-400D, масло VHVI-4 **№ 3**	Загуститель С-300 “А”, масло С-9 **№ 4**	Загуститель С-300 “А”, масло ПАО-4 **№ 5**	Загуститель С-300 “А”, масло ПАБ-С **№ 6**
Температура каплепадения (ГОСТ 6793-74), °С	235	>250	>250	>250	>250	>250
Коллоидная стабильность (ГОСТ 7142-74), % масс	0.57	0.49	0.29	0.33	0.23	0.36
Предел прочности при 20°С (ГОСТ 7143-73, метод Б), Па	155	1260	870	1060	1280	1640
Эффективная вязкость при 20°С (ГОСТ 7163-84), Па · с	60	844	573	620	620	592

Начиная с температур 150–170°С, происходит снижение коэффициента трения, что, по-видимому, связано с началом образования на поверхности модифицированного слоя – на поверхностях трения происходит разложение сульфоната кальция, а образовавшийся при этом карбонат кальция высаживается на поверхностях трения,

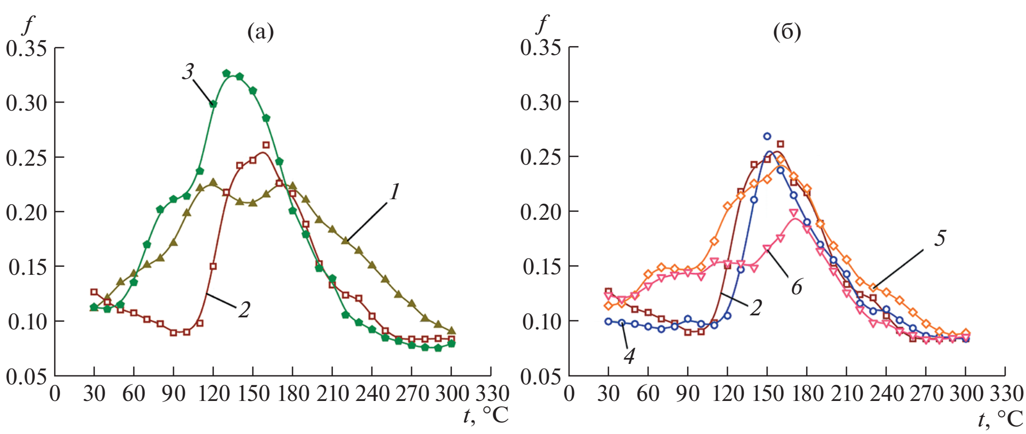

Рис. 1. Зависимости коэффициента трения от температуры сульфонатных смазок: (а) – смазки на масле VHVI-4 с разными загустителями; (б) – смазки с загустителем С-300 “А” на разных маслах. Образцы смазок: *1* – загуститель КНД-150 “А”, масло VHVI-4; *2* – загуститель С-300 “А”, масло VHVI-4; *3* – загуститель ССК-400D, масло VHVI-4; *4* – загуститель С-300 “А”, масло С-9; *5* – загуститель С-300 “А”, масло ПАО-4; *6* – загуститель С-300 “А”, масло ПАБ-С.

Таблица 4. Переходные температуры

Переходные температуры	Образцы смазок					
	1	2	3	4	5	6
$T_{кр}$, °C	80	110	50	120	100	140
$T_{хм}$, °C	300	260	250	270	280	260

уменьшая участок металлического контакта трущихся тел, что будет снижать коэффициент трения. Далее, по мере повышения температуры все большая доля поверхности контакта покрывается образующимся модифицированным слоем и все меньше становится коэффициент трения. Повышение температуры не только увеличивает скорость образования этого слоя, но и повышает скорость его изнашивания до тех пор, пока не установится равновесие между процессами образования и изнашивания модифицированного слоя, что выражается в стабилизации коэффициента трения на уровне 0.08–0.09.

