

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Равновесие полимерных гелей в поле массовых сил <i>Е. Я. Денисюк</i>	3
Термоупругое поведение несжимаемого эластомера при конечных деформациях <i>Б. А. Жуков</i>	25
Формулировка задачи $N$ тел в параметрах расширенной группы Ньютона <i>В. Ф. Чуб</i>	38
Защита объекта на подвижном основании с помощью постоянного управления при ограниченных возмущениях <i>В. А. Корнеев</i>	51
Термодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии <i>Д. А. Чернышов, А. В. Ковалев</i>	70
Способы определения концентрации микродефектов в растягиваемых образцах материала <i>Д. В. Бабич, Т. И. Дородных</i>	85
Влияние текстурирования поверхности в форме выемок на трение скольжения в контакте с вязкоупругим материалом <i>Ю. Ю. Маховская, А. В. Морозов</i>	90
Функции напряжений в теории упругости <i>В. В. Васильев, Л. В. Федоров</i>	103
Уравнения совместности и функции напряжений в теории упругости <i>С. А. Лурье, П. А. Белов</i>	114
Динамика аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса <i>Ю. Д. Селюцкий</i>	130
О спуске лыжника по прямолинейной трассе <i>Б. Я. Локшин, В. А. Самсонов</i>	144
К 90-летию со дня рождения Никиты Федоровича Морозова	163

---



---

---

УДК 539.3:532.73

## РАВНОВЕСИЕ ПОЛИМЕРНЫХ ГЕЛЕЙ В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

© 2022 г. Е. Я. Денисюк<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь, Россия

\*e-mail: denisyuk@icmm.ru

Поступила в редакцию 26.06.2021 г.

После доработки 13.08.2021 г.

Принята к публикации 13.08.2021 г.

На основе вариационного подхода сформулированы краевые задачи, описывающие состояние термодинамического равновесия полимерных гелей, находящихся в поле массовых сил. Полимерный гель рассматривается как смесь, представляющая собой упругий материал и растворенную в нем жидкость (растворитель). Общая теория применена для изучения деформационного поведения полимерных гелей и пластифицированных полимерных материалов в поле силы тяжести. В рамках модельной задачи, описывающей состояние равновесия геля в форме плоского слоя, установлены условия, при которых растворитель или пластификатор способен под действием силы тяжести выделяться из полимера. В частности, получены соотношения, позволяющие оценить критические значения параметров, при которых происходит выделение растворителя, а также рассчитать количество выделившейся из материала жидкости.

*Ключевые слова:* полимерные гели, набухание, конечные деформации, термодинамическое равновесие, химический потенциал, осмотический тензор напряжений

**DOI:** 10.31857/S0572329922030072

**1. Введение.** Полимерные гели – это сетчатые полимеры, содержащие жидкость (растворитель) и находящиеся в высокоэластичном состоянии. На молекулярном уровне они представляют собой пространственную полимерную сетку, состоящую из длинных и гибких макромолекулярных цепей, соединенных между собой химическими связями. Межцепное пространство полимерной сетки заполняет растворитель. Благодаря такому строению полимерные гели способны испытывать большие упругие деформации. В рамках механики сплошных сред их естественной моделью является смесь, представляющая собой упругий материал и растворенную в нем жидкость. К смесям такого рода также относятся многие пластифицированные полимеры и набухшие в растворителе эластомеры.

Благодаря свойству поглощать и удерживать в себе большие объемы жидкости, многократно (в десятки и в сотни раз) превосходящие исходный объем полимера, полимерные гели находят применение в медицине и фармакологии, в биотехнологии, в технологиях разделения жидких смесей и во многих других современных технологиях [1–17].

Растворенная в полимере жидкость оказывает существенное влияние на его упругие свойства и деформационное поведение. В частности, внешние механические нагрузки могут вызывать миграцию и перераспределение жидкости внутри материала. При этом, достаточно большие сжимающие нагрузки могут приводить к выделению части жидкости из полимера во внешнюю среду, что вызывает частичную релаксацию

внутренних напряжений. Важным случаем таких нагрузок являются массовые силы, в частности, поле тяжести, в котором полимерные гели могут демонстрировать весьма сложное и нетривиальное поведение [18–21].

Данная работа посвящена формулировке краевых задач, описывающих напряженно-деформированное состояние полимерных гелей в поле массовых сил, находящихся в состоянии термодинамического равновесия. Такие состояния возникают при статическом нагружении гелей после завершения диффузионных процессов, связанных с перераспределением растворителя внутри материала и массообменом с внешней средой.

Уравнения равновесия гелей можно вывести, используя различные подходы. Например, можно обратиться к теории смесей [22], основы которой заложены Труделлом [23]. Основная задача этой теории состоит в описании неравновесных процессов. Она также позволяет формулировать статические задачи и описывать равновесные состояния смесей. Однако в теории смесей Труделла используются нетрадиционные (с точки зрения классической термодинамики) параметры состояния системы – парциальные тензоры напряжений, характеризующие механические напряжения, действующие в каждом из компонентов смеси, и внутренние силы, описывающие взаимодействие между компонентами. По существу, для применения теории смесей Труделла к растворам (в частности, к полимерным растворам), требуется применять особый вариант механики и равновесной термодинамики, в котором текущее состояние смеси должно описываться в терминах этих парциальных величин. Это приводит к значительным трудностям при формулировке граничных условий, характеризующих механическое нагружение материала и его взаимодействие с внешней средой [22].

В работе [24] показано, что используя подход Труделла в качестве отправной точки, теорию смесей можно сформулировать в терминах классической термодинамики – глобального тензора напряжений и химического потенциала растворителя. Применение предложенной в [24] теории к полимерам, позволило описать неравновесные процессы их набухания в растворителях, в частности, объяснить так называемые аномалии кинетических кривых набухания и предложить новые экспериментальные методы исследования термодинамических и диффузионных свойств сетчатых полимеров [24–27]. В качестве частных случаев из нее вытекают уравнения, описывающие состояние смеси в условиях термодинамического и механического равновесия.

В работе [28] показано, что уравнения равновесия геля можно вывести на основе вариационного подхода, используя известный в классической термодинамике факт, что свободная энергия макроскопической системы в состоянии равновесия достигает свой минимум, и равновесное состояние системы может быть определено из решения задачи минимизации функционала свободной энергии системы. В этом случае система уравнений и граничных условий, описывающая состояние равновесия геля, представляет собой уравнения Эйлера–Лагранжа соответствующей вариационной задачи. На основе вариационного подхода были сформулированы основные типы краевых задач, описывающих напряженно-деформированное состояние полимерных гелей в условиях механического и термодинамического равновесия при конечных деформациях [28] и в приближении малых деформаций [29].

В данной работе вывод уравнений равновесия гелей осуществляется с помощью второго подхода, то есть вариационного. Это делается из следующих соображений. Во-первых, при таком подходе, в отличие от теории смесей Труделла, состояние геля сразу же удастся описать в традиционных терминах глобального тензора напряжений и химического потенциала растворителя, что делает теорию более прозрачной как с точки зрения термодинамики растворов, так и механики деформируемого твердого тела. Во-вторых, удастся установить связь между задачами механики полимерных гелей и статическими задачами теории упругости. Наконец, вариационный подход может оказаться более предпочтительным с математической точки зрения, так как в на-

стоящее время он является наиболее эффективным методом исследования нелинейных краевых задач и построения численных методов их решения [30].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим образец полимерного геля в ненагруженном состоянии с однородным распределением растворителя. Это исходное состояние геля примем в качестве отсчетного. Будем полагать, что деформирование геля происходит в атмосфере. Гель будем считать химически инертным, однородным и изотропным материалом, а растворитель – нелетучей жидкостью. Последнее обстоятельство позволяет пренебречь эффектами, связанными с испарением растворителя, и делает общее количество растворителя  $N_1$  в системе (измеряемое в молях) сохраняющейся величиной.

Пусть  $\Omega^0$  – ограниченная область пространства, которую занимает гель в отсчетной конфигурации. Материальную систему координат свяжем с полимерной матрицей геля. Положение материальных частиц полимерной матрицы в отсчетной конфигурации  $\Omega^0$  будем задавать радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , а их положение в деформированной конфигурации  $\Omega$  – радиус-вектором  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ .

Для описания деформированного состояния геля будем использовать градиент места  $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}(\mathbf{r})$ , где  $\overset{\circ}{\nabla}$  – набла-оператор, действующий в отсчетной конфигурации. Соответственно,  $\nabla$  – это набла-оператор, действующий в деформированной конфигурации (здесь и далее используется система представления тензорных соотношений, принятая в [31]). Третий инвариант градиента места  $J = \det \mathbf{F}$  описывает объемные деформации геля. В частности, с его помощью устанавливается связь между элементами объемов в деформированной  $dV$  и отсчетной  $dV^0$  конфигурациях геля:  $dV = JdV^0$ .

Компонентный состав геля характеризуют  $N_1$  и  $N_2$  – мольные плотности (концентрации) растворителя и вещества полимерной матрицы соответственно, отнесенные к единичному объему отсчетной конфигурации. В деформированном состоянии распределение растворителя в геле может быть неоднородным, и его концентрация является функцией  $N_1 = N_2(\mathbf{r})$ . Концентрация вещества полимерной матрицы  $N_2$  от материальных координат не зависит, и в этом смысле она является константой:

$$N_2 = \text{const} \quad (2.1)$$

величина которой определяется выбором отсчетного состояния геля. Это следует из однородности отсчетного состояния геля и из закона сохранения вещества полимерной матрицы.

Под действием приложенных статических нагрузок гель деформируется. При этом, в зависимости от характера действующих нагрузок и исходной концентрации растворителя в геле, часть растворителя может быть выдавлена из полимера во внешнюю среду, а оставшаяся часть неоднородным образом перераспределится в объеме полимера. Такое перераспределение растворителя происходит в результате диффузионного процесса [24, 25]. Однако в случае статических нагрузок с течением времени диффузионный процесс завершается, и вся система переходит в состояние термодинамического равновесия.

Рассмотрим условия механического нагружения геля. Будем полагать, что положение части границы геля  $\Gamma_0^0$  в деформированном состоянии задано и имеет конфигурацию  $\Gamma_0$ . Эта конфигурация задается функцией  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\mathbf{r})$ , которая отображает  $\Gamma_0^0$  на  $\Gamma_0$ . На остальной части границы  $\Gamma_1^0 = \partial\Omega^0 \setminus \Gamma_0^0$  действуют поверхностные силы с плотностью  $\mathbf{g}^0(\mathbf{r})$ . Поверхностные силы будем считать замороженными нагрузками [30, 31]. В деформированной конфигурации плотность поверхностных сил описывает функция  $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ . Она определена на  $\Gamma_1$  – деформированной конфигурации границы  $\Gamma_1^0$ .

Плотности  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{g}^0$  связаны соотношением  $\mathbf{g}^0(\mathbf{r})dS^0 = \mathbf{g}(\mathbf{R}(\mathbf{r}))dS$ , где  $dS^0$  и  $dS$  — элементы площади в отсчетной и деформированной конфигурациях соответственно.

Гель находится в поле массовых сил  $\mathbf{b}(\mathbf{R})$ , которое является потенциальным:

$$\mathbf{b} = -\nabla\Phi(\mathbf{R}) \quad (2.2)$$

где  $\Phi(\mathbf{R})$  — потенциальная энергия единичной массы геля. Объемные плотности приложенных к гелю сил в деформированной и отсчетной конфигурациях равны  $\rho(\mathbf{R})\mathbf{b}(\mathbf{R})$  и  $\rho^0(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{R}(\mathbf{r}))$  соответственно. Здесь  $\rho$  и  $\rho^0$  — плотности геля в деформированной и отсчетной конфигурациях. Они связаны соотношением  $\rho^0 = J\rho$ . Плотность геля в отсчетной конфигурации можно выразить через концентрации компонентов следующим образом:

$$\rho^0 = M_1N_1 + M_2N_2 \quad (2.3)$$

где  $M_1, M_2$  — молярные массы растворителя и полимера соответственно.

Также будем считать, что давление внешней среды имеет фиксированное значение и не меняется в процессе деформирования геля. Постоянной является и температура всей системы, то есть деформирование геля осуществляется в изотермических условиях.

Полимерные гели обычно рассматривают в приближении несжимаемой, аддитивной смеси. Смесь называется несжимаемой, если ее объем не зависит от внешних механических нагрузок, в частности, от давления, однако он зависит от компонентного состава и от температуры. Несжимаемая смесь называется аддитивной, если ее объем равен сумме объемов ее компонентов. Из этого определения следует, что объем несжимаемой аддитивной смеси

$$V = \bar{V}_1N_1 + \bar{V}_2N_2 \quad (2.4)$$

где  $N_1, N_2$  — количество молей растворителя и полимера соответственно;  $\bar{V}_1, \bar{V}_2$  — молярные объемы чистых компонентов геля, которые (в изотермических условиях) являются константами.

Если растворитель в геле распределен однородным образом, то разделив обе части равенства (2.4) на объем геля в отсчетном состоянии  $V^0$  и учитывая, что  $V/V^0 = J = \det\mathbf{F}$ ,  $N_1 = N_1^0/V^0$  и  $N_2 = N_2^0/V^0$ , получим условие несжимаемости геля в локальной форме

$$\bar{V}_1N_1 + \bar{V}_2N_2 - J = 0 \quad (2.5)$$

Оно естественным образом распространяется на состояния геля с неоднородным распределением растворителя.

Компонентный состав геля в приближении несжимаемой аддитивной смеси удобно характеризовать с помощью объемных долей компонентов:

$$\varphi_1 = \bar{V}_1N_1/(\bar{V}_1N_1 + \bar{V}_2N_2), \quad \varphi_2 = \bar{V}_2N_2/(\bar{V}_1N_1 + \bar{V}_2N_2) \quad (2.6)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1 \quad (2.7)$$

$\varphi_1, \varphi_2$  — объемные доли растворителя и полимера соответственно. Из соотношений (2.5)–(2.7) следует, что

$$\varphi_2 = \varphi_2^0/J, \quad N_1 = \bar{V}_1^{-1}(J - \varphi_2^0) \quad (2.8)$$

где  $\varphi_2^0 = \bar{V}_2N_2$  — независимая от материальных координат константа, равная объемной доле полимера в отсчетном состоянии.

Равенства (2.8) означают, что распределение растворителя в геле в приближении несжимаемой аддитивной смеси можно полностью описать в терминах объемной де-

формации  $J(\mathbf{r})$ . Для этого можно также использовать объемные доли полимера  $\varphi_2(\mathbf{r})$  или жидкости  $\varphi_1(\mathbf{r})$ . В частности, с помощью соотношений (2.3) и (2.6)–(2.8) плотность геля в деформированной и отсчетной конфигурациях можно представить в следующем виде:

$$\rho = \rho_{01}\varphi_1 + \rho_{02}\varphi_2 = \rho_{01} + (\rho_{02} - \rho_{01})\varphi_2 \quad (2.9)$$

$$\rho^0 = J\rho = \rho_{01}J + (\rho_{02} - \rho_{01})\varphi_2^0 \quad (2.10)$$

$$\rho_{01} = M_1/\bar{V}_1, \quad \rho_{02} = M_2/\bar{V}_2 \quad (2.11)$$

Здесь  $\rho_{01}, \rho_{02}$  – плотности чистой жидкости и чистого полимера соответственно.

Наша цель состоит в том, чтобы описать напряженно-деформированное состояние геля в состоянии термодинамического равновесия. В частности, требуется выяснить, при каких условиях произойдет выделение растворителя из геля во внешнюю среду, какое количество растворителя выделится из образца и каким образом оставшийся в геле растворитель распределится в его объеме. Ответы на эти вопросы можно получить из решения соответствующих уравнений, которые далее выводятся как уравнения Эйлера–Лагранжа вариационной задачи минимизации функционала свободной энергии системы. В свою очередь, эта задача минимизации вытекает из основных принципов термодинамики.

**3. Уравнения равновесия геля.** При макроскопическом подходе гель, растворитель и приложенные нагрузки представляют собой термодинамическую систему. В состоянии термодинамического равновесия ее свободная энергия достигает минимального значения:

$$\int_{\Omega^0} f(\mathbf{F}, N_1, N_2) dV^0 + \mu_L \left( \mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 \right) - \int_{\Gamma_1^0} \mathbf{g}^0 \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}) dS^0 + \int_{\Omega^0} \rho^0(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{R}(\mathbf{r})) dV^0 \rightarrow \min \quad (3.1)$$

Здесь  $f(\mathbf{F}, N_1, N_2)$  – плотность свободной энергии геля, отнесенная к единичному объему отсчетной конфигурации;  $\mathcal{N}_1$  – исходное количество молей растворителя в геле;  $\mu_L$  – константа, равная химическому потенциалу жидкой фазы чистого растворителя. Здесь также полагается, что давление внешней среды (атмосферы) постоянно, а его перепад на масштабах, отвечающих размерам образца геля, ничтожно мал.

Первое слагаемое в выражении (3.1) – это свободная энергия геля, второе – свободная энергия выделившейся из геля жидкости, третье слагаемое – потенциальная энергия поверхностных сил, и последнее слагаемое – потенциальная энергия геля в поле массовых сил. Действующее в геле давление здесь отсчитывается от давления внешней среды, и это учтено в выражении свободной энергии (3.1).

Величина, стоящая в скобках второго слагаемого левой части выражения (3.1), равна количеству выдавленного из геля растворителя. Поскольку количество растворителя  $\mathcal{N}_1$  в системе фиксировано, и в исходном состоянии он весь содержался в геле, то количество выделившегося из геля растворителя должно удовлетворять очевидному неравенству

$$\mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1(\mathbf{r}) dV^0 \geq 0 \quad (3.2)$$

Поскольку гель рассматривается как несжимаемая, аддитивная смесь, сюда необходимо добавить условие несжимаемости

$$\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2 - J = 0 \quad (3.3)$$

Таким образом, задача о термодинамическом равновесии геля сводится к задаче минимизации функционала свободной энергии (3.1) с ограничениями (3.2) и (3.3). Она заключается в поиске таких функций  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  и  $N_1(\mathbf{r})$ , которые удовлетворяют граничным условиям  $\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{r})$  на  $\Gamma_0^0$ , ограничениям (3.2), (3.3) и доставляют минимум функционала (3.1). Допустим, что она имеет решение. Также предположим, что это решение и все исходные данные обладают достаточной гладкостью. Опираясь на эти допущения и используя метод множителей Лагранжа, выведем соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа, описывающие состояние термодинамического равновесия геля. Для этого левые части соотношений (3.2) и (3.3) умножим на лагранжевы множители  $\mu_*$  –  $\mu_L$  и  $p$  соответственно, а полученные выражения прибавим к левой части (3.1). В результате получим функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_{\Omega^0} f(\mathbf{F}, N_1, N_2) dV^0 + \mu_* \left( \mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 \right) - \\ & - \int_{\Gamma_1^0} \mathbf{g}^0 \cdot \mathbf{R} dS^0 + \int_{\Omega^0} \rho^0 \Phi dV^0 + \int_{\Omega^0} p(v - J) dV^0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $v = \bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2$ , лагранжев множитель  $p$  имеет смысл гидростатического давления, а лагранжев множитель  $\mu_* - \mu_L$  здесь удобно представлять в таком виде, поскольку новая неизвестная  $\mu_*$ , как показано ниже, имеет простой физический смысл.

Предположим, что найдется такая функция  $p(\mathbf{r})$  и такое значение  $\mu_*$ , что решение исходной задачи (3.1)–(3.3) доставляет минимум функционала (3.4). При этом величина  $\mu_*$  удовлетворяет дополнительным условиям

$$(\mu_* - \mu_L) \left( \mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 \right) = 0 \quad (3.5)$$

$$\mu_* - \mu_L \leq 0 \quad (3.6)$$

Тогда, согласно методу Лагранжа, исходная задача минимизации с ограничениями сводится к задаче безусловной минимизации функционала (3.4). Необходимое условие минимума функционала (3.4) заключается в обращении в нуль его первой вариации. Отсюда получаем уравнения Эйлера–Лагранжа в вариационной форме

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\Omega^0} (\mathbf{P} : \delta \mathbf{F}^T - \rho^0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{R}) dV^0 + \int_{\Omega^0} (\mu + M_1 \Phi - \mu_*) \delta N_1 dV^0 - \int_{\Gamma_1^0} \mathbf{g}^0 \cdot \delta \mathbf{R} dS^0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{P} = (\partial f / \partial \mathbf{F})_{N_1, N_2} - p \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T}, \quad \mu = (\partial f / \partial N_1)_{\mathbf{F}, N_2} + \bar{V}_1 p \quad (3.8)$$

Здесь  $\delta N_1(\mathbf{r})$ ,  $\delta \mathbf{R}(\mathbf{r})$ ,  $\delta \mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}(\mathbf{r})$  – вариации концентрации растворителя, векторного поля  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  и градиента места соответственно. Вариация  $\delta \mathbf{R}$  должна удовлетворять условию  $\delta \mathbf{R}(\mathbf{r}) = 0$  на  $\Gamma_0^0$ . Соотношения (3.8) являются обобщением известных в механике [30, 31] и в термодинамике [24] выражений для тензора напряжений Пиолы  $\mathbf{P}$  и химического потенциала  $\mu$ . При выводе (3.7) учтено, что первая вариация потенциальной энергии геля в поле массовых сил

$$\delta \int_{\Omega^0} \rho^0 \Phi dV^0 = \int_{\Omega^0} (M_1 \Phi \delta N_1 - \rho^0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{R}) dV^0$$

Это выражение следует из соотношений (2.1)–(2.3).

Применив в уравнении (3.7) интегрирование по частям и теорему Остроградского–Гаусса, получим (с учетом (3.5) и (3.6)) следующую краевую задачу:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho^0 \mathbf{b} = 0, \quad \mu + M_1 \Phi = \mu_* \quad \text{в области} \quad \Omega^0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{r}) \quad \text{на} \quad \Gamma_0^0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{g}^0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1^0 \quad (3.11)$$

$$\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2 - J = 0 \quad (3.12)$$

$$\mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 \geq 0 \quad (3.13)$$

$$(\mu_* - \mu_L) \left( \mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\mu_* - \mu_L \leq 0 \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{n}^0$  – вектор внешней нормали в отсчетной конфигурации. Ее решение заключается в поиске функций  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ ,  $N_1(\mathbf{r})$ ,  $p(\mathbf{r})$  и неизвестной  $\mu_*$ , которые обращают систему уравнений и граничных условий (3.9)–(3.15) в тождества. К исходным данным относятся функции  $\mathbf{R}_0(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{g}^0(\mathbf{r})$ ,  $\Phi(\mathbf{R})$ , константы  $\mu_L$ ,  $\mathcal{N}_1$ ,  $N_2$ , а также определяющие соотношения для тензора напряжений  $\mathbf{P}$  и химического потенциала  $\mu$ , которые можно получить, воспользовавшись формулами (3.8).

Задача (3.9)–(3.15) имеет следующую физическую интерпретацию. Первое из уравнений (3.8) – это условие механического равновесия геля, второе уравнение – условие термодинамического равновесия, которое означает, что сумма химического потенциала растворителя и потенциальной энергии массовых сил в геле является константой. Значение этой константы  $\mu_*$  неизвестно и должно определяться из решения задачи. Граничные условия (3.10) и (3.11) задают действующие на гель внешние механические нагрузки. Уравнение (3.11) – это условие несжимаемости. Неравенство (3.13) уже обсуждалось выше. Соотношения (3.14) и (3.15) описывают условия, при которых происходит выделение части растворителя из геля во внешнюю среду. В частности, неравенство (3.15) выражает известный в термодинамике факт, что химический потенциал растворенного в смеси вещества в состоянии равновесия не может превосходить величину химического потенциала этого же вещества, находящегося в чистом состоянии. Нарушение этого неравенства означает отсутствие термодинамического равновесия, что приводит к самопроизвольному разделению смеси. Из уравнения (3.14) следует, что если имеет место строгое неравенство  $\mu_* < \mu_L$ , то весь растворитель остается в геле. Но как только достигается равенство  $\mu_* = \mu_L$ , что возможно при достаточно больших сжимающих нагрузках, растворитель начинает выделяться во внешнюю среду. При дальнейшем сжатии геля равенство  $\mu_* = \mu_L$  остается в силе, а неравенство (3.13) становится строгим, что означает выделение растворителя из геля во внешнюю среду.

Задача (3.9)–(3.15) описывает состояние равновесия геля в отсчетной конфигурации. В деформированной конфигурации она имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \mu + M_1 \Phi = \mu_* \quad \text{в} \quad \Omega \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \quad (3.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \quad (3.18)$$

$$\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2 - J = 0 \quad (3.19)$$

$$\mathcal{N}_1 - \int_{\Omega} n_1 dV \geq 0 \quad (3.20)$$

$$(\mu_* - \mu_L) \left( \mathcal{N}_1 - \int_{\Omega} n_1 dV \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$\mu_* - \mu_L \leq 0 \quad (3.22)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали в деформированной конфигурации;  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений Коши;  $n_a = J^{-1} N_a$  ( $a = 1, 2$ ) – концентрации компонентов геля, отнесенные к единичному объему деформированной конфигурации;  $\nabla$  – набла-оператор, действующий в деформированной конфигурации. Переход от уравнения механического равновесия (3.9) к уравнению в форме (3.16) осуществляется путем применения тождества Пиолы  $\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}) = 0$  и соотношения  $\nabla = \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$  [31]. Тензор напряжений Коши связан с тензором напряжений Пиолы известным соотношением [31]

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} \quad (3.23)$$

Обратившись к (3.8), получаем

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot (\partial f / \partial \mathbf{F})_{N_1, N_2} - p \mathbf{E} \quad (3.24)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный тензор.

**4. Осмотический тензор напряжений.** Если гель находится в состоянии термодинамического равновесия, то гидростатическое давление можно определить из уравнения  $\mu + M_1 \Phi = \mu_*$ . Для этого, используя выражение химического потенциала (3.8), запишем его в виде  $\partial f / \partial N_1 + \bar{V}_1 p + M_1 \Phi = \mu_*$ . Отсюда выразим гидростатическое давление и представим его следующим образом:

$$p = \pi - \pi_* - \rho_{01} \Phi \quad (4.1)$$

$$\pi = -\bar{V}_1^{-1} \partial f / \partial N_1 \quad (4.2)$$

$$\pi_* = -\bar{V}_1^{-1} \mu_* \quad (4.3)$$

Введем также величину  $\pi_L = -\bar{V}_1^{-1} \mu_L$ , которую назовем осмотическим давлением чистого растворителя. Выражение (4.1) подставим в соотношение (3.24). В результате тензор напряжений Коши примет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Pi} + \pi_* \mathbf{E} + \rho_{01} \Phi \mathbf{E} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{\Pi} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \partial f / \partial \mathbf{F} - \pi \mathbf{E} \quad (4.5)$$

В термодинамике растворов  $\pi$  называется осмотическим давлением [32]. По аналогии тензор (4.5) назовем осмотическим тензором напряжений Коши. В отличие от тензора напряжений (3.24), согласно выражениям (4.2) и (4.5), он является функцией состояния геля. Более того, его зависимость от концентрации растворителя с помощью (2.8) можно выразить в терминах  $J = \det \mathbf{F}$ , и осмотический тензор напряжений будет иметь такую же структуру, как и тензор напряжений сжимаемого материала в нелинейной теории упругости.

Поскольку гель рассматривается как несжимаемая аддитивная смесь, количество выделившейся из геля жидкости можно выразить через изменение объема геля:

$$\mathcal{N}_1 - \int_{\Omega^0} N_1 dV^0 = (V^0 - V)/\bar{V}_1 \quad (4.6)$$

где  $V^0$  – объем геля в отсчетном (исходном) состоянии;  $V = \int_{\Omega^0} J dV^0$  – объем геля в деформированном состоянии.

Используя соотношения (2.2), (2.9) и (4.3)–(4.6), задачу (3.16)–(3.22) представим в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + (\rho_{02} - \rho_{01})\Phi_2 \mathbf{b} = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (4.7)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \quad \text{на } \Gamma_0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{g} - \mathbf{n}\pi_* - \mathbf{n}\rho_{01}\Phi \quad \text{на } \Gamma_1 \quad (4.9)$$

$$V^0 - V = \int_{\Omega^0} (1 - J) dV^0 \geq 0 \quad (4.10)$$

$$(\pi_L - \pi_*) \int_{\Omega^0} (1 - J) dV^0 = 0 \quad (4.11)$$

$$\pi_L - \pi_* \leq 0 \quad (4.12)$$

В ней требуется найти функцию  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ , определяющую равновесную деформированную конфигурацию геля и равновесное значение  $\pi_*$  осмотического давления. Текущее распределение растворителя в геле описывает функция  $J(\mathbf{r})$ , объем выделившегося во внешнюю среду растворителя можно рассчитать с помощью (4.10). Механические напряжения в геле определяются равенством (4.4).

Можно заметить, что уравнение равновесия (4.7), граничные условия (4.8), (4.9), а также структура тензора  $\mathbf{\Pi}$ , аналогичны соответствующим уравнениям и граничным условиям, используемым в статических задачах нелинейной теории упругости сжимаемого материала. Отличие от стандартных задач теории упругости заключается в том, что “внешнее давление”  $\pi_*$  неизвестно и заданы дополнительные ограничения (4.10)–(4.12). С точки зрения обычной механики их можно интерпретировать следующим образом. При достаточно малых нагрузках объем геля остается постоянным. Неизменность объема обеспечивает давление  $\pi_*$ , компенсирующее ту часть нагрузок, которые способны вызвать изменение объема геля. То есть глобально гель ведет себя как несжимаемый материал, однако локально он проявляет свойства сжимаемого материала, поскольку растворитель внутри него может перераспределяться, порождая локальные объемные деформации. Объем геля сохраняется, пока давление  $\pi_*$  строго больше предельного значения  $\pi_L$  – осмотического давления жидкой фазы растворителя. Если достигается равенство  $\pi_* = \pi_L$  (это возможно при достаточно больших сжимающих нагрузках), объем геля начинает уменьшаться за счет выделения растворителя во внешнюю среду. При дальнейшем росте сжимающих нагрузок равенство  $\pi_* = \pi_L$  сохраняется, а неравенство (4.10) становится строгим, что означает дальнейшее сжатие геля.

В отсчетной конфигурации задача (4.7)–(4.12) имеет следующий вид:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi}^0 + (\rho_{02} - \rho_{01})\Phi_2^0 \mathbf{b} = 0 \quad \text{в области } \Omega^0 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{r}) \quad \text{на } \Gamma_0^0 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{\Pi}^0 = \mathbf{g}^0 - \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{F}^{-T} J \pi_* - \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{F}^{-T} J \rho_{01} \Phi \quad \text{на } \Gamma_1^0 \quad (4.15)$$

$$\int_{\Omega^0} (1 - J) dV^0 \geq 0 \quad (4.16)$$

$$(\pi_* - \pi_L) \int_{\Omega^0} (1 - J) dV^0 = 0 \quad (4.17)$$

$$\pi_L - \pi_* \leq 0 \quad (4.18)$$

Осмотический тензор напряжений Пиолы  $\mathbf{\Pi}^0$  определяется равенством

$$\mathbf{\Pi}^0 = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{\Pi} = \partial f / \partial \mathbf{F} - \pi J \mathbf{F}^{-T} \quad (4.19)$$

**5. Определяющие соотношения.** Поскольку гель является изотропным материалом, и рассматривается как несжимаемая смесь, плотность его свободной энергии можно записать в виде [28]

$$f = f(\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_1, N_2), \quad (5.1)$$

где  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$  – главные инварианты меры деформации искажения формы  $\hat{\mathbf{B}}$ , которые определяются следующим образом:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} / J^{2/3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (5.2)$$

$$\hat{I}_1 = I_1 / J^{2/3}, \quad \hat{I}_2 = I_2 / J^{4/3} \quad (5.3)$$

$$I_1 = \mathbf{E} : \mathbf{B}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2(\mathbf{B}) - I_1(\mathbf{B}^2)) \quad (5.4)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – мера деформации Фингера (левая мера деформации Коши–Грина);  $I_1, I_2$  – ее первые два главных инварианта; третий инвариант  $\det \mathbf{B} = J^2$ . Отметим, что третий инвариант меры деформации  $\hat{\mathbf{B}}$ , согласно ее определению (5.2), тождественно равен единице:  $\det \hat{\mathbf{B}} = 1$ .

Применив формулы (3.24), (3.8), (4.2) и (4.5) к выражению (5.1), получаем следующие соотношения:

$$\mathbf{T} = \xi_1 \left( \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right) - \xi_2 \left( \hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right) - p \mathbf{E} \quad (5.5)$$

$$\xi_1 = 2J^{-1} (\partial f / \partial \hat{I}_1 + \hat{I}_1 \partial f / \partial \hat{I}_2) \quad \xi_2 = 2J^{-1} \partial f / \partial \hat{I}_2 \quad (5.6)$$

$$\mu = (\partial f / \partial N_1)_{\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_2} + \bar{V}_1 p \quad (5.7)$$

$$\pi = -\bar{V}_1^{-1} (\partial f / \partial N_1)_{\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_2} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{\Pi} = \xi_1 \left( \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right) - \xi_2 \left( \hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right) - \pi \mathbf{E} \quad (5.9)$$

Формулы (5.5)–(5.9) имеют общий характер и позволяют получить все необходимые определяющие соотношения для гелей, если известно конкретное выражение свободной энергии (5.1). В свою очередь, такое выражение можно получить, обратившись к существующим теориям полимерных сеток или к их эмпирическим и полуэмпирическим моделям. Одной из таких наиболее популярных теорий является теория Флори–Ренера [33], которая широко используется как при моделировании поведения сетчатых полимеров, так и при интерпретации экспериментальных данных. Согласно этой теории плотность свободной энергии геля дается выражением [28]

$$f = RT \left( N_1 \ln \varphi_1 + \chi N_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} N_2 \varphi_2^{-2/3} \hat{I}_1 \right) \quad (5.10)$$

где  $T$  – абсолютная температура;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\chi$  – параметр Флори–Хаггинса, характеризующий взаимодействие растворителя с полимером;  $N_1$  – мольная концентрация растворителя в геле;  $N_2$  – мольная концентрация субцепей полимерной сетки. В теории Флори–Ренера гель рассматривается как несжимаемая, аддитивная смесь, поэтому все соотношения (2.5)–(2.8) здесь остаются в силе. Как и прежде  $\varphi_1, \varphi_2$  – это объемные доли растворителя и полимера соответственно;  $\bar{V}_1$  – мольный объем растворителя;  $\bar{V}_2$  – средний мольный объем субцепей полимерной сетки.

Применив формулы (5.5)–(5.9) к выражению (5.10) и используя равенства (2.6)–(2.8), получим следующую систему определяющих соотношений:

$$\mathbf{T} = RT \bar{V}_2^{-1} \varphi_2^{1/3} \left( \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right) - p \mathbf{E} \quad (5.11)$$

$$\mu = RT \left( \ln \varphi_1 + \varphi_2 + \chi \varphi_2^2 + \frac{1}{3} (\bar{V}_1 / \bar{V}_2) \varphi_2^{1/3} \hat{I}_1 \right) + \bar{V}_1 p \quad (5.12)$$

$$\pi = -RT \bar{V}_1^{-1} \left( \ln \varphi_1 + \varphi_2 + \chi \varphi_2^2 + \frac{1}{3} (\bar{V}_1 / \bar{V}_2) \varphi_2^{1/3} \hat{I}_1 \right) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{\Pi} = RT \bar{V}_1^{-1} ((\bar{V}_1 / \bar{V}_2) \varphi_2^{1/3} \hat{\mathbf{B}} + (\ln \varphi_1 + \varphi_2 + \chi \varphi_2^2) \mathbf{E}) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{JF}^{-T} \cdot \mathbf{T} = G_0 \left( \mathbf{F} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{JF}^{-T} \right) - p \mathbf{JF}^{-T} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{\Pi}^0 = \mathbf{JF}^{-T} \cdot \mathbf{\Pi} = G_0 [\mathbf{F} + (\bar{V}_2 / \bar{V}_1) (\varphi_2^0)^{-1/3} (\ln \varphi_1 + \varphi_2 + \chi \varphi_2^2) \mathbf{JF}^{-T}] \quad (5.16)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 / J \quad \varphi_1 = 1 - \varphi_2^0 / J \quad (5.17)$$

Здесь  $G_0 = RT \bar{V}_2^{-1} (\varphi_2^0)^{1/3}$  – модуль сдвига полимерного геля в отсчетном состоянии. Равенства (5.17) вытекают из (2.7), (2.8) и являются следствием несжимаемости смеси. Из них следует, что распределение растворителя в геле можно полностью описать в терминах объемных деформаций материала.

Приведенные выше соотношения (5.11)–(5.17), в частности, позволяют описать важное для многих приложений явление свободного набухания сетчатых полимеров, то есть набухание механически ненагруженного полимера, помещенного в растворитель. В теории Флори–Ренера химический потенциал жидкой фазы чистого растворителя полагается равным нулю:

$$\mu_L = 0, \quad \pi_L = 0 \quad (5.18)$$

В этом случае  $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{E}$ ,  $\hat{I}_1 = 3$ ,  $p = 0$  и выражение (5.14) дает уравнение

$$\ln(1 - \varphi_2^E) + \varphi_2^E + \chi (\varphi_2^E)^2 + (\bar{V}_1 / \bar{V}_2) (\varphi_2^E)^{1/3} = 0 \quad (5.19)$$

которое определяет  $\varphi_2^E$  – предельное значение объемной доли полимера в геле, набувшем до равновесия в чистом растворителе.

**6. Равновесие плоского слоя геля в поле тяжести.** Для иллюстрации общей теории рассмотрим состояние равновесия плоского образца полимерного геля в поле тяжести. Гель расположен горизонтально и скреплен с жесткой подложкой. Будем полагать, что в первом случае гель находится на подложке, то есть сила тяжести действует на гель сверху вниз. Подложка проницаема для жидкости, поэтому растворитель, выделившийся из геля под действием силы тяжести, свободно просачивается через нее и удаляется из системы. Во втором случае гель находится под подложкой и выделение

растворителя может осуществляться через нижнюю (свободную) поверхность образца. Оба эти случая схематически изображены на рис. 1.

Будем также полагать, что поверхностные силы отсутствуют, гель находится в атмосфере, растворитель — нелетучая жидкость, а его исходная концентрация в геле не превосходит предельного (равновесного) значения, то есть выполняется неравенство

$$\Phi_2^0 \geq \Phi_2^E \quad (6.1)$$

где  $\Phi_2^E$  — объемная доля полимера в равновесно набухшем состоянии геля. В отсутствие силы тяжести состояние геля (скрепленного с подложкой) является неискаженным и внутреннее напряжения в нем отсутствуют. Это исходное состояние будем использовать в качестве отсчетного. Материальную систему координат выберем следующим образом: оси  $x$  и  $y$  направим вдоль образца, а ось  $z$  — в поперечном направлении. Пространственное положение частиц полимерной матрицы деформированного геля задается декартовыми координатами  $X, Y, Z$ .

Считая, что продольные размеры образца намного превосходят его толщину, гель будем рассматривать как бесконечно протяженный (в горизонтальных направлениях) плоский слой. Поскольку гель скреплен с подложкой, то  $X = x, Y = y$ , и его деформированная конфигурация полностью характеризуется функцией  $Z(z)$ :

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + Z(z)\mathbf{e}_3 \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{e}_i$  — декартов базис. Отсюда следует, что  $\mathbf{F} = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ , где главные относительные удлинения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda(z) = Z'(z), \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda(z) \quad (6.3)$$

Вследствие этого все параметры, характеризующие состояние геля (напряжения, деформации, распределение растворителя), зависят только от поперечной координаты  $z$ . При этом, все тензорные величины соосны и имеют диагональный вид. В частности,

$$\mathbf{T} = \sum_i T_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{P} = \sum_i P_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{\Pi} = \sum_i \Pi_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{\Pi}^0 = \sum_i \Pi_i^0 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$$

где  $\Pi_i^0 = \lambda_i^{-1} J \Pi_i$  и  $P_i = \lambda_i^{-1} J T_i$ . Отсюда, учитывая (6.3), имеем:

$$\Pi_3^0 = \Pi_3, \quad \Pi_1^0 = \Pi_2^0 = \lambda \Pi_1 = \lambda \Pi_2, \quad P_3 = T_3, \quad P_1 = P_2 = \lambda T_1 = \lambda T_2 \quad (6.4)$$

Рассмотрим случай, когда гель находится на подложке. Тогда потенциальная энергия  $\Phi = gZ(z)$ , а массовая сила  $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. На свободной поверхности геля вектор внешней нормали  $\mathbf{n}^0 = \mathbf{e}_3$ . Далее будем считать, что химический потенциал чистого растворителя равен нулю и, следовательно,  $\pi_L = 0$ . С учетом этого и изложенного выше, краевая задача (4.13)–(4.18) приобретает следующий вид:

$$\partial_z \Pi_3 = (\rho_{02} - \rho_{01}) \Phi_2^0 g \quad \text{при} \quad z \in (0, h_0) \quad (6.5)$$

$$Z(0) = 0 \quad (6.6)$$

$$\Pi_3 = -\rho_{01} g h - \pi_* \quad \text{при} \quad z = h_0 \quad (6.7)$$

$$\int_0^{h_0} (\lambda(z) - 1) dz \leq 0, \quad \pi_* \int_0^{h_0} (\lambda(z) - 1) dz = 0, \quad \pi_* \geq 0 \quad (6.8)$$

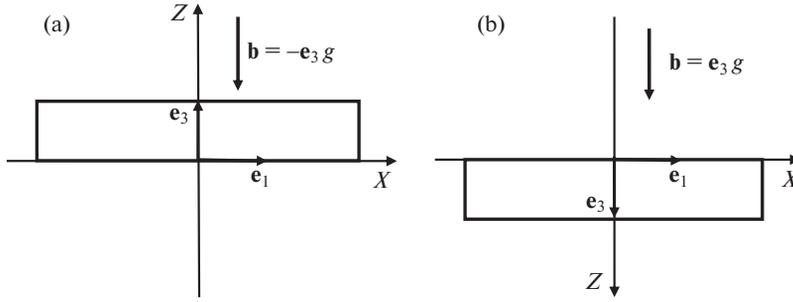


Рис. 1. Два способа размещения образца полимерного геля в поле тяжести.

где  $h_0$  – исходная толщина геля;  $h = Z(h_0)$  – толщина геля в деформированном состоянии. Сюда также необходимо добавить определяющее соотношение для  $\Pi_3$ . С этой целью обратимся к теории Флори–Ренера. Используя равенства (5.16), (5.17), (6.3) и (6.4), находим

$$\Pi_3 = G_0[\lambda + (\bar{V}_2/\bar{V}_1)(\varphi_2^0)^{-1/3}(\ln(1 - \varphi_2^0\lambda^{-1}) + \varphi_2^0\lambda^{-1} + \chi(\varphi_2^0)^2\lambda^{-2})] \quad (6.9)$$

Проинтегрируем (6.5) по  $z$ , и используя граничные условия (6.6) и (6.7), получаем уравнение, определяющее в неявном виде зависимость  $\lambda(z)$ :

$$\Pi_3(\lambda) = (\rho_{02} - \rho_{01})\varphi_2^0 g h_0 (z/h_0 - 1) - \rho_{01} g h - \pi_* \quad (6.10)$$

Функция  $\lambda(z)$  должна удовлетворять ограничениям (6.8), с помощью которых устанавливаются значения неизвестных  $\pi_*$  и  $h$ . Если зависимость  $\lambda(z)$  определена, то

$$Z(z) = \int_0^z \lambda(\xi) d\xi \quad (6.11)$$

Введем безразмерные переменные

$$\hat{z} = z/h_0, \quad \hat{Z} = Z/h_0, \quad \Pi = \Pi_3/G_0, \quad \hat{\pi}_* = \pi_*/G_0, \quad \bar{\lambda} = h/h_0$$

и новые параметры

$$\hat{p} = \rho_0 g h_0 / G_0, \quad \gamma = (\rho_0 - \rho_{01})/\rho_0 = (\rho_{02} - \rho_{01})\varphi_2^0/\rho_0 \quad (6.12)$$

уравнения (6.9), (6.10) и ограничения (6.8) приведем к безразмерному виду:

$$\Pi(\lambda) = \gamma \hat{p} (\hat{z} - 1) - (1 - \gamma) \hat{p} \bar{\lambda} - \hat{\pi}_*, \quad \hat{z} \in [0, 1] \quad (6.13)$$

$$\bar{\lambda} - 1 \leq 0, \quad \hat{\pi}_*(\bar{\lambda} - 1) = 0, \quad \hat{\pi}_* \geq 0 \quad (6.14)$$

$$\bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda(\hat{z}) d\hat{z} \quad (6.15)$$

$$\Pi = \lambda + (\bar{V}_2/\bar{V}_1)(\varphi_2^0)^{-1/3}(\ln(1 - \varphi_2^0\lambda^{-1}) + \varphi_2^0\lambda^{-1} + \chi(\varphi_2^0)^2\lambda^{-2}) \quad (6.16)$$

Единицами измерения давления здесь служит модуль сдвига полимерного геля в отсчетном состоянии  $G_0 = RT\bar{V}_2^{-1}(\varphi_2^0)^{1/3}$ ;  $\hat{p}$  – это давление (выраженное в единицах  $G_0$ ), оказываемое гелем в исходном состоянии на подложку;  $\rho_0$  – плотность геля в исходном состоянии, которая определяется равенством

$$\rho_0 = (\rho_{02} - \rho_{01})\Phi_2^0 + \rho_{01} = \rho_{01}(1 - \Phi_2^0) + \rho_{02}\Phi_2^0 \quad (6.17)$$

Параметр  $\gamma$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Из его определения (6.12) и равенства (6.17) нетрудно видеть, что  $\gamma < 1$ . Далее будем считать, что это неравенство всегда выполняется.

Если гель размещен на подложке, то  $\hat{p} > 0$ . Отрицательные значения  $\hat{p}$  естественно отнести к случаю, когда гель находится под подложкой. Это хорошо видно из сравнения рис. 1, а и рис. 1, б. Нетрудно видеть, что система уравнений, описывающая состояние равновесия геля, находящегося под подложкой, получается из предыдущей путем замены  $g \rightarrow -g$ , в результате которой параметр  $\hat{p}$  становится отрицательным. Сюда же можно включить значение  $\hat{p} = 0$ , считая, что ему соответствует значение  $g = 0$ , то есть сила тяжести отсутствует. Допуская, что параметр  $\hat{p}$  может принимать любые вещественные значения, мы получаем возможность с помощью системы (6.13)–(6.16) описать обе схемы размещения геля. Непрерывное изменение  $\hat{p}$ , при этом, можно интерпретировать как непрерывное изменение ускорения свободного падения. Однако следует отметить, что в экспериментах варьирование  $\hat{p}$  осуществляется за счет изменения толщины образца и его размещения.

Сила тяжести оказывает наиболее существенное влияние на деформационное поведение геля, когда в нем содержится большое количество растворителя. Это возможно, если растворитель для данного полимера является хорошим. Концентрация такого растворителя в геле может варьироваться в широких пределах, достигая величин 99% и выше. Далее мы будем рассматривать именно этот случай, как наиболее интересный.

В теории Флори–Ренера для хороших растворителей параметр Флори–Хаггинса  $\chi < 1/2$ . При таких значениях параметра функция  $\Pi(\lambda)$ , отвечающая выражению (6.16), является возрастающей и вогнутой. Она определена при всех  $\lambda > \Phi_2^0$ , принимает любые вещественные значения и имеет следующие асимптотические свойства:

$$\Pi(\lambda) = \lambda - K_1\lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty \quad (6.18)$$

$$\Pi(\lambda) = K_2 \ln(\lambda - \Phi_2^0) + O(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \Phi_2^0 \quad (6.19)$$

где положительные константы  $K_1 = (\bar{V}_2/\bar{V}_1)(1/2 - \chi)(\Phi_2^0)^{5/3}$  и  $K_2 = (\bar{V}_2/\bar{V}_1)(\Phi_2^0)^{-1/3}$ .

Отметим также, что при  $\Phi_2^0 \geq \Phi_2^E$  величина

$$\pi_0 = -\Pi(1) \geq 0 \quad (6.20)$$

Причем, равенство  $\pi_0 = 0$  достигается только при  $\Phi_2^0 = \Phi_2^E$ , то есть в предельно набувшем состоянии геля. Это следует из сравнения уравнений (6.16) и (5.19). Величина  $\pi_0$  – это осмотическое давление растворителя в исходном состоянии геля.

Задача (6.13)–(6.16) состоит в том, чтобы для заданных  $\hat{p}$  и  $\gamma < 1$  найти такую функцию  $\lambda(\hat{z})$  и значения переменных  $\hat{p}_*$  и  $\bar{\lambda}$ , которые удовлетворяют соотношениям (6.13)–(6.16).

Предположим, что переменные  $\hat{p}_*$  и  $\bar{\lambda}$  определены. Тогда подставив их значения в правую часть уравнения (6.13) мы получим уравнение, в неявном виде определяющее функцию  $\lambda(\hat{z})$ . Поскольку функция  $\Pi(\lambda)$  возрастающая, то существует обратная к ней функция  $\Lambda(\Pi)$ . С ее помощью зависимость  $\lambda(\hat{z})$  можно представить в виде

$$\lambda(\hat{z}) = \Lambda(\bar{\Pi} + \gamma\hat{p}(\hat{z} - 1/2)), \quad \hat{z} \in [0, 1] \quad (6.21)$$

где

$$\bar{\Pi} = -\frac{1}{2}\gamma\hat{p} - (1 - \gamma)\hat{p}\bar{\lambda} - \hat{p}_* \quad (6.22)$$

Функция  $\Lambda(\Pi)$  является гладкой, возрастающей и выпуклой. Она определена при всех вещественных  $\Pi$ , ограничена снизу и имеет следующие свойства:

$$\Lambda(\Pi) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \Pi \rightarrow +\infty \quad (6.23)$$

$$\Lambda(\Pi) > \varphi_2^0 \quad \text{при всех} \quad \Pi; \quad \Lambda(\Pi) \rightarrow \varphi_2^0 \quad \text{при} \quad \Pi \rightarrow -\infty \quad (6.24)$$

$$\Lambda(0) \geq \Lambda(-\pi_0) = 1 \quad (6.25)$$

Все эти свойства и поведение  $\Lambda(\Pi)$  непосредственно вытекают из свойств функции  $\Pi(\lambda)$  и соотношений (6.18)–(6.20).

Для определения неизвестных  $\hat{p}_*$  и  $\bar{\lambda}$  обратимся к уравнению (6.15). Его правую часть с помощью (6.21) представим в виде интеграла

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda(\bar{\Pi} + \gamma\hat{p}\zeta) d\zeta \quad (6.26)$$

Согласно равенству (6.22) он является функцией трех переменных

$$I = I(\hat{p}, \hat{p}_*, \bar{\lambda}) \quad (6.27)$$

Эта функция непрерывна и определена при всех вещественных  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}_*$  и  $\bar{\lambda} > \varphi_2^0$ . В итоге уравнение (6.15) примет вид

$$I(\hat{p}, \hat{p}_*, \bar{\lambda}) - \bar{\lambda} = 0 \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) должно решаться совместно с условиями (6.14). Ниже показано, что эта задача имеет решение при достаточно общих условиях, налагаемых на функцию  $\Lambda(\Pi)$ .

*Предложение.* Пусть задана непрерывно дифференцируемая, возрастающая функция  $\Lambda(\Pi)$ , определенная на всей вещественной прямой и обладающая свойствами (6.23)–(6.25), а также функция (6.27), заданная соотношениями (6.26) и (6.22) при  $\gamma < 1$ . Тогда:

1) существует значение  $\hat{p}_c \geq 0$ , являющееся единственным решением уравнения

$$I(\hat{p}, 0, 1) - 1 = 0 \quad (6.29)$$

2) существуют непрерывные функции  $\hat{p}_* = f_1(\hat{p})$  и  $\bar{\lambda} = f_2(\hat{p})$  такие, что

$$f_1(\hat{p}) > 0 \quad \text{при} \quad \hat{p} < \hat{p}_c; \quad f_1(\hat{p}_c) = 0; \quad f_1(\hat{p}) = 0 \quad \text{при} \quad \hat{p} > \hat{p}_c \quad (6.30)$$

$$\varphi_2^0 < f_2(\hat{p}) < 1 \quad \text{при} \quad \hat{p} > \hat{p}_c; \quad f_2(\hat{p}_c) = 1; \quad f_2(\hat{p}) = 1 \quad \text{при} \quad \hat{p} < \hat{p}_c \quad (6.31)$$

3) функции  $\hat{p}_* = f_1(\hat{p})$  при  $\hat{p} \leq \hat{p}_c$  и  $\bar{\lambda} = f_2(\hat{p})$  при  $\hat{p} \geq \hat{p}_c$  убывающие и являются решениями уравнений

$$I(\hat{p}, \hat{p}_*, 1) - 1 = 0, \quad \hat{p} < \hat{p}_c \quad (6.32)$$

$$I(\hat{p}, 0, \bar{\lambda}) - \bar{\lambda} = 0, \quad \hat{p} > \hat{p}_c \quad (6.33)$$

соответственно;

4) при любом  $\hat{p}$  значения  $\hat{p}_* = f_1(\hat{p})$  и  $\bar{\lambda} = f_2(\hat{p})$  удовлетворяют уравнению (6.28) и условиям (6.14);

5) данное решение единственно.

*Доказательство.* Функция (6.27), заданная соотношениями (6.26) и (6.22), непрерывна и при всех  $\hat{\pi}_*$ ,  $\hat{p}$  и  $\bar{\lambda} > \varphi_2^0$  имеет непрерывные частные производные:

$$\begin{aligned}\partial I / \partial \pi_* &= - \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda' (\bar{\Pi} + \gamma \hat{p} \xi) d\xi \\ \partial I / \partial \hat{p} &= - \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda' (\bar{\Pi} + \gamma \hat{p} \xi) [\gamma/2 + (1 - \gamma) \bar{\lambda} - \gamma \xi] d\xi \\ \partial I / \partial \bar{\lambda} &= -(1 - \gamma) \hat{p} \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda' (\bar{\Pi} + \gamma \hat{p} \xi) d\xi\end{aligned}$$

Используя свойства монотонности функции  $\Lambda(\Pi)$ , условие  $\gamma < 1$  и несложные оценки, легко показать, что

$$\partial I / \partial \pi_* < 0, \quad \partial I / \partial \hat{p} < 0 \quad \text{при всех } \hat{\pi}_*, \hat{p} \text{ и } \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.34)$$

$$\partial I / \partial \bar{\lambda} < 0 \quad \text{при всех } \hat{\pi}_*, \hat{p} > 0, \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.35)$$

Отсюда видно, что при любом фиксированном  $\bar{\lambda} > \varphi_2^0$  интеграл  $I(\hat{p}, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda})$  относительно переменных  $\hat{p}$  и  $\hat{\pi}_*$  является убывающей функцией, и согласно свойствам (6.23) и (6.24) характеризуется следующим поведением:

$$I(\hat{p}, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda}) \rightarrow +\infty \quad \text{при } \hat{p} \rightarrow -\infty \text{ или } \hat{\pi}_* \rightarrow -\infty \text{ и любых } \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.36)$$

$$I(\hat{p}, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda}) \rightarrow \varphi_2^0 \quad \text{при } \hat{p} \rightarrow +\infty \text{ или } \hat{\pi}_* \rightarrow +\infty \text{ и любых } \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.37)$$

$$I(\hat{p}, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda}) > \varphi_2^0 \quad \text{при всех } \hat{p}, \hat{\pi}_* \text{ и } \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.38)$$

$$I(0, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda}) = \Lambda(-\hat{\pi}_*) \quad \text{при любых } \hat{\pi}_* \text{ и } \bar{\lambda} > \varphi_2^0 \quad (6.39)$$

Равенство (6.39) вытекает из определений (6.26) и (6.22), если в них положить  $\hat{p} = 0$ .

Существование и единственность решения уравнения (6.29) вытекает из того, что левая часть этого уравнения представляет собой непрерывную, убывающую функцию, область значений которой, согласно свойствам (6.36) и (6.37), содержит нулевое значение. Из (6.39) и (6.25) следует, что при  $\hat{p} = 0$   $I(0, 0, 1) = \Lambda(0) \geq 1$ , поэтому решение уравнения (6.29) удовлетворяет неравенству  $\hat{p}_c \geq 0$ .

Рассмотрим уравнение (6.32). Его левая часть при любом фиксированном  $\hat{p}$  есть непрерывная, убывающая функция аргумента  $\hat{\pi}_*$ , принимающая, согласно свойствам (6.36) и (6.37), как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, для каждого заданного  $\hat{p}$  найдется единственное значение  $\hat{\pi}_*$ , при котором левая часть уравнения (6.32) обращается в нуль. Тем самым, на всей вещественной прямой определена функция  $\hat{\pi}_* = \tilde{f}_1(\hat{p})$ . Она является непрерывно дифференцируемой, а ее производная  $\tilde{f}_1'(\hat{p}) < 0$  при всех  $\hat{p}$ . Это вытекает из непрерывной дифференцируемости функции  $\Lambda(\Pi)$ , соотношения  $\tilde{f}_1'(\hat{p}) = -(\partial I / \partial \hat{p}) / (\partial I / \partial \pi_*)$  и неравенств (6.34). Следовательно, функция  $\hat{\pi}_* = \tilde{f}_1(\hat{p})$  убывающая. При  $\hat{p} = \hat{p}_c$  она обращается в нуль. Действительно, как показано выше,  $I(\hat{p}_c, 0, 1) = 1$ , причем, в силу монотонной зависимости  $I$  от  $\hat{\pi}_*$  при лю-

бом  $\hat{\pi}_* > 0$   $I(\hat{\rho}_c, \hat{\pi}_*, 1) < 1$ , а при  $\hat{\pi}_* < 0$   $I(\hat{\rho}_c, \hat{\pi}_*, 1) > 1$ . Следовательно,  $\hat{\pi}_* = 0$  – единственное решение уравнения (6.32) при  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$ . Поскольку функция  $\hat{\pi}_* = \tilde{f}_1(\hat{\rho})$  убывающая и  $\tilde{f}_1(\hat{\rho}_c) = 0$ , то  $\hat{\pi}_* = \tilde{f}_1(\hat{\rho}) > 0$  при всех  $\hat{\rho} < \hat{\rho}_c$ . Функцию  $f_1(\hat{\rho})$  определим, положив  $f_1(\hat{\rho}) = \tilde{f}_1(\hat{\rho})$  при  $\hat{\rho} \leq \hat{\rho}_c$  и  $f_1(\hat{\rho}) = 0$  при  $\hat{\rho} > \hat{\rho}_c$ . Нетрудно видеть, что она удовлетворяет всем условиям, сформулированным в пунктах 2) и 3).

Теперь обратимся к уравнению (6.33). При фиксированном значении  $\bar{\lambda} > \varphi_2^0 I(\hat{\rho}, 0, \bar{\lambda})$  является непрерывной, убывающей функцией от  $\hat{\rho}$  и при  $\hat{\rho} \geq 0$  принимает любые значения из промежутка  $(\varphi_2^0, \Lambda(0)]$ . Это следует из второго неравенства (6.34) и асимптотических свойств (6.37)–(6.39). Следовательно, для любого  $\bar{\lambda}$ , принадлежащего этому промежутку, найдется единственное значение  $\hat{\rho}$ , при котором  $I(\hat{\rho}, 0, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}$  и левая часть уравнения (6.33) обращается в нуль. Это означает, что существует функция  $\hat{\rho}(\bar{\lambda})$ , определяемая в неявном виде уравнением (6.33). Данная функция непрерывна, имеет непрерывную производную  $\hat{\rho}'(\bar{\lambda}) = -[\partial I / \partial \bar{\lambda} - 1][\partial I / \partial \hat{\rho}]^{-1}$ , которая, согласно неравенствам (6.34) и (6.35), отрицательна при всех  $\hat{\rho} \geq 0$ . Отсюда следует, что функция  $\hat{\rho}(\bar{\lambda})$  строго монотонна и, следовательно, имеет обратную функцию  $\bar{\lambda} = \tilde{f}_2(\hat{\rho})$ , определенную при  $\hat{\rho} \geq 0$ . Эта функция непрерывна и имеет, согласно (6.34) и (6.35), отрицательную непрерывную производную:

$$\tilde{f}_2'(\hat{\rho}) = -[\partial I / \partial \hat{\rho}][\partial I / \partial \bar{\lambda} - 1]^{-1} < 0$$

то есть, является убывающей. Функцию  $f_2(\hat{\rho})$  определим, положив  $f_2(\hat{\rho}) = \tilde{f}_2(\hat{\rho})$  при  $\hat{\rho} > \hat{\rho}_c$  и  $f_2(\hat{\rho}) = 1$  при  $\hat{\rho} \leq \hat{\rho}_c$ . Данное определение корректно, поскольку функция  $\tilde{f}_2(\hat{\rho})$  непрерывна и в силу единственности решения уравнения (6.29)  $\tilde{f}_2(\hat{\rho}_c) = 1$ . Нетрудно проверить, что функция  $f_2(\hat{\rho})$  удовлетворяет всем условиям, сформулированным в пунктах 2) и 3).

Также путем непосредственной проверки нетрудно убедиться, что значения  $\hat{\pi}_* = f_1(\hat{\rho})$  и  $\bar{\lambda} = f_2(\hat{\rho})$  при любом  $\hat{\rho}$  удовлетворяют уравнению (6.28) и условиям (6.14). Единственность данного решения является следствием единственности решений уравнений (6.29), (6.32) и (6.33), что было показано в ходе доказательства. Предложение доказано.