Идентичное снижение коэффициента трения при образовании модифицированного слоя говорит об одинаковом механизме образования антифрикционного слоя на поверхности. При испытании образца смазки № 1 с меньшим содержанием карбоната кальция, соответственно образование модифицированного слоя происходит менее интенсивно, что выражается в более высоком коэффициенте трения.

В исследуемом интервале температур не была достигнута характерная температура, при которой скорость изнашивания модифицированного слоя превосходит скорость его образования, вследствие чего резко увеличится коэффициент трения.

В табл. 4 приведены значения переходных температур – $T_{кр}$ (минимальная температура, при которой происходит разрушение смазочного слоя) и $T_{хм}$ (минимальная температура, при которой происходит эффективное прекращение заедания вследствие образования на поверхностях трения модифицированного слоя, обладающего пониженным сопротивлением сдвигу).

Для смазок № 2 и № 4 на загустителе С-300 “А” четко видна критическая температура перехода к резкому повышению коэффициента трения; для других образцов так четко выраженной критической температуры не наблюдалось, в основном коэффициент трения постепенно увеличивается, достигая своих максимальных значений. Характерно, что при испытаниях образцов смазок № 2 и № 4 кривые, приведенные на рис. 1б, практически сливаются друг с другом, в то время как коэффициенты трения других исследуемых смазок на начальных участках испытаний показали существенно более высокие значения.

На рис. 2 показаны фотографии пятен износа, показывающие изменение поверхности трения при испытании смазки № 2 в точках – до критической температуры, при которой начинает разрушаться адсорбционный слой, и происходит резкий рост коэффициента трения *B*; зона максимальных значений коэффициента трения *C*; температура, при которой на поверхности образовался модифицированный слой и происходит стабилизация коэффициента трения *D*, конец испытания *E*.

На рис. 3 приведены данные по износу образцов после испытания сульфонатных смазок до температуры 300°C, а на рис. 4 показаны фотографии пятен износа. Наибольший износ получен при испытании образцов № 1 и № 5, а наименьший износ получен при испытании образцов № 2 и № 4. Следует отметить, что разница по износу всех образцов не значительна, за счет небольшого пути трения при испытаниях. Сравнив данные по износу и зависимости коэффициента трения от температуры можно сделать предположение, что основной износ накапливается на начальном этапе испытаний до 150°C.