*Замечание.* При построении решения задачи была использована только строгая монотонность функции  $\Lambda(\Pi)$ . В модели Флори–Ренера она также обладает свойством строгой выпуклости. Если принять во внимание это обстоятельство и применить к соотношению (6.26) неравенство Иенссена, то можно получить неравенство  $\Lambda(\bar{\Pi}) \leq I(\hat{\rho}, \hat{\pi}_*, \bar{\lambda})$ . Подстановка в него значений  $\hat{\pi}_* = 0$ ,  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$  и  $\bar{\lambda} = 1$  дает неравенство для  $\hat{\rho}_c$ :  $\Lambda(-(1 - \gamma/2)\hat{\rho}_c) \leq 1$  (Здесь использованы равенства (6.22) и (6.29)). В терминах функции  $\Pi(\lambda)$  последнее неравенство принимает вид  $-(1 - \gamma/2)\hat{\rho}_c \leq \Pi(1)$ . Учитывая (6.20), получим полезную оценку для критического значения  $\hat{\rho}_c$  в случае, когда  $\Lambda(\Pi)$  – выпуклая функция:

$$\hat{\rho}_c \geq (1 - \gamma/2)^{-1} \pi_0 \tag{6.40}$$

Дадим физическую интерпретацию полученного решения. Прежде всего отметим, что параметр  $\hat{\rho}$  можно рассматривать как безразмерную толщину геля в исходном состоянии. Это следует из его определения (6.12). Тогда можно говорить о существовании критической толщины геля  $\hat{\rho}_c \geq 0$ , при превышении которой происходит выделе-

ние растворителя из геля во внешнюю среду, что приводит к уменьшению равновесной толщины геля  $\bar{\lambda}$  по сравнению с исходной. Зависимость  $\bar{\lambda}$  от  $\hat{p}$  описывает функция  $f_2(\hat{p})$ . При этом величина  $\hat{\pi}_*$ , имеющая смысл равновесного значения осмотического давления растворителя в геле, равна нулю. Это означает, что гель в таком состоянии, не может поглощать растворитель из внешней среды, даже находясь с ним в контакте. Этому препятствует достаточно высокий уровень действующих на гель сжимающих нагрузок.

Если  $\hat{p} < \hat{p}_c$ , то  $\bar{\lambda} = 1$ , то есть весь растворитель остается в геле. При этом равновесное осмотическое давление растворителя в геле  $\hat{\pi}_* = f_1(\hat{p}) > 0$  и растет по мере убывания  $\hat{p}$ . Это означает, что гель в таком состоянии мог бы поглотить дополнительное количество растворителя из внешней среды, если бы находился с ним в контакте. Поглощение растворителя в этом случае продолжалось бы до тех пор, пока  $\hat{\pi}_*$  не достиг бы нулевого значения. Поэтому  $\hat{\pi}_*$  можно рассматривать как величину, характеризующую совместимость растворителя с полимером в данных условиях.

Параметр  $\hat{p}$  может принимать и отрицательные значения. Как было показано выше, это соответствует размещению геля под подложкой. В этом случае всегда  $\hat{p} < \hat{p}_c$ ,  $\bar{\lambda} = 1$  и  $\hat{\pi}_* > 0$ , то есть весь растворитель остается в геле. Это объясняется тем, что здесь гель оказывается подвергнутым растягивающим нагрузкам, под действием которых его совместимость с растворителем возрастает [26].

Таким образом, при размещении геля под подложкой выделение растворителя из геля под действием силы тяжести невозможно. Однако это утверждение справедливо только при сохранении плоской геометрии геля. При достаточно большой толщине слоя состояние механического равновесия слоя становится неустойчивым, в результате чего гель может приобретать весьма сложные конфигурации [19–21]. Можно ожидать, что в этом случае растворитель способен выделяться из геля. Более того, это может влиять на порог устойчивости геля и на его конечную, равновесную конфигурацию. Такого рода эффекты пока никем не изучались. Более того, теоретическое описание явления потери устойчивости геля в поле тяжести в настоящее время обычно осуществляется в рамках модели, в которой гель рассматривается как несжимаемый упругий материал, и возможность миграции растворителя в нем не учитывается.

Сформулируем “алгоритм” решения всей задачи в целом. Он заключается в следующем. Сначала необходимо рассчитать по формулам (6.12) значения параметров  $\gamma$  и  $\hat{p}$ . При этом знак  $\hat{p}$  нужно выбрать в зависимости от способа размещения геля. Затем с помощью уравнения (6.29) определить критическое значение  $\hat{p}_c$  и сравнить его с актуальным значением параметра  $\hat{p}$ . Если  $\hat{p} \leq \hat{p}_c$ , то следует положить  $\bar{\lambda} = 1$ , а величину  $\hat{\pi}_*$  найти, решив уравнение (6.32). Если же  $\hat{p} > \hat{p}_c$ , то  $\hat{\pi}_*$  нужно присвоить нулевое значение, а  $\bar{\lambda}$  определить из уравнения (6.33). После того, как величины  $\hat{\pi}_*$  и  $\bar{\lambda}$  определены, по формуле (6.22) необходимо вычислить значение  $\bar{\Pi}$ . Затем по формуле (6.21) рассчитать функцию  $\lambda(\hat{z})$  и путем ее интегрирования определить  $\hat{Z}(\hat{z})$ . Распределение напряжений в геле (в рамках теории Флори–Ренера) определяется с помощью соотношений

$$P_3(\hat{z}) = T_3(\hat{z}) = G_0[\gamma\hat{p}(\hat{z} - 1) - (1 - \gamma)\hat{p}(\bar{\lambda} - \hat{Z}(\hat{z}))]$$

$$P_1(\hat{z}) = P_2(\hat{z}) = G_0(1 - \lambda^2(\hat{z})) + \lambda(\hat{z})P_3(\hat{z})$$

Первое вытекает из уравнений (4.4), (6.3), (6.4) и (6.13), а второе выводится с помощью равенства  $P_1 = P_2 = \lambda T_1 = \lambda(T_1 - T_3) + \lambda T_3$  и соотношений (5.11), (6.3), (6.4).

Данный алгоритм нетрудно реализовать, применив численные методы. Это дает возможность получать решение задачи при любых (допустимых) значениях параметров  $\gamma$  и  $\hat{p}$ . Однако во многих реальных ситуациях, например, в лабораторных экспериментах, типичные значения  $|\gamma| \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ . Это объясняется тем, что для гелей обычно  $\phi_2^0 \sim 10^{-2}$  и плотность такого геля мало отличается от плотности растворителя. Максимальные значения  $|\hat{p}|$  обычно характеризуются числами порядка 1–10. Вследствие этого величина  $|\gamma\hat{p}| \ll 1$  и ее можно использовать как малый параметр. Это дает возможность получить приближенное решение задачи, которое во многих случаях хорошо описывает деформационное поведение гелей в поле тяжести уже в линейном по  $\gamma\hat{p}$  приближении.

Полагая что  $|\gamma\hat{p}| \ll 1$ , разложим правую часть (6.21) в ряд Тейлора:

$$\Lambda(\bar{\Pi} + \gamma\hat{p}(\hat{z} - 1/2)) = \Lambda(\bar{\Pi}) + \Lambda'(\bar{\Pi})\gamma\hat{p}(\hat{z} - 1/2) + \dots \quad (6.41)$$

Далее будем использовать только два первых члена этого разложения. В этом приближении, согласно (6.26),  $I = \Lambda(\bar{\Pi})$  и уравнение (6.28) приобретает вид

$$\Lambda(\bar{\Pi}) - \bar{\lambda} = 0 \quad (6.42)$$

С учетом данного равенства и разложения (6.41), соотношение (6.21) запишем в виде

$$\lambda(\hat{z}) = \bar{\lambda} + [\Pi'(\bar{\lambda})]^{-1} \gamma\hat{p}(\hat{z} - 1/2) \quad (6.43)$$

(Здесь учтено, что  $\Lambda'(\bar{\Pi}) = [\Pi'(\bar{\lambda})]^{-1}$ ). Поскольку  $\Lambda(\Pi)$  обратная к  $\Pi(\lambda)$  функция, то учитывая (6.22), уравнение (6.42) можно записать следующим образом:

$$\Pi(\bar{\lambda}) + [\gamma/2 + (1 - \gamma)\bar{\lambda}]\hat{p} + \hat{\pi}_* = 0 \quad (6.44)$$

Из него нетрудно получить аналоги уравнений (6.29) и (6.32). Из них следует, что

$$\hat{p}_c = (1 - \gamma/2)^{-1} \pi_0 \quad (6.45)$$

$$\hat{\pi}_* = (1 - \gamma/2)(\hat{p}_c - \hat{p}), \quad \bar{\lambda} = 1, \quad \hat{p} \leq \hat{p}_c \quad (6.46)$$

Уравнение (6.33) принимает вид

$$\Pi(\bar{\lambda}) + [\gamma/2 + (1 - \gamma)\bar{\lambda}]\hat{p} = 0, \quad \hat{p} \geq \hat{p}_c$$

Его можно решать численно. Однако при небольших отклонениях  $\hat{p}$  от  $\hat{p}_c$  можно воспользоваться приближенной формулой  $\Pi(\bar{\lambda}) \approx -\pi_0 + \Pi'(1)(\bar{\lambda} - 1)$  (Здесь учтено равенство (6.20)). В результате получаем

$$\bar{\lambda} = 1 - \frac{(1 - \gamma/2)(\hat{p} - \hat{p}_c)}{(1 - \gamma)\hat{p} + \Pi'(1)}, \quad \hat{\pi}_* = 0, \quad \hat{p} \geq \hat{p}_c$$

В этом же приближении, то есть при  $|\hat{p} - \hat{p}_c| \ll 1$

$$\lambda(\hat{z}) = \bar{\lambda} + [\Pi'(1)]^{-1} \gamma\hat{p}(\hat{z} - 1/2)$$

Для получения более точного решения в разложении (6.41) необходимо использовать члены более высокого порядка.

**7. Заключение.** В статье рассмотрены термодинамически равновесные состояния полимерных гелей в поле массовых сил. Гель рассматривается как аддитивная несжимаемая смесь, представляющая собой несжимаемый упругий материал и растворенную в нем несжимаемую жидкость (растворитель). В этом случае объем геля (при фиксированной концентрации растворителя) не зависит от приложенных механических

нагрузок, а объемные деформации могут возникать только за счет поглощения или выделения растворителя. Предполагается, что растворитель – нелетучая жидкость, а деформирование геля происходит в атмосфере, поэтому поглощение растворителя из внешней среды отсутствует.

В исходном виде задача о равновесии геля формулируется как задача минимизации функционала свободной энергии системы “ полимер–растворитель” и потенциальной энергии приложенных сил с ограничениями. Приближение несжимаемой смеси дает двустороннее ограничение, а условие отсутствия поглощения растворителя из внешней среды – одностороннее ограничение в виде неравенства. Уравнения, описывающие состояние термодинамического равновесия геля, получены как уравнения Эйлера–Лагранжа задачи минимизации с помощью метода множителей Лагранжа. Вследствие этого в уравнениях в качестве дополнительных неизвестных появляются два лагранжевых множителя: гидростатическое давление и равновесное значение химического потенциала растворителя.

Показано, что равновесное напряженно-деформированное состояние геля в приближении несжимаемой смеси может быть описано в терминах осмотического тензора напряжений, который имеет такую же структуру, как и тензор напряжений сжимаемого материала в нелинейной теории упругости. В результате этого задача о равновесии геля оказывается аналогичной статическим задачам теории упругости для сжимаемого материала, но с дополнительным ограничением в форме неравенства, налагаемым на его объем.

Это ограничение приводит к тому, что гель, в зависимости от приложенных нагрузок и от исходной концентрации растворителя в нем, может демонстрировать поведение как несжимаемого, так и сжимаемого материала. В частности, при растягивающих или малых сжимающих нагрузках объем геля остается постоянным. То есть глобально гель ведет себя как несжимаемый материал, однако локально он проявляет свойства сжимаемого материала, поскольку растворитель внутри него под действием массовых сил может мигрировать, порождая локальные объемные деформации. Если уровень сжимающих нагрузок превышает некоторый порог, то происходит выделение растворителя во внешнюю среду, и гель деформируется как обычный сжимаемый упругий материал.

Общая теория и перечисленные выше эффекты проиллюстрированы на примере решения модельной задачи, описывающей деформирование плоского слоя геля под действием силы тяжести.

Сформулированные задачи можно рассматривать как нетривиальные обобщения статических задач нелинейной теории упругости. Они могут быть полезны при моделировании нелинейных явлений, наблюдаемых в полимерных гелях, а также при прогнозировании поведения полимеров с высоким содержанием пластификатора в условиях длительного хранения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bashir S. et al.* Fundamental concepts of hydrogels: synthesis, properties, and their applications // *Polymers*. 2020. V. 12. 2702.  
<https://doi.org/10.3390/polym12112702>
2. *Валуев Л.И., Валуева Т.А., Валуев И.Л., Платэ Н.А.* Полимерные системы для контролируемого выделения биологически активных соединений // *Успехи биол. хим.* 2003. Т. 43. С. 307–328.
3. *Buengera D., Topuza F., Groll J.* Hydrogels in sensing applications // *Prog. Polym. Sci.* 2012. V. 37. № 12. P. 1678–1719.  
<https://doi.org/10.1016/j.progpolymsci.2012.09.001>
4. *Calvert P.* Hydrogels for soft machines // *Adv. Mater.* 2009. V. 21. № 7. P. 743–756.  
<https://doi.org/10.1002/adma.200800534>

5. Chyzy A., Tomczykowa M., Plonska-Brzezinska M.E. Hydrogels as potential nano-, micro- and macroscale systems for controlled drug delivery // *Materials*. 2020. V. 13. № 1. P. 188.  
<https://doi.org/10.3390/ma13010188>
6. Chai Q., Jiao Y., Yu X. Hydrogels for biomedical applications: their characteristics and the mechanisms behind them // *Gels*. 2017. V. 3. № 1. P. 6.  
<https://doi.org/10.3390/gels3010006>
7. Deligkaris K., Tadele T.S., Olthuis W., Berg A. Hydrogel-based devices for biomedical applications // *Sensor Actuat. B*. 2010. V. 147. № 2. P. 765–774.  
<https://doi.org/10.1016/j.snb.2010.03.083>
8. Ding M. et al. Multifunctional soft machines based on stimuli-responsive hydrogels: from freestanding hydrogels to smart integrated systems // *Mater. Today Adv.* 2020. V. 8. P. 100088.
9. Hlavac N., Kasper M., Schmidt C.E. Progress toward finding the perfect match: hydrogels for treatment of central nervous system injury // *Mater. Today Adv.* 2020. V. 6. P. 100039.  
<https://doi.org/10.1016/j.mtadv.2020.100088>
10. Hoare T.R., Kohane D.S. Hydrogels in drug delivery: Progress and challenges // *Polymer*. 2008. V. 49. № 8. P. 1993–2007.  
<https://doi.org/10.1016/j.polymer.2008.01.027>
11. Kopecek J. Hydrogels: from soft contact lenses and implants to self-assembled nanomaterials // *J. Polym. Sci. A Polym. Chem.* 2009. V. 47. P. 5929–5946.  
<https://doi.org/10.1002/pola.23607>
12. Kordea J.M., Kandasubramanian B. Naturally biomimicked smart shape memory hydrogels for biomedical functions // *Chem. Eng. J.* 2020. V. 379. P. 122430.  
<https://doi.org/10.1016/j.cej.2019.122430>
13. Lee K.Y., Mooney D.J. Hydrogels for tissue engineering // *Chem. Rev.* 2001. V. 101. № 7. P. 1869–1880.  
<https://doi.org/10.1021/cr000108x>
14. Liu X., Liu J., Lin S., Zhao X. Hydrogel machines // *Mater. Today*. 2020. V. 36. № 6. P. 102–124.  
<https://doi.org/10.1016/j.mattod.2019.12.026>
15. Nishino M., Gong J., Osada Y. Polymer gels as a chemical valve // *Bioseparation*. 1999. V. 7. P. 269–280.  
<https://doi.org/10.1023/A:1008049525761>
16. Oveissi F., Fletcher D.F., Dehghani F., Naficy S. Tough hydrogels for soft artificial muscles // *Mater. Design*. 2021. V. 203. P. 109609.
17. Peppas N.A., Hilt J.Z., Khademhosseini A., Langer R. Hydrogels in biology and medicine: from molecular principles to bionanotechnology // *Adv. Mater.* 2006. V. 18. № 11. P. 1345–1360.  
<https://doi.org/10.1002/adma.200501612>
18. Mora S., Phou T., Fromental J.-M., Pomeau Y. Gravity driven instability in elastic solid layers // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 113. P. 178301.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.178301>
19. Riccobelli D., Ciarletta P. Rayleigh–Taylor instability in soft elastic layers // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2017. V. 375. № 2039. P. 20160421.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.2016.0421>
20. Chakrabarti A., Mora S., Richard F., Phou T., Fromental J.-M., Pomeau Y., Audoly B. Selection of hexagonal buckling patterns by the elastic Rayleigh–Taylor instability // *J. Mech. Phys. Solids*. 2018. V. 121. P. 234–257.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.07.024>
21. Zheng Y., Lai Y., Hu Y., Cai S. Rayleigh–Taylor instability in a confined elastic soft cylinder // *J. Mech. Phys. Solids*. 2019. V. 131. P. 221–229.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.07.006>
22. Rajagopal K.R., Tao L. *Mechanics of mixtures*. World Scientific Publishing, 1995. 195 p.
23. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // *Handbuch der Physik*. Vol. III/1 / Ed. S. Flugge. Berlin: Springer-Verlag, 1960. P. 226–793.
24. Денисюк Е.Я., Терешатов В.В. Теория механо диффузионных процессов переноса многокомпонентных жидкостей в сшитых эластомерах // *ПМТФ*. 1997. Т. 38. № 6. С. 113–129.
25. Денисюк Е.Я., Терешатов В.В. Нелинейная теория процессов набухания эластомеров в низкомолекулярных жидкостях // *Высокомолек. соед. А*. 2000. Т. 42. № 1. С. 71–83.

26. Денисюк Е.Я., Волкова Е.Р. Влияние термодинамического качества растворителя на кинетику набухания полимерных сеток // Высокомолек. соед. А. 2003. Т. 45. № 7. С. 1160–1168.
27. Денисюк Е.Я., Волкова Е.Р. О проницаемости полимерных сеток // Высокомолек. соед. А. 2004. Т. 46. № 5. С. 896–904.
28. Денисюк Е.Я. Механика и термодинамика высокоэластичных материалов, насыщенных жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 1. С. 118–138.
29. Денисюк Е.Я. Механика и термодинамика деформирования насыщенных жидкостью упругих материалов в приближении малых деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 54–69.
30. Ciarlet P. *Mathematical Elasticity*. Vol. I. Amsterdam: Elsevier, 1988. = Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
31. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
32. Prigogine I., Defay R. *Chemical Thermodynamics*. N.Y.: Longmans Green and Co, 1954. = Пригожин И., Дефэй Р. *Химическая термодинамика*. Новосибирск: Наука, 1966. 508 с.
33. Flory P.J., Rehner J. *Statistical mechanics of cross-linked polymer networks* // J. Chem. Phys. 1943. V. 11. P. 512–526.  
<https://doi.org/10.1063/1.1723791>

УДК 539.3

**ТЕРМОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОГО ЭЛАСТОМЕРА  
ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**© 2022 г. Б. А. Жуков<sup>a,b,\*</sup><sup>a</sup>Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия<sup>b</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

\*e-mail: zhukov.b.a@gmail.com

Поступила в редакцию 12.02.2021 г.

После доработки 14.04.2021 г.

Принята к публикации 24.05.2021 г.

Детали из эластомеров обычно работают в температурном диапазоне, в котором обладают высокоэластичной деформацией. Тепловое расширение высокоэластичной деформацией не является и присутствует во всем диапазоне температур, в котором эластомер существует. Эти виды деформации по-разному реагируют на изменение температуры. Целью работы является выяснение в рамках феноменологического подхода влияния температурных зависимостей этих деформаций на температурную зависимость компонент тензора напряжений, описывающих напряженное состояние несжимаемого эластомера при конечной деформации на примере конкретной задачи. Использован вариант постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, позволяющий учитывать тепловое расширение как самодостаточный процесс, независимый от высокоэластичной деформации. В рамках этой постановки получено новое точное решение связанной задачи термоупругости о конечном продольном сдвиге длинной цилиндрической втулки с потенциалом энергии деформации Джента–Томаса в неоднородном температурном поле. Показано, что температурная зависимость касательного напряжения, вызывающего продольный сдвиг, определяется только тепловым расширением, тогда как температурная зависимость нормальных напряжений существенно определяется тепловым расширением, и слабее температурным изменением высокоэластичной деформации. Температурная зависимость сдвиговой жесткости определяется, в основном, температурным изменением высокоэластичной деформации.

*Ключевые слова:* термомеханика, тепловое расширение, высокоэластичная конечная деформация, неоднородное температурное поле, гиперупругость, несжимаемость, потенциал Джента–Томаса

DOI: 10.31857/S0572329922030138

**1. Введение.** Для инженерных приложений эластомеров, работающих в широком диапазоне температур, важны методы расчета температурной зависимости напряженно-деформированного состояния. Обычно эластомеры применяются в области температур, при которых проявляется высокоэластичная деформация. Тепловое расширение высокоэластичной деформацией не является и присутствует во всем диапазоне температур, в котором эластомер существует. Эти виды деформации по-разному реагируют на изменение температуры. Целью работы является выяснение в рамках феноменологического подхода влияния температурных зависимостей этих деформаций на температурную зависимость компонент тензора напряжений, описывающих напря-

женное состояние несжимаемого эластомера при конечной деформации на примере конкретной задачи.

В прошлом веке была разработана статистическая теория высокой эластичности полимеров. С историей вопроса можно познакомиться в [1–4]. Важным результатом этой теории, с точки зрения инженерных приложений, было существование единственного потенциала энергии деформации (потенциала Трелоара, неогукковского потенциала)

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad \mu = \frac{\rho \tilde{R} T}{M_c} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность массы,  $\tilde{R}$  – универсальная газовая постоянная,  $M_c$  – средняя молекулярная масса,  $T$  – абсолютная температура,  $I_1$  – первый из трех главных инвариантов деформации

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_3^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (1.2)$$

где  $\lambda_i$  – кратности растяжения вдоль главных направлений деформации. Дальнейшие эксперименты [5] показали, что  $\partial W / \partial I_2 \neq 0$  и уменьшается с увеличением  $I_2$ . Появилась проблема, состоящая в том, чтобы описать общую форму функции энергии деформации, объясняющую этот факт. Эта проблема не решена до сих пор, что проявляется во множестве форм функции энергии деформации, предлагаемых разными авторами [6]. Реалистичная формула, которая в достаточной степени аппроксимирует общие данные о деформациях резины, приведенные в [5], была выдвинута Джентом и Томасом [7]. Это выражение имеет вид

$$W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 \ln \left( \frac{I_2}{3} \right), \quad c_1, c_2 - \text{const} \quad (1.3)$$

Форма (1.3) была выбрана главным образом по причине математической простоты [1] и перехода при  $c_2 = 0$  и  $c_1 = \mu/2$  в выражение (1.1). Дифференцирование дает соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = c_1, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{c_2}{I_2}$$

соответствующие нелинейной зависимости  $\partial W / \partial I_2$  от  $I_2$ . В формуле (1.1) температурная зависимость потенциала энергии деформации проявляется через зависимость модуля сдвига от температуры. Подчеркнем, что в (1.1) тепловое расширение не учитывается, то есть эта формула описывает температурную зависимость высокоэластичной деформации. Ниже будет использован этот подход для описания температурной зависимости более сложного, чем (1.1) потенциала (1.3).

Предлагаемая работа относится к феноменологическим. Использован вариант постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, позволяющий учитывать тепловое расширение как самодостаточный процесс, независимый от высокоэластичной деформации. От других работ по термоупругости резины она отличается уточнением способа учета теплового расширения. В работе рассматривается стандартная задача о конечном продольном сдвиге полого цилиндра, но в рамках предложенной постановки получено новое точное решение связной задачи термоупругости. Приводятся решения как в неоднородном осесимметричном температурном поле, так и в отсутствии его, как с учетом теплового расширения, так и без него. Проводится сравнение с решением в рамках потенциала (1.1).

**2. Основные соотношения.** При рассмотрении задач термоупругости обычно полагают, чтобы напряжение, приращения свободной энергии и энтропии, вызванные де-

формацией, исчезали в отсчетной конфигурации [8]. При учете теплового расширения вводится разностная температура  $\theta = T - T_0$ , где  $T$  – абсолютная температура деформированной конфигурации, а  $T_0$  – однородная абсолютная температура отсчетной конфигурации. При этом считается, что тепловое расширение при  $\theta = 0$  отсутствует [8–10]. С учетом этих положений предлагается следующий вариант постановки задач статической термоупругости однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях.

Будем описывать конечную деформацию эластомера с помощью тензора градиента деформации  $\mathbf{F}$ , задаваемого выражением

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  – векторы места точек тела в деформированной (текущей) и недеформированной (отсчетной) конфигурациях соответственно. Точка означает скалярное произведение (свертку по одному тензорному индексу).

Согласно рациональной механике сплошных сред [12, 13] для простого однородного материала с массовой плотностью свободной энергии  $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, T)$  уравнения состояния (определяющие уравнения) принимают вид

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^T}, \quad \hat{\eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.2)$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность массы в отсчетной конфигурации,  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений Пиолы [12] (по [13] это транспонированный первый тензор Пиолы–Кирхгофа),  $\hat{\eta}$  – массовая плотность энтропии. Если материал начально изотропен, то  $\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3, T)$ . Здесь  $I_1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}$ ,  $I_2 = 1/2(I_1^2 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}^2)$ ,  $I_3 = J^2 = \det \mathbf{B}$  – главные алгебраические инварианты тензора  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  – левого тензора деформации Коши–Грина [13] (в [12] это мера деформации Фингера),  $\mathbf{1}$  – единичный тензор. Значок  $T$  обозначает транспонирование, а пара точек – двойное скалярное произведение (имеется в виду вариант последовательного перемножения, когда скалярно перемножаются ближайшие векторы). Эти инварианты совпадают с (1.2).

Полагая, что изменение объема происходит только за счет теплового расширения, уравнение изменения объема выберем в виде [8–10]

$$J = \det \mathbf{F} = g(\theta) \quad (2.3)$$

Здесь  $g(\theta)$  – некоторая монотонная функция приращения температуры  $\theta$ , причем  $g(0) = 1$ . Обычно используются выражения  $g(\theta) = e^{3\alpha\theta}$ , где  $\alpha$  – линейный коэффициент теплового расширения. В [10] показано, что из (2.3) и (2.2) следует выражение для тензора напряжений Коши  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{1}{g(\theta)} \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - g(\theta) \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right) + \gamma \mathbf{1} \quad (2.4)$$

где удельная энергия упругой деформации (потенциал энергии деформации)  $W$ , отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации, связана с массовой плотностью свободной энергии соотношением  $W = \rho_0 \Psi$ ,  $\gamma$  – функция гидростатического давления. Выражения (2.3) и (2.4) учитывают тепловое расширение.

Учет температурной зависимости высокоэластичной деформации производится через температурную зависимость модулей упругости [1, 11]. Таким образом, влияние поля температур на потенциал энергии деформации проявляется двояко, через зависимость модулей упругости и, неявно, через механизм теплового расширения, влияющий на инварианты тензора  $\mathbf{B}$ . В качестве потенциала энергии деформации принят

потенциал Джента–Томаса (1.3). В [14] приводится выражение для этого потенциала в форме, переходящей в закон Гука при малых деформациях

$$W = \mu \left\{ \frac{3-2\beta}{6} (I_1 - 3) + \beta \ln \left( \frac{I_2}{3} \right) \right\}, \quad 0 \leq \beta < \frac{3}{2}$$

Здесь модуль сдвига  $\mu$  в соответствии с [1] имеет вид

$$\mu = \frac{\rho \tilde{R} T}{M_c} = \frac{\rho_0 \tilde{R} T_0}{M_c} \frac{T}{T_0 J} = \frac{\mu_0}{g(\theta)} \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right), \quad \mu_0 = \frac{T_0 \rho_0 \tilde{R}}{M_c} \quad (2.5)$$

Другими словами, модуль сдвига зависит от температуры как явно, так и неявно через тепловое расширение. Таким образом, получим

$$W = \frac{\mu_0}{g(\theta)} \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \left\{ \frac{3-2\beta}{6} (I_1 - 3) + \beta \ln \left( \frac{I_2}{3} \right) \right\}, \quad 0 \leq \beta < \frac{3}{2} \quad (2.6)$$

При  $\beta = 0$  выражение (2.6) перейдет в потенциал Трелоара

$$W = \frac{\mu_0}{2g(\theta)} \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) (I_1 - 3) = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3)$$

В отсутствие массовых сил уравнение равновесия запишется в форме [12]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0$$

Здесь  $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{R}^k \partial / \partial q^k$  – оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации,  $\mathbf{R}^k$  – базис взаимный с базисом  $\mathbf{R}_k$ , то есть  $\mathbf{R}_k = \partial \mathbf{R} / \partial q^k$ ,  $\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}_p = \delta_p^k$ , где  $q^1, q^2, q^3$  – материальные координаты точек тела,  $\delta_p^k$  – символ Кронекера. Это уравнение можно выразить и через тензор напряжений Коши [12] в виде

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (2.7)$$

Здесь  $\nabla = \mathbf{r}^k \partial / \partial q^k$  – оператор Гамильтона в деформированной конфигурации,  $\mathbf{r}^k$  – базис взаимный с базисом  $\mathbf{r}_k$ , то есть

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{r}^k = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{R}^k \quad (2.8)$$

Согласно (2.7) из (2.4) получим

$$\nabla \gamma = -2 \nabla \cdot \left[ \frac{W_1}{g(\theta)} \mathbf{B} - g(\theta) W_2 \mathbf{B}^{-1} \right] \quad (2.9)$$

Здесь введены обозначения  $W_1 = \partial W / \partial I_1$ ,  $W_2 = \partial W / \partial I_2$ . Исключая функцию  $\gamma$  в (2.9), будем иметь

$$\nabla \times \nabla \cdot \left[ \frac{W_1}{g(\theta)} \mathbf{B} - g(\theta) W_2 \mathbf{B}^{-1} \right] = 0 \quad (2.10)$$

Среди простых, однородных и начально изотропных материалов будем рассматривать материалы, подчиняющиеся закону Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T = -\lambda \nabla \theta \quad (2.11)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – удельный тепловой поток в актуальной конфигурации,  $\lambda$  – постоянный коэффициент теплопроводности. В отсутствие внутренних источников теплоты для стационарного потока тепла уравнение теплового баланса имеет вид [12]

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.12) и выражения (2.11) следует стационарное уравнение теплопроводности

$$\nabla \cdot \nabla \theta = 0 \quad (2.13)$$

которое дополняется граничными условиями. Уравнения (2.3) и (2.13) образуют связанную систему уравнений, описывающих поле температур и тепловое расширение независимо от высокоэластичной деформации.

**3. Решение задачи термоупругости о конечном продольном сдвиге длинной цилиндрической втулки с потенциалом энергии деформации Джента–Томаса в неоднородном температурном поле.** По внутренней боковой поверхности втулка приклеена к неподвижной жесткой обойме. На внешней боковой поверхности действует продольная сдвигающая сила с модулем  $Q$  и нулевые нормальное и окружное усилия. Полагается, что нагрузка “мертвая”, то есть вектор  $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$  не меняет величину и направление в процессе деформации ( $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{k}$  – единичный базис цилиндрической системы координат). На внутренней боковой поверхности поддерживается температура  $T_1$ , а на внешней  $T_2$ . Через  $R_1$  и  $R_2$  обозначаются внутренний и внешний радиусы эластомерной втулки, а через  $H$  ее длина. Эта задача для различных потенциалов энергии деформации, как в линейной, так и в нелинейной постановке решалась многими авторами. В рамках связанной термоупругости эта задача решалась в [8] с оригинальным термоупругим аналогом одноконстантного потенциала энергии деформации Джента–Томаса. Для предлагаемой постановки с двухконстантным потенциалом Джента–Томаса точное решение получено впервые.

*3.1. Общая постановка задач в рамках полуобратного метода.* Материальная система координат выбрана совпадающей в отсчетной конфигурации с цилиндрической системой  $(R, \Phi, Z)$ , причем ось  $OZ$  совпадает с осью симметрии втулки. Втулка считается достаточно длинной, чтобы пренебречь торцевыми эффектами и считать напряженно-деформированное состояние независимым от  $Z$ .

В этих условиях можно использовать кинематическую гипотезу коаксиальных сечений, то есть сечения цилиндрические и коаксиальные до деформации остаются такими и после деформации (ось единая для всех таких сечений совпадает с осью симметрии втулки). В цилиндрической системе координат в силу осевой симметрии вектор места в деформированной (актуальной) конфигурации задается соотношением

$$\mathbf{r} = f(R)\mathbf{e}_R + [Z + w(R)]\mathbf{k} \quad (3.1)$$

Здесь  $r = f(R)$ ,  $\varphi = \Phi$ ,  $z = Z + w(R)$  – координаты точек в актуальной конфигурации в цилиндрической системе координат, а  $w(R)$  и  $f(R)$  подлежащие определению функции. Граничные условия для этих функций имеют вид  $f(R_1) = R_1$ ,  $w(R_1) = 0$ . Температурное поле так же полагается осесимметричным  $\theta = \theta(R)$ . Оператор Гамильтона материальной системы координат в отсчетной конфигурации записывается в форме

$$\overset{0}{\nabla} = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\Phi}{R} \frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.2)$$

В актуальной конфигурации его можно записать в виде

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\Phi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.3)$$

Уравнение (2.13) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla \cdot \nabla \theta = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Транспонированный тензор градиента деформации по (3.1) и (3.2) получается в виде

$$\mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = \frac{df(R)}{dR} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \frac{dw(R)}{dR} \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.5)$$

Так, что условие несжимаемости ( $J = \det \overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = B(R)$  где  $B(R) = g[\theta(R)] = e^{3\alpha\theta(R)}$ ) принимает форму дифференциального уравнения

$$\frac{f(R) f'(R)}{R} = B(R) \quad \text{или} \quad f'(R) = \frac{RB(R)}{f(R)} \quad (3.6)$$

где штрих означает производную по  $R$ . Уравнения (3.4) и (3.6) образуют связную систему уравнений. Эта система описывает тепловое расширение и температурное поле независимо от потенциала энергии деформации. Будем искать решение системы в параметрической форме. Решение уравнения (3.4), дополненного граничными условиями  $r(R_1) = f(R_1) = R_1$ ,  $\theta(R_1) = \theta[f(R_1)] = \theta_1$ , имеет вид

$$\theta(R) = \eta \ln \frac{f(R)}{R_1} + \theta_1 \quad (3.7)$$

Здесь  $\eta$  [°C] – размерная константа интегрирования, играющая роль параметра.

По (3.7) вычисляем  $B(R) = e^{3\alpha\theta(R)} = a(f(R)/R_1)^{3\alpha\eta}$ ,  $a = e^{3\alpha\theta_1}$ , и подставляем в (3.6). Получаем  $f^{1-3\alpha\eta}(R) f'(R) = a R R_1^{-3\alpha\eta}$ . Решение этого уравнения с граничным условием  $f(R_1) = R_1$  имеет выражение

$$f(R) = R_1 \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2-3\alpha\eta}} \quad (3.8)$$

и (3.7) можно переписать

$$\theta(R) = \frac{\eta}{2-3\alpha\eta} \ln \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 - 1 \right] \right\} + \theta_1 \quad (3.9)$$

Функции (3.8) и (3.9) описывают процесс теплового расширения и температурное поле в параметрической форме. Так же можно переписать выражение для  $B(R)$

$$B(R) = a \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{3\alpha\eta}{2-3\alpha\eta}}$$

Используя (3.6), из (3.5) получим выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T &= \frac{RB(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= \frac{RB(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \mathbf{k} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Обратный тензор к  $\mathbf{F}$  вычисляется с помощью следствия из теоремы Гамильтона–Кэли

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} &= [\mathbf{F}^2 - I_1(\mathbf{F})\mathbf{F} + I_2(\mathbf{F})\mathbf{1}]J^{-1} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{k} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{F}^T)^{-1} = \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.11)$$

По этим выражениям вычисляются

$$\mathbf{B} = \frac{R^2 B^2(R)}{f^2(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f^2(R)}{R^2} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \frac{RB(R)}{f(R)} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + (1 + w'^2(R)) \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 B^2(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R^2}{f^2(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RB(R)} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.13)$$

$$I_1(\mathbf{B}) = \frac{R^2 B^2(R)}{f^2(R)} + \frac{f^2(R)}{R^2} + 1 + w'^2(R)$$

$$I_2(\mathbf{B}) = B^2(R) \left( 1 + \frac{R^2}{f^2(R)} \right) + \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2} \quad (3.14)$$

Используя (2.4), (3.12), (3.13) (функция гидростатического давления  $\gamma$  считается зависящей только от  $R$ ), получим

$$\mathbf{S} = S_{RR} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + S_{\Phi\Phi} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + S_{RZ} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + S_{ZZ} \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.15)$$

где

$$S_{RR} = s_{RR}(R) + \gamma(R), \quad S_{\Phi\Phi} = s_{\Phi\Phi}(R) + \gamma(R), \quad S_{ZZ} = s_{ZZ}(R) + \gamma(R), \quad S_{RZ} = s_{RZ}(R)$$

$$s_{RR}(R) = 2 \left[ W_1 \frac{R^2 B(R)}{f^2(R)} - W_2 \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 B(R)} \right], \quad s_{\Phi\Phi}(R) = 2 \left[ W_1 \frac{f^2(R)}{R^2 B(R)} - W_2 \frac{R^2 B(R)}{f^2(R)} \right]$$

$$s_{ZZ}(R) = 2 \left[ W_1 \frac{1 + w'^2(R)}{B(R)} - W_2 B(R) \right], \quad s_{RZ}(R) = 2 \left[ W_1 \frac{R}{f(R)} + W_2 \frac{f(R)}{R} \right] w'(R)$$

С помощью (3.3) и (3.15), перепишем (2.7) в компонентах

$$\frac{\partial}{\partial r} [r S_{RZ}(R)] = 0 \quad (3.16)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} S_{RR}(R) + S_{RR}(R) - S_{\Phi\Phi}(R) = r \frac{\partial}{\partial r} [s_{RR}(R) + \gamma(R)] + s_{RR}(R) - s_{\Phi\Phi}(R) = 0 \quad (3.17)$$

Первый интеграл уравнения (3.16) записывается в форме

$$r S_{RZ}(R) = c \Leftrightarrow S_{RZ}(R) = \frac{c}{f(R)} \quad (3.18)$$

Константа интегрирования  $c$  находится из силовых граничных условий на цилиндрической боковой поверхности. Вектор единичной нормали к боковой поверхности не меняется в процессе деформации и совпадает с  $\mathbf{e}_R$ . Главный вектор на боковой поверхности получим, используя (3.15) и (3.18), в виде

$$\frac{Q}{H} \mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{S} r d\Phi = \int_0^{2\pi} \{ S_{RR}(R) \mathbf{e}_R + S_{RZ}(R) \mathbf{k} \} f(R) d\Phi = 2\pi S_{RZ}(R) f(R) \mathbf{k} = 2\pi c \mathbf{k}$$

То есть  $c = Q/(2\pi H)$ . Теперь имеем выражение для продольного касательного напряжения

$$S_{RZ} = \frac{Q}{2\pi H} \frac{1}{f(R)} \quad (3.19)$$

И из (3.15) и (3.18) получаем уравнение для нахождения продольного смещения

$$w'(R) = \frac{Q}{4\pi H} \frac{1}{f(R) \left[ W_1 \frac{R}{f(R)} + W_1 \frac{f(R)}{R} \right]} \quad (3.20)$$

Исходя из формулы (3.19), касательные напряжения не зависят от вида потенциала энергии деформации, а зависимость от температуры определяется только тепловым расширением. По формуле (3.20) от вида потенциала энергии деформации зависит продольное смещение, соответствующее касательному напряжению, и его температурная зависимость определяется не только тепловым расширением, но и температурной зависимостью высокоэластичной деформации.

Обратимся к уравнению (3.17). По (2.8), воспользовавшись (3.10) и (3.11), запишем

$$\mathbf{r}_1 = \frac{RB(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R + w'(R) \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = f(R) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}^1 = \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{r}^3 = -\frac{f(R)w'(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R + \mathbf{k}$$

и получим оператор Гамильтона в материальной системе координат  $(R, \Phi, Z)$  в актуальной конфигурации

$$\nabla = \frac{f(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \left[ -\frac{f(R)w'(R)}{RB(R)} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \right] \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.21)$$

Сравнивая (3.21) и (3.3), получим

$$\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{f^2(R)}{RB(R)} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{w'(R)f^2(R)}{RB(R)} \frac{\partial}{\partial Z}$$

используя которое перепишем уравнение (3.17) в виде

$$\frac{\partial}{\partial R} [\gamma(R)] = -\frac{\partial}{\partial R} [s_{RR}(R)] - \frac{RB(R)[s_{RR}(R) - s_{\Phi\Phi}(R)]}{f^2(R)}$$

Откуда

$$\gamma(R) = -s_{RR}(R) - \int_{R_1}^R \frac{tB(t)[s_{RR}(t) - s_{\Phi\Phi}(t)]}{f^2(t)} dt + \gamma_0$$

Здесь  $\gamma_0$  – константа интегрирования, которая находится из граничного условия  $S_{RR}(R_2) = 0$  или

$$\gamma_0 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{tB(t)[s_{RR}(t) - s_{\Phi\Phi}(t)]}{f^2(t)} dt \quad \text{и} \quad \gamma(R) = -s_{RR}(R) + \int_R^{R_2} \frac{tB(t)[s_{RR}(t) - s_{\Phi\Phi}(t)]}{f^2(t)} dt$$

Подставляя (3.15) и (3.15), будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma(R) = & -2 \left[ W_1 \frac{R^2 B(R)}{f^2(R)} - W_2 \frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 B(R)} \right] + \\ & + 2 \int_R^{R_2} W_1 \left( \frac{t^3 B^2(t)}{f^4(t)} - \frac{1}{t} \right) + W_2 \left( \frac{t^3 B^2(t)}{f^4(t)} - \frac{(1+w'^2(t))}{t} \right) dt \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным величинам, переменным и параметрам.

$$\bar{\rho} = \frac{R}{R_1}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad \delta = \frac{\Delta}{R_1}, \quad \omega = \frac{w}{R_1}, \quad \nu = \frac{f}{R_1}, \quad q = \frac{Q}{2\pi R_1 H \mu_0}, \quad \tilde{\gamma}(\bar{\rho}) = \frac{\gamma(\bar{\rho})}{\mu_0}$$

$$\sigma_{RZ} = \frac{S_{RZ}}{\mu_0}, \quad \sigma_{RR} = \frac{S_{RR}}{\mu_0}, \quad \sigma_{\Phi\Phi} = \frac{S_{\Phi\Phi}}{\mu_0}, \quad \dot{\omega}(\bar{\rho}) = \frac{\partial \omega(\bar{\rho})}{\partial \bar{\rho}} = \frac{\partial w(R)}{\partial R} = w'(R)$$

$$\Sigma_{RR} = \frac{S_{RR}}{\mu_0}, \quad \Sigma_{\Phi\Phi} = \frac{S_{\Phi\Phi}}{\mu_0}, \quad \Sigma_{ZZ} = \frac{S_{ZZ}}{\mu_0}, \quad \Sigma_{RZ} = \frac{S_{RZ}}{\mu_0}$$

Здесь  $\Delta$  – продольное смещение внешней боковой поверхности втулки относительно внутренней. Используя эти соотношения, получим ( $\bar{\rho} \in [1, \kappa]$ )

- выражение, характеризующее поле температур

$$\theta(\bar{\rho}) = \frac{\eta}{2-3\alpha\eta} \ln \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} [\bar{\rho}^2 - 1] \right\} + \theta_1 \quad (3.22)$$

- выражения, описывающие напряженно-деформированное состояние

$$\nu(\bar{\rho}) = \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} [\bar{\rho}^2 - 1] \right\}^{\frac{1}{2-3\alpha\eta}} \quad (3.23)$$

$$B(\bar{\rho}) = a \left\{ 1 + \frac{a(2-3\alpha\eta)}{2} [\bar{\rho}^2 - 1] \right\}^{\frac{3\alpha\eta}{2-3\alpha\eta}}, \quad a = e^{3\alpha\theta_1}$$

$$\dot{\omega}(\bar{\rho}) = \frac{\mu_0 q}{2} \left[ W_1 \bar{\rho} + W_2 \frac{\nu^2(\bar{\rho})}{\bar{\rho}} \right]^{-1} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{RR}(\bar{\rho}) &= \sigma_{RR}(\bar{\rho}) + \tilde{\gamma}(\bar{\rho}), \quad \Sigma_{\Phi\Phi}(\bar{\rho}) = \sigma_{\Phi\Phi}(\bar{\rho}) + \tilde{\gamma}(\bar{\rho}) \\ \Sigma_{ZZ}(\bar{\rho}) &= \sigma_{ZZ}(\bar{\rho}) + \tilde{\gamma}(\bar{\rho}), \quad \Sigma_{RZ}(\bar{\rho}) = \sigma_{RZ}(\bar{\rho}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\sigma_{RR}(\bar{\rho}) = \frac{2}{\mu_0} \left[ W_1 \frac{\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})}{\nu^2(\bar{\rho})} - W_2 \frac{\nu^2(\bar{\rho})(1 + \dot{\omega}^2(\bar{\rho}))}{\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})} \right], \quad \sigma_{RZ}(\bar{\rho}) = \frac{q}{\nu(\bar{\rho})}$$

$$\sigma_{\Phi\Phi}(\bar{\rho}) = \frac{2}{\mu_0} \left[ W_1 \frac{\nu^2(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})} - W_2 \frac{\bar{\rho}^2 B(\bar{\rho})}{\nu^2(\bar{\rho})} \right], \quad \sigma_{ZZ}(\bar{\rho}) = \frac{2}{\mu_0} \left[ W_1 \frac{1 + \dot{\omega}^2(\bar{\rho})}{B(\bar{\rho})} - W_2 B(\bar{\rho}) \right]$$

$$\tilde{\gamma}(\bar{\rho}) = -\sigma_{RR}(\bar{\rho}) + \frac{2}{\mu_0} \int_{\bar{\rho}}^{\kappa} W_1 \left( \frac{t^3 B^2(t)}{\nu^4(t)} - \frac{1}{t} \right) + W_2 \left( \frac{t^3 B^2(t)}{\nu^4(t)} - \frac{(1 + \dot{\omega}^2(t))}{t} \right) dt$$

Для потенциала Джента-Томаса

$$W_1 = \frac{\mu_0}{B(R)} \left[ 1 + \frac{\theta(\bar{\rho})}{T_0} \right] \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{3} \right), \quad W_2 = \frac{\mu_0}{B(R)} \left[ 1 + \frac{\theta(\bar{\rho})}{T_0} \right] \frac{\beta}{I_2} \quad (3.26)$$

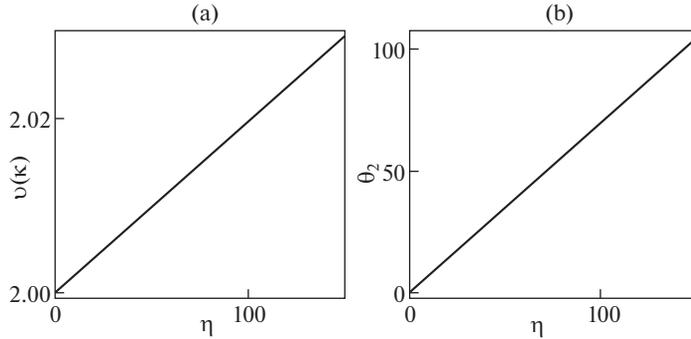


Рис. 1. Зависимости  $v(\kappa)$  (а) и  $\theta_2 = \theta(\kappa)$  (б) от  $\eta$ .

$$I_2 = B^2(\bar{\rho}) \left( 1 + \frac{\bar{\rho}^2}{v^2(\bar{\rho})} \right) + \frac{v^2(\bar{\rho})(1 + \dot{\omega}^2(\bar{\rho}))}{\bar{\rho}^2} \quad (3.27)$$

и исключая  $I_2$  в выражениях (3.24), (3.26), (3.27), получим относительно  $\dot{\omega}$  кубическое уравнение

$$\begin{aligned} a_3 \dot{\omega}^3(\bar{\rho}) + a_2 \dot{\omega}^2(\bar{\rho}) + a_1 \dot{\omega}(\bar{\rho}) + a_0 &= 0 \\ a_3 &= \frac{\bar{\rho} v^4(\bar{\rho})(3 - 2\beta)}{B(R)} \left[ 1 + \frac{\theta(\bar{\rho})}{T_0} \right], \quad a_2 = -3q v^4(\bar{\rho}) \\ a_1 &= \{\bar{\rho}^3 B^2(\bar{\rho})[\bar{\rho}^2 + v^2(\bar{\rho})](3 - 2\beta) + \bar{\rho}(4\beta + 3)v^4(\bar{\rho})\} B^{-1}(R) \left[ 1 + \frac{\theta(\bar{\rho})}{T_0} \right] \\ a_0 &= -3q \{\bar{\rho}^2[\bar{\rho}^2 + v^2(\bar{\rho})] B^2(\bar{\rho}) + v^4(\bar{\rho})\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

**3.2. Результаты вычислений.** В данной работе принят линейный коэффициент теплового расширения  $\alpha = 0.0002^\circ\text{C}^{-1}$ , характерный для эластомеров. Недеформированной конфигурации соответствует однородная температура  $T_0 = 293$  К. Значение разностной температуры на внутренней поверхности  $\theta_1 = T_1 - T_0$  полагается равным  $0^\circ\text{C}$ . Значение разностной температуры на внешней поверхности  $\theta_2 = T_2 - T_0$  полагается равным  $100^\circ\text{C}$ . Случаю отсутствия нагрева соответствует разностная температура на внешней поверхности  $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$ .

Уравнение (3.28) имеет вещественные коэффициенты и для принятых значений  $\theta \in [0, 100^\circ\text{C}]$ ,  $\kappa \in [1.2, 2]$ ,  $q \in [0, 0.8]$ ,  $\beta \in [0.2/3]$  у него один вещественный и два комплексно сопряженных корня. Физический смысл имеет только вещественный корень.

Все вычисления проводились для  $\kappa = 2$ . Зависимости безразмерных напряжений от безразмерного радиуса вычислялись при  $q = 0.8$ .

На рис. 1(а, б) представлены зависимости,  $v(\kappa)$  и  $\theta_2 = \theta(\kappa)$  от  $\eta$ . Равенство  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$  для  $\kappa = 2$  достигается при  $\eta = 141.448^\circ\text{C}$ , а  $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$  при  $\eta = 0$ .

Имея аналитическое решение (3.22)–(3.25) в виде функций, зависящих от  $\alpha$  и  $\theta_2$  как от параметров, легко выяснить степень влияния теплового расширения и температурной зависимости высокоэластичной составляющей на свойства этого решения.

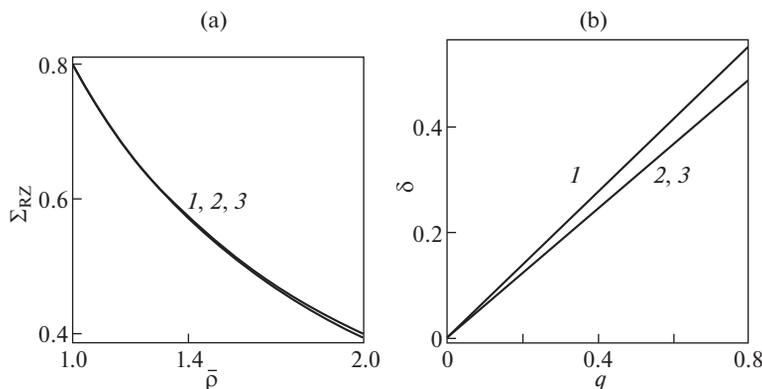


Рис. 2. Зависимости  $\Sigma_{RZ}$  от  $\bar{\rho}$  (а). Зависимости  $\delta$  от  $q$  при  $\beta = 0.6$  (б). 1 –  $\theta_2 = 0$ , 2 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0$ , 3 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{C}^{-1}$ .

Ниже представлены результаты вычислений в виде графиков. На каждом рисунке представлены три кривые. Кривая 1 соответствует  $\theta_2 = 0$  (отсутствию температурного поля). Кривая 2 соответствует  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0^\circ\text{C}^{-1}$  (температурное поле присутствует, но тепловое расширение отсутствует). Кривая 3 соответствует  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0.0002^\circ\text{C}^{-1}$  (температурное поле и тепловое расширение присутствуют).

На рис. 2, а приведены зависимости  $\Sigma_{RZ} = \Sigma_{RZ}(\bar{\rho})$ . Все три кривые визуально совпадают, поскольку температурная зависимость этого напряжения определяется только весьма слабым температурным изменением площади цилиндрической поверхности (3.24) за счет теплового расширения. На рис. 2, б для  $\beta = 0.6$  приведены зависимости  $\delta = \delta(q)$  (жесткостные характеристики). Повышение температуры повышает сдвиговую жесткость, а совпадение кривых 2 и 3 говорит о том, что на процесс сильнее влияет температурная зависимость высокоэластичной составляющей деформации.

На рис. 3 (а) представлены кривые зависимости  $\Sigma_{RR} = \Sigma_{RR}(\bar{\rho})$  при  $\beta = 0.6$ . Близость кривых 1 и 2 говорит о том, что температурная зависимость высокоэластичной деформации проявляется слабо. Существенное отличие кривой 3 от кривых 1, 2 показывает, что температурная зависимость радиального напряжения определяется, в основном, тепловым расширением. На рис. 3, б представлены кривые  $\Sigma_{RR} = \Sigma_{RR}(\rho)$  для  $\beta = 0$  (потенциал Трелоара). Здесь высокоэластичная деформация вообще не дает вклада в  $\Sigma_{RR}$  и эти напряжения возникают исключительно вследствие теплового расширения. Аналогичная ситуация справедлива и для температурного поведения зависимости  $\Sigma_{\text{ФФ}} = \Sigma_{\text{ФФ}}(\bar{\rho})$ , что иллюстрируется рис. 3, а с  $\beta = 0.6$  и рис. 3, б с  $\beta = 0$ .

**4. Заключение.** В рамках феноменологического подхода предложен вариант постановки задач статической термоупругости однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, позволяющий в неоднородном температурном поле учитывать как тепловое расширение, так и температурные изменения напряжений, вызванных высокоэластичной деформацией. Рассмотрена задача о конечном продольном сдвиге полого цилиндра в осесимметричном температурном поле. В рамках предложенной постановки с потенциалом Джента–Томаса получено новое аналитическое решение связанной задачи термоупругости. Общим результатом термоупругого анализа является то, что температурная зависимость разных характеристик

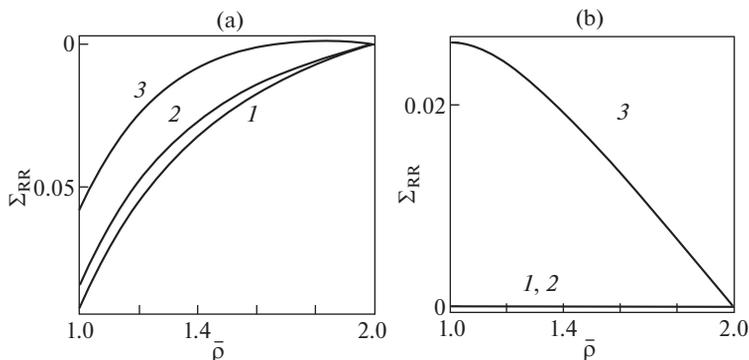


Рис. 3. Зависимости  $\Sigma_{RR}$  от  $\bar{\rho}$  при  $\beta = 0.6$  (а). Зависимости  $\Sigma_{RR}$  от  $\bar{\rho}$  при  $\beta = 0$  (б). 1 –  $\theta_2 = 0$ , 2 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0$ , 3 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

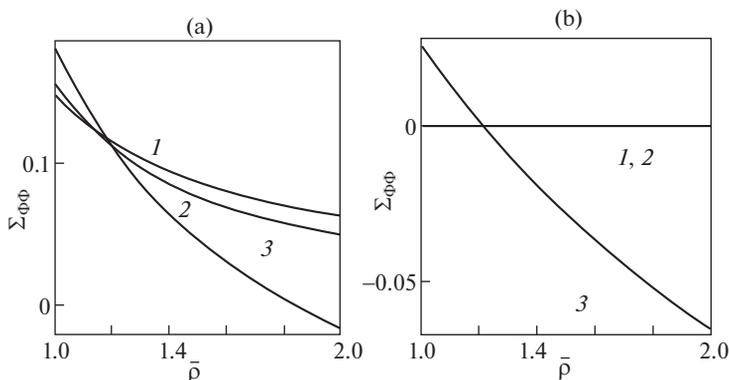


Рис. 4. Зависимости  $\Sigma_{\Phi\Phi}$  от  $\bar{\rho}$  при  $\beta = 0.6$  (а). Зависимости  $\Sigma_{\Phi\Phi}$  от  $\bar{\rho}$  при  $\beta = 0$  (б). 1 –  $\theta_2 = 0$ , 2 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0$ , 3 –  $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

напряженно-деформированного состояния может контролироваться разными механизмами. Так температурная зависимость касательного напряжения, вызывающего продольный сдвиг, определяется только тепловым расширением, тогда как температурная зависимость сдвиговой жесткости определяется, в основном, температурным изменением высокоэластичной деформации. Температурная зависимость нормальных напряжений существенно определяется тепловым расширением, и слабее температурным изменением высокоэластичной деформации при  $W_2 \neq 0$ . При  $W_2 = 0$  высокоэластичная деформация вообще не дает вклада в нормальные напряжения, и они возникают исключительно вследствие теплового расширения. Подобная информация представляет определенный интерес при проектировании резинOMETALLИЧЕСКИХ деталей, поскольку на тепловое расширение влияет наличие свободных поверхностей, которые можно задавать конструктивно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Treloar L.R.* The Physics of Rubber Elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1975. 310 p.
2. *Shen M.* Elasticity and thermoelasticity of crosslinked polymer networks // Pure and Appl. Chem. 1975. V. 43. № 1–2. P. 43–55.  
<https://doi.org/10.1351/pac197543010043>
3. *Марк Дж., Эрман Б., Эйрич Ф.* Каучук и резина. Наука и технология. Долгопрудный: Издательский Дом “Интеллект”, 2011. 768 с.
4. *Бартнев Г.М., Френкель С.Я.* Физика полимеров. Л.: Химия, 1990. 432 с.
5. *Rivlin R.S., Saunders D.W.* Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber / Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1951. V. 243. № 865. P. 251–288.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0004>
6. *Hossa L., Marczak R.J.* A new constitutive model for rubber-like materials // Mech. Computat. 2010. V. 29. P. 2759–2773.
7. *Gent A.N., Thomas A.G.* Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber // J. Polymer Sci. 1958. V. XXVIII. № 118. P. 625–628.  
<https://doi.org/10.1002/pol.1958.1202811814>
8. *Horgan C., Saccorandi G.* Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 51. № 6. P. 1127–1146.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00144-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00144-8)
9. *Ogden R.W.* On the thermoelastic modeling of rubberlike solids // J. Therm. Stress. 1992. V. 15. № 4. P. 533–557.  
<https://doi.org/10.1080/01495739208946155>
10. *Жуков Б.А.* Влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное состояние тела из несжимаемого эластомера при статических конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 17–30.  
<https://doi.org/10.31857/S057232992101013X>
11. *Saccorandi G.* On inhomogeneous deformations in finite thermoelasticity. // IMA Journal of Applied Mathematics. 1999. V. 63. P. 131–148.  
<https://doi.org/10.1093/imamat/63.2.131>
12. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
13. *Truesdell C., Noll W.* The Non-linear Field Theories of Mechanics. N. Y.: Springer, 2003. 602 p.
14. *Андреева Ю.Ю., Жуков Б.А.* Точные аналитические решения одной задачи нелинейной теории упругости для двух потенциалов энергии деформации несжимаемого материала // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 2 (46). С. 64–76.  
<https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-2-7>

УДК 531.391

## ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ N ТЕЛ В ПАРАМЕТРАХ РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ НЬЮТОНА

© 2022 г. В. Ф. Чуб<sup>a,\*</sup><sup>a</sup>Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева, Королев, Россия

\*e-mail: post2@rsce.ru

Поступила в редакцию 27.07.2020 г.

После доработки 10.07.2021 г.

Принята к публикации 17.07.2021 г.

Рассмотрен нерелятивистский аналог конформной группы – 15-параметрическая расширенная группа Галилея–Ньютона, включающая пространственно-временные переносы и гравитационные преобразования, пространственные повороты, бусты и масштабные преобразования. На основе ее 12-параметрической подгруппы (без поворотов) сформулирована нерелятивистская задача  $n$  тел с учетом известного эффекта замедления времени в гравитационном поле.

*Ключевые слова:* конформная группа, группа Галилея–Ньютона, масштабное преобразование, расширение группы, инерциальная навигация, масса фотона, гравитационное замедление времени, задача  $n$  тел

DOI: 10.31857/S0572329922030060

**1. Введение.** “Итак, если классическая механика представляет собой теорию движений тел, основанную на группе Галилея, то специальная теория относительности – это такая физическая теория, группой симметрии которой является группа Пуанкаре” [1, с. 142]. Упомянутые в приведенной цитате из школьного учебника 10-параметрические группы преобразований включают пространственно-временные переносы ( $3 + 1 = 4$  параметра), пространственные повороты (3 параметра) и бусты (3 параметра). Различаются эти группы только бустами: нерелятивистскими для группы Галилея (преобразования Галилея в узком смысле) и релятивистскими для группы Пуанкаре (чистые преобразования Лоренца) [2].

Как широко известно [3, с. 12–13; 4, с. 338–339; 5, с. 139–140], Анри Пуанкаре считал Вселенную инвариантной еще и относительно масштабного преобразования, а группы Галилея и Пуанкаре легко расширить до соответствующих 11-параметрических групп за счет добавления масштабных преобразований (1 параметр).

В [6] группы Галилея и Пуанкаре были расширены (в рамках развития программы теоретико-группового подхода к постановке задачи инерциальной навигации) путем включения гравитационных  $g$ -преобразований (3 параметра). Расширенная (за счет добавления нерелятивистских  $g$ -преобразований) группа Галилея позднее [7, с. 150] была названа группой Галилея–Ньютона (этим термином иногда называют и саму группу Галилея). Группу же Пуанкаре пришлось сразу расширить до широко известной в физике конформной группы. Помимо преобразований из группы Пуанкаре в конформную группу входят релятивистские  $g$ -преобразования,  $w$ -преобразования (1 параметр) и масштабные преобразования.

Цель настоящей работы – найти и использовать для уточнения классической постановки задачи  $n$  тел нерелятивистский аналог 15-параметрической конформной группы, более близкий к ней, чем 13-параметрическая группа Галилея–Ньютона.

**2. Расширение группы Галилея–Ньютона.** Исходя из сказанного во введении, представляется естественным расширить 11-параметрическую группу Галилея (включающую масштабные преобразования) за счет добавления нерелятивистских  $\mathbf{g}$ -преобразований или расширить 13-параметрическую группу Галилея–Ньютона за счет добавления масштабных преобразований. В обоих случаях получается одна и та же 14-параметрическая группа (с четырьмя векторными параметрами и двумя скалярными). В этом легко убедиться, вычисляя коммутаторы соответствующих инфинитезимальных операторов (генераторов преобразований); при записи генераторов используются сокращенные обозначения ( $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ ,  $\partial_x = \partial/\partial x$  и т.д.):

(1) временной перенос:

$$T = \partial_\tau$$

(2) пространственные переносы (по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ):

$$R_x = \partial_x, \quad R_y = \partial_y, \quad R_z = \partial_z$$

(3) пространственные повороты:

$$\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad \Theta_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad \Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$$

(4) нерелятивистские бусты:

$$V_x = \tau\partial_x, \quad V_y = \tau\partial_y, \quad V_z = \tau\partial_z$$

(5) нерелятивистские  $\mathbf{g}$ -преобразования:

$$G_x = \frac{1}{2}\tau^2\partial_x, \quad G_y = \frac{1}{2}\tau^2\partial_y, \quad G_z = \frac{1}{2}\tau^2\partial_z$$

(6) масштабное преобразование:

$$\Gamma = \tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$$

Нетривиальным оказывается следующий этап – расширение упомянутой 14-параметрической группы до 15-параметрической за счет включения  $w$ -преобразований. Приведенный в [6] генератор  $w$ -преобразования конформной группы

$$W = -\frac{1}{2}(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_\tau + \tau(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

не может быть использован: например, коммутатор

$$[G_x, W] = G_x W - W G_x = \frac{1}{2}\tau^2 x \partial_\tau - \frac{1}{2}\tau(x^2 + y^2 + z^2)\partial_x$$

не является линейной комбинацией генераторов (1)÷(6) и  $W$ , поскольку имеет уже третий порядок по компонентам вспомогательного 4-вектора  $X = (\tau, x, y, z)$ . Естественно, поэтому назвать выписанный генератор  $w$ -преобразования конформной группы “релятивистским” и попытаться найти “нерелятивистский” генератор  $w$ -преобразования, исключив “релятивистские добавки”.

Согласно данной в [6] физической интерпретации, рассматриваемое скалярное  $w$ -преобразование представляет собой временную составляющую гравитационного преобразования (пространственно-временного), при этом векторное  $\mathbf{g}$ -преобразование – пространственная его часть. Аналогия с переходом от релятивистских  $\mathbf{g}$ -преобразований к нерелятивистским подсказывает: оставить в генераторе нерелятивистского  $w$ -преобразования только один (первый) член:

$$W = -\frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau$$

Но вычисление, например, коммутатора такого генератора с  $G_x$

$$[G_x, W] = G_x W - W G_x = \frac{1}{2}\tau^3\partial_x$$

показывает ошибочность описанного подхода. К успеху же приводит использование следующего генератора (найденного методом проб и ошибок после осознания необходимости построения нерелятивистского аналога конформной группы той же размерности):

(7) нерелятивистское  $w$ -преобразование:

$$W = -\frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau + \tau(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) = \frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau + \tau x\partial_x + \tau y\partial_y + \tau z\partial_z$$

В табл. 1 выписаны коммутаторы  $[U, V] = UV - VU$  инфинитезимальных операторов (1)÷(7) из левого столбца ( $U$ ) и верхней строки ( $V$ ). Поскольку в таблице не появилось никаких новых генераторов, рассматриваемые 15 генераторов порождают, согласно второй обратной теореме Ли, 15-параметрическую группу [8, с. 204] – расширенную группу Галилея–Ньютона. Генераторы пространственных поворотов в табл. 1 выписаны последними, чтобы легко выделялась ее 12-параметрическая подгруппа – расширенная группа Ньютона, используемая в шестом разделе статьи. В табл. 1 также легко выделяется сама группа Ньютона (10-параметрическая) и 11-параметрическая группа, получающаяся из группы Ньютона добавлением масштабного преобразования. Из таблицы также видно отсутствие 11-параметрической группы, включающей пространственно-временные переносы, нерелятивистские бусты и нерелятивистские пространственно-временные гравитационные преобразования, поскольку временные переносы и нерелятивистские  $w$ -преобразования незамкнуты и порождают масштабное преобразование:  $[T, W] = \Gamma$ .

Приведем теперь выражения для конечных элементарных преобразований расширенной группы Галилея–Ньютона (активная трактовка,  $X = \tau + \rho \rightarrow X' = \tau' + \rho'$ ):

(1) временной перенос  $T_t$ :

$$\tau' = \tau + t, \quad \rho' = \rho$$

(2) пространственный перенос  $R_r$ :

$$\tau' = \tau, \quad \rho' = \rho + r$$

(3) пространственный поворот  $\Theta_Q$  (или  $\Theta_\theta$ ):

$$\tau' = \tau, \quad \rho' = Q \circ \rho \circ Q^{-1}, \quad Q = e^{i\theta/2}$$

(4) нерелятивистский буст  $V_v$ :

$$\tau' = \tau, \quad \rho' = \rho + v\tau$$

(5) нерелятивистское  $g$ -преобразование  $G_g$ :

$$\tau' = \tau, \quad \rho' = \rho + g\tau^2/2$$

(6) масштабное преобразование  $\Gamma_\gamma$  (или  $\Gamma_\alpha$ ):

$$\tau' = \gamma\tau, \quad \rho' = \gamma\rho, \quad \gamma = e^\alpha$$

(7) нерелятивистское  $w$ -преобразование  $W_w$ :

Таблица 1. Алгебра Ли нерелятивистского аналога конформной группы

$U \setminus V$	$T$	$R_x$	$R_y$	$R_z$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$G_x$	$G_y$	$G_z$	$\Gamma$	$W$	$\Theta_x$	$\Theta_y$	$\Theta_z$
$T$	0	0	0	0	$R_x$	$R_y$	$R_z$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$T$	$\Gamma$	0	0	0
$R_x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$R_x$	$V_x$	0	$R_z$	$-R_y$
$R_y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$R_y$	$V_y$	$-R_z$	0	$R_x$
$R_z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$R_z$	$V_z$	$R_y$	$-R_x$	0
$V_x$	$-R_x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$G_x$	0	$V_z$	$-V_y$
$V_y$	$-R_y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$G_y$	$-V_z$	0	$V_x$
$V_z$	$-R_z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$G_z$	$V_y$	$-V_x$	0
$G_x$	$-V_x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_x$	0	0	$G_z$	$-G_y$
$G_y$	$-V_y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_y$	0	$-G_z$	0	$G_x$
$G_z$	$-V_z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_z$	0	$G_y$	$-G_x$	0
$\Gamma$	$-T$	$-R_x$	$-R_y$	$-R_z$	0	0	0	$G_x$	$G_y$	$G_z$	0	$W$	0	0	0
$W$	$-\Gamma$	$-V_x$	$-V_y$	$-V_z$	$-G_x$	$-G_y$	$-G_z$	0	0	0	$-W$	0	0	0	0
$\Theta_x$	0	0	$R_z$	$-R_y$	0	$V_z$	$-V_y$	0	$G_z$	$-G_y$	0	0	0	$\Theta_z$	$-\Theta_y$
$\Theta_y$	0	$-R_z$	0	$R_x$	$-V_z$	0	$V_x$	$-G_z$	0	$G_x$	0	0	$-\Theta_z$	0	$\Theta_x$
$\Theta_z$	0	$R_y$	$-R_x$	0	$V_y$	$-V_x$	0	$G_y$	$-G_x$	0	0	0	$\Theta_y$	$-\Theta_x$	0

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + w\tau/2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{(1 + w\tau/2)^2}$$

При описании поворотов в дальнейшем будет использоваться нормированный кватернион поворота  $Q$  вместо вектора ориентации  $\Theta$ , а при описании масштабного преобразования – масштабный множитель  $\gamma$  вместо канонического параметра  $\alpha$ . При восстановлении [8, с. 205–207] конечного нерелятивистского  $w$ -преобразования по соответствующему генератору изменен знак параметра (так же, как это было сделано в [6]). Поэтому физическая интерпретация всех параметров – та же, что для соответствующих параметров конформной группы в [6, 7]. Отметим только, что в конформной группе, включающей релятивистские бусты, более естественным (каноническим) параметром оказывается не скорость  $\mathbf{v}$ , а быстрота  $\Psi$  (параметр скорости, связанный с ней соотношением  $\mathbf{v} = \text{th } \Psi$ ), и появляется ограничение на величину скорости ( $v = |\mathbf{v}| < 1$ ).

Перейдем к определяющим соотношениям 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона, то есть к формулам для композиции однотипных элементарных преобразований и перестановочным формулам для элементарных преобразований разных типов. Приведем табличку, позволяющую их систематизировать (см. табл. 2), и выпишем подряд в соответствии с принятой системой нумерации:

$$T_{t_2} T_{t_1} = T_t, \quad t = t_1 + t_2 \tag{2.1}$$

$$R_r T_t = T_t R_r \tag{2.2}$$

$$T_t R_r = R_r T_t \tag{2.3}$$

$$R_{\mathbf{r}_2} R_{\mathbf{r}_1} = R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \tag{2.4}$$

$$V_v \circ T_t = T_t R_r V_v, \quad \mathbf{r} = \mathbf{v}t \quad (2.5)$$

$$T_t \circ V_v = V_v R_r T_t, \quad \mathbf{r} = -\mathbf{v}t \quad (2.6)$$

$$V_v R_r = R_r V_v \quad (2.7)$$

$$R_r V_v = V_v R_r \quad (2.8)$$

$$V_{v_2} V_{v_1} = V_v, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (2.9)$$

$$G_g \circ T_t = T_t R_r V_v G_g, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}t \quad (2.10)$$

$$T_t \circ G_g = G_g V_v R_r T_t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{g}t \quad (2.11)$$

$$G_g R_r = R_r G_g \quad (2.12)$$

$$R_r G_g = G_g R_r \quad (2.13)$$

$$G_g V_v = V_v G_g \quad (2.14)$$

$$V_v G_g = G_g V_v \quad (2.15)$$

$$G_{g_2} G_{g_1} = G_g, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \quad (2.16)$$

$$\Gamma_\gamma \circ T_t = T_{t'} \circ \Gamma_\gamma, \quad t' = \gamma t \quad (2.17)$$

$$T_t \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ T_{t'}, \quad t' = \gamma^{-1} t \quad (2.18)$$

$$\Gamma_\gamma \circ R_r = R_{r'} \circ \Gamma_\gamma, \quad \mathbf{r}' = \gamma \mathbf{r} \quad (2.19)$$

$$R_r \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ R_{r'}, \quad \mathbf{r}' = \gamma^{-1} \mathbf{r} \quad (2.20)$$

$$\Gamma_\gamma V_v = V_v \Gamma_\gamma \quad (2.21)$$

$$V_v \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma V_v \quad (2.22)$$

$$\Gamma_\gamma \circ G_g = G_{g'} \circ \Gamma_\gamma, \quad \mathbf{g}' = \gamma^{-1} \mathbf{g} \quad (2.23)$$

$$G_g \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ G_{g'}, \quad \mathbf{g}' = \gamma \mathbf{g} \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{\gamma_2} \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_\gamma, \quad \gamma = \gamma_2 \gamma_1 \quad (2.25)$$

$$W_w \circ T_t = T_{t'} \circ \Gamma_\gamma \circ W_{w'}, \quad t' = \frac{t}{1 + wt/2}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 + wt/2)^2}, \quad w' = \frac{w}{1 + wt/2} \quad (2.26)$$

$$T_t \circ W_w = W_{w'} \circ \Gamma_\gamma \circ T_{t'}, \quad t' = \frac{t}{1 + wt/2}, \quad \gamma = (1 + wt/2)^2, \quad w' = \frac{w}{1 + wt/2} \quad (2.27)$$

$$W_w \circ R_r = R_r V_v G_g W_w, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{r}w, \quad \mathbf{g} = \mathbf{r}w^2/2 \quad (2.28)$$

$$R_r \circ W_w = W_w G_g V_v R_r, \quad \mathbf{v} = \mathbf{r}w, \quad \mathbf{g} = \mathbf{r}w^2/2 \quad (2.29)$$

$$W_w \circ V_v = V_v G_g W_w, \quad \mathbf{g} = -\mathbf{v}w \quad (2.30)$$

$$V_v \circ W_w = W_w G_g V_v, \quad \mathbf{g} = \mathbf{v}w \quad (2.31)$$

$$W_w G_g = G_g W_w \quad (2.32)$$

$$G_g W_w = W_w G_g \quad (2.33)$$

$$W_w \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ W_{w'}, \quad w' = \gamma w \quad (2.34)$$

$$\Gamma_\gamma \circ W_w = W_{w'} \circ \Gamma_\gamma, \quad w' = \gamma^{-1}w \quad (2.35)$$

$$W_{w_2}W_{w_1} = W_w, \quad w = w_1 + w_2 \quad (2.36)$$

$$\Theta_Q T_t = T_t \Theta_Q \quad (2.37)$$

$$T_t \Theta_Q = \Theta_Q T_t \quad (2.38)$$

$$\Theta_Q \circ R_r = R_r \circ \Theta_Q, \quad r' = Q \circ r \circ Q^{-1} \quad (2.39)$$

$$R_r \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ R_r, \quad r' = Q^{-1} \circ r \circ Q \quad (2.40)$$

$$\Theta_Q \circ V_v = V_v \circ \Theta_Q, \quad v' = Q \circ v \circ Q^{-1} \quad (2.41)$$

$$V_v \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ V_v, \quad v' = Q^{-1} \circ v \circ Q \quad (2.42)$$

$$\Theta_Q \circ G_g = G_g \circ \Theta_Q, \quad g' = Q \circ g \circ Q^{-1} \quad (2.43)$$

$$G_g \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ G_g, \quad g' = Q^{-1} \circ g \circ Q \quad (2.44)$$

$$\Theta_Q \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \Theta_Q \quad (2.45)$$

$$\Gamma_\gamma \Theta_Q = \Theta_Q \Gamma_\gamma \quad (2.46)$$

$$\Theta_Q W_w = W_w \Theta_Q \quad (2.47)$$

$$W_w \Theta_Q = \Theta_Q W_w \quad (2.48)$$

$$\Theta_{Q_2} \circ \Theta_{Q_1} = \Theta_Q, \quad Q = Q_2 \circ Q_1 \quad (2.49)$$

Для наглядности символ  $(\circ)$  между сомножителями (преобразованиями или числами – параметрами преобразований) опускался только в случае, если операция перестановки этих сомножителей коммутативна.

Если хотя бы одно из исходных преобразований бесконечно малое (а только такие случаи встречаются при выводе уравнений инерциальной навигации и задачи  $n$  тел), то особенности, имеющиеся в соотношениях (2.26) и (2.27), становятся несущественными.

**3. Вывод уравнений инерциальной навигации.** Будем использовать следующую последовательность элементарных преобразований в разложении преобразования общего вида из расширенной группы Галилея–Ньютона на элементарные:

$$\Lambda = T_t R_r V_v \Gamma_\gamma \Theta_Q \circ G_g W_w$$

**Таблица 2.** Принятая система нумерации определяющих соотношений

	$T$	$R$	$V$	$G$	$\Gamma$	$W$	$\Theta$
$T$	(2.1)	(2.2)	(2.5)	(2.10)	(2.17)	(2.26)	(2.37)
$R$	(2.3)	(2.4)	(2.7)	(2.12)	(2.19)	(2.28)	(2.39)
$V$	(2.6)	(2.8)	(2.9)	(2.14)	(2.21)	(2.30)	(2.41)
$G$	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.16)	(2.23)	(2.32)	(2.43)
$\Gamma$	(2.18)	(2.20)	(2.22)	(2.24)	(2.25)	(2.34)	(2.45)
$W$	(2.27)	(2.29)	(2.31)	(2.33)	(2.35)	(2.36)	(2.47)
$\Theta$	(2.38)	(2.40)	(2.42)	(2.44)	(2.46)	(2.48)	(2.49)

(она совпадает со стандартной последовательностью элементарных преобразований, принятой в [6, 7] для преобразования общего вида из конформной группы).

Процедура теоретико-группового вывода уравнений инерциальной навигации сводится к нахождению стандартного разложения на элементарные преобразования композиции конечного и бесконечно малого преобразований (подробности см., например, в [6, 7]). С учетом выписанных в предыдущем разделе определяющих соотношений (для наглядности подчеркиваниями показаны места, в которых они применяются на каждом шаге выкладок) получаем:

$$\begin{aligned}
& T_{t+d\tau} R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma+d\gamma} \Theta_{Q+dQ} \circ G_{\mathbf{g}+d\mathbf{g}} W_{\mathbf{w}+d\mathbf{w}} = \\
& = (T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma} \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} W_{\mathbf{w}}) \circ (T_{d\tau} V_{d\mathbf{v}} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_S G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}}) = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma} \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} W_{\mathbf{w}} \circ T_{d\tau} V_{d\mathbf{v}} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_S G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma} \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} \circ T_{d\tau} \Gamma_{1-\mu d\tau} \underbrace{W_{\mathbf{w}-\mathbf{w}^2 d\tau/2}} \circ V_{d\mathbf{v}} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_S G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma} \Theta_Q T_{d\tau} V_{d\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} \Gamma_{1-\mu d\tau} V_{d\mathbf{v}} G_{-\mathbf{a} d\tau} W_{\mathbf{w}-\mathbf{w}^2 d\tau/2} \circ \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_S G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_{\gamma} \circ T_{d\tau} \Theta_Q \circ V_{d\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} V_{d\mathbf{v}} \Gamma_{1-\mu d\tau} G_{-\mathbf{a} d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau} W_{\mathbf{w}+(\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau} \Theta_S G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \circ T_{\gamma d\tau} \circ \Gamma_{\gamma} V_{Q \circ \mathbf{g} \circ Q^{-1} d\tau} \Theta_Q \circ V_{d\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} \circ \Gamma_{1-\mu d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau} G_{-\mathbf{a} d\tau} \Theta_S W_{\mathbf{w}+(\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau} G_{d\mathbf{g}} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t R_{\mathbf{r}} T_{\gamma d\tau} R_{\mathbf{v} d\tau} V_{\mathbf{v}} V_{Q \circ \mathbf{g} \circ Q^{-1} d\tau} \Gamma_{\gamma} V_{Q \circ \mathbf{a} \circ Q^{-1} d\tau} \circ \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} \circ \Gamma_{1+(\mu-\mathbf{w})d\tau} \Theta_S G_{-\mathbf{a} d\tau} G_{d\mathbf{g}} W_{\mathbf{w}+(\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau} W_{d\mathbf{w}} = \\
& = T_t T_{\gamma d\tau} R_{\mathbf{r}} R_{\mathbf{v} d\tau} V_{\mathbf{v}+Q \circ \mathbf{g} \circ Q^{-1} d\tau} V_{Q \circ \mathbf{a} \circ Q^{-1} d\tau} \Gamma_{\gamma} \Theta_Q \Gamma_{1+(\mu-\mathbf{w})d\tau} \circ G_{\mathbf{g}+\mathbf{g}(\mu-\mathbf{w})d\tau} \circ \Theta_S G_{(\mathbf{n}-\mathbf{a} \mathbf{w})d\tau} W_{\mathbf{w}+(\nu+\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau} = \\
& = T_{t+\gamma d\tau} R_{\mathbf{r}+\gamma d\tau} V_{\mathbf{v}+Q(\mathbf{a}+\mathbf{g}) \circ Q^{-1} d\tau} \Gamma_{\gamma} \Gamma_{1+(\mu-\mathbf{w})d\tau} \Theta_Q \circ \Theta_S \circ G_{S^{-1} \circ \mathbf{g} \circ S + \mathbf{g}(\mu-\mathbf{w})d\tau} G_{(\mathbf{n}-\mathbf{a} \mathbf{w})d\tau} W_{\mathbf{w}+(\nu+\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau} = \\
& = T_{t+\gamma d\tau} R_{\mathbf{r}+\gamma d\tau} V_{\mathbf{v}+Q(\mathbf{a}+\mathbf{g}) \circ Q^{-1} d\tau} \Gamma_{\gamma+\gamma(\mu-\mathbf{w})d\tau} \Theta_{Q \circ S} \circ G_{S^{-1} \circ \mathbf{g} \circ S + \mathbf{n} - \mathbf{a} \mathbf{w} + \mathbf{g}(\mu-\mathbf{w})d\tau} W_{\mathbf{w}+(\nu+\mu\mathbf{w}-\mathbf{w}^2/2)d\tau}
\end{aligned}$$

Выше для сокращения записи было принято обозначение  $S = e^{i\omega d\tau/2} = 1 + i\omega d\tau/2$ , поэтому (везде сохраняются члены только первого порядка малости по  $d\tau$ ):

$$Q \circ S = Q + Q \circ (i\omega) d\tau/2, \quad S^{-1} \circ \mathbf{g} \circ S = \mathbf{g} + [\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}] d\tau,$$

В результате получается следующая система нерелятивистских уравнений инерциальной навигации (для расширенной группы Галилея–Ньютона):

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = Q \circ (\mathbf{a} + \mathbf{g}) \circ Q^{-1}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma(\mu - \mathbf{w})$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{1}{2} Q \circ (i\boldsymbol{\omega}), \quad \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \mathbf{n} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} + \mu \mathbf{g} - \mathbf{w}(\mathbf{a} + \mathbf{g}), \quad \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}^2}{2} + \mu \mathbf{w}$$

Ее легко сравнить с соответствующей системой релятивистских уравнений (для конформной группы); с другой стороны, из нее можно получить (просто отбрасывая “лишние” параметры) систему уравнений инерциальной навигации для группы Галилея–Ньютона (13-параметрической) [6, 7].

**4. Массы тел.** Используемые в работе массы тел это положительные константы ( $m > 0$ ).

В работе используется естественная система единиц Планка [9]. “Планковские величины (длина, время, масса, энергия, температура и т.д.) не представляют (по крайней мере до сих пор) существенного значения для метрологии, но, как оказалось, имеют исключительную важность для теоретической физики как *границы применимости современных физических теорий*” [10, с. 239]. Планковская масса составляет  $\sim 10^{-8}$  кг. В небесной механике (масса Земли  $\sim 10^{25}$  кг) и в механике космического полета обыч-

но имеют дело с массами существенно больше планковской, а в теории элементарных частиц (масса электрона  $\sim 10^{-30}$  кг) — с массами на много порядков меньше планковской, которая там считается “экспериментально недостижимой” [11, с. 191].

“Физика не будет делиться на микроскопическую и космическую, она должна стать и станет единой и нераздельной” М.П. Бронштейн [12, с. 27]. В механике космического полета масса космического аппарата пренебрежимо мала по сравнению с массами небесных тел, поэтому его иногда называют “телом бесконечно малой массы” [13, с. 42]. Эта терминология никого не вводит в заблуждение, поскольку всем известно, что массы космических аппаратов заметно больше нуля. Сложнее ситуация с массами в теории элементарных частиц. Еще из школьного курса физики всем “известно”, что по современным представлениям: “Фотон является безмассовой частицей, т.е. его масса равна нулю:  $m = 0$ ” [14, с. 66]. Аналогичное утверждение (“Как известно, масса фотона равна нулю”) имеется даже в книге специалиста по теории элементарных частиц академика Л.Б. Окуня, для которого “вопрос о массе фотона послужил отправной точкой в продумывании оснований теории относительности” [15, с. 94, 112]. Результаты упомянутого продумывания выражены следующими словами: “В пользу того, что масса фотона строго равна нулю, иногда приводят следующие аргументы:

1. Из существования электромагнитного дальнего действия следует, что масса фотона очень мала по сравнению с массами других частиц, а очень малых параметров в теории не должно быть.

2. Теория (теория относительности, квантовая электродинамика) требует, чтобы масса фотона равнялась нулю.

Легко видеть, однако, что оба эти аргумента неправильны” [16, с. 131]. С другой стороны: “Масса фотона настолько мала, что ни в каких экспериментах ее обнаружить не удалось. Поэтому обычно полагают, что масса фотона равна нулю” [17, с. 657]. В литературе приводятся различные экспериментальные ограничения на массу фотона ( $m < 10^{-62}$  кг [18];  $m < 10^{-52}$  кг [19]).

В физике до сих пор распространены различные подходы к построению релятивистской механики или специальной теории относительности (СТО), использующей преобразования Лоренца (релятивистские бусты). Наиболее известные из них связаны с именами Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского [20, с. 47–51]. При теоретико-групповом построении СТО на основе группы Пуанкаре скорость строго меньше предельной (в естественной системе единиц  $v = \tanh \psi < 1$ ), поэтому частицы с нулевой массой невозможны. При построении СТО на основе постулатов Эйнштейна помимо нормальных частиц приходится рассматривать безмассовые частицы, двигающиеся с предельной скоростью ( $v = 1$ ), а также обсуждать возможность существования тахионов ( $v > 1$ ) [21, с. 117]. При построении релятивистской механики на основе концепции пространства–времени Минковского принимают во внимание “основную аксиому Минковского”, исключающую существование частиц с нулевой массой [22; 23, с. 171].

**5. Гравитационное замедление времени.** В классической задаче *n* тел постулируется, что тело (материальная точка) массы *m* создает на расстоянии  $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$  гравитационный потенциал

$$\varphi = -\frac{m}{r}$$

(с которым связан вектор гравитационного ускорения  $\mathbf{g} = -\text{grad } \varphi = -\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ ) [24, с. 188], но не учитывается известный эффект замедления времени в гравитационном поле: “Всякий раз из двух часов, находящихся на разных расстояниях от тяготеющего тела, быстрее идут те, которые дальше от этого тела” [25, с. 120]. Расширенная группа Галилея–Ньютона, включающая масштабное преобразование, позволяет учесть этот эффект, если связать гравитационный потенциал с масштабным множителем. Гравита-

ционный эффект замедления времени в поле тяготения (или эффект гравитационного смещения частоты) [26] следует отличать от релятивистского эффекта замедления времени в движущихся телах (эффекта СТО, который, как и эффект замедления времени в гравитационном поле, может быть измерен с использованием эффекта Мессбауэра) [27].

Пусть  $d\tau$  – приращение собственного времени тела, находящегося в гравитационном поле, а  $dt$  – приращение координатного времени для наблюдателя, находящегося вне гравитационного поля. Тогда эффект замедления времени в поле тяготения означает, что  $d\tau < dt$ , то есть масштабный множитель должен быть, согласно первому из уравнений инерциальной навигации, больше единицы  $\gamma = dt/d\tau > 1$ . Поскольку, с другой стороны,  $\phi < 0$ , то естественно принять  $\gamma = 1 - \phi$ .

Воспользуемся теперь общепринятым положением квантовой (волновой) механики о том, что с каждой частицей связана волна [14, с. 79, 179], точнее, тем, что “частица характеризуется внутренними колебаниями, в силу чего можно рассматривать ее как некие часы бесконечно малых размеров” [28, с. 30]. Частота волны де Бройля частицы пропорциональна ее энергии (с учетом энергии покоя). В естественной системе единиц энергия покоящейся частицы равна ее массе  $m$ . С другой стороны, частота волны де Бройля (собственная частота колебаний частицы) обратно пропорциональна собственному периоду колебаний частицы  $T$ , который, соответственно, обратно пропорционален массе частицы  $T \sim 1/m$ .

Рассмотрим две покоящиеся частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , причем  $m_1 < m_2$ . Тогда для их собственных периодов колебаний  $T_1$  и  $T_2$  выполняется  $T_1 > T_2$ . Пусть прошел промежуток времени  $\Delta t$ . За это время первая частица совершит  $n_1 = \Delta t/T_1$  колебаний, а вторая  $n_2 = \Delta t/T_2$  колебаний, поэтому  $n_1 < n_2$ . Естественно считать  $n_1$  временем  $\Delta\tau_1$ , измеренным первой частицей (в ее масштабе), а  $n_2$  временем  $\Delta\tau_2$ , измеренным второй частицей (в ее масштабе), поэтому  $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$ . Переходя к масштабным множителям  $\gamma_1 = \Delta t/\Delta\tau_1$  и  $\gamma_2 = \Delta t/\Delta\tau_2$ , получим  $\gamma_1 > \gamma_2$ . То есть масштабный множитель больше у легкой частицы и меньше у тяжелой. В общем случае получаем, что масштабный множитель частицы обратно пропорционален ее массе  $\gamma \sim 1/m$ .

Примем следующее выражение для гравитационного потенциала, создаваемого телом массы  $m$  на расстоянии  $r$ :

$$\phi = -\frac{m}{\sqrt{m^4 + r^2}}$$

В пределе малых масс ( $m \rightarrow 0$ ) или больших расстояний ( $r \rightarrow \infty$ ) этот гравитационный потенциал стремится к классическому ( $\phi \rightarrow -m/r$ ). При нулевом расстоянии ( $r = 0$ ) в принятом выражении<sup>1</sup> отсутствует характерная для классического (ньютоновского) потенциала сингулярность и при малых массах обеспечивается обратная пропорциональность масштабного множителя массе частицы ( $\gamma = 1 - \phi \rightarrow 1/m$ ).

Для построения гравитационного потенциала в задаче  $n$  тел используется принцип суперпозиции: “потенциалы полей от разных частиц складываются” [24, с. 188]. Гравитационный потенциал макроскопического тела создается гравитационными потенциалами составляющих его элементарных частиц. Условие малости гравитационного

<sup>1</sup> В докладе на ежегодной конференции МФТИ 25.11.2020 автор использовал выражение  $\phi = -m/\sqrt{m^2 + r}$ , удовлетворяющее тем же предельным условиям, см.: Чуб В.Ф. Уточнение постановки основной задачи небесной механики // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ 23–29 ноября 2020 года. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2020. С. 55–57 (тезисы доклада). Выписанная функция выглядит проще, но работать с ней неудобно из-за негладкости при  $r = 0$ .

потенциала ( $|\phi| \ll 1$ ), ограничивающее область применимости теории тяготения Ньютона, не накладывается.

**6. Формулировка задачи  $n$  тел.** В [29] задача  $n$  тел была сформулирована на основе 10-параметрической группы, полученной из группы Галилея–Ньютона исключением пространственных поворотов. Позднее эта 10-параметрическая группа была названа [7, с. 150] группой Ньютона (чтобы подчеркнуть ее отличие от другой подгруппы группы Галилея–Ньютона – 10-параметрической группы Галилея). Преобразование общего вида из группы Ньютона имеет вид [7, 29]:

$$\Lambda = T_t R_r V_v G_g$$

Если исходить из 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона, то после исключения пространственных поворотов получится расширенная 12-параметрическая группа Ньютона с определяющими соотношениями (2.1)÷(2.36). Преобразование общего вида из расширенной группы Ньютона будем записывать в виде:

$$\Lambda = T_t R_r V_v G_g W_w \circ \Gamma_\gamma$$

Исключение пространственных поворотов и перемещение масштабного преобразования на последнее место позволяет существенно упростить правые части дифференциальных уравнений инерциальной навигации, которые теперь становятся такими:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \gamma, & \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \gamma\mathbf{v}, & \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} &= \mathbf{a} + \gamma\mathbf{g} \\ \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} &= \gamma^{-1}\mathbf{n} - \mathbf{a}w, & \frac{dw}{d\tau} &= \gamma^{-1}v + \frac{1}{2}\gamma w^2, & \frac{d\gamma}{d\tau} &= \gamma(\mu - \gamma w) \end{aligned}$$

Выписанную систему уравнений можно получить обычной процедурой теоретико-группового вывода уравнений инерциальной навигации с принятым порядком расположения элементарных преобразований в преобразовании общего вида для расширенной группы Ньютона. С другой стороны, можно воспользоваться уже выведенными во втором разделе статьи уравнениями, отбросив в них члены, связанные с пространственными поворотами (положив  $Q = 1$  и  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ), и сделав замену параметров, соответствующую перестановке  $\Gamma_\gamma \circ G_g W_w = G_g W_w \circ \Gamma_\gamma$ .

Переходя к задаче  $n$  тел, будем считать, что положение  $i$ -го тела в момент его собственного времени  $\tau_i$  определяется преобразованием, связывающим базовую систему отсчета  $I$  с мгновенно сопутствующей телу системой отсчета  $E_i(\tau_i)$ :

$$\Lambda_{IE_i(\tau_i)} = T_{t_i(\tau_i)} R_{r_i(\tau_i)} V_{v_i(\tau_i)} G_{g_i(\tau_i)} W_{w_i(\tau_i)} \circ \Gamma_{\gamma_i(\tau_i)}$$

Исключим теперь негравитационные ускорения тел ( $\mathbf{a}_i = 0$ ) и негравитационные изменения масштабов ( $\mu_i = 0$ ). Тогда система уравнений движения  $i$ -го тела еще заметно упростится:

$$\begin{aligned} \frac{dt_i}{d\tau_i} &= \gamma_i, & \frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau_i} &= \gamma_i\mathbf{v}_i, & \frac{d\mathbf{v}_i}{d\tau_i} &= \gamma_i\mathbf{g}_i \\ \frac{d\mathbf{g}_i}{d\tau_i} &= \gamma_i^{-1}\mathbf{n}_i, & \frac{dw_i}{d\tau_i} &= \gamma_i^{-1}v_i + \frac{1}{2}\gamma_i w_i^2, & \frac{d\gamma_i}{d\tau_i} &= -\gamma_i^2 w_i \end{aligned}$$

Перейдем от множества собственных времен тел  $\tau_i$  к единому (системному) времени  $t$  как независимому параметру. Положение  $i$ -го тела в момент  $t$  запишем в виде:

$$\Lambda_{IE_i(t)} = T_t R_{r_i(t)} V_{v_i(t)} G_{g_i(t)} W_{w_i(t)} \circ \Gamma_{\gamma_i(t)}$$

(по определению  $t_i = t$ , поэтому  $dt_i/d\tau_i = \gamma_i = dt/d\tau_i$ ; тривиальное уравнение  $dt_i/dt = 1$  в дальнейшем выписывать не будем). Заменим в дифференциальных уравнениях движения  $i$ -го тела дифференцирование по  $\tau_i$  на дифференцирование по  $t$ :

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{g}_i, \quad \frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \gamma_i^{-2}\mathbf{n}_i, \quad \frac{dw_i}{dt} = \gamma_i^{-2}v_i + \frac{w_i^2}{2}, \quad \frac{d\gamma_i}{dt} = -\gamma_i w_i$$

Из последних трех уравнений получаем:

$$w_i = -\gamma_i^{-1} \frac{d\gamma_i}{dt}, \quad \mathbf{n}_i = \gamma_i^2 \frac{d\mathbf{g}_i}{dt}, \quad v_i = \gamma_i^2 \left( \frac{dw_i}{dt} - \frac{w_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\gamma_i}{dt} \right)^2 - \gamma_i \frac{d^2\gamma_i}{dt^2}$$

В соответствии с изложенными в предыдущем разделе соображениями:

$$\gamma_i = 1 - \varphi_i, \quad \varphi_i = -\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}}$$

Полученная нетривиальная связь параметра  $w_i$  с гравитационным потенциалом  $\varphi_i$ :

$$w_i = -\gamma_i^{-1} \frac{d\gamma_i}{dt} = (1 - \varphi_i)^{-1} \frac{d\varphi_i}{dt}$$

ставит под сомнение обычную формулу, связывающую гравитационный потенциал  $\varphi_i$  с гравитационным ускорением  $\mathbf{g}_i$ . Заменим ее (из соображений пространственно-временной симметрии для пространственной и временной составляющих гравитационного преобразования) на “уточненную”:

$$\mathbf{g}_i = \gamma_i^{-1} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{r}_i} = -(1 - \varphi_i)^{-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}_i}$$

В результате математическую модель задачи  $n$  тел, основанную на расширенной 12-параметрической группе Ньютона, можно представить в виде системы из  $n$  уравнений:

$$\Lambda_{IE_i(r+dt)} = \Lambda_{IE_i(t)} \circ \Lambda_{E_i(t)E_i(t+dt)}, \quad i = 1 \div n$$

$$\Lambda_{IE_i(r+dt)} = T_{t+dt} R_{\mathbf{r}_i+d\mathbf{r}_i} V_{\mathbf{v}_i+d\mathbf{v}_i} G_{\mathbf{g}_i+d\mathbf{g}_i} W_{w_i+dw_i} \circ \Gamma_{\gamma_i+d\gamma_i}$$

$$\Lambda_{IE_i(t)} = T_t R_{\mathbf{r}_i} V_{\mathbf{v}_i} G_{\mathbf{g}_i} W_{w_i} \circ \Gamma_{\gamma_i}, \quad \Lambda_{E_i(t)E_i(t+dt)} = T_{\gamma_i^{-1}dt} G_{\mathbf{n}_i \gamma_i^{-1}dt} W_{\gamma_i \gamma_i^{-1}dt}$$

$$\gamma_i = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}}$$

$$\mathbf{g}_i = \gamma_i^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3}, \quad w_i = \gamma_i^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3}$$

$$\mathbf{n}_i = \gamma_i \sum_{j=1}^n m_j \left\{ \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3} - 3(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^5} \right\}$$

$$v_i = \gamma_i \sum_{j=1}^n m_j \left\{ \frac{(\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)^2}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3} - 3 \frac{((\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i))^2}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^5} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j \frac{(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3} \right\}^2$$

Предполагается, что наблюдатель (базовая система отсчета  $L$ ) находится вне гравитационного поля (“на бесконечности”).

Отметим, что расширение группы Ньютона только за счет масштабного преобразования (то есть до 11-параметрической группы с определяющими соотношениями (2.1)–(2.25)) не позволяет адекватно учесть эффект гравитационного замедления времени, поскольку при нулевых параметрах  $w_i$  масштабные множители  $\gamma_i$  не будут изменяться (так как  $d\gamma_i/dt = -\gamma_i w_i$ ).

**7. Заключение.** В работе исследован ранее неизвестный (насколько известно автору) нерелятивистский аналог конформной группы, совпадающий с ней по числу параметров: 15-параметрическая расширенная группа Галилея–Ньютона. Приведены определяющие соотношения этой группы и выведены соответствующие ей уравнения инерциальной навигации.

В части формулировки задачи  $n$  тел работа носит, по сути, методический характер. Приведенные результаты и соображения могут быть полезны при построении релятивистской теории гравитационного взаимодействия тел, основанной на конформной группе [7, с. 142, 153], и теории квантовой гравитации [30].

**Благодарности.** Автор признателен своему научному руководителю Г.И. Макарову [31, с. 375]<sup>2</sup> за стимулирующие обсуждения и поддержку в конце XX века.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов С.В. Физика: Механика. Теория относительности. Электродинамика. М.: Просвещение, 2003. 383 с.
2. Чуб В.Ф. Незамкнутость элементарных преобразований пространства–времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153–160.
3. Гарднер М. Теория относительности для миллионов. М.: Атомиздат, 1967. 191 с.
4. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983. 560 с.
5. Пуанкаре А. Пространство и время // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. С. 133–147.
6. Чуб В.Ф. Применение конформной группы в теории инерциальной навигации // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3–17.
7. Чуб В.Ф. Основы инерциальной навигации. М.: URSS, 2014. 200 с.
8. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
9. Смородинский Я.А. Естественные системы единиц // Физическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1990. С. 29–30.
10. Томилин К.А. Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах. М.: Физматлит, 2006. 368 с.
11. Окунь Л.Б. Фундаментальные константы физики // Успехи физических наук. 1991. Т. 161. № 9. С. 177–194.
12. Горелик Г.  $c \times G \times h = ?$  // Знание–сила. 1988. № 2. С. 21–27.
13. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 339 с.
14. Громов С.В. Физика: Оптика. Тепловые явления. Строение и свойства вещества. М.: Просвещение, 2001. 287 с.
15. Окунь Л.Б. О движении материи. М.: Физматлит, 2012. 228 с.

<sup>2</sup> Г.И. Макаров сообщил, что окончил МФТИ в 1968 году (в [31] допущена опечатка).

16. Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б. О массе фотона // Успехи физических наук. 1968. Т. 95. Вып. 1. С. 131–137.
17. Окунь Л.Б. Теория относительности и теорема Пифагора // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 6. С. 653–663.
18. Тагиров Э.А. Фотон // Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. С. 354.
19. Как взвесить фотон // Природа. 2009. № 8. С. 81–82.
20. Журавлев В.Ф. Основания механики: О проблемах аксиоматики. М.: URSS, 2019. 100 с.
21. Биланюк О., Сударшан Е. Частицы за световым барьером // Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974. С. 112–133.
22. Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Полевая теория гравитации и масса покоя частиц // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 6. С. 753–754.
23. Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности. Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 167–180.
24. Новиков И.Д. Тяготение // Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. С. 188–193.
25. Чернин А.Д. Физика времени. М.: URSS, 2020. 230 с.
26. Баранов А.Г. Гравитационное смещение // Эйнштейновский сборник, 1967. М.: Наука, 1967. С. 215–232.
27. Хенль Г., Бенневитц Ф. Проверка замедления времени с помощью эффекта Мессбауэра // Эйнштейновский сборник, 1969–1970. М.: Наука, 1970. С. 170–176.
28. Бройль де Л. Об истинных идейных основаниях волновой механики // Бройль де Л. Соотношения неопределенности Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. М.: Мир, 1986. С. 30–33.
29. Чуб В.Ф. Формулировка задачи двух тел в параметрах расширенной группы Галилея // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 16–20.
30. Горелик Г.Е. Матвей Бронштейн и квантовая гравитация. К 70-летию нерешенной проблемы // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 10. С. 1093–1108.
31. Бранец В.Н. Записки инженера. М.: Изд-во “РТСофт” – “Космоскоп”, 2018. 592 с.

---

---

УДК 62-50

## ЗАЩИТА ОБЪЕКТА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ ПОСТОЯННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2022 г. В. А. Корнеев<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.03.2021 г.

После доработки 11.05.2021 г.

Принята к публикации 06.09.2021 г.

Рассматривается задача построения гарантирующего управления противоударным изолятором, защищающим объект на подвижном основании от ударных воздействий, которым подвержено основание. Ударное воздействие на основание предполагается заранее неизвестным и определяется его ускорением, ограниченной знако-постоянной функцией времени заданной длительности, интеграл от которой по времени задан. Управляющая сила действует между основанием и защищаемым объектом, ограничена по величине, а абсолютное ускорение основания может превысить максимально допустимую величину абсолютного ускорения объекта только на одном интервале времени. Минимизируемым критерием качества служит наибольшее смещение объекта относительно основания. В качестве ограниченного по величине управления, действующего между основанием и защищаемым объектом, было взято постоянное управление заданной длительности, являющееся оптимальным для мгновенного удара в задаче без упреждения. Получен оптимальный момент начала действия этого управления. Приведены сравнительные оценки по значению критерия качества предлагаемого управления с другими способами управления.

*Ключевые слова:* противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее упреждающее управление, запаздывание, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0572329922030096

**Введение.** В работе рассматривается построение способов управления противоударным изолятором при ограниченных наихудших возмущениях. Используемая математическая модель системы состоит из основания и защищаемого объекта, находящегося на нем, и обладает одной степенью свободы. Предполагается, что имеет место внешнее воздействие кинематического типа, задаваемое ускорением основания, определенным как функция времени. Основание и защищаемый объект могут двигаться поступательно вдоль одной заданной прямой. Управляющая сила между основанием и объектом создается изолирующим устройством и ограничена по величине. Впервые задача о минимизации максимума модуля смещения объекта относительно основания при заданном заранее возмущении была сформулирована в [1–3]. В дальнейшем теория оптимальной противоударной изоляции получила развитие в [4–7]. В [8] изучалась задача защиты объекта, расположенного на подвижном основании, от ударных воздействий малой длительности с помощью изолятора с управлением без упреждения. Численное решение задачи из [8] при заданном возмущении и построение ее аналитических решений для некоторых классов возмущений с упреждающим управлением рассмотрены в [9]. Аналитическое гарантирующее упреждающее управ-

ление с одним переключением и оптимальным временем упреждения и отвечающее им минимальное значение наибольшей величины смещения объекта относительно основания для класса возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой получены в [10, 11]. Для этого же класса возмущений в [12, 13] показано, что, используя упреждение и запаздывание для двух простых управлений, предназначенных для конкретных возмущений, и оптимизируя функционал только по моменту начала управления, можно получить значение критерия качества близкое к оптимальному. В [14] рассмотрена задача защиты объекта на подвижном основании для класса возмущений заданной длительности и ограниченной амплитуды. Доказано, что при заданном управлении наихудшими возмущениями являются непрерывные прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, начинающиеся в момент начала возмущения или заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения. Кроме того, в [14] для рассматриваемого класса возмущений изучалась возможность применения двух управлений, полученных в [9, 11] для прямоугольного возмущения и для возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой соответственно. Оптимизация критерия качества проводилась по моменту начала действия этих управлений. Предложено использовать комбинированное управление, сочетающее достоинства обоих управлений.

Обзор современного состояния проблемы противоударной изоляции, включающий в себя публикации по оптимальному управлению противоударными изоляторами, представлен в [15].

В данной работе, так же как и в [14], рассматривается задача защиты объекта на подвижном основании для класса возмущений заданной длительности и ограниченной амплитуды. В классе постоянных управлений ограниченной длительности проводится минимизация возможной величины смещения защищаемого объекта по начальному моменту действия управления. Варьирование момента начала действия управления из рассматриваемого класса предполагает, что возможно упреждение и запаздывание. Приведены сравнительные оценки по значению критерия качества предлагаемого управления со способами управления, рассмотренными в [14]. Выбор для изучения простых законов управления, зависящих от амплитуды возмущения и не зависящих от его длительности, обусловлен тем, что такие способы управления легче реализовать на практике, когда закон управления задан и выбирается только момент начала его действия в зависимости от длительности и амплитуды возмущения.

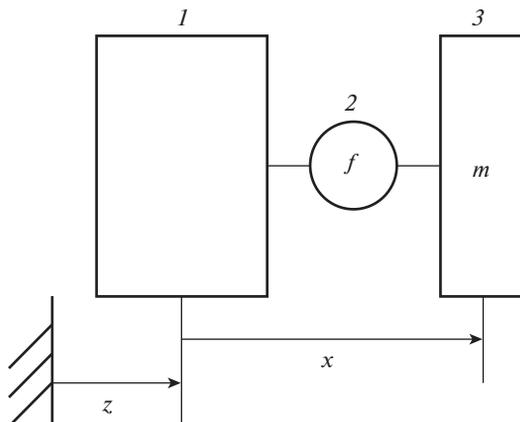
**1. Механическая система.** Рассматриваемая механическая система (рис. 1) содержит основание и объект, соединенный с основанием с помощью противоударного изолятора – устройства, которое генерирует управляющую силу  $f$  между основанием и объектом и предназначено для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Основание и защищаемый объект движутся поступательно вдоль заданной прямой. Пусть  $z$  – смещение основания относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета,  $x$  – смещение объекта относительно основания,  $m$  – масса объекта. Ударное воздействие на основание определяется его ускорением  $\ddot{z}$ , функцией времени, некоторые свойства которой известны до начала воздействия.

Движение объекта относительно основания выражается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = -\frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z} \quad (1.1)$$

в котором сила  $f$  удовлетворяет ограничению  $|f| \leq F_0$ , где  $F_0$  – заданная величина. Величина  $u$  удовлетворяет неравенству

$$|u| \leq u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}$$



**Рис. 1.** Схема противоударной изоляции. 1 – основание; 2 – защищаемый объект; 3 – противоударный изолятор.

Далее полагаем, что в начальный момент времени  $t = 0$  основание и объект имеют нулевые значения координат и скоростей:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad (1.2)$$

Допустимыми управлениями будем считать кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ , удовлетворяющие ограничению

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, \infty) \quad (1.3)$$

**2. Внешние возмущения.** Будем рассматривать возмущения  $v(t)$  вида

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \geq 0 \quad (2.1)$$

где  $V(\xi)$  – кусочно-непрерывная функция, заданная для всех вещественных  $\xi$ , причем  $V(\xi) \equiv 0$  для  $\xi < 0$ , а  $t_0 \geq 0$  – некоторый момент времени, который может быть известен заранее или подлежать определению. Возмущение  $V$  начинает действовать на основание только в момент  $t_0$  после включения системы противоударной изоляции (управление с упреждением).

Будем предполагать, что 1) возмущение  $V(\xi)$  действует только в одном заданном направлении и не меняет знака ( $V(\xi) \geq 0$ ), 2)  $V(\xi)$  имеет заданную длительность  $T$  ( $V(\xi) \equiv 0$ , если  $\xi > T$ ), 3)  $V(\xi)$  ограничена максимальной величиной воздействия, обозначаемой параметром  $b$ ,

$$V(\xi) \leq b \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi \leq T \quad (2.2)$$

и 4) только на одном интервале,  $t_1 < \xi < t_2$ , величина абсолютного ускорения  $V(\xi)$  основания превышает верхнюю величину  $u_0$  абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(\xi) < u_0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi < t_1 \quad \text{и} \quad t_2 < \xi \leq T$$

$$V(\xi) > u_0 \quad \text{для} \quad t_1 < \xi < t_2$$

Если  $V(0) > u_0$  или  $V(T) > u_0$ , то один или оба из интервалов  $0 \leq \xi < t_1$ ,  $t_2 < \xi \leq T$  могут быть пустыми. Если функция  $V(\xi)$ ,  $0 \leq \xi \leq T$ , предполагается известной и удовлетворяет в каждый момент  $\xi$  ограничению  $V(\xi) \leq u_0$ , оптимальное управление задается

тождеством  $u(t) \equiv V(t - t_0)$  и обеспечивает нулевое смещение объекта по отношению к основанию. Далее предполагаем выполнение неравенства

$$b > u_0 \quad (2.3)$$

Полагаем также, что заранее известны и заданы следующие характеристики ударного воздействия: его длительность  $T$ , максимально возможная величина воздействия  $b$  и параметр  $v_0$

$$v_0 = \int_0^T V(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

характеризующий значение скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. Класс возмущений без ограничений на максимальную величину воздействия  $V(\xi)$  с известными и заданными параметрами  $T, v_0$  обозначим  $V_T$ . Обозначим  $V_\infty$  класс возмущений с заданной величиной  $v_0$  из (2.4) без ограничений на максимальную величину воздействия  $V(\xi)$  и на максимальную длительность  $T$ . Классам воздействий  $V_T, V_\infty$  соответствует значение  $b = +\infty$ . Классы возмущений  $V_b$  и  $V_{bT}$  определим параметрами  $b, v_0$  и  $T, b, v_0$  соответственно. Из неравенств  $0 \leq V(\xi) \leq b$  и условия (2.4) следует выполнение соотношений

$$0 \leq \int_0^t V(\xi) d\xi \leq bt, \quad v_0 \leq bT,$$

т.е. неравенство  $bT \geq v_0$  есть необходимое условие существования возмущений из класса  $V_{bT}$ . Случай  $bT = v_0$  соответствует прямоугольным возмущениям и исследован в [9], поэтому далее предполагаем выполнение неравенства

$$bT > v_0 \quad (2.5)$$

Введенные классы возмущений удовлетворяют включениям  $V_{bT} \subset V_T \subset V_\infty, V_{bT} \subset V_b \subset V_\infty$ .

**3. Критерий качества.** Далее полагаем, что известно множество  $\Omega \subset V_\infty$ , которому принадлежат возможные возмущения  $V(\xi)$ , но само возмущение может быть неизвестно. При заданных управлении  $u(t)$  и времени упреждения  $t_0$  качество изоляции будем оценивать функционалом  $J$ , характеризующим наибольшую величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)|, \quad R_{0+} = [0, +\infty) \quad (3.1)$$

где  $x(t; u, V, t_0)$  – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) для заданных  $u(t), V(\xi)$  и  $t_0$ . Далее величину  $J$  будем минимизировать выбором закона управления и времени упреждения. Для случаев, когда  $\Omega = V_b, \Omega = V_{bT}, \Omega = V_T, \Omega = V_\infty$ , для значения функционала из (3.1) введем соответствующие обозначения  $J_b(u, t_0), J_{bT}(u, t_0), J_T(u, t_0), J_\infty(u, t_0)$ , т.е.

$$J_b(u, t_0) = \max_{V \in V_b} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.2)$$

$$J_{bT}(u, t_0) = \max_{V \in V_{bT}} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.3)$$

$$J_T(u, t_0) = \max_{V \in V_T} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.4)$$

$$J_\infty(u, t_0) = \max_{V \in V_\infty} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.5)$$

**4. Задачи оптимизации.** Учитывая различную возможную информированность управляющей стороны о внешнем возмущении и различие допустимых законов управления  $U$ , поставим следующие задачи.

*Задача 1.* Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) построить кусочно-непрерывное управление  $u^*$ , удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения  $t_0^*$ , доставляющие минимум величине (3.1):

$$J(u^*, t_0^*) = \min_{u \in U, t_0} J(u, t_0)$$

где  $U$  – заданное множество законов управления  $u(t)$ .

Это задача о гарантирующем управлении  $u^*$  с моментом упреждения  $t_0^*$ , которые позволяют защищать объект от ударов из множества  $\Omega$ . Задача 1 обобщает задачу из [1–3] с заданным возмущением и отсутствием упреждения.

*Задача 2.* Для системы (1.1) при начальных условиях (1.2) и заданном возмущении (2.1) построить кусочно-непрерывное управление  $u^*$ , удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения  $t_0^*$ , минимизирующие наибольшую величину смещения объекта относительно основания:

$$J(u^*, V, t_0^*) = \min_{u, t_0} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u, V, t_0)|$$

Задачу 2 можно рассматривать как задачу 1, в которой множество допустимых возмущений  $\Omega$  содержит лишь один элемент.

В качестве множества допустимых законов управления может быть рассмотрено параметрическое семейство управлений  $u_s(t) \in U_S$ , зависящих от параметра  $s, s \in S$ .

*Задача 3.* Для заданного класса допустимых управлений  $u_s(t) \in U_S$  найти время упреждения  $t_0^*$  и значение параметра  $s^*$ , минимизирующие величину (3.1):

$$J(u_s^*, t_0^*) = \min_{t_0, s} J(u_s, t_0), \quad u_s^* = u_s|_{s=s^*}$$

Решение задачи 3 позволяет улучшать качество противоударной защиты с помощью изменения времени упреждения  $t_0$  и параметра  $s$  при заданном семействе законов управления  $u_s(t)$ , которое, например, может быть построено на основе оптимального управления для некоторого заданного возмущения  $V \in \Omega$  и представлено аналитическими выражениями. При заданном управлении  $u(t)$  с условием  $u(t) \equiv 0, t < 0$  параметрическое семейство управлений может состоять из функций  $u_c(t) = u(t - c), c \geq 0$ , и тогда параметр  $c$  играет роль запаздывания для управления  $u_c(t)$ . Заметим, что, если множество  $S$  состоит из одного элемента, задача 3 решается для фиксированного управления.

**5. Определение наихудшего возмущения.** Вычисление функционала (3.1) предполагает процедуру построения наихудшего возмущения  $V \in \Omega \subset V_T$ , максимизирующего максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания ( $\max_t |x(t; u, V, t_0)|$ ) при заданных  $u(t)$  и  $t_0$ .

*Лемма 1* (см. [9]). При заданных управлении  $u(t)$  и времени упреждения  $t_0$  среди возмущений  $V \in V_T$  наихудшее возмущение представляет собой мгновенный удар интенсивности  $v_0$ , подаваемый в начальный момент  $t_0$  или в конечный момент  $t_0 + T$  допу-

стимого интервала возмущения. Таким образом, наихудшее возмущение есть либо  $V_\delta(\xi) = v_0\delta(\xi)$  либо  $V_{\delta T}(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$ .

Следуя лемме 1, для нахождения наихудшего возмущения в классе  $V_T$  при заданных  $u(t)$  и  $t_0$  необходимо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при  $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$  и  $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$ , затем для каждого из решений вычислить  $\max_t |x(t; u, V_\delta, t_0)|$ ,  $\max_t |x(t; u, V_{\delta T}, t_0)|$  и выбрать возмущение, отвечающее большему значению абсолютного отклонения.

*Лемма 2 (см. [14]).* При заданных управлении  $u(t)$  и времени упреждения  $t_0$  среди возмущений  $V \in V_{bT}$  наихудшее возмущение есть либо

$$V_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ b, & 0 \leq \xi \leq v_0/b < T \\ 0, & v_0/b < \xi \end{cases}$$

либо

$$V_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < T - v_0/b \\ b, & T - v_0/b \leq \xi \leq T \\ 0, & T < \xi \end{cases}$$

Это означает, что при любом заданном управлении наихудшими возмущениями являются прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, либо начинающиеся в момент начала возмущения  $t_0$ , либо заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения  $t_0 + T$ .

*Примечание.* Справедливо равенство  $V_1(\xi) = V_0(\xi - T + v_0/b)$ .

Следуя лемме 2, для нахождения наихудшего возмущения в классе  $V_{bT}$  при заданных  $u(t)$  и  $t_0$  необходимо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при  $v(t) = V_0(t - t_0)$  и  $v(t) = V_1(t - t_0)$ , затем для каждого из решений вычислить  $\max_t |x(t; u, V_0, t_0)|$ ,  $\max_t |x(t; u, V_1, t_0)|$ , сравнить эти величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению. Таким образом, критерий качества  $J$  при заданном управлении  $u$  для наихудших возмущений определяется выражением

$$J_u = \max \left\{ \max_{t \in \mathbb{R}_{0+}} |x(t; u, V_0, t_0)|, \max_{t \in \mathbb{R}_{0+}} |x(t; u, V_1, t_0)| \right\} \quad (5.1)$$

Определим безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u_0}{v_0^2} x, & t' &= \frac{u_0}{v_0} t, & t' &= \frac{u_0}{v_0} t_0, & T' &= \frac{u_0}{v_0} T, & \xi' &= \frac{u_0}{v_0} \xi \\ v'(t') &= \frac{1}{v_0} v \left( \frac{v_0}{u_0} t' \right), & u' &= \frac{u}{u_0}, & b' &= \frac{b}{u_0}, & J' &= \frac{u_0}{v_0^2} J \end{aligned}$$

Далее при использовании безразмерных переменных опускаем штрихи. В безразмерных единицах имеем  $u_0 = 1$  и  $v_0 = 1$ , а неравенства (2.3), (2.5) приобретают следующий вид

$$b > 1 \quad (5.2)$$

$$bT > 1 \quad (5.3)$$

**6. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления для прямоугольного возмущения с дополнительным запаздыванием.** Возмущение в

виде прямоугольного импульса в размерных переменных задается кусочно-постоянной функцией  $V(t)$

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \frac{v_0}{b} \\ 0, & t > \frac{v_0}{b} \end{cases} \quad (6.1)$$

а в безразмерных переменных – функцией

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \frac{1}{b} \\ 0, & t > \frac{1}{b} \end{cases} \quad (6.2)$$

Для возмущения (6.2) задача 2 решена в [9] с использованием графо-аналитического метода [1, 2]. Оптимальные значения управления  $u(t)$ , времени упреждения  $t_0$  и критерия качества  $J$  задаются соотношениями

$$u_r(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_1^r = \frac{1}{4}\sqrt{1-b^{-1}}, \quad b > 1 \\ 1, & t_1^r < t \leq t_2^r = \frac{1}{2}\sqrt{1-b^{-1}}+1, \quad b > 1 \\ 0, & t > t_2^r, \quad b > 1 \\ V(t), & t \in [0, +\infty), \quad b \leq 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$t_0^b = \begin{cases} \frac{1}{2}[(1-b^{-1}) + \sqrt{1-b^{-1}}], & b > 1 \\ 0, & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

$$J_r = \begin{cases} \frac{1}{16}(1-b^{-1}), & b > 1 \\ 0, & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Управление из (6.3) назовем  $r$ -управлением. Зададим класс управлений  $U_{rC} = \{u_{rc}\}$  параметрическим семейством допустимых управлений  $u_{rc}(t)$ , где

$$u_{rc}(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ -1, & c \leq t \leq c + t_1^r = c + \frac{1}{4}\sqrt{1-b^{-1}} \\ 1, & c + t_1^r < t \leq c + t_2^r = c + \frac{1}{2}\sqrt{1-b^{-1}} + 1 \\ 0, & t > c + t_2^r \\ c \in C, \quad C = [0, +\infty) \end{cases} \quad (6.6)$$

Равенство  $u_{rc}(t) = u_r(t - c)$  означает, что управление  $u_{rc}(t)$  представляет собой  $r$ -управление с запаздыванием  $c$ .