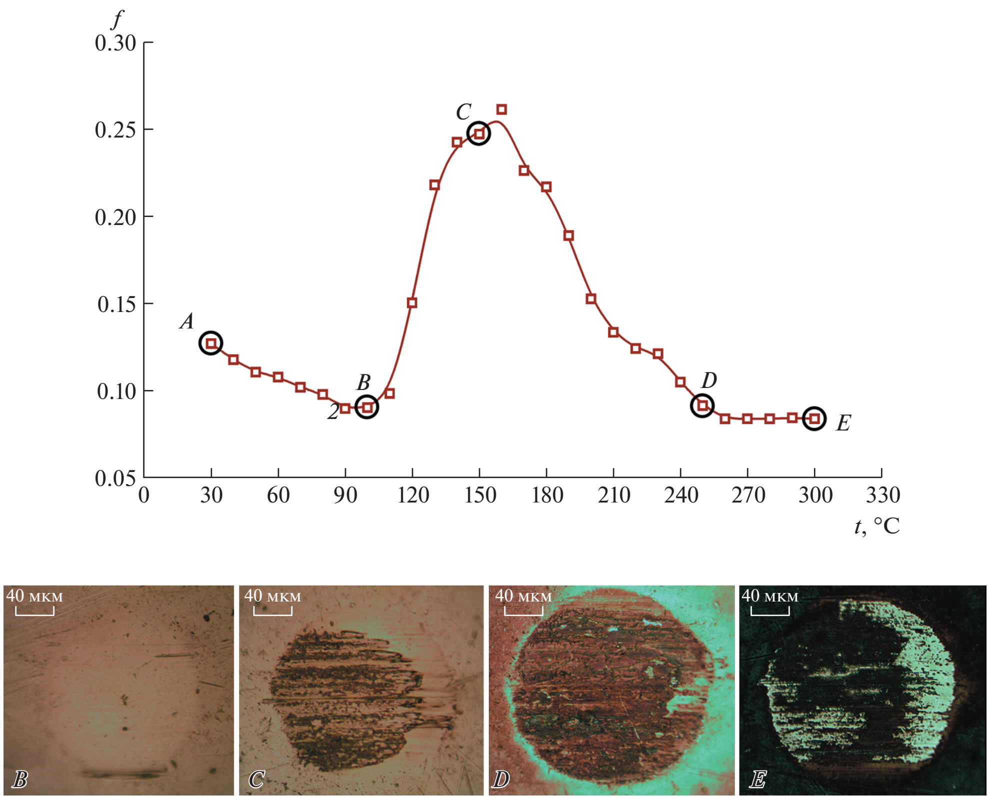

Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от температуры при испытании смазки № 2 (загуститель С-300 “А”, масло VHVI-4) и микрофотографии пятен износа при характерных температурах.

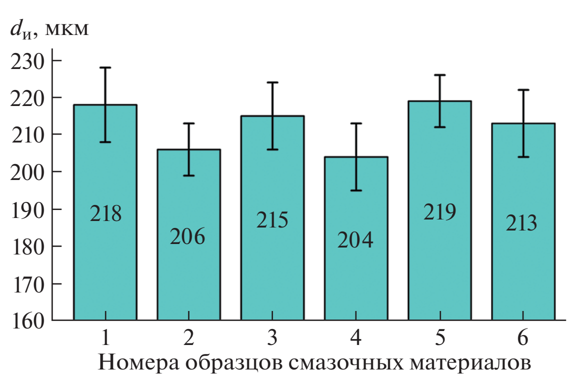

Рис. 3. Гистограмма средних значений диаметров пятен износа при испытаниях сульфонатных смазок до 300°C (обозначение образцов смазок соответствует табл. 3).

Заключение. Испытанные сульфонатные смазки показали в общих чертах схожую динамику изменения коэффициента трения от температуры. В диапазоне температур 30–160°C на коэффициент трения сульфонатных смазок влияет как дисперсионная

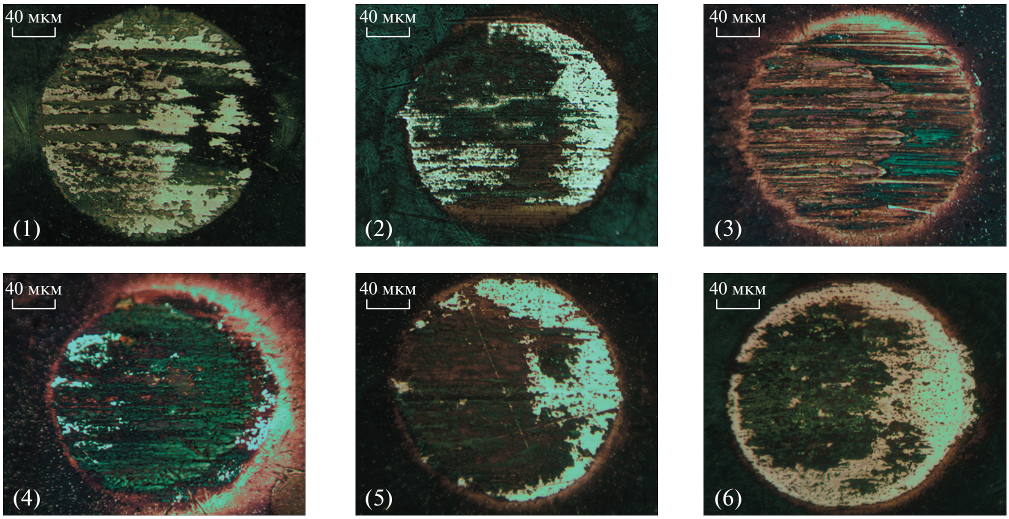

Рис. 4. Микрофотографии пятен износа при испытаниях сульфонатных смазок до 300°С (обозначение образцов смазок соответствует табл. 3).