В [14] на основе леммы 2 в классах возмущений  $V_{bT}$  и управлений  $U_{rC}$  получено решение задачи 3:

$$t_c = \begin{cases} c - 1 - T + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} + \frac{2}{b} + \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ c + \frac{9}{16} - \frac{1}{16b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \frac{T}{2}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} < T \\ c \geq \max \left[ 0, \frac{T}{2} - \frac{9}{16} + \frac{1}{16b} - \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} \right] \end{cases} \quad (6.7)$$

$$J_R(b, T) = \begin{cases} \frac{25}{16} - \frac{41}{16b} + T - \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} < T \end{cases} \quad (6.8)$$

Здесь  $J_R(b, T) \equiv J_{bT}(u_{rc}, t_c)$ , т.е. искомое значение функционала  $J_{bT}(u_{rc}, t_c)$  задается функцией  $J_R(b, T)$ , у которой аргументы  $b, T$  указывают на зависимость значения функционала  $J_{bT}(u_{rc}, t_c)$  от этих параметров. Оптимальное управление в классах управлений  $U_{rc} = \{u_{rc}\}$  и возмущений  $V_{bT}$  для задачи 3 определяется формулой (6.6) со значением параметра  $c$ , удовлетворяющему неравенству из (6.7). Значения  $t_c, c$  из (6.7), доставляющие значение функционалу  $J_R(b, T)$  из (6.8), не единственны. Оптимальные минимально возможные момент упреждения  $t_c^*$  и величина запаздывания  $c^*$  определяются как

$$t_c^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - 1 - T, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ \frac{9}{16} - \frac{1}{16b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \frac{T}{2}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \leq T < \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ 0, & T \geq \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$c^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ \frac{T}{2} - \frac{9}{16} + \frac{1}{16b} - \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2}, & \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} < T \end{cases}$$

При значениях  $t_c = t_c^*, c = c^*$  из (6.9) оптимальное управление определяется формулой  $u_{rc}^*(t) = u_r(t - c^*)$  и справедливо равенство  $\min\{t_c^*, c^*\} = 0$ , т.е. имеет место либо упреждение, либо запаздывание. При не минимально выбранных моменте упреждения  $t_c$  и величине запаздывания  $c$  имеем неравенство  $\min\{t_c, c\} > 0$ . В этом случае на интервале времени  $0 \leq t < \min\{t_c, c\}$  рассматриваемая система бездействует и значения управления и возмущения имеют нулевые значения.

**7. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления, предназначенного для возмущений ограниченной длительности.** В [10, 11] на основе леммы 1 получено решение  $\{u_\tau, t_\tau\}$  задачи 3 в классе неограниченных возмущений  $V_T$  для управлений из класса  $U_\Sigma = \{u_\tau\}$  – параметрического семейства допустимых релейных управлений  $u_\tau(t)$  с переключением со значения  $-u_0$  на значение  $u_0$  в момент времени  $\tau$  и со значения  $u_0$  на значение 0 в момент времени  $v_0/u_0 + 2\tau$ , где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \leq t < \tau \\ +u_0, & \tau \leq t \leq T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \quad (7.1)$$

$$T_\tau = \frac{V_0}{u_0} + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Временные отрезки со значениями  $\pm u_0$  выбраны таким образом, чтобы обеспечить выполнение равенства

$$\dot{x}(t; u_\tau, V, t_0) \equiv 0, \quad t \geq \max(t_0 + T, T_\tau)$$

для того чтобы движение объекта относительно основания прекратилось за конечное время  $T_f = \max(t_0 + T, T_\tau)$  и в дальнейшем не возобновилось.

В безразмерных переменных управление  $u_\tau(t)$  из (7.1) имеет вид

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau \\ +1, & \tau \leq t \leq T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \quad (7.2)$$

$$T_\tau = 1 + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Оптимальное управление в классах управлений  $U_\Sigma = \{u_\tau\}$  и возмущений  $V_T$  для задачи 3 определяется формулой (7.2) со значением параметра  $\tau$  ([10, 11]):

$$\tau^* = \begin{cases} T/2 + 1/4, & T \leq 1/2 \\ 1/2, & 1/2 < T \leq 7/2 \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1, & T > 7/2 \end{cases} \quad (7.3)$$

а значение функционала и момент упреждения находят как

$$J_T = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2, & T \leq 1/2 \\ T/2, & 1/2 < T \end{cases} \quad (7.4)$$

$$t_\tau^* = \begin{cases} T + 1, & T \leq 1/2 \\ 7/4 - T/2, & 1/2 < T \leq 7/2 \\ 0, & T > 7/2 \end{cases}$$

Решение (7.2)–(7.4) задачи 3 при  $T > 1/2$  не единственно. Значение функционала  $J_T = T/2$  при  $T > 1/2$  обеспечивается значениями  $\tau$  и  $t_\tau$ , удовлетворяющими соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1.0\} \leq \tau \leq \sqrt{T/2}$$

$$t_\tau = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2$$

Обозначим через  $u_\tau^*(t)$  функцию из (7.2) со значением  $\tau = \tau^*$  из (7.3) и используем функцию  $u_\tau^*(t)$  и значение  $t_\tau^*$  из (7.4) для вычисления значения функционала  $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$  из (3.3) в классе ограниченных возмущений  $V_{bT}$ . Определим функцию  $J_{bT}(t^*)$  соотношениями

$$J_{bT}(t^*) = \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u_\tau^*, V_0, t^*)|, \quad 0 \leq t^* < +\infty$$

$J_{bT}(t^*)$  отвечает наибольшему относительному смещению защищаемого объекта при использовании управления  $u_\tau^*(t)$  и применении возмущения  $v(t) = V_0(t - t^*)$  – прямо-

угольного возмущения с амплитудой  $b$  с началом действия в момент времени  $t^*$ . Согласно лемме 2 величина  $J_{bT}(u_{\tau}^*, t_{\tau}^*)$  определяется значением выражения

$$J_{bT}(u_{\tau}^*, t_{\tau}^*) = \max[J_{b\tau}(t_{\tau}^*), J_{b\tau}(t_{\tau}^* + T - b^{-1})]$$

Отсюда получаем решение задачи 3 в классе ограниченных возмущений  $V_{bT}$  для случая, когда класс допустимых управлений состоит из одного элемента  $u_{\tau}^*$  и множество выбора моментов упреждения  $t_0$  также состоит из одного элемента  $t_{\tau}^*$ .

Введем функцию  $J_{\Sigma}(b, T) \equiv J_{bT}(u_{\tau}^*, t_{\tau}^*)$ , у которой аргументы  $b, T$  указывают на зависимость значения функционала  $J_{bT}(u_{\tau}^*, t_{\tau}^*)$  от этих параметров.

Значение  $J_{\Sigma}(b, T)$  для всех  $1 < b \leq 2$  определяется выражением

$$J_{\Sigma}(b, T) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} < T \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}, & \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < T \end{cases} \quad (7.5)$$

Значение  $J_{\Sigma}(b, T)$  для всех  $b > 2$  определяется более сложным выражением

$$J_{\Sigma}(b, T) = \begin{cases} \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\right)^2, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < T \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}, & \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < T \end{cases} \quad (7.6)$$

**8. Решение задачи 3 для возмущений ограниченной длительности из класса  $V_T$  и ограниченных возмущений из класса  $V_{bT}$  при использовании постоянных управлений.** Зададим класс управлений  $U_D = \{u_d\}$  – параметрическим семейством допустимых управлений  $u_d(t)$ , где  $u_d(t)$  в размерных и безразмерных переменных задается соответственно соотношениями (8.1) и (8.2)

$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d \\ u_0, & d \leq t \leq \frac{u_0}{v_0} + d \\ 0, & t > \frac{u_0}{v_0} + d \end{cases} \quad (8.1)$$

$$d \geq 0$$

$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d \\ 1, & d \leq t \leq 1 + d \\ 0, & t > 1 + d \end{cases} \quad (8.2)$$

$$d \geq 0$$

Управление  $u_d(t)$  при  $d = 0$  обозначим  $u_{0d}(t)$ . Управление  $u_{0d}(t)$  с моментом упреждения  $t_0 = 0$  представляет собой оптимальное управление для задачи 2 без упреждения при возмущении  $V(\xi) = \delta(\xi)$  (см. [6]). Управление  $u_d(t)$  есть  $u_{0d}$ -управление с запаздыванием  $d$ , так как  $u_d(t) = u_{0d}(t - d)$ .

Решение задачи 3 в классе неограниченных возмущений  $V_T$  для постоянных управлений класса  $U_D$ . В [13] на основе леммы 1 получено решение  $\{u_d, t_d\}$  задачи 3 в классе неограниченных возмущений  $V_T$  для управлений класса  $U_D$ . Это решение в указанных классах для задачи 3 определяется формулой для управления (8.2) и выражениями для момента упреждения  $t_d$  и значения функционала  $J_d$ :

$$t_d = \begin{cases} d + \sqrt{2T+2} - T - 1, & T \leq 1, \\ d + 1/2 - T/2, & 1 < T, \end{cases} \quad d \geq \max \left[ 0, \frac{T-1}{2} \right] \quad (8.3)$$

$$J(u_d, t_d) = \begin{cases} 3/2 - \sqrt{2T+2} + T, & T \leq 1 \\ T/2, & 1 < T \end{cases} \quad (8.4)$$

Значение функционала  $J_d(T)$  из (8.4) обеспечивается переменными  $t_d, d$  из (8.3) единственным образом. При этом профиль управления  $u_d(t)$  из (8.2) остается одинаковым, меняется лишь начало его действия. Оптимальные минимально возможные момент упреждения  $t_d^*$  и величина запаздывания  $d^*$  определяются соотношениями

$$t_d^* = \begin{cases} \sqrt{2T+2} - T - 1, & T < 1, \\ 0 & T \geq 1, \end{cases} \quad d^* = \begin{cases} 0, & T \leq 1 \\ \frac{T-1}{2}, & 1 < T \end{cases} \quad (8.5)$$

При значениях  $t_d = t_d^*, d = d^*$  из (8.5) оптимальное управление определяется формулой  $u_d^*(t) = u_{0d}(t - d^*)$  и справедливо равенство  $\min\{t_d^*, d^*\} = 0$ , т.е. имеет место либо упреждение, либо запаздывание. При не минимально выбранных моменте упреждения  $t_d$  и величине запаздывания  $d$  имеем неравенство  $\min\{t_d, d\} > 0$ . В этом случае на интервале времени  $0 \leq t < \min\{t_d, d\}$  рассматриваемая система бездействует и значения управления и возмущения имеют нулевые значения.

Решение задачи 3 в классе ограниченных возмущений  $V_{bT}$  для постоянных управлений класса  $U_D$ . При описании этого решения будем использовать обозначения:  $u_{bd}$  для элементов  $U_D$ ,  $t_{bd}$  для момента упреждения,  $d_b$  для величины запаздывания, поскольку при описании решения задачи 3 эти величины и их области изменения могут зависеть от параметра  $b$ . Допустимые управления  $u_{b0}, u_{bd}$  в безразмерных переменных задаются соотношениями (8.6)

$$u_{b0}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad u_{bd}(t) = \begin{cases} 0, & t < d_b \\ 1, & d_b \leq t \leq 1 + d_b \\ 0, & t > 1 + d_b \end{cases} \quad (8.6)$$

$$d_b = 0, \quad d_b \geq 0$$

Управление  $u_{bd}(t)$  есть  $u_{b0}$ -управление с запаздыванием  $d_b$ , так как  $u_{bd}(t) = u_{b0}(t - d_b)$ .

Определим функции  $J_{b0}(t^*), J_{bd}(t^*)$  выражениями

$$J_{b0}(t^*) = \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u_{b0}, V_0, t^*)|, \quad J_{bd}(t^*) = \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u_{bd}, V_0, t^*)|, \quad 0 \leq t^* < +\infty$$

Эти функции определяются следующими соотношениями

$$J_{b_0}(t^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - b^{-1}) - t^*, & 0 \leq t^* < (\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) \\ \frac{bt^{*2}}{2(b-1)}, & (\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) \leq t^* < (1 - b^{-1}) \\ t^* - \frac{1}{2}(1 - b^{-1}), & t^* \geq (1 - b^{-1}) \end{cases}$$

$$J_{bd}(t^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - b^{-1}) - t^* + d_b, & 0 \leq t^* < (\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b \\ \frac{b(t^* - d_b)^2}{2(b-1)}, & (\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b \leq t^* < (1 - b^{-1}) + d_b \\ t^* - d_b - \frac{1}{2}(1 - b^{-1}), & t^* \geq (1 - b^{-1}) + d_b \end{cases} \quad (8.7)$$

Функции  $J_{b_0}(t^*)$ ,  $J_{bd}(t^*)$  отвечают наибольшему относительному смещению защищаемого объекта при использовании соответственно управлений  $u_{b_0}(t)$ ,  $u_{bd}(t)$  и применении возмущения  $v(t) = V_0(t - t^*)$  — прямоугольного возмущения с амплитудой  $b$  и началом действия в момент времени  $t^*$ . Очевидное равенство  $J_{bd}(t^*) = J_{b_0}(t^* - d_b)$  при  $t^* \geq d_b$  означает, что график функции  $J_{bd}(t^*)$  получается смещением графика  $J_{b_0}(t^*)$  на величину  $d_b$  вдоль оси абсцисс с доопределением на интервале  $[0, d_b)$  согласно формуле для  $J_{bd}(t^*)$ . При  $b \rightarrow +\infty$  функция  $J_{b_0}(t^*) \rightarrow J_{d_0}(t^*)$ , где функция  $J_{d_0}(t^*)$  предназначена для дельта возмущения и имеет тот же смысл, что и функция  $J_{b_0}(t^*)$  для ограниченного возмущения. Функция  $J_{d_0}(t^*)$  задается формулой

$$J_{d_0}(t^*) = \begin{cases} 1/2 - t^*, & 0 \leq t^* < \sqrt{2} - 1 \\ t^{*2}/2, & \sqrt{2} - 1 \leq t^* < +1 \\ t^* - 1/2, & t^* \geq +1 \end{cases}$$

и приведена на рис. 2. Функция  $J_{b_0}(t^*)$  имеет аналогичный вид.

Функция  $J_{bd}(t^*)$  линейно убывает при  $t^* \in [0, (\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b]$  от значения  $(1 - b^{-1})/2$  до значения

$$J_{bd}((\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)(1 - b^{-1}) \approx 0.0858(1 - b^{-1}) \quad (8.8)$$

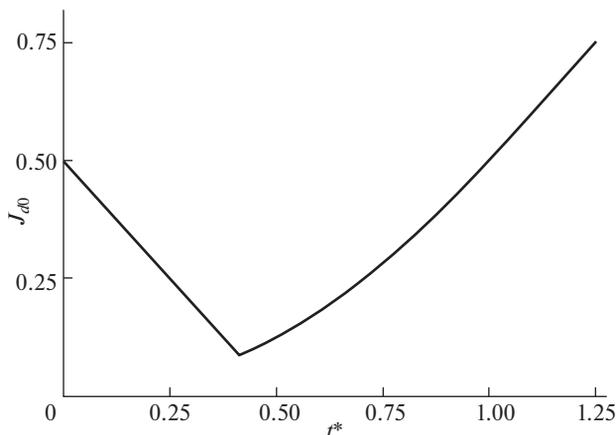
затем при  $t^* \in [(\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b, +\infty)$  монотонно возрастает от значения (8.8) до бесконечности. При этом функция  $J_{bd}(t^*)$  на отрезке  $[(\sqrt{2} - 1)(1 - b^{-1}) + d_b, (1 - b^{-1}) + d_b]$  растет квадратично до значения

$$J_{bd}(1 - b^{-1} + d_b) = \frac{1}{2}(1 - b^{-1}) \quad (8.9)$$

а затем линейно до бесконечности. Функция  $J_{bd}(t^*)$  из (8.7) дает возможность оценить влияние возможной ошибки в определении момента удара при вычислении упреждающего оптимального управления на величину критерия качества.

Согласно лемме 2 величина  $J_{bT}(u_{bd}, t_{bd})$  определяется значением выражения

$$J_{bT}(u_{bd}, t_{bd}) = \max[J_{bd}(t_{bd}), J_{bd}(t_{bd} + T - b^{-1})]$$



**Рис. 2.** Значение критерия качества при применении  $\delta$ -управления со смещенным временем упреждения к  $\delta$ -возмущению.

Минимизируя выражение  $J_{bT}(u_{bd}, t_{bd})$  по переменной  $t_{bd}$  получаем решение задачи 3 в классе ограниченных возмущений  $V_{bT}$

$$t_{bd} = \begin{cases} d_b + \frac{\sqrt{2(b-1)(Tb+b-2)} - Tb - b + 2}{b}, & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ d_b + \frac{1-T}{2}, & 1 < T \end{cases} \quad (8.10)$$

$$d_b \geq \max \left[ 0, \frac{T-1}{2} \right]$$

$$J_D(b, T) = \begin{cases} \frac{3b + 2Tb - 5 - 2\sqrt{2(b-1)(Tb+b-2)}}{b}, & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}, & 1 < T \end{cases} \quad (8.11)$$

Здесь  $J_D(b, T) \equiv J_{bT}(u_{bd}, t_{bd})$ , т.е. искомое значение функционала  $J_{bT}(u_{bd}, t_{bd})$  задается функцией  $J_D(b, T)$ , у которой аргументы  $b, T$  указывают на зависимость значения функционала  $J_{bT}(u_{bd}, t_{bd})$  от этих параметров.

Значение функционала  $J_D(b, T)$  из (8.11) обеспечивается переменными  $t_{bd}, d_b$  из (8.10) не единственным образом. При этом профиль управления  $u_{bd}(t)$  из (8.6) остается одинаковым, меняется лишь начало его действия. Оптимальные минимально возможные момент упреждения  $t_{bd}^*$  и величина запаздывания  $d_b^*$  определяются соотношениями

$$t_{bd}^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{2(b-1)(Tb+b-2)} - Tb - b + 2}{b}, & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ 0, & 1 < T \end{cases} \quad (8.12)$$

$$d_b^* = \begin{cases} 0, & T \leq 1 \\ \frac{T-1}{2}, & 1 < T \end{cases}$$

При значениях  $t_{bd} = t_{bd}^*$ ,  $d_b = d_b^*$  из (8.12) оптимальное управление определяется формулой  $u_{bd}^*(t) = u_{b0}(t - d_b^*)$  и справедливо равенство  $\min\{t_{bd}^*, d_b^*\} = 0$ , т.е. имеет место либо упреждение, либо запаздывание. При не минимально выбранных моменте упреждения  $t_{bd}$  и величине запаздывания  $d_b$  имеем неравенство  $\min\{t_{bd}, d_b\} > 0$ . В этом случае на интервале времени  $0 \leq t < \min\{t_{bd}, d_b\}$  рассматриваемая система бездействует и значения управления и возмущения имеют нулевые значения.

*Решение задачи 3 в классе ограниченных возмущений  $V_{bT}$  при использовании постоянно-го управления без упреждения и запаздывания.* В частном случае решения задачи 3 при заданных значениях параметров  $t_{bd} = 0$ ,  $d_b = 0$  и при использовании управления  $u_{b0}$  из (8.6) получаем значение функционала

$$\begin{aligned} J_0(b, T) &= J_{bT}(u_{b0}, 0) = \max[J_{b0}(0), J_{b0}(T - b^{-1})] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{b}\right), & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ T - \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, & T > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (8.13)$$

При этом начало действия наихудшего возмущения определяется соотношениями

$$t_0(b, T) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ T - \frac{1}{b}, & T > 1 \end{cases}$$

**9. Сравнение по критерию качества различных способов управления.** Значения функционалов  $J_R(b, T)$ ,  $J_\Sigma(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$ ,  $J_0(b, T)$  из (6.8), (7.5), (7.6), (8.11), (8.13) представляют собой функции от параметров  $b, T$ , заданные в области

$$G_{bT} = \{b, T : b > 1, Tb > 1\} \quad (9.1)$$

При этом выполнены следующие тождества

$$J_R(b, T) \equiv J_\Sigma(b, T), \quad T > \max\left\{\frac{7}{8} + \frac{1}{8b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{b}\right\}$$

$$J_\Sigma(b, T) \equiv J_D(b, T), \quad T > \max\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{b}\right\}$$

$$J_R(b, T) \equiv J_D(b, T), \quad T > \max\left\{1, \frac{7}{8} + \frac{1}{8b}\right\} = 1$$

Соответственно сравнение функций  $J_R(b, T)$ ,  $J_\Sigma(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$  можно проводить лишь при

$$T \leq \max\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{b}\right\} < \frac{3}{2}$$

*Сравнение функций  $J_R(b, T)$ ,  $J_\Sigma(b, T)$ .* Сравнение функций  $J_R(b, T)$ ,  $J_\Sigma(b, T)$  проведено в работе [14]. Вычисления показывают, что равенство  $J_R(b, T) = J_\Sigma(b, T)$  достигается при  $1/b < T < 1$  на кривой  $l$ , описываемой функцией  $b = f(T)$ ,  $0 < T \leq 1$ , где

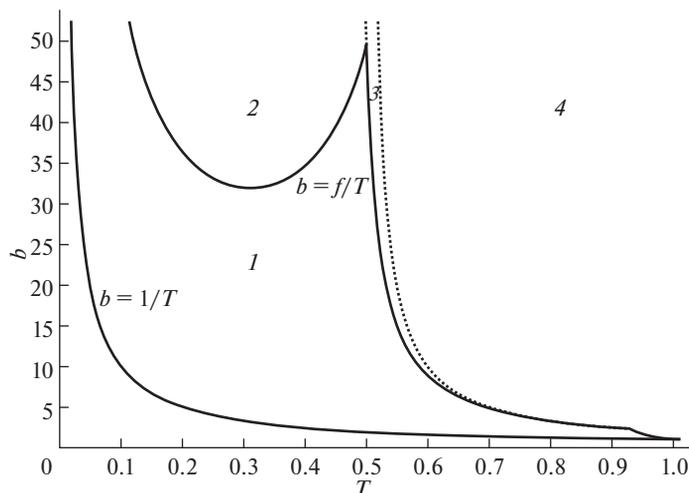


Рис. 3. Разбиение области  $G_{bT}$  на подобласти для функции  $J_{comb}(b, T)$ .

$$f(T) = \begin{cases} \frac{38+59T-41T^2+2\sqrt{361+528T+536T^2-320T^3+272T^4}}{4T(T+1)(T^2-7T+4)}, & 0 < T \leq \frac{1}{2} \\ \frac{29+400T+32\sqrt{79-70T+8T^2}}{160T-135+256T^2}, & \frac{1}{2} < T \leq \frac{13}{14} \\ \frac{1}{8T-7}, & \frac{13}{14} < T \leq 1 \end{cases}$$

При этом кривая  $l$  стремится к плюс бесконечности при  $T \rightarrow +0$ , лежит выше кривой  $b = 1/T$  при  $0 < T < 1$  и пересекается с ней в точке  $T = 1, b = 1$ . Кривые  $l$  и  $b = 1/T$  изображены сплошными линиями на рис. 3. Кривая  $l$  делит область  $G_{bT}$  на две подобласти  $G_R, G_\Sigma$ , располагающиеся ниже и выше кривой  $l$  соответственно. При этом в нижней области  $G_R$  выполнено неравенство  $J_R(b, T) < J_\Sigma(b, T)$ , а в верхней области  $G_\Sigma$  выполнено неравенство  $J_R(b, T) > J_\Sigma(b, T)$ . Зададим функцию  $J_{comb}(b, T)$  соотношением

$$J_{comb}(b, T) = \min \{J_R(b, T), J_\Sigma(b, T)\}, \quad (b, T) \in G_{bT} \quad (9.2)$$

и поясним, как эта функция вычисляется. Дополнительно область  $G_\Sigma$  на рис. 3 разделена двумя пунктирными линиями  $l_1, l_2$ , задаваемыми формулами

$$l_1 : T = \frac{1}{2}, \quad b \geq \frac{229+32\sqrt{46}}{9} \approx 49.55939549$$

$$l_2 : b = \frac{2}{2T-1}, \quad \frac{1}{2} < T \leq \frac{13}{14}$$

Линия  $l_1$  имеет общую точку с кривой  $l$ :

$$T = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{229+32\sqrt{46}}{9}$$

а кривая  $l_2$  имеет общую точку с кривой  $l$ :

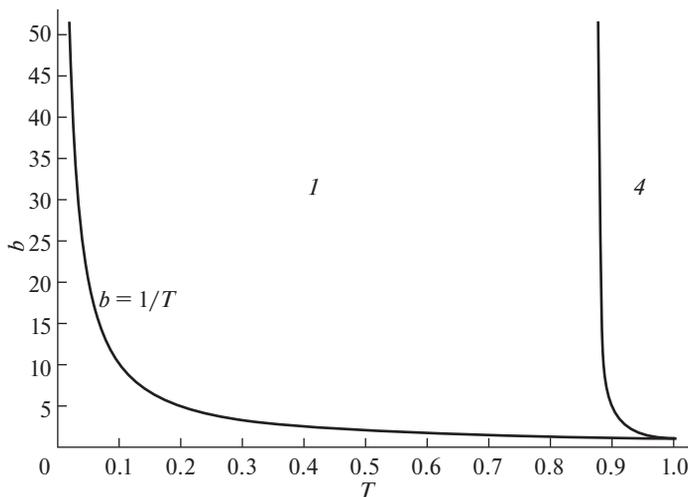


Рис. 4. Разбиение области  $G_{bT}$  на подобласти для функции  $J_R(b, T)$ .

$$T = \frac{13}{14}, \quad b = \frac{7}{3}$$

В каждой из четырех областей, помеченных на рис. 3 значение  $J_{comb}(b, T)$  из (9.2) вычисляется по своей формуле с соответствующим индексом. То есть области со значением индекса  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) соответствует своя функция  $J_i(b, T)$ . Функции  $J_i(b, T)$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{25}{16} - \frac{41}{16b} + T - \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} \\
 J_2 &= \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\
 J_3 &= \frac{1}{4} \\
 J_4 &= \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Функция  $J_{comb}(b, T)$  представляет собой значение функционала (3.3) при использовании в качестве управления и момента упреждения величин  $u_{rc}^*$ ,  $t_c^*$  в области  $G_R$  и при использовании в качестве управления и момента упреждения величин  $u_t^*$ ,  $t_t^*$  в области  $G_\Sigma$ . Такой способ управления с моментом упреждения назовем комбинированным управлением.

На рис. 4 изображено разбиение области  $G_{bT}$  на две подобласти, которые описывает формула (6.8). Цифры 1 и 4, которыми помечены эти области, означают что функционал  $J_R(b, T)$  имеет значения  $J_1$  и  $J_4$  из (9.3) в соответствующих подобластях.

На рис. 5 изображено разбиение области  $G_{bT}$  на три подобласти, которые фигурируют в формулах (7.5), (7.6). Цифры 2–4, которыми помечены эти подобласти, означают что функционал  $J_\Sigma(b, T)$  имеет значения  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$  из (9.3) в соответствующих подобластях.

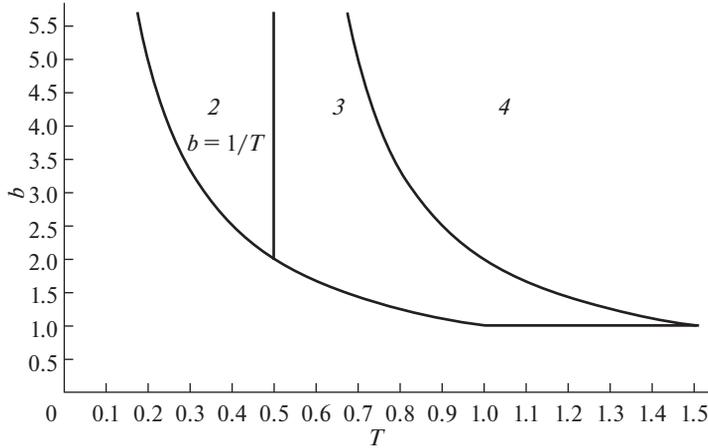


Рис. 5. Разбиение области  $G_{bT}$  на подобласти для функции  $J_{\Sigma}(b, T)$ .

В [14] показано, что применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 10% по сравнению со значением функционала  $J_R$ , полученным для управления  $u_{rc}^*$  и момента упреждения  $t_c^*$ . Применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 700% по сравнению со значением функционала  $J_{\Sigma}(b, T)$ , полученным для управления  $u_t^*$  и момента упреждения  $t_t^*$ .

*Сравнение функций  $J_R(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$ ,  $J_{comb}(b, T)$ .* Заметим, что все три функции  $J_R(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$ ,  $J_{\Sigma}(b, T)$  при фиксированном  $b$  суть возрастающие функции  $T$ , а неотрицательная функция  $J_D(b, T) - J_R(b, T)$  при  $b > 36/19$  убывает до нуля по  $T$  на полуинтервале  $(1/b, 1]$ . Поэтому относительная разность  $\gamma(b, T)$  значений  $J_R(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$  при  $b > 36/19$  удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(b, T) = \frac{J_D(b, T) - J_R(b, T)}{J_R(b, T)} \leq \frac{J_D(b, T) - J_R(b, T)}{J_R(b, T)} \Big|_{T=1/b} = 23 - 16\sqrt{2} \approx 0.372583$$

Численные расчеты максимальной величины  $\gamma(b, T)$  в области  $1/T < b \leq 36/19$  также приводят к значению 0.372583, которое тоже достигается при  $T = 1/b$  и составляет 37%.

Относительная разность  $\mu(b, T)$  значений  $J_{comb}(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$ , задаваемая равенством

$$\mu(b, T) = \frac{J_D(b, T) - J_{comb}(b, T)}{J_{comb}(b, T)}$$

удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{b > f(T), T \rightarrow +0} \mu(b, T) = \lim_{b > f(T), T \rightarrow +0} \frac{J_D(b, T) - J_{\Sigma}(b, T)}{J_{\Sigma}(b, T)} = 23 - 16\sqrt{2} \approx 0.372583$$

$$\lim_{b > 1, T \rightarrow 1/b+0} \mu(b, T) = \lim_{b > 1, T \rightarrow 1/b+0} \frac{J_D(b, T) - J_R(b, T)}{J_R(b, T)} = 23 - 16\sqrt{2} \approx 0.372583$$

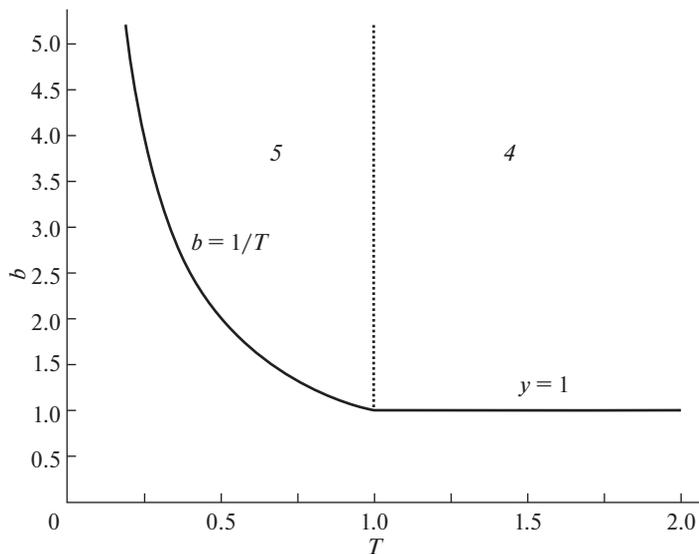


Рис. 6. Разбиение области  $G_{bT}$  на подобласти для функции  $J_D(b, T)$ .

Численный анализ показал, что при фиксированном  $b$ , удовлетворяющем неравенствам  $1 < b \leq 7/3$ , функция  $\mu(b, T)$  на полуинтервале  $(1/b, 1]$  удовлетворяет соотношениям

$$\mu(b, T) < 23 - 16\sqrt{2} \approx 0.372583 \quad (9.4)$$

Было показано, что при  $b$ , удовлетворяющем неравенствам  $7/3 < b$ , функция  $\mu(b, T)$  убывает по  $T$  на полуинтервале  $(1/b, 1/2]$ , затем возрастает по  $T$  на  $(1/2, 1/2 + 1/b]$ , и затем на на полуинтервале  $(1/2 + 1/b, 1]$  убывает до нуля. При этом локальный максимум функции  $\mu(b, T)$  при  $T = 1/2 + 1/b$  равен

$$\mu(b, 1/2 + 1/b) = \frac{7b - 6 - 4\sqrt{(b-1)(3b-2)}}{b}$$

и не превышает величины  $7 - 4\sqrt{3} \approx 0.0718$ . Тем самым было доказано, что относительная разность  $\mu(b, T)$  значений  $J_{comb}(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$  удовлетворяет соотношениям (9.4) во всей области  $G_{bT}$  из (9.1). и не превышает 37%.

*Сравнение функций  $J_0(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$ .* Относительная разность  $v(b, T)$  функций  $J_0(b, T)$ ,  $J_D(b, T)$  удовлетворяет соотношениям

$$v(b, T) = \left| \frac{J_0(b, T) - J_D(b, T)}{J_D(b, T)} \right| = \frac{J_0(b, T) - J_D(b, T)}{J_D(b, T)} = \begin{cases} \frac{b-1}{3b-5-2\sqrt{2}\sqrt{(b-1)(Tb+b-2)}+2Tb} - 1, & \frac{1}{b} < T \leq 1 \\ \frac{T-1}{T-b^{-1}}, & 1 < T \end{cases}$$

и при фиксированном  $b$  убывает по  $T$  на полуинтервале  $(1/b, 1]$  от значения  $v(b, 1/b) = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4.8284$  до значения  $v(b, 1) = 0$ , а затем возрастает на интервале

(1,  $+\infty$ ) и при  $T \rightarrow +\infty$  стремится к 1. Это означает, что использование упреждения и запаздывания приводит к уменьшению значения функционала в 5.8 раза, а для больших  $T$  приводит к уменьшению значения функционала почти в 2 раза.

**Заключение.** Рассмотрена задача изоляции объекта на подвижном основании, которое подвержено однонаправленным возмущениям ограниченной длительности и амплитуды с заданным интегралом от возмущения. Для этой модели изучалась возможность применения наиболее простого, постоянного управления заданной длительности, полученного ранее для мгновенного удара для задачи без упреждения. Предложена оптимизация критерия качества по моменту начала действия предложенного управления. Проведено сравнение по значению критерия качества предлагаемой оптимизации с наиболее эффективными управлениями, предложенными автором в предыдущих работах.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. Гурецкий В.В. О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11–21.
3. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 с.
4. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
6. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001.
7. Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtseov S.V. Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken, NJ: Wiley and Sons, 2010.
8. Болотник Н.Н., Корнеев В.А. Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 147–168.  
<https://doi.org/10.20537/nd1501008>
9. Болотник Н.Н., Корнеев В.А. Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 48–63.  
<https://doi.org/10.7868/S0002338818030058>
10. Болотник Н.Н., Корнеев В.А. Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады РАН. 2018. Т. 445. № 4. С. 381–385.  
<https://doi.org/10.31857/S086956520001708-1>
11. Корнеев В.А. Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89–97.  
<https://doi.org/10.1134/S0002338819010104>
12. Корнеев В.А. Оптимизация управления с упреждением и запаздыванием в задаче противоударной защиты объекта на подвижном основании // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 30–38.  
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030075>
13. Корнеев В.А. Использование постоянного управления с упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 147–158.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020087>
14. Корнеев В.А. Защита объекта на подвижном основании с помощью управления с упреждением и запаздыванием при ограниченных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 4. С. 18–35.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921030077>
15. Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N., Brennan M., Tang B. Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities // Appl. Mech. Rev. 2019. V. 71. № 6. P. 060802  
<https://doi.org/10.1115/1.4044190>

УДК 539.3

**ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ ТЕЛА СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ  
В УСЛОВИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ**© 2022 г. Д. А. Чернышов<sup>a,b,\*</sup>, А. В. Ковалев<sup>a,c,\*\*</sup><sup>a</sup> Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия<sup>b</sup> Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия<sup>c</sup> Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия  
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Россия

\*e-mail: chernyshov.danil@gmail.com

\*\*e-mail: kav-mail@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2021 г.

После доработки 06.10.2021 г.

Принята к публикации 07.10.2021 г.

Для изучения влияния реологии тела на его напряженно-деформированное состояние под действием температуры используется модель А.Н. Спорыхина (упрочняющееся упруговязкопластическое тело). Предполагается квазистатическое деформирование при отсутствии массовых и поверхностных сил. Для данной постановки задачи определены компоненты напряжений и перемещений в упругой и пластической областях, зоне разгрузки и повторной пластичности и исследована их зависимость от учета конкретных реологических особенностей тела.

*Ключевые слова:* температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, сплошной шар

**DOI:** 10.31857/S0572329922030059

**1. Введение.** Процессу деформирования материалов (как обратимого, так и необратимого) большое количество работ [1–11], в которых рассматриваются модели с различными свойствами. Наиболее исследованным является вопрос зависимости напряженно-деформированного состояния от выбора условий пластичности [1, 6, 10]. Однако не меньший интерес вызывает рассмотрение в рамках одной модели сразу нескольких механизмов деформирования. Следуя [5], введение в рассмотрение вязкости наделяет модель свойствами внутренней неконсервативности и связано с дополнительными вычислительными сложностями. В данной работе предложен подход к решению задач с учетом вязких свойств материала, а также установлено влияние различных реологических свойств на процесс деформирования.

**2. Постановка задачи.** Сплошной шар радиуса  $R$  имеет начальную температуру  $T_0$ . В течение времени он нагревается таким образом, что в каждый момент на поверхности выполнено условие

$$\frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} \quad (2.1)$$

где  $T(r, t)$  – распределение температуры,  $r$  – пространственная координата точки,  $t$  – время,  $x$  – скорость нагрева,  $T_0$  – начальная температура тела,  $T_m$  – максимальная температура нагрева. Примем, что внешняя поверхность шара свободна от усилий,

массовые силы отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела. Аналогичная постановка задачи произведена в [6] для упругопластического материала.

**3. Решение задачи.** 3.1. *Задача теплопроводности.* В условиях сферической симметрии уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \vartheta \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} \right) \quad (3.1)$$

Здесь  $\vartheta$  – коэффициент температуропроводности.

Начальное и граничные условия (включая (2.1)), а также условие симметрии записываются в виде:

$$\begin{aligned} T(r,0) &= T_0 \\ \frac{T(R,t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt} \\ T(0,t) &\neq \infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (3.1)–(3.2).

Введем замену

$$\Psi(r,t) = r \frac{T(r,t) - T_m}{T_0 - T_m} \quad (3.3)$$

Будем искать решение в виде суммы

$$\Psi(r,t) = U(r,t) + V(r,t) \quad (3.4)$$

где функция  $U(r,t)$  подбирается так, чтобы она удовлетворяла только граничным условиям.

Тогда для  $V(r,t)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(r,t)}{\partial t} &= \vartheta \frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial r^2} - \left[ \frac{\partial U(r,t)}{\partial t} - \vartheta \frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial r^2} \right] \\ V(r,0) &= r - U(r,0) \\ V(0,t) &= V(R,t) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Проведем рассмотрение с выбранной функцией

$$U(r,t) = re^{-xt}$$

Следуя [12], выпишем решение задачи (3.5)

$$V(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right)}{\frac{\pi n}{R}} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right]$$

Возвращаясь к замене (3.3)–(3.4) и вводя безразмерную функцию, получим

$$\Theta(\xi,t) = \frac{T(\xi,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right] \quad (3.6)$$

где  $\xi = \frac{r}{R}$  – безразмерная координата.

В случае рассмотрения мгновенного нагрева поверхности приходим к задаче, решение которой приводится в [13, с. 105].

3.2. *Напряженно-деформированное состояние. Общие соотношения.* В случае сферической симметрии все величины с индексами углов  $\varphi$  и  $\theta$  считаются равными между собой. Кроме того, частные производные любой функции по координатам  $\varphi$  и  $\theta$  будут равны нулю. Запишем основные уравнения, используемые для решения задач механики сплошной среды с учетом реологических свойств и температуры.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (3.7)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$  – компоненты тензора напряжений.

В пластической зоне свойства материала будут описываться моделью среды, предложенной А.Н. Спорыхиным [5] и учитывающей упругий, вязкий и пластический механизмы деформирования:

$$(S_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p)^2 + 2(S_\varphi - ce_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p)^2 = 2\tilde{k}^2(r, t) \quad (3.8)$$

где  $S_r, S_\varphi, S_\theta$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $e_r^p, e_\varphi^p, e_\theta^p$  – компоненты тензора пластических деформаций,  $c$  – коэффициент упрочнения,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\tilde{k}(r, t)$  – предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения:

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{4}{3} d\psi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)) \\ de_\varphi^p &= de_\theta^p = -\frac{2}{3} d\psi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\psi$  – скалярный положительный множитель. Из (3.9) следует пластическая несжимаемость материала

$$de_r^p + 2de_\varphi^p = 0 \quad (3.10)$$

Следуя [6], будем считать, что  $de_{ij}^p = e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^p$ , где  $\bar{e}_{ij}^p$  – пластические деформации в предыдущий момент времени, и существует некоторый начальный момент, для которого  $\bar{e}_{ij}^p = 0$ . Тогда (3.10) примет вид

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0 \quad (3.11)$$

Преобразовывая (3.8) с учетом (3.11), получим

$$[(\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p)]^2 = 3\tilde{k}^2(r, t)$$

После замены  $\tilde{k}(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}}k(r, t)$  условие пластичности запишется в форме

$$|(\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p)| = 2k(r, t) \quad (3.12)$$

Аналогичное соотношение можно получить при использовании условий пластичности Треска и Ивлева.

Аналогично [6], будем рассматривать материал, предел текучести которого линейно зависит от температуры  $k(r, t) = k_0(1 - \gamma\Delta(r, t))$ , где  $k_0$  – предел текучести при начальной температуре,  $\gamma$  – некоторая константа, определяемая из экспериментов,  $\Delta(r, t) = \alpha(T(r, t) - T_0)$ ,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

Закон Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta\end{aligned}\quad (3.13)$$

где  $e_r^e, e_\varphi^e, e_\theta^e$  – компоненты тензора упругих деформаций.

Уравнения для полных деформаций и соотношения Коши:

$$\begin{aligned}e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r,r} \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p &= e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}\end{aligned}\quad (3.14)$$

где  $e_r, e_\varphi, e_\theta$  – компоненты тензора полных деформаций.

3.3. Построение общего алгоритма определения напряженно-деформированного состояния. Поскольку безразмерное решение для поля температур имеет вид (3.6), то все величины будем искать в форме

$$F(r, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F^{[n,j]}(r) e^{-h^{[n,j]}t} \quad (3.15)$$

где  $h^{[n,1]} = \frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta$ ,  $h^{[n,2]} = x$ ;  $[n, j]$  – индексы членов ряда.

Очевидно, что  $\Delta(r, t) = \Delta_m \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right)$ , где  $\Delta_m = \alpha(T_m - T_0)$ . Кроме того, можно разложить предел текучести в ряд:

$$k(r, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_0(\delta^{[n,j]} - \gamma \Delta^{[n,j]}(r)) e^{-h^{[n,j]}t}$$

Здесь

$$\delta^{[0,1]} = 1; \quad \delta^{[0,2]} = 0; \quad \forall n > 0 \quad \delta^{[n,1]} = \delta^{[n,2]} = 0 \quad (3.16)$$

Подставив (3.15) в (3.7), (3.11), (3.12)–(3.14), получим полную систему уравнений. Очевидно, что все величины в ней представляют собой ряды, и каждое из уравнений имеет вид  $\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} G^{[n,j]}(r) e^{-h^{[n,j]}t} = 0$ . Поскольку данное условие выполняется в любой точке  $0 \leq r \leq R$  и для любого момента времени  $t \geq 0$ , то из него следует условие равенства нулю каждого члена ряда. В дальнейшем для удобства будем опускать индексы  $[n, j]$ . Таким образом, получим полную систему уравнений для определения всех членов разложения искомых величин в форме:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (3.17)$$

$$|(\sigma_r - (c - \eta h) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h) e_\varphi^p)| = 2k(r) \quad (3.18)$$

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r) \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r)\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r,r} \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p &= e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Предположим, что в начальный момент времени тело полностью находилось в упругом состоянии, и по мере нагревания на его поверхности возникают и двигаются по направлению к центру зоны пластического и остаточного деформирования. Для определения напряженно-деформированного состояния будем осуществлять следующую последовательность действий:

1. Из соотношений Коши (3.21) получить

$$e_r^e + e_r^p = [r(e_\phi^e + e_\phi^p)]_{,r}$$

2. Подставляя закон Дюамеля–Неймана (3.20) и учитывая условие пластической несжимаемости (3.19) и уравнение равновесия (3.17), записать соотношение

$$(r\sigma_{r,r})_{,r} + 3\sigma_{r,r} + 2\omega \left[ 2\Delta_{,r} - e_{r,r}^p - \frac{3e_r^p}{r} \right] = 0$$

3. Решая полученное уравнение, выписать выражение напряжений через пластические деформации;

4. В случае пластического деформирования подставить формулы для напряжений в условие пластичности (3.18) и решить его относительно пластических деформаций;

5. Возвращаясь к закону Дюамеля–Неймана и соотношениям Коши, получить формулу для перемещений;

6. Из граничных условий и условий сопряжения найти константы интегрирования.

3.4. Решения для каждой зоны. В начальный момент времени тело находится в состоянии упругого равновесия. Поэтому во всем шаре решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_1 + \frac{B_1}{r^3} \\ \sigma_\phi &= \frac{2\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_1 - \frac{B_1}{2r^3} \\ u &= \frac{\omega}{\mu r^2} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{rA_1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_1}{4\mu r^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\text{где } \omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}.$$

Неизвестные постоянные определяются из условий свободной от усилий поверхности и отсутствия перемещений в центре:

$$A_1 = \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_1 = 0.$$

В некоторый момент  $t = t_p$  на поверхности шара  $r = R$  начинает выполняться условие пластичности

$$(\sigma_r - (c - \eta h)e_r^p) - (\sigma_\phi - (c - \eta h)e_\phi^p) = 2k(r) \quad (3.23)$$

В связи с этим при  $t > t_p$  в шаре одновременно существуют область  $0 \leq r < a(t)$  обратимого и  $a(t) \leq r \leq R$  необратимого деформирования.  $a(t)$  – упругопластическая граница.

В упругой зоне напряжения и перемещение определяются по формулам (3.22) с точностью до новых констант интегрирования. В пластической зоне решение принимает вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_2 + \frac{B_2}{r^3} \right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \\
 &\quad + \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \frac{B_2}{r^3} \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega\Delta(r) + A_2 - \frac{B_2}{2r^3} \right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \\
 &\quad - \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega - h)r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{4\omega}{3\eta(\Omega - h)} k(r) + \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \Delta(r) + \frac{\omega}{3\eta(\Omega - h)} \frac{B_2}{r^3} \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{rA_2}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_2}{4\mu r^2} \right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \\
 &\quad + \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)r^2} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} \frac{B_2}{r^2},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\text{где } \Omega = \frac{2\omega + 3c}{3\eta}.$$

Константы интегрирования для обеих зон находятся из граничных условий, а также условий сопряжения напряжений и перемещений на границе  $a(t)$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
 &\quad + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\
 A_2 &= \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\
 B_1 &= 0, \quad B_2 = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho
 \end{aligned}$$

Положение  $a(t)$  определяется из отсутствия на ней пластических деформаций, выполнения условия пластичности (3.23) для напряжений (3.22) или непрерывности окружных напряжений на границе (данные условия являются эквивалентными):

$$e_r^p(a, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(a) - \frac{2k^{[n,j]}(a)}{\omega} - \frac{6}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]}t} = 0$$

По мере нагревания температурные напряжения в теле уменьшаются. Это приводит к снижению уровня пластических деформаций. Согласно ассоциированному закону, их скорость не может быть отрицательной. Пусть в некоторый момент  $t = t_u$  на поверхности шара выполняется условие разгрузки материала

$$\dot{e}_r^p = 0$$

Тогда при  $t > t_u$  возникает новая область с границей  $b(t)$ . Следует заметить, что в каждой точке области  $b(t) \leq r \leq R$  сохраняется уровень накопленной деформации  $\hat{e}^p$ ,

равный пластической деформации в этой точке в момент прохождения через нее границы  $b(t)$ .

В зонах упругости и пластичности решение записывается по уже известным формулам (3.22) и (3.24). Выражения в зоне разгрузки имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_3 + \frac{B_3}{r^3} \right\} + 2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ \sigma_\phi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_3 - \frac{B_3}{2r^3} \right\} + 2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + 2\omega \hat{e}_r^p(r) \\ u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{rA_3}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_3}{4\mu r^2} \right\} + \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho\end{aligned}\quad (3.25)$$

Далее необходимо воспользоваться граничными условиями и условиями сопряжения на упругопластических границах и определить из них неизвестные константы:

$$\begin{aligned}A_1 &= -2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \\ &- \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\ A_2 &= -2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \\ &- \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\ A_3 &= -2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\ B_1 &= 0, \quad B_2 = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_3 = -4\omega \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho\end{aligned}$$

Положение границы  $b(t)$  при  $t > t_u$  определяется из условия равенства нулю скорости пластических деформаций на ней

$$\dot{e}_r^p(b, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\omega(-h^{[n,j]})}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(b) - \frac{2k^{[n,j]}(b)}{\omega} - \frac{6}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]}t} = 0 \quad (3.26)$$

Определим уровень накопленной деформации  $\hat{e}_r^p$ . Поскольку  $b(t)$ , вычисляемая из (3.26), непрерывна и монотонно убывает, то существует обратная ей функция  $s(b)$ . Тогда накопленные деформации имеют вид

$$\hat{e}_r^p(r) = e_r^p(r, s(r)) \quad (3.27)$$

что эквивалентно поиску огибающей семейства пластических деформаций с параметром  $t$ . Так как  $\hat{e}_r^p$  не зависит от времени, то будем считать, что она состоит только из одного ненулевого слагаемого вида  $\hat{e}_r^{p[0,1]}(r) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} e_r^{p[n,j]}(r) e^{-h^{[n,j]}s(r)}$ . Поэтому (3.25)

справедливы только для напряжений и перемещений с индексом  $[0, 1]$ , а для всех остальных следует делать подстановку  $\hat{e}_r^{[n,j]}(r) = 0$ .

В зависимости от уровня накопленных деформаций возможно существование момента  $t = t_r$ , при котором происходит выход на условие пластичности (3.23) с противоположным знаком:

$$(\sigma_r - (c - \eta h) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h) e_\varphi^p) = -2k(r)$$

Решение в новой области совпадает с решением (3.24) в зоне  $a(t) \leq r < b(t)$  с точностью до новых постоянных и знака перед пределом текучести:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_4 + \frac{B_4}{r^3} \right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \\ &\quad + \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \frac{B_4}{r^3} \\ \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_4 - \frac{B_4}{2r^3} \right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \\ &\quad - \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega - h)r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{4\omega}{3\eta(\Omega - h)} k(r) + \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \Delta(r) + \frac{\omega}{3\eta(\Omega - h)} \frac{B_4}{r^3} \\ u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{rA_4}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_4}{4\mu r^2} \right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} r \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \\ &\quad + \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)r^2} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} \frac{B_4}{r^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для определения констант интегрирования следует исходить из граничных условий, а также условий сопряжения напряжений и перемещений на упругопластических границах. Возможны различные варианты одновременного существования зон. Рассмотрим случай, при котором в теле присутствует каждая из рассмотренных областей. Тогда неизвестные постоянные принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \\ &\quad + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\ A_2 &= -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \\ &\quad + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \\ A_3 &= -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \\ &\quad + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \end{aligned}$$

$$A_4 = -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left\{ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_3 = -4\omega \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_4 = -4\omega \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho$$

Положение границы  $c(t)$  находится аналогично  $a(t)$  из уравнения

$$e_r^p(c, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(c) + \frac{2k^{[n,j]}(c)}{\omega} - \frac{6}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} \cdot e^{-h^{[n,j]}t} = \hat{e}_r^p(c)$$

В процесс деформирования существует момент времени  $t = t_k$ , при котором положение границ  $a(t_k)$  и  $b(t_k)$  совпадает, то есть первая зона пластического деформирования перестает существовать. Тогда в зоне  $0 \leq r \leq c(t)$  устанавливается состояние разгрузки, а упругопластические границы достигают своего предельного положения  $a(t_k) = b(t_k) = b'$ . В зависимости от температурного воздействия момент  $t = t_k$  может наступить как до, так и после возникновения зоны повторного пластического течения.

При полном нагреве до температуры  $T_m$  в момент времени  $t = t_m$  положение границы  $c(t)$  достигает предельного положения  $c'$ , а скорость пластического деформирования становится равной нулю. Тогда в области  $c' \leq r \leq R$  имеют место остаточные деформации  $\tilde{e}_r^p$ . Выражение для них записывается в виде

$$\tilde{e}_r^p(r) = e_r^p(r, t_m) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4k_0(\delta^{[n,j]} - \gamma\Delta_m^{[n,j]})}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} e^{-h^{[n,j]}t_m} = 0$$

Так как при полном нагреве  $\Theta\left(\frac{r}{R}, t_m\right) = 1$ , то  $\Delta_m^{[0,1]} = 1$ ;  $\Delta_m^{[0,2]} = 0$ ;  $\forall n > 0 \Delta_m^{[n,1]} = \Delta_m^{[n,2]} = 0$ . С учетом (3.16), выражение для остаточных деформаций принимает вид

$$\tilde{e}_r^p(r) = \frac{4k_0(1 - \gamma\Delta_m)}{3\eta\Omega}$$

Для простоты введем функцию остаточных деформаций

$$E_r^p(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < b' \\ \hat{e}_r^p(r), & b' \leq r < c' \\ \tilde{e}_r^p(r), & c' \leq r \leq R \end{cases} \quad (3.29)$$

Охладим теперь шар до начальной температуры. Запишем условие полного остывания:

$$\Delta(r, t) = 0$$

Данный процесс представляет собой разгрузку материала. С учетом (3.25) и (3.29), получим выражения для остаточных напряжений и деформаций

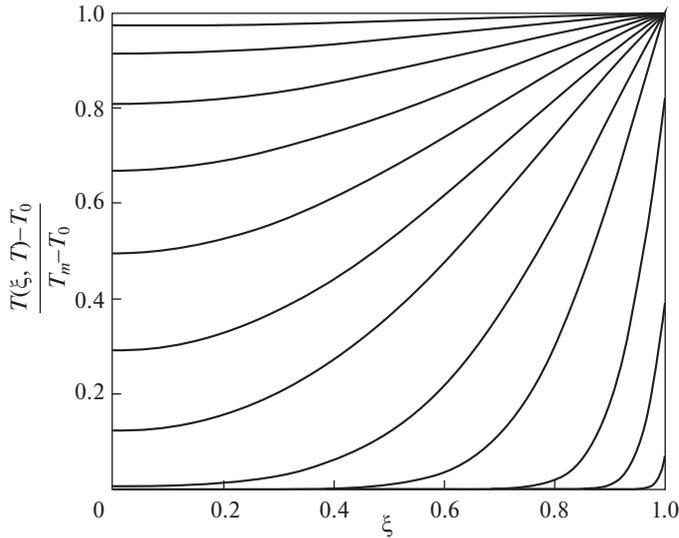


Рис. 1. Распределение температуры шара в различные моменты времени.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= 2\omega \int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \\
 \sigma_\varphi &= 2\omega \int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + 2\omega E_r^p(r) \\
 u &= \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho} d\rho
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

**4. Анализ решения.** Обоснование применимости метода решения задачи теплопроводности приводится в [12]. Однако дополнительно необходимо проверить, что все полученные величины достаточное количество раз непрерывно дифференцируемы и интегрируемы, чтобы удовлетворять уравнениям задачи. Этот вопрос (как и выбор оптимального количества членов ряда и скорость сходимости при малых  $t$ ) представляет собой отдельную тему исследования и не приводится в рамках данной работы. В дальнейшем будем рассматривать постоянное количество членов каждого из рядов. С целью определения достаточности подобранного числа членов на примере задачи теплопроводности было проведено численное интегрирование краевой задачи в программной системе конечно-элементного анализа с последующей визуальной оценкой графических зависимостей. На рис. 1 и 2 представлено распределение поля безразмерной температуры, полученное аналитически и с применением численных методов решения дифференциальных уравнений, в одни и те же моменты времени.

Для сравнения моделей, учитывающих различные свойства материала, необходимо совершить предельный переход. Для рассмотрения модели без упрочнения материала, необходимо в полученном решении задаться  $c = 0$ . Чтобы в общем случае исключить из рассмотрения вязкость, следует положить  $\eta = 0$ . Тогда во всех выражениях следует заменить коэффициенты вида  $3\eta(\Omega - h)$  на  $3c + 2\omega$ . Если дополнительно приравнять

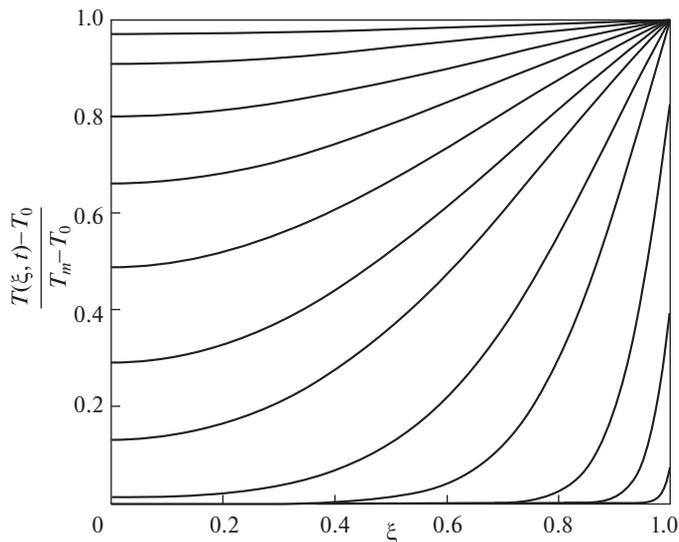


Рис. 2. Распределение численного решения поля температур.

$c = 0$ , то получится решение для случая упругопластического материала. Можно легко убедиться, что для каждого члена ряда оно в точности совпадает с решением [6].

Проведем сравнение для четырех моделей сред. В дальнейшем будем пользоваться следующими индексами для основных величин:  $i$  – упругопластический материал,  $c$  – упругопластический материал с упрочнением,  $\eta$  – упруговязкопластический материал без упрочнения,  $c\eta$  – упруговязкопластический материал с упрочнением. В качестве примера рассмотрим тело со следующими параметрами:  $R = 0.2$  м,  $x = 1$  с<sup>-1</sup>,

Таблица 1. Значения моментов возникновения зон (в секундах) и положения границ (безразмерные)

	$i$	$c$	$\eta$	$c\eta$
$t_p$	0.28166	0.28166	0.47532	0.35202
$t_u$	2.98776	2.98776	3.17949	3.05806
$a(t_u)$	0.87561	0.87561	0.87514	0.87554
$t_r$	11.75536	11.75536	11.96710	11.82847
$a(t_r)$	0.72574	0.72574	0.72537	0.72569
$b(t_r)$	0.85930	0.85930	0.85881	0.85923
$t_k$	25.31517	25.31517	25.48840	25.38286
$a(t_k) = b(t_k) = b'$	0.66649	0.66649	0.66650	0.66649
$c(t_k)$	0.95746	0.95746	0.95752	0.95747
$c(t_m) = c'$	0.79004	0.79004	0.79006	0.79005

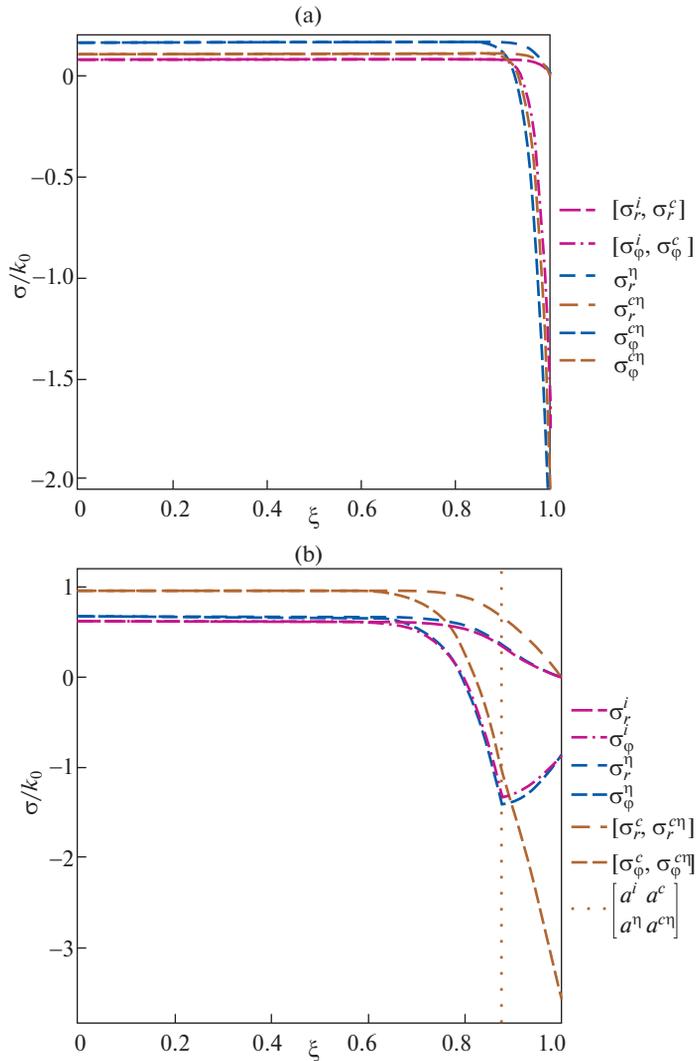


Рис. 3. Распределение напряжений в различные моменты времени.

$\vartheta = 1.172 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\Delta_m = 8.5 \times 10^{-3}$ ,  $k_0 = 2 \times 10^8 \text{ Па}$ ,  $\gamma = 70.6$ ,  $\lambda = 9.2 \times 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 4.3 \times 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c = 0.9 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\eta = 1.0 \times 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

В табл. 1 приведены численные значения моментов возникновения новых зон, а также положение упругопластических границ в эти моменты. На рис. 3 представлено распределение радиальных и окружных напряжений в шаре для каждой из моделей сред в различные моменты времени: (а) – возникновение зоны пластического течения, (б) – возникновение зоны разгрузки, (с) – возникновение зоны повторного пластического течения, (д) – исчезновение первой зоны пластического течения. В случае упругопластического материала полученные графики совпадают с приведенными в [6]. То же справедливо и для остаточных напряжений в теле (см. рис. 4).

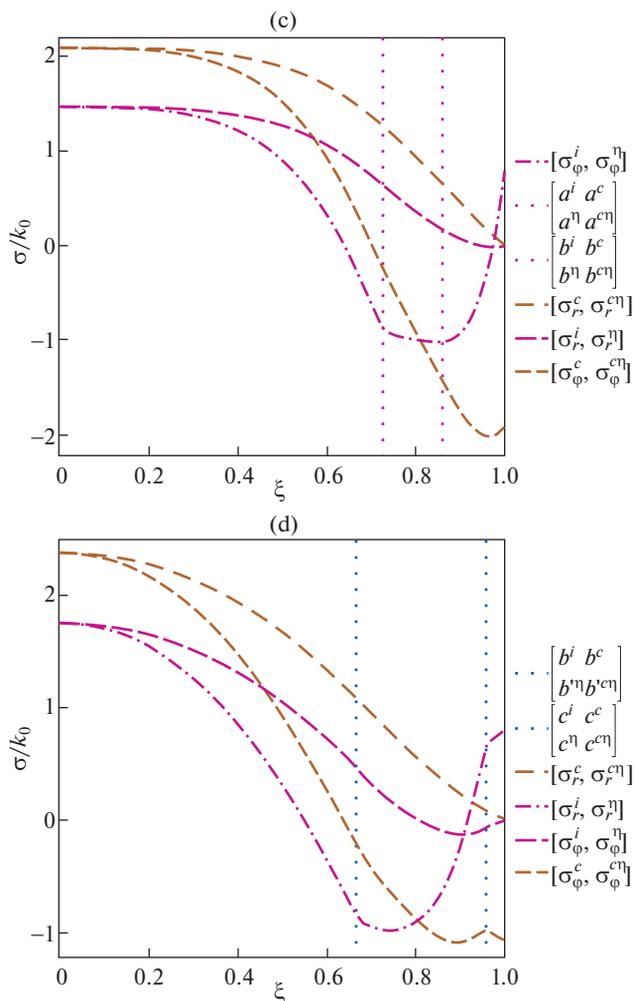


Рис. 3. Окончание

На рис. 5 представлен график возникновения, развития во времени и исчезновения первой зоны пластического течения.

**5. Заключение.** В работе было получено аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии нагреваемого сплошного шара с реологическими свойствами; совершены предельные переходы к упругопластическому материалу, упруговязкопластическому материалу и упрочняющемуся упругопластическому материалу; проведено сравнение с уже имеющимися результатами; построены графики распределения напряжений в шаре при отличающихся механизмах деформирования.

Анализ решения позволил сформулировать следующие выводы:

1. Учет упрочнения материала оказывает существенное влияние на величину напряжений.
2. При отсутствии вязкости упрочнение не влияет на положение упругопластических границ.

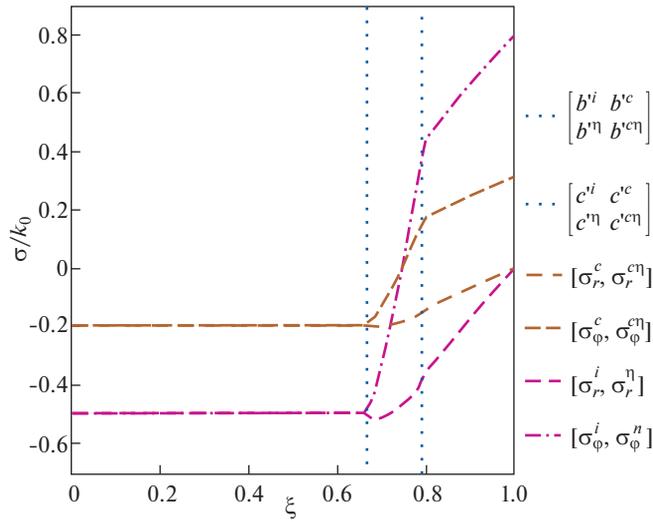


Рис. 4. Остаточные напряжения.

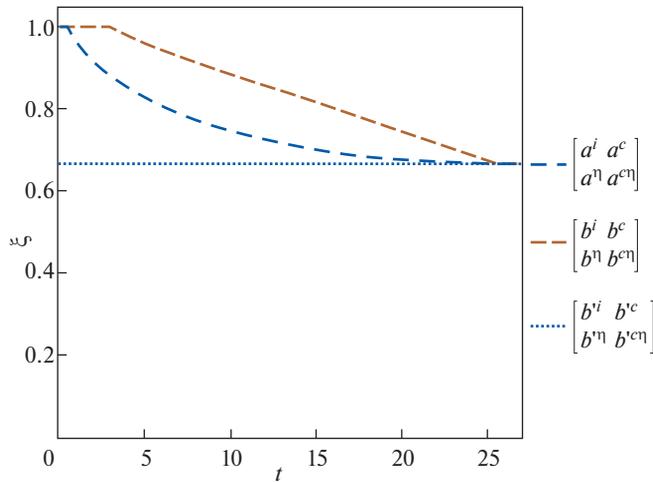


Рис. 5. Движение границ  $a(t)$  и  $b(t)$ .

3. Влияние вязкости на величину напряжений быстро уменьшается с течением времени. Остаточные деформации при полном нагреве не зависят от данного параметра.

4. Предельные положения границ для всех четырех моделей материалов можно считать одинаковыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с. = Parkus H. Instationäre Wärmespannungen. Vienna: Springer, 1959.

3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с. = *Boley B.A., Weiner J.H. Theory of Thermal Stresses*. N. Y.: Wiley, 1960.
4. Спорыхин А.Н., Ковалев А.В., Щеглова Ю.Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: ВГУ, 2004. 218 с.
5. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ. 1997. 361 с.
6. Дац Е.П. Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры. Дис. канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2017. С. 23–48.
7. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Лушпей А.В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикладная математика и механика. 2009. № 4. С. 663–669.
8. Мурашкин Е.В., Дац Е.П. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 30–36.
9. Дац Е.П., Мокрин С.Н., Мурашкин Е.В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе “нагрева-охлаждения” упругопластического шара // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2012. № 4. С. 123–132.
10. Артемов М.А., Барановский Е.С., Якубенко А.П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физ. Мат. 2015. № 1. С. 71–82.
11. Галанин М.П., Гузев М.А., Низкая Т.В. Численное решение задачи термопластичности с дополнительными параметрами состояния. Препринт № 8. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2007. 20 с.
12. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.
13. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

УДК 539.3

**СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ МИКРОДЕФЕКТОВ  
В РАСТЯГИВАЕМЫХ ОБРАЗЦАХ МАТЕРИАЛА**© 2022 г. **Д. В. Бабич**<sup>a,\*</sup>, **Т. И. Дородных**<sup>b,\*\*</sup><sup>a</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина<sup>b</sup>Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Тула, Россия

\*e-mail: babich\_dv@ukr.net

\*\*e-mail: tdortula@gmail.com

Поступила в редакцию 26.05.2021 г.

После доработки 09.08.2021 г.

Принята к публикации 12.08.2021 г.

Разрушение материала является сложным, многоэтапным процессом, включающим рассеянные микроразрушения структурных элементов. Разрушение структурных элементов может происходить путем образования плоских микротрещин отрыва, сдвига или при наличии обоих механизмов. В работе приводятся методики определения концентрации микродефектов в повреждающемся материале на основании законов распределения пределов прочности (текучести) в структурных элементах материала и на основании экспериментальных данных по определению основных механических характеристик материала при растяжении стандартных образцов.

*Ключевые слова:* поврежденный материал, концентрация микродефектов, остаточные деформации

**DOI:** 10.31857/S0572329922040031

**Введение.** В процессе деформирования гетерогенных материалов образуются повреждения в виде микротрещин отрыва и сдвига либо в виде площадок текучести. Микроповреждения в материале существенно влияют на значения основных деформационных характеристик типа предел пропорциональности, предел пластичности, временное сопротивление и коэффициент поперечного сужения. Это обстоятельство сказывается на результатах расчетов на прочность, устойчивость и др. для реальных конструкций. Как правило, такие расчеты идут в запас прочности. Очевидно, в связи с этим указанный вопрос обсуждался недостаточно. В настоящее время существуют различные подходы к моделированию микроповреждаемости материалов [1–6, 14–17]. Есть подходы, где учитывается взаимодействие соседних структурных элементов в процессе деформирования, что приводит к изменению масштаба и типа структурных элементов. При взаимодействии микротрещин в материале возникает развитие регулярной структуры разрушения. Например, взаимодействие микротрещин в пористом теле при сжатии с образованием такой структуры разрушения, рассматривается в работе [7]. Следует отметить подходы с использованием метода минимизации целевой функции осуществляемого с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта [8–10].

Структурно-вероятностная модель повреждаемости материала описана в работах [1, 3, 4]. Результаты исследований особенностей деформирования, разрушения конструкций, устойчивости тонкостенных конструкций, а также работы по электроупругим материалам, с учетом микроразрушений отражены в работах [1–6, 11].

В указанных работах для оценки степени поврежденности материала используется параметр  $p = F_r/F_0$ , где  $F_0$  – исходная эффективная площадь сечений,  $F_r$  – разрушенная часть исходной площади. Для определения параметра  $p$  используются функции распределения случайных значений пределов прочности структурных элементов материала.

Концентрация микроразрушений  $p$  является одной из основных характеристик материала, поэтому поиск способов определения этой характеристики представляет теоретический и практический интерес. Наряду с аналитическим способом определения концентрации микроразрушений в образцах на основе функции распределения пределов прочности (текучести) в структурных элементах материала, приводится новый экспериментальный способ на основе замеров текущих значений удлинения образцов в макроэксперименте.

**1. Экспериментальный способ.** При растяжении экспериментальных образцов силой  $P$  образуется остаточная деформация

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_y \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon = \bar{\sigma}/\bar{E}_c$  – полная деформация;  $\varepsilon_y = \bar{\sigma}/\bar{E}_0$  – упругая деформация;  $\bar{E}_c$  – секущий модуль;  $\bar{E}_0$  – модуль упругости растягиваемого образца. Истинные напряжения  $\bar{\sigma}$  определяются выражением

$$\bar{\sigma} = P/(F_0 - F_v - F_r) = \sigma'/(1 - p_v - p) \quad (1.2)$$

В (1.2) обозначено:  $F_v, F_r$  – соответственно уменьшение эффективной площади сечения за счет эффекта Пуассона и микроразрушений в материале.  $p_v, p$  – относительные доли  $F_v, F_r$ ;  $\sigma' = P/F_0$  – условные напряжения, в которых приводятся справочные данные об основных механических характеристиках материала; ( $\sigma'_{0,02}$  – условный предел пропорциональности;  $\sigma'_{0,2}$  – условный предел текучести).

В процессе деформирования образца эффективная площадь сечений с учетом эффекта Пуассона и микроразрушений в материале определяется выражением

$$F = F_0(1 - p)(1 - \nu\varepsilon)^2 \quad (1.3)$$

где  $\nu$  – коэффициент поперечного сужения, изменяющийся в процессе деформирования. С учетом (1.2), (1.3) выражение (1.1) преобразуется к виду

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma'}{\bar{E}_c(1 - p)(1 - \nu\varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\bar{E}_0(1 - p)(1 - \nu\varepsilon)^2} \quad (1.4)$$

С учетом, что первое слагаемое в (1.4) обозначает общую деформацию  $\varepsilon$  следует соотношение

$$p = 1 - \frac{\sigma'}{\bar{E}_0(\varepsilon - \varepsilon_0)(1 - \nu\varepsilon)^2} \quad (1.5)$$

С учетом малости  $\nu\varepsilon \ll 1$  для конструкционных материалов типа сталей соотношение (1.5) принимает вид

$$p = 1 - \frac{\sigma'}{\bar{E}_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad (1.6)$$

В (1.6) выражение  $\varepsilon'_y = \frac{\sigma'}{E_0}$  — обозначает условную упругую деформацию,  $\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon - \varepsilon_0$  обозначает истинную упругую деформацию,  $\varepsilon'_y = (1 - p) \cdot \bar{\varepsilon}_y$ .

В абсолютно упругом теле  $\varepsilon_0 = 0$ , в частично упругом  $\varepsilon_0 \neq 0$  [18]. При деформировании частично упругого материала в упругой области  $0 < \sigma' \leq \sigma'_{0.02}$  имеет место выражение

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma'}{E_0(1-p)} - \frac{\sigma'}{E_0} \quad (1.7)$$

где  $E_0$  — модуль упругости сплошного материала,  $\bar{E}_0$  — модуль упругости частично упругого материала.  $p$  — концентрация микродефектов отрыва. В случае малых остаточных деформаций  $E_0 \approx \bar{E}_0 \approx E_-$ , где  $E_-$  — модуль упругости при сжатии образца. Остаточная деформация при растяжении образца в упругой области в случае микро-разрушений отрывом будет определяться разностью значений деформаций при растяжении  $\varepsilon_+$  и сжатии  $|\varepsilon_-|$ .

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_+ - |\varepsilon_-| \quad (1.8)$$

Из (1.7) следует выражение для концентрации микротрещин отрыва

$$p = 1 - \frac{\varepsilon_+}{|\varepsilon_-| + \varepsilon_0} \quad (1.9)$$

Абсолютно упруго материал ведет себя в диапазоне напряжений  $0 < \sigma' \leq \sigma'_{ce}$ , где  $\sigma'_{ce}$  — минимальный предел прочности структурных элементов материала. Параметр  $\sigma'_{ce}$  представляет собой максимальное условное напряжение в образце, при котором  $\varepsilon_0 = 0$ .

Методика аналитического определения величин  $E_+$ ,  $\bar{E}_0$ ,  $E_-$  изложена в [3]. В частично упругом материале предел пропорциональности является условной величиной, которая зависит от принимаемого в качестве приближенного значения  $\varepsilon_0$ , при котором материал в некотором приближении считается упругим.

**2. Аналитический способ.** Физическая суть параметра  $p$  состоит в том, что он представляет относительную долю площади пересекаемых структурных элементов, в которых локальные напряжения достигают уровня пределов прочности либо текучести.

В [13] на основе анализа тонких срезов осадков в петрографии показано, что  $p = \frac{N_0}{N}$ , где  $N$  и  $N_0$  соответственно общее число и число разрушенных структурных элементов. Существует несколько подходов к определению распределения пределов прочности (текучести). Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации в микронеоднородных материалах предложены различные законы: степенной закон [4], нормальный закон распределения микропрочности [4], функция распределения Вейбулла [4], функция распределения Пирсона третьего рода [16] и др.

В качестве примера рассматривается степенной закон. Согласно этому закону плотность и интегральная функция распределения пределов прочности (текучести) структурных элементов имеют вид

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{dp(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \alpha \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_0} \right) \left( \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_0} \right)^{\alpha-1} \quad (2.1)$$

$$p(\bar{\sigma}) = \left( \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_0} \right)^\alpha \quad (2.2)$$

В (2.1), (2.2) обозначено:  $\bar{\sigma}$  – случайные значения пределов прочности (текучести) структурных элементов при растяжении;  $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1$  – соответственно минимальное и максимальное значения пределов прочности (текучести);  $\alpha$  – коэффициент рассеивания пределов прочности.

В случае микродефектов сдвига в формулах (2.1), (2.2) следовало бы перейти к касательным напряжениям. Однако в этом нет необходимости, поскольку характерные сдвиговые параметры определяются через соответствующие параметры в нормальных напряжениях. Поэтому независимо от критериев текучести конечный результат (значение  $p$ ) будет одинаковым. В случае касательных напряжений отсутствует эффект Пуассона, которым пренебрегается в конечных выражениях при нормальных напряжениях.

Способы определения параметров интегральной функции распределения  $p(\bar{\sigma})$  изложены в [1, 6].

Очевидно, интенсивное разрушение либо текучесть в структурных элементах начинаются при напряжениях больших предела пропорциональности. Поэтому принимается  $\bar{\sigma}_0 = \sigma_{0,02}$ .

В дальнейшем в качестве примера микроразрушение в материале рассматривается в интервале напряжений  $\bar{\sigma}_{0,02} < \bar{\sigma}' \leq \bar{\sigma}_{0,2}$ , где цифрами внизу обозначены значения остаточной деформации в долях процента. В указанном интервале параметры  $\alpha$  и  $\bar{\sigma}_1$  определяются выражениями [6]:

$$\alpha = -1 + (1/k)\sqrt{1 + k^2}, \quad k = \frac{w_{0,2}}{1 - \sigma'_{0,02}/\sigma'_{0,2}} \quad (2.3)$$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{(1 + \alpha)}{\alpha}(\bar{\sigma}_{0,2} - \sigma_{0,02}) + \sigma_{0,02} \quad (2.4)$$

Основанием для определения параметра  $\alpha$  для истинного  $\bar{\sigma}_{0,2}$  по формулам (2.3) является равенство дисперсии для случайных значений условного и истинного пределов текучести. Вследствие этого коэффициент вариации  $w_{0,2}$  для условного ( $\sigma'_{0,2}$ ) и истинного ( $\bar{\sigma}_{0,2}$ ) пределов текучести будет одинаковым. Выражение (2.2) с учетом (2.4) преобразуется к виду

$$p(\bar{\sigma}_{0,2}) = \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^\alpha \quad (2.5)$$

По экспериментальным данным концентрация микродефектов определяется формулой (1.6). Соотношение (1.6) позволяет проверить достоверность выражения (2.5) в частном случае условного  $\sigma'_{0,2}$ . В случае других условных пределов текучести  $\sigma'_x$  такая проверка возможна при известных значениях коэффициента вариации  $w_x$  для заданного  $\sigma'_x$ .

**3. Числовой пример.** Проверка достоверности выражений (1.6), (2.5) проводится путем сравнения результатов расчета по этим формулам для стали  $15 \times 2МФА$ , стандартные характеристики для которой составляют [14]:

$$\sigma'_{0,02} = 0.287 \times 10^9 \text{ Па}, \quad \sigma'_{0,2} = 0.414 \times 10^9 \text{ Па}$$

$$w_{0,2} = 0.129 \quad \varepsilon_0 = 0.2 \times 10^{-2}, \quad \varepsilon = 0.584 \times 10^{-2}, \quad \bar{\varepsilon}_0 = 0.2 \times 10^{12} \text{ Па}$$

Из формулы (2.3) для заданного  $\sigma_{0.2}^{\prime}$  следует  $\alpha = 1.5813$ . По формуле (2.5)  $p = 0.4608$ , а согласно (1.6)  $p = 0.4901$ . Значения концентраций микродефектов, рассчитанные по соотношениям (1.6), (2.5) согласуются в рамках допустимой точности.

**Заключение.** Изложены экспериментальный и структурно-вероятностный подходы к определению концентрации микроразрушений при растяжении повреждающихся образцов. Случай сжатия образцов требует отдельного рассмотрения. Показано, что остаточная деформация является следствием микроразрушений в материале. При отрывном микроразрушении образцов остаточная деформация определяется разностью значений деформации при растяжении и сжатии, поскольку при растяжении в материале образца происходят микроразрушения, а при сжатии материал ведет себя как сплошной. С учетом изложенного выше было бы полезно расширить список основных стандартных механических параметров типа предел пропорциональности, условный предел текучести, предел прочности, дополнив его соответствующими указанным параметрам значениями коэффициентов вариации, полной и остаточной деформациями.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич Д.В.* Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования в упругохрупких материалах // Пробл. прочн. 2004. № 2. С. 96–105.
2. *Бабич Д.В.* Статистический критерий разрушения для хрупких материалов при статических и повторяющихся нагружениях // Теор. прикл. мех. 2011. № 7. С. 16–27.
3. *Бабич Д.В.* Влияние геометрии плоских микроповреждений материала на его деформационные свойства // Пробл. прочн. 2011. № 3. С. 160–174.
4. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
5. *Бабич Д.В., Дородных Т.И.* Неоднозначность критической нагрузки для сферических оболочек при повреждаемости // Изв. РАН МТТ. 2016. № 1. С. 97–109.
6. *Бабич Д.В., Дородных Т.И.* Статистическая модель усталостного разрушения материалов // Изв. РАН МТТ. 2018. № 5. С. 133–144.
7. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* О модели разрушения структурированной среды в условиях сжатия // Изв. РАН МТТ. 2010. № 6. С. 86–97.
8. *Лебедев И.М., Шифрин Е.И.* Обнаружение множественных трещин в балке с помощью собственных частот поперечных колебаний // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. мех. пред. сост. 2020. Т. 44. С. 19–26.
9. *Shifrin E.I.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // Mech. Sys. Signal Proc. 2016. V. 70. P. 613–624.
10. *Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M.* Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration // Acta Mech. 2021. V. 232. № 5. P. 1797–1808.
11. *Бабич Д.В., Дородных Т.И.* Структурно-вероятностная интерпретация деформационной теории пластичности // Мат. методи фіз.-мех. поля. 2018. Т. 61 № 2. С. 124–133.
12. *Канторова Т.А., Френкель Я.И.* Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Ж. тех. физ. 1941. Т. 11. Вып. 3. С. 173–183.
13. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.
14. *Махутов Н.А., Зацаринный В.В., Базарас Ж.М.* Статистические закономерности малоциклового нагружения. М.: Наука, 1989. 252 с.
15. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
16. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под Ред. *В.С. Королук, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбан.* М.: Наука, 1985. 640 с
17. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
18. *Тимошенко С.П.* Сопrotивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1966. 363 с.

---

---

УДК 531.4:539.3

## ВЛИЯНИЕ ТЕКСТУРИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ В ФОРМЕ ВЫЕМОК НА ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ В КОНТАКТЕ С ВЯЗКОУПРУГИМ МАТЕРИАЛОМ

© 2022 г. Ю. Ю. Маховская<sup>a,\*</sup>, А. В. Морозов<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: makhovskaya@mail.ru

\*\*e-mail: morozovalexey@mail.ru

Поступила в редакцию 03.09.2021 г.

После доработки 12.10.2021 г.

Принята к публикации 13.10.2021 г.

Построена модель для расчета силы трения при скольжении жесткой поверхности с регулярной текстурой в форме параболических выемок по вязкоупругому материалу. Модель основана на решении контактной задачи в плоской постановке о скольжении жесткой поверхности регулярной формы по вязкоупругому основанию с учетом локального закона трения, определяемого шероховатостью и адгезией в контакте. Получены соотношения для расчета контактных характеристик и коэффициента трения в зависимости от параметров текстуры и шероховатости поверхности, скорости скольжения и приложенной внешней нагрузки. При помощи разработанной модели выполнен расчет контактного давления и коэффициента трения для случая сухого контакта между текстурированной поверхностью и вязкоупругим материалом. Исследованы вклад текстуры поверхности в общую силу трения на макроуровне и вклад шероховатости и адгезии на микроуровне. Установлено, что в исследованном диапазоне скоростей и нагрузок увеличение размера выемок текстуры приводит к уменьшению коэффициента трения. Приведен пример расчета коэффициента трения в зависимости от скорости скольжения и нагрузки для двух образцов ламинированной фанеры с различными параметрами текстуры и сходными параметрами адгезии и шероховатости на поверхности. Результаты расчета сопоставляются с экспериментальными данными, которые были получены в лабораторных испытаниях фанеры в контакте скольжения с протекторной резиной.

*Ключевые слова:* вязкоупругий материал, текстурированная поверхность, трение скольжения, ламинированная фанера

DOI: 10.31857/S0572329922040080

**1. Введение.** Нанесение рельефа на контактирующие поверхности широко используется в современной технике для управления их сцепными свойствами [1]. При скольжении текстурированной поверхности по вязкоупругому материалу сила трения существенно зависит от параметров рельефа, который определяет гистерезисные потери энергии в поверхностных слоях материала за счет их циклического деформирования элементами текстуры. Для моделирования этой зависимости ставятся и решаются контактные задачи в периодической постановке о скольжении индентора с заданным регулярным рельефом поверхности по вязкоупругому телу [2]. Решение задачи о скольжении штампа с регулярной поверхностью по вязкоупругой полуплоскости получено в [3]. Задача в трехмерной постановке для штампа регулярной текстуры в форме трапециевидных выступов решалась в [4] с учетом локального трения, действующего

щего по закону Кулона. Показано, что форма поверхностного рельефа существенно влияет на распределение контактного давления, фактическую площадь контакта и силу трения. Влияние податливости элементов текстуры исследовано в [5] на примере задачи о нагружении текстурированного двухслойного упругого основания.

Помимо нанесенного макрорельефа или текстуры, трение вязкоупругих материалов определяется микрорельефом (шероховатостью) взаимодействующих поверхностей и их адгезионным притяжением. Один из подходов к изучению одновременного эффекта поверхностной шероховатости и адгезии при трении эластомеров состоит в рассмотрении контактных задач с учетом сил притяжения, действующих в зазоре между поверхностями, при этом поверхностный микрорельеф моделируется регулярной волнистостью. Метод решения таких задач для одномерного вязкоупругого основания, описываемого моделью Кельвина–Фойгта, был предложен в [6] для плоского и в [7] для пространственного случая. На основе полученного решения была построена модель для расчета силы трения и проведено сравнение с результатами трибологических тестов для резиновых образцов, обладающих различными адгезионными свойствами [8].

Задача существенно усложняется, когда необходимо учесть одновременное влияние поверхностного рельефа (текстуры) на макроуровне, а также шероховатости и адгезии на микроуровне, на гистерезисные потери и, соответственно, на силу трения при скольжении по вязкоупругому материалу. В настоящее время достаточно развитым является многомасштабный подход к моделированию трения вязкоупругих тел, в котором используется фрактальное представление поверхностной шероховатости [9–12], при этом в [10] исследованы вклады макро- и микроуровней поверхностного рельефа в возникающую силу трения, а в [12] установлен вклад двух основных масштабных уровней – наибольшего и наименьшего. Модель трения многоуровневой волнистой поверхности с учетом адгезии предложена в [13]. В этих и других работах по многомасштабной шероховатости предполагается, как правило, что форма поверхностного рельефа на всех уровнях подобна и отличается только характерным масштабом выступов.

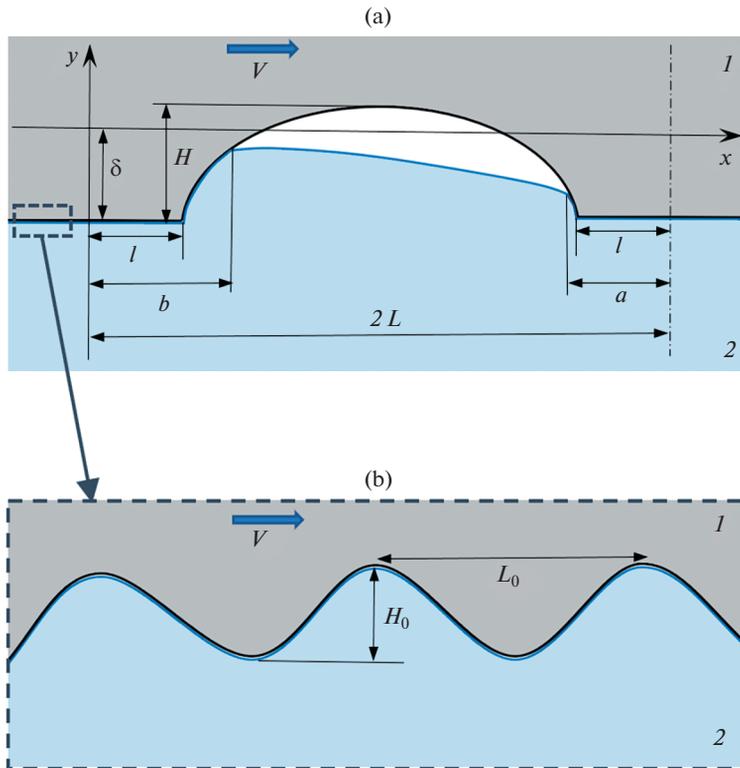
В настоящей работе предложена модель трения жесткой поверхности по вязкоупругому материалу, включающая вклад двух существенно различных масштабных уровней – текстуру поверхности в форме параболических выемок на макроуровне и шероховатость с учетом адгезии на микроуровне. Модель использована для анализа результатов эксперимента на трение резины по поверхности ламинированной фанеры с нанесенным регулярным рельефом. Технология нанесения этого рельефа предполагает образование на изначально гладкой поверхности между выемками текстуры значительной шероховатости, в результате чего трение таких поверхностей по вязкоупругому образцу зависит от параметров рельефа на обоих масштабных уровнях.

**2. Математическая модель.** В этом разделе дается постановка и строится решение контактной задачи о скольжении текстурированной поверхности по вязкоупругому основанию. Предполагается, что на границе раздела действует локальный закон трения, который определяется шероховатостью и адгезией поверхности на микроуровне.

*2.1. Постановка задачи на макроуровне.* Рассматривается контактная задача в плоской постановке о скольжении с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$  жесткого штампа, поверхность которого описывается периодической функцией  $f(x) = f(x + 2L)$ , где  $L$  – полупериод поверхностной текстуры:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq l, \quad 2L - l \leq x \leq 2L \\ \frac{(x - L)^2}{2R} - H, & l \leq x \leq 2L - l \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $R$  – радиус закругления впадины, который считается равным  $R = (L - l)^2 / (2H)$  (рис. 1,а). Штамп скользит по вязкоупругому основанию, механические свойства ко-



**Рис. 1.** Схема контакта жесткого текстурированного штампа 1 с вязкоупругим основанием 2 на макроуровне на одном периоде текстуры (а) и на микроуровне (б).

торого описываются одномерной моделью Кельвина–Фойгта с податливостью в двух направлениях:

$$u_m + T_\varepsilon \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{k} \left( p_m + T_\sigma \frac{\partial p_m}{\partial t} \right), \quad m = x, y \quad (2.2)$$

где  $p_m$  и  $u_m$  ( $m = x, y$ ) – давление и перемещения на границе вязкоупругого основания в направлении координатных осей,  $k$  – жесткость материала в обоих направлениях,  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$  – времена последствия и релаксации материала.

Пусть неподвижная система координат  $(x', y')$  связана с вязкоупругим основанием, а система координат  $(x, y)$  связана со скользящим волнистым телом, так что:

$$x' = x + Vt, \quad y' = y \quad (2.3)$$

Считаем движение установившимся по отношению к системе координат  $(x, y)$ , в которой смещения и напряжения не зависят от времени  $t$  и являются функциями только координаты  $x$ . В подвижной системе координат  $(x', y')$  соотношения (2.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} u_x - VT_\varepsilon \frac{du_x}{dx} &= \frac{1}{k} \left( p_x - T_\sigma V \frac{dp_x}{dx} \right) \\ u_y - VT_\varepsilon \frac{du_y}{dx} &= \frac{1}{k} \left( p_y - T_\sigma V \frac{dp_y}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть на каждом периоде  $x \in [0, 2L]$  отрезок  $x \in [b, 2L - a]$  границы  $y = 0$  свободен от нагружения, а на участках вне его имеет место контакт между штампом и вязкоупругим основанием (рис. 1). Тогда для вертикального давления  $p_y$  и перемещения  $u_y$  имеют место следующие условия контакта на периоде  $x \in [0, 2L]$ :

$$\begin{aligned} u_y(x) &= -\delta, & 0 \leq x \leq l, & \quad 2L - l < x < 2L \\ u_y(x) &= -\delta - \frac{(L-x)^2}{2R} + H, & l < x < b, & \quad 2L - a < x < 2L - l \\ p_y(x) &= 0, & b \leq x \leq 2L - a, & \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\delta$  – внедрение штампа в вязкоупругое основание. Согласно (2.5), на периоде  $x \in [0, 2L]$  существуют пять интервалов с различными условиями контакта, причем на четырех из них заданы вертикальные перемещения границы  $u_y$ , а на одном – давления  $p_y$ . Подставляя условия (2.5) во второе уравнение (2.4) и решая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения на соответствующих интервалах относительно функций  $p_y$  или  $u_y$  с использованием условий непрерывности этих функций на границах интервалов и условия периодичности при  $x = 0$  и  $x = 2L$ , получим выражения для контактного давления на периоде  $x \in [0, 2L]$ . Вводя безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{u}_m &= \frac{u_m}{L}, & \bar{p}_m &= \frac{p_m}{kL}, & \bar{m} &= \frac{m}{L} \quad (m = x, y), & \bar{\delta} &= \frac{\delta}{L}, \\ \bar{a} &= \frac{a}{L}, & \bar{b} &= \frac{b}{L}, & \bar{H} &= \frac{H}{L}, & \bar{l} &= \frac{l}{L}, & \alpha &= \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, & \kappa &= \frac{VT_\varepsilon}{L} \end{aligned} \quad (2.6)$$

представим безразмерное давление  $\bar{p}_y(\bar{x})$  на периоде  $\bar{x} \in [0, 2]$  в следующем виде (здесь и далее штрихи над безразмерными величинами опущены):

$$p_y(x) = \begin{cases} G_1(b)e^{-\alpha(b-x)/\kappa} - C_1 e^{-\alpha(l-x)/\kappa} + \delta, & 0 \leq x \leq l \\ G_1(b)e^{-\alpha(b-x)/\kappa} + G_2(x), & l \leq x \leq b \\ 0, & b \leq x \leq 2 - a \\ G_1(a)e^{-\alpha(2-a-x)/\kappa} + G_2(x), & 2 - a \leq x \leq 2 - l \\ G_1(a)e^{-\alpha(2-a-x)/\kappa} - C_2 e^{-\alpha(2-l-x)/\kappa} + \delta, & 2 - l \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (2.7)$$

где использованы следующие обозначения для безразмерных функций и констант:

$$\begin{aligned} G_{1,2}(x) &= \{[(\pm 2\kappa(x-1) - x^2 + l^2 + 2(x-l))H - \delta(1-l)^2]\alpha^2 \mp \\ &\quad \mp 2H\kappa(x \mp \kappa - 1)\alpha - 2\kappa^2 H\}D \\ G_{1,2} &= 2H\kappa(\alpha - 1)[\kappa \mp \alpha(1-l)]D, \quad D = \alpha^{-2}(1-l)^{-2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражение (2.7) с учетом (2.8) аналитически определяет контактное давление на периоде при условии, что известны величины  $a$  и  $b$ , задающие границы областей контакта, и величина внедрения штампа  $\delta$ . Два алгебраических уравнения для определения величин  $a$  и  $b$  следуют из условий непрерывности для искоемых функций и имеют вид:

$$G_1(b)e^{-ab/\chi} + C_1e^{-al/\chi} = G_2(a)e^{aa/\chi} - C_2e^{al/\chi}$$

$$\frac{H(l-b)(l+b+2) + \delta l^2 H + \delta(1-2l)}{(1-l)^2} e^{(2-a-b)/\chi} = \frac{H(1-a)^2}{1-l^2} - H + \delta \quad (2.9)$$

Для определения величины внедрения  $\delta$  при заданной внешней погонной нагрузке  $P_y$  на период текстуры, используется условие равновесия:

$$P_y = \int_0^2 p_y(x) dx \quad (2.10)$$

где использовано безразмерное представление для погонной силы  $\bar{P}_y = P_y/(kL^2)$ . Подставляя выражение (2.7) с учетом (2.8) в условие равновесия (2.10) и выполняя интегрирование, получим:

$$P_y = -\chi D^{1/2} \{G_1(b)e^{-ab/\chi} + G_2(a)e^{aa/\chi} - C_1e^{-al/\chi} + C_2e^{al/\chi}\} + \delta(a+b)(1+l)(1-l)^{-2} + \frac{H}{(1-l)^3} \left[ \chi(a-b)(a+b-2) + \frac{4}{3}l^3 - l^2(a+b+2) + 2l(a+b) - a^3 \left(1 - \frac{a}{3}\right) - b^3 \left(1 - \frac{b}{3}\right) \right] \quad (2.11)$$

Соотношения (2.7)–(2.9) и (2.11) позволяют определить области контакта и распределение вертикального давления  $p_y(x)$  на периоде текстуры штампа. Далее на основании полученных соотношений будут определяться горизонтальные давления  $p_x(x)$ .

**2.2. Учет шероховатости и адгезии на микроуровне.** Введем локальный закон трения, определяющий напряжение  $\tau(x)$ , действующее по касательной к поверхности штампа:

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_0, & 0 \leq x \leq b, \quad 2-a \leq x \leq 2 \\ 0, & b \leq x \leq 2-a \end{cases} \quad (2.12)$$

Величина  $\tau_0$  определяется взаимодействием поверхностей на микроуровне, а именно, микрошероховатостью поверхности штампа и адгезионным притяжением между поверхностями штампа и вязкоупругого тела.

Для того, чтобы определить величину  $\tau_0$ , рассмотрим взаимодействие двух номинально плоских поверхностей на микроуровне – жесткого штампа и вязкоупругого основания. Пусть микрошероховатость поверхности штампа моделируется периодической функцией (рис. 1,б):

$$f_0(x) = H_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L_0} \quad (2.13)$$

Предполагается, что между поверхностями действует адгезионное притяжение, достаточное для того, чтобы удерживать поверхности на микроуровне в состоянии насыщенного контакта во всем диапазоне рассматриваемых нагрузок и скоростей. Решение задачи в такой постановке получено в [6], где приведено следующее простое выражение для величины силы трения, действующей на период микрошероховатости:

$$T_0 = \frac{\pi^2 H_0^2 L_0 k V (T_\varepsilon - T_\sigma)}{4(L_0^2 + \pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \quad (2.14)$$

Переходя в (2.14) к безразмерным величинам (2.6) и используя дополнительно безразмерные величины для параметров микроуровня:

$$\bar{H}_0 = \frac{H_0}{L_0}, \quad \bar{L}_0 = \frac{L_0}{L}, \quad \bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{kL} = \frac{T_0}{2kLL_0} \quad (2.15)$$

получим для безразмерной величины среднего касательного напряжения на микроуровне выражение (штрихи над безразмерными величинами по-прежнему опущены):

$$\tau_0 = \frac{\pi^2 H_0^2 L_0^2 \kappa \alpha (\alpha - 1)}{8 L_0^2 \alpha^2 + \pi^2 \kappa^2} \quad (2.16)$$

Как показывает соотношение (2.16), величина силы трения на микроуровне, определяемая гистерезисными потерями в материале вследствие микрошероховатости и адгезии, в случае насыщенного контакта не зависит от величины нормального давления, но зависит от скорости скольжения штампа, вязкоупругих характеристик материала и геометрических параметров микрошероховатости. Заметим, что в выражение (2.16) не входят адгезионные характеристики поверхностей, но оно получено при условии, что силы адгезии достаточно велики, чтобы обеспечить насыщенный контакт поверхностей [6].

*2.3. Расчет силы трения.* Сила трения на макроуровне определяется величиной погонной силы  $P_x$ , действующей на период текстуры в горизонтальном направлении:

$$P_x = \int_0^2 p_x(x) dx \quad (2.17)$$

где использовано безразмерное представление для погонной силы  $\bar{P}_x = P_x / (kL^2)$ . Для определения давлений  $p_x(x)$ , действующих в горизонтальном направлении, воспользуемся следующим геометрическим соотношением, связывающим напряжение  $\tau$ , действующее по касательной к поверхности штампа, с напряжениями  $p_x$  и  $p_y$ , действующими в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно:

$$\tau = p_x \cos \varphi - p_y \sin \varphi \quad (2.18)$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$ , а функция  $f(x)$  определяется соотношением (2.1) на соответствующих интервалах. Из соотношения (2.18) с учетом локального закона трения (2.12) и учитывая вид функции  $f(x)$  (2.1), получим для давлений, действующих в горизонтальном направлении:

$$p_x(x) = \begin{cases} \tau_0, & 0 \leq x \leq l, \quad 2-l \leq x \leq 2 \\ \tau_0 \sqrt{1 - t^2(x)} + t(x)p_y(x), & l \leq x \leq 2-l \end{cases} \quad (2.19)$$

где  $t(x) = 2H(1-x)/(1-l)^2$ .

Таким образом, расчет силы трения происходит следующим образом. Считая внешнюю нормальную нагрузку  $P_y$  заданной, из уравнения (2.11) выразим внедрение штампа  $\delta$  и подставим получившееся выражение в уравнения (2.9) и выражения (2.8). Уравнения (2.9) с учетом (2.8) решаем численно относительно величин  $a$  и  $b$  на интервалах  $l < a < 1$ ,  $l < b < 1$ . Затем определяем распределение вертикальных давлений  $p_y(x)$  по соотношениям (2.7), (2.8). Зная функцию  $p_y(x)$  и принимая во внимание выражение (2.16) для  $\tau_0$ , можно определить функцию горизонтальных давлений  $p_x(x)$  в соответствии с (2.19). Полученная функция  $p_x(x)$  подставляется в (2.17) и рассчитывается величина погонной силы трения на период текстуры  $P_x$ . Для получения коэффициента трения, необходимо эту величину разделить на величину нормальной нагрузки:

$$\mu = P_x / P_y \quad (2.20)$$

Коэффициент трения, рассчитанный по представленной модели, будет учитывать гистерезисные потери в вязкоупругом материале как на макроуровне (вызванные поверхностной текстурой), так и на микроуровне (связанные с шероховатостью и адге-

зией). Чтобы получить коэффициент трения только вследствие макротекстуры, без учета микрошероховатости и адгезии, следует при расчете положить  $\tau_0 = 0$  вместо соотношения (2.16). Чтобы получить коэффициент трения для поверхности, обладающей только микрошероховатостью, но без макротекстуры, необходимо в (2.20) положить  $P_x = 2\tau_0$ , где  $\tau_0$  определяется выражением (2.16). В этом случае коэффициент трения имеет простой аналитический вид:

$$\mu_0 = \frac{\pi^2 l H_0^2 L_0^2 \kappa (\alpha - 1)}{8 p_n L_0^2 \alpha^2 + \pi^2 \kappa^2} \quad (2.21)$$

где безразмерное номинальное давление  $p_n$  связано с безразмерной погонной силой на период текстуры  $P_y$  соотношением  $p_n = P_y/2$ .

**3. Эксперимент.** В данном разделе представлены результаты измерения шероховатости и текстуры исследуемых образцов фанеры, а также результаты лабораторных испытаний на трение образцов фанеры в паре с резиновым контрольным образцом, который был вулканизирован в форме кольца из протекторной резины, полученной на основе комбинации бутадиенового и натурального каучуков.

*3.1. Анализ текстуры и шероховатости поверхности.* Образцы для испытаний были вырезаны в форме дисков из ламинированной березовой фанеры, на поверхность которой методом термопрессования через сетку-трафарет была нанесена различная текстура. Ламинированная пленка имела плотность 122...130 г/м<sup>2</sup>. В работе исследуются лицевые поверхности двух образцов с заданным отличающимся макрорельефом, который определялся при помощи оптического 3D-профилометра S Neox (Sensofar, Испания), оснащенного моторизованным X-Y-столиком и 10X конфокальным объективом. Область единичного сканирования составляла 1.7 × 1.4 мм с разрешением 1232 × 1028 пикселей. Сшивание 64 рядом стоящих сканирований позволило получить изображение поверхности размерами 11.7 × 9.8 мм, которое полностью охватывает повторяющиеся элементы текстуры образца. На рис. 2 представлены результаты измерения рельефа поверхности образцов, анализ которых был выполнен на типично-повторяющихся участках поверхности, при этом с целью получения надежных и повторяемых данных было проведено по три измерения в различных областях исследуемого образца. Перед определением параметров текстуры и шероховатости поверхности из полученных 3D-данных методом вычитания плоскости по трем точкам удалены компонент формы, а для устранения “артефактов” и шумов применялся smart-фильтр из программного обеспечения профилометра. Следует отметить, что оценка параметров топографии осуществлялась после трибологических испытаний.

В данной работе между элементами текстуры (выемками) оцениваются высотные  $S_a$ ,  $S_z$  параметры шероховатости с использованием стандартных фильтров согласно стандарту EN ISO25178-6. В результате установлено, что параметры шероховатости для двух исследуемых образцов различаются незначительно, а именно:  $S_a = 4.2$  мкм,  $S_z = 37.2$  мкм и  $S_a = 4.4$  мкм,  $S_z = 41.5$  мкм для первого и второго образца соответственно. Для оценки периода  $L_0$  и амплитуды  $H_0$  синусоидальной функции (2.13), используемой для моделирования шероховатости, проведен анализ 2D-профилограммы (рис. 3), полученной на шероховатом участке между элементами текстуры (выемками). Параметр  $L_0$  был определен методом построения автокорреляционной функции.

Геометрия текстуры измерялась при помощи инструментов, входящих в программное обеспечение прибора, при этом было зафиксировано, что шаг между выемками текстуры  $2L$  одинаков для обоих изученных образцов и составляет 2.1 мм, а длина  $2L - 2l$ , высота  $H$  и ширина  $l_w$  выемки существенно различаются (рис. 2), а именно:

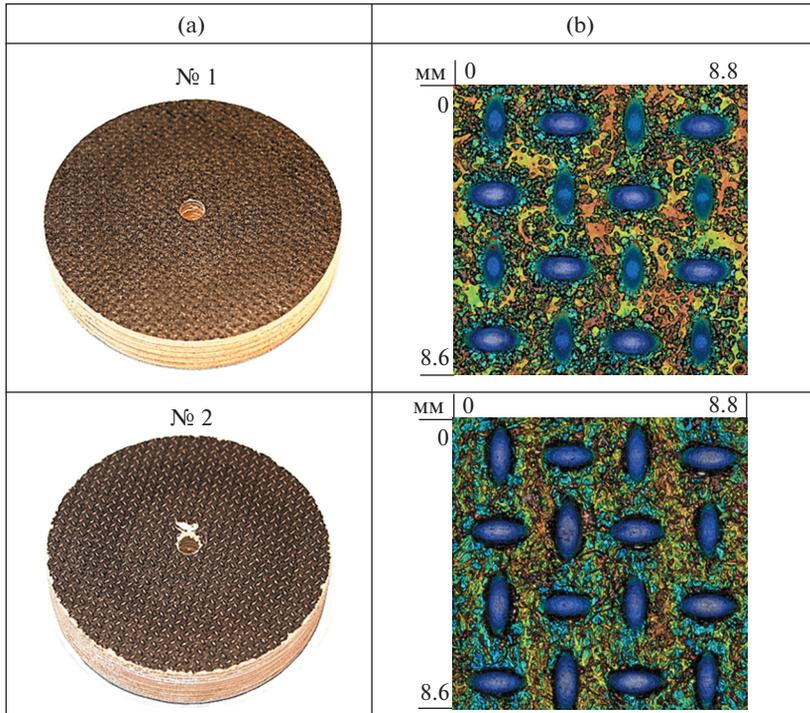


Рис. 2. Фотографии (а) образцов фанеры № 1, № 2 и (б) текстуры их поверхностей.

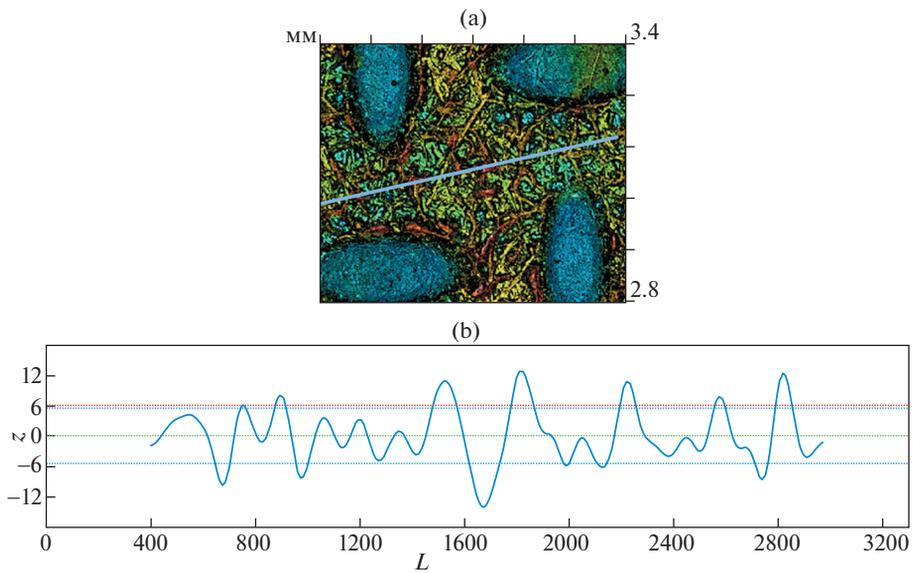
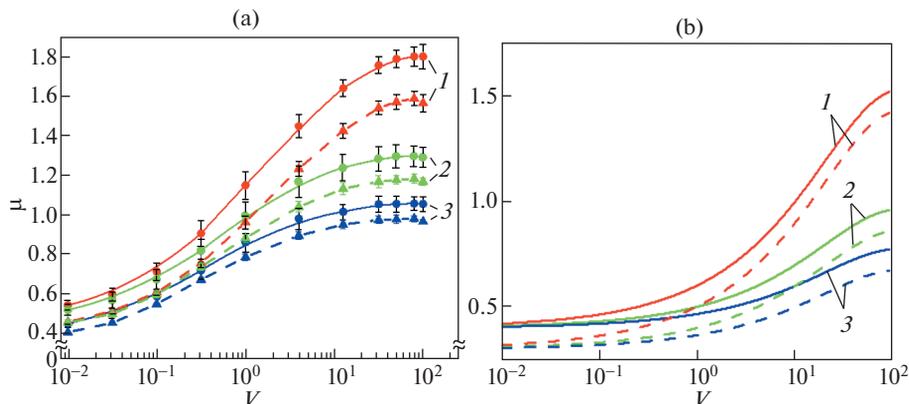


Рис. 3. Микрорельеф поверхности фанеры (а) и 2D-профилограмма  $z$  [мкм],  $L$  [мкм] (б), для которой  $H_0 = R_z/2 = 13$  мкм и  $L_0 = 350$  мкм.



**Рис. 4.** Экспериментальные (а) и расчетные (б) зависимости коэффициента трения  $\mu$  от скорости  $V$  [мм/с] для двух образцов фанеры: № 1 сплошные линии и № 2 пунктирные линии, где 1 –  $p_n = 0.1$  МПа, 2 –  $p_n = 0.3$  МПа, 3 –  $p_n = 0.5$  МПа.

для образца № 1  $2L - 2l = 1.4$  мм,  $H = 0.15$  мм,  $l_w = 0.7$  мм, а для образца № 2  $2L - 2l = 1.7$  мм,  $H = 0.9$  мм,  $l_w = 0.8$  мм.

**3.2. Измерение коэффициента трения.** Экспериментальное изучение коэффициента трения проводилось на лабораторном трибометре УМТ-2 по схеме фрикционного контакта “резиновое кольцо–диск” в условиях “сухого” трения. Методика эксперимента подробно описана в работе [14]. Испытание образцов фанеры было проведено при трех уровнях нормального давления в диапазоне от 0.1 до 0.5 МПа и 11 скоростях скольжения, изменяемых в интервале 0.01 ... 100 мм/с. Путь трения образца в процессе выполнения единичного теста составлял 37.7 мм, что соответствует четверти его оборота относительно неподвижного резинового контробразца. Результатом выполнения теста является зависимость коэффициента трения от времени испытания, при этом на кривой имеется участок с установившимся режимом трения, на котором определялось среднее значение коэффициента трения. Измеренные таким образом значения коэффициентов трения для всех значений скоростей скольжения и нормальных давлений представлены на рис. 4,а.

Анализ результатов эксперимента (рис. 4,а) позволяет сделать следующие основные выводы:

- 1) коэффициент трения увеличивается с ростом скорости скольжения для исследуемых образцов фанеры;
- 2) при малых скоростях влияние скорости скольжения на коэффициент трения снижается;
- 3) нормальная нагрузка оказывает значительное влияние на коэффициент трения скольжения: с ее увеличением коэффициент трения уменьшается;
- 4) коэффициент трения образца № 1 выше, чем образца № 2, во всем диапазоне исследованных скоростей и нагрузок.

**4. Пример расчета.** В этом разделе приведен пример расчета контактного давления и коэффициента трения по модели, представленной в п. 2. В качестве входных параметров модели приняты величины, соответствующие параметрам поверхностного рельефа для двух образцов березовой фанеры, имеющих на лицевой поверхности различную текстуру и близкие параметры шероховатости и адгезии.

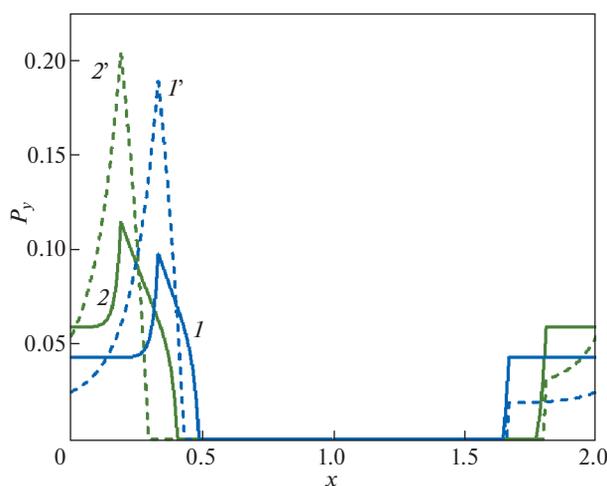
**4.1. Анализ контактного давления и коэффициента трения.** Характеристики макро- и микрорельефа для двух образцов, полученные из испытаний (п. 3.1), а также расчи-

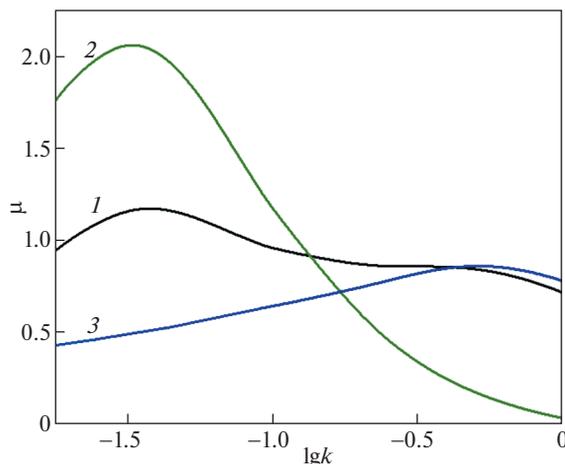
**Таблица 1.** Параметры макрорельефа (текстуры) и микрорельефа (шероховатости) двух образцов, использованные в расчетах

№ образца	Текстура					Шероховатость			
	$H$ , мкм	$l$ , мкм	$L$ , мкм	$\bar{H} = H/L$	$\bar{l} = l/L$	$H_0$ , мкм	$L_0$ , мкм	$\bar{H}_0 = H_0/L$	$\bar{L}_0 = L_0/L$
1	150	200	1050	0.14	0.19	13	350	0.012	0.33
2	800	350		0.76	0.33				

танные на их основе безразмерные параметры рельефа, используемые в качестве входных параметров для расчета, представлены в табл. 1. На рис. 5 приведены распределения контактных давлений по одному периоду текстуры  $0 \leq x \leq 2$  для двух образцов № 1 и № 2 и двух значений безразмерного параметра скорости  $\kappa = 0.2$  (что соответствует скорости скольжения  $V = 20$  мм/с при времени запаздывания  $T_\varepsilon = 0.01$  с) и  $\kappa = 1$  ( $V = 100$  мм/с,  $T_\varepsilon = 0.01$  с) и безразмерном номинальном давлении  $p_n = 0.02$ . В качестве отношения времен запаздывания и релаксации резины взята величина  $\alpha = 100$ .

Выемка поверхностной текстуры расположена на периоде  $0 \leq x \leq 2$  симметрично относительно прямой  $x = 1$ , однако, как видно из рис. 5, контактные давления расположены несимметрично относительно этой прямой. Слева от оси симметрии выемки, где текстура образует угол, “пропахивающий” вязкоупругий материал при скольжении, имеет место пик давления, и именно в окрестности этого пика происходят наиболее значительные гистерезисные потери в материале, приводящие к возникновению силы трения. Увеличение параметра скорости приводит к возрастанию этого пика. Для образца № 2 с более широкими и глубокими выемками имеют место более высокие пики давлений и их большая асимметрия, чем для образца № 1. Поэтому можно было бы ожидать, что коэффициент трения для образца № 2 должен быть выше. Однако, как показывают экспериментальные результаты, приведенные в п. 3, имеет место обратная ситуация. Это связано с тем, что помимо вклада от макротекстуры, в общей силе трения присутствует вклад микрошероховатости и адгезии.

**Рис. 5.** Распределения контактного давления на период текстуры для образцов 1 (кривые I и Г) и 2 (кривые 2 и 2') для двух значений параметра скорости  $\kappa = 0.2$  (сплошные линии) и  $\kappa = 1$  (штриховые линии).



**Рис. 6.** Зависимость коэффициента трения от безразмерной скорости для поверхности с текстурой и шероховатостью и адгезией (1), только с шероховатостью и адгезией (2), только с текстурой (3).

Для сравнения этих вкладов на рис. 6 приведена зависимость коэффициента трения от безразмерной скорости скольжения для параметров рельефа, соответствующих образцу 1, остальные значения параметров те же, что и для рис. 5. Кривая 1 соответствует расчету по полной модели и соотношению (2.20) с учетом как макротекстуры, так и микрошероховатости и адгезии. Кривая 2 соответствует случаю, когда макротекстуры нет, поверхность является номинально плоской на макроуровне, а на микроуровне существует шероховатость и действует адгезионное притяжение. В этом случае коэффициент трения определяется аналитическим выражением (2.21). Кривая 3 соответствует макротекстуре без учета микрошероховатости.

Зависимость коэффициента трения от скорости, представленная кривой 1 на рис. 6, немонотонна, что характерно для трения вязкоупругих материалов [2]. Представленная зависимость имеет два пика – один ярко выраженный при меньшей скорости и второй размытый при большей скорости. Сопоставляя эту кривую с кривыми 2 и 3 можно заключить, что левый пик связан с эффектом микрошероховатости и адгезии, а правый – с макротекстурой. Сравнение кривых 1 и 2 показывает также, что макротекстура уменьшает пиковые значения коэффициента трения по сравнению с поверхностью, на которой есть только микрошероховатость. Это происходит потому, что выемки текстуры уменьшают площадь фактического контакта поверхностей, на которой происходят гистерезисные потери и адгезия на микроуровне. С другой стороны, текстура увеличивает коэффициент трения при более высоких скоростях, когда вклад микрошероховатости и адгезии становится мал.

**4.2. Сопоставление с результатами испытаний.** Анализ представленных выше результатов расчета позволяет сделать вывод, что экспериментальные кривые для коэффициента трения, представленные на рис. 4, а, соответствуют условиям относительно малых скоростей, в диапазоне которых представлен только левый пик, вызванный эффектом микрошероховатости и адгезии. Для удобства сопоставления с результатами испытаний, на рис. 4, б приведены результаты расчета коэффициента трения для двух образцов в диапазоне скоростей и нагрузок, соответствующих условиям эксперимента, приведенного в п. 3.2. Результаты представлены в виде зависимости коэффициента трения от размерной скорости скольжения, при этом приняты следующие характери-

стики материала резины: жесткость  $k = 5$  ГПа/м, время запаздывания  $T_e = 0.001$  с, отношение времен запаздывания и релаксации  $\alpha = 1000$ .

Количественное сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными невозможно, поскольку расчет проведен по модели, основанной на плоской задаче, моделирующей поведение поверхностей только в одном сечении (в данном случае рассматривалось центральное сечение для выемки, вытянутой в направлении, перпендикулярном скольжению). Однако, представленные на рис. 4, б расчетные кривые обладают перечисленными в п. 3.2 свойствами экспериментальных кривых, представленных на рис. 4, а, а именно:

1) коэффициент трения увеличивается с ростом скорости скольжения – это объясняется тем, что изученный диапазон скоростей соответствует участку возрастания не-монотонной зависимости коэффициента трения от скорости;

2) влияние скорости скольжения на коэффициент трения становится менее значительным при малых скоростях – этот факт объясняется в работе [15], из которой следует, что при малых скоростях скольжения динамический коэффициент трения приближается к статическому;

3) с увеличением нормальной нагрузки коэффициент трения уменьшается; такое поведение связано с совместным проявлением гистерезисных и молекулярных свойств эластомера [16];

4) коэффициент трения для поверхности с более широкими и глубокими впадинами (образец № 2) ниже по сравнению с образцом № 1; в модели это объясняется уменьшением площади фактического контакта, которая в силу предположения о насыщенном контакте на микроуровне совпадает с номинальной.

Заметим, что хотя упрощающее предположение о насыщенном контакте на микроуровне, принятое в модели, не может полностью выполняться для реальной шероховатой поверхности, значительный вклад адгезии может приводить к зависимости площади фактического контакта от номинальной площади.

**4. Заключение.** Построена модель трения жесткой текстурированной поверхности по вязкоупругому материалу с учетом микрошероховатости и адгезии. Проведен расчет распределения контактного давления и коэффициента трения на примере образцов текстурированной фанеры с различными параметрами текстуры в зависимости от скорости скольжения по эластомерному образцу и номинального давления. Результаты моделирования позволили продемонстрировать тенденции изменения коэффициента трения скольжения между резиной и опорной поверхностью, на которую нанесены: только текстура, только шероховатость, а также и текстура, и шероховатость.

Проведено экспериментальное исследование по схеме контакта резинового кольца – диск из ламинированной березовой фанеры в диапазоне нормальных давлений характерных для контакта подошвы ботинка взрослого человека (0.1 МПа) и автомобильной легкой шины (0.5 МПа) с опорной поверхностью. Испытания были выполнены при комнатной температуре (23°C) в диапазоне скоростей скольжения от 0.01 до 100 мм/с. В работе получено, что в условиях сухого контакта коэффициент трения увеличивается с ростом скорости скольжения и снижается с увеличением нормальной нагрузки. Увеличение геометрических размеров текстуры поверхности (выемок) приводит к снижению коэффициента трения, что объясняется снижением адгезионного механизма трения из-за уменьшения площади контакта.