среда, так и загуститель, компоненты которых способны образовывать на поверхности трения адсорбционный антифрикционный слой. При температурах свыше 160°С основное влияние на антифрикционные свойства смазок оказывает загуститель, что выражается в однообразном изменении коэффициента трения с повышением температуры. Из этого можно сделать вывод об идентичном механизме действия сульфонатного загустителя в исследуемых композициях. При 300°С коэффициенты трения практически одинаковы, что говорит об одной природе образовавшегося на поверхности трения модифицированного слоя карбоната кальция, вне зависимости от щелочного числа используемого загустителя и типа дисперсионной среды.

Сопоставив физико-химические характеристики исследуемых сульфонатных смазок и результаты испытаний по антифрикционному действию смазочных материалов и износу шариков можно сделать вывод, что среди испытанных образцов оптимальными свойствами обладают смазки, приготовленные на основе сульфоната кальция С-300 "А" и с дисперсионными средами VHVI-4 (№ 2) и С-9 (№ 4).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов А.Ю., Фукс И.Г., Любинин И.А.* Смазочные материалы в техносфере и биосфере. Экологический аспект. Киев: Атика-Н, 2012. 292 с.
2. *Lugt P.M.* Modern advancements in lubricating grease technology // Tribology international. 2016. Т. 97. С. 467.
3. *Mackwood W.* Calcium sulfonate complex greases // Tribology & Lubrication Technology. 2016. Т. 72. № 10. С. 28.
4. *Жорник В.И., Ивахник А.В., Ивахник В.П., Запольский А.В.* Структура и свойства комплексной сульфонат кальциевой смазки // Материаловедение в машиностроении. 2018. Т. 42. № 1. С. 44.

5. *Анисимова А.А.* Дис. ... канд. техн. наук: М.: РГУНиГ им. И.М. Губкина, 2018.
6. *Kobylyansky E.V., Mishchuk O.A., Ishchuk Y.L.* Lubricating properties of thixotropic systems based on overbased calcium sulphonate // Lubrication Science. 2004. Т. 16. № 3. С. 293.
7. *Márquez-Santiago J. F., Vite-Torres M., Gallardo-Hernandez E. A.* Study of Wear on AISI E52100 Steel Using a Lithium Complex Grease and a Calcium Sulfonate Grease // Fracture, Fatigue and Wear. Springer. 2020. С. 727.
8. *Fan X., Li W., Li H. et al.* Probing the effect of thickener on tribological properties of lubricating greases // Tribology International. 2018. Т. 118. С. 128.
9. *Wang Z., Xia Y., Liu Z.* The rheological and tribological properties of calcium sulfonate complex greases // Friction. 2015. Т. 3. № 1. С. 28.
10. *Myers J., Myers J., Los N. et al.* Grease Evaluation for Continuous Caster Bearings // NLGI Spokesman. 2020. Т. 84. № 5. С. 6.
11. *Bosman R., Lugt P.M.* The microstructure of calcium sulfonate complex lubricating grease and its change in the presence of water // Tribology transactions. 2018. Т. 61. № 5. С. 842.
12. *Zhou Y., Bosman R., Lugt P.M.* On the shear stability of dry and water-contaminated calcium sulfonate complex lubricating greases // Tribology transactions. 2019. Т. 62. № 4. С. 626.
13. *Буяновский И.А., Лашхи В.Л., Самусенко В.Д.* Развитие температурного метода оценки смазочной способности масел // Мир нефтепродуктов. Вестник нефтяных компаний. 2017. № 2. С. 28.
14. *Чудиновских А.Л., Лашхи В.Л.* Химмотологические аспекты действия детергентов в моторных маслах. М.: ООО “Издательский дом Недра”, 2015. 156 с.