В результате сопоставления результатов моделирования и эксперимента установлено, что построенная математическая модель позволяет качественно описать полученные в эксперименте данные и оценить вклад в коэффициент трения скольжения двух масштабных уровней поверхностного рельефа, а также механизма трения (адгезионного и деформационного).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00231 “Теоретико-экспериментальное исследование контактного взаимодействия деформируемых тел с наносенным рельефом в условиях трения покоя и скольжения”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lu P., Wood R.* Tribological performance of surface texturing in mechanical applications—a review // Surf. Topogr.: Metrol. Prop. 2020. V. 8. № 4. 043001. <https://doi.org/10.1088/2051-672X/abb6d0>
2. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И.* Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.
3. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // Proc. R. Soc. A. 2014. V. 470. № 2169. <https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0392>
4. *Makhovskaya Y.* Effect of surface relief on sliding friction of viscoelastic bodies // Acta Mech. 2021. V. 232. P. 1933–1942. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02864-8>
5. *Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Контакт гладкого индентора и двухслойного упругого полупространства с усложненными условиями на поверхности // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 59–67. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010034>
6. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Моделирование трения на разных масштабных уровнях // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 100–110. <https://doi.org/10.3103/S002565441003009X>
7. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 90–103. <https://doi.org/10.3103/S002565441504010X>
8. *Morozov A.V., Makhovskaya Y.Y.* Effect of adhesion properties of frost-resistant rubbers on sliding friction // ICIE 2018: Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, 2019. P. 1029–1037. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5\\_108](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_108)
9. *Scaraggi M., Persson B.N.J.* Friction and universal contact area law for randomly rough viscoelastic contacts // J. Phys: Condens Matter. 2015. V. 27. P. 105102–105102. <https://doi.org/10.3103/S1068366615030137>
10. *Солдатенков И.А.* Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. 2015. № 3. С. 257–262. <https://doi.org/10.3103/S1068366616060131>
11. *Солдатенков И.А.* Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание: уточненная модель // Трение и износ. 2016. № 6. С. 670–672. <https://doi.org/10.3103/S1068366616060131>
12. *Popov V., Dimaki A., Psakhie S. et al.* On the role of scales in contact mechanics and friction between elastomers and randomly rough self-affine surfaces // Sci. Rep. 2015. V. 5. P. 11139. <https://doi.org/10.1038/srep11139>
13. *Makhovskaya Y.* Modeling sliding friction of a multiscale wavy surface over a viscoelastic foundation taking into account adhesion // Lubricants. 2019. V. 7. № 13. <https://doi.org/10.3390/lubricants7020013>
14. *Морозов А.В., Маховская Ю.Ю., Кравчук К.С.* Влияние адгезионных свойств и текстуры поверхности ламинированной фанеры на коэффициент трения с резиной // Трение и износ. 2021. № 4. С. 437–449. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2021-42-4-437-449>
15. *Savkoor A.R.* On the friction of rubber // Wear. 1965. V. 8. № 3. P. 222–237. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(65\)90161-4](https://doi.org/10.1016/0043-1648(65)90161-4)
16. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // J. Strain Anal. Eng. Des. 2016. V. 51. № 4. P. 286–293. <https://doi.org/10.1177/0309324715614194>

УДК 539.3

**ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**© 2022 г. В. В. Васильев<sup>a,\*</sup>, Л. В. Федоров<sup>b</sup><sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия<sup>b</sup>АО ВПК НПО Машиностроение, Реутов, Россия

\*e-mail: vvvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 18.11.2021 г.

После доработки 21.11.2021 г.

Принята к публикации 22.11.2021 г.

Статья посвящена исследованию функций напряжений, позволяющих тождественно удовлетворить уравнения равновесия классической теории упругости и получить решение в напряжениях. Для получения зависимостей между напряжениями и функциями напряжений используется математический аппарат общей теории относительности, в частности, свойство тензора Эйнштейна тождественно удовлетворять уравнения закона сохранения, являющиеся применительно к теории упругости уравнениями равновесия. При этом метрические коэффициенты риманова пространства, определяемые уравнениями Эйнштейна, интерпретируются как функции напряжений теории упругости. В результате линеаризации уравнений Эйнштейна получены общие соотношения между напряжениями и функциями напряжений в ортогональной системе координат. Рассматриваются функции напряжений, соответствующие декартовой системе координат. Анализируются возможности удовлетворения уравнений равновесия с помощью различных комбинаций функций напряжений — известные системы Максвелла, Морера и другие возможные комбинации, образованные из одной, двух и трех функций. В качестве критерия разрешимости задачи теории упругости в напряжениях используется соответствие количества функций напряжений числу взаимно независимых уравнений совместности деформаций в напряжениях.

*Ключевые слова:* теория упругости, функции напряжений, общая теория относительности

DOI: 10.31857/S0572329922040122

**1. Введение.** Приведем кратко основные соотношения общей теории относительности (ОТО) [1], на которых основаны полученные ниже соотношения между напряжениями и функциями напряжений. Основная задача ОТО заключается в определении метрических коэффициентов  $g_{ij}$  риманова пространства с метрической формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

порождаемого материальным тензором  $T_{ij}$ . Компоненты тензоров  $g_{ij}$  и  $T_{ij}$  связаны уравнениями

$$E_{ij} = \chi T_{ij} \quad (1.2)$$

в которых

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (1.3)$$

– тензор Эйнштейна, выражающийся через тензор кривизны Риччи  $R_{ij}$  и скалярную кривизну риманова пространства ( $R = g^{ij}R_{ij}$ ). В равенство (1.2) входит постоянный коэффициент  $\chi$ , который не является существенным для рассматриваемой в статье задачи и в дальнейшем принимается равным 1. Для задачи статики в трехмерном пространстве  $T_{ij} = \sigma_{ij}$ , где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений. Таким образом, из равенств (1.1)–(1.3) имеем

$$\sigma_{ij} = E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (1.4)$$

Тензор  $E_{ij}$  обладает важным свойством – согласно закону сохранения материального тензора  $T_{ij}$  его дивергенция равна нулю. Следовательно, согласно равенствам (1.2) и (1.4), этим свойством обладает и тензор напряжений, то есть

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0 \quad (1.5)$$

Для задачи статики в трехмерном пространстве эти уравнения являются уравнениями равновесия элемента материальной среды. Таким образом, соотношения (1.4) для напряжений, тождественно удовлетворяющие уравнения равновесия, можно считать выражениями, устанавливающими связь между напряжениями и функциями напряжений. Такими функциями являются компоненты метрического тензора  $g_{ij}$ , через которые выражается тензор  $R_{ij}$ .

**2. Тензор функций напряжений.** Для приложения приведенных выше соотношений к линейной теории упругости проведем линеаризацию выражений (1.4). Представим компоненты метрического тензора в виде  $g_{ij} = g_{ij}^0 + \varphi_{ij}$ , где  $g_{ij}^0$  – метрические коэффициенты ненапряженной среды, а  $\varphi_{ij}$  – малые возмущения, порождаемые напряженным состоянием среды. Будем также читать, что в начальном состоянии среда отнесена к ортогональной системе координат, то есть  $g_{ii}^0 = H_i^2$  и  $g_{ij}^0 = 0 (i \neq j)$ . Осуществляя в равенствах (1.4) линеаризацию по  $\varphi_{ij}$ , получим

$$\begin{aligned} H_2 H_3 \sigma_{11} = & \frac{1}{2H_2 H_3} \left( \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{2H_1^2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_1} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_2^3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3^3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_3} - \\ & - \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{\varphi_{11}}{H_1^4} + \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\varphi_{22}}{H_2^3} + \\ & + \left[ \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\varphi_{33}}{H_3^3} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{1}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1^2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3} + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \frac{\varphi_{12}}{H_1^2 H_2^2} + \\ & \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \frac{\varphi_{13}}{H_1^2 H_3^2} + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \frac{\varphi_{23}}{H_2^2 H_3^2} \quad (1, 2, 3) \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$2H_1 H_2 H_3^2 \sigma_{12} = - \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{H_3^2}{H_1^2} \left[ \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_2} + \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial x_1} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{H_3^3}{H_1^2} \left( \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{H_3}{H_1^5} \varphi_{11} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \frac{H_3}{H_1^2 H_2^2} \varphi_{22} - \frac{\varphi_{33}}{H_1^2 H_3} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} \right) + \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \\
 & + \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \\
 & - \frac{2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3} + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} - \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \frac{2\varphi_{13}}{H_1 H_3} + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \frac{2\varphi_{23}}{H_2 H_3} - \\
 & - \left( \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \frac{2\varphi_{12}}{H_1 H_2} \quad (1, 2, 3) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Символ (1, 2, 3) обозначает круговую перестановку индексов, с помощью которой можно получить еще два уравнения. Непосредственной проверкой можно установить, что напряжения (2.1) и (2.2) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия теории упругости, записанным в ортогональных криволинейных координатах, то есть

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 \sigma_{11}) - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \sigma_{33} + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 H_3 \sigma_{21}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \sigma_{12} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{31}) + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \sigma_{13} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

В декартовых координатах равенства (2.1)–(2.3) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, & \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}, & \sigma_{23} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} \right) \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, & \sigma_{13} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Используя математический аппарат ОТО для получения соотношений (2.4), будем далее считать, что они справедливы для трехмерного евклидова пространства, в котором сформулированы уравнения классической теории упругости. Функции напряжений определяются в этой теории из уравнений совместности деформаций, которые записываются в декартовых координатах следующим образом:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \\
 L_{12} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.6), как известно, требуют чтобы деформированная среда обладала геометрией, соответствующей евклидову пространству. Правые части уравнений (2.6) удовлетворяют соотношениям, которые имеют вид [2]

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Еще одним условием, обеспечивающим евклидову геометрию деформированной среды, является существование перемещений  $u(x_1, x_2, x_3)$ , через которые выражаются деформации, то есть

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

Деформации (2.8) тождественно удовлетворяют уравнениям (2.6). Наличие трех уравнений (2.7), связывающих правые части уравнений (2.6), и трех функций  $u_i$ , которые удовлетворяют этим уравнениям, позволяет заключить, что из шести уравнений (2.6) независимыми являются только три уравнения. Соответствующим является и число независимых функций напряжений, что и демонстрируется в следующем разделе.

Для определения функций напряжений деформации, входящие в уравнения (2.6), выражаются через напряжения с помощью обобщенного закона Гука

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\sigma, \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.9)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, а  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера. Подстановка в уравнения (2.6) деформаций (2.9) и далее напряжений (2.4) приводит к следующим уравнениям для функций напряжений:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\nu \sigma}{1+\nu} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu \sigma}{1+\nu} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \right] = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.10)$$

$$L_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu \sigma}{1+\nu} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x_3^3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2} (\varphi_{33} - \varphi_{11} - \varphi_{22}) + \frac{\partial^3}{\partial x_2^2 \partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.11)$$

где

$$\sigma = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

В результате тождественных преобразований уравнения (2.10) и (2.11) можно привести к более компактной форме, которая и используется в дальнейшем

$$L_{11} = -\Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.12)$$

$$L_{12} = -\Delta_3 \left[ -\frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} \right) \right] - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.13)$$

Здесь  $\Delta_3(\cdot)$  – трехмерный оператор Лапласа. Используя соотношения (2.4), можно записать уравнения (2.12), (2.13) через напряжения

$$L_{11} = -\Delta_3(\sigma_{11}) + \frac{1}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0, \quad L_{12} = -\Delta_3(\sigma_{12}) - \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Эти уравнения известны как уравнения Бельтрами. В отличие от традиционного вывода они получены здесь без привлечения уравнений равновесия (2.5) поскольку функции напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия.

Поскольку функции напряжений  $\varphi_{ij}$  являются составляющими метрического тензора  $g_{ij}$ , эти функции образуют симметричный тензор второго ранга. Это свойство функций напряжений непосредственно доказывается в работе [3]. В теории упругости традиционно используются две системы функций напряжений – функции Максвелла и Морера. Однако в принципе возможно существование множества таких систем. Тензор функций напряжений может быть получен как симметричный тензор второго ранга, дивергенция которого равна нулю [4]. В работе [5] получено пять возможных соотношений, связывающих напряжения с функциями напряжений. Рассматриваемая в настоящей работе линеаризация тензора Эйнштейна для получения функций напряжений предложена Н.А. Кильчевским [6], которым получены таким способом функции Максвелла. В работах [7, 8] эти результаты обобщены на случай ортогональных криволинейных координат.

**3. Анализ функций напряжений.** Используемый в разделе 2 подход к построению функций напряжений предполагает, что эти функции являются компонентами метрического тензора, порождаемого в среде тензором напряжений. Однако часть компонентов метрического тензора может принадлежать евклидову пространству. Соответствующая часть функций  $\varphi_{ij}$  при этом оказывается равной нулю. Аналогичная ситуация имеет место в ОТО, согласно которой гравитация порождает риманово пространство. Поскольку формально гравитация проявляется через структуру материального тензора  $T_{ij}$ , который совпадает в рассматриваемой задаче с тензором напряжений, естественно предположить, что напряжения также порождают риманово пространство. При описании таких пространств в ОТО часть компонентов метрического тензора, как правило, принимается соответствующими евклидову пространству.

Найдем минимальное число функций напряжений, позволяющее получить общее решение задачи теории упругости. При этом общим считается решение, в котором все компоненты тензора напряжений отличны от нуля. Критерием корректности постановки задачи считается совпадение числа функций напряжений с количеством уравнений, из которых они находятся.

Предположим, что только одна функция напряжений отлична от нуля. Анализ соотношений (2.4) показывает, что в этом случае часть напряжений заведомо оказывается равной нулю, то есть общего решения с одной функцией напряжений не существует.

Если отличны от нуля две функции напряжений, например  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{23}$ , соотношения (2.4) дают

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{13} = \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

При двух функциях напряжений шесть уравнений (2.12), (2.13) не сводятся к двум, то есть общего решения с двумя функциями напряжений не существует.

Рассмотрим случай трех функций напряжений. Наиболее распространенными являются три функции Максвелла [4]  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{22}$  и  $\varphi_{33}$ . Из соотношений (2.4) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2}, & \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2}, & \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, & \sigma_{23} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, & \sigma_{13} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Уравнения совместности деформаций (2.10), (2.11) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{22}}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ L_{33} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} \right) + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{33}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} \right) = 0 \\ L_{12} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2} (\varphi_{33} - \varphi_{22} - \varphi_{11}) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ L_{23} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} (\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33}) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ L_{13} &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} (\varphi_{22} - \varphi_{11} - \varphi_{33}) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} = 0\end{aligned}$$

Подставляя в эту систему

$$\sigma = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2}$$

после довольно громоздких преобразований окончательно получим

$$L_{11} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad L_{22} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} = 0, \quad L_{33} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$L_{12} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad L_{23} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad L_{13} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (3.3)$$

где

$$F_i = -\Delta_3(\varphi_{ii}) + \frac{\sigma}{1+\nu} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнения (3.3), найдем

$$\begin{aligned}F_3 &= \int f_1(x_1, x_3) dx_1 + f_2(x_2, x_3), & F_1 &= \int f_3(x_1, x_2) dx_2 + f_4(x_1, x_3) \\ F_2 &= \int f_5(x_2, x_3) dx_3 + f_6(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Здесь  $f_i$  – произвольные функции, которые связаны соотношениями, получаемыми в результате подстановки равенств (3.5) в уравнения (3.2), то есть

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.6)$$

Таким образом, с помощью функций напряжений Максвелла задача сводится к трем уравнениям (3.5) относительно трех функций напряжений и шести произвольных функций, связанных уравнениями (3.6).

В качестве примера рассмотрим случай плоской деформации. В этом случае функции напряжений не зависят от координаты  $x_3$  и соотношения упругости (2.9) дают

$$\begin{aligned} 2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu\sigma}{1+\nu}, & 2\mu\varepsilon_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\nu\sigma}{1+\nu}, & 2\mu\varepsilon_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 2\mu\varepsilon_{33} &= \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\nu\sigma}{1+\nu}, & \varepsilon_{23} &= 0, & \varepsilon_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\sigma = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \Delta_2(\varphi_{33}), \quad \Delta_2(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad (3.8)$$

В случае плоской деформации  $\varepsilon_{33} = 0$ . Тогда из первого соотношения (3.7) имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\nu\sigma}{1+\nu} \quad (3.9)$$

Подставляя этот результат в равенство (3.8), получим

$$\Delta_2(\varphi_{33}) - \frac{\sigma}{1+\nu} = 0 \quad (3.10)$$

Для того, чтобы избежать интегрирования по  $x_3$ , воспользуемся вместо окончательных уравнений (3.5) уравнениями (3.2) и (3.3), которые дают

$$L_{11} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad L_{22} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = 0, \quad L_{12} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad L_{33} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.11)$$

Входящие сюда функции  $F_i$  определяются равенствами (3.4), то есть

$$F_i = -\Delta_2(\varphi_{ii}) + \frac{\sigma}{1+\nu} \quad (3.12)$$

Учитывая равенство (3.10), можно заключить, что  $F_3 = 0$ . Таким образом, первые три уравнения (3.11) удовлетворяются тождественно. Преобразуя последнее уравнение с помощью равенства (3.9), получим  $\Delta_2(\sigma) = 0$ . Учитывая этот результат и воздействуя оператором  $\Delta_2$  на уравнение (3.10), окончательно приходим к уравнению  $\Delta_2 \Delta_2(\varphi_{33}) = 0$ , то есть к известному бигармоническому уравнению плоской задачи для функции напряжений Эри.

Еще одну классическую систему функций напряжений составляют функции Морера [4]  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{23}$  и  $\varphi_{13}$ , для которых из соотношений (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -2\frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, & \sigma_{22} &= -2\frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}, & \sigma_{33} &= -2\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, & \sigma_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \sigma_{23} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} \right), & \sigma_{13} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Уравнения совместности деформаций (2.12), (2.13) для этих функций напряжений имеют вид

$$L_{11} = \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) + 3\Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) = 0, \quad L_{22} = \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) + 2\Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = 0$$

$$L_{33} = \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) + 2\Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$L_{12} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} - \Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_3^2} \right) = 0$$

$$L_{23} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} - \Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1^2} \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$L_{13} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} - \Delta_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

где

$$\sigma = -2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \quad (3.15)$$

Складывая уравнения (3.13) и учитывая равенство (3.15), получим

$$L_{11} + L_{22} + L_{33} = \frac{2}{1+\nu} \Delta(\sigma) + 2\Delta \left( \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) = \frac{2\Delta(\sigma)}{1+\nu} + 2\Delta(\sigma) = 0$$

Отсюда следует известный результат

$$\Delta_3(\sigma) = 0 \quad (3.16)$$

Воздействуя на уравнения (3.13) оператором Лапласа и учитывая уравнение (3.15), имеем

$$\Delta \Delta(\varphi_{12}) = 0, \quad \Delta \Delta(\varphi_{13}) = 0, \quad \Delta \Delta \varphi_{23} = 0 \quad (3.17)$$

Таким образом, функции Морера являются бигармоническими. После довольно громоздких преобразований с учетом равенств (3.15)–(3.17) уравнения (3.13) и (3.14) приводятся к форме

$$L_{11} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \quad L_{22} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0, \quad L_{33} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.18)$$

$$L_{12} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) = 0, \quad L_{23} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) = 0, \quad L_{13} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Здесь

$$F_1 = 2\Delta_3 \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}, \quad F_2 = 2\Delta_3 \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}$$

$$F_3 = 2\Delta_3 \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} \quad (3.20)$$

Интегрируя уравнения (3.18), получим

$$F_1 = f_1(x_2, x_3), \quad F_2 = f_2(x_1, x_3), \quad F_3 = f_3(x_1, x_2) \quad (3.21)$$

где  $f_i$  – произвольные функции. Таким образом, задача сводится к трем уравнениям (3.21) относительно функций (3.20), включающим три функции напряжений, и к трем произвольным функциям, связь между которыми устанавливается в результате подстановки равенств (3.21) в уравнения (3.19), то есть

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

Возможны и другие системы, состоящие из трех функций напряжений. Теоретически таких систем может быть 20 поскольку таковым является число сочетаний из шести элементов по три [5]. Однако следует учесть ограничения, накладываемые равенствами (2.4), из которых, в частности, следует, что если сохранить функции  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}$  (1, 2, 3), то одно из нормальных напряжений оказывается равным нулю. Таким образом, можно получить 17 соотношений, связывающих напряжения с тремя функциями напряжений с индексами

$$\begin{aligned} &11, 22, 33; \quad 11, 22, 12; \quad 11, 22, 23; \quad 11, 22, 13; \quad 11, 33, 12; \quad 11, 33, 23; \quad 11, 33, 13 \\ &11, 12, 23; \quad 11, 13, 23; \quad 22, 33, 12; \quad 22, 33, 23; \quad 22, 33, 13; \quad 22, 12, 13; \quad 22, 13, 23 \\ &33, 12, 23; \quad 33, 12, 13; \quad 12, 13, 23 \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим систему функций напряжений, состоящую из двух функций Максвелла  $\varphi_{11}, \varphi_{22}$  и одной функции Морера  $\varphi_{13}$ . Уравнения (2.10) и (2.11) принимают вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^3}{\partial x_3^3} \left( \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} \right) \\ &- 2 \frac{\partial^3}{\partial x_2^2 \partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_3} \right) - \frac{\nu}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^4 \varphi_{22}}{\partial x_3^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\nu}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ L_{33} &= \frac{\partial^4 \varphi_{22}}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) = 0 \\ L_{12} &= - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \frac{\partial^4 \varphi_{13}}{\partial x_2 \partial x_3^3} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \\ &+ \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ L_{23} &= - \frac{\partial^4 \varphi_{22}}{\partial x_2 \partial x_3^3} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^4 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ L_{13} &= - \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_3^2} \left( \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial^4 \varphi_{13}}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

С учетом равенства

$$\sigma = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

и условия (3.16) после довольно громоздких преобразований окончательно получим

$$L_{11} = - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) = 0, \quad L_{22} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 0, \quad L_{13} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0 \quad (3.22)$$

$$L_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0, \quad L_{12} = - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0, \quad L_{23} = - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.23)$$

где

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta_3(\varphi_{13}) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}, \quad F_2 = \Delta_3 \left( \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_3}$$

$$F_3 = \Delta_3 \left( \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} \quad (3.24)$$

Интегрируя уравнения (3.23), имеем

$$F_1 = f_1(x_1, x_3), \quad F_2 = f_2(x_1, x_3), \quad F_3 = f_3(x_1, x_2) \quad (3.25)$$

Таким образом, система сводится к трем уравнениям (3.25) относительно функций (3.24), включающих три функции напряжений. Произвольные функции  $f_i$  связаны тремя уравнениями (3.22), которые дают

$$- \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

Первые два уравнения совпадают, то есть функции  $f_i$  связаны только двумя условиями.

**Заключение.** В результате линеаризации уравнений общей теории относительности получены выражения для напряжений через компоненты метрического тензора риманова пространства, которые ассоциируются с функциями напряжений классической теории упругости. Установлено, что минимальное количество функций напряжений, которые в принципе позволяют построить общее решение задачи теории упругости в напряжениях, равно трем. При этом существуют 17 различных вариантов соотношений, позволяющие выразить напряжения через три функции напряжений. Исследованы классические соотношения Максвелла и Морера, а также смешанные соотношения, включающие две функции Максвелла и одну функцию Морера. Показано, что для рассмотренных систем функций напряжений шесть уравнений совместности деформаций относительно трех функций напряжений сводятся к трем уравнениям.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синг Д.Л. Общая теория относительности. М.: Иностран. лит., 1963. 432 с.
2. Washizu K. A note on the conditions of compatibility // J. Math. Phys. 1958. V. 36. № 4. P. 306–311.
3. Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949. 200 с.

- 
4. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
  5. *Блох В.И.* Теория упругости. Харьков: Изд. Харьковского университета, 1964. 484 с.
  6. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наукова думка, 1972. 148 с.
  7. *Васильев В.В.* Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. РАН. МТТ. 1989. № 5. С. 30–34.
  8. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 82–92.

УДК 539.3

**УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ И ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ  
В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**© 2022 г. С. А. Лурье<sup>a,b,\*</sup>, П. А. Белов<sup>a</sup><sup>a</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия<sup>b</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: salurie@mail.ru

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 20.01.2022 г.

Рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях. Первая – на основе уравнений совместности Папковича. Вторая – на основе уравнений совместности Сен-Венана. Показано, что формулы Чезаро в обеих постановках позволяют ввести в качестве вектора неопределенных множителей Лагранжа вектор решений неоднородных уравнений равновесия, удовлетворяющих векторной задаче Неймана. С другой стороны показано, что уравнения совместности, вводимые как связи между дисторсиями (совместность по Папковичу) или деформациями (совместность по Сен-Венану), позволяют ввести соответствующие тензоры неопределенных множителей Лагранжа. Показано, что эти тензоры можно рассматривать как функции напряжений. В первой постановке тензор функций напряжений второго ранга имеет девять компонент так как в общем случае является несимметричным. Во второй постановке тензор функций напряжений является симметричным и обладает шестью компонентами. В частности, обсуждается и возможность введения трех функций напряжений.

*Ключевые слова:* теория упругости, функции напряжений, уравнения совместности Папковича, уравнения совместности Сен-Венана, принцип возможных перемещений, метод неопределенных множителей Лагранжа

DOI: 10.31857/S0572329922040079

**1. Введение.** Интерес к решению задач теории упругости в напряжениях возник достаточно давно и связан, вероятно, с попыткой расширить класс аналитических решений. Достаточно полный обзор исследований, связанных с построением общих представлений решений в напряжениях представлен в работе [1], где обсуждаются решения, полученные Максвеллом [2] и Морерой [3] и общее представление Бельтрами [4] для напряжений через тензорную функцию напряжений. Вопросы полноты таких представлений обсуждались в работах [5–8]. Как правило, в таких исследованиях рассматривался случай, когда нет объемных сил. Вопросы построения шести функций напряжений и краевых задач для их определения обсуждались в работах [9, 10]. Обобщение проблемы построения функций напряжений на  $n$ -мерное пространство и формулировка соответствующих краевых задач для них даны в работе [11]. Возможность представления напряжений через три функции напряжений обсуждалась в работах [12, 13]. В работе [13] показана неоднозначность и эквивалентность форм представлений напряжений через три функции напряжений. В недавней статье [14] утверждается, что уравнения совместности деформаций линейной теории упругости уравнения

оказываются аналогичными общей теории относительности для пустого пространства.

В настоящей работе для сохранения равноправия всех кинематических переменных используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Показано, что тензоры неопределенных множителей Лагранжа, на которых уравнения совместности вводятся как связи, являются тензорами функций напряжений и их ровно столько, сколько уравнений совместности. Дополнительно, в качестве связей между перемещениями и дисторсиями (постановка Папковича) и деформациями (постановка Сен-Венана) вводятся формулы Чезаро. Показано, что вектор неопределенных множителей Лагранжа, на котором формулы Чезаро вводятся как связи, в обеих постановках определяется из векторной задачи Неймана.

**2. Кинематические соотношения упругости.** Введем основные определения кинематических переменных и приведем последовательно кинематические соотношения линейной теории упругости. Рассмотрим произвольное точечное преобразование:

$$y_i = x_i + R_i \quad (2.1)$$

Здесь  $x_i, y_i$  – соответственно координаты произвольной точки среды до и после деформирования, соответственно;  $R_i$  – вектор перемещений в рассматриваемой точке.

Запишем произвольное точечное преобразование (2.1) в дифференциалах:

$$dy_k = \left( \delta_{ki} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right) dx_i \quad (2.2)$$

где  $\delta_{ki}$  – тензор Кронекера.

Введем определение дифференциала линейного элемента и дадим, соответственно, определение метрического тензора  $g_{ij}$ . Учитывая равенство (2.2), найдем:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= dy_k dy_k = \left( \delta_{ki} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right) dx_i \left( \delta_{kj} + \frac{\partial R_k}{\partial x_j} \right) dx_j = \\ &= \left( \delta_{ij} + \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \frac{\partial R_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = \\ &= g_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

здесь  $ds$  – дифференциал линейного элемента.

Определим тензор деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Учитывая (2.3), получим:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \frac{\partial R_k}{\partial x_j} \right)$$

В линейном приближении записанное определение тензора деформаций дает систему симметричных соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Наконец, дадим определение величин, определяющих антисимметричные кинематические переменные деформирования. Тензор поворотов  $\omega_{ij}$  имеет вид:

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Псевдовектор поворотов  $\Omega_k$  определяется, в свою очередь, через тензор поворотов  $\omega_{ij}$ :

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \omega_{pq} e_{pqk} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial R_p}{\partial x_q} - \frac{\partial R_q}{\partial x_p} \right) e_{pqk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_p}{\partial x_q} e_{pqk} \quad (2.6)$$

Очевидно, что имеет место и обратное равенство, позволяющее записать тензор поворотов  $\omega_{ij}$  через псевдовектор поворотов  $\Omega_k$ :

$$\omega_{mn} = \Omega_k e_{mnk} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_m}{\partial x_n} - \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \right) \quad (2.7)$$

Общие соотношения Коши, связывающие градиенты вектора перемещений с тензором деформаций и поворотов записываются с учетом (2.4), (2.5) и определений (2.6), (2.7) в следующем виде:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} - \omega_{ij} = \varepsilon_{ij} - \Omega_k \mathcal{A}_{ijk} \quad (2.8)$$

В равенствах (2.6)–(2.8)  $e_{ijm}$  является псевдотензором Леви-Чивиты. Запишем известные соотношения для тензора Леви-Чивиты, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\begin{aligned} e_{ijm} e_{pqm} &= \delta_{ip} (\delta_{jq} \delta_{mn} - \delta_{jn} \delta_{mq}) - \delta_{iq} (\delta_{jp} \delta_{mn} - \delta_{jn} \delta_{mp}) + \delta_{in} (\delta_{jp} \delta_{mq} - \delta_{jq} \delta_{mp}) \\ e_{ijm} e_{pqm} &= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ e_{ijm} e_{pjm} &= 2\delta_{ip} \\ e_{ijm} e_{ijm} &= 6 \end{aligned} \quad (2.9)$$

**3. Общее решение уравнений Коши.** Соотношения Коши (2.8) интегрируются в квадратурах. Этими квадратурами являются формулы Чезаро, записанные относительно компонент тензора дисторсии  $R_{i,j}$ :

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dx_j = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \quad (3.1)$$

Здесь  $x_i$  – координаты произвольной точки траектории интегрирования,  $R_i^0$  – вектор перемещений в начальной точке траектории интегрирования.

Принимаем в дальнейшем, что  $z_i^0, z_i$  являются, соответственно, координатами начальной  $M_0$  и конечной  $M_z$  точек траектории интегрирования. Формулы Чезаро, таким образом, связывают вектор перемещения  $R_i$  в конечной точке траектории с координатами  $z_i$  с вектором перемещений  $R_i^0$  в начальной точке траектории интегрирования с координатами  $z_i^0$ .

Необходимыми условиями интегрируемости криволинейного интеграла в (3.1) являются уравнения совместности Папковича:

$$(\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh})_{,k} e_{jkr} = 0 \quad (3.2)$$

Таким образом, соотношения Коши (2.8) эквивалентны системе формул Чезаро (3.1) и уравнений совместности Папковича (3.2). Иначе говоря, общее решение уравнений (2.8) записывается в форме (3.1) при выполнении дополнительных условий (3.2). Двенадцать кинематических переменных: компоненты вектора перемещений (три) и тензора дисторсии (девять) связаны двенадцатью связями: формулы Чезаро (3.1) дают три связи, уравнения совместности Папковича (3.2) дают девять связей. При этом формулы Чезаро (3.1) являются общим решением (квадратурами) соотношений Коши, а

уравнения совместности Папковича (3.2) – являются условиями существования этих квадратур:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh} \Leftrightarrow \begin{cases} R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}) dx_j \\ (\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh})_{,k} e_{jkr} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

**4. Общее решение уравнений совместности Папковича.** Уравнения совместности Папковича (3.2) можно привести к виду, пригодному к дальнейшему интегрированию в квадратурах. Действительно, девять первых производных от компонентов псевдовектора поворотов могут быть алгебраически выражены из (3.2) через компоненты тензора деформаций из девяти уравнений совместности Папковича с учетом свойств тензора Леви–Чивиты (2.9):

$$\Omega_{r,i} = -\varepsilon_{ij,k} e_{jkr} \quad (4.1)$$

Интегрируя в квадратурах уравнения совместности (4.1), получим:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \quad (4.2)$$

где  $\Omega_i^0$  – псевдовектор поворотов в начальной точке траектории интегрирования с координатами  $z_i^0$ .

Условиями интегрируемости криволинейного интеграла в (4.2) являются уравнения совместности Сен-Венана:

$$(\varepsilon_{ij,k} e_{jkr})_{,l} e_{ils} = \varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} = 0 \quad (4.3)$$

Таким образом, система квадратур расширена благодаря общему решению уравнений совместности Папковича. Формулы Чезаро (3.1) определяют квадратуры относительно перемещений, формулы (4.2) – квадратуры уравнений совместности Папковича относительно псевдовектора локальных поворотов и тензора поворотов. Условиями существования этих квадратур являются уравнения совместности Сен-Венана:

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \omega_{ij}) dx_j \\ \Omega_r &= \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \\ \omega_{ij} &= \Omega_k e_{ijk} = \left[ \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{mn,k} e_{nkr} dx_m \right] e_{ijr} = \Omega_r^0 e_{ijr} - \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{mi,j} - \varepsilon_{mj,i}) dx_m \\ &\quad \varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Учитывая (4.1)–(4.4) подынтегральное выражение в формулах Чезаро (3.1) можно переписать только относительно деформаций, используя квадратуры уравнений совместности Папковича (4.2):

$$R_i = R_i^0 + \Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} + \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \quad (4.5)$$

Таким образом, если выполняются классические уравнения совместности Сен-Венана (4.3), существует непрерывное поле псевдовектора  $\Omega_r$  в соответствии с (4.2). В свою очередь,  $\Omega_r$  является общим решением уравнений совместности Папковича.

Следовательно, криволинейные интегралы в формулах Чезаро (3.1) существуют, и, более того, подынтегральное выражение в них можно выразить только через деформации в соответствии с (4.5). Следовательно система кинематических соотношений Сен–Венана имеет вид

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^0 + \frac{1}{2} \Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} + \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ik} - (z_j - x_j)(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i})] dx_k \\ \omega_{ij} &= \Omega_k e_{ijk} \\ \Omega_r &= \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \\ \varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

*Следствие 1.* Поле напряжений определяется через тензор деформаций с точностью до линейного полинома, а поле псевдовектора поворотов (и, следовательно, тензора поворотов) определяются с точностью до постоянного псевдовектора.

*Следствие 2.* Формулы Чезаро (4.5) позволяют трактовать первое слагаемое как перемещение, порожденное трансляцией системы координат  $R_i^0$ , второе – как перемещение, порожденное вращением системы координат  $\Omega_i^0$ . Тогда третье слагаемое в (4.5) можно трактовать как перемещение, связанное с деформированием среды, которое является инвариантным относительно трансляции и поворота системы координат, т.е. не зависящим от  $R_i^0$  и  $\Omega_i^0$ .

**5. Тензор-функции напряжений Папковича.** Рассмотрим принцип возможных перемещений в общем случае, когда не заданы уравнения закона Гука и связь между напряжениями и деформациями может быть произвольной. Дадим на его основе вариационную постановку определения функций напряжения. Учитывая, что кинематические переменные определяются компонентами вектора перемещений и тензора дисторсий (тензора деформаций и тензора поворотов), запишем принцип возможных перемещений в виде

$$\int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F P_i^F \delta R_i dF - \int_V \sigma_{ij} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dV = 0 \quad (5.1)$$

Аргументами этой, в общем случае неинтегрируемой относительно вариаций кинематических переменных линейной вариационной формы (5.1), являются вариации компонентов перемещений (три) и вариации компонентов тензора дисторсии (девять), представленного в виде разложения на симметричную (деформации – шесть) и антисимметричную (повороты – три) части. Между ними имеются кинематические связи, которые следует учесть. Например, если в качестве связей выбрать соотношения Коши, то все компоненты тензора дисторсии выражаются через первые производные от вектора перемещений. Девять соотношений Коши позволяют выразить девять компонент тензора дисторсии через производные от трех компонент вектора перемещений. В результате основными (независимыми) кинематическими переменными становятся компоненты вектора перемещений. Отметим, что все кинематические переменные в некотором смысле равноправны, поэтому формально любые три переменные могут быть выбраны за основные. Остальные, в таком случае, являются зависимыми в соответствии со связями, обусловленными соотношениями Коши. Однако выбор связей не всегда является тривиальным. Например, в отличие от компонент вектора, компоненты тензора дисторсии не образуют некоего тензорного объекта, содержащего три компонента. Действительно, тензор деформаций можно разложить на шаровой (одна компонента) и девиатор (пять компонент). Тензор поворотов, имеющий три компонента, также не подходит, так как через его компоненты нельзя

определить потенциальные поля перемещений. Чтобы избежать субъективного выбора независимых кинематических переменных, воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, сохраняющего равноправие всех кинематических переменных. Для этого последовательно учтем три связи, задаваемые формулами Чезаро (3.1) и девять связей, задаваемых уравнениями совместности Папковича (3.2).

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа учтем связи между перемещениями и дисторсиями в виде формул Чезаро (3.1), умноженных на вектор соответствующих неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_i$  – реактивных силовых факторов, которые удобно представить как лапласиан от другого неопределенного вектора  $\lambda_i = \sigma_{i,kk}$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \left\{ \int_V \sigma_{i,kk} \left[ R_i - R_i^0 - \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \right] dV \right\} = \\
 &= \int_V \left\{ \sigma_{i,kk} \delta \left[ R_i - R_i^0 - \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ R_i - R_i^0 - \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \right] \delta \sigma_{i,kk} \right\} dV = \quad (5.2) \\
 &= \int_V \left\{ \sigma_{i,kk} \delta R_i + \sigma_{i,j} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) + \left[ R_i - R_i^0 - \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \right] \delta \sigma_{i,kk} \right\} dV + \\
 &\quad + \int_F (-\sigma_{i,k} n_k) \delta R_i dF = 0
 \end{aligned}$$

Здесь принято во внимание, что  $\left[ \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ip} - \Omega_k e_{ipk}) dx_p \right]_{,j} = \varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}$ , а также  $R_{i,j} = \varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}$  и  $\delta \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}) dx_j dV = \delta \int_{M_o}^{M_z} R_{i,j} dx_j dV = \delta R$ .

Связи, отражающие требование выполнения условий интегрируемости соотношений Коши (3.2), (см. уравнения совместности Папковича (3.3)) вводятся на несимметричном тензоре множителей Лагранжа  $\lambda_{im}$ :

$$\begin{aligned}
 &\delta \int_V \lambda_{im} (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm} dV = \\
 &= \int_V [(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm} \delta \lambda_{im} + \lambda_{im} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm}] dV = \quad (5.3) \\
 &= \int_V [(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm} \delta \lambda_{im} - \lambda_{im,k} e_{jkm} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})] dV + \\
 &\quad + \int_F \lambda_{im} n_k e_{jkm} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr}) dF = 0
 \end{aligned}$$

С учетом выбранных связей (5.2), (5.3), путем формального суммирования (5.1)–(5.3), принцип возможных перемещений (5.1) приводит к следующему вариационному равенству:

$$\begin{aligned}
& \int_V \left\{ (\sigma_{i,kk} + P_i^V) \delta R_i + (\sigma_{i,j} - \lambda_{im,r} e_{jrm} - \sigma_{ij}) \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) + \right. \\
& \left. + (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm} \delta \lambda_{im} + \left[ R_i - R_i^0 - \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) dx_j \right] \delta \sigma_{i,kk} \right\} dV + \\
& + \int_F [(P_i^F - \sigma_{i,j} n_j) \delta R_i + \lambda_{im} n_r e_{jrm} \delta (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})] dF = 0
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Девять компонент тензора множителей Лагранжа  $\lambda_{im}$  и три компоненты вектора множителей Лагранжа  $\sigma_i$  позволяют считать все двенадцать кинематических переменных независимыми. В результате удается свести исходную вариационную задачу к первой основной задаче, когда вариационное равенство выполняется при условии, что все двенадцать статических множителей равны нулю. Это удается сделать за счет множителей Лагранжа.

Таким образом из (5.4) вытекают уравнения Эйлера, которые в совокупности определяют формулы Чезаро (3.1), уравнения совместности Папковича (3.2) и соотношения, отражающие зависимость напряжений от компонентов тензоров неопределенных множителей Лагранжа  $\sigma_i, \lambda_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n} e_{mnj} \quad (5.5)$$

Из (5.4) также следует, что проблема определения вектора  $\sigma_i$  решается отдельно, так как на вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\sigma_i$  формулируется краевая задача, определяемая неоднородными уравнениями равновесия и неоднородными статическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_i + P_i^V &= 0 \\
\int_F (P_i^F - \sigma_{i,k} n_k) \delta R_i dF &= 0
\end{aligned} \quad (5.6)$$

Тензор неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_{ij}$  в соответствии с (5.5) таков, что напряжения, выраженные только через него, удовлетворяют однородным уравнениям равновесия тождественно:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda_{im,nj} e_{njm} \equiv 0,$$

где  $\sigma_{ij} = \lambda_{im,n} e_{jmn}$ .

Таким образом, следуя общепринятому определению, компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_{ij}$  являются компонентами тензора функций напряжений.

Будем называть этот тензор второго ранга  $\lambda_{ij}$  функциями напряжений Папковича, поскольку они введены как множители Лагранжа при условиях совместности Папковича. При этом, для любого конкретного выбора уравнений закона Гука, девять компонент тензора функций напряжений  $\lambda_{ij}$  будут удовлетворять соответствующим девяти уравнениям совместности Папковича. Они записаны в терминах  $\lambda_{ij}$  в виде неоднородных уравнений в частных производных, правые части которых выражены через вектор  $\sigma_i$ , являющийся решением задачи (5.6).

Если ввести дополнительно уравнения закона Гука, которые по определению устанавливают однозначную связь между компонентами тензора дисторсий и напряжений, то получим уравнения совместности Папковича, записанные в напряжениях. С учетом (5.5) эти уравнения записываются и через компоненты тензора функций на-

пряжений. Напомним, что векторное поле  $\sigma_i$  определяется краевой задачей Неймана (5.6) и всегда может быть построено.

Обратим внимание на то, что связь между напряжениями и функциями напряжений в общем случае не требует симметрии тензора напряжений. В результате, парность касательных напряжений определяется только выбором тех или иных уравнений закона Гука. Поэтому предложенный способ построения функций напряжения является достаточно общим и может быть распространён и на обобщенные модели сред с несимметричным тензором напряжений.

Разрешающими уравнениями для функций напряжений являются уравнения совместности, которые могут быть записаны с помощью уравнений закона Гука. В качестве примера рассмотрим классический линейный закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijmn}\epsilon_{mn} \\ C_{ijmn} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) = C_{mnij} = C_{jimn} = C_{ijnm} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Обратим соотношения (5.7), выразив деформации через напряжения:

$$\epsilon_{pq} = (\epsilon_{pq} + \epsilon_{qp})/2 = C_{pqij}^{-1}\sigma_{ij} = C_{pqij}^{-1}C_{ijmn}\epsilon_{mn} = (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})\epsilon_{mn}/2 \quad (5.8)$$

Очевидно, что обратный тензор модулей упругости  $C_{pqij}^{-1}$  в (5.8) определяется равенством

$$C_{pqij}^{-1}C_{ijmn} = (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})/2 \quad (5.9)$$

Учитывая (5.9), компоненты обратного тензора модулей упругости в (5.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_{pqij}^{-1}C_{ijmn} &= (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})/2 \\ C_{ijmn} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \\ C_{pqij}^{-1} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{pq}\delta_{ij} + \frac{1}{4\mu}(\delta_{pi}\delta_{qj} + \delta_{pj}\delta_{qi}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

В результате, с учетом (5.8)–(5.10) уравнения совместности Папковича (4.1) представляются в напряжениях в следующем виде:

$$\Omega_{r,i} = -C_{ijmn}^{-1}\sigma_{mn,k}e_{jkr} \quad (5.11)$$

С другой стороны напряжения  $\sigma_{ij}$  с помощью равенств (5.5) определяются через функции напряжений  $\lambda_{ij}$  и уравнения совместности Папковича (5.11) записываются в функциях напряжений в следующем виде:

$$\Omega_{r,i} = -C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})e_{jkr} \quad (5.12)$$

В результате, в классической упругости с законом Гука (5.7)–(5.10) уравнения Папковича (5.11), (5.12) позволяют определить псевдовектор поворотов в квадратурах:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})e_{jkr}dx \quad (5.13)$$

При этом следует выполнить условия существования криволинейного интеграла (5.13):

$$C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})_{,p}e_{jkr}e_{ips} = 0 \quad (5.14)$$

Соответственно, формулы Чезаро (3.1) с учетом (5.13), (5.14) приобретут вид:

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} [C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b}e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}] dx_j$$

Таким образом, формулировка уравнений теории упругости в функциях напряжений Папковича  $\lambda_{im}$  записывается с помощью следующей совокупности равенств:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n} e_{jmn} \quad (5.15)$$

$$C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk} e_{nab})_{,p} e_{jkr} e_{ipr} = 0 \quad (5.16)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pq} &= C_{pqij}^{-1}(\sigma_{i,j} + \lambda_{im,n} e_{jmn}) \\ \Omega_r &= \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk} e_{nab}) e_{jkr} dx \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} [C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b} e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}] dx_j$$

Равенство (5.15) дает определение тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  через тензор функций напряжений  $\lambda_{im}$ . Уравнение (5.16) имеет смысл уравнения совместности (условие существования контурного интеграла (5.15)) и является разрешающим уравнением для функции напряжений  $\lambda_{im}$ . Система уравнений (5.17) позволяет найти в квадратурах поля деформаций, локальных поворотов и перемещений через вектор-функцию  $\sigma_i$  и тензор-функции напряжений Папковича  $\lambda_{im}$ . Вектор функция  $\sigma_i$  в выражениях (5.15)–(5.17) считается известной, так как следуя принципу возможных перемещений (5.4) эта вектор–функция определяется по заданным в объёме и на поверхности тела силам из отдельной краевой задачи (5.6).

Принцип возможных перемещений (5.4) позволяет формулировать и граничные условия на функцию напряжений  $\lambda_{ma}$  в форме вариационного равенства:

$$\int_F \lambda_{im} n_k e_{jkm} \delta [C_{ijmn}^{-1}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b} e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}] dF = 0 \quad (5.18)$$

Следуя (5.18) граничные условия для функций напряжений  $\lambda_{ma}$  записываются как “статические” условия

$$\lambda_{im} n_k e_{jkm} = 0, \quad x_i \in F \quad (5.19)$$

Сформулируем некоторые следствия, касающиеся определения функций напряжений  $\lambda_{im}$  и постановки в напряжениях (5.15)–(5.19).

*Следствие 1.* Уравнения Папковича в функциях напряжений разрешены относительно всех первых производных от псевдовектора поворотов  $\Omega_r$ . Поэтому их можно проинтегрировать в квадратурах.

*Следствие 2.* Если тензор модулей упругости в уравнениях закона Гука является симметричным (тензор податливостей также симметричный), то имеет место парность касательных напряжений (симметрия тензора напряжений), и симметричный тензор деформаций  $\varepsilon_{ij}$  будет выражаться с помощью соответствующих сверток через компоненты тензора функций напряжений Папковича  $\lambda_{im}$  и компоненты тензора  $\sigma_{m,n}$ .

*Следствие 3.* В общем случае при решении в напряжениях девять уравнений совместности Папковича (5.16), записанные через компоненты тензора функций напряжений  $\lambda_{ij}$

$$C_{ijmn}^{-1} \lambda_{ma,bkp} e_{nab} e_{jkr} e_{ips} = -C_{ijmn}^{-1} \sigma_{m,nkp} e_{jkr} e_{ips}$$

всегда являются неоднородными, так как правые части этих уравнений зависят от дифференциальных операторов над вектором  $\sigma_i$ , определяемым краевой задачей (5.6).

*Следствие 4.* Если объемные и поверхностные силы равны нулю, то непосредственно из (5.6) следует тривиальное решение для вектор-функции  $\sigma_i$ . В таком случае краевая задача (5.18), (5.19) для функции напряжения  $\lambda_{im}$  также является однородной. Следовательно, при отсутствии объемных и поверхностных сил имеет место только тривиальная функция напряжений  $\lambda_{im} = 0$ . Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи в напряжениях, записанного через тензор функцию второго ранга  $\lambda_{im}$  — функцию напряжений Папковича.

*Следствие 5.* Разрешающее уравнение на функцию напряжений Папковича  $\lambda_{im}$  является условием существования криволинейного интеграла при определении псевдовектора поворотов (5.13) и в точности совпадает с уравнением Бельтрами—Митчелла  $C_{ijmn}^{-1} \sigma_{mn, kp} e_{jkr} e_{ips} = 0$ , будучи записанным в напряжениях  $\sigma_{mn}$ , если тензор податливостей  $C_{ijmn}^{-1}$  является симметричным по первой и второй парам индексов. При решении в напряжениях обычно эти уравнения решаются с учетом краевых условий на поверхности, сформулированных для напряжений  $\sigma_{ij} n_j - P_i^F = 0$ , где  $P_i^F$  — силы заданные на поверхности тела. Покажем, что краевая задача, сформулированная на функции напряжений Папковича  $\lambda_{im}$  на основе принципа возможных перемещений хотя и является решением этого же уравнения, но удовлетворяет иным краевым условиям. Действительно, рассмотрим уравнение (5.15), определяющее тензор напряжений через функцию напряжений, и перепишем его в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n} e_{jmn} = \sigma_{i,j} + \sigma_{ijn}$$

где  $\sigma_{ijn} = \lambda_{im} e_{jmn}$  иное, эквивалентное представление для функции напряжений Папковича, а  $\sigma_{i,j}$  предполагается известной функцией, так как полностью определяется краевой задачей (5.6). Тогда краевая задача в классической интерпретации определяется неоднородным уравнением Бельтрами—Митчелла, записанным в терминах функции напряжений Папковича  $\sigma_{ijn}$  ( $\sigma_{i,j}$  предполагается известной функцией являющейся решением краевой задачи (5.6)) с граничным однородным условием типа Неймана

$$\sigma_{ijn,n} n_j = P_i^F - \sigma_{i,j} n_j = 0$$

С другой стороны, вариационное равенство (5.4), полученное на основе принципа возможных перемещений, требует краевой задачи с однородным граничным условием типа Дирихле

$$\sigma_{ijn} n_n = 0$$

**6. Тензор функции напряжений Сен-Венана.** Используя тот же алгоритм, что был применен для построения функций напряжений Папковича, построим функции напряжений в случае условий совместности Сен-Венана. Эти функции будем называть функциями напряжений Сен-Венана. Запишем принцип возможных перемещений, полагая, что в качестве системы кинематических связей выбрана система (4.6). Учитываем, что список аргументов включает в этом случае вектор перемещений  $R_i$  и симметричный тензор деформаций  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Вариационное равенство принципа возможных перемещений имеет вид

$$\int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F P_i^F \delta R_i dF - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad (6.1)$$

В постановке (6.1) тензор напряжений является симметричным, так как совершает возможную работу на симметричном тензоре деформаций. Псевдовектор поворотов (как и тензор поворотов) не входит в формулировку вариационного принципа через выражение возможной работы внутренних сил. Следовательно, только работа внешних сил зависит от трансляции  $R_i^0$  и поворота  $\Omega_m^0$  системы координат. Отсюда следует, что условиями независимости (6.1) от трансляций и поворотов системы координат является условие глобального равновесия внешних сил:

$$\int_V P_i^V \delta R_i^0 dV + \int_F P_i^F \delta R_i^0 dF = \left[ \int_V P_i^V dV + \int_F P_i^F dF \right] \delta R_i^0 = 0 \quad (6.2)$$

а также условие глобального равновесия моментов внешних сил:

$$\begin{aligned} & \int_V P_i^V \delta \Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} dV + \int_F P_i^F \delta \Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} dF = \\ & = \left[ \int_V P_i^V (z_n - z_n^0) e_{inm} dV + \int_F P_i^F (z_n - z_n^0) e_{inm} dF \right] \delta \Omega_m^0 = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Условия (6.2), (6.3) являются условиями глобального равновесия внешних сил и моментов внешних сил, а по построению являются условиями инвариантности работы внешних сил относительно трансляции и поворотов исходной системы координат.

В результате, принцип возможных перемещений (6.1) может быть записан только относительно вариаций “упругих” перемещений (см (4.5))

$$r_i = \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j$$

зависящих от деформаций и не зависящих от трансляции и поворота системы координат:

$$\int_V P_i^V \delta r_i dV + \int_F P_i^F \delta r_i dF - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad (6.4)$$

Система кинематических связей (4.6) может быть представлена в виде обобщенных формул Чезаро и уравнений совместности Сен-Венана, которые являются условиями существования квадратур для уравнений совместности Папковича относительно псевдовектора локальных поворотов и тензора поворотов (см (4.5)):

$$\begin{aligned} r_i &= \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \\ \varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Введем обобщенные формулы Чезаро в (6.5) как связи на векторе неопределенных множителей Лагранжа  $\Lambda_i = \Phi_{i,kk}$ :

$$\begin{aligned} & \delta \int_V \Phi_{i,ll} \left[ r_i - \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \right] dV = \\ & = \int_V \left\{ \Phi_{i,ll} \delta \left[ r_i - \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \right] \right\} + \\ & + \left[ r_i - \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \right] \delta \Phi_{i,ll} \Big\} dV = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Возьмем по частям второй интеграл в (6.6), содержащий вариацию формул Чезаро:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \Phi_{i,ll} \delta \left\{ r_i - \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \right\} dV = \\
 & = \int_V [\Delta \Phi_i \delta r_i + (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k} \delta_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}] dV - \\
 & - \int_F [\Phi_{i,j} n_j \delta r_i + (\Phi_j n_i - \Phi_k n_k \delta_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}] dF + \int_F \Phi_i n_l \delta \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i}) dx_j dF \\
 & \int_F \Phi_i n_l \delta \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i}) dx_j dF = \int_F \Phi_i \delta \left[ n_l \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i}) dx_j \right] dF = - \int_F \Phi_i n_j e_{ijk} \delta \Omega_k dF
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

При выводе (6.7) принято во внимание, что имеет место равенство  $e_{ijk} \Omega_r = e_{ijr} \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i}) dx_j$ , полученное с учетом свойств тензора Леви-Чивита (2.9).

Дополнительно следует учесть и кинематические связи между компонентами тензора деформаций определяемые уравнениями совместности Сен-Венана. Используя тензор множителей Лагранжа  $\Lambda_{pq}$

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_V \Lambda_{pq} \varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} dV = \\
 & = \int_V [\Lambda_{pq} \delta \varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} + \varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} \delta \Lambda_{pq}] dV
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Принцип возможных перемещений (6.4), запишем с учетом связей (6.7) и (6.8), что обеспечивает независимость всех кинематических переменных. Используя технику интегрирования по частям, в случае гладкой поверхности можно получить следующее вариационное равенство:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left\{ (\Delta \Phi_i + P_i^V) \delta r_i + (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k} \delta_{ij} + \Lambda_{pq,mn} e_{jmp} e_{inq} - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij} + \right. \\
 & + \left. \left[ r_i - \int_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \right] \delta \Phi_{i,ll} + \varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} \delta \Lambda_{pq} \right\} dV + \\
 & + \int_F \{ (P_i^F - \Phi_{i,j} n_j) \delta r_i - [(\Phi_j n_i - \Phi_k n_k \delta_{ij}) + \Psi_{ijpq}(\Lambda_{pq})] \delta \varepsilon_{ij} \} dF = 0
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

где  $\Psi_{ijpq}(\Lambda_{pq})$  некоторый оператор от тензор-функции напряжений Сен-Венана, вид которого для краткости не расшифровывается.

Требование стационарности вариационной формы (6.9) полностью определяет вектор-функцию  $\Phi_i$ , тензор второго ранга  $\Lambda_{pq}$ -функцию напряжений Сен-Венана, позволяет записать уравнения, связывающие симметричный тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  с функцией напряжений Сен-Венана  $\Lambda_{pq}$  и дает краевую задачу на функцию напряжений  $\Lambda_{pq}$ .

Действительно, требование стационарности линейной вариационной формы (6.9) приводит к шести уравнениям, устанавливающим связь между напряжениями и компонентами тензора неопределенных множителей Лагранжа:

$$\sigma_{ij} = (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k} \delta_{ij}) + \Lambda_{pq,mn} e_{jmp} e_{inq} \tag{6.10}$$

трем формулам Чезаро:

$$r_i - \int_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j = 0$$

и шести уравнениям совместности Сен-Венана:

$$\varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} = 0$$

Из (6.9) также следует, что вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\Phi_i$  определяется как решение векторной задачи Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_i + P_i^V &= 0 \\ \int_F (P_i^F - \Phi_{i,k} n_k) \delta R_i dF &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Зависимость тензора напряжений от тензора неопределенных множителей Лагранжа  $\Lambda_{ij}$  в соответствии с (6.10) такова, что однородные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Действительно, полагаем, что

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{pq,mn} e_{jmp} e_{inq}$$

Тогда нетрудно убедиться, что выполняются тождественно и однородные уравнения равновесия уравнения

$$\sigma_{ij,j} = \Lambda_{pq,jmn} e_{jmp} e_{inq} \equiv 0$$

Таким образом, следуя определению функций напряжений, компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа  $\Lambda_{ij}$  могут служить функциями напряжений Сен-Венана. Нетрудно убедиться, что если следовать вариационному равенству (6.9) и определять связь напряжений с функциями напряжений равенствами (6.10), то будут тождественно удовлетворяться и неоднородные уравнения равновесия. Достаточно учесть равенства (6.11). При этом, вне зависимости от выбора уравнений закона Гука, шесть компонент тензора функций напряжений Сен-Венана  $\Lambda_{ij}$  будут удовлетворять соответствующим шести уравнениям совместности Сен-Венана, записанных относительно  $\Lambda_{ij}$  с правыми частями, выраженными через вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\Phi_i$ . Это векторное поле, так же, как и в предыдущем случае, определяется краевой задачей Неймана (6.11) и всегда может быть построено.

В качестве примера рассмотрим случай, когда связь между напряжениями и деформациями определяется классическими уравнениями закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{pq} = C_{pqij}^{-1} \sigma_{ij}$$

Подставив деформации, выраженные через напряжения, в уравнения совместности Сен-Венана, получим уравнения Бельтрами–Митчелла:

$$C_{ijab}^{-1} \sigma_{ab,mn} e_{jmp} e_{inq} = 0$$

Подставив в уравнения Бельтрами–Митчелла вместо напряжений функции напряжений в соответствии с (6.10), получим систему шести дифференциальных уравнений (уравнений совместности Сен-Венана) записанных относительно шести компонентов тензора функций напряжений  $\Lambda_{ij}$ :

$$C_{ijabl}^{-1} (\Phi_{a,b} + \Phi_{b,a} - \Phi_{k,k} \delta_{ab}) + \Lambda_{gh,cd} e_{bcg} e_{adh} \Lambda_{mn} e_{jmp} e_{inq} = 0$$

**7. О возможности введения трех функций напряжений.** Покажем, что не только компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа, с помощью которых вводятся уравнения совместности как кинематические связи, подпадают под определение

функций напряжений. Рассмотрим несимметричный в общем случае тензор напряжений и вариационное равенство, полученное для случая уравнений совместности Папковича.

Пусть объемные силы отсутствуют. В этом случае, из уравнений (5.4), (5.6) следует, что вектор–функция  $\sigma_i$  является гармонической

$$\Delta \sigma_i = \sigma_{i,kk} = 0 \quad (7.1)$$

Будем рассматривать несжимаемое тело. Нетрудно убедиться, что для случая несжимаемого тела векторная функция  $\sigma_i$  может рассматриваться как вектор–функция напряжений. Действительно, полагаем, что в (5.4), (5.5)  $\lambda_{mp} = 0$ . Тогда, следуя (5.15) имеем

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} \quad (7.2)$$

Для несжимаемого тела, в случае отсутствия объемных сил  $P_i^V = 0$  шаровой тензор напряжений является постоянной величиной в объеме тела. В результате, как нетрудно проверить, уравнение совместности Сен-Венана будет выполняться из-за того, что  $\sigma_i$  является гармонической функцией. В результате, вектор–функция  $\sigma_i$  обладает всеми свойствами функции напряжений, удовлетворяя уравнению равновесия по определению. Она также удовлетворяет уравнениям совместности Папковича (5.16). Более того, для вектор–функции напряжений (5.18) сформулирована краевая задача Неймана, которая является следствием принципа возможных перемещений (5.4) ( $P_i^V = 0$ ). По известной вектор–функции напряжений  $\sigma_i$  определяются и псевдовектор поворотов и вектор перемещений:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} C_{ijmn}^{-1} \sigma_{m,nk} e_{jkr} dx, \quad R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_z} [C_{ijmn}^{-1} \sigma_{m,n} - \Omega_k e_{ijk}] dx_j$$

Рассмотрим вновь случай несжимаемого тела и покажем, что для симметричного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  вектор–функция  $\Phi_i$  является функцией напряжений, если объёмные внешние силы отсутствуют. В соответствии с (6.11)  $\Phi_i$  является гармонической вектор–функцией. Тогда вектор–функция  $\Phi_i$  является вектор–функцией напряжений. Действительно, полагая  $\Lambda_{ij} = 0$  в соответствии с равенством (6.10) имеем следующую связь этой вектор–функции с тензором напряжений  $\sigma_{ij} = \Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k} \delta_{ij}$ . Нетрудно проверить, что при отсутствии объемных сил, когда шаровой тензор напряжений для несжимаемого тела, является постоянным в объеме тела, тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  удовлетворяет уравнениям совместности Сен-Венана в силу гармоничности  $\Phi_i$ . Таким образом, для несжимаемого тела в классической упругости, для симметричного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  имеется три функции напряжений – три компоненты вектор–функции  $\Phi_i$ .

Таким образом, в случае несжимаемого тела установлен класс явных решений  $\Phi_i$  задач теории упругости в напряжениях, если на поверхности тела заданы внешние силы. В классической теории это точное решение дается равенствами

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k} \delta_{ij} \\ \Delta \Phi_i + P_i^V &= 0 \\ \int_F (P_i^F - \Phi_{i,k} n_k) \delta R_i dF &= 0\end{aligned}$$

**8. Заключение.** Рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях. Первая – на основе уравнений совместности Папковича. Вторая – на основе уравнений совместности Сен-Венана. Показано, что формулы Чезаро в обеих постановках позволяют ввести вектор-функции в качестве вектора неопределенных множителей Лагранжа. Задачи на вектор-функции всегда отделяются и сводятся к векторной задаче Неймана. С другой стороны уравнения совместности, вводятся как связи между дисторсиями или деформациями с помощью техники неопределенных множителей Лагранжа – тензоров второго порядка. Эти тензоры подпадают под определение функций напряжений, так как определяют напряжения, тождественно удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия. В первой постановке, в случае уравнений совместности Папковича, тензор функций напряжений является несимметричным и обладает девятью компонентами. Во второй постановке, когда уравнениями совместности являются уравнения Сен-Венана, тензор функций напряжений является симметричным и обладает шестью компонентами. В обеих постановках число функций напряжений равно числу уравнений совместности. Показывается, что для случая несжимаемых тел, через вектор-функции могут быть введены три функции напряжений, которые определяют класс решений задач теории упругости при отсутствии объемных сил. Указываются конечные соотношения, которые при решении в напряжениях после определения функций напряжений позволяют найти деформации, псевдовектор поворотов и напряжения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-41-04404, выданного Институту прикладной механики РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozak I, Szeidl Gy.* Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions Part I: Derivation from the Principle of Virtual Work // *Technische Mechanik.* 1996. V. 16. № 3. P. 147–168.
2. *Maxwell J.C.* On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces // *Trans. Roy. Soc. Edinburgh.* 1870. V. 26. № 1. P. 1–40.  
<https://doi.org/10.1017/S0080456800026351>
3. *Morera G.* Soluzione generale delle equazioni indefinite dell equilibrio di un corpo continuo // *Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.* 1892. V. 5. № 1/1. P. 137–141.
4. *Beltrami E.* Osservazioni sulla Nota precedenti // *Atti Reale Accad. naz. Lincei.* 1982. № 5. P. 141–142.
5. *Günther W.* Spannungsfunktionen und Vertraglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1954. № 6. P. 207–219.
6. *Dorn W.S., Schild A.* A converse of virtual work theorem for deformable solids // *Quart. Appl. Math.* 1956. V. 14. № 2. P. 209–213.  
<https://doi.org/10.1090/QAM/79418>
7. *Schaefer H.* Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers // *Z. Angew. Math. Mech.* 1953. № 33. P. 356–362.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19530331006>
8. *Gurtin M.E.* A generalization of the Beltrami stress functions // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1963. № 13. P. 321–329.  
<https://doi.org/10.1007/BF01262700>
9. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* The number of independent compatibility equations in the mechanics of deformable solids // *J. Appl. Math. Mech.* 2004. V. 68. № 6. P. 1043–1048.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.015>

10. *Pobedrya B.E.* Static problem in stresses // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2003. № 3. P. 61–67.
11. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium // Rus. J. Math. Phys. 2015. V. 22. № 1. P. 6–8.  
<https://doi.org/10.1134/S1061920815010021>
12. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity // Handbuch der Physik, Festkörpermechanik. В.: Springer-Verlag, 1972. P. 54–59.
13. *Остросаблин Н.И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // ПМТФ. 1997. Т. 7. № 5. С. 136–145.
14. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Об одной аналогии между уравнениями теории упругости и общей теории относительности // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 143–154.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921030120>

УДК 531.36

**ДИНАМИКА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА  
С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА**© 2022 г. Ю. Д. Селюцкий<sup>a,\*</sup><sup>a</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 09.09.2021 г.

После доработки 09.11.2021 г.

Принята к публикации 13.12.2021 г.

Рассмотрена динамика аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса. Исследована устойчивость положения равновесия “по потоку”. В частности, найдены условия на параметры, при которых увеличение скорости потока приводит к стабилизации этого равновесия. Кроме того, показано, что при определенных условиях характер устойчивости меняется три раза, когда коэффициент демпфирования спиральной пружины, установленной в точке подвеса, изменяется от нуля до бесконечности. Получены аппроксимационные формулы для циклов, существующих в системе, в предположении, что их амплитуды малы. Проведено численное моделирование динамики системы. Даны оценки коэффициента, характеризующего эффективность преобразования мощности потока с помощью рассматриваемого маятника. Продемонстрирована немонотонная зависимость этого коэффициента от расстояния между центром масс маятника и точкой подвеса, а также от скорости потока.

*Ключевые слова:* колебания, устойчивость, цикл, аэроупругость, аэродинамический маятник

DOI: 10.31857/S0572329922040110

**1. Введение.** Аэроупругие системы с одной поступательной и одной вращательной степенями свободы привлекают к себе внимание исследователей в течение достаточно длительного времени. Интерес к ним связан, в частности, с тем, что они позволяют смоделировать явление флаттера крыла. Изучению этого эффекта посвящено огромное количество работ, как классических (в частности, [1–3]), так и новых (например, [4–6]).

С точки зрения динамики летательных аппаратов самовозбуждающиеся колебания, возникающие в рамках флаттера, считают нежелательными, поскольку они могут привести к износу и разрушению конструкции. В то же время, автоколебания (в том числе, и флаттер) можно рассматривать и в другом ключе: как способ преобразования энергии потока в полезные формы.

Один из первых патентов на ветроэнергетическую установку, использующую явление флаттера, был подан в 1924 году [7]. В работах [8] и [9] также изучались системы подобного типа и отмечено, что они обладают достаточно хорошим потенциалом с точки зрения выработки энергии. В [10] проанализированы динамика и эффективность (в терминах вырабатываемой мощности) колеблющегося крыла в потоке с линейным сдвигом и даны оценки влияния положения центра масс.

Достаточно подробный обзор ветроэнергетических установок колебательного типа, в которых рабочие элементы совершают флаттерные колебания, представлен в статьях [11] и [12].

Энергию колебаний аэроупругой системы в конечном счете требуется преобразовать в электричество. Использовать для этого обычные электрогенераторы, по-видимому, нецелесообразно, поскольку для этого потребуется преобразовывать колебания во вращение ротора генератора, что связано с дополнительными потерями энергии. Поэтому активно изучается возможность применения пьезоэлементов. В [13] предложена модель пьезоаэроупругой системы и проведено экспериментальное и теоретическое исследование ее динамики. В статье [14] исследованы колебания консольно закрепленной упругой балки с прикрепленными на ней пьезоэлектрическими пластинками и даны оценки критической скорости потока. В [15] рассмотрена миниатюрная пьезоэлектрическая балка, которая может колебаться поперек набегающего потока. В [16] изучено влияние нагрузочного электрического сопротивления и нелинейной жесткости пружин крепления на характеристики предельных циклов в пьезоэлектрической флаттерной системе.

При обсуждении флаттерных колебаний предполагается, что ось вращения лежит на хорде крыла. Влияние ее положения на характеристики предельных циклов исследовано, в частности, в [17]. Однако интересно проанализировать случай, когда эта ось расположена вне крыла. Такую систему можно рассматривать как аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса.

Систематическое исследование поведения аэродинамического маятника с фиксированной точкой подвеса проведено, в частности, в [18, 19]. В то же время, можно ожидать, что упругое закрепление точки подвеса и ее расположение вне хорды крыла приведет к возникновению новых эффектов, которые не наблюдались ни в динамике аэродинамического маятника, ни в динамике обычных флаттерных систем.

В настоящей работе рассматривается аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса. Исследуется устойчивость “флюгерного” положения равновесия и периодические режимы, возникающие в этой системе. Обсуждается возможность использования этого объекта в качестве рабочего элемента ветроэнергетической установки. При этом механизм отбора энергии потока моделируется демпфированием в пружине крепления. Исследовано влияние параметров системы на амплитуды и частоты колебаний, возникающих в системе, а также на величину вырабатываемой мощности.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из тонкого крыла с симметричным профилем  $AB$ , прикрепленного к жесткому стержню  $O_1A$  таким образом, что хорда крыла параллельна стержню (рис. 1). Предположим, что центр масс  $G$  системы лежит на прямой  $O_1B$ . Стержень вместе с крылом может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $O_1$ , причем данная точка может перемещаться вдоль некоторой неподвижной оси  $OY$ , перпендикулярной этой оси.

Пусть система помещена в горизонтальный стационарный поток среды, скорость которого  $V$  перпендикулярна оси  $OY$ .

Будем считать, что маятник находится в упругом закреплении, которое будем моделировать с помощью пружины растяжения/сжатия и спиральной пружины (см. рис. 1). Будем считать, что спиральная пружина не напряжена, когда державка  $O_1A$  направлена вдоль скорости потока.

Введем неподвижную систему координат  $OXY$ , начало которой поместим в точку, в которой пружина растяжения/сжатия не деформирована, а ось абсцисс направим вдоль скорости набегающего потока.

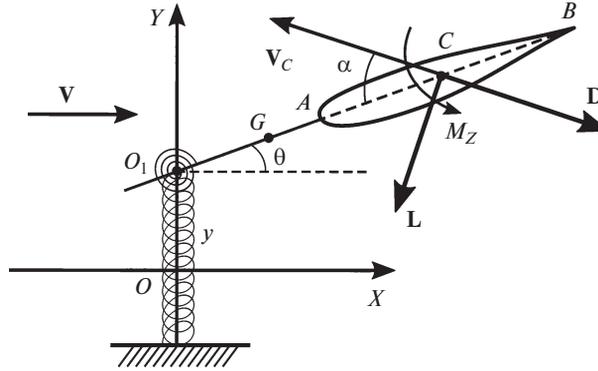


Рис. 1. Аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса.

Очевидно, рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. Ее положение будем характеризовать двумя обобщенными координатами:  $y$  – координата точки  $G$  и  $\theta$  – угол между стержнем  $O_1A$  и скоростью потока.

Предположим, что поток действует только на крыло, и воспользуемся квазистатическим подходом для описания этого воздействия. Будем считать, что оно сводится к подъемной силе  $L$ , силе лобового сопротивления  $D$  (обе они приложены в середине  $C$  хорды), а также к моменту  $M_z$  относительно этой точки. Направления силы лобового сопротивления и подъемной силы определяются воздушной скоростью  $V_C$  точки  $C$ , т.е. ее скоростью относительно набегающего потока: вектор  $D$  направлен против  $V_C$ , а вектор  $L$  составляет с ним прямой угол. Как и в [18], будем считать, что величины аэродинамических сил и момента имеют следующую структуру:

$$L = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha), \quad D = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha), \quad M_z = \frac{\rho S}{2} V_C^2 b C_m(\alpha) \quad (2.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $S = lb$  – площадь крыла ( $l$  – размах крыла, а  $b$  – хорда, т.е. расстояние  $AB$ ),  $\alpha$  – эффективный угол атаки, под которым будем понимать угол между воздушной скоростью и хордой крыла,  $C_l$ ,  $C_d$  и  $C_m$  – безразмерные коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и аэродинамического момента, соответственно. Как и в [20, 21], будем считать, что эти коэффициенты зависят только от угла атаки, и зависимости эти такие же, как и в случае крыла, закрепленного в стационарном потоке. Отметим, что эти зависимости являются нелинейными. В литературе представлены соответствующие данные для профилей различной формы, полученные как в результате экспериментов с круговыми обдувками крыльев, так и расчетов, (например, [22, 23]).

Чтобы связать угол атаки и воздушную скорость с обобщенными координатами и скоростями системы, запишем кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} V_C \cos \alpha &= V \cos \theta - \frac{dy}{dt} \sin \theta \\ V_C \sin \alpha &= V \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta + r \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $r$  обозначает расстояние  $O_1C$ .

Тогда уравнения движения системы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - m \xi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta + h \frac{dy}{dt} + \\
& + K_y(y)y = -L \cos(\alpha - \theta) - D \sin(\alpha - \theta) \quad (2.3) \\
& m(r_0^2 + \xi^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta + \eta \frac{d\theta}{dt} + K_\theta(\theta)\theta = M_z - Lr \cos \alpha - Dr \sin \alpha
\end{aligned}$$

Здесь  $m$  – масса подвижных частей системы,  $r_0$  – радиус инерции крыла вместе со стержнем относительно центра масс  $G$ ,  $\xi$  – расстояние от точки подвеса до центра масс,  $K_y(y)$  – жесткость пружины растяжения/сжатия,  $K_\theta(\theta)$  – жесткость спиральной пружины;  $h$  и  $\delta$  – коэффициенты демпфирования, соответствующие линейному перемещению и вращению, соответственно. Будем считать, что пружина растяжения/сжатия обладает нелинейной жесткостью, а коэффициент жесткости спиральной пружины постоянен:

$$K_y(y) = k + k_3 y^2, \quad K_\theta(\theta) = \kappa \quad (2.4)$$

Величины  $k$ ,  $k_3$  и  $\kappa$  являются положительными.

Таким образом, в нашей системе имеется два источника нелинейности: аэродинамика и жесткость пружины растяжения/сжатия в креплении.

Чтобы уменьшить число параметров, введем безразмерное время  $\bar{t} = t\sqrt{k/m}$  и следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{y}{b}, \quad \bar{y}_{A,B} = \frac{y_{A,B}}{b}, \quad \bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{l} = \frac{l}{b}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{b}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{b}, \\
\bar{V} &= \frac{V}{U}, \quad \bar{V}_C = \frac{V_C}{U} \quad (2.5) \\
\bar{\kappa} &= \frac{\kappa}{kb^2}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{km}}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{b^2\sqrt{km}}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2m}, \quad k_3 = \frac{k_3 b^2}{k}, \quad U = b\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (2.4) и (2.5), безразмерные уравнения движения и кинематические соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + \bar{\xi} \frac{d^2 \theta}{d\bar{t}^2} \cos \theta - \bar{\xi} \left( \frac{d\theta}{d\bar{t}} \right)^2 \sin \theta + \bar{h} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{y} + \bar{k}_3 \bar{y}^3 = \\
& = -\mu \bar{V}_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) \quad (2.6) \\
& (\bar{r}_0^2 + \bar{\xi}^2) \frac{d^2 \theta}{d\bar{t}^2} + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} \cos \theta + \bar{\delta} \frac{d\theta}{d\bar{t}} + \bar{\kappa} \theta = \\
& = \mu \bar{V}_C^2 (C_m(\alpha) - \bar{r} C_l(\alpha) \cos \alpha - \bar{r} C_d(\alpha) \sin \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_C \cos \alpha &= \bar{V} \cos \theta - \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \sin \theta, \\
\bar{V}_C \sin \alpha &= \bar{V} \sin \theta + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \cos \theta + \bar{r} \frac{d\theta}{d\bar{t}} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Уравнения (2.6)–(2.7) образуют замкнутую систему.

Далее для упрощения записи будем опускать черту над безразмерными величинами и обозначать производную по безразмерному времени точкой.

**3. Положения равновесия и их устойчивость.** Теперь найдем положения равновесия  $\theta \equiv \theta_* = \text{const}$ ,  $y \equiv y_* = \text{const}$  нашей системы. Из (2.7) следует, что в равновесии  $\alpha = \theta_*$  и  $V_C = V$ . Следовательно, уравнения равновесия принимают вид

$$y_*(1 + k_3 y_*^2) = -\mu V^2 C_l(\theta_*), \quad \kappa \theta_* = \mu V^2 (C_m(\theta_*) - C_n(\theta_*)r) \quad (3.1)$$

Здесь  $C_n(\alpha) = C_l(\alpha) \cos \alpha + C_d(\alpha) \sin \alpha$  – так называемый коэффициент нормальной силы.

Для симметричного профиля  $C_l(\alpha)$  и  $C_m(\alpha)$  – нечетные функции, а  $C_d(\alpha)$  – четная и положительная при всех  $\alpha$ . Поэтому система имеет тривиальное равновесие  $y_* = 0$ ,  $\theta_* = 0$ .

Из статических экспериментов известно, что для тонких симметричных профилей  $|C_m(\alpha)/C_n(\alpha)| \leq 0.3$  для всех значений угла атаки, причем эта величина стремится к максимуму при  $\alpha \rightarrow 0$ . Кроме того,  $C_n(\alpha) \sin \alpha \geq 0$  при всех  $\alpha$ , и  $C_n(\alpha)$  обращается в нуль только при  $\alpha = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно, при выполнении условия

$$r > \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_m(\alpha)}{C_n(\alpha)} = \frac{C_m^\alpha}{C_n^\alpha} \quad (3.2)$$

где  $C_n^\alpha = dC_n/d\alpha|_{\alpha=0}$ ,  $C_m^\alpha = dC_m/d\alpha|_{\alpha=0}$ , знак выражения  $C_m(\theta_*) - C_n(\theta_*)r$  определяется знаком  $C_n(\theta_*)$ , а значит, второе уравнение (3.1) имеет единственный корень на интервале  $[-\pi, \pi]$ , а именно,  $\theta_* = 0$ . Таким образом, если державка достаточно длинная, то у системы имеется только одно положение равновесия на этом интервале. Однако следует отметить, что в случае, когда  $\kappa$  мало или  $V$  велико, имеются положения равновесия, в которых  $|\theta_*| > \pi$ . В частности, при  $\kappa = 0$  равновесиями будут все точки  $y_* = 0$ ,  $\theta_* = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

В дальнейшем мы будем считать, что условие (3.2) выполнено.

Исследованию влияния различных видов сил на устойчивость равновесия систем, в том числе, с двумя степенями свободы посвящено огромное количество работ (в частности, [24–26]). Однако, как нетрудно показать, аэродинамические силы вносят вклад сразу во все виды сил (диссипативные, гироскопические, потенциальные и позиционные неконсервативные), с чем связана определенная специфика аэроупругих систем.

Чтобы исследовать устойчивость тривиального равновесия, линеаризуем уравнения движения в его окрестности, учитывая кинематические соотношения. Получим:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\mu V C_n^\alpha + h)\dot{y} + y + \xi \ddot{\theta} + r\mu V C_n^\alpha \dot{\theta} + \mu V^2 C_l^\alpha \theta &= 0 \\ (r_0^2 + \xi^2)\ddot{\theta} + \xi \dot{y} + \kappa \theta + \delta \dot{\theta} + V\mu(C_n^\alpha r - C_m^\alpha)(V\theta + \dot{y} + r\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $C_l^\alpha = dC_l/d\alpha|_{\alpha=0}$ . Заметим, что  $C_n^\alpha = C_l^\alpha + C_{d0}$ , где  $C_{d0} = C_d(0) > 0$ . Для тонких профилей величины  $C_n^\alpha$ ,  $C_l^\alpha$  и  $C_m^\alpha$  положительны, а величина  $C_{d0}$  мала.

Характеристическое уравнение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_0^2 \lambda^4 + ((\zeta - C_n^\alpha \xi)(r - \xi)V\mu + r_0^2 C_n^\alpha V\mu + \delta + (r_0^2 + \xi^2)h)\lambda^3 \\ + ((\zeta - C_n^\alpha \xi)V^2\mu + \zeta hr\mu V + C_{d0}V^2\xi\mu + \delta C_n^\alpha V\mu + r_0^2 + \xi^2 + \kappa + \delta h)\lambda^2 \\ + (\zeta(C_{d0}V^2\mu + hV + r)\mu V + \kappa C_n^\alpha V\mu + \delta + h\kappa)\lambda + \zeta V^2\mu + \kappa = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $\zeta = C_n^\alpha r - C_m^\alpha$ . С учетом (3.2) имеем  $\zeta > 0$ .

Для того чтобы рассматриваемый маятник можно было использовать в качестве рабочего элемента ветроэнергетической установки, необходимо, чтобы он мог совершать автоколебания под действием аэродинамических сил. Поэтому ситуация, когда тривиальное равновесие асимптотически устойчиво, представляется нежелательной.

Достаточным условием асимптотической устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического полинома и третьего минора  $H_3$  матрицы Гурвица. Выражение для  $H_3$  в общем случае сравнительно громоздкое. Рассмотрим ситуацию, когда демпфирование отсутствует:  $\delta = h = 0$ . При этом

$$H_3 = \mu^4 C_{d0} \zeta (\zeta - C_n^\alpha \xi) (C_l^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + \zeta (r - \xi)) (V^2 - u_1) (V^2 - u_2)$$

$$u_1 = \frac{\zeta (C_n^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + C_m^\alpha \xi) - \kappa C_n^\alpha (\zeta - C_n^\alpha \xi)}{\mu C_{d0} \zeta (\zeta - C_n^\alpha \xi)},$$

$$u_2 = \frac{r(r_0^2 + \xi^2 - r\xi) - \kappa(r - \xi)}{\mu (C_l^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + \zeta (r - \xi))}$$

Пусть  $r < \xi$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . С учетом того, что  $C_{d0} = 1$ , получаем, что  $u_2 > 0$ . Нетрудно показать, что при  $V < \sqrt{u_2}$  третий минор Гурвица положителен. В данной ситуации все коэффициенты характеристического полинома также положительны, и равновесие асимптотически устойчиво. При  $V > \sqrt{u_2}$  имеет место неустойчивость.

Пусть  $\xi < r < \xi + r_0^2/\xi$  и  $r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . Если, кроме того,  $\kappa < r(r_0^2 + \xi^2 - r\xi)(r - \xi)^{-1}$ , то  $u_2 > 0$ , и, как и ранее, асимптотическая устойчивость имеет место при  $V < \sqrt{u_2}$ . Если  $\kappa$  больше этой величины, то  $u_2 < 0$ , и равновесие неустойчиво при всех положительных значениях скорости потока.

Пусть  $\xi < r < \xi + r_0^2/\xi$  и  $r > \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi > 0$ , и при малых  $\kappa$  имеем  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . Соответственно, в промежутке  $\min(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}) < V < \max(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$  имеет место неустойчивость, а вне него (при положительных  $V$ ) – место асимптотическая устойчивость. Таким образом, в этой ситуации увеличение скорости потока вначале приводит к потере устойчивости, но когда  $V$  превышает некоторое критическое значение, устойчивость восстанавливается.

Пусть  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . Если при этом  $u_2 > 0$ , то положение равновесия неустойчиво при  $V < \sqrt{u_2}$  и устойчиво при  $V > \sqrt{u_2}$ . Если же  $u_2 < 0$ , то положение равновесия неустойчиво при всех  $V$ .

Пусть  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $\xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha < r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha + r_0^2/(\xi + \kappa C_n^\alpha)$ . Тогда  $u_2 < 0$  и  $u_1 > 0$ . При  $V < \sqrt{u_1}$  имеет место неустойчивость, а при  $V > \sqrt{u_1}$  асимптотическая устойчивость.

Таким образом, при определенном выборе значений параметров тривиальное равновесие неустойчиво в области малых скоростей потока, а рост  $V$  приводит к стабилизации. Этот эффект может быть полезен с прикладной точки зрения, поскольку при больших скоростях ветра ветроэнергетические системы, как правило, требуется “останавливать”, чтобы избежать их разрушения вследствие чрезмерных нагрузок.

Пусть, наконец,  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $r > \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha + r_0^2/(\xi + \kappa C_n^\alpha)$ . Тогда  $u_2 < 0$  и  $u_1 < 0$ . В этой ситуации асимптотическая устойчивость имеет место при любых значениях скорости потока. Иными словами, увеличение расстояния от крыла до точки подвеса маятника ведет к стабилизации равновесия.

Обсудим теперь влияние демпфирования. Нетрудно показать, что в отсутствие потока тривиальное положение маятника асимптотически устойчиво, если  $\xi \neq 0$ ,  $\kappa \neq 0$  и хотя бы один из коэффициентов демпфирования не равен нулю. Соответственно, при

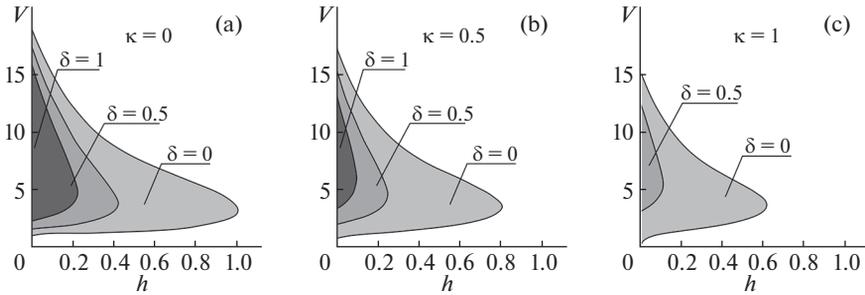


Рис. 2. Область неустойчивости на плоскости параметров  $(h, V)$  при разных значениях  $\delta$  и  $\kappa$ : (а)  $\kappa = 0$ ; (б)  $\kappa = 0.5$ ; (с)  $\kappa = 1$ .

выполнении этих условий асимптотическая устойчивость имеет место и при достаточно малых скоростях потока.

Выражение для  $H_3$  представляет собой кубический полином относительно как  $\delta$ , так и  $h$ , причем коэффициент при  $\delta^3$  имеет вид  $C_n^\alpha \mu V + h > 0$ , а коэффициент при  $h^3$  представляет собой выражение  $(\zeta \mu V^2 + \kappa)(rV\mu\zeta + \delta)(r_0^2 + \xi^2) > 0$ . Значит, при достаточно больших значениях  $\delta$  и/или  $h$  тривиальное равновесие, как и следовало ожидать, асимптотически устойчиво.

На рис. 2 изображена область неустойчивости тривиального равновесия на плоскости  $(h, V)$  при разных значениях  $\delta$  и  $\kappa$ . Для расчетов использованы следующие значения остальных безразмерных параметров:

$$r = 1, \quad \xi = 0.6, \quad r_0 = 0.8, \quad \mu = 0.1, \quad C_n^\alpha = 6.0, \quad C_m^\alpha = 1.5, \quad C_{d0} = 0.1$$

Видно, что эффект двукратного изменения характера устойчивости при увеличении скорости потока и стабилизации при больших значениях  $V$  сохраняется в некотором диапазоне значений коэффициентов демпфирования.

Увеличение жесткости спиральной пружины ведет к уменьшению области неустойчивости.

Вообще говоря, выражение  $H_3$ , рассматриваемое как полином относительно  $\delta$  или  $h$ , может иметь три действительных положительных корня. В таком случае характер устойчивости равновесия будет изменяться 3 раза при изменении соответствующего коэффициента демпфирования от нуля до бесконечности.

Это проиллюстрировано на рис. 3, где серым цветом показана область неустойчивости на плоскости  $(V, \ln \delta)$  при разных значениях  $\kappa$ . Пунктирными линиями отмечены значения скорости, соответствующие изменению характера устойчивости (бифуркации Андронова–Хопфа) при  $\delta = 0$ . Для расчетов использованы следующие значения:

$$\xi = 0.7, \quad r_0 = 0.3, \quad \mu = 0.01, \quad h = 0.1$$

Для остальных параметров приняты те же значения, что и ранее.

Видно, что можно выбрать значения параметров таким образом, что при увеличении  $\delta$  от нуля до бесконечности будет наблюдаться “чередование” характера устойчивости равновесия: неустойчивость при малых  $\delta$ , стабилизация при некотором увеличении  $\delta$ , дестабилизация при дальнейшем увеличении  $\delta$ , и, наконец, снова стабилизация. Этот эффект наиболее отчетливо выражен на рис. 3, б.

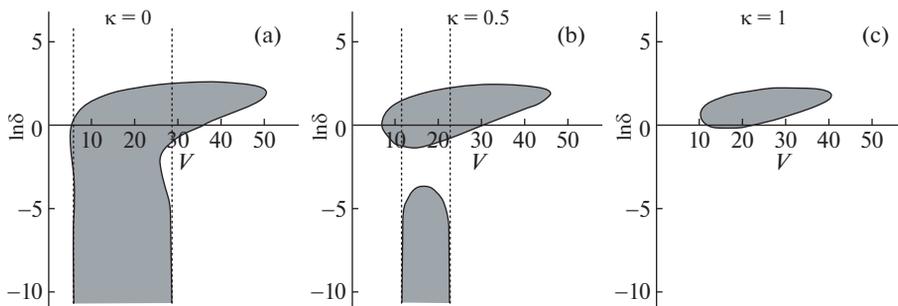


Рис. 3. Область неустойчивости на плоскости параметров  $(V, \ln \delta)$  при разных значениях  $\kappa$ : (a)  $\kappa = 0$ ; (b)  $\kappa = 0.5$ ; (c)  $\kappa = 1$ .

Возможна также ситуация, когда  $H_3$  обращается в нуль при двух положительных значениях  $\delta$ . В частности, на рис. 3, с тривиальное равновесие при  $\delta = 0$  асимптотически устойчиво при всех скоростях потока. Однако если  $V$  не слишком мало, то увеличение  $\delta$  приводит к дестабилизации положения равновесия. Устойчивость восстанавливается, только когда  $\delta$  становится больше некоторого критического значения, зависящего от скорости потока.

Надо отметить, что и при маленьких, и при больших значениях  $V$  асимптотическая устойчивость имеет место при всех  $\delta$ .

Найти физически осмысленные значения параметров системы, при которых подобные эффекты наблюдались бы при изменении коэффициента  $h$ , не удалось.

**4. Периодические решения.** Исследуем периодические решения, существующие в рассматриваемой системе. Будем считать, что спиральная пружина и трение в шарнире отсутствуют:  $\kappa = \delta = 0$ . Кроме того, предположим, что пружина растяжения/сжатия имеет характеристику с упрочнением, так что коэффициент  $k_3$  велик:  $\varepsilon = 1/\sqrt{k_3} \ll 1$ .

Будем искать периодические решения вида

$$y = \varepsilon y_1 \sin \omega t + o(\varepsilon), \quad \theta = \varepsilon \theta_1 \sin \omega t + \varepsilon \theta_2 \cos \omega t + o(\varepsilon) \quad (4.1)$$

Для поиска периодических решений автономных динамических систем существует множество методов (например, [27]). Мы воспользуемся методом гармонического баланса.

Из статических экспериментов известно, что в области малых углов атаки имеют место следующие соотношения:  $C_l(\alpha) = C_l^\alpha \alpha$ ,  $C_m(\alpha) = C_m^\alpha \alpha$ ,  $C_d(\alpha) = C_{d0} + C_{d2} \alpha^2$ .

Тогда, подставив (4.1) в уравнения (2.6) и (2.7) и оставляя только члены первого порядка малости, получим следующие уравнения для неизвестных  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & -(\xi \theta_1 + y_1) \omega^2 - C_n^\alpha \mu V \omega r \theta_2 + \mu V^2 C_l^\alpha \theta_1 + \frac{3}{4} y_1^3 + y_1 = 0 \\ & -\xi \theta_2 \omega^2 + (\mu V r C_n^\alpha \theta_1 + (\mu V C_n^\alpha + h) y_1) \omega + \mu V^2 C_l^\alpha \theta_2 = 0 \\ & -((r_0^2 + \xi^2) \theta_1 + \xi y_1) \omega^2 - (\mu \zeta V r + \delta) \theta_2 \omega + (\zeta \mu V^2 + \kappa) \theta_1 = 0 \\ & -(r_0^2 + \xi^2) \theta_2 \omega^2 + (\mu \zeta V r + \delta) \theta_1 \omega + \mu V \zeta y_1 \omega + (\zeta \mu V^2 + \kappa) \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.2) получаем формулу для частоты:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B_2^2 \pm 4B_4B_0}{2B_4}}$$

$$B_4 = (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi) V \mu \chi + hL^4 + \delta \xi^2$$

$$B_2 = (hr^2 \zeta \mu - 2hL^2 - V \mu (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi)) \zeta \mu V^2 + (C_n^\alpha \mu V + h)(\delta^2 + Vr \zeta \mu \delta - 2L^2 \kappa) + \quad (4.3)$$

$$+ V \zeta \mu \delta r h - V^2 \xi \mu \delta C_n^\alpha + \mu V \xi \kappa (\zeta + r C_n^\alpha) + V \mu C_{d0} (\delta V \xi - \chi \mu V^2 \zeta)$$

$$B_0 = (h \zeta \mu V^2 + \kappa (C_n^\alpha \mu V + h) + \zeta \mu^2 V^3 C_{d0}) (\zeta \mu V^2 + \kappa)$$

Здесь

$$\chi = r_0^2 + \xi^2 - r \xi, \quad L = \sqrt{r_0^2 + \xi^2}$$

Таким образом, в системе может существовать до 2 циклов данного типа.

Величины  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  для периодического решения, отвечающего корню  $\omega$  уравнения (4.2), имеют следующий вид:

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} (\omega^2 - 1 + (C_n^\alpha \mu^2 V^2 - \omega^2 \xi) (\omega^2 \xi (L^2 \omega^2 - \mu V^2 \zeta - \kappa) + \omega^2 V \zeta \mu \delta) \Delta^{-1} +$$

$$+ C_n^\alpha \mu \omega^4 V r (\chi \mu V \zeta - \delta \xi) \Delta^{-1} - \mu^2 V^2 \zeta \omega^2 r (\omega^2 \xi \zeta + C_n^\alpha \kappa) \Delta^{-1} -$$

$$- \omega^2 V^2 C_{d0} (V \mu \zeta (\mu r V \zeta + \delta) - V^2 \mu \zeta \xi + \xi (L^2 \omega^2 - \kappa) \Delta^{-1})^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\theta_1 = -y_1 \omega^2 \Delta^{-1} (\mu^2 r V^2 \zeta^2 + L^2 \omega^2 \xi - \xi (\mu V^2 \zeta + \kappa) + V \mu \zeta \delta)$$

$$\theta_2 = y_1 \omega \Delta^{-1} (V \mu \chi \zeta \omega^2 - \xi \delta \omega^2 - \mu V \zeta (\mu V^2 \zeta + \kappa))$$

$$\Delta = (\delta + \mu r V \zeta)^2 \omega^2 + (L^2 \omega^2 - \mu V^2 \zeta - \kappa)^2$$

Вообще говоря, не каждой величине  $\omega$ , определяемой выражением (4.3), соответствует периодический режим, даже если она положительна: необходимо еще, чтобы величина  $y_1$  была действительной и отличной от нуля.

Рассмотрим случай, когда спиральная пружина отсутствует ( $\kappa = \delta = 0$ ) и демпфирование  $h$  равно нулю, решения уравнение (4.3) имеют следующий вид:

$$\omega_1 = V \sqrt{\frac{\mu \zeta}{\chi}}, \quad \omega_2 = V \sqrt{\frac{C_{d0} \zeta}{C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi}}$$

Формулы (4.4) при этом упрощаются:

$$\omega = \omega_1:$$

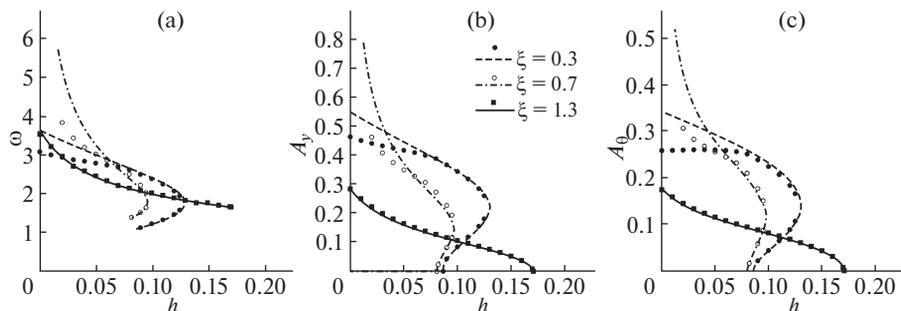
$$y_{11} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{V^2 \mu (\zeta (r - \xi) + \chi C_l^\alpha)}{r \chi}} - 1, \quad \theta_1 = -\frac{y_{11}}{r}, \quad \theta_2 = 0$$

$$\omega = \omega_2: \quad y_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-1 + C_{d0} V^2 \mu \frac{\zeta - C_n^\alpha \xi}{C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi}},$$

$$\theta_1 = -y_{12} C_{d0} \frac{\zeta r \mu (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi) - \xi (C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)}{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)^2 + \zeta r \mu C_{d0} (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi)},$$

$$\theta_2 = -y_{12} \frac{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi + C_{d0} r \xi) \sqrt{C_{d0} \mu \zeta (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi)}}{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)^2 + \zeta r \mu C_{d0} (C_n^\alpha \chi + C_m^\alpha \xi)}$$

Как отмечалось выше, величина  $C_{d0}$  для тонких крыльев мала. Поэтому подкоренное выражение в формуле для  $y_{12}$  отрицательно. Соответственно, в системе существу-



**Рис. 4.** Эволюция характеристик предельных циклов при изменении коэффициента  $h$  при разных значениях  $\xi$ : а) частота цикла; (b) амплитуда по  $y$ ; (c) амплитуда по  $\theta$ . Точками изображены результаты численного интегрирования, линиями – расчет по аппроксимационным формулам.

ет только один цикл указанного типа. Разумеется, эта ситуация сохраняется и в случае, когда коэффициент  $h$  отличен от нуля, но достаточно мал.

Проведем численное моделирование динамики системы, чтобы изучить поведение предельных циклов в более широком диапазоне значений параметров. Для расчетов выберем следующие значения параметров:

$$r = 1.6, \quad n_0 = 0.8, \quad \kappa = \delta = 0, \quad k_3 = 50$$

Эволюция амплитуд  $A_\theta$  (по углу) и  $A_y$  (по положению), а также частоты  $\omega$  цикла при изменении коэффициента демпфирования в пружине растяжения/сжатия при различных значениях параметра  $\xi$  представлена на рис. 4. Кружками и квадратами изображены результаты, полученные путем численного интегрирования уравнений движения (2.6)–(2.7). Сплошными и пунктирными линиями представлены результаты расчетов по формулам (4.3)–(4.4).

Видно, что в тех случаях, когда амплитуды циклов не слишком велики, качество аппроксимации достаточно хорошее (причем как для притягивающих, так и для отталкивающих циклов).

При всех рассмотренных значениях  $\xi$  положение равновесия неустойчиво при  $h \in [0, h_*)$ . При достаточно больших расстояниях  $\xi$  от центра масс до оси вращения бифуркация Андронова–Хопфа, происходящая при  $h = h_*$ , является суперкритической. В системе наблюдается только один цикл (притягивающий) указанного типа. При уменьшении  $\xi$  эта бифуркация становится субкритической. Появляется интервал значений  $h$ , в котором существует притягивающий и отталкивающий циклы.

В определенном диапазоне  $\xi$  (и, в частности, при  $\xi = 0.7$ ) в области малых  $h$  цикла рассматриваемого типа не существует. Вместо этого в системе наблюдаются два симметричных относительно начала координат притягивающих цикла. Ни при  $\xi = 1.3$ , ни при  $\xi = 0.3$  эти циклы не наблюдаются. Этот эффект требует отдельного исследования.

**5. Оценка мощности.** В качестве оценки эффективности данной системы как устройства преобразования энергии потока представляется естественным использовать безразмерный коэффициент мощности. Предположим, что в системе существует притягивающий цикл с периодом  $T$ . Как и в работе [28], определим коэффициент мощности для этого предельного цикла как отношение мощности, вырабатываемой системой, к мощности потока, проходящей через сечение, ометаемое крылом в ходе

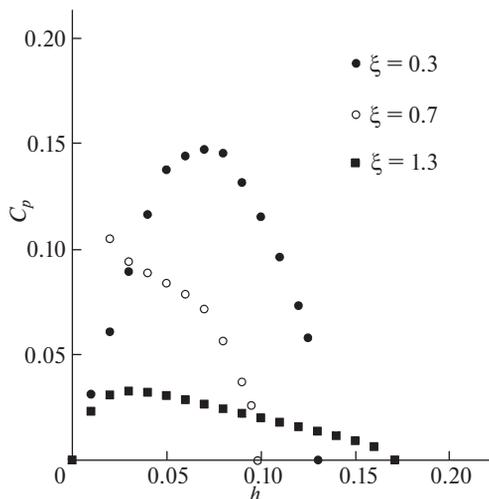


Рис. 5. Зависимость коэффициента мощности от  $h$  при разных значениях  $\xi$ .

колебаний. В терминах введенных выше безразмерных величин получаем следующую формулу:

$$C_p = \frac{P}{Y_w V^3}$$

Здесь  $P$  — безразмерная мощность, а  $Y_w$  — максимум на множестве ординат всех точек крыла, взятый на периоде, т.е.

$$Y_w = \max \left( \max_{\tau \in [0, T)} (y + 0.5 \sin \theta), \max_{\tau \in [0, T)} (y - 0.5 \sin \theta) \right)$$

В ряде случаев (например, если система сопряжена с линейным генератором) можно считать, что полезная мощность, вырабатываемая генератором, определяется силой вязкого трения в линейной пружине. Тогда для мощности, вырабатываемой на рассматриваемом цикле, имеет место следующая формула:

$$P = \frac{h}{T} \int_0^T \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dt$$

Зависимость коэффициента мощности от коэффициента демпфирования  $h$  при различных значениях  $\xi$  и  $V = 2$  представлена на рис. 5. Видно, что для каждого  $\xi$  существует некоторое “оптимальное” значение демпфирования  $h$ , при котором  $C_p$  достигает максимума.

На рис. 6 проиллюстрировано влияние положения центра масс на максимальное значение  $C_p^{\max}$  коэффициента мощности. Расчеты выполнены при безразмерной скорости потока  $V = 2$ . Зависимость  $C_p$  от  $\xi$  немонотонная, и выбор величины  $\xi$  может существенно повлиять на вырабатываемую мощность.

На рис. 7 приведена зависимость максимума  $C_p$  от скорости потока. Расчеты проведены при  $\xi = 0.4$ . Интересно, что зависимость максимума коэффициента мощности

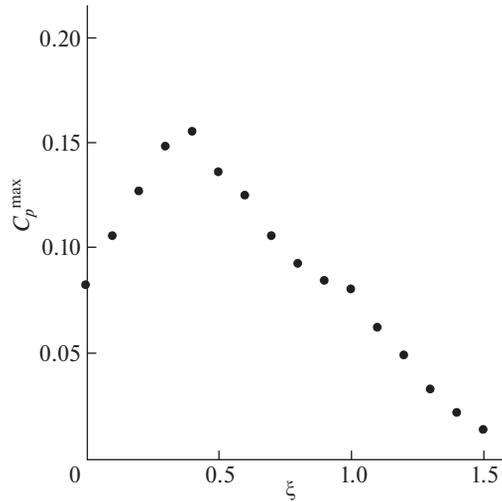


Рис. 6. Зависимость максимума коэффициента мощности от  $\xi$ .

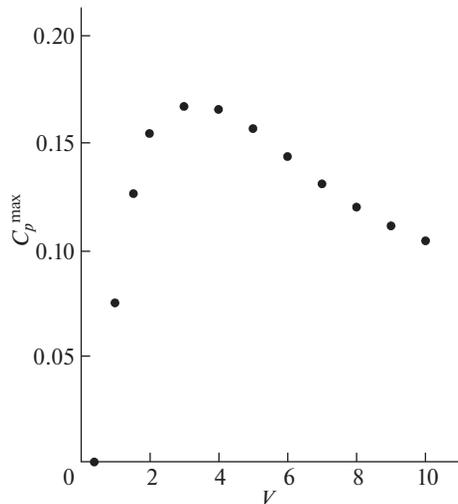


Рис. 7. Зависимость максимума коэффициента мощности от скорости потока.

от скорости потока также немонотонная: при малых значениях  $V$  циклы отсутствуют, с ростом скорости величина  $C_p^{\max}$  возрастает, а затем начинает убывать.

**6. Заключение.** Рассмотрена динамика аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса. Построены области устойчивости положения равновесия, в котором маятник ориентирован по потоку, в пространстве параметров. В частности, найдены условия на параметры, при которых увеличение скорости потока приводит к стабилизации равновесия. Кроме того, показано, что при определенных условиях характер устойчивости этого равновесия меняется три раза при изменении

коэффициента демпфирования спиральной пружины, установленной в точке подвеса, от нуля до бесконечности.

Получены аппроксимационные формулы для циклов, существующих в системе. Проведено численное моделирование динамики системы. Даны оценки коэффициента, характеризующего мощность, которая может быть отобрана у потока с помощью данной механической системы. Продемонстрирована немонотонная зависимость этого коэффициента от расстояния между центром масс и точкой подвеса, а также от скорости потока.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Theodorsen T.* General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Report 496 // NASA Technical Reports. Ames Res. Center Classical Aerodyn. Theory., 1935. P. 291–311.
2. *Гроссман Е.П.* Флаттер // Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 283. М.: ЦАГИ, 1937.
3. *Келдыш М.В.* Вибрация в воздушном потоке крыла с подкосами // Труды ЦАГИ. 1938. Вып. 357. М.: ЦАГИ, 1938.
4. *Gilliatt H.C., Strganac T.W., Kurdila A.J.* An Investigation of Internal Resonance in Aeroelastic Systems // *Nonlin. Dyn.* 2003. V. 31. P. 1–22.  
<https://doi.org/10.1023/A:1022174909705>
5. *Lokatt M.* Aeroelastic flutter analysis considering modeling uncertainties // *J. Fluids Struct.* 2017. V. 74. P. 247–262.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.06.017>
6. *Dos Santos L.G.P., Marques F.D.* Nonlinear aeroelastic analysis of airfoil section under stall flutter oscillations and gust loads // *J. Fluids Struct.* 2021. V. 102. P. 103250.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103250>
7. *Thornycroft J.I.* Wind motor. US Patent № 1490787. 1924.
8. *McKinney W., DeLaurier J.* *Wingmill: An Oscillating-Wing Windmill* // *J. Energy.* 1981. V. 5. № 2. P. 109–115.  
<https://doi.org/10.2514/3.62510>
9. *Jones K.D., Davids S.T., Platzer M.F.* Oscillating-wing power generation // 3<sup>rd</sup> ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conf., USA. 1999. P. 1–6.
10. *Zhu Q.* Energy harvesting by a purely passive flapping foil from shear flows // *J. Fluids Struct.* 2012. Vol. 34. P. 157–169.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.05.013>
11. *McCarthy J.M., Watkins S., Deivasigamani A., John S.J.* Fluttering energy harvesters in the wind: A review // *J. Sound Vibr.* 2016. V. 361. P. 355–377.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.043>
12. *Abdelkefi A.* Aeroelastic energy harvesting: a review // *Int. J. Eng. Sci.* 2016. V. 100. P. 112–135.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.006>
13. *Erturk A., Vieira W.G.R., De Marqui C., Inman D.* On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 96. P. 184103.  
<https://doi.org/10.1063/1.3427405>
14. *Bryant M., Garcia E.* Modeling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester // *ASME J. Vib. Acoust.* 2011. V. 133. № 1. P. 011010.  
<https://doi.org/10.1115/1.4002788>
15. *Li S., Yuan J., Lipson H.* Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering // *J. Appl. Phys.* 2011. V. 109. № 2. P. 026104.  
<https://doi.org/10.1063/1.3525045>
16. *Abdelkefi A., Ghommem M., Nuhait A., Hajj M.R.* Nonlinear analysis and enhancement of wing-based piezoaeroelastic energy harvesters // *J. Sound Vibr.* 2014. V. 333. P. 166–177.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.032>

17. *Strganac T.W., Ko J., Thompson D.E., Kurdila A.J.* Identification and Control of Limit Cycle Oscillations in Aeroelastic Systems // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2000. V. 23. № 6. P. 1127–1133.  
<https://doi.org/10.2514/2.4664>
18. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // *ПММ.* 2013. Т. 77. № 4. С. 501–513.
19. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Маятниковые системы с динамической симметрией // *Совр. мат. прил.* 2016. Т. 100. С. 76–133.
20. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 2013. V. 21. № 10. P. 2955–2961.  
<https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
21. *Dosaev M.* Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // *Appl. Mathe. Modell.* 2019. V. 68. P. 21–28.  
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
22. *Sheldahl R.E., Klimas P.C.* Aerodynamic characteristics of seven symmetrical airfoil sections through 180-degree angle of attack for use in aerodynamic analysis of vertical axis wind turbines. Technical Report SAND-80-2114, Sandia National Labs. (USA). 1981.  
<https://doi.org/10.2172/6548367>
23. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // *Тр. ЦАГИ.* 1974. Вып. 1621. С. 79–93.
24. *Агафонов С.А.* Об устойчивости циркулярной системы при действии нелинейных диссипативных сил // *Изв. РАН. МТТ.* 2009. № 3. С. 41–46.
25. *Kirillov O.N., Verhulst F.* Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? // *ZAMM.* 2010. V. 90. № 6. P. 462–488.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.200900315>
26. *Jekel D., Hagedorn P.* Stability of weakly damped MDGKN-systems: The role of velocity proportional terms. // *ZAMM.* 2017. V. 97. P. 1128–1135.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.201600288>
27. *Климина Л.А.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2020. № 2. С. 5–16.  
<https://doi.org/10.31857/S0002338820020080>
28. *Pigolotti L., Mannini C., Bartoli G., Thiele K.* Critical and post-critical behaviour of two-degree-of-freedom flutter-based generators // *J. Sound Vib.* 2017. V. 404. P. 116–140.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.024>

УДК 531.36

## О СПУСКЕ ЛЫЖНИКА ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРАССЕ

© 2022 г. Б. Я. Локшин<sup>а,\*</sup>, В. А. Самсонов<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*e-mail: lokshinb@imec.msu.ru

\*\*e-mail: samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.09.2021 г.

После доработки 22.11.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

Рассматривается движение лыжника в процессе разгона на прямолинейной трассе. Предлагается лыжника представить в виде связки двух твердых тел, сцепленных между собой под некоторым установочным углом, одно из которых (“крыло”) обладает аэродинамическим качеством. Выбор желаемого режима спуска происходит за счет управляющего момента, приложенного в точке контакта корпуса с поверхностью, и за счет выбора установочного угла. Основное внимание уделяется рассмотрению вопроса о движении этой связки тел при условии, что в процессе спуска “стойка лыжника” не изменяется. Показано, что существует некоторое значение установочного угла “крыла”, при котором достигается максимальное значение скорости спуска в любой момент времени. Это экстремальное значение угла зависит только от аэродинамических характеристик силового воздействия. Тем самым установлено, что в рамках предложенной математической модели для достижения максимально возможной скорости спуска необходимо соблюдать постоянную стойку и форму корпуса. Реализация этого экстремального режима спуска ограничена только возможностью обеспечения требуемого управляющего момента. Показано, что при определенных условиях сила реакции обнуляется, происходит отрыв тела от поверхности, причем с продолжающимся ростом скорости. Установлено, что после такого отрыва возвращения на поверхность не происходит, в дальнейшем тело совершает свободный полет с выходом на режим устойчивого планирования.

*Ключевые слова:* прямолинейная трасса, спуск, трение, аэродинамическое воздействие, неизменяемая стойка, устойчивость, максимизация скорости, отрыв от поверхности

DOI: 10.31857/S0572329922040067

**1. Введение.** Первым этапом в спортивных соревнованиях по прыжкам с трамплина является разгон лыжника до момента отталкивания. В процессе этого разгона лыжник принимает определенную позу и старается поддерживать ее при нарастании скорости за счет вырабатываемых моментов в суставах. Профиль поверхности спуска выполнен в виде наклонной прямой достаточно большой протяженности, которая заканчивается некоторой плавной кривой. Поэтому анализ движения лыжника именно по наклонной прямой представляет определенный интерес как с практической точки зрения, так и в качестве теоретико-механической задачи. В научной литературе имеются определенные исследования по этой теме. При этом сначала представляют лыжника как некоторый трехзвенный перевернутый маятник, но этим “рисованием” и ограничиваются, заменяя его на материальную точку [1–3]. Затем с разной степенью точности рассматриваются дифференциальные уравнения движения этой точки, ставятся и

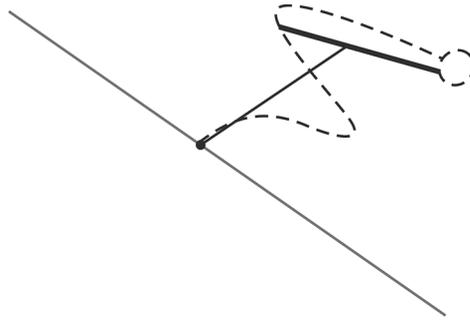


Рис. 1. Схема представления лыжника.

решаются разные задачи для нее. В [1] отмечается ограниченность такого подхода, в частности указывается на необходимость рассмотрения твердого тела в качестве модели лыжника, а не материальной точки, и анализа устойчивости режима спуска. В работах [2, 3] на основе все той же модели тела как материальной точки рассматриваются задачи быстрого действия по переводу движения с некоторой заданной начальной скоростью на движение с заданной конечной скоростью за счет управления лобовым сопротивлением. Для решения этих оптимальных задач используют принцип максимума Понтрягина [2] или метод Миеле [3]. Вообще, научных публикаций, посвященных прыжкам лыжников с трамплина, достаточно много, но в них рассматриваются последующие этапы этих соревнований: процесс отталкивания, режим полета и приземления. По-видимому, считается, что процесс разгона лыжника во время спуска не очень интересен. На самом деле, это не совсем так, и в процессе разгона есть предмет для более подробного исследования.

В настоящей работе для простоты предлагается представить лыжника как связку двух твердых тел, жестко сцепленных в общем центре масс (рис. 1). Одно из них – это корпус, скользящий своей одной фиксированной точкой (опорной точкой) по поверхности склона и имеющий возможность совершать поворот относительно нее. Другое твердое тело (типа “крыла”) сцеплено с первым под некоторым установочным углом. Эта сцепка тел имитирует стойку и конфигурацию лыжника, которые, вообще говоря, в процессе спуска могут изменяться.

Будем считать, что аэродинамическое воздействие сосредоточено именно на втором теле, для описания этого воздействия используется хорошо зарекомендовавшая себя в ряде других задач квазистатическая модель обтекания [4, 5]. Выбор желаемого режима движения происходит за счет управляющего момента, приложенного в точке контакта корпуса с поверхностью и за счет выбора установочного угла “крыла”. Решение соответствующих дифференциальных уравнений при выбранных зависимостях управляющего момента и величине установочного угла крыла полностью определяет режим движения в процессе спуска: не только скорость спуска, как это было в предыдущих моделях с материальной точкой, но и угол наклона тела.

Основное внимание в настоящей работе уделяется рассмотрению вопроса о движении тела при условии, что в процессе спуска “стойка лыжника” не изменяется. В этом случае оказывается, что направление вектора скорости центра масс тоже не изменяется и совпадает с направлением склона. Условие постоянства угла наклона корпуса накладывает определенное ограничение на выбор изменяющегося в процессе спуска управляющего момента. Реализация желаемого режима спуска ограничена возможностью обеспечения требуемого управляющего момента.

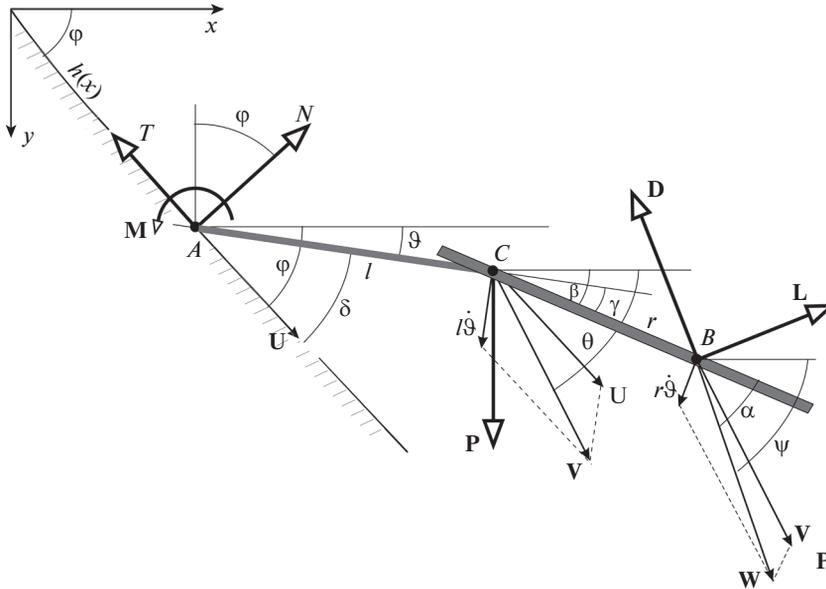


Рис. 2. Расчетная схема.

Рассмотрен также вопрос о возможности отрыва “лыжника” от поверхности спуска и дальнейшего движения в режиме свободного полета. Такая ситуация может возникнуть, когда при достаточно большой подъемной силе сила реакции со стороны поверхности обнуляется.

Представлены результаты численного исследования некоторых примеров движения рассматриваемой конструкции.

**2. Постановка задачи и математическая модель.** Рассматривается задача о спуске лыжника в среде с квадратичным законом сопротивления в вертикальной плоскости по заданной наклонной прямой  $y = h(x) = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , причем по этой прямой перемещается фиксированная опорная точка корпуса лыжника. Эту задачу можно трактовать как теоретико-механическую задачу о движении в сопротивляющейся среде перевернутого маятника, точка опоры которого скользит по заданной наклонной прямой.

Стойку лыжника в процессе спуска будем моделировать твердым телом (корпус+крыло) с фиксированной в теле опорной точкой  $A$ , перемещающейся по склону (по указанной прямой) (рис. 2). Со стороны склона на это тело в точке  $A$  действуют нормальная сила реакции и сила сухого трения, пропорциональная силе реакции.

Со стороны воздушной среды на тело действует результирующая аэродинамических сил (силы лобового сопротивления и подъемной силы), проходящая через некоторую фиксированную точку  $B$  “крыла”, не совпадающую, вообще говоря, с центром  $C$  масс тела.

В опорной точке на тело действует управляющий момент, формируемый самим лыжником в соответствии с желаемым режимом спуска. На рис. 2 схематически представлены стойка лыжника, характеризуемая отрезками  $AC$  и  $CB$ , а также силы и все введенные обозначения (указаны положительные значения углов).

Здесь  $\mathbf{U}$  – скорость точки  $A$ , направлена вдоль склона,  $\mathbf{V}$  – скорость центра масс,  $\mathbf{W}$  – скорость центра давления,  $l = AC$ ,  $r = CB$ ,  $\varphi$  – угол наклона прямой,  $\vartheta$  – угол наклона корпуса,  $\theta$  – угол наклона вектора скорости центра масс,  $\psi$  – угол наклона вектора

скорости центра давления,  $\alpha$  – угол атаки,  $\gamma$  – установочный угол,  $\delta = \varphi - \vartheta$ ,  $\beta = \gamma + \vartheta$  – угол наклона “крыла”,  $\alpha = \psi - \beta$ . Предполагается, что величина  $M$  управляющего момента выбирается с целью поддержки определенной ориентации корпуса, а значение установочного угла  $\gamma$  – для увеличения скорости спуска. Силовое воздействие на лыжника складывается из силы  $\mathbf{P}$  тяжести, сил реакции со стороны склона: нормальной силы  $\mathbf{N}$  и силы  $\mathbf{T}$  сухого трения, величина которой равна  $T = \mu|N|$ , и сил аэродинамического воздействия со стороны окружающего воздуха: силы  $\mathbf{D}$  лобового сопротивления и боковой (подъемной) силы  $\mathbf{L}$ . Кроме того, в опорной точке на корпус действует момент  $\mathbf{M}$  (будем называть его управляющим). Все эти величины отражены на рисунке.

Рассмотрим некоторые особенности спуска при постоянном угле наклона корпуса при условии  $\mu < \operatorname{tg} \varphi$  (иначе спуск был бы невозможен).

Из школьного курса физики известно, что при отсутствии аэродинамических сил тело на наклонной плоскости перемещается с постоянным положительным ускорением  $g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$ , так что скорость в процессе спуска будет неограниченно возрастать.

Другая ситуация возникает при наличии аэродинамических сил. Предположим сначала, что подъемная сила отсутствует (например, крыло в виде шара), и есть только сила лобового сопротивления. Тогда по мере нарастания скорости и соответственно силы лобового сопротивления положительное ускорение спуска будет уменьшаться, и при некоторой предельной скорости обратится в нуль; дальнейший спуск будет происходить именно с этим постоянным значением скорости.

Если к силе лобового сопротивления добавить еще и подъемную силу, то из рис. 2 видно, что эта сила приводит к уменьшению нормальной силы реакции, это в свою очередь уменьшает и силу сухого трения. Вследствие этого скорость спуска сначала увеличивается по сравнению со случаем отсутствия подъемной силы. В этом и проявляется антидиссипативное влияние подъемной силы [4]. По мере роста скорости сила лобового сопротивления увеличивается. При этом в процессе своего роста скорость может в некоторый момент времени достигнуть такого значения, при котором сила реакции обращается в ноль, и дальнейшее движение происходит уже в соответствии с другой математической моделью.

Пусть текущие координаты центра масс:  $x, y$ , точки  $A$ :  $x_A, y_A = x_A \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . Очевидно, имеют место кинематические соотношения  $x = x_A + l \cos \vartheta$ ,  $y = y_A + l \sin \vartheta$ . Координаты скорости центра масс равны

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_A - l \dot{\vartheta} \sin \vartheta = V \cos \theta \\ \dot{y} &= \dot{y}_A + l \dot{\vartheta} \cos \vartheta = V \sin \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

После несложных преобразований в (2.1), учитывая  $\dot{y}_A = \dot{x}_A \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\dot{y} = \dot{x} \cdot \operatorname{tg} \theta$ , имеет место уравнение связи в форме

$$V \sin(\theta - \varphi) = l \dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) \quad (2.2)$$

Уравнения движения рассматриваемого тела можно представить в виде:

$$\begin{aligned} m \dot{V} &= mg \sin \theta - D \cos(\psi - \theta) + L \sin(\psi - \theta) - N [\sin(\theta - \varphi) + \mu \cos(\theta - \varphi)] \\ m V \dot{\theta} &= mg \cos \theta - D \sin(\psi - \theta) - L \cos(\psi - \theta) - N [\cos(\theta - \varphi) - \mu \sin(\theta - \varphi)] \\ J \dot{\vartheta} &= l N [\cos \delta + \mu \sin \delta] - r [D \sin \alpha + L \cos \alpha] + M \\ \dot{x} &= V \cos \theta \\ \dot{y} &= V \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь учитывается, что нормальная сила реакции положительна и знак модуля в определении силы сухого трения можно опустить,  $m$  и  $J$  – масса тела и его центральный момент инерции соответственно. Величины аэродинамических сил представляются в обычном для прикладной аэродинамики виде ( $D$  – drag, сила лобового сопротивления,  $L$  – lift, подъемная сила):

$$D = 0.5C_D(\alpha)\rho SV^2, \quad L = 0.5C_L(\alpha)\rho SV^2 \quad (2.4)$$

где  $C_D(\alpha)$ ,  $C_L(\alpha)$  – аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки  $\alpha = \psi - \beta$  и определяемые формой тела,  $\rho$  – плотность среды,  $S$  – характерная площадь.

Из уравнения (2.2) связи следует

$$\theta = \varphi + \arcsin(l\dot{\vartheta} \cos \delta / V) \quad (2.5)$$

Угол  $\psi$  ориентации вектора скорости центра давления определяется через те же переменные

$$\psi = \arctg \frac{V \sin \theta + r\dot{\vartheta} \cos \beta}{V \cos \theta - r\dot{\vartheta} \sin \beta} \quad (2.6)$$

Вертикальная координата центра масс, пока опорная точка  $A$  не покидает поверхность, также выражается с помощью этих переменных:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - l \sin \delta / \cos \varphi \quad (2.7)$$

Для исключения силы реакции снова воспользуемся равенством (2.2). После его дифференцирования имеем

$$\dot{V} \sin(\theta - \varphi) + V\dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - l\ddot{\vartheta} \cos \delta - l\dot{\vartheta}^2 \sin \delta = 0$$

Подставляя в это равенство выражения производных из (2.3), получим

$$N[1 + (ml^2/J) \cos \delta \cdot [\cos \delta + \mu \sin \delta]] = mg \cos \varphi - ml\dot{\vartheta}^2 \sin \delta - (ml/J) M \cos \delta - D[\sin(\psi - \varphi) - (mlr/J) \cos \delta \sin \alpha] - L[\cos(\psi - \varphi) - (mlr/J) \cos \delta \cos \alpha] \quad (2.8)$$

Теперь в уравнениях (2.3) можно отбросить второе и пятое уравнения, так что дифференциальные уравнения движения рассматриваемого объекта могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= mg \sin \theta - D \cos(\psi - \theta) + L \sin(\psi - \theta) - N [\sin(\theta - \varphi) + \mu \cos(\theta - \varphi)] \\ J\ddot{\vartheta} &= lN [\cos \delta + \mu \sin \delta] - r[D \sin \alpha + L \cos \alpha] + M \\ \dot{x} &= V \cos \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система (2.4)–(2.9) образует искомую замкнутую математическую модель движения рассматриваемого объекта. Остается задать зависимости аэродинамических характеристик  $C_D(\alpha)$ ,  $C_L(\alpha)$ , параметры  $m$ ,  $J$ ,  $l$ ,  $r$ , установочный угол  $\gamma$  и управляющий момент  $M(t)$ , после чего можно будет исследовать траектории движения центра масс корпуса и его динамику в процессе спуска.

Поскольку при выводе этих уравнений молчаливо предполагалась положительность силы реакции, определяемой из (2.8), то из этого условия следует неравенство, ограничивающее область применимости построенной математической модели

$$\begin{aligned} mg \cos \varphi - ml\dot{\vartheta}^2 \sin \delta - (ml/J) M \cos \delta - \\ - 0.5\rho SV^2 \{C_D [\sin(\psi - \varphi) + C_L \cos(\psi - \varphi)] - \\ - (mlr/J) \cos \delta [C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha]\} > 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем ограничение на скорость спуска в виде неравенства ( $V_{N0}$  – скорость в момент обращения нормальной реакции в ноль)

$$V^2 < V_{N_0}^2 = 2 \frac{mg \cos \varphi - ml\dot{\vartheta}^2 \sin \delta - (ml/J) M \cos \delta}{\rho S \{C_D [\sin(\psi - \varphi) + C_L \cos(\psi - \varphi)] - (mlr/J) \cos \delta [C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha]\}} \quad (2.10)$$

Здесь предполагается, что числитель и знаменатель дроби положительны. Таким образом, пока выполняется неравенство (2.10), можно пользоваться построенной моделью. При  $V = V_{N_0}$  сила реакции вместе с силой трения исчезают, происходит отрыв тела от поверхности, и для рассмотрения дальнейшего движения понадобится другая математическая модель. Ниже будет рассмотрена эта ситуация, а пока продолжим анализ построенной модели, когда тело не покидает поверхность.

В качестве числового примера рассматривается спуск тела с антропоморфными параметрами:  $m = 70$  (кг),  $J = 5$  (кгм<sup>2</sup>),  $l = 0.6$  (м),  $r = 0.1$  (м). Пусть зависимости аэродинамических коэффициентов имеют вид  $C_D(\alpha) = 1.38 - 1.16 \cos 2\alpha$ ,  $C_L(\alpha) = 1.5 \sin 2\alpha$ . Угол наклона прямой спуска равен  $\varphi = \pi/6$ . Пусть “лыжник” собирается поддерживать корпус перпендикулярным склону, тогда он выбирает соответствующий начальный наклон корпуса  $\vartheta(0) = -\pi/3$  и соответствующий управляющий момент, например, в виде отрицательной обратной связи

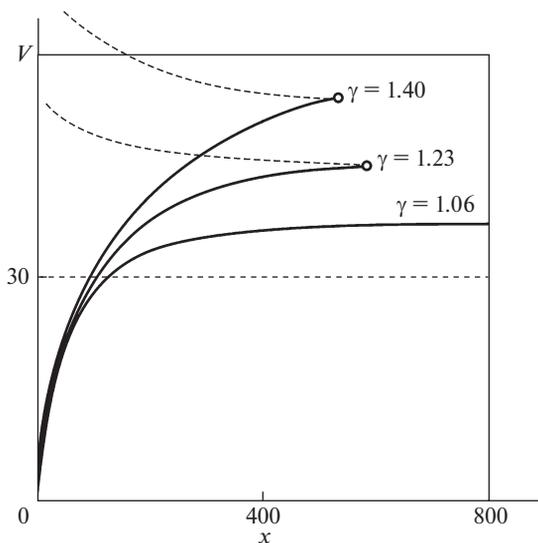
$$M = M(x) = -mgl (k(\vartheta(x) + \pi/3) + hl\dot{\vartheta}(x)/V(x)) \quad (2.11)$$

Параметры  $k$ ,  $h$ , естественно, выбираются в зависимости от желаемого угла наклона, массовых и геометрических размеров. В данном случае для расчетов были приняты следующие значения этих параметров:  $k = 1.5$ ,  $h = 0.1$ . Проведенные расчеты при начальных условиях  $V(0) = 0$ ,  $\vartheta(0) = -\pi/3 + 0.34$ ,  $\dot{\vartheta}(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$  (подчеркнем, что начальный угол наклона корпуса отличается от желаемого примерно на  $20^\circ$ ) в соответствии с уравнениями (2.4)–(2.9) показали, что задача поддержки желаемого угла наклона корпуса с помощью выбранного управляющего момента (2.11) решается не вполне удовлетворительно. При этом скорость центра масс растет монотонно от нуля до некоторого предельного значения. Зависимости скорости спуска и угла  $\vartheta$  корпуса при различных значениях установочного угла  $\gamma$  представлены на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

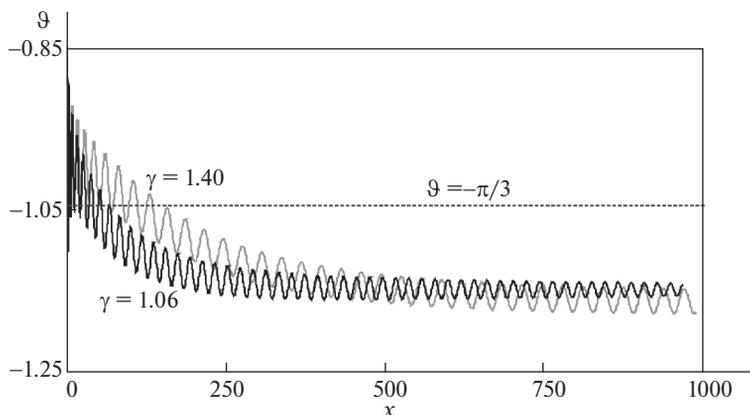
На рис. 3 сплошными жирными линиями изображены графики зависимости скорости при различных значениях установочного угла. Кружочками отмечены моменты, когда сила реакции обращается в ноль. Кроме того, для наглядности пунктиром построены графики (2.10) скорости  $V_{N_0}$ , при которой сила реакции могла бы обратиться в ноль при текущих значениях управляющего момента и угловых координат.

На рис. 4 представлены графики зависимости угла  $\vartheta$  при двух значениях установочного угла, а также пунктиром – желаемое значение, равное  $\vartheta = -\pi/3$ . Из рисунка видно, что желаемое значение угла наклона корпуса не устанавливается. Вместо него устанавливаются слабо затухающие колебания примерно около  $\vartheta = -1.15$  при  $\gamma = 1.06$  ( $\alpha \approx 0.5$ ) и  $\vartheta = -1.17$  при  $\gamma = 1.40$  ( $\alpha \approx 0.1$ ), так что корпус совершает небольшие затухающие колебания около положения, отклоненного примерно на  $6^\circ$  “назад” от вертикали к поверхности. Соответствующие колебания скорости спуска на рис. 3 не отражены ввиду их малости. При численных расчетах с другими параметрами и желаемом значении угла наклона корпуса наблюдались как более быстро затухающие колебания и выход на некоторый стационарный режим спуска, отличный от желаемого, так и, наоборот, совершенно “нефизические” очень “размашистые” колебания с амплитудой в несколько десятков градусов около некоторого также отличного от желаемого угла наклона корпуса (с проваливанием тела “вперед” или “назад” под поверхность).

Кроме того, при расчетах установлено, что, за исключением первоначального участка  $x < 0.1$  м, значения силы реакции не превосходят силы тяжести лыжника, а принятый управляющий момент находится в пределах 150 нм. Эти данные находятся в



**Рис. 3.** Примеры изменения скорости при компенсирующем управляющем моменте и различных значениях установочного угла.



**Рис. 4.** Примеры изменения угла наклона корпуса при компенсирующем управляющем моменте и различных значениях установочного угла.

соответствии с результатами экспериментальных исследований [6], где отмечается, что максимальная сила в голеностопе наблюдалась порядка 750 н, а максимальный момент не превосходит 150 нм. На первоначальном участке  $x < 0.1$  м оказалось, что сила реакции также находится в тех же допустимых пределах, а управляющий момент носит импульсный характер и достигает 210 нм. В процессе дальнейшего движения (спуска) величина управляющего момента быстро уменьшается до 50 нм и даже еще меньше.

Поскольку пример носит чисто иллюстративный характер, то не имеет особого смысла добиваться более удовлетворительного совпадения с желаемым режимом

спуска. Отметим лишь, что это совпадение определяется, прежде всего, выбранным управляющим моментом.

**3. Движение тела с неизменяемой стойкой.** В этом и последующих разделах будем считать, что движение тела происходит с неизменяемой фиксированной стойкой. Это означает, что управляющий момент  $M$  выбирается таким образом, что угол наклона корпуса остается постоянным:  $\vartheta(t) \equiv \bar{\vartheta} = \text{const}$ , так что и  $\delta(t) \equiv \bar{\delta} = \text{const}$ , причем установочный угол также не изменяется в процессе спуска, так что  $\gamma(t) \equiv \gamma = \text{const}$ . Отметим, что по физическому смыслу угол  $\gamma$  выбирается из интервала  $\gamma \in (0, \varphi - \bar{\vartheta})$ . При этом, в соответствии с (2.5), угол наклона вектора скорости центра масс также не изменяется и выполняется равенство:

$$\theta(t) \equiv \varphi = \text{const}$$

Последнее равенство означает, что вектор  $\mathbf{V}$  скорости центра масс параллелен прямой спуска. Также, в соответствии с (6) сохраняется ориентация и вектора  $\mathbf{W}$  скорости центра давления:

$$\psi(t) \equiv \varphi = \text{const}$$

Вследствие этого угол атаки  $\alpha = \psi - \beta$  также остается постоянным:

$$\alpha(t) \equiv \bar{\alpha} = \text{const}$$

Для краткости записи чертой сверху будем обозначать и соответствующие значения аэродинамических сил, так что

$$D(\bar{\alpha}) = \bar{D}, \quad L(\bar{\alpha}) = \bar{L}$$

Для осуществления такого режима движения следует выбрать подходящую величину управляющего момента. Примем его, например, в виде компенсирующего момента  $M_k$ :

$$M = M_k = -lN [\cos \bar{\delta} + \mu \sin \bar{\delta}] + r [\bar{D} \sin \bar{\alpha} + \bar{L} \cos \bar{\alpha}] \quad (3.1)$$

При этом, как это следует из (2.8), сила реакции (тоже отметим ее чертой сверху) равна:

$$\bar{N} = mg \cos \varphi - \bar{L} \quad (3.2)$$

Уравнения (2.9) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= mg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) - (\bar{D} - \mu \bar{L}) \\ \dot{x} &= V \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Переходя в (3.3) к независимой переменной  $x$ , получим одно уравнение (штрихом обозначена производная по  $x$ ):

$$(V^2)' = B - AV^2 \quad (3.4)$$

где введены обозначения констант

$$B = 2g(\text{tg} \varphi - \mu), \quad A = \rho S [C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})] / m \cos \varphi$$

Чтобы не терялся физический смысл задачи, будем считать, что  $\mu < \text{tg} \varphi$ , так что  $B > 0$ . Величина  $A$  при некоторых значениях угла атаки может быть, вообще говоря, и отрицательной, и даже нулевой. В зависимости от знака  $A$  решение уравнения (3.4) при нулевом начальном значении  $V(0) = 0$  удобно представить в виде (хотя, очевидно, после раскрытия модуля выражения (3.5) и (3.6) совпадают):

$$V^2(x) = B(1 - \exp(-Ax)) / A, \quad \text{если } A > 0 \quad (3.5)$$

$$V^2(x) = B(\exp|A|x - 1) / |A|, \quad \text{если } A < 0 \quad (3.6)$$

$$V^2(x) = Bx, \quad \text{если } A = 0 \quad (3.7)$$

Видно, что скорость монотонно растет, но формулы (3.5)–(3.7) справедливы лишь до тех пор, пока выполняется условие (2.10), т.е. пока сила реакции положительна. Значение  $V_{N0}$  скорости, при которой эта сила обращается в ноль, с учетом (3.1) равно

$$V_{N0}^2 = \frac{2mg \cos \varphi}{\rho S C_L(\bar{\alpha})} \quad (3.8)$$

Если в процессе спуска скорость достигает этого “критического” характерного значения, то происходит отрыв тела от поверхности, и для рассмотрения дальнейшего движения понадобится другая математическая модель.

В случае положительного значения  $A > 0$  существует еще одно характерное значение скорости – это ее предельное (очевидно, максимальное) значение  $V_\infty^2$  при спуске по наклонной прямой при  $x \rightarrow \infty$ , которое равно

$$V_\infty^2 = \frac{B}{A} = \frac{2mg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}{\rho S(C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha}))} \quad (3.9)$$

*Примечание.* Выражение (3.9) несколько уточняет полученное ранее выражение предельной скорости лыжника в процессе спуска при прыжках с трамплина [1], где лыжник рассматривался как материальная точка.

При этом возможны две ситуации в зависимости от соотношения этих двух характерных значений скорости.

Если  $V_\infty^2 < V_{N0}^2$ , то скорость спуска изменяется по закону (3.5) на всем протяжении спуска и не достигает значения (3.8), сила реакции в процессе спуска остается положительной. Это как-бы “стандартная” ситуация. В этом случае выполняется неравенство  $(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)/(C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})) < \cos \varphi/C_L(\bar{\alpha})$ , что приводит к неравенствам

$$C_L(\bar{\alpha}) \sin \varphi < C_D(\bar{\alpha}) \cos \varphi \quad \text{или} \quad K(\bar{\alpha}) < \operatorname{ctg} \varphi \quad (3.10)$$

где  $K(\bar{\alpha}) = C_L(\bar{\alpha})/C_D(\bar{\alpha})$  – так называемый коэффициент аэродинамического качества (или просто – аэродинамическое качество).

Если же при выбранном угле атаки выполняются неравенства  $K(\bar{\alpha}) > \operatorname{ctg} \varphi$  и  $C_L(\bar{\alpha}) \sin \varphi - C_D(\bar{\alpha}) \cos \varphi > 0$ , то в процессе спуска (возрастания скорости) сначала достигается значение  $V_{N0}$ , сила реакции исчезает, контакт тела с поверхностью теряется, и тело как бы взлетает, переходит в режим свободного полета. Эта ситуация будет обсуждаться ниже отдельно.

Учитывая полученные соотношения (3.8)–(3.10), последовательно прокомментируем физическую сторону формальных решений (3.5)–(3.7).

Правая часть первого из уравнений (2.14) представляет собой разность двух сил: тянущей силы  $mg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$ , положительной при  $\mu < \operatorname{tg} \varphi$ , и силы  $\bar{D} - \mu \bar{L} = 0.5\rho S[C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})]V^2$  аэродинамического воздействия (положительной, отрицательной или даже нулевой). Баланс этих сил и определяет предельную скорость  $V_\infty^2$  (3.9) при  $A > 0$ . С другой стороны, это уравнение можно представить и в виде двух других слагаемых: разгоняющей силы  $(mg \sin \varphi - \bar{D})$  и тормозящей силы  $\mu(mg \cos \varphi - \bar{L})$ . Понятно, что, во-первых, тормозящая сила – это просто сила сухого трения,  $\mu(mg \cos \varphi - \bar{L}) = \mu \bar{N}$ , и во-вторых, разгоняющая сила будет, действительно, разгоняющей только в том случае, когда сила  $\bar{D}$  лобового сопротивления не превосходит проекции силы тяжести  $mg \sin \varphi$ . Это означает, что когда сила  $(mg \sin \varphi - \bar{D})$ , действительно, разгоняющая, скорость спуска не превосходит некоторой константы  $V_f$ , так что  $V^2 < V_f^2 = \frac{2mg \sin \varphi}{\rho S C_D(\bar{\alpha})}$ .

Теперь рассмотрим все три случая знакоопределенности величины  $A$  в соответствии с (3.5)–(3.7), считая, что сила реакции  $\bar{N}$  строго положительна.

Пусть  $A > 0$ ,  $C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha}) > 0$ . а) Пусть при этом  $V_\infty^2 < V_{N0}^2$ , а значит из (3.10),  $C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha}) > \text{tg}\varphi$ , отрыв тела от поверхности не происходит, скорость тела монотонно возрастает, стремясь к своему предельному значению  $V_\infty^2$  (3.9). Остается удостовериться, что она не превышает и значения  $V_f^2$ , чтобы разгоняющая сила  $(mg \sin \varphi - \bar{D})$  оставалась положительной. Действительно, из неравенства  $V_\infty^2 < V_f^2$  следует то же самое неравенство (3.10). Заметим, что при этом коэффициент сухого трения должен удовлетворять неравенству  $\mu < \text{tg}\varphi < C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha})$ . б) Пусть, наоборот,  $V_{N0}^2 < V_\infty^2$ , так что  $C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha}) < \text{tg}\varphi$ , скорость тела не достигает своего предельного значения  $V_\infty^2$ , отрыв тела происходит раньше, при скорости  $V_{N0}$ . При этом так же выполняется неравенство  $V_{N0}^2 < V_f^2$ , которое сводится к условию  $V_{N0}^2 < V_\infty^2$ . Коэффициент сухого трения в этом случае должен удовлетворять неравенству  $\mu < C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha}) < \text{tg}\varphi$ .

Пусть теперь  $A = 0$ ,  $C_D(\bar{\alpha}) = \mu C_L(\bar{\alpha})$ . В этом случае разгоняющая сила равна  $(mg \sin \varphi - \mu \bar{L})$ , а тормозящая  $-\mu(mg \cos \varphi - \bar{L})$ . Происходит своего рода “нейтрализация” аэродинамического воздействия, и скорость тела изменяется так, словно оно перемещается по поверхности в пустоте. В этом случае складывается такая ситуация, что на сколько уменьшается сила реакции за счет подъемной силы, ровно на столько же уменьшается и разгоняющая сила за счет силы лобового сопротивления. Тело перемещается с постоянным ускорением  $g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$ . Коэффициент сухого трения в этом случае удовлетворяет неравенству  $\mu = C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha}) < \text{tg}\varphi$ .

И, наконец, пусть  $A < 0$ ,  $C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha}) < 0$ . Коэффициент сухого трения в этом случае должен удовлетворять двойному неравенству  $C_D(\bar{\alpha})/C_L(\bar{\alpha}) < \mu < \text{tg}\varphi$ . В этом случае обе силы: тянущая сила и сила аэродинамического воздействия действуют как бы в одну сторону – на рост скорости. Этот рост продолжается до величины  $V_{N0}$ , после чего происходит отрыв тела от поверхности.

**4. Максимизация скорости при движении с неизменяемой стойкой.** При движении с неизменяемой стойкой, когда выбраны значения  $\bar{\vartheta} = \text{const}$  и  $\gamma = \text{const}$ , угол атаки также не изменяется:  $\bar{\alpha} = \varphi - \bar{\vartheta} - \gamma$ . При  $A = 0$  скорость (3.7) спуска не зависит от этих углов, поскольку параметр  $B$  не зависит от выбранных значений углов, а определяется только углом  $\varphi$  наклона поверхности и коэффициентом  $\mu$  сухого трения. Поэтому в этом случае задача максимизации скорости не возникает.

Но при  $A$ , отличном от нуля, величина скорости спуска зависит от выбранных углов  $\bar{\vartheta}$ ,  $\gamma$  ориентации стойки, точнее от их суммы (через  $\bar{\alpha}$ ). В этом случае представляет интерес рассмотреть задачу о выборе стойки, определяемой этими углами, при которой достигается максимальное значение скорости в процессе спуска. Рассмотрим совместно ситуации (3.5) и (3.6), пользуясь выражением (3.5). Покажем, что скорость спуска является убывающей функцией от  $A$ . Для этого вычислим производную  $\partial(V^2)/\partial A$

$$\frac{\partial(V^2)}{\partial A} = \frac{B}{A^2} (Axe^{-Ax} + e^{-Ax} - 1) = \frac{B}{A^2} e^{-Ax} (1 + Ax - e^{Ax}) < 0$$

Следовательно, для максимального значения скорости надо выбирать минимальное значение величины  $A$ . Из (3.5) видно, что этот минимум достигается при минималь-

ном значении разности  $C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})$  (положительной или отрицательной). Обозначим соответствующее значение угла атаки через  $\bar{\alpha}_*$ , так что

$$C_D(\bar{\alpha}_*) - \mu C_L(\bar{\alpha}_*) = \min_{\bar{\alpha}} [C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})] \quad (4.1)$$

Отметим важное обстоятельство: видно, что оптимальное значение угла атаки определяется только зависимостью аэродинамических коэффициентов от угла атаки и не зависит ни от каких других аргументов: ни от скорости спуска, ни от выбранного угла наклона корпуса, ни от массовых и геометрических параметров. Отсюда следует, что именно этот угол надо выбирать на всем пути спуска в любой момент времени.

Чтобы это осуществить, надо установить постоянным угол  $\bar{\beta}_* = (\bar{\vartheta} + \gamma)_* = \varphi - \bar{\alpha}_*$ .

Таким образом, для получения максимального значения скорости независимо от знака ненулевого значения  $A$  углы  $\bar{\vartheta}, \gamma$  ориентации “лыжника” следует выбирать так, чтобы угол атаки  $\bar{\alpha}_*$  определялся условием (4.1). В частности, если зафиксирован угол  $\bar{\vartheta}$ , то установочный угол следует выбрать равным  $\gamma = \varphi - \bar{\vartheta} - \bar{\alpha}_*$ .

Для иллюстрации рассмотрим пример, приведенный выше в конце п.2. Минимальное значение разности  $C_D(\bar{\alpha}) - \mu C_L(\bar{\alpha})$  для  $\mu = 0.1$  достигается при  $\bar{\alpha}_* \approx 0.065$  ( $\approx 4^\circ$ ). Значения аэродинамических коэффициентов равны  $C_D(\bar{\alpha}_*) = 0.221, C_L(\bar{\alpha}_*) = 0.195$ . Углы  $\bar{\vartheta}, \gamma$  связаны соотношением  $\bar{\vartheta} + \gamma = \varphi - \bar{\alpha}_* = 0.458$  ( $\approx 26^\circ$ ). Например, могут быть выбраны значения  $\bar{\vartheta} = -60^\circ, \gamma = 86^\circ$  или  $\bar{\vartheta} = -45^\circ, \gamma = 71^\circ$  и т.д. Характерные значения скоростей приближенно равны  $V_\infty \approx 68.4$  (м/с) и  $V_{N0} \approx 100.8$  (м/с).

*Вывод.* При спуске по наклонной прямой в течение всего процесса спуска (в любой момент времени) максимальная скорость спуска достигается при фиксированном значении угла атаки  $\bar{\alpha}_*$  (4.1). При этом максимальное значение скорости спуска не зависит от угла  $\bar{\vartheta}$  наклона корпуса при подходящем выборе угла  $\gamma = \varphi - \bar{\vartheta} - \bar{\alpha}_*$  наклона второго звена.

На рис. 5 представлены типичные зависимости аэродинамических характеристик от угла атаки для тела типа крыла. На рис. 5,а представлен случай, когда неравенство  $C_D(\alpha) - \mu C_L(\alpha) > 0$  справедливо для всех значений угла атаки, а на рис. 5,б — когда на некотором диапазоне значений угла атаки выполняется противоположное неравенство  $C_D(\alpha) - \mu C_L(\alpha) < 0$ . Очевидно, в любом случае всегда существует значение  $\alpha_*$ , при котором достигается минимум разности  $C_D(\alpha) - \mu C_L(\alpha)$ . Это значение отмечено на рисунке.

Напомним, что при  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_*$  возрастание скорости продолжается либо до выхода на предельное значение  $V_\infty^2$ , либо до достижения величины  $V_{N0}^2$ , при которой сила реакции обращается в ноль, и происходит отрыв тела от поверхности. Отметим, что левому фрагменту рис. 5 могут отвечать как первая ситуация, так и вторая. Правому фрагменту отвечает рост скорости только до  $V_{N0}^2$ , после чего начинается другой режим движения.

**5. Об устойчивости движения тела с неизменяемой стойкой.** Пусть выбрано некоторое желаемое значение  $\vartheta(t) \equiv \bar{\vartheta} = \text{const}$  угла наклона корпуса. Для осуществления движения с таким углом наклона выбран соответствующий компенсирующий управляющий момент  $M_k$  (3.1)

$$M = M_k = -lN [\cos \bar{\delta} + \mu \sin \bar{\delta}] + r [\bar{D} \sin \bar{\alpha} + \bar{L} \cos \bar{\alpha}]. \quad (5.1)$$

При этом  $\theta(t) \equiv \varphi = \text{const}$ , и сила реакции равна  $\bar{N} = mg \cos \varphi - \bar{L}$ .

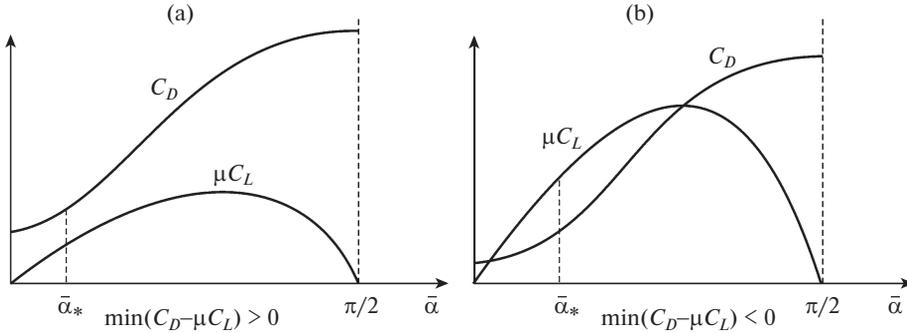


Рис. 5. Определение экстремального значения угла атаки.

Представляет интерес анализ устойчивости такого режима спуска. При этом следует иметь в виду, что исследуемый режим не является стационарным, хотя  $\vartheta(t) \equiv \bar{\vartheta} = \text{const}$ , так как скорость в процессе спуска изменяется в соответствии с (3.5)–(3.7). Поэтому уравнения первого приближения содержат переменные коэффициенты, и проведение аналитического исследования устойчивости этого режима спуска тела оказывается затруднительным. Поэтому ограничимся результатами численных расчетов.

Эти расчеты показали, что рассматриваемый режим движения с заданным желаемым углом наклона и выбранным управляющим моментом в виде (5.1) неустойчив. Более того, было обнаружено, что при управляющем моменте (5.1), выбранном специально для реализации угла наклона  $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_1$ , может существовать режим спуска с другим углом наклона (обозначим его через  $\bar{\vartheta}_2$ ), тоже неустойчивый. Необходимо разобраться с этой двойственностью.

Пусть выбраны значения  $\bar{\vartheta}_1$  (удобнее будет иметь дело с углом  $\bar{\delta}_1 = \varphi - \bar{\vartheta}_1$ ) и управляющего момента  $M_k(\bar{\delta}_1)$  (5.1), а искать будем другое тоже постоянное значение  $\bar{\delta}_2$ , при котором второе уравнение системы (2.9) принимает вид

$$l(mg \cos \varphi - L)(\cos \delta + \mu \sin \delta) - r(D \sin \alpha + L \cos \alpha) + M_k(\bar{\delta}_1) = 0 \quad (5.2)$$

и так же выполняются равенства  $\theta(t) \equiv \varphi, \psi(t) \equiv \varphi$ . Поскольку  $\alpha = \delta - \gamma$ , то равенство (5.2) можно трактовать как уравнение относительно  $\delta$ . Это уравнение можно представить в симметричном виде

$$\begin{aligned} & l(mg \cos \varphi - L)(\cos \delta + \mu \sin \delta) - r(D \sin \alpha + L \cos \alpha) = \\ & = l(mg \cos \varphi - \bar{L})(\cos \bar{\delta}_1 + \mu \sin \bar{\delta}_1) - r(\bar{D} \sin \bar{\alpha} + \bar{L} \cos \bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для каждого значения скорости правая часть этого уравнения – это некоторое заданное число, левая часть – функция неизвестной переменной  $\delta$ . Одно решение очевидно: оно отвечает исходному режиму  $\bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_1$ . Но в зависимости от параметров и аэродинамических характеристик левая часть уравнения (5.3) может быть равна правой и при других значениях  $\delta \neq \bar{\delta}_1$ . При этом, как и полагается в рассматриваемом случае,  $M_k(\bar{\delta}_1) = M_k(\bar{\delta}_2)$ . Отметим, что режим спуска с постоянным углом наклона может быть реализован только при  $-\pi + \varphi < \bar{\vartheta} < \varphi$  (иначе тело “провалится” под поверхность).

Ввиду сложной зависимости левой части от  $\delta$  ограничимся парой числовых примеров, полученных графическим решением уравнения (5.3). Рассмотрим то же тело с ан-

тропоморфными параметрами, которое рассматривалось выше. Угол наклона прямой спуска  $\varphi = 30^\circ = \pi/6$ . Пусть “лыжник” сохраняет неизменной стойку, в которой корпус наклонен к склону, так что  $\vartheta(t) = \bar{\vartheta}_1 = -0.78 \approx -45^\circ$ , а установочный угол  $\gamma = 0.9$  ( $\approx 52^\circ$ ). Тогда  $\bar{\delta}_1 = \varphi - \bar{\vartheta}_1 = 1.303$  ( $\approx 75^\circ$ ), угол атаки  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\delta}_1 - \gamma = 0.403$  ( $\approx 23^\circ$ ). При этих значениях параметров уравнение (5.3) имеет еще ровно одно решение  $\bar{\delta}_2 = 1.239$  ( $\approx 71^\circ$ ), которому отвечают  $\bar{\vartheta}_2 = -0.716 \approx -41^\circ$  и  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\delta}_2 - \gamma = 0.339$  ( $\approx 19^\circ$ ). При этом величина управляющего момента для обоих установившихся режимов совпадает и равна 86.43 нм. Очевидно, оба значения  $\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2$  отрицательны, не превосходят угла  $\varphi$ , так что оба режима могут быть реализованы. Но, как и все режимы с неизменной стойкой и с управляющим моментом в виде компенсирующего (5.1), они оба неустойчивы.

В случае  $\gamma = 0.8$  ( $\approx 46^\circ$ ) при неизменных всех остальных параметров существует только одно решение уравнения (5.3)  $\bar{\delta}_1 = 1.303$ .

В ходе многократных численных экспериментов выяснилось, что для обеспечения надежной устойчивости режима спуска с желаемым углом  $\vartheta_{des}$  (designed) наклона корпуса только компенсирующего управляющего момента в виде (5.1) не достаточно. Поэтому в дальнейшем в качестве управляющего момента целесообразно использовать, наряду с компенсирующим  $M_k(\vartheta_{des})$ , еще и следящий момент в виде отрицательной обратной связи, так что управляющий момент примет вид

$$M = M_k(\vartheta_{des}) - k(\vartheta - \vartheta_{des}) - h\dot{\vartheta} \quad (5.4)$$

где  $k, h$  – некоторые константы.

Как показывают проведенные расчеты, использование управляющего момента в виде (5.4) может обеспечить устойчивость желаемого режима спуска.

*Вывод.* Чтобы обеспечить устойчивый спуск с желаемым (designed) углом наклона корпуса  $\vartheta_{des}$ , надо кроме компенсирующего момента (5.1) приложить дополнительный управляющий момент в виде отрицательной обратной связи, отслеживающий отклонение от желаемого режима спуска.

**6. Движение тела в случае отрыва от поверхности.** Рассмотрим теперь случай, когда в процессе спуска скорость достигает такого значения  $V_{N0}^2$  (3.8), при котором сила  $N$  реакции обращается в ноль (тело теряет контакт с поверхностью и может вообще от нее оторваться).

В этом случае справедливо неравенство, противоположное (3.10)

$$C_L(\bar{\alpha}) \sin \varphi - C_D(\bar{\alpha}) \cos \varphi > 0, \quad \text{или} \quad K(\bar{\alpha}) = C_L(\bar{\alpha})/C_D(\bar{\alpha}) > \operatorname{ctg} \varphi \quad (6.1)$$

При выполнении этого условия и достижения скорости значения  $V_{N0}$  сила реакции исчезает, и тело как бы взлетает, переходит в режим свободного полета. Уравнения движения тела в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= mg \sin \theta - D \\ mV\dot{\theta} &= mg \cos \theta - L \\ J\ddot{\vartheta} &= -r(D \sin \alpha + L \cos \alpha) \end{aligned} \quad (6.2)$$

При этом угол атаки, фигурирующий в определении аэродинамических сил, уже не постоянный и изменяется в соответствии с соотношением  $\alpha(t) = \psi(t) - \beta(t) = \psi(t) - (\vartheta(t) + \gamma)$ .

В начальный момент ( $t = 0$ ) отрыва от поверхности имеем

$$V(0) = V_{N0}, \quad \theta(0) = \varphi, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \vartheta(0) = \bar{\vartheta}, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0$$

Отметим, что  $\dot{V}(0) > 0$ , так как

$$mg \sin \varphi - 0.5C_D(\bar{\alpha})\rho S V_{N0}^2 = (C_L(\bar{\alpha}) \sin \varphi - C_D(\bar{\alpha}) \cos \varphi) mg / C_L(\bar{\alpha}) > 0$$

Таким образом, в течение некоторого времени после отрыва скорость продолжает возрастать. Этого можно было и ожидать, поскольку исчезновение силы реакции и вместе с ней силы трения должно было привести к некоторому росту скорости спуска.

Продифференцировав второе уравнение системы (6.2), получим, что в начальный момент угол наклона вектора скорости убывает, так как вторая производная  $\ddot{\theta}(0) < 0$  (а первая производная  $\dot{\theta}(0) = 0$ ). Действительно,

$$mg \sin \varphi \cdot \dot{\theta}(0) - 0.5\rho S C'_L(\bar{\alpha})\dot{\alpha}(0)V_{N0}^2 - \rho S C_L(\bar{\alpha})V_{N0}\dot{V}(0) = -\rho S C_L(\bar{\alpha})V_{N0}\dot{V}(0) < 0.$$

Это тоже ожидаемый результат: достаточно большой коэффициент подъемной силы обеспечивает поворот вектора скорости центра масс против часовой стрелки. Итак, по крайней мере, в течение некоторого времени после отрыва потеря контакта с поверхностью спуска продолжается, угол  $\theta(t) < \varphi$ .

Таким образом, в течение некоторого интервала времени после отрыва скорость центра масс тела продолжает возрастать, а угол наклона вектора скорости центра масс уменьшаться, в результате чего на этом интервале времени центр масс удаляется от поверхности. Остается разобратся с ориентацией этого тела. При  $r \neq 0$  на тело действует ничем не скомпенсированный момент аэродинамических сил. Из третьего уравнения системы (6.2) видно, что при  $r \neq 0$  и пока угол атаки положителен, угол  $\vartheta(t)$  наклона корпуса уменьшается, то есть происходит поворот тела против часовой стрелки. При этом не исключено, что своим “хвостом” – бывшей опорной точкой  $A$  тело снова коснется поверхности. Тем не менее, до тех пор, пока выполнено неравенство  $x \cos \varphi - y \sin \varphi > l \sin \delta$ , тело будет совершать свободный полет, точка  $A$  будет выше поверхности спуска. Следует иметь в виду, что если возобновляется контакт с поверхностью, то скорее всего, этот выход на поверхность будет сопровождаться ударом. Эта ситуация является предметом отдельного исследования и выходит за рамки настоящей работы.

Рассмотрим подробнее более простой случай, когда центр давления и центр масс тела совпадают, то есть  $r = 0$ . Тогда из третьего уравнения системы (6.2) с учетом начальных условий следует, что угол наклона после отрыва от поверхности не изменяется, так что  $\vartheta(t) \equiv \bar{\vartheta}$ ,  $\psi(t) \equiv \theta(t)$ . При этом угол атаки равен  $\alpha(t) = \theta(t) - (\bar{\vartheta} + \gamma) = \theta(t) - \bar{\beta}$ .

Первые два уравнения системы (6.2) в этом случае определяют единственный устойчивый стационарный режим движения  $(V_s, \theta_s, \alpha_s)$  – ( $s$  – state, стационарный режим) режим планирования [4], где

$$\text{ctg} \theta_s = \text{ctg}(\alpha_s + \bar{\beta}) = C_L(\alpha_s) / C_D(\alpha_s) = K(\alpha_s), \quad V_s^2 = 2mg / (\rho S \sqrt{C_D^2(\alpha_s) + C_L^2(\alpha_s)}) \quad (6.3)$$

Представим соотношения (6.1) и (6.3), связывающие углы  $\bar{\vartheta}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\alpha_s$ , в несколько ином виде:

$$1/K(\bar{\alpha}) = C_D(\bar{\alpha}) / C_L(\bar{\alpha}) < \text{tg} \varphi \quad (6.4)$$

$$1/K(\alpha_s) = C_D(\alpha_s) / C_L(\alpha_s) = \text{tg}(\alpha_s + \bar{\beta}) \quad (\bar{\beta} = \bar{\vartheta} + \gamma) \quad (6.5)$$

Первое из этих соотношений является условием отрыва от поверхности, а второе определяет угол атаки в режиме планирования. Для реализации режима планирования должно быть выполнено еще одно условие:

$$\text{tg}(\alpha_s + \bar{\beta}) = \text{tg} \theta_s < \text{tg} \varphi \quad (6.6)$$

Тут уместно вспомнить понятия высокого и низкого аэродинамического качества [4]. В обоих случаях, начиная с некоторого характерного значения  $\bar{\alpha}$  угла атаки справедливо приближенное равенство  $K(\alpha) \approx \text{ctg} \alpha$  при  $\alpha \in (\bar{\alpha}, \pi/2)$ . Известно также, что

функция  $K(\alpha)$  унимодальна, так что ее график имеет единственный максимум, а график функции  $1/K(\alpha) = C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$  имеет единственный минимум.

Имея в виду моделирование спуска лыжника, более вероятно считать, что лыжник обладает скорее низким аэродинамическим качеством, чем высоким, то есть  $K(\alpha) \leq \text{ctg}\alpha$  во всем диапазоне значений угла атаки. Итак, рассмотрим сначала случай низкого аэродинамического качества.

На рис. 6 представлены график функция  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$  жирной линией и ниже ее – график  $\text{tg}\alpha$  тонкой линией. Поскольку условие (6.4) отрыва считается выполненным, то заведомо существует диапазон  $(\alpha_1, \alpha_2)$  значений угла атаки, на котором эта функция принимает значения, меньшие, чем  $\text{tg}\alpha$ . На этом же рисунке указано также некоторое произвольное значение  $\bar{\alpha}$  из этого диапазона. Графическое решение уравнения (6.5) относительно  $\alpha_s$  представлено графиком функции  $\text{tg}(\alpha + \varphi - \bar{\alpha})$  (графика функции  $\text{tg}\alpha$ , сдвинутого влево на положительную величину  $\bar{\beta} = \varphi - \bar{\alpha}$  ( $\bar{\beta} = \bar{\vartheta} + \gamma > 0$ )). Пересечение графика этой функции с графиком функции  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$  определяет значение  $\alpha_s$  угла атаки в режиме планирования, где  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha) = \text{tg}(\alpha_s + \bar{\beta})$ . Для отрицательных значений  $\bar{\beta} = \varphi - \bar{\alpha}$  такого пересечения нет. Кроме того, из этого рисунка ясно, что пересечение графика этой функции с графиком функции  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$  возможно только внутри интервала  $(\alpha_1, \bar{\alpha})$ . Это означает, что угол  $\theta_s$  планирования удовлетворяет условию  $\theta_s = \alpha_s + \bar{\beta} = \alpha_s + \varphi - \bar{\alpha} = \varphi - (\bar{\alpha} - \alpha_s) < \varphi$ , то есть выполнено неравенство (6.6), режим планирования реализуется, и тело, раз оторвавшись от поверхности, на нее уже не возвращается, а выходит на режим планирования, более пологий, чем наклон поверхности.

Рассмотрим для общности и случай тела с высоким аэродинамическим качеством. Для такого тела характерно наличие диапазона значений углов атаки, в котором  $K(\alpha) > \text{ctg}\alpha$ . На рис. 7, как и на предыдущем рисунке, схематически представлены графики функции  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$  и  $\text{tg}\alpha$ , и на оси абсцисс отмечен квадратными скобками указан диапазон, где  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha) < \text{tg}\alpha$ . Отметим, что все представленные кривые для наглядности изображены без соблюдения масштаба, но с сохранением топологической картины в целом.

Так же выделен интервал  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , на котором  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha) < \text{tg}\alpha$ , для некоторого положительного значения величины  $\bar{\beta} = \varphi - \bar{\alpha}$ , отмечено значение  $\bar{\alpha}_1 \in (\alpha_1, \varphi)$ , построена кривая  $\text{tg}(\alpha + \varphi - \bar{\alpha}_1)$  и отмечено значение  $\alpha_{s1}$  точки пересечения этой кривой с графиком функции  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$ . Это значение отвечает углу атаки в режиме планирования. Поскольку  $\alpha_{s1} < \bar{\alpha}_1$ , то угол  $\theta_s = \alpha_{s1} + \varphi - \bar{\alpha}_1 < \varphi$ , так что режим планирования реализуется. Пока что все обстоит так же, как было в случае низкого аэродинамического качества. Но в отличие от него, существует диапазон отрицательных значений величины  $\bar{\beta} = \varphi - \bar{\alpha}$  ( $\bar{\vartheta} + \gamma < 0$ ), для которых также возможен режим планирования. На том же рис. 7 отмечено значение  $\bar{\alpha}_2 \in (\varphi, \alpha_2)$ , построена кривая  $\text{tg}(\alpha + \varphi - \bar{\alpha}_2)$  и отмечено значение  $\alpha_{s2}$  точки пересечения этой кривой с графиком функции  $C_D(\alpha)/C_L(\alpha)$ . И в этом случае  $\alpha_{s2} < \bar{\alpha}_2$ , угол  $\theta_s = \alpha_{s2} + \varphi - \bar{\alpha}_2 < \varphi$ , так что условие реализации режима планирования выполняется.

Таким образом, независимо от того, обладает ли “лыжник” высоким или низким аэродинамическим качеством, в случае отрыва его от поверхности спуска он уже не возвращается (в рамках принятой модели) на поверхность.

В качестве числового примера рассмотрим то же тело с антропоморфными параметрами, которое рассматривалось выше. Принятая зависимость аэродинамических коэффициентов означает, что лыжник обладает низким аэродинамическим каче-

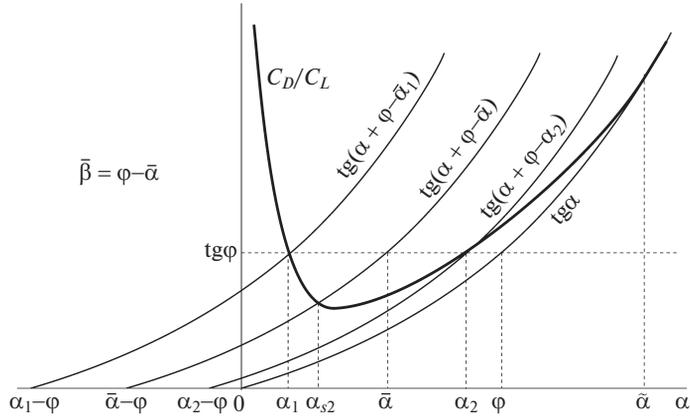


Рис. 6. Определение угла планирования после отрыва от поверхности для тела с низким аэродинамическим качеством.

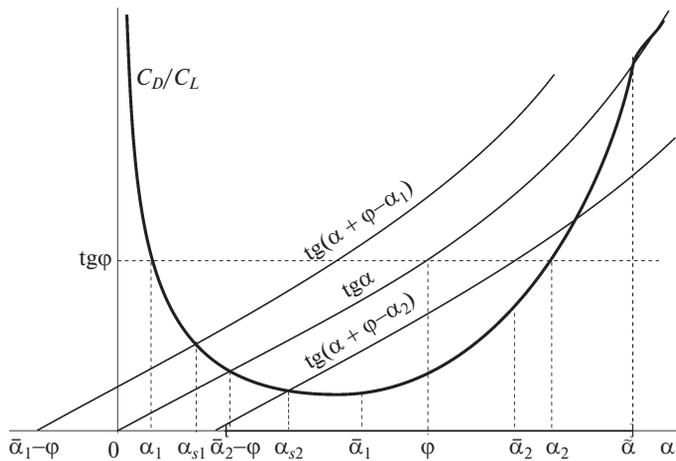


Рис. 7. Определение угла планирования после отрыва от поверхности для тела с высоким аэродинамическим качеством.

ством. Соответствующее характерное значение угла атаки равно  $\tilde{\alpha} \approx 0.6$ . Пусть “лыжник” сохраняет неизменной стойку, в которой корпус перпендикулярен склону, так что  $\vartheta(t) = \bar{\vartheta} = -60^\circ = -\pi/3$ , а установочный угол  $\gamma = 70^\circ$ ,  $\bar{\beta} = 10^\circ (\approx 0.1745)$ . Тогда угол атаки  $\bar{\alpha} = 20^\circ \approx 0.349$  и  $C_D(\bar{\alpha}) = 0.489$ ,  $C_L(\bar{\alpha}) = 0.964$ . Для реализации этого режима с неизменяемой стойкой необходимый управляющий момент примем в виде:

$$M = M(x) = M_k(x) - mgl(k(\vartheta(x) + \pi/3) + hl\dot{\vartheta}(x)/V(x))$$

Нетрудно проверить, что при таком моменте и начальном условии  $\vartheta(0) = -\pi/3$  решение уравнений (2.9) описывается формулой (3.5) для изменения скорости и  $\vartheta(t) \equiv \bar{\vartheta} = -\pi/3$ , то есть неизменность стойки обеспечивается. При этом угол  $\theta$  накло-

на вектора скорости центра масс совпадает с углом  $\varphi$  наклона поверхности:  $\theta(t) \equiv \bar{\theta} = \varphi$ . Более того, при разумных отклонениях начального значения угла  $\vartheta(0)$  наклона корпуса от значения  $\vartheta(0) = -\pi/3$  желаемый режим спуска с неизменяемой стойкой восстанавливается.

Отметим, что предельное значение (3.9) скорости равно  $V_\infty = 53.3$  (м/с). Однако, в соответствии с (3.8) при скорости  $V_{N0} = 49.7$  (м/с), меньшей этого предельного значения, происходит отрыв тела и начинается этап свободного полета в соответствии с уравнениями (6.2). Расчеты по формулам (6.3) показывают, что устанавливается режим планирования со скоростью  $V_s = 55.1$  (м/с) и углом наклона вектора скорости, равным  $\theta_s \approx 0.46$ , меньшим угла  $\bar{\theta} = \varphi = 0.523$ , так что раз оторвавшись от поверхности, “лыжник” обратно на поверхность уже не возвращается.

В результате численных расчетов при  $\vartheta(0) \neq \bar{\vartheta} = -\pi/3$  получены перечисленные зависимости, которые схематически представлены на рис. 8, для наглядности в несколько искаженном масштабе. На рисунке вертикальным пунктиром отмечен также момент, когда сила реакции обращается в нуль, происходит отрыв от поверхности и выход на устойчивый режим планирования. Жирным пунктиром отмечена нереализуемая часть зависимости (3.9).

Для полноты картины рассмотрим того же лыжника на том же склоне, но обладающего высоким аэродинамическим качеством. Соответствующие зависимости аэродинамических коэффициентов имеют вид  $C_D(\alpha) = 0.69 - 0.58 \cos 2\alpha$ ,  $C_L(\alpha) = 1.5 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha$ , а характерное значение угла атаки равно  $\tilde{\alpha} \approx 0.96$ .

Пусть установочный угол будет тот же  $\gamma = 70^\circ$ , тогда  $\bar{\beta} = 10^\circ$ ,  $\bar{\alpha} = 20^\circ$  и  $C_D(\bar{\alpha}) = 0.246$ ,  $C_L(\bar{\alpha}) = 1.945$ . Предельное значение (3.9) скорости равно  $V_\infty = 91.9$  (м/с). Однако, при скорости  $V_{N0} = 34.9$  (м/с) уже происходит отрыв тела и начинается этап свободного полета в соответствии с уравнениями (6.2). В соответствии с формулами (6.3) получаем, что устанавливается режим планирования со скоростью  $V_s = 37.4$  (м/с) и углом наклона вектора скорости, равным  $\theta_s \approx 0.126$ , меньшим угла  $\bar{\theta} = \varphi = 0.523$ , так что и в этом случае, раз оторвавшись от поверхности, “лыжник” обратно на поверхность уже не возвращается.

Видно, что угол планирования для тел с высоким аэродинамическим качеством, как и следовало ожидать, меньше, чем для тел с низким аэродинамическим качеством. Напомним, что эти выводы получены для случая, когда центр давления совпадает с центром масс тела.

Таким образом, приведенные численные результаты подтверждают ранее полученные качественные выводы.

**7. Заключение.** В настоящей работе рассматривается первый этап спортивных соревнований по прыжкам с трамплина, а именно: разгон лыжника на прямолинейном участке спуска. В процессе этого разгона лыжник принимает определенную позу и старается поддерживать ее при нарастании скорости за счет вырабатываемых моментов в суставах. Анализ движения лыжника именно по наклонной прямой представляет определенный интерес как с практической спортивной точки зрения, так и в качестве самостоятельной теоретико-механической задачи.

Ранее в научной литературе рассматривалась математическая модель такого лыжника в виде материальной точки, движение которой происходит под действием силы реакции со стороны поверхности и аэродинамического воздействия в виде только силы лобового сопротивления, без учета боковой (подъемной) силы.

В настоящей работе предлагается новая математическая модель лыжника в виде связи двух твердых тел. Одно из них, тяжелое, скользит своей фиксированной точкой (опорной точкой) по поверхности склона и имеет возможность совершать поворот от-

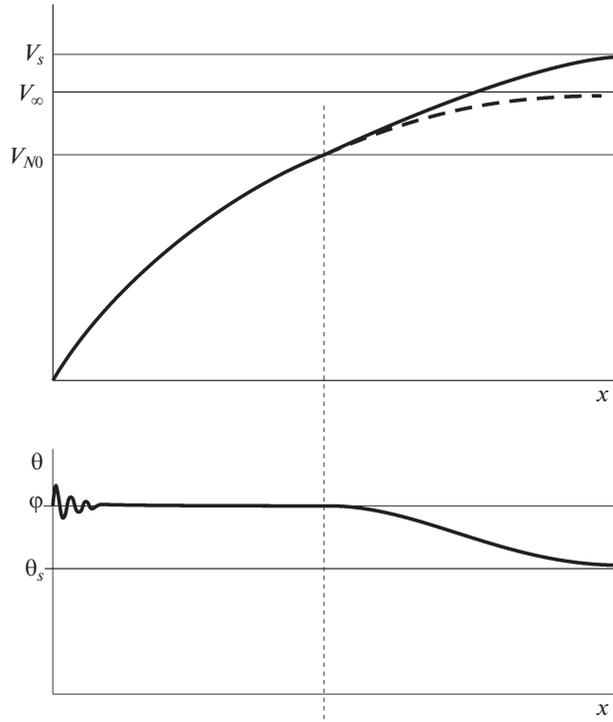


Рис. 8. Изменение величины скорости и угла ее ориентации при переходе на режим планирования.

носителю нее. Другое тело, типа крыла, установлено под некоторым углом к первому, так что в целом образуется своеобразный перевернутый маятник сложной формы. Эти два тела в совокупности имитируют стойку и конфигурацию лыжника, которая, вообще говоря, в процессе спуска может изменяться. Считается, что центр масс системы находится на фиксированном расстоянии от опорной точки. На втором теле (крыле) сосредоточено все аэродинамическое воздействие: сила лобового сопротивления и подъемная сила, для описания этих сил используется квазистатическая модель обтекания. При этом центр давления, вообще говоря, не совпадает с центром масс. Выбор желаемого режима движения происходит за счет управляющего момента, приложенного в точке контакта корпуса с поверхностью и за счет изменения ориентации (установочного угла) крыла.

Построена соответствующая система дифференциальных уравнений, из которой при заданных зависимостях управляющего момента и величины установочного угла полностью определяется режим движения в процессе спуска: не только переменная скорость спуска, как это было в предыдущих моделях с материальной точкой, но и изменяющийся угол ориентации корпуса.

Основное внимание уделено рассмотрению вопроса о движении тела при условии, что в процессе спуска “стойка лыжника” не изменяется. В этом случае происходит своеобразная “игра” сил трения и аэродинамических сил, в которых существенную роль играет именно подъемная сила. Найдены характерные значения скорости спуска, определяемые в значительной мере величиной подъемной силы. Показано, что существует фиксированное значение установочного угла крыла, при котором достигается максимальное значение скорости спуска в любой момент времени. Это экстремаль-

ное значение угла не зависит ни от геометрических размеров, ни от площади корпуса и крыла, ни от скорости спуска, ни от выбранного угла наклона корпуса, ни от времени — оно зависит только от соотношения аэродинамических коэффициентов силы лобового сопротивления и подъемной силы. Таким образом, в рамках предложенной математической модели движения лыжника для достижения максимально возможной скорости спуска необходимо соблюдать определенную постоянную стойку и форму корпуса. Реализация этого экстремального режима спуска ограничена только возможностью обеспечения требуемого управляющего момента.

Рассмотрен также вопрос о возможности отрыва “лыжника” от поверхности спуска и дальнейшего движения в режиме свободного полета. Установлено, что при достаточно большой величине подъемной силы сила реакции может обнулиться, происходит отрыв тела от поверхности, причем с продолжающимся ростом скорости. В случае совпадения центра давления с центром масс показано, что после такого отрыва от поверхности не происходит возвращения на поверхность, в дальнейшем тело совершает свободный полет с выходом на режим устойчивого планирования.

Таким образом, в рамках принятой модели установлено значительное влияние подъемной силы, носящей “антидиссипативный” характер.

Для иллюстрации полученных выводов приведены результаты численных расчетов применительно к телу с антропоморфными параметрами. Используемые при этом величины управляющего момента и сил реакции находятся в разумных “человеческих” пределах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подгаец А.Р., Рудаков Р.Н.* Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина // *Russ. J. Biomech.* 2000. V. 4. № 2. С. 1–11.
2. *Remizov L.P.* Optimal running on skis in downhill // *J. Biomech.* 1980. V. 13. № 11. P. 941–945.
3. *Maronski R.* On optimal running downhill on skis // *J. Biomech.* 1990. V. 23. № 5. P. 435–439.
4. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. 237 с.
5. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Особенности движения тела-вертушки // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 1. С. 64–71.
6. *Воронов А.В., Хуснутдинова Д.Р.* Теоретическая и экспериментальная оценка силы головок трехглавой мышцы голени при разгибании голеностопного сустава // *Вестн. спорт. науки.* 2011. № 4. С. 44–55.

---

---

## К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ НИКИТЫ ФЕДОРОВИЧА МОРОЗОВА

DOI: 10.31857/S0572329922040109

Исполнилось девяносто лет Никите Федоровичу Морозову — выдающемуся российскому ученому, обогатившему науку многими достижениями в области механики деформируемого твердого тела, замечательному педагогу, создавшему авторитетную в стране научную школу механиков.

Н.Ф. Морозов родился 28 июля 1932 года в Ленинграде. Детство Н.Ф. Морозова совпало с суровыми для страны временами. В годы Великой Отечественной войны он остается в блокадном Ленинграде. В 11 лет он получил первую правительственную награду: медаль “За оборону Ленинграда” — за активное участие в работе пожарных дружин.

В 1949 году Н.Ф. Морозов поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, где преподавали ученые, являющиеся гордостью советской науки (Ю.В. Линник, С.Г. Михлин, В.В. Новожилов, Д.К. Фаддеев и др.). После защиты диплома Н.Ф. Морозов продолжает обучение в аспирантуре Ленинградского университета, после успешного окончания которой и защиты кандидатской диссертации в 1958 году начинает работать старшим инженером Центрального научно-исследовательского института им. ак. А.Н. Крылова, а спустя год переходит на преподавательскую работу на кафедру математики Ленинградского технологического института целлюлозно-бумажной промышленности, где в течение 13 лет проходит путь от доцента до профессора, заведующего кафедрой.

В 1971 году Н.Ф. Морозова приглашают в Ленинградский государственный университет руководить лабораторией математической физики НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова. В 1976 году становится заведующим кафедрой теории упругости СПбГУ.

Под руководством Н.Ф. Морозова в Институте проблем машиноведения РАН создан и плодотворно работает над решением актуальных задач механики деформируемого твердого тела творческий коллектив. Н.Ф. Морозов организовал в Институте проблем машиноведения РАН постоянно действующий городской семинар, на котором обсуждаются актуальные проблемы механики и физики и со своими достижениями выступают ученые как из российских так и зарубежных ведущих научных центров.

Более 50 лет выдающийся ученый и талантливый педагог ведет преподавательскую работу в Санкт-Петербургском государственном университете. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная им научная школа механиков-прочников. Учениками Н.Ф. Морозова защищено 8 докторских и более 50 кандидатских диссертаций.

Н.Ф. Морозов — автор более 450 научных работ, в том числе 8 монографий и 3 учебных пособия. В 1995 году Н.Ф. Морозову присвоено звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”. В 2000 году за цикл работ по нелинейным проблемам механики деформируемого твердого тела Н.Ф. Морозову присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники. В 2006 г. за выдающийся вклад в динамическую теорию разрушения материалов Н.Ф. Морозову присуждена премия Правительства Санкт-Петербурга в области физико-математических наук имени А.Ф. Иоффе.

В 2017 году Н.Ф. Морозов награжден медалью Блеза Паскаля, учрежденной Европейской академией наук в 2003 году и присуждаемой в знак признания выдающегося личного вклада ученых в науку и технологии в развитие исследовательских навыков в образовании. В 2009 году Н.Ф. Морозов избран членом Европейской академии наук.

Общественно-научная деятельность Н.Ф. Морозова обширна и многогранна. Он является вице-председателем Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, председателем Научного Совета РАН по механике деформируемого твердого тела, членом Генеральной ассамблеи УИТАМ, членом редколлегий ведущих отечественных и зарубежных журналов по механике. При активном участии Н.Ф. Морозова создан научный журнал “Успехи механики”.

Активная научно-педагогическая деятельность Н.Ф. Морозова была отмечена правительственными наградами: “Орденом Почета” (1999), орденом “За заслуги перед Отечеством” IV степени (2003), “Орденом дружбы” (2010). В 2015 году Н.Ф. Морозов удостоен благодарности Президента Российской Федерации. В 1995 г. Н.Ф. Морозову присвоено звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”.

Н.Ф. Морозова отличает энергия, увлеченность наукой, гражданская ответственность, способность самозабвенно трудиться и организовывать других, доступность в общении и желание всегда прийти на помощь. Он встречает свой юбилей в расцвете творческих сил. Редколлегия журнала “Изв. РАН. МТТ” желает ему здоровья, дальнейших научных успехов и счастья в личной жизни